Ф.Ф. Ардуванова

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ
В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

УФА 2019

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ардуванова Ф.Ф.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

**Практикум к лабораторным и практическим занятиям
по дисциплине
«Математические методы обработки и анализа
геопространственных данных на ЭВМ»**

**Рекомендовано
Научно-методическим советом ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ
в качестве учебного пособия для обучающихся
по направлениям бакалавриата
21.03.02 Землеустройство и кадастры
21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование**

**Уфа
Башкирский ГАУ
2019**

УДК51(07)

ББК 74.262.21я7

А 79

Рецензенты:
доцент кафедры высшей алгебры, к. ф.-м. н. Ибрагимова Л.С.
зав.кафедрой кадастра недвижимости и геодезии БГАУ, доцент, к.с.-х.н. Ишбулатов М.Г.
зав.кафедрой землеустройства, доцент, к.с.-х.н., Галеев Э.И.

Ардуванова Ф.Ф.

А 79 Метод наименьших квадратов в уравнительных вычислениях. Практикум к лабораторным и практическим занятиям по дисциплинам «Математические методы обработки и анализа геопространственных данных на ЭВМ» /Ф.Ф. Ардуванова. - Уфа: Башкирский ГАУ, 2019. - 50 с.

Учебное пособие содержит теоретическую и практическую части уравнительных вычислений геодезических измерений. По каждой из рассматриваемых тем прилагается теоретическое введение, задачи для практических занятий, задачи для самостоятельного решения, задания для лабораторных занятий. Практикум предназначен для использования на практических и лабораторных занятиях по дисциплинам: «Математические методы обработки и анализа геопространственных данных на ЭВМ» для направлений бакалавриата 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры.

УДК51(07)
ББК 74.262.21я7

ISBN ????

Оглавление

Предисловие

Практикум предназначен для использования на практических и лабораторных занятиях по дисциплине «Математические методы обработки и анализа геопространственных данных на ЭВМ» для студентов по направлениям бакалавриата 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» и составлен согласно действующей программе по названной дисциплине.

Основное содержание практикума относится к раскрытию изучаемых тем теории уравнительных измерений относительно, в данном случае, геодезических измерений. Необходимость подготовки данного практикума объясняется разрозненностью информации, относящейся к методике математической обработки результатов геодезических измерений, касающихся уравнительных вычислений, а также отсутствием современных учебных пособий и методических материалов по нововведенным дисциплинам.

По каждой из рассматриваемых тем прилагается теоретическое введение, задачи для практических занятий, задачи для самостоятельного решения, задания для лабораторных занятий. Задания с множественными данными позволяют формировать индивидуальные варианты для каждого студента в рамках выбранной формы контроля: расчетно-графические работы, домашние работы, контрольные работы, задания к зачету.

Основными компьютерными программами, используемыми в математической обработке данных, являются версии MathCad 14, 15 и MS Excel.

Метод наименьших квадратов

В теории ошибок рассматривают математическую обработку многократных измерений одной и той же величины. В геодезии возникают и более сложные задачи совместной обработки результатов измерений величин, функционально связанных между собой. В геодезических сетях число n выполненных измерений всегда больше числа необходимых измерений k, которые достаточно сделать, чтобы получить искомые величины (необходимые неизвестные), не связанные точными математическими зависимостями. Наличие избыточных измерений в количестве $r = n - k$ позволяет выполнить контроль измерений, которые содержат неизбежные ошибки, и сделать оценку их точности.

При этом результаты измерений не удовлетворяют, возникающим в сети геометрическим условиям, и возникает задача уравнивания, которая заключается в том, чтобы используя все измерения, получить однозначно все неизвестные.

Устранение многозначности решения задачи и удовлетворение геометрических условий в сетях достигается в процессе уравнивания по методу наименьших квадратов, согласно которому в измеренные величины вводят поправки V_i, удовлетворяющие условию $[VV] = min$ – для равноточных и $[pVV] = min$ - для неравноточных измерений. Соблюдение этих условий, как теоретически доказано К.Ф.Гауссом и А.А.Марковым, приводит к наилучшим оценкам определяемых величин.

Уравнивание выполняют двумя основными способами: параметрическим и коррелатным. В параметрическом способе непосредственно определяют уравненные значения неизвестных – параметров, а в коррелатном – сначала находят неизвестные коэффициенты - коррелаты, а по ним с помощью функций – уравненные неизвестные. Оба способа дают одни и те же результаты, поэтому выбор метода уравнивания определяется наименьшим объемом вычислений, необходимых для ее реализации.

Поэтому выбор метода уравнивания определяется не только наименьшим объемом вычислений, необходимых для ее реализации, но и степенью точности уравнивания сети.

Также выбор метода уравнивания зависит от конкретной задачи. Например, в полигонометрическом ходе, число параметров в два раза больше числа пунктов (каждый пункт имеет по две координаты - X и Y). Число всех измерений в полигонометрическом ходе (n) − число углов и сторон. При уравнивании хода параметрическим способом пришлось бы решать n уравнений, а при уравнивании коррелатным − r, что значительно меньше. Поэтому полигонометрия, как правило, уравнивается коррелатным способом.

Кроме двух рассмотренных способов уравнивания существуют и комбинированные способы, сочетающие достоинства обоих.

1 Параметрический способ уравнивания

Параметрический способ уравнивания геодезических сетей имеет широкое применение, так как одинаковая структура приведенных к линейному виду уравнений поправок дает возможность составлять программы расчетов уравнивания в различных компьютерных средах. Задача уравнивания решается под условием $[pVV] = min$.

Например, в параметрическом способе сначала вычисляют координаты всех определяемых пунктов. Затем, используя эти координаты, с высокой точностью решают по всем сторонам обратные геодезические задачи и определяют длины и дирекционные углы сторон. После этого составляют уравнения поправок для всех измеренных величин: горизонтальных направлений, измеренных расстояний, азимутов, придавая каждой измеренной величине вес $p = \frac{c}{m^2}$.

От уравнений поправок переходят к системе нормальных уравнений, число которых равно числу неизвестных. Из решения этой системы находят поправки в приближенные значения определяемых неизвестных, затем выполняют вычисления уравненных значений измерений и по ним искомые величины. Делают оценку точности уравненных величин.

Пусть для определения точных значений неизвестных параметров X_j, не имеющих между собой функциональных зависимостей, выполнены независимые измерения z_i'. Общее число неизвестных - *k*, общее число измерений – *n*, причем *n* > *k*, *i= 1,2, ..., n; j=1,2,...,k.*

Неизвестными могут быть координаты пунктов, высоты реперов и другие величины, значения которых необходимо определить.

Измеряемыми величинами в этом случае будут горизонтальные направления, горизонтальные или вертикальные углы, длины линий, превышения и т.д.

Пусть точными значениями измеренных *n* величин являются Z_i, связанные с X_j параметрическими уравнениями:

$$Z_i = F_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right). \qquad (1.1)$$

Так как значения Z_i независимы, то нельзя определить и точные значения X_j, но можно подобрать такие уравненные значения $x_j = x_j{}^0 + \Delta x_j$ и $z_i = z_i' + V_i$, где V_i– поправки к измеренным значениям z_i', $x_j{}^0$ − приближенные значения неизвестных, Δx_j – поправки к ним, при которых

$$z_i' + V_i = F_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right),$$

откуда имеем систему уравнений поправок

$$F_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) - z_i' = V_i \text{ или} \qquad (1.2)$$

$$F_i\left(x_1{}^0 + \Delta x_1, x_2{}^0 + \Delta x_2, \ldots, x_k{}^0 + \Delta x_k\right) - z_i' = V_i$$

Нелинейные уравнения приводят к линейному виду, для чего функцию разлагают в ряд Тейлора с сохранением членов, содержащих первые степени Δx_j, в результате получаем

$$\begin{cases} F_1\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_k{}^0\right) + \dfrac{\partial F_1}{\partial X_1} \cdot \Delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial X_k} \cdot \Delta x_k - z_1' = V_1 \\ F_2\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_k{}^0\right) + \dfrac{\partial F_2}{\partial X_1} \cdot \Delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial X_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial X_k} \cdot \Delta x_k - z_2' = V_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_k{}^0\right) + \dfrac{\partial F_n}{\partial X_1} \cdot \Delta x_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial X_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial X_k} \cdot \Delta x_k - z_n' = V_n \end{cases}.$$

Обозначив

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial X_1};\ b_i = \frac{\partial F_i}{\partial X_2};\ \ldots;\ g_i = \frac{\partial F_i}{\partial X_k}, \qquad (1.3)$$
$$L_i = F_i\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_k{}^0\right) - z_i',$$

получим систему линейных уравнений поправок

$$\begin{cases} a_1 \cdot \Delta x_1 + b_1 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_1 \cdot \Delta x_k + L_1 = V_1 \\ a_2 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_2 \cdot \Delta x_k + L_2 = V_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n \cdot \Delta x_1 + b_n \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_n \cdot \Delta x_k + L_n = V_n \end{cases} \qquad (1.4)$$

Система линейных уравнений поправок имеет n уравнений с $n + k$ неизвестными, т.е. является неопределенной. Из множеств решений этой системы наилучшим будет то, для которого выполняется принцип метода наименьших квадратов $\left[pV^2\right] = min$, где p_i - веса измеренных величин. Подставляя вместо V_i его значения из системы линейных уравнений поправок, получим

$$\Phi = \left[pV^2\right] = p_1\left(a_1 \cdot \Delta x_1 + b_1 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_1 \cdot \Delta x_k + L_1\right)^2 +$$
$$+ p_2\left(a_2 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_2 \cdot \Delta x_k + L_2\right)^2 + \ldots +$$
$$+ p_n\left(a_n \cdot \Delta x_1 + b_n \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_n \cdot \Delta x_k + L_n\right)^2 = min$$

Для нахождения минимума функции Φ возьмем ее частные производные и приравняем их к нулю. Получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2p_1 \cdot \left(a_1 \cdot \Delta x_1 + b_1 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_1 \cdot \Delta x_k + L_1\right) \cdot a_1 +$$
$$+ 2p_2 \cdot \left(a_2 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_2 \cdot \Delta x_k + L_2\right) \cdot a_2 + \ldots +$$
$$+ 2p_n \cdot \left(a_n \cdot \Delta x_1 + b_n \cdot \Delta x_2 + \ldots + g_n \cdot \Delta x_k + L_n\right) \cdot a_n = 0$$

откуда приведя подобные члены и разделив их на два, имеем

$$\left(p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \ldots + p_n a_n a_n\right) \cdot \Delta x_1 +$$
$$+ \left(p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n\right) \cdot \Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \left(p_1 a_1 g_1 + p_2 a_2 g_2 + \ldots + p_n a_n g_n\right) \cdot \Delta x_k +$$
$$+ \left(p_1 a_1 L_1 + p_2 a_2 L_2 + \ldots + p_n a_n L_n\right) = 0$$

Аналогично, взяв частные производные функции Ф по $x_2, \ldots, x_k$ получаем другие уравнения. В итоге получим

$$\begin{cases} [paa] \cdot \Delta x_1 + [pab] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [pag] \cdot \Delta x_k + [paL] = 0 \\ [pab] \cdot \Delta x_1 + [pbb] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [pbg] \cdot \Delta x_k + [pbL] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ [pag] \cdot \Delta x_1 + [pbg] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [pgg] \cdot \Delta x_k + [pgL] = 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Для равноточных измерений $p_i = 1$ и вместо полученной ранее системы имеем

$$\begin{cases} [aa] \cdot \Delta x_1 + [ab] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [ag] \cdot \Delta x_k + [aL] = 0 \\ [ab] \cdot \Delta x_1 + [bb] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [bg] \cdot \Delta x_k + [bL] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ [ag] \cdot \Delta x_1 + [bg] \cdot \Delta x_2 + \ldots + [gg] \cdot \Delta x_k + [gL] = 0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Системы (1.5) или (1.6) состоит из k уравнений с k неизвестными и называются системой нормальных уравнений. Её особенности:

- на главной диагонали матрицы коэффициентов стоят только положительные, они называются квадратичными;
- коэффициенты расположенные симметрично относительно главной диагонали равны.

