МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО БАШКИРСКИЙ ГАУ

Т.Н. Лубова

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Уфа
Издательство БГАУ
2015

УДК 519.2

ББК 22.171

Л 82

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом БГАУ

Автор Т.Н. Лубова

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» Карамова Л.М.;

к.т.н., доцент кафедры математики ФГОУ ВПО «Башкирский государственный аграрный университет» Анасова Т.А.

Л 82 Учебное пособие по теории вероятностей и математической статистике. – Уфа: Издательство БГАУ, 2015. - 163с.

Учебное пособие предназначено для студентов обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 38.03.01 (080100.62) Экономика, 38.03.05 (080500.62) Бизнес-информатика, 09.03.03 (230700) Прикладная информатика.

Учебное пособие включает рекомендации по изучению основных тем теории вероятностей и математической статистики, список рекомендуемой литературы, вопросы для самопроверки, контрольные и индивидуальные задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ТЕМА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель изучения – ознакомиться с основными понятиями, определениями и теоремами теории вероятностей и возможными областями применения аппарата теории вероятностей.

***Данная тема включает в себя*:**

- основные понятия: событие; исход; достоверные, невозможные и случайные события; несовместные и совместные события; полная группа событий; противоположные события, равновозможные события;
- классическое, геометрическое, статистическое определение вероятности события, их особенности, условия и возможные области применения;
- формулы комбинаторики;
- основные теоремы теории вероятностей (теоремы сложения и умножения вероятностей).

Контрольные задачи

1 Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт - бросание двух монет. События: A_1 - появление двух гербов, A_2 - появление двух цифр;

б) опыт - три выстрела по мишени. События: B_1 - хотя бы одно попадание, B_2 - хотя бы один промах;

в) опыт - бросание двух игральных костей. События: C_1 - хотя бы на одной кости появилось три очка, C_2 - появление четного числа очков на каждой кости;

г) опыт - извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и черные шары. События: $Д_1$ - взято два белых шара, $Д_2$ - оба извлеченных шара одного цвета;

д) опыт - покупка двух лотерейных билетов. События: E_1 - выиграют два билета, E_2 - выиграет хотя бы один билет, E_3 - выиграет только один лотерейный билет;

е) опыт - лифт отправляется с 10 пассажирами и останавливается на пяти этажах. События: F_1 - на первых четырех остановках вышло не более 9 человек, F_2 - на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2 Образуют ли полную группу следующие события:

а) опыт - два выстрела по мишени. События: A_1 - два попадания в мишень, A_2 - хотя бы один промах по мишени;

б) опыт - бросание двух игральных костей. События: B_1 - сумма очков на верхних гранях больше 3, B_2 - сумма очков на верхних гранях равна 3;

в) опыт - посажено четыре зерна. События: C_1 - взошло одно зерно, C_2- взошло два зерна, C_3 - взошло три зерна, C_4 - взошло четыре зерна.

г) покупатель посещает три магазина. События: $Д_1$ - покупатель купит товар хотя бы в одном магазине, $Д_2$ - покупатель не купит товар ни в одном магазине.

3 Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт - выстрел по мишени. События: A_1 - попадание при выстреле, A_2 - промах при выстреле;

б) опыт - бросание двух игральных костей. События: B_1 - произведение очков на верхних гранях равно 12, B_2 - сумма очков на верхних гранях равна 9.

4 Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A_1 - попадание в цель первым выстрелом; A_2 - попадание в цель вторым выстрелом; A_3 - попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события:

1) $A_1 + A_2 + A_3$

2) $A_1 A_2 A_3$

3) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$

4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

5) $A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$

6) $\overline{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}}$

7) $A_1 + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}$

8) $(\overline{A_1} + \overline{A_2}) A_3$

5 Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на ее верхней грани появится: а) шесть очков; б) нечетное количество очков; в) не менее четырех очков; г) не более двух очков.

6 Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

7 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на обеих костях появится одинаковое число очков;

б) хотя бы на одной кости появится два очка;

в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение - шести;

г) сумма очков не превосходит 6;

д) произведение числа очков не превосходит 6;

е) произведение очков делится на 6.

8 Из 100 посаженых семян проросло 78.

а) Какова статистическая вероятность прорастания семян?

б) Каков процент всхожести семян?

9 Относительная частота («частость») работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0,15. Определить число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек.

10 В отрезке АВ длины 3 случайно появляется точка С. Определить вероятность того, что расстояние от точки С до В превосходит 1.

11 В круг радиусом 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

12 Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого

кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля:

а) если цифры в коде не повторяются;

б) если повторяются?

13 Имеются две урны. В первой - 10 красных и 6 черных шаров. Во второй - 4 красных и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут красными; б) из первой урны будет вынут красный шар, а из второй - черный; в) хотя бы один из вынутых шаров черный.

14 Из коробки, содержащей 8 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку: 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8.

15 Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

16 В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

17 На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: а) четное число? б) число 1234?

18 Какова вероятность, что на трех карточках, вынутых по одной и положенных в порядке их появления, получим число 325, если всего карточек было шесть с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6?

19 Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

20 Среди изготовленных 15 деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что взятые наугад три детали окажутся стандартными.

21 В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу отбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что четыре из них будут повышенного качества?

22 Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в Миловку, если предоставлено 6 мест в Миловку, 10 - в Дмитриевку и 4 - в Алексеевку?

23 В клетке содержится 18 кур. Из них 6 не вакцинированы. Партию делят на 2 равные части. Какова вероятность того, что не вакцинированные куры разделятся поровну?

24 Из 25 студентов группы 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 - экономического анализа, остальные - на кафедре статистики. Какова вероятность того, что два случайно отобранных студента занимаются научной работой на кафедре статистики?

25 Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность то-

го, что в делегацию войдут: а) две женщины и один мужчина; б) все женщины.

26 Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три девушки.

27 Определить вероятность того, что участник лотереи «Спортлото - 5 из 36» угадает правильно: а) все 5 номеров; б) 3 номера.

28 Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок открывается в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Какова вероятность того, что замок откроется, если установить произвольную комбинацию цифр?

29 Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включается случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

30 В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

31 Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность: а) попадания в первую или третью зоны; б) промаха по мишени.

32 Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3. Определить вероятность поражения второй мишени.

33 В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трех студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий - юноша; в) все трое юноши?

34 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Выстрелы производятся по одному до первого попадания. Определить вероятность того, что придется производить четвертый выстрел.

35 Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность в автомобиле, равна 0,8, а второй - 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется на ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет выпущен на линию; б) автомобиль не будет выпущен на линию.

36 Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равно 0,44. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

37 Из 40 деталей в ящике 5 бракованных. Какова вероятность того, что взятые одновременно две детали не будут бракованными?