Решая систему нормальных уравнений (1.5) или (1.6), определяют поправки Δx_j к x_j.

Подставив найденные значения параметров в систему (1.4), можно вычислить поправки измеренных функций, а затем и уравненные значения измеренных функций.

Матричная форма параметрического способа уравнивания

Пусть

$X_1, X_2, \dots, X_k$ – неизвестные параметры,

$x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, \dots, x_k^{\,0}$ - приближенные значения неизвестных параметров,

$F_i(X_1, X_2, \dots, X_k) = Z_i$, где Z_i – истинные значения измеренных величин.

$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_k \end{pmatrix}$ - матрица искомых поправок к приближенным значениям параметров,

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & g_n \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов, представляющие собой частные производные от функций $F_i(X_1, X_2, \dots, X_k)$ по параметрам X_j, $j = 1, \dots, k$, где $a_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_1}$; $b_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_2}$; …; $g_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_k}$, $(i = 1, \dots, n)$;

$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов уравнений поправок, которые определяются из (1.3),

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$ - матрица поправок к результатам измерений,

$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ - матрица весов.

Тогда систему линейных уравнений поправок (1.4) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$V = A \cdot \Delta x + L \qquad (1.7)$$

Умножим обе части матричного уравнения (1.7) слева на $A^T \cdot P$, где:

$A^T \cdot P \cdot V = A^T \cdot P \cdot (A \cdot \Delta x + L)$,

$A^T \cdot P \cdot V = A^T \cdot P \cdot A \cdot \Delta x + A^T \cdot P \cdot L$

Используя лемму Гаусса, которая выражает метод наименьших квадратов в матричной форме, а именно, $A^T \cdot P \cdot V = 0$, получим:

$$A^T \cdot P \cdot A \cdot \Delta x = -A^T \cdot P \cdot L.$$

Обозначим $R = A^T \cdot P \cdot A$,

тогда матрица *R* для неравноточных измерений выглядит следующим образом

$$R = \begin{pmatrix} [paa] & [pab] & \dots & [pag] \\ [pab] & [pbb] & \dots & [pbg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pag] & [pbg] & . & [pgg] \end{pmatrix}.$$

Матрица *R* для равноточных измерений выглядит следующим образом

$$R = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [ag] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [ag] & [bg] & . & [gg] \end{pmatrix}.$$

тогда $R \cdot \Delta x = -A^T \cdot P \cdot L$,

$R^{-1} \cdot R \cdot \Delta x = -R^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot L$ или

$\Delta x = -R^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot L$ - решение системы нормальных уравнений для поправок.

Итак, уравнивание параметрическим способом проводится в следующей последовательности:

1. Выбираются неизвестные параметры, определяются число независимых измерений *n* и определяем число избыточных измерений *r* = *n* - *k*.

2. Составим параметрические уравнения связи (1.1).

3. Используя только необходимые измерения, определяем тем или иным способом приближенные значения неизвестных $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$.

4. Находим коэффициенты системы уравнений поправок $a_i, b_i, \dots, g_i$ и свободные члены уравнений поправок L_i по формуле (1.3). Составим систему уравнений поправок в общем виде (1.2), приведем их к линейному виду (1.4).

5. Составим функцию $\Phi = [pV^2]$, найдем ее частные производные по параметрам, приравняем к нулю, получим систему нормальных уравнений (1.5) или (1.6).

6. Решим систему нормальных уравнений (1.5) или (1.6), найдем поправки $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k$.

7. Вычислим поправки $V_1, V_2, \ldots, V_n$, уравненные значения измеренных значений $z_i = z_i' + V_i$.

8. Оцениваем точность полученных в результате уравнивания неизвестных величин.

Лабораторная работа 1. Уравнивание параметрическим методом. Задача о трех углах треугольника.

Измерены три угла треугольника, получены значения x_1, x_2, x_3. Требуется уравнять измеренные значения углов, из условия, что сумма углов треугольника равна 180°.

Решение.

1. Выберем в качестве параметров значения углов 1 и 2. Здесь число всех измерений $n = 3$, число необходимых измерений $k = 2$, число избыточных измерений $r = n - k = 3 - 2 = 1$.

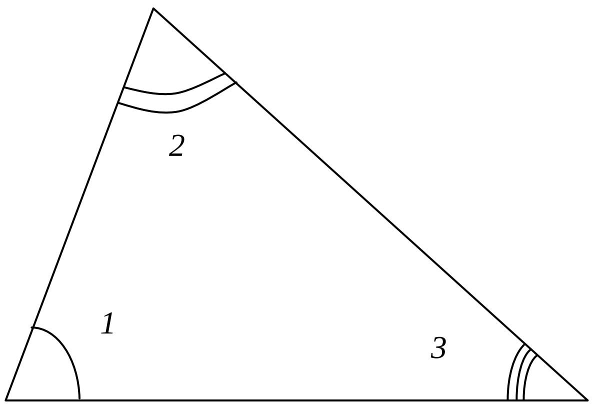


Рис. 1

2. Составим параметрические уравнения связи, их число должно быть равно числу всех измерений: $n = 3$.

$$\begin{cases} F_1(X_1, X_2) = X_1 \\ F_2(X_1, X_2) = X_2 \\ F_3(X_1, X_2) = 180^\circ - X_1 - X_2 \end{cases}.$$

3. За приближенные значения неизвестных параметров примем величины $X_1{}^0 = x_1$, $X_2{}^0 = x_2$.

4. Составим систему уравнений поправок (1.4)

$$\begin{cases} a_1 \cdot \Delta x_1 + b_1 \cdot \Delta x_2 + L_1 = V_1 \\ a_2 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta x_2 + L_2 = V_2 \\ a_3 \cdot \Delta x_1 + b_3 \cdot \Delta x_2 + L_3 = V_3 \end{cases},$$

где $a_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_1}$, $b_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_2}$,

$L_i = F_i\left(X_1{}^0, X_2{}^0\right) - z_i'$, где z_i' - значения измеренных трех углов треугольника.

В данном случае

$$a=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}L_1 = {X_1}^0 - {X_1}^0 = 0\\ L_2 = {X_2}^0 - {X_2}^0 = 0\\ L_3 = 180^\circ - {X_1}^0 - {X_2}^0 - z_3' = W\end{cases}.$$

Получим систему поправок

$$\begin{cases}1\cdot\Delta x_1 + 0\cdot\Delta x_2 + 0 = V_1\\ 0\cdot\Delta x_1 + 1\cdot\Delta x_2 + 0 = V_2\\ -1\cdot\Delta x_1 - 1\cdot\Delta x_2 + W = V_3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\Delta x_1 = V_1\\ \Delta x_2 = V_2\\ -\Delta x_1 - \Delta x_2 + W = V_3\end{cases}.$$

5. Составим функцию $\Phi = \left[pV^2\right]$. Так как $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, то $\Phi = \left[V^2\right] = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 + \left(-\Delta x_1 - \Delta x_2 + W\right)^2 \to min$.

Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = 2\cdot\Delta x_1 + (-2)\cdot\left(-\Delta x_1 - \Delta x_2 + W\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_2} = 2\cdot\Delta x_2 + (-2)\cdot\left(-\Delta x_1 - \Delta x_2 + W\right) = 0.$$

Разделив на два обе части равенств, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными и решим ее.

$$\begin{cases}2\Delta x_1 + \Delta x_2 = W\\ \Delta x_1 + 2\Delta x_2 = W\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta x_1 = \dfrac{W}{3}\\ \Delta x_2 = \dfrac{W}{3}\end{cases}.$$

6. Найдем поправки

$$\begin{cases}V_1 = \dfrac{W}{3}\\ V_2 = \dfrac{W}{3}\\ V_3 = \dfrac{W}{3}\end{cases}.$$

Уравненные значения углов будут следующими:

$$\begin{cases}z_1 = z_1' + \dfrac{W}{3}\\ z_2 = z_2' + \dfrac{W}{3}\\ z_3 = z_3' + \dfrac{W}{3}\end{cases},$$

Для проверки: сумма $z_1 + z_2 + z_3$ должна быть равна 180°.