38 В коробке 12 карандашей трех цветов, по четыре карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все карандаши окажутся разного цвета. Решить задачу при условии: а) карандаши возвращают в коробку; б) карандаши не возвращают в коробку.

39 Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты: а) два шара черного цвета; б) красный и черный в любой последовательности; в) второй шар будет черным; г) оба шара одного цвета?

40 Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

41 Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,6. Производится по одному выстрелу одновременно из трех орудий. Цель будет поражена, если в нее попадут не менее двух орудий. Найти вероятность: а) поражения цели; б) промаха одним или двумя орудиями.

42 Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, перемешав все буквы и укладывая их в ряд по одной, получим слово: а) «машина»; б) «шина»; в) «маша»?

43 В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупок; г) по крайней мере, два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

44 Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии - 0,2, на втором - 0,35, на третьем - 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

45 Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

46 Два игрока поочередно бросают 2 игральные кости. Выигрывает тот, у которого первым появится в сумме двенадцать очков. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

47 Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?

48 Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что она имеется в очередной библиотеке, равна 0,3. Что вероятнее - найдет читатель книгу или не найдет?

49 В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трех приобретенных билетов?

50 В урне 10 красных, 5 зеленых и 3 черных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

51 На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 - первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что: а) оба содержат овощи первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?

52 Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очерёдной библиотеки книга и так же одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?

53 Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично», равна для первого студента 0,7, для второго - 0,6, для третьего - 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

54 Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй - 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

55 Студент из 40 экзаменационных вопросов выучил только 30. Каким выгодней ему зайти на экзамен - первым или вторым?

56 В первой бригаде 6 тракторов, во второй - 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

57 На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, второго - 0,7, третьего - 0,8. Найти вероятности всех возможных значений числа автомобилей, работающих безотказно в течение определенного времени.

58 Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.

59 В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри заданного прямоугольника?

60 Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?

61 Вероятность спортсменом взять в одной попытке высоту 1,8 м равна 0,6, высоту 2 м- 0,2, высоту 2,1 м - 0,1. Спортсмен, не взявший предыдущую высоту, выбывает из соревнований. Спортсмену на каждую высоту дается три попытки. Определить вероятность того, что спортсмен закончит соревнования, взяв высоту: а) 1,8 м; б) 2 м; в) 2,1 м.

62 В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 черных шара. Во второй 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что среди них: а) все шары одного цвета; б) все шары разного цвета.

63 Предположим, что 85 % людей, которые интересуются возможными инвестициями (вложениями) в брокерскую фирму, не покупают акции, а 33 % не покупают облигации. Также известно, что 28 % интересующихся прерывают покупку ценных бумаг - как акций,

так и облигаций. Некто интересуется делами компании; чему равна вероятность, что он будет покупать либо облигации, либо акции, либо и то и другое?

64 Консультационная фирма получила приглашение для выполнения двух работ от двух международных корпораций. Руководство фирмы оценивает вероятность получения заказа от фирмы А (событие А) равной 0,45. Также, по мнению руководителей фирмы, в случае, если фирма заключит договор с компанией А, то с вероятностью в 90 % компания В даст фирме консультационную работу. С какой вероятностью компания получит оба заказа?

65 Вероятность того, что покупатель, собирающийся приобрести компьютер и пакет прикладных программ, приобретет только компьютер, равна 0,15. Вероятность, что покупатель купит только пакет программ, равна 0,1. Вероятность того, что будут куплены и компьютер, и пакет программ, равна 0,05. Чему равна вероятность того, что будут куплены или компьютер, или пакет программ, или компьютер и пакет программ вместе?

Вопросы для самопроверки

1 Дайте определения достоверного, невозможного и случайного событий и приведите примеры этих событий.

2 Приведите примеры элементарных и сложных событий.

3 Сформулируйте классическое определение вероятности и условия его применения. Укажите интервал возможных значений вероятности.

4 В чем состоит отличие геометрического определения вероятности от классического определения?

5 Что называется относительной частотой появления события А? Сформулируйте статистическое определение вероятности.

6 Приведите формулы комбинаторики.

7 Сформулируйте принцип практической невозможности маловероятных событий.

8 Дайте определение полной группы событий. Какие события называются противоположными?

9 Что называется суммой событий?

10 Что называется произведением событий?

11 Дайте определения независимых и зависимых событий, безусловной и условной вероятностей.

12 Приведите формулы для вычисления вероятности суммы несовместных событий.

13 Приведите формулы для вычисления вероятности произведения независимых и зависимых событий, поясните отличие этих формул.

14 Как определить вероятность появления хотя бы одного события?

ТЕМА 2 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Цель изучения – ознакомиться со следствиями теорем сложения и умножения вероятностей, рассмотреть локальную и интегральную теоремы Лапласа.

***Данная тема включает в себя*:**

- следствия теорем сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса;
- повторение испытаний (формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа);
- производящая функция;
- наивероятнейшее число наступивших событий.

Контрольные задачи

1 При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70 %, во второй 23 % и в третьей 7 % всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4 % жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. 1) Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4 %. 2) Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4 %. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

2 В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?

3 Имеются две урны. В первой - семь красных шаров и три черных, во второй - три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

4 Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,08, для растений из необработанных семян - 0,4. Взятое наудачу растение оказалось пораженным. Какова вероятность того, что оно выращено из партии обработанных семян?

5 В районе 24 человека обучаются на заочном отделении института, из них шесть - на мехфаке, двенадцать - на агрофаке и шесть – на экономфаке. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов мехфака равна 0,6, агрофака - 0,76 и экономфака - 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все, экзамены, окажется студентом экономфака.

6 В первом ящике из 20 деталей 4 бракованных, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

7 Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной 0,4. 1) Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле? 2) Стрелок поразил цель. Какова вероятность, что он стрелял из пристрелянной винтовки?

8 Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причем 20 % всех семян 1-го сорта, 30 % - 2-го сорта, 10 % - 3-го сорта и 40 % - 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго - 0,3, для третьего - 0,2, для четвертого - 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

9 Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов - по 20 вопросов, трое - по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что он из тех трех студентов, которые подготовили только по 10 вопросов?

10 Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $p_1=0,2;\ p_2=0,5;\ p_3=0,3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

11 Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шара, в четвертой и пятой урнах - по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна, и из нее извлекается шар. Ка-

кова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

12 В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной для первой бригады, равна 0,7, для второй - 0,8. 1) Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. 2) Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность, что она из второй бригады?

13 Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором - 0,3, в третьем - 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купит товар только в одном магазине, если каждый магазин он посетил дважды.