8. Средняя квадратическая ошибка

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{3}\right)^2 + \left(\frac{W}{3}\right)^2 + \left(\frac{W}{3}\right)^2}{2}} = \frac{W}{\sqrt{6}}.$$

Реализация решения задачи о трех углах треугольника в MATHCAD

$ORIGIN := 1 \qquad n := 3 \qquad i := 1..n$

$$x := \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$$ - измеренные величины углы треугольника

$X10 := x_1 \qquad X20 := x_2$ - приближенные значения параметров

$F1(X1, X2) := X1$

$F2(X1, X2) := X2$ - уравнения связи

$F3(X1, X2) := X1 + X2$

$$F(X1, X2) := \begin{pmatrix} F1(X1, X2) \\ F2(X1, X2) \\ F3(X1, X2) \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{d}{dX1}(F(X1, X2)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b := \frac{d}{dX2}F(X1, X2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L := F(X10, X20) - x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A := augment(a, b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta X := -\left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot L$ $\quad \Delta X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - поправки к параметрам

$V := A \cdot \Delta X + L$ $\quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - поправки к измеренным величинам

$X1 := X10 + \Delta X_1 \quad X2 := X20 + \Delta X_2$

$X1 = 30 \quad X2 = 60$

- уравненные значения парметров

Контроли:

а) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot V_i\right) = 0.000 \quad \sum_{i=1}^{n} \left(b_i \cdot V_i\right) = 0.000$

б) $F(X1, X2) = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix} \quad x + V = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$

эти величины должны быть равны!

$$m := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(V_i\right)^2}{n-1}} = 0$$

Задания для самостоятельной работы

1.1 Даны измеренные значения трех углов треугольника. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что сумма углов треугольника равна 180°:

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 1.1

№ варианта	x_1	x_2	x_3	№ варианта	x_1	x_2	x_3
1	44	53	80	16	35	57	85
2	50	49	90	17	35	40	114
3	50	43	93	18	31	53	105
4	32	48	91	19	49	41	87
5	44	52	90	20	40	46	91
6	34	43	94	21	42	50	94
7	49	51	77	22	48	42	81
8	33	45	111	23	30	59	82
9	36	53	97	24	31	46	109
10	37	51	98	25	32	55	84
11	39	53	82	26	31	55	100
12	30	47	106	27	47	59	68
13	45	49	77	28	36	53	82
14	45	42	84	29	37	48	86
15	41	43	102	30	37	46	94

1.2 Даны измеренные значения четырех углов четырехугольника. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что сумма углов четырехугольника равна 360°:

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 1.2

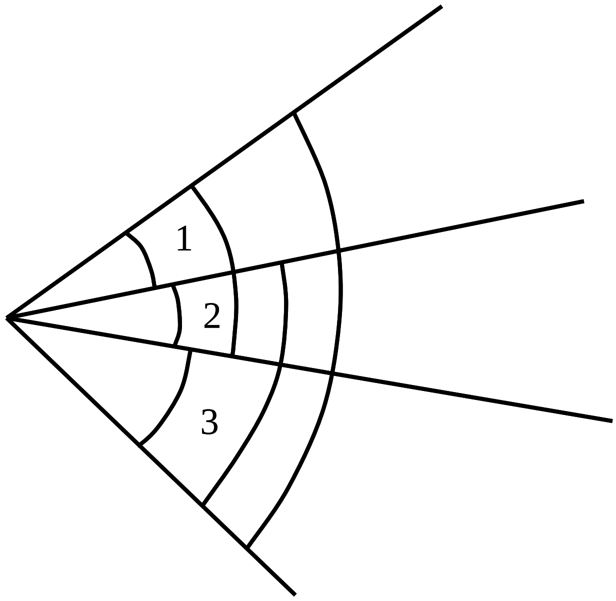
№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	85	94	79	112	16	81	86	62	128
2	86	85	71	118	17	85	100	68	108
3	82	86	67	119	18	86	85	78	107
4	83	89	60	138	19	89	96	71	112
5	81	94	62	122	20	81	92	61	129
6	81	81	73	121	21	83	93	78	112
7	86	80	79	107	22	89	91	65	118
8	82	86	69	113	23	81	96	72	120
9	86	91	80	110	24	81	91	74	106
10	84	89	65	132	25	89	97	63	107
11	89	81	80	119	26	86	95	77	110
12	90	88	61	130	27	80	93	69	109
13	87	95	68	109	28	83	83	69	116
14	80	87	77	118	29	87	99	65	104
15	83	84	75	115	30	81	95	70	112

Лабораторная работа 2 Уравнивание параметрическим методом

Задача о шести углах

Измерены равноточно шесть углов, получены значения $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 32^\circ$, $x_3 = 34^\circ$, $x_4 = 64^\circ, x_5 = 64^\circ, x_6 = 98^\circ$. Требуется уравнять измеренные значения углов.

Решение. 1). Выберем в качестве параметров X_1, X_2, X_3 - соответственно значения углов 1, 2 и 3. Здесь число всех измерений $n = 6$, число необходимых измерений $k = 3$, число избыточных измерений $r = n - k = 6 - 3 = 3$.



2). Составим параметрические уравнения связи, их число должно быть равно числу всех измерений - $n = 6$.

$$\begin{cases} F_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 \\ F_2(X_1, X_2, X_3) = X_2 \\ F_3(X_1, X_2, X_3) = X_3 \\ F_4(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 \\ F_5(X_1, X_2, X_3) = X_2 + X_3 \\ F_6(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3 \end{cases}$$

3) За приближенные значения неизвестных параметров примем величины $X_1^{\ 0} = 30^\circ, X_2^{\ 0} = 32^\circ, X_3^{\ 0} = 34^\circ$.

4) Составим систему уравнений поправок (4)

$$\begin{cases} a_1 \cdot \Delta x_1 + b_1 \cdot \Delta x_2 + c_1 \cdot \Delta x_3 + L_1 = V_1 \\ a_2 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta x_2 + c_2 \cdot \Delta x_3 + L_2 = V_2 \\ a_3 \cdot \Delta x_1 + b_3 \cdot \Delta x_2 + c_3 \cdot \Delta x_3 + L_3 = V_3 \\ a_4 \cdot \Delta x_1 + b_4 \cdot \Delta x_2 + c_4 \cdot \Delta x_3 + L_4 = V_4 \\ a_5 \cdot \Delta x_1 + b_5 \cdot \Delta x_2 + c_5 \cdot \Delta x_3 + L_5 = V_5 \\ a_6 \cdot \Delta x_1 + b_6 \cdot \Delta x_2 + c_6 \cdot \Delta x_3 + L_6 = V_6 \end{cases}$$, где $a_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_1}$, $b_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_2}$, $i = 1, 2, 3$.

В данном случае

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$L_i = F_i\left(X_1{}^0, X_2{}^0, X_3{}^0\right) - z_i'$, где z_i' - значения измеренных шести углов

$$\begin{cases} L_1 = X_1{}^0 - X_1{}^0 = 0 \\ L_2 = X_2{}^0 - X_2{}^0 = 0 \\ L_3 = X_3{}^0 - X_3{}^0 = 0 \\ L_4 = 30 + 32 - 64 = -2 \\ L_5 = 32 + 34 - 64 = 2 \\ L_6 = 30 + 32 + 34 - 98 = -2 \end{cases}.$$

Получим систему уравнений поправок

$$\begin{cases} 1 \cdot \Delta x_1 + 0 \cdot \Delta x_2 + 0 \cdot \Delta x_3 + 0 = V_1 \\ 0 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 0_2 \cdot \Delta x_3 + 0 = V_2 \\ 0 \cdot \Delta x_1 + 0 \cdot \Delta x_2 + 1 \cdot \Delta x_3 + 0 = V_3 \\ 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 0 \cdot \Delta x_3 - 2 = V_4 \\ 0 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 1 \cdot \Delta x_3 + 2 = V_5 \\ 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 1 \cdot \Delta x_3 - 2 = V_6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} V_1 = \Delta x_1 \\ V_2 = \Delta x_2 \\ V_3 = \Delta x_3 \\ V_4 = \Delta x_1 + \Delta x_2 - 2 \\ V_5 = \Delta x_2 + \Delta x_3 + 2 \\ V_6 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - 2 \end{cases}.$$

5.Составим функцию $\Phi = \left[pV^2\right]$. Так как $p_i = 1$, то $\Phi = \left[V^2\right] = V_1{}^2 + V_2{}^2 + V_3{}^2 + V_4{}^2 + V_5{}^2 + V_6{}^2 \to min$.

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x_1} = 2 \cdot \Delta x_1 + 2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 - 2\right) + 2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - 2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x_2} = 2 \cdot \Delta x_2 + 2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 - 2\right) + 2 \cdot \left(\Delta x_2 + \Delta x_3 + 2\right) + 2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - 2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x_3} = 2 \cdot \Delta x_3 + 2 \cdot \left(\Delta x_2 + \Delta x_3 + 2\right) + 2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - 2\right) = 0.$$

Разделив на два обе части равенств, получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3 \cdot \Delta x_1 + 2 \cdot \Delta x_2 + \Delta x_3 = 4 \\ 2 \cdot \Delta x_1 + 4 \cdot \Delta x_2 + 2 \cdot \Delta x_3 = 2 \\ \Delta x_1 + 2 \cdot \Delta x_2 + 3 \cdot \Delta x_3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \Delta x_1 = 1{,}5 \\ \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_3 = -0{,}5 \end{cases}.$$

6. Найдем поправки для измеренных величин

$$\begin{cases} V_1 = \Delta x_1 = 1{,}5 \\ V_2 = \Delta x_2 = 0 \\ V_3 = \Delta x_3 = -0{,}5 \\ V_4 = \Delta x_1 + \Delta x_2 - 2 = 1{,}5 + 0 - 2 = -0{,}5 \\ V_5 = \Delta x_2 + \Delta x_3 + 2 = 0 - 0{,}5 + 2 = 1{,}5 \\ V_6 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - 2 = 1{,}5 + 0{,}5 - 2 = -1 \end{cases}$$

Уравненные значения углов будут следующими:

$$\begin{cases} x_1 = 30 + 1{,}5 = 31{,}5 \\ x_2 = 32 + 0 = 32 \\ x_3 = 34 - 0.5 = 33{,}5 \\ x_4 = 64 - 0{,}5 = 63{,}5 \\ x_5 = 64 + 1{,}5 = 65{,}5 \\ x_6 = 98 - 1 = 97 \end{cases}$$

Проверим, выполняются ли следующие равенства:

$$x_1 + x_2 = x_4 \qquad 31{,}5 + 32 = 63{,}5 \quad - \textit{верно}$$

$$x_2 + x_3 = x_5 \qquad 32 + 33{,}5 = 65{,}5 \quad - \textit{верно}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_6 \qquad 31{,}5 + 32 + 33{,}5 = 97 \quad - \textit{верно}$$

7. Средняя квадратическая ошибка

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{1{,}5^2 + 0^2 + (-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + 1{,}5^2 + (-1)^2}{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

Реализация решения задачи о шести углах в MATHCAD.

$ORIGIN := 1 \qquad n := 6 \qquad i := 1..n$

$$x := \begin{pmatrix} 30 \\ 32 \\ 34 \\ 64 \\ 64 \\ 98 \end{pmatrix}$$ - измеренные величины

$X10 := x_1 \quad X20 := x_2 \quad X30 := x_3$ - приближенные значения параметров

$F1(X1,X2,X3) := X1 \qquad F4(X1,X2,X3) := X1 + X2$

$F2(X1,X2,X3) := X2 \qquad F5(X1,X2,X3) := X2 + X3$ - уравнения связей

$F3(X1,X2,X3) := X3 \qquad F6(X1,X2,X3) := X1 + X2 + X3$

$$F(X1,X2,X3) := \begin{pmatrix} F1(X1,X2,X3) \\ F2(X1,X2,X3) \\ F3(X1,X2,X3) \\ F4(X1,X2,X3) \\ F5(X1,X2,X3) \\ F6(X1,X2,X3) \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{d}{dX1}(F(X1,X2,X3)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b := \frac{d}{dX2}F(X1,X2,X3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c := \frac{d}{dX3}F(X1,X2,X3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L := F(X10,X20,X30) - x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$A := \text{augment}(a, b, c)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta X := -\left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot L$ $\qquad \Delta X = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ - поправки к параметрам

$V := A \cdot \Delta X + L$ $\qquad V = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$ - поправки к измеренным величинам

$X1 := X10 + \Delta X_1$ $\quad X2 := X20 + \Delta X_2$ $\quad X3 := X30 + \Delta X_3$ - уравненные значения парметров

$X1 = 31.5$ $\quad X2 = 32$ $\quad X3 = 33.5$

Контроли:

а) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot V_i\right) = 0.000$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(b_i \cdot V_i\right) = 0.000$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cdot V_i\right) = 0.000$

б) $F(X1, X2, X3) = \begin{pmatrix} 31.5 \\ 32 \\ 33.5 \\ 63.5 \\ 65.5 \\ 97 \end{pmatrix}$ $\qquad x + V = \begin{pmatrix} 31.5 \\ 32 \\ 33.5 \\ 63.5 \\ 65.5 \\ 97 \end{pmatrix}$

эти величины должны быть равны!