14 Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса -0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

15 Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени как 0,15, 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,6, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,3, когда ситуация «посредственная», и с вероятностью 0,1, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс

экономического состояния изменился. Какова вероятность того, что экономика страны на подъеме?

16 Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости 5 очков появится: а) два раза; б) хотя бы один раз.

17 Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) пять семян; б) не менее четырех; в) не более одного.

18 Вероятность выбора отличника на факультете равна 1/7. Из 28 студентов группы наудачу вызываются три студента. Определить вероятности всех возможных значений числа отличников, которые могут оказаться среди вызванных трех студентов.

19 В семье 5 детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков.

20 Всхожесть клубней картофеля равна 80%. Сколько нужно посадить клубней, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100?

21 Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

22 Два равносильных противника играют в шахматы. Для каждого из них - что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти. Ничьи во внимание не принимаются.

23 Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова

вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать по крайней мере четыре правильных ответа?

24 Вероятность появления события А в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие А наступит хотя бы в одном испытании.

25 Событие А появится в случае, если событие В наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события А, если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события В равна 0,8.

26 Два стрелка производят по n выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.

27 Торговый агент в среднем контактирует с восемью потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1.

а) Чему равна для агента вероятность двух продаж в течение одного дня?

б) Чему равна вероятность того, что у агента будут хотя бы две продажи в течение дня?

в) Чему равна вероятность того, что в течение одного дня не будет продаж?

28 Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых - с дефектами. Покупатель приобретает 5 из

них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность того, что все 5 компьютеров окажутся без дефектов?

29 Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,05. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми: а) три изделия; б) не более двух; в) не менее двух изделий.

30 Станок-автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной равна, 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

31 Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10 %. Определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен. Вычислить вероятности по формулам Бернулли, Лапласа, Пуассона. Сравнить результаты, сделать выводы.

32 На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

33 Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 50 студентов.

34 Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,99. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 200 монет.

35 Численность работников предприятия составляет 500 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для

каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.

36 В пчелиной семье 5 000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна 0,001 для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболеет более чем одна пчела.

37 Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.

38 Всхожесть семян составляет 80%. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдут от 650 до 760?

39 Найти такое число K, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более K мальчиков, если вероятность рождения мальчика 0,515.

40 В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины равна 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных автомобилей и вероятность этого числа.

41 Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зерен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.; б) доля (частость) всхожих зерен будет отличаться от вероятности 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1?

42 Два стрелка одновременно делают выстрелы по мишени. Сколько нужно произвести залпов, если наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, равно 8, причем вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, а для второго - 0,8?

43 При проведении некоторого опыта вероятность появления ожидаемого результата равна 0,01. Сколько раз нужно провести опыт, чтобы с вероятностью 0,5 можно было бы ожидать хотя бы одного появления этого результата?

44 В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

45 Всхожесть зерна равна 90%. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести по абсолютной величине будет отличаться от вероятности взойти $p=0,9$ не более чем на 0,1.

46 Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности 0,8, не превысила ε.

47 Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

48 Известно, что 10% делянок под овощами плохо обработаны. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более чем на 0,01?

49 Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.

50 Проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась от 0,95 меньше, чем на 0,01?

51 Вероятность того, что человек в период страхования будет травмирован, равна 0,006. Компанией застраховано 1000 человек. Годовой взнос с человека составляет 150 руб. В случае получения травмы, застраховавшийся получает 12000 руб. Какова вероятность того, что выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

Вопросы для самопроверки

1 Дайте определение несовместных и совместных событий.

2 В чем состоит отличие определения вероятности суммы событий для совместных и несовместных событий?

3 Сформулируйте формулу полной вероятности, поясните смысл входящих в нее величин.

4 Сформулируйте формулу Байеса и поясните, в чем ее особенность.

5 Вероятности каких событий позволяет вычислить формула Бернулли?

6 Условия применения локальной теоремы Лапласа?

7 Условия применения интегральной теоремы Лапласа?

8 Как определить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности?

9 Приведите формулу производящей функции.

10 Как определить наивероятнейшее число наступивших событий?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1 Из 20 вопросов, входящих в экзаменационный билет, студент подготовил 17. Найти вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из 2-х вопросов.

2 Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,75, второго 0,85, третьего 0,95. Найти вероятность того, что а) откажут два станка, б) все три станка будут работать безотказно, в) хотя бы один станок откажет в работе.

3 Из колоды содержащей 52 карты вынимается наугад 3. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4 Найти вероятность того, что абонемент наберет правильный двухзначный номер, если он знает, что данный номер не делится на 5.

5 Игральная кость подброшена два раза: а) найти вероятность того, что сумма очков на верхних гранях составит 7, б) найти вероятность того, что хотя бы два очка появится при одном подбрасывании.

6 В урне имеется 5 черных и 7 красных шаров. Последовательно (без возвращения) извлекается три шара. Найти вероятность того, что

а) все три шара будут красными, б) три шара будут красными или черными.

7 В группе из 15 человек 6 человек занимаются спортом. Найти вероятность того, что из случайно отобранных 7 человек 5 человек занимаются спортом.

8 Мышь может выбрать наугад один из 5 лабиринтов. Известно, что вероятности её выхода из различных лабиринтов за три минуты равны 0,5; 0,6; 0,2; 0,1; 0,1. Пусть оказалось, что мышь выбралась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала первый лабиринт? Второй лабиринт?

9 Из 10 билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что из 5 билетов выигрышным является один.

10 В сентябре вероятность дождливого дня 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день эта вероятность равна 0,3. Известно, что в сентябре они выиграли некоторую игру. Какова вероятность, что в тот день: а) шел дождь; б) был ясный день.

11 Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,4. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

12 В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем 10 деталей, из них 8 стандартных. Из случайно взятого ящика наудачу взята одна деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она взята из второго ящика.

13 На каждой из пяти одинаковых карточек написана одна из следующих букв: А, Е, Н, С, Т. Карточки перемешаны. Определить вероятность того, что из вынутых и положенных в ряд карточек а) можно составить слово «СТЕНА», б) из трех карточек можно составить слово «НЕТ».

14 Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,46, второго 0,6.

15 Имеется 3 урны. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 белых и 5 черных шаров, в третьей 7 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что выбрана вторая урна.

16 Монета подбрасывается 3 раза. Найти вероятность того, что герб появится: а) все 3 раза, б) только один раз, в) хотя бы один раз.

17 На отдельных карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все карточки перемешиваются, после чего наугад берут 5 карточек и раскладывают их в ряд. Определить вероятность того, что будет получено число 1 2 0 3 5. (Задачу решить, используя определение вероятности события и теоремы теории вероятностей).