Задание для самостоятельной работы

1.3 Даны измеренные значения шести углов. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что должны выполняться равенства $x_1 + x_2 = x_4$, $x_2 + x_3 = x_5$, $x_1 + x_2 + x_3 = x_6$.

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 1.3.

№ варианта	x_1 в градусах	x_2 в градусах	x_3 в градусах	x_4 в градусах	x_5 в градусах	x_6 в градусах
1	40	46	44	83	91	134
2	35	34	45	66	84	118
3	36	44	67	78	115	149
4	37	30	57	63	82	124
5	39	46	49	90	93	129
6	26	44	68	72	116	133
7	25	39	50	66	85	114
8	32	41	53	68	89	131
9	23	35	61	54	95	123
10	29	33	53	67	83	111
11	25	33	69	54	106	125
12	34	44	42	74	88	120
13	25	36	45	58	77	111
14	31	33	55	69	85	123
15	31	34	54	69	89	120
16	36	38	67	78	106	143
17	28	36	70	69	106	132
18	26	30	60	51	85	120
19	25	41	48	63	89	116
20	23	31	50	49	81	102
21	31	37	64	66	99	129
22	36	50	60	89	114	148
23	34	40	60	78	99	133
24	31	36	44	64	80	115
25	26	44	53	73	98	127
26	22	40	69	63	114	133
27	32	32	46	62	81	109
28	20	41	47	65	91	104
29	23	42	52	66	90	122
30	26	38	59	60	93	128

1.4 Дан отрезок AD , на котором выбраны точки B и C, причем точка B лежит между A и C, точка C лежит между B и D, известны длины шести отрезков *AB, BC, CD, AC, BD, AD*. Найти уравненные значения длин этих отрезков, при условии, что должны выполняться равенства $AB + BC = AC$, $BC + CD = BD$, $AB + BC + CD = AD$.

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 1.4.

№ варианта	*AB* в см	*BC* в см	*CD* в см	*AC* в см	*BD* в см	*AD* в см
1	13	14	10	30	25	40
2	19	13	7	32	22	42
3	11	14	5	27	22	35
4	18	15	5	35	16	39
5	17	10	6	25	14	33
6	13	14	7	32	18	32
7	18	11	6	26	15	37
8	14	15	10	30	23	41
9	12	11	8	24	24	32
10	10	13	9	19	17	35
11	20	11	10	30	22	40
12	15	15	10	28	23	39
13	12	13	6	25	18	30
14	10	14	8	19	19	34
15	19	13	10	27	20	47
16	20	10	5	35	17	30
17	12	12	9	26	16	30
18	18	14	8	31	22	39
19	12	13	8	23	22	33
20	11	10	8	21	17	26
21	20	15	9	33	20	42
22	13	11	8	29	24	34
23	10	15	10	27	22	39
24	19	14	10	36	22	45
25	16	11	7	24	19	31
26	10	11	10	22	16	31
27	15	12	9	29	21	33
28	11	15	5	22	20	31
29	20	14	7	36	21	45
30	19	10	9	29	23	36

Лабораторная работа 3 Уравнивание системы нивелирных ходов в одну узловую точку параметрическим методом

Пусть требуется уравнять систему из трех нивелирных ходов в одну узловую точку. Система опирается на пункты нивелирования ранее построенной сети более высокого класса. Известны отметки исходных пунктов: H_A, H_B, H_C, суммы измеренных превышений по ходам h_1, h_2, h_3, длины ходов S_1, S_2, S_3.

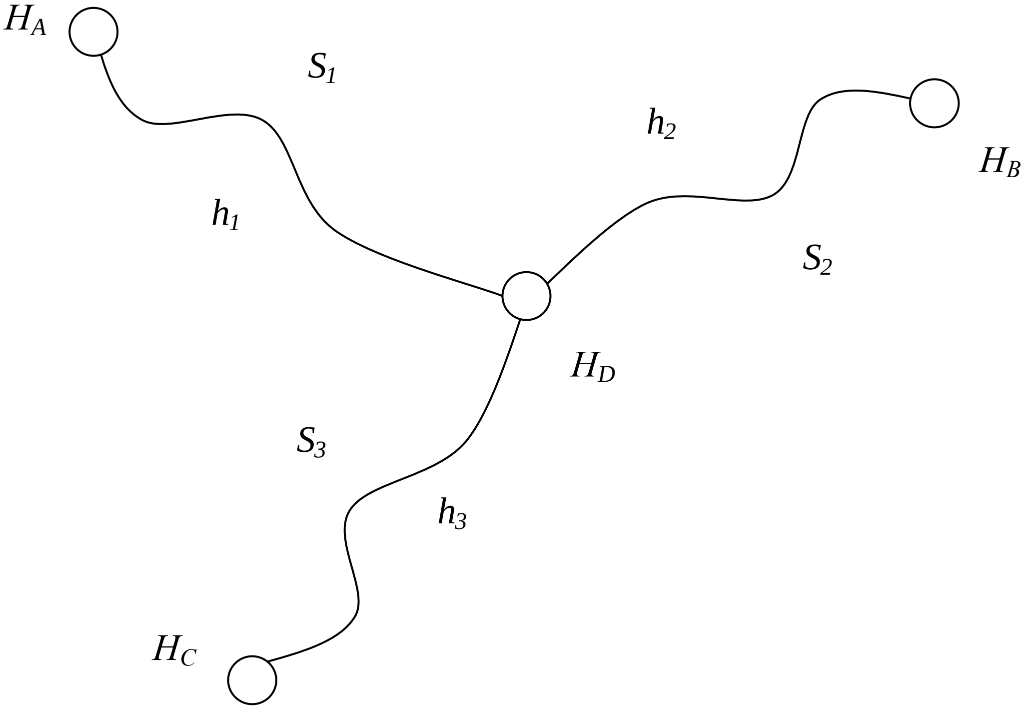


Рис.1 Схема нивелирной сети

Уравнения поправок в общем виде составляют как разности между превышениями, полученными по отметкам точек, и их измеренными значениями в каждом ходе. При этом к приближенным значениям определяемых отметок x_i реперов прибавляют соответствующую поправку Δx_i. Число уравнений поправок равно количеству ходов.

Рассмотрим конкретный пример.

Известны высоты точек *A, B, C,* их превышения и длины ходов.

H_A = 117,678 м	h_1 = −1,795 м	S_1 = 3,1 км
H_B = 129,975 м	h_2 = −14,085 м	S_2 = 3,9 км
H_C = 102,761 м	h_3 = 13,121 м	S_3= 3,6 км

Необходимо определить высоту точки D.

Решение.

1) Здесь число всех измерений $n = 3$, число необходимых измерений $k = 1$, число избыточных $r = n - k = 3 - 1 = 2$. Выберем в качестве параметра H_D - высоту неизвестной точки.

2). Составим параметрические уравнения связи как равенства по ходам, их число должно быть равно числу всех измерений - $n = 3$.

$$\begin{cases} F_1(H_D) = H_D - H_A \\ F_2(H_D) = H_D - H_B \\ F_3(H_D) = H_D - H_C \end{cases}$$

3) За приближенное значение неизвестного параметра примем величину $H_D{}^0 = H_A + h_1$.

4) Составим систему уравнений поправок (4)

$$\begin{cases} a_1 \cdot \Delta x_1 + L_1 = V_1 \\ a_2 \cdot \Delta x_1 + L_2 = V_2 \\ a_3 \cdot \Delta x_1 + L_3 = V_3 \end{cases}, \text{ где } a_i = \frac{\partial F_i}{\partial X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$L_i = F_i\left(H_D{}^0\right) - z_i'$, где z_i' - значения измеренных превышений h_i.

$$\begin{cases} L_1 = H_D{}^0 - H_A - h_1 = H_A + h_1 - H_A - h_1 = 0 \\ L_2 = H_D{}^0 - H_B - h_2 = H_A + h_1 - H_B - h_2 = -0{,}007 \\ L_3 = H_D{}^0 - H_C - h_3 = H_A + h_1 - H_C - h_3 = 0{,}001 \end{cases}.$$

Получим систему уравнений поправок

$$\begin{cases} 1 \cdot \Delta x_1 + 0 = V_1 \\ 1 \cdot \Delta x_1 - 0{,}007 = V_2 \\ 1 \cdot \Delta x_1 + 0{,}001 = V_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} V_1 = \Delta x_1 \\ V_2 = \Delta x_1 - 0{,}007 \\ V_3 = \Delta x_1 + 0{,}001 \end{cases}.$$

5) Составим функцию $\Phi = \left[pV^2\right]$. Так как $p_i = 1$, то $\Phi = \left[V^2\right] = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$.

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x_1} = 2 \cdot \Delta x_1 + 2 \cdot (\Delta x_1 - 0{,}007) + 2 \cdot (\Delta x_1 + 0{,}001) = 0, \ \Delta x_1 = 0{,}002.$$

6) Найдем поправки для измеренных величин, для превышений:

$$\begin{cases} V_1 = 0{,}002 \\ V_2 = 0{,}002 - 0{,}007 = -0{,}005 \\ V_3 = 0{,}002 + 0{,}001 = 0{,}003 \end{cases}$$

Уравненные значения превышений будут следующими:

$$\begin{cases} h_1 + V_1 = -1{,}795 + 0{,}002 = -1{,}793 \\ h_2 + V_2 = -14{,}085 - 0{,}005 = -14{,}090 \\ h_3 + V_3 = 13{,}121 + 0{,}003 = 13{,}124 \end{cases}$$

Проверим, выполняются ли следующие равенства:

$$H_D = H_A + h_1 + V_1 = 115{,}885,$$

$$H_D = H_B + h_2 + V_2 = 115{,}885,$$

$$H_D = H_C + h_3 + V_{31} = 115{,}885.$$

Контролем вычислений является равенство нулю суммы уравненных превышений в каждом замкнутом полигоне и равенство нулю невязок в ходах между точками, отметки высот которых конкретны.

7) Средняя квадратическая ошибка

$$m = \sqrt{\frac{\left[V^2\right]}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}002^2 + (-0{,}005)^2 + 0{,}003^2}{2}} = \sqrt{0{,}000019} \approx 0{,}004.$$

Реализация решения задачи в MATHCAD.