18 Три известных экономиста одновременно предложили свои теории, которые считались равновероятными. После наблюдения над состоянием экономики оказалось, что вероятность того развития, которое она получила на самом деле, в соответствии с первой теорией равна 0,5; со второй – 0,7; с третьей – 0,4. Каким образом это изменяет вероятности правильности трёх теорий.

19 В магазине продается 4 магнитофона. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно, равны: 0,91; 0,9; 0,95; 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу магнитофон выдержит гарантийный срок.

20 Игральная кость сделана так, что вероятность выпадения определённого числа пропорциональна числу очков. Какова вероятность выпадения трёх очков, если известно, что выпало нечётное число очков.

21 Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 3?

22 Студент в поисках книги посещает 3 библиотеки. Вероятность того, что они есть в библиотеке, равны 0,4, 0,5, 0,1, а того, что они выданы или нет – равновероятные события. Какова вероятность того, что нужная книга найдена.

23 Найти вероятности того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

24 В урне имеется 10 белых, 5 черных и 15 красных шаров. Извлекается последовательно 2 шара. Рассматриваются 2 события: A – хотя бы один шар из двух вынутых красный, B – хотя бы один вынутый шар белый. Найти вероятность события $C = A + B$.

25 Наудачу набранный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем различны.

26 В магазин трикотажных изделий поступили носки, 60% которых получено от одной фабрики, 25% - другой и 15% - третьей. Найти вероятность того, что купленные покупателем носки изготовлены на второй или третьей фабрике.

27 Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, вторую – 0,35 и третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй 0,4, третьей 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

28 Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что: а) хотя бы на одной появится 2 очка, б) на них выпадет по одинаковому числу очков.

29 Из 9 жетонов, занумерованных разными однозначными цифрами, выбирается 3. Найти вероятность того, что последовательная запись их номеров покажет возрастание значений цифр.

30 Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Какова вероятность того, что выиграет хотя бы один билет из трех купленных?

31 Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу 4 карты. Найти вероятность того, что все эти карты будут разных мастей.

32 Имеется 3 урны. В первой из них 5 белых и 6 черных шаров, во второй 4 белых и 3 черных шара, в третьей 5 белых и 3 черных шара. Некто наугад выбирает одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из второй урны.

33 В магазине имеется в продаже 20 пар обуви, из которых 7 пар 42 размера. Найти вероятность того, что из 8 покупателей 3 выберут обувь 42 размера.

34 В мешке смешаны нити трех цветов: 30% белых, 50% красных, остальные зеленые. Определить вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трех нитей окажется, что все они одного цвета.

35 В урне «*a*» белых и «*b*» черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону – тоже белый.

36 У рыбака имеется 2 места ловли рыбы, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю в одно из мест, 2 раза закинул удочку. Найти вероятность того, что рыба клюнет только один раз.

37 На сборку поступило 50 деталей от первого станка, 100 от второго и 150 от третьего. Первый станок дает 2%, второй 1% и третий 2% брака. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется не бракованной. Задачу решить, используя: а) определение вероятности события; б) формулу полной вероятности.

38 Найти вероятность того, что на две определённые карточки в «Спортлото – 5 из 36» будет получено по минимальному выигрышу (угадано ровно три числа).

39 Вероятность того, что стрелок попадет, хотя бы один раз при трех выстрелах равна, 0,992. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая ее постоянной при каждом выстреле.

40 Пусть 3% всех мужчин и 5% всех женщин дальтоники. Наугад выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность,

что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково.)

41 В группе из 25 человек 10 учится на «отлично», 8 на «хорошо» и 7 на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что из взятых наугад 8 человек 3 человека учатся на «отлично».

42 Какова вероятность, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным.)

43 В группе спортсменов 10 лыжников, 6 боксеров и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет 0,8, боксеров 0,7, бегунов 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

44 На одной полке наудачу расставляется 8 книг. Найти вероятность того, что определенные 3 книги окажутся поставленными рядом.

45 Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: событие A – все три раза выпала цифра или событие B – два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитать вероятности этих событий.

46 К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?

47 На один ряд из 7 мест случайным образом садятся семь учеников. Найти вероятность того, что три определённых ученика окажутся рядом.

48 Известно, что при 10 – кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых пяти бросаниях?

49 Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а 5 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

50 Игральная кость подброшена 3 раза. Найти вероятность того, что: а) все 3 раза выпадет четное число очков; б) четное число очков выпадет только один раз; в) четное число очков выпадет хотя бы один раз.

51 Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 3 раза больше производительности второго. Вероятность изготовления не бракованной детали первым автоматом равна 0,95, а вторым 0,8. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

52 Какова вероятность получения 1 туза, туза и короля при сдаче 6 карт из колоды в 52 карты?

53 В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что 2 наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

54 Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.

55 Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?

56 20 машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом 5 из них имели неисправность ходовой части, 8 имели неисправности в моторе, а 10 были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?

57 Из 15 билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что из 10 билетов выигрышным является один.

58 Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить 20 вопросов по элементам математического анализа и 25 по геометрии. Однако он успел подготовить только 15 вопросов по элементам математического анализа и 20 по геометрии. Билет содержит 3 вопроса, 2 из которых по элементам математического анализа и 1 по геометрии. Какова вероятность, что: а) студент сдаст экзамен на отлично (отвечает на все три вопроса); б) на хорошо (отвечает на любые два вопроса)?

59 На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплёте. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплёте?

60 Из 5 винтовок, из которых 3 снайперские и 2 обычные, наудачу выбирается одна, и из неё производится выстрел. Найти вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки – 0,95, а из обычной 0,7.

61 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено 3 выстрела. Какова вероятность, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание.

62 На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена 0,5, для второго 0,3, для третьего 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен.

63 В первой урне из 10 шаров, 6 черного и 4 белого цвета, во второй 3 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) 2 белых шара; б) хотя бы один шар черный; в) белый и черный в любой последовательности.

64 Вероятность того, что хотя бы один из трех покупателей купит определенный товар, равна 0,784. Вероятности покупки товара покупателями одинаковы. Определить вероятность того, что: а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.

65 В коробке находятся жетоны с цифрами то 1 до 10. Наудачу извлекаются два жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба жетона с нечетными номерами; б) хотя бы один жетон с нечетным номером; в) один жетон с четным номером.

66 В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали 7 человек, во второй 4 человека. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.

67 В первой бригаде из 8 тракторов 2 требуют ремонта, во второй из 6 - тракторов 1 требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определить вероятность того, что: а)

оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.

68 В организации работают 12 мужчин и 8 женщин. Для них выделено 3 премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.

69 Из 25 работников, предприятия 10 имеют высшее образование: Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют; а) три человека; б) один человек; в) хотя бы один человек.

70 На карточках написаны буквы «К», «А», «Р», «Т», «О», «Ч», «К», «А». Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность того, что получится: а) слово «КАРТОЧКА»; б) слово «КАРТА»; в) слово «ТОК».

71 В коробке из 25 изделий 15 повышенного качества. Наудачу извлекается 3 изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

72 Бросается три игральных кости. Какова вероятность того, что: а) хотя бы на одной из них появится 5 очков; б) на всех выпадут нечетные цифры; в) на всех костях выпадут одинаковые цифры.

73 В первом ящике из 6 шаров 4 красных и 2 черных, во втором ящике из 7 шаров 2 красных и 5 черных. Из первого ящика во второй, переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика - черный.

74 Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием 0,1, вторым 0,15. а) Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется не стандартным, б) Взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность, что оно выпущено на втором предприятии.

75 Имеется три урны. В первой 3 белых и 2 черных шара, во второй и третьей по 4 белых и 3 черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

76 Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40 % всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства 90%, второго 85%, третьего 95%. а) Определить вероятность того, что наудачу 'взятое семя не взойдет, б) Наудачу взятое семя не взошло. Какова вероятность, что оно получено от второго хозяйства?

77 Программа экзамена состоит из 30 вопросов. Из двадцати студентов группы 8 человек выучили все вопросы, 6 человек по 25 вопросов, 5 человек по 20 вопросов, а один человек 10 вопросов. Определить вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.

78 Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки 99%, необработанных 85%. а) Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет? б) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

79 В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода 0,9, для второго 0,8, для третьего 0,8 и для четвертого 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из - строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

80 Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, втором 0,6 и третьем 0,8. Определить вероятность того, что покупатель купит товар в каком-то магазине. Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его во втором магазине.

81 Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трех подгрупп. В первой подгруппе – 1 человек, во второй – 4 и в третьей – 5. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,8, эксперты второй подгруппы – 0,6, эксперты третьей подгруппы – 0,5. Наудачу вызванный эксперт принимает 3 независимых решения. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты, верно; в) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты, верно.

82 Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 3; б) произведение числа очков не превосходит 3; в) произведение числа очков делится на 3.

83 Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно 1, 2, 3, 4, i=1, 2, 3, 4. Для контроля наудачу берутся 7 из-

делий. Определить вероятность того, что среди них 1 первосортное, 1, 2 и 3 второго, третьего и четвертого сорта соответственно.

84 Среди 10 лотерейных билетов 6 выигрышных. Наудачу взяли 4 билетов. Определить вероятность того, что среди них 1 выигрышный.

85 В лифт 6-этажного дома сели 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.

86 В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину 1/4.

87 Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времена от 900 до 1100. Одно из событий длится 10 мин., другое - 20 мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

88 В круге радиуса 11 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,25 и 3,52.

89 В двух партиях 71 и 47 - процент доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

90 Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком 0,61, вторым – 0,55. Первый сделал 2, второй - 3 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

91 Два игрока *A* и *B* поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает герб. Первый бросок делает игрок *A*, второй - *B*, третий - *A* и т. д.

Найти вероятность указанных событий: выиграл *A* до 4 броска; выиграл *A* не позднее 4 броска; выиграл *B* до 4 броска; выиграл *B* не позднее 4 броска.

92 Урна содержит 12 занумерованных шаров с номерами от 1 до 12. Шары, извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: *A* - номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,... 12; *B* - хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; *C* - нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий *A, B, C*.

93 Из 1000 ламп 100 принадлежат 1 партии, 250 -2 партии, 650 – 3 партии. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа - бракованная.

94 В первой урне 4 белых и 1 черный шар, во второй 2 белых и 5 черных. Из первой во вторую переложено 3 шара, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар - белый.

95 В альбоме 8 чистых и 10 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 3 марки (среди которых, могут быть и чистые, и гашеные),

подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается 2 марки. Определить вероятность того, что все 2 марки чистые.

96 В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем 1й завод поставляет 50% изделий, 2 – 30%, 3 – 20%. Среди изделий 1 завода 70% первосортных, 2 – 80%, 3 – 90%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено 1-м заводом.

97 Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает 3 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадает 2 раза.

98 Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

99 На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 - мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Определять вероятность получения 1 крупного выигрыша и 2 мелких.

100 Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность 7 «сбоев».

101 Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующему неравенству: $80 \le m \le 90$; $80 \le m$; $m \le 90$.

II СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ТЕМА 3 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель изучения – ознакомиться с дискретными случайными величинами, способами их описания, законами распределения случайных величин и их числовыми характеристиками.

***Данная тема включает в себя*:**

- понятие дискретной случайной величины;
- закон распределения дискретной случайной величины и способы его задания;
- формула Бернулли;
- биномиальный и пуассоновский законы распределения дискретных случайных величин;
- поток событий и его свойства;
- геометрический и гипергеометрический законы распределения дискретных случайных величин;
- числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение) дискретных случайных величин и методы их вычисления;
- начальный и центральный моменты.

Контрольные задачи

1 Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X - числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

2 Вероятность рождения в семье мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3 Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине, 0,4. Составить закон распределения случайной величины X - числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

4 В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3-х спортсменов. Составить закон распределения случайной величины X - числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

5 В группе, состоящей из $(2N + 1)$ студентов, N девушек. Составить закон распределения случайной величины X - числа девушек из случайно отобранных трех студентов (N - номер студента в группе).

6 В партии из *(N+5)* изделий *(N+1)* изделие высокого качества. Случайно отбирается 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины X - числа изделий высокого качества среди отобранных.

7 Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X - числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

8 Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X - числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить график распределения. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

9 Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание случайной величины X - числа купленных билетов, если он имеет возможность купить: а) только 5 билетов; б) неограниченное число билетов.

10 На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, равными соответственно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины

X - числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины X.

11 В игре спортивной лотереи угадывается 5 номеров из 36. Игрок получает выигрыш, если угадает 5, 4 или 3 номера. За 5 угаданных номеров выигрыш составляет 10 тыс. руб. Сумма выигрыша по одной карточке за 4 правильно угаданных номера в 10 раз больше, чем за 3. Составить закон распределения случайной величины X - числа правильно угаданных номеров. Определить среднюю величину выигрыша, если известно, что карточек было выпущено 1 млн. штук. Стоимость одной карточки 1 рубль. Выигрыши составляют 50 % общей суммы тиража.

12 Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9, вторым - 0,8 и третьим - 0,7. Составить закон распределения случайной величины X- числа попаданий в цель, если каждый стрелок производит по одному выстрелу. Определить математическое ожидание случайной величины X.