$ORIGIN := 1$

$n := 3 \qquad i := 1..n$

$$H := \begin{pmatrix} 117.678 \\ 129.975 \\ 102.761 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} -1.795 \\ -14.085 \\ 13.121 \end{pmatrix}$$

$HD0 := H_1 + h_1$

$F1(HD) := HD - H_1$

$F2(HD) := HD - H_2$

$F3(HD) := HD - H_3$

$$F(HD) := \begin{pmatrix} F1(HD) \\ F2(HD) \\ F3(HD) \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{d}{dHD}F(HD) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \text{augment}(a) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L := F(HD0) - h = \begin{pmatrix} -0 \\ -0.007 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X := -\left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot L = 0.002 \qquad V := A\cdot\Delta X + L = \begin{pmatrix} 0.002 \\ -0.005 \\ 0.003 \end{pmatrix}$$

$$h + V = \begin{pmatrix} -1.793 \\ -14.09 \\ 13.124 \end{pmatrix}$$ у р а в н е н н ы е з н а ч е н и я п р е в ы ш е н и й

$$HD := H + h + V = \begin{pmatrix} 115.885 \\ 115.885 \\ 115.885 \end{pmatrix}$$ в ы с о т а н е и з в е с т н о й т о ч к и D

$$F\left(HD_1\right) = \begin{pmatrix} -1.793 \\ -14.09 \\ 13.124 \end{pmatrix} \qquad h + V = \begin{pmatrix} -1.793 \\ -14.09 \\ 13.124 \end{pmatrix}$$ э т и в е л и ч и н ы д о л ж н ы б ы т ь р а в н ы

Задание для самостоятельной работы

1.5 Известны высоты точек *A, B, C,* их превышения и длины ходов. Необходимо определить высоту точки D.

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.
Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 1.5.

Вариант	**Высоты, в м**			**Превышения, в м**			**Расстояния, в км**		
	H_A	H_B	H_C	h_1	h_2	h_3	S_1	S_2	S_3
1	101,242	151,278	136,539	28,111	-21,921	-7,182	3,9	4,4	4,2
2	139,567	125,872	137,939	-10,182	3,599	-8,554	3,7	4,2	4,3
3	123,829	132,534	121,765	5,519	-3,142	7,638	4,0	4,1	4,2
4	117,678	129,975	102,761	-1,795	-14,065	13,121	3,1	3,9	3,6
5	126,721	101,975	103,761	-10,839	13,909	12,122	3,8	4,1	3,7
6	135,562	115,782	112,781	-13,782	5,997	8,997	3,7	1,0	4,1
7	129,781	134,642	102,698	-8,007	-12,891	19,052	3,9	4,2	4,1
8	101,597	136,246	145,756	20,149	-14,471	-23,980	4,1	4,0	43
9	159,761	161,523	127,693	-17,421	-19,182	14,678	3,8	4,3	4,2
10	160,843	131,372	126,593	-18,497	10,971	15,748	3,6	3,9	3,5
11	25,92	27,861	32,676	4,669	2,721	-2,095	3,2	4,1	3,6
12	28,21	31,672	54.925	2,489	-1,062	-4,235	3,5	4,2	*3,3*
13	34,26	32,821	28,563	-4,142	-2,239	2,018	3,8	4,0	4,1
14	58,263	62,973	52,821	-1,468	-6,198	3,981	4,0	3,9	3,9
15	66,627	59,947	51,088	-3,838	-3,145	5,719	3,7	4,1	3,3
16	51,623	46,264	41,889	-5,921	-0,581	3,812	3,4	3,9	4,1
17	40,005	43,580	50,989	5,695	2.115	-5,312	3,6	3,2	3,8
18	151,621	124,735	132,534	-11,050	15,830	8,032	2,8	3,1	2,7
19	79,777	65,621	64,328	-7,650	1 6,505	7,810	3,2	2,9	3,6
20	98,126	102,435	105,272	14,340	10,035	7,200	2,5	3,0	3,2
21	103,626	107,534	112,439	-3,630	-7,542	-12,450	3,1	3,2	3,7
22	83,555	94,121	80,666	12,340	1,772	15,226	3,1	3,5	2,6
23	41,333	43,222	50,721	8,560	6,672	-0,837	3,2	3,7	3.1
24	54,768	56,852	59,747	5,680	3,590	0,697	4,2	3,8	2,6
25	99,999	100,500	87,645	-10,005	-10,510	2,350	3,6	3,7	3,8
26	74,688	82,539	76,561	10,320	2,460	8,448	3,9	2,1	3,7
27	80,532	85,679	73,468	1,460	-3,685	8,530	3,4	3,3	2,6
28	120,571	130,232	122,643	4,436	-5,230	2,366	3,4	2,8	3,6
29	40,263	37,563	48,711	-6,036	15,123	2,418	3,2	4,1	2,9
30	70,325	62,888	60,222	4,470	2.972	+5,628	5,1	4,2	4,3

2 Коррелатный способ уравнивания

Пусть равноточно измерены n величин $X_1, X_2, ..., X_n$, связанных независимыми математическими условиями,

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \\ &\varphi_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_r(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2.1}$$

где $X_1, X_2, ..., X_n$ - истинные значения измеренных величин,

n – общее число всех измерений,

k – число всех необходимых измерений,

r – число избыточных измерений, $r = n - k$.

Общее число таких условий равно числу избыточных измерений.

Вследствие неизбежных погрешностей результаты равноточных измерений $l_1, l_2, ..., l_n$ не будут точно удовлетворять условиям (2.1). В результате в правой части (2.1) будем иметь не нули, а некоторые величины, которые принято называть невязками, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(l_1, l_2, ..., l_n) = W_1 \\ &\varphi_2(l_1, l_2, ..., l_n) = W_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_r(l_1, l_2, ..., l_n) = W_r \end{aligned}\right\}, \tag{2.2}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такие поправки $V_1, V_2, ..., V_n$ к измеренным величинам $l_1, l_2, ..., l_n$, которые обеспечили бы выполнение условий (2.1), т.е.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(l_1 + V_1, l_2 + V_2, ..., l_n + V_n) = 0 \\ &\varphi_2(l_1 + V_1, l_2 + V_2, ..., l_n + V_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_r(l_1 + V_1, l_2 + V_2, ..., l_n + V_n) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2.3}$$

Так как $n > r$, система условных уравнений является неопределенной, т.е. не имеет однозначного решения. Чтобы найти поправки V_i, необходимо решить систему (2.3) под условием $[V^2] = min$.

Нелинейные условные уравнения (2.3) приводят к линейному виду, для чего функцию разлагают в ряд Тейлора с сохранением членов, содержащих первые степени поправок, ввиду малости поправок V_i. В результате получим

$$
\begin{cases}
\varphi_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial l_1}\cdot V_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial l_2}\cdot V_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial l_n}\cdot V_n = 0 \\
\varphi_2(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial l_1}\cdot V_1 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial l_2}\cdot V_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial l_n}\cdot V_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial l_1}\cdot V_1 + \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial l_2}\cdot V_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial l_n}\cdot V_n = 0
\end{cases}, \qquad (2.4)
$$

Введем обозначения

$$
\frac{\partial\varphi_1}{\partial l_i} = a_i, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial l_i} = b_i, \ \ldots, \ \frac{\partial\varphi_r}{\partial l_i} = g_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.5)
$$

Тогда, с учетом (2.2) и (2.5), система условных уравнений (2.4) в линейном виде будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{cases}
a_1\cdot V_1 + a_2\cdot V_2 + \ldots + a_n\cdot V_n + W_1 = 0 \\
b_1\cdot V_1 + b_2\cdot V_2 + \ldots + b_n\cdot V_n + W_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_1\cdot V_1 + g_2\cdot V_2 + \ldots + g_n\cdot V_n + W_r = 0
\end{cases}
$$

или в матричной форме (2.6)

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \ldots \\ V_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \ldots \\ W_n \end{pmatrix} = b\cdot V + W = 0
$$

Система уравнений (2.6) так же, как и система (2.3), неопределенна ($n > r$) и имеет множество решений. Ее необходимо решить под условием $[V^2] = min$.

В курсе математического анализа доказано, что если имеется функция n переменных $u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, связанных r дополнительными условиями $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, причем $n > r$, условный экстремум функции $u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть найден методом, предложенным Ж.Л. Лагранжем. Для этого рассматривают функцию, при котором к функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ присоединяют условные уравнения, умноженные на неопределенные множители $k_1, k_2, \ldots, k_r$, называемые коррелатами

$$
\Phi = F(x_1, \ldots, x_n) + k_1\cdot\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + k_2\cdot\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + k_r\cdot\varphi_r(x_1, \ldots, x_n). \quad (2.7)
$$

Отсюда получают систему из $n + r$ уравнений с $n + r$ неизвестными:

$$\left.\begin{cases}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\ \ldots\\ \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\end{cases}\right\} \quad - \quad r \text{ уравнений}$$

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi}{\partial X_1} = 0\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial X_2} = 0\\ \ldots\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0\end{cases}\right\} \quad - \quad n \text{ уравнений}$$

В нашем случае для составления функции Лагранжа умножим уравнения (2.6) соответственно на неопределенные множители $-2k_1, -2k_2, \ldots, -2k_r$. Полученные выражения просуммируем и прибавим к функции $F = [V^2] = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_n^2$. После преобразований получим

$$\begin{aligned}\Phi = {} & V_1^2 - 2V_1 \cdot (a_1 \cdot k_1 + b_1 \cdot k_2 + \cdots + g_1 \cdot k_r) + V_2^2 - 2V_2 \cdot (a_2 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \cdots + g_2 \cdot k_r) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + V_n^2 - 2V_n \cdot (a_n \cdot k_1 + b_n \cdot k_2 + \cdots + g_n \cdot k_r) - 2 \cdot (W_1 \cdot k_1 + W_2 \cdot k_2 + \cdots + W_r \cdot k_r)\end{aligned}$$

Найдем частные производные функции Φ по переменным $V_1, V_2, \cdots, V_n$ и приравняем к нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi}{\partial V_1} = 2V_1 - 2 \cdot (a_1 \cdot k_1 + b_1 \cdot k_2 + \cdots + g_1 \cdot k_r) = 0\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial V_2} = 2V_2 - 2 \cdot (a_2 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \cdots + g_2 \cdot k_r) = 0\\ \quad\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial V_n} = 2V_n - 2 \cdot (a_n \cdot k_1 + b_n \cdot k_2 + \cdots + g_n \cdot k_r) = 0\end{cases}.$$

Откуда находим поправки $V_1, V_2, \cdots, V_n$:

$$\begin{cases} V_1 = a_1 \cdot k_1 + b_1 \cdot k_2 + \cdots + g_1 \cdot k_r \\ V_2 = a_2 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \cdots + g_2 \cdot k_r \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ V_n = a_n \cdot k_1 + b_n \cdot k_2 + \cdots + g_n \cdot k_r \end{cases} \tag{2.8}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \ldots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & g_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix} \text{ или } V = b^T \cdot K \tag{2.8*}$$

Таким образом, как это следует из (2.8) для вычисления поправок $V_1, V_2, \cdots, V_n$ к измеряемым величинам необходимо сначала определить коррелаты $k_1, k_2, ..., k_r$. Подставим V из (2.8*) в (2.6)

$$b \cdot b^T \cdot K + W = 0 \tag{2.9}$$

Введем обозначение

$$B = b \cdot b^T = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \cdots & [ag] \\ [ab] & [bb] & \cdots & [bg] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [ar] & [br] & \cdots & [rg] \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

На основании (2.9) и (2.10) можно записать

$$B \cdot K + W = 0. \tag{2.11}$$

Выражение (2.11) представляет собой систему нормальных уравнений, где число уравнений равно числу определяемых неизвестных $k_1, k_2, ..., k_r$. Умножив (2.10) слева на обратную матрицу B^{-1}, находим столбец коррелат

$$K = -B^{-1} \cdot W. \tag{2.12}$$

Подставив K в (2.8), находим столбец поправок V.

Умножим столбец поправок V (2.8) слева на матрицу – строку поправок V^T, получим с одной стороны,

$$V^T \cdot V = [V \cdot V],$$

с другой стороны,

$$V^T \cdot V = \left(b^T \cdot K\right)^T \cdot V = \left(b^T \cdot K\right)^T \cdot V = K^T \cdot \left(b^T\right)^T \cdot V = K^T \cdot (b \cdot V) = -K \cdot W.$$

Откуда получим формулу для контроля вычислений

$$\left[V^2\right] = -K \cdot W. \tag{2.13}$$

Уравнивание измеренных величин коррелатным способом осуществляется в следующем порядке:
1. Определяем число и вид условных уравнений.
2. Составляем условные уравнения (2.2) и вычисляем их свободные члены (невязки) W_i, $i=1,\cdots,r$. Нелинейные условные уравнения приводят к линейному виду (2.6).
3. Составляем матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат (2.10).
4. Из решения уравнения (2.11) вычисляем коррелаты $k_1, k_2, ..., k_r$.
5. Подставляем коррелаты в уравнение (2.8), находим поправки $V_1, V_2, \cdots, V_n$.
6. Определяем уравненные значения измеренных величин. Осуществляем контроль вычислений (2.13).

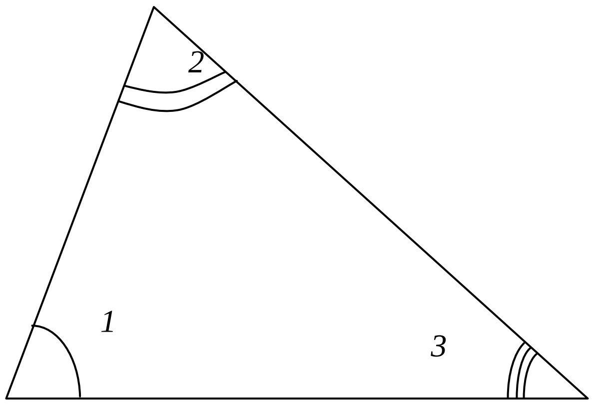
Лабораторная работа 4. Уравнивание коррелатным методом. Задача о трех углах треугольника.

Измерены три угла треугольника, получены значения x_1, x_2, x_3. Требуется уравнять коррелатным способом измеренные значения углов, из условия, что сумма углов треугольника равна 180°.

Решение.

1. Здесь число всех измерений $n=3$, число необходимых измерений $k=2$, число избыточных измерений $r=n-k=3-2=1$.

Пусть X_1, X_2, X_3 - точные значения углов треугольника. Составим условные уравнения связи, их число должно быть равно числу избыточных измерений $r=n-k=3-2=1$.



$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ = 0$$

Рис. 1

2. Найдем невязку W_1, исходя из измеренных значений углов $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = W_1$.

3. Представим условное уравнение в виде (2.6)

$a_1 \cdot V_1 + a_2 \cdot V_2 + a_3 \cdot V_3 + W_1 = 0$, где

$$a_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} = \left(X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ\right)'_{X_1} = 1,$$

$$a_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2} = \left(X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ\right)'_{X_2} = 1,$$

$$a_3 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} = \left(X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ\right)'_{X_3} = 1.$$

Или

$$V_1 + V_2 + V_3 + W_1 = 0.$$

3. Используя выражения для поправок через коррелаты (2.8),

$$\begin{cases} V_1 = a_1 \cdot k_1 + b_1 \cdot k_2 + \cdots + g_1 \cdot k_r \\ V_2 = a_2 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \cdots + g_2 \cdot k_r \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ V_n = a_n \cdot k_1 + b_n \cdot k_2 + \cdots + g_n \cdot k_r \end{cases}$$

получим для данного случая

$$\begin{cases} V_1 = a_1 \cdot k_1 \\ V_2 = a_2 \cdot k_1 \\ V_3 = a_3 \cdot k_1 \end{cases}$$

Тогда

$a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_1 + a_3 \cdot k_1 + W_1 = 0$ или $k_1 + k_1 + k_1 + W_1 = 0$, откуда

$$k_1 = -\frac{W_1}{3}.$$

4, 5.

Найдем поправки

$$\begin{cases} V_1 = -\dfrac{W}{3} \\ V_2 = -\dfrac{W}{3} \\ V_3 = -\dfrac{W}{3} \end{cases}.$$

6. Уравненные значения углов будут следующими:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - \dfrac{W}{3} \\ X_2 = x_2 - \dfrac{W}{3} \\ X_3 = x_3 - \dfrac{W}{3} \end{cases},$$

Для проверки сумма $X_1 + X_2 + X_3$ должна быть равна 180°.

7. Средняя квадратическая ошибка

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left(-\dfrac{W}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{W}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{W}{3}\right)^2}{2}} = \frac{W}{\sqrt{6}}.$$

Реализация решения задачи о трех углах треугольника в MATHCAD.

$ORIGIN := 1$

$n := 3$ число всех измерений

$i := 1..n$

$k := 2$ число необходимых измерений

$r := n - k = 1$ число избыточных измерений

$$X := \begin{pmatrix} 36 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$$ - измеренные величины

$X10 := X_1 \quad X20 := X_2 \quad X30 := X_3$ - приближенные значения параметров

$F1(X1, X2, X3) := X1 + X2 + X3 - 180$ - уравнения связи

$F(X1, X2, X3) := F1(X1, X2, X3)$

$W := F(X10, X20, X30) = 6$

$$a := \frac{d}{dX1}(F(X1, X2, X3)) \rightarrow 1$$

$$b := \frac{d}{dX2}(F(X1, X2, X3)) \rightarrow 1$$

$$c := \frac{d}{dX3}(F(X1, X2, X3)) \rightarrow 1$$

$A := augment(a, b, c) = (1 \;\; 1 \;\; 1)$

$B := A \cdot A^T = 3 \qquad K := -B^{-1} \cdot W = -2$ коррелаты

$$V := A^T \cdot K = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ поправки к измеренным величинам

$$XD := X + V = \begin{pmatrix} 34 \\ 58 \\ 88 \end{pmatrix}$$ уравненные значения углов треугольника

$$m := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (V_i)^2}{n - k}} = 3.464$$

Задания для самостоятельной работы

2.1 Даны измеренные значения трех углов треугольника. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что сумма углов треугольника равна 180°:

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 2.1

№ варианта	x_1	x_2	x_3	№ варианта	x_1	x_2	x_3
1	44	53	80	16	35	57	85
2	50	49	90	17	35	40	114
3	50	43	93	18	31	53	105
4	32	48	91	19	49	41	87
5	44	52	90	20	40	46	91
6	34	43	94	21	42	50	94
7	49	51	77	22	48	42	81
8	33	45	111	23	30	59	82
9	36	53	97	24	31	46	109
10	37	51	98	25	32	55	84
11	39	53	82	26	31	55	100
12	30	47	106	27	47	59	68
13	45	49	77	28	36	53	82
14	45	42	84	29	37	48	86
15	41	43	102	30	37	46	94

2.2 Даны измеренные значения четырех углов четырехугольника. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что сумма углов четырехугольника равна 360°:

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 2.2

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	85	94	79	112	16	81	86	62	128
2	86	85	71	118	17	85	100	68	108
3	82	86	67	119	18	86	85	78	107
4	83	89	60	138	19	89	96	71	112
5	81	94	62	122	20	81	92	61	129
6	81	81	73	121	21	83	93	78	112
7	86	80	79	107	22	89	91	65	118
8	82	86	69	113	23	81	96	72	120
9	86	91	80	110	24	81	91	74	106
10	84	89	65	132	25	89	97	63	107
11	89	81	80	119	26	86	95	77	110
12	90	88	61	130	27	80	93	69	109
13	87	95	68	109	28	83	83	69	116
14	80	87	77	118	29	87	99	65	104
15	83	84	75	115	30	81	95	70	112

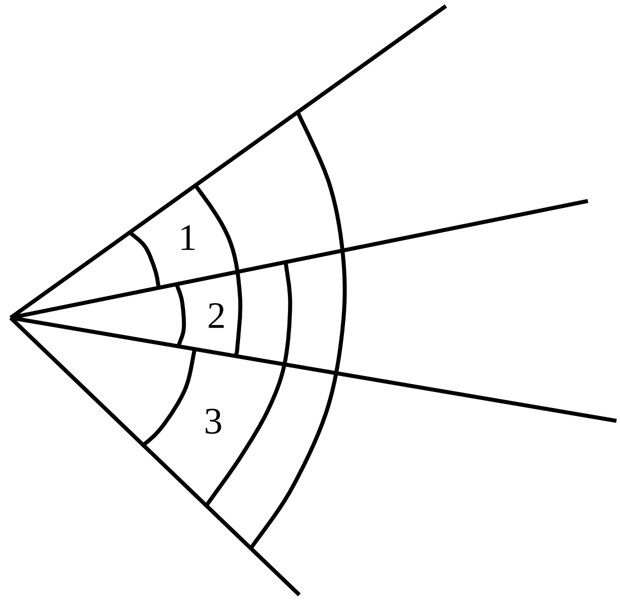
Лабораторная работа 5
Уравнивание коррелатным способом. Задача о шести углах

Измерены равноточно шесть углов, получены значения $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 32^\circ$, $x_3 = 34^\circ$, $x_4 = 64^\circ, x_5 = 64^\circ, x_6 = 98^\circ$. Требуется уравнять коррелатным способом измеренные значения углов.

Решение.

1) Здесь число всех измерений $n = 6$, число необходимых измерений $k = 3$, число избыточных измерений $r = n - k = 6 - 3 = 3$.

2. Пусть $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ - точные значения измеряемых углов. Составим условные уравнения связи, их число должно быть равно числу избыточных измерений $r = n - k = 6 - 3 = 3$.