13 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

Значения вероятностей по вариантам												
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,1	0,2	0,05	0,15	0,1	0,2	0,25	0,1	0,4	0,05	0,15	0,12
3	0,2	0,25	0,15	0,2	0,3	0,4	0,3	0,15	0,3	0,1	0,25	0,23
5	0,4	0,3	0,2	0,25	0,3	0,3	0,2	0,25	0,2	0,15	0,25	0,46
7	0,2	0,15	0,4	0,25	0,2	0,05	0,15	0,35	0,08	0,25	0,2	0,14
9	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,05	0,1	0,15	0,02	0,45	0,15	0,05

По одному из 12 вариантов построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

14 Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым - 0,8. Составить закон распределения случайной величины X- числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал. Найти математическое ожидание случайной величины X.

15 Предприниматель рассматривает возможность покупки акций трех предприятий, по каждой из которых известна доходность, как отношение величины получаемого дохода за период времени к цене акции и вероятности возможных значений доходности. Акции, какого предприятия следует считать более доходными, если руководствоваться средним значением (математическим ожиданием) доходности?

Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
Доходность (%), X	Вероятность, P_x	Доходность (%), Y	Вероятность, P_y	Доходность (%), Z	Вероятность, P_z
5	0,2	3	0,1	1	0,1
7	0,3	7	0,4	6	0,4
9	0,4	10	0,3	10	0,25
11	0,1	15	0,2	20	0,25

Акции, какого предприятия являются менее рискованными (считается, что чем выше колеблемость доходности акций, тем больше их рискованность)?

16 Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной ве-

личины X - суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

17 Математическое ожидание случайной величины X равно 8. Найти математическое ожидание случайных величин: а) $X-4$; б) $X+6$; в) $3X-4$; г) $4X+3$.

18 Дисперсия случайной величины равна 8. Найти дисперсию следующих величин: а) $X - 2$; б) $X + 6$; в) $3X - 2$; г) $2X +1$.

19 Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:

$Z=4X-2Y$; б) $Z=2X-4Y$; в) $Z=3X+5Y$; если $M(X)=5$, $M(Y)=3$, $D(X)=4$, $D(Y)=6$. Случайные величины X и Y независимы.

20 Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) $Z=4X+2Y$; б) $Z=5X-3Y$; в) $Z=3X-Y$, если $M(X)=6$, $M(Y)=5$, $D(X)=5$, $D(Y)=4$.

21 Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X - числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено: а) не более двух бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

22 Независимые случайные величины X и Y имеют следующие распределения:

x_i	2	4	6
p_i	0,3	0,5	0,2

y_i	3	4
p_i	0,4	0,6

Составить закон распределения случайных величин: а) $Z=X+Y$; б) $V= XY$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и V.

23 В бригаде имеется два звена тракторов. В первом звене - 3 трактора, причем вероятность безотказной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Во втором звене - 2 трактора, вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, а второго - 0,7. Составить закон распределения случайной величины X - числа тракторов, работавших безотказно в бригаде. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

24 Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна $N:(N+5)$, вторым $N:(N+2)$. Составить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$, где X - число поражений мишени первым стрелком, Y - число поражений мишени вторым стрелком. Найти числовые характеристики случайной величины Z.

25 Случайные величины X - площадь посева овощей на хозяйство (га) и $У$- урожайность овощей с 1 га (т) имеют следующие распределения:

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	10	15	20
p_i	0,2	0,5	0,3

Определить средний валовой сбор овощей на хозяйство, дисперсию и среднее квадратическое отклонение валового сбора овощей.

26 Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=l$ с вероятностью $p_1=0,2;$ $x_3=5$ с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью p_2. Найти x_2 и p_2, если известно, что $M(X)=3,9$.

27 Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» - 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2; 3), если известно, что $M(X)=3,9$.

28 Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ числа выигравших билетов, если их было приобретено 100.

29 По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.

30 Подброшены две игральные кости. Найти $M(X)$, где X - случайная величина - сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.

31 Хозяйство продает крупный рогатый скот живым весом x_1 и x_2 $(x_1 > x_2)$. Вероятность того, что крупный рогатый скот будет продан весом x_1 равна 0,4. Найти закон распределения случайной величины X - веса крупного рогатого скота, если математическое ожидание составило 4,60 ц, а дисперсия 0,24.

32 Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

x_i	x_1	x_2	2	3
p_i	0,1	p_2	0,4	0,35

Определить x_1, x_2, p_2, если известно, что $M(X)=2$, $Д(X)=0,9$.

33 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	x_2	x_3	8
p_i	0,1	p_2	0,5	0,1

Найти x_2, x_3, p_2, если известно, что $M(X)=4$, $M(X^2) = 20,2$.

34 Совокупность студентов имеет следующее распределение по результатам сдачи сессии:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	p_2	p_3	p_4

Найти вероятности получения удовлетворительных, хороших и отличных оценок, если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило 3,7, а среднее квадратическое отклонение - 0,9.

35 По данным задачи 14 определить модальное и медианное значения случайной величины X.

36 Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки в бухгалтерских проводках счетов. Предположим, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5 ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа.

а) Найти закон распределения случайной величины X – числа ошибок, выявленных аудитором.

б) Построить функцию распределения и ее график (вероятностную гистограмму).

в) Определить вероятность того, что аудитор обнаружит более чем одну ошибку.

37 Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых - с дефектами. Покупатель приобретает 5 из них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность того, что все 4 компьютеров окажутся без дефектов? Ремонт одной дефектной

машины будет стоить 50$. Найдите математическое ожидание общей средней стоимости ремонта и его дисперсию.

Вопросы для самопроверки

1 Приведите примеры дискретных случайных величин.

2 Что называется законом распределения дискретной случайной величины и как его можно задавать?

3 Укажите условия применения формулы Бернулли.

4 Назовите общие и отличительные черты биномиального и пуассоновского распределений дискретных случайных величин.

5 Что понимается под потоком событий, каковы его свойства?

6 Назовите черты геометрического и гипергеометрического распределений дискретных случайных величин.

7 Дайте определения математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения дискретных случайных величин и приведите формулы для их вычисления. Поясните сущность числовых характеристик случайных величин.

8 Дайте определения начального и центрального моментов и приведите формулы для их вычисления.

ТЕМА 4 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Цель изучения – ознакомиться с условиями, при которых случайные величины утрачивают случайный характер и их поведение становится закономерным.

***Данная тема включает в себя*:**

- неравенство и теорема Чебышева;
- теорема Бернулли.

Контрольные задачи

1 Количество кормов, расходуемых на ферме крупного рогатого скота в сутки, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 т. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход кормов на ферме превысит 10 т.