$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = X_1 + X_2 - X_4 = 0$$
$$\varphi_2(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = X_2 + X_3 - X_5 = 0$$
$$\varphi_3(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = X_1 + X_2 + X_3 - X_6 = 0$$

Найдем невязки W_1, W_2, W_3, исходя из значений измеренных углов

$$W_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 30^\circ + 32^\circ - 64^\circ = -2^\circ$$
$$W_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 32^\circ + 34^\circ - 64^\circ = 2^\circ$$
$$W_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 30^\circ + 32^\circ + 34^\circ - 98^\circ = -2^\circ$$

3. Представим систему условных уравнений в виде (2.6)

$$\begin{cases} a_1 \cdot V_1 + a_2 \cdot V_2 + a_3 \cdot V_3 + a_4 \cdot V_4 + a_5 \cdot V_5 + a_6 \cdot V_6 + W_1 = 0 \\ b_1 \cdot V_1 + b_2 \cdot V_2 + b_3 \cdot V_3 + b_4 \cdot V_4 + b_5 \cdot V_5 + b_6 \cdot V_6 + W_2 = 0 \\ c_1 \cdot V_1 + c_2 \cdot V_2 + c_3 \cdot V_3 + c_4 \cdot V_4 + c_5 \cdot V_5 + c_6 \cdot V_6 + W_3 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$$a_i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_i} = (X_1 + X_2 - X_4)'_{X_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_i = \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_i} = (X_2 + X_3 - X_5)'_{X_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_i = \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_i} = \left(X_1 + X_2 + X_3 - X_6\right)'_{X_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{cases} 1\cdot V_1 + 1\cdot V_2 + 0\cdot V_3 - 1\cdot V_4 + 0\cdot V_5 + 0\cdot V_6 - 2 = 0 \\ 0\cdot V_1 + 1\cdot V_2 + 1\cdot V_3 + 0\cdot V_4 - 1\cdot V_5 + 0\cdot V_6 + 2 = 0 \\ 1\cdot V_1 + 1\cdot V_2 + 1\cdot V_3 + 0\cdot V_4 + 0\cdot V_5 - 1\cdot V_6 - 2 = 0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} V_1 + V_2 - V_4 - 2 = 0 \\ V_2 + V_3 - V_5 + 2 = 0 \\ V_1 + V_2 + V_3 - V_6 - 2 = 0 \end{cases} \qquad (*).$$

3. Используя выражения для поправок через коррелаты (2.8),

$$\begin{cases} V_1 = a_1\cdot k_1 + b_1\cdot k_2 + c_1\cdot k_3 \\ V_2 = a_2\cdot k_1 + b_2\cdot k_2 + c_2\cdot k_3 \\ V_3 = a_3\cdot k_1 + b_3\cdot k_2 + c_3\cdot k_3 \\ V_4 = a_4\cdot k_1 + b_4\cdot k_2 + c_4\cdot k_3 \\ V_5 = a_5\cdot k_1 + b_5\cdot k_2 + c_5\cdot k_3 \\ V_6 = a_6\cdot k_1 + b_6\cdot k_2 + c_6\cdot k_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} V_1 = 1\cdot k_1 + 0\cdot k_2 + 1\cdot k_3 \\ V_2 = 1\cdot k_1 + 1\cdot k_2 + 1\cdot k_3 \\ V_3 = 0\cdot k_1 + 1\cdot k_2 + 1\cdot k_3 \\ V_4 = -1\cdot k_1 + 0\cdot k_2 + 0\cdot k_3 \\ V_5 = 0\cdot k_1 - 1\cdot k_2 + 0\cdot k_3 \\ V_6 = 0\cdot k_1 + 0\cdot k_2 - 1\cdot k_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} V_1 = k_1 + k_3 \\ V_2 = k_1 + k_2 + k_3 \\ V_3 = k_2 + k_3 \\ V_4 = -k_1 \\ V_5 = -k_2 \\ V_6 = -k_3 \end{cases},$$

подставим в (*) $\begin{cases} (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2 + k_3) + k_1 - 2 = 0 \\ (k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3) + k_2 + 2 = 0 \\ (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2 + k_3) + (k_2 + k_3) + k_3 - 2 = 0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + 2k_3 = 2 \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 = -2 \\ 2k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 2 \end{cases}.$$

Решая систему уравнений, получим

$k_1 = 0{,}5$, $k_2 = -1{,}5$, $k_3 = 1{,}0$

4, 5. Найдем поправки

$$\begin{cases} V_1 = k_1 + k_3 \\ V_2 = k_1 + k_2 + k_3 \\ V_3 = k_2 + k_3 \\ V_4 = -k_1 \\ V_5 = -k_2 \\ V_6 = -k_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 0{,}5 + 1{,}0 = 1{,}5 \\ V_2 = 0{,}5 - 1{,}5 + 1{,}0 = 0 \\ V_3 = -1{,}5 + 1{,}0 = -0{,}5 \\ V_4 = -0{,}5 \\ V_5 = 1{,}5 \\ V_6 = -1{,}0 \end{cases}.$$

6. Уравненные значения углов будут следующими:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + V_1 = 30{,}0 + 1{,}5 = 31{,}5 \\ X_2 = x_2 + V_2 = 32{,}0 + 0 = 32{,}0 \\ X_3 = x_3 + V_3 = 34{,}0 - 0{,}5 = 33{,}5 \\ X_4 = x_4 + V_4 = 64{,}0 - 0{,}5 = 63{,}5 \\ X_5 = x_5 + V_5 = 64{,}0 + 1{,}5 = 65{,}5 \\ X_6 = x_6 + V_6 = 98{,}0 - 1{,}0 = 97{,}0 \end{cases},$$

Для контроля должны быть равны следующие суммы:

$$\begin{aligned} & X_1 + X_2 = X_4 \\ & X_2 + X_3 = X_5 \\ & X_1 + X_2 + X_3 = X_6 \end{aligned}.$$

7. Средняя квадратическая ошибка $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5^2 + 0^2 + (-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + 1{,}5^2 + (-1)^2}{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$.

Реализация решения задачи о шести углах в MATHCAD

$ORIGIN := 1$

$n := 6$ число всех измерений

$i := 1..n$

$k := 3$ число необходимых измерений

$r := n - k = 3$ число избыточных измерений

$$X := \begin{pmatrix} 30 \\ 32 \\ 34 \\ 64 \\ 64 \\ 98 \end{pmatrix}$$ - измеренные величины

$X10 := X_1 \quad X20 := X_2 \quad X30 := X_3$ - приближенные значения параметров

$X40 := X_4 \quad X50 := X_5 \quad X60 := X_6$

$F1(X1, X2, X3, X4, X5, X6) := X1 + X2 - X4$ - уравнения связи

$F2(X1, X2, X3, X4, X5, X6) := X2 + X3 - X5$

$F3(X1, X2, X3, X4, X5, X6) := X1 + X2 + X3 - X6$

$$F(X1, X2, X3, X4, X5, X6) := \begin{pmatrix} F1(X1, X2, X3, X4, X5, X6) \\ F2(X1, X2, X3, X4, X5, X6) \\ F3(X1, X2, X3, X4, X5, X6) \end{pmatrix}$$

$$W := F(X10, X20, X30, X40, X50, X60) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{d}{dX1}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b := \frac{d}{dX2}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c := \frac{d}{dX3}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c2 := \frac{d}{dX4}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c3 := \frac{d}{dX5}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c4 := \frac{d}{dX6}(F(X1, X2, X3, X4, X5, X6)) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A := \mathrm{augment}(a, b, c, c2, c3, c4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad K := -B^{-1} \cdot W = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

коррелаты

$$V := A^T \cdot K = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

поправки к измеренным величинам

$$XD := X + V = \begin{pmatrix} 31.5 \\ 32 \\ 33.5 \\ 63.5 \\ 65.5 \\ 97 \end{pmatrix}$$

уравненные значения углов

$$m := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(V_i\right)^2}{n - k}} = 1.414$$

Задание для самостоятельной работы

2.3 Даны измеренные значения шести углов. Найти уравненные значения этих углов, при условии, что должны выполняться равенства $x_1 + x_2 = x_4$, $x_2 + x_3 = x_5$, $x_1 + x_2 + x_3 = x_6$.

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 2.3.

№ варианта	x_1 в градусах	x_2 в градусах	x_3 в градусах	x_4 в градусах	x_5 в градусах	x_6 в градусах
1	40	46	44	83	91	134
2	35	34	45	66	84	118
3	36	44	67	78	115	149
4	37	30	57	63	82	124
5	39	46	49	90	93	129
6	26	44	68	72	116	133
7	25	39	50	66	85	114
8	32	41	53	68	89	131
9	23	35	61	54	95	123
10	29	33	53	67	83	111
11	25	33	69	54	106	125
12	34	44	42	74	88	120
13	25	36	45	58	77	111
14	31	33	55	69	85	123
15	31	34	54	69	89	120
16	36	38	67	78	106	143
17	28	36	70	69	106	132
18	26	30	60	51	85	120
19	25	41	48	63	89	116
20	23	31	50	49	81	102
21	31	37	64	66	99	129
22	36	50	60	89	114	148
23	34	40	60	78	99	133
24	31	36	44	64	80	115
25	26	44	53	73	98	127
26	22	40	69	63	114	133
27	32	32	46	62	81	109
28	20	41	47	65	91	104
29	23	42	52	66	90	122
30	26	38	59	60	93	128

2.4 Дан отрезок AD , на котором выбраны точки B и C, причем точка B лежит между A и C, точка C лежит между B и D, известны длины шести отрезков *AB, BC, CD, AC, BD, AD* (см. Рис.???). Найти уравненные значения длин этих отрезков, при условии, что должны выполняться равенства $AB + BC = AC$, $BC + CD = BD$, $AB + BC + CD = AD$.

а) решить задачу вручную;

б) составить программу расчетов в MathCade;

в) сравнить результаты.

Номер варианта выдается преподавателем.

Таблица 2.4.

№ варианта	*AB* в см	*BC* в см	*CD* в см	*AC* в см	*BD* в см	*AD* в см
1	13	14	10	30	25	40
2	19	13	7	32	22	42
3	11	14	5	27	22	35
4	18	15	5	35	16	39
5	17	10	6	25	14	33
6	13	14	7	32	18	32
7	18	11	6	26	15	37
8	14	15	10	30	23	41
9	12	11	8	24	24	32
10	10	13	9	19	17	35
11	20	11	10	30	22	40
12	15	15	10	28	23	39
13	12	13	6	25	18	30
14	10	14	8	19	19	34
15	19	13	10	27	20	47
16	20	10	5	35	17	30
17	12	12	9	26	16	30
18	18	14	8	31	22	39
19	12	13	8	23	22	33
20	11	10	8	21	17	26
21	20	15	9	33	20	42
22	13	11	8	29	24	34
23	10	15	10	27	22	39
24	19	14	10	36	22	45
25	16	11	7	24	19	31
26	10	11	10	22	16	31
27	15	12	9	29	21	33
28	11	15	5	22	20	31
29	20	14	7	36	21	45
30	19	10	9	29	23	36

Лабораторная работа 6

Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой коррелатным способом

Уравняем сеть из трех нивелирных ходов, которая опирается на пункты нивелирования ранее построенной сети более высокого класса, в одну узловую точку. Известны отметки исходных пунктов: H_A, H_B, H_C, суммы измеренных превышений по ходам h_1 h_2, h_3, длина ходов S_1, S_2, S_3.