2 Количество электроэнергии, потребляемой поселком в течение суток, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 4 тыс. кВт-ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление энергии: а) превысит 8 тыс. кВт- ч.; б) не превысит 6 тыс. кВт- ч.

3 Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян число взошедших окажется от 3750 до 4250, если известно, что $M(X)=4000$. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

4 Вероятность вызревания семян овощной культуры в данной местности составляет 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 растений число растений с вызревшими семенами составит от 750 до 850. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

5 В хозяйстве имеется 100 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них в течение определенного периода составляет 0,9. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность то-

го, что отклонение числа безотказно работавших автомобилей за определенный период от его математического ожидания не превзойдет по модулю 5.

6 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	6	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 3$.

7 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	0	1	3
p	0,1	0,2	0,4	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 2{,}5$.

8 Всхожесть семян некоего растения составляет 90%. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян: а) отклонение доли взошедших семян от постоянной вероятности взойти каждому из них не превзойдет по модулю 0,03; б) отклонение числа взошедших семян от математического ожидания не превзойдет по модулю 100.

9 Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{a^2} & \text{при } a < x \le 2a, \\ 1 & \text{при } x > 2a. \end{cases}$$

а) с помощью неравенства Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \frac{a}{2}$; б) определить вероятность того, что $|X - M(X)| < \frac{a}{2}$.

10 Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{при } 0 < x \le 2a, \\ 1 & \text{при } x > 2a. \end{cases}$$

а) используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$; б) определить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$.

11 Выборочным способом определяют вес колосьев ячменя. Сколько необходимо отобрать колосьев, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что средний вес случайно отобранных колосьев будет отличаться от среднего веса колосьев во всей партии (принимаемого за математическое ожидание) не более чем на 0,1 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса не превышает 0,2 г.

12 Сколько человек необходимо отобрать для определения удельного веса лиц со специальным образованием, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты лиц со специальным образованием от их доли, принимаемой за постоянную вероятность, не превышало по модулю 0,04?

13 В результате анализа торговой деятельности некоего магазина установлено, что среднемесячные издержки обращения составляют 300 усл. ден. ед. Оцените вероятность того, что в очередном месяце издержки не выйдут за пределы 280-320 усл. ден. ед. Известно, что дисперсия издержек равна 16 усл. ден. ед.

14 Для определения средней урожайности на площади 100 000 га взято на выборку по одному гектару от каждого участка размером 100 га. Определите вероятность того, что средняя выборочная вероятность будет отличаться от действительной средней по всей площади не более чем на 0,5 ц, если дисперсия урожайности на отдельных участках (по 100 га) не превышает 2 ц.

Вопросы для самопроверки

1 Приведите неравенство Чебышева.

2 Сформулируйте теорему Чебышева.

3 Сформулируйте теорему Бернулли.

ТЕМА 5 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель изучения – ознакомиться с непрерывными случайными величинами, способами их описания, законами распределения непрерывных случайных величин и их числовыми характеристиками.

***Данная тема включает в себя*:**

- понятие непрерывной случайной величины;

- функция распределения вероятностей случайной величины (интегральная функция распределения) и ее свойства;

- плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная функция распределения) и ее свойства;

- связь между дифференциальной и интегральной функциями распределения непрерывной случайной величины;

- числовые характеристики непрерывных случайных величин;

- понятие моды и медианы непрерывной случайной величины;

- методы вычисления вероятности попадания значений непрерывной случайной величины в заданный интервал;

- равномерное распределение вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная и интегральная функции распределения; числовые характеристики; определение вероятности попадания случайной величины в заданный интервал);

- нормальное распределение вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная и интегральная функции распределения; нормированное нормальное распределение; функция Лапласа; числовые характеристики; определение вероятности попадания случайной величины в заданный интервал; правило трех сигм);

- экспоненциальное (показательное) распределение вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная и интегральная функции распределения; числовые характеристики; определение вероятности попадания случайной величины в заданный интервал).

- функция надежности.

Контрольные задачи

1 Даны законы распределения дискретной случайной величины:

а)	X	1	4	6	8	б)	X	-2	5	7	9
	p	0,1	0,3	0,4	0,2		p	0,4	0.3	0,2	0,1

Найти интегральную функцию случайной величины X и построить ее график.

2 По данным задачи 5 (тема 3) составить интегральную функцию случайной величины X и построить ее график.

3 По данным задачи 6 (тема 3) составить интегральную функцию случайной величины X и начертить ее график.

4 По одному варианту задачи 14 (тема 3) составить интегральную функцию случайной величины X и начертить ее график.

5 Найти интегральную функцию распределения случайной величины X - числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.

6 Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго 0,6 и третьего 0,8. Найти интегральную функцию случайной величины X - числа экзаменов, сданных студентом. Определить $M(X)$.

7 Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & \text{при } -2< x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0; 2).

8 Дана интегральная функция случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le 0,\\ \dfrac{x^6}{4} & \text{при } 0< x \le \sqrt[3]{2},\\ 1 & \text{при } x > \sqrt[3]{2}.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина *X* два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0; 1).

9 Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при x} \le 1,\\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{8} & \text{при } 1< \text{x} \le 3,\\ 1 & \text{при x} > 3.\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X*; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2).

10 Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le -2a,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{2} & \text{при } -2a < x \le (4-2a),\\ 1 & \text{при } x > (4-2a).\end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-а; а). б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

11 Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le A, \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{при } A < x \le B, \\ 1 & \text{при } x > B. \end{cases}$$

Найти значения A и B, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

12 Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1; 1,5); в) начертить графики функций.

13 Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ \dfrac{x^3 - 8}{19} & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; г) моду и медиану величины X. Построить графики функций.

14 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{4a-2x}{3a^2} & \text{при } 2 < x \le a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\frac{a}{6};\frac{a}{3})$.

15 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^3+3 & \text{при } 0 < x \le \sqrt{\sqrt{5}-1}, \\ 0 & \text{при } x > \sqrt{\sqrt{5}-1}. \end{cases}$$

Определить: а) интегральную функцию случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 1,1). Начертить графики интегральной и дифференциальной функций.

16 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{1}{16} & \text{при } 1 < x \le 17, \\ 0 & \text{при } x > 17. \end{cases}$$

Определить: а) интегральную функцию случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (9; 12); в) начертить графики интегральной и дифференциальной функции.