Рассмотрим конкретный пример.

Известны высоты точек *A, B, C,* их превышения и длины ходов.

H_A = 117,678 м	h_1 = −1,795 м	S_1 = 3,1 км
H_B = 129,975 м	h_2 = −14,085 м	S_2 = 3,9 км
H_C = 102,761 м	h_3 = 13,121 м	S_3= 3,6 км

Необходимо определить высоту точки D.

Решение.

1. Здесь число всех измерений $n=3$, число необходимых измерений $k=1$, число избыточных измерений $r=n-k=3-1=2$.

2. Пусть X_1, X_2, X_3 - точные значения измеряемых превышений. Составим условные уравнения связи, их число должно быть равно числу избыточных измерений $r=n-k=3-1=2$.

$$\varphi_1(h_1,h_2,h_3)=H_1+h_1-(H_2+h_2)$$

$$\varphi_2(h_1,h_2,h_3)=H_2+h_2-(H_3+h_3)$$

Найдем невязки W_1, W_2, исходя из измерений

$$W_1=\varphi_1(h_1,h_2,h_3)=(117{,}678+(-1{,}795))-(129{,}975+(-14.085))=-0.007$$

$$W_2=\varphi_2(h_1,h_2,h_3)=(129{,}975+(-14.085))-(102{,}761+13{,}121)=0.008$$

3. Представим систему условных уравнений в виде (2.6)

$$\begin{cases} a_1\cdot V_1+a_2\cdot V_2+a_3\cdot V_3+W_1=0 \\ b_1\cdot V_1+b_2\cdot V_2+b_3\cdot V_3+W_2=0 \end{cases}, \text{ где}$$

$$a_i=\frac{\partial\varphi_1}{\partial h_i}=\left(H_1+h_1-(H_2+h_2)\right)'_{h_i}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$b_i=\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_i}=\left(H_2+h_2-(H_3+h_3)\right)'_{h_i}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{cases} 1\cdot V_1-1\cdot V_2+0\cdot V_3-0.007=0 \\ 0\cdot V_1+1\cdot V_2-1\cdot V_3+0{,}008=0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} V_1 - V_2 - 0.007 = 0 \\ V_2 - V_3 + 0{,}008 = 0 \end{cases}$$

4. Используя выражения для поправок через коррелаты (2.8), $\begin{cases} V_1 = a_1 \cdot k_1 + b_1 \cdot k_2 \\ V_2 = a_2 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 \\ V_3 = a_3 \cdot k_1 + b_3 \cdot k_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} V_1 = 1 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 \\ V_2 = -1 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2 \\ V_3 = 0 \cdot k_1 - 1 \cdot k_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} V_1 = k_1 \\ V_2 = -k_1 + k_2 \\ V_3 = -k_2 \end{cases}$, подставим в (*)

$$\begin{cases} k_1 - (-k_1 + k_2) - 0{,}007 = 0 \\ -k_1 + k_2 - (-k_2) + 0{,}008 = 0 \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 0{,}007 \\ -k_1 + 2k_2 = -0{,}008 \end{cases}.$$

Решая систему уравнений, получим
$k_1 = 0{,}002$, $k_2 = -0{,}003$

4, 5. Найдем поправки $\begin{cases} V_1 = k_1 \\ V_2 = -k_1 + k_2 \\ V_3 = -k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 0.002 \\ V_2 = -0.002 - 0.003 = -0{,}005 \\ V_3 = 0{,}003 \end{cases}$

6. Найдем уравненные значения превышений:

$$\begin{cases} h_1 = h_1 + V_1 = -1{,}795 + 0{,}002 = -1.793 \\ h_2 = h_2 + V_2 = -14{,}085 - 0{,}005 = -14{,}090 \\ h_3 = h_3 + V_3 = 13{,}121 + 0{,}003 = 13{,}124 \end{cases}$$

Находим значение отметки неизвестной точки D по трем направлениям, которые должны быть равны:

$$\begin{cases} H_D = H_1 + h_1 + V_1 = 117{,}678 - 1{,}793 = 115{,}885 \\ H_D = H_2 + h_2 + V_2 = 129{,}975 - 14{,}090 = 115{,}885, \\ H_D = H_3 + h_3 + V_3 = 102{,}761 + 13{,}124 = 115{,}885 \end{cases}$$

7. Средняя квадратическая ошибка $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}002^2 + 0{,}005^2 + 0{,}003^2}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{1000} \approx 0{,}0044.$

Реализация решения задачи в MATHCAD

$ORIGIN := 1$ $\quad n := 3$ число всех измерений

$i := 1..n$

$k := 1$ число необходимых измерений

$r := n - k = 2$ число избыточных измерений

$$H := \begin{pmatrix} 117.678 \\ 129.975 \\ 102.761 \end{pmatrix} \quad h := \begin{pmatrix} -1.795 \\ -14.085 \\ 13.121 \end{pmatrix} \quad S := \begin{pmatrix} 3.1 \\ 3.9 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$ - измеренные величины

$h10 := h_1 \quad h20 := h_2 \quad h30 := h_3$ - приближенные значения парам етров

$$F1(h1, h2, h3) := (H_1 + h1) - (H_2 + h2)$$
$$F2(h1, h2, h3) := (H_2 + h2) - (H_3 + h3)$$ - уравнения связи

$$F(h1, h2, h3) := \begin{pmatrix} F1(h1, h2, h3) \\ F2(h1, h2, h3) \end{pmatrix} \qquad W := F(h10, h20, h30) = \begin{pmatrix} -0.007 \\ 0.008 \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{d}{dh1}(F(h1, h2, h3)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b := \frac{d}{dh2}F(h1, h2, h3) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c := \frac{d}{dh3}F(h1, h2, h3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A := \text{augment}(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad K := -B^{-1} \cdot W = \begin{pmatrix} 0.002 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$ коррелаты

$$V := A^T \cdot K = \begin{pmatrix} 0.002 \\ -0.005 \\ 0.003 \end{pmatrix}$$ поправки к измеренным величинам

$$HD := H + h + V = \begin{pmatrix} 115.885 \\ 115.885 \\ 115.885 \end{pmatrix}$$ уравненное значение искомой высоты

Задание для самостоятельной работы

2.5 Известны высоты точек *A, B, C,* их превышения и длины ходов. Необходимо определить высоту точки D.

Таблица 2.5.

Вариант	**Высоты, в м**			**Превышения, в м**			**Расстояния, в км**		
	H_A	**H_B**	**H_C**	**h_1**	**h_2**	**h_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**
1	101,242	151,278	136,539	28,111	-21,921	-7,182	3,9	4,4	4,2
2	139,567	125,872	137,939	-10,182	3,599	-8,554	3,7	4,2	4,3
3	123,829	132,534	121,765	5,519	-3,142	7,638	4,0	4,1	4,2
4	117,678	129,975	102,761	-1,795	-14,065	13,121	3,1	3,9	3,6
5	126,721	101,975	103,761	-10,839	13,909	12,122	3,8	4,1	3,7
6	135,562	115,782	112,781	-13,782	5,997	8,997	3,7	1,0	4,1
7	129,781	134,642	102,698	-8,007	-12,891	19,052	3,9	4,2	4,1
8	101,597	136,246	145,756	20,149	-14,471	-23,980	4,1	4,0	43
9	159,761	161,523	127,693	-17,421	-19,182	14,678	3,8	4,3	4,2
10	160,843	131,372	126,593	-18,497	10,971	15,748	3,6	3,9	3,5
11	25,92	27,861	32,676	4,669	2,721	-2,095	3,2	4,1	3,6
12	28,21	31,672	54.925	2,489	-1,062	-4,235	3,5	4,2	*3,3*
13	34,26	32,821	28,563	-4,142	-2,239	2,018	3,8	4,0	4,1
14	58,263	62,973	52,821	-1,468	-6,198	3,981	4,0	3,9	3,9
15	66,627	59,947	51,088	-3,838	-3,145	5,719	3,7	4,1	3,3
16	51,623	46,264	41,889	-5,921	-0,581	3,812	3,4	3,9	4,1
17	40,005	43,580	50,989	5,695	2.115	-5,312	3,6	3,2	3,8
18	151,621	124,735	132,534	-11,050	15,830	8,032	2,8	3,1	2,7
19	79,777	65,621	64,328	-7,650	1 6,505	7,810	3,2	2,9	3,6
20	98,126	102,435	105,272	14,340	10,035	7,200	2,5	3,0	3,2
21	103,626	107,534	112,439	-3,630	-7,542	-12,450	3,1	3,2	3,7
22	83,555	94,121	80,666	12,340	1,772	15,226	3,1	3,5	2,6
23	41,333	43,222	50,721	8,560	6,672	-0,837	3,2	3,7	3.1
24	54,768	56,852	59,747	5,680	3,590	0,697	4,2	3,8	2,6
25	99,999	100,500	87,645	-10,005	-10,510	2,350	3,6	3,7	3,8
26	74,688	82,539	76,561	10,320	2,460	8,448	3,9	2,1	3,7
27	80,532	85,679	73,468	1,460	-3,685	8,530	3,4	3,3	2,6
28	120,571	130,232	122,643	4,436	-5,230	2,366	3,4	2,8	3,6
29	40,263	37,563	48,711	-6,036	15,123	2,418	3,2	4,1	2,9
30	70,325	62,888	60,222	4,470	2.972	+5,628	5,1	4,2	4,3

Библиографический список

1.. Ардуванова, Ф.Ф., Технология проектирования учебных задач [Текст] /Ф.Ф. Ардуванова Ф.Ф.// Педагогический журнал Башкортостана. – 2006. - № 7(7). – С. 62-67.

2. Ардуванова Ф.Ф. Инновационные методы математической обработки земельно-кадастровой информации [Текст]// В сборнике: «Современное вузовское образование: теория, методология, практика» Материалы Международной учебно-методической конференции. Министерство сельского хозяйства РФ, БГАУ. 2013. С. 109.

3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984. – 352 с.

4. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1984. – 413 с.

5. Методические указания и контрольные работы № 1, 2 по курсу «Теория математической обработки геодезических измерений. Раздел II. Теория ошибок измерений». - М., Изд. МИИГАиК, 2010, с. 34. Составитель: Русяева Е.А.

6. Нефедова, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений в конспективном изложении [Текст]: учеб. пособие / Г.А. Нефедова, В.А. Ащеулов. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 140 с.