17 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{4}{a^2}x^3 & \text{при } 0 < x < \sqrt{a}, \\ 0 & \text{при } x > \sqrt{a}. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале ($\sqrt{0{,}25a}$; $\sqrt{0{,}5a}$); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

18 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3e^{-3x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию случайной величины X и начертить ее график; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал (-1; $\frac{1}{3}$); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

19 Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ a(x-1)^2 & \text{при } 0 < x < 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Определить: а) значение а; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2); г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

20 Дана интегральная функция:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0{,}5(1+\sin x) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Построить графики интегральной и дифференциальной функций. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

21 Случайная величина *X* задана дифференциальной функций:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le 1,\\ \dfrac{3x^2-2x}{c} & \text{при } 1 < x \le 4,\\ 0 & \text{при } x > 4.\end{cases}$$

Найти: а) постоянную с; б) математическое ожидание, дисперчию и среднее квадратическое отклонение.

22 Случайная величина *X* задана дифференциальной функций:

$$f(x)=\frac{2c}{e^x+e^{-x}}$$

при $-\infty < x < +\infty$. Найти постоянную *c*.

23 Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале *(-2; N)*. Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X*; б) интегральную функцию; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1;\ \frac{N}{2})$; г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

24 Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5; 11); б) (-3; 5). Начертить графики этих функций.

25 Равномерно распределенная случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x)= 0,125$ в интервале $(a-4;\ a+4)$, вне него $f(x) = 0$. Найти *M(X), Д(X), σ (X)*.

26 Для исследования продуктивности определенной породы

домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.

27 Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г. и математическим ожиданием *а=1000 г.* Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: а) от 900 до 1300 г.; б) не более 1500 г.; в) не менее 800 г.; г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г.; д) начертить график дифференциальной функции случайной величины *X*.

28 Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: *а=50 ц/га, σ =10 ц/га.* Определить: а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б) процент участков с урожайностью от 45 до 60 ц/га.

29 Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г. и математическим ожиданием *а=0*. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.

30 Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина *X*, имеющая математическое ожидание $m=60$ кг и среднее квадратическое отклонение, равное 1,5 кг. Найти симметричный относительно m интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина *X*. Написать дифференциальную функцию этой случайной величины.

31 С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой особи крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

32 Урожайность овощей по участкам является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

33 Нормально распределенная случайная величина *X* задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{32}}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (3; 9); б) моду и медиану случайной величины *X*.

34 Нормально распределенная случайная величина *X* задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найти интервал, в который с вероятностью 0,9545 попадет случайная величина X в результате испытаний.

35 Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=20$. Вероятность попадания ее в интервал (20; 30) равна 0,4772. Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 25).

36 Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если: а) параметр $\lambda = 2$; б) $\lambda = 5$; в) $\lambda = 0,5$.

37 Случайная величина X распределена по показательному закону, причем $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал: а) (0; 1); б) (2; 4).

38 Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ показательного закона распределения случайной величины X заданной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

если $\lambda = 0,4$; б) $\lambda = 3$; в) $\lambda = 4$.

39 Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = l - e^{-0,1t}$, второго - $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) откажет хотя бы один элемент; г) оба элемента откажут.

40 Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течение 10 суток, равна 0,64. Определить функцию надежности

для каждого элемента, если функции одинаковы.

41 Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

42 Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 4 вызова; б) не менее трех вызовов.

43 Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x)^2}$$

Определить: а) интегральную функцию случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

44 Случайная величина X распределена по закону Релея:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^a}} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2), при $a = 1$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

45 Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид закона Парето:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} & \text{при } x \geq a, \beta > 0. \end{cases}$$

Определить: а) размер годового дохода, который для случайно взятого лица будет превышен с вероятностью 0,8; б) дифференциальную функцию случайной величины X; в) математическое ожидание случайной величины X при $\beta > 1$.

46 Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma=560$ и неизвестным математическим ожиданием a. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12 439. Найдите среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

47 Масса товаров, помещаемых в контейнер определенного размера, — нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистую массу, меньшую, чем 4,2 т. Найдите среднюю массу и среднее квадратическое отклонение чистой массы контейнера.

48 Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda=0,25$ дня. Найдите долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней.

Вопросы для самопроверки

1 В чем отличие непрерывных случайных величин от дискретных случайных величин? Приведите примеры непрерывных случайных величин.

2 Как задается закон распределения непрерывной случайной величины?

3 В чем заключается сущность интегральной и дифференциальной функций распределения непрерывных случайных величин, и как они связаны между собой?

4 Приведите формулы для нахождения числовых характеристик непрерывных случайных величин.

5 Дайте характеристику равномерного закона распределения непрерывных случайных величин.

6 Приведите формулы для нахождения числовых характеристик равномерно распределенных непрерывных случайных величин.

7 Дайте характеристику нормального закона распределения непрерывных случайных величин.

8 Назовите параметры нормального закона распределения и поясните их смысл.

9 В чем состоит отличие нормированного нормального распределения от нормального распределения? Приведите формулы для дифференциальной и интегральной функций распределения нормального и нормированного нормального законов распределения.

10 Что называется функцией Лапласа? Укажите ее свойства и приведите примеры ее использования.

11 Сформулируйте правило трех сигм.

12 Дайте характеристику экспоненциального (показательного) закона распределения непрерывных случайных величин. Что является параметром показательного распределения?

13 Приведите формулы для нахождения числовых характеристик непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону.

ТЕМА 6 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ. СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель изучения – ознакомиться с распределениями функций случайных аргументов, двумерной случайной величины.

***Данная тема включает в себя*:**

- функция одного случайного аргумента;
- функция двух случайных аргументов;
- закон распределения дискретной двумерной случайной величины;
- функция распределения вероятностей и плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины;
- условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины;
- отыскание плотностей и условных законов распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины;

- числовые характеристики непрерывной системы двух случайных величин.

Контрольные задачи

1 Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	0	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Найти закон распределения случайной величины Y, где: а) $Y=2X-1$; б) $Y=X+5$; в) $Y=X^2-2$; г) $Y=\sqrt{X}$.

2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-2	-1	0
p	0,2	0,4	0,1

Найти закон распределения случайной величины Y, где: а) $Y=2X+1$; б) $Y=X^3-1$; в) $Y=X^2$; г) $Y=\sqrt{X+2}$.

3 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y, если: а) $Y = 4X - 4$; б) $Y = X^2$.

4 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,2	0,7	0,1

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y=sin^2X$; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y.

5 Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Найти дифференциальную функцию случайной величины: а) $Y=sinX$; б) $Y=cosX$.

6 Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a=2$, $\sigma=1$. Найти дифференциальную функцию случайной величины: а) $Y=2X+6$; б) $Y=X^3$.

7 Сторона квадрата X имеет равномерное распределение на отрезке [1;2]. Найти функцию плотности вероятности площади квадрата.

8 Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти дифференциальную функцию случайной величины а) $Y=X^3$; б) $Y=3X$.

9 Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно. Случайная величина X распределена в интервале (0; 2), а случайная величина Y в интервале (0; 10). Найти интегральную и дифференциальную функции случайной величины $Z=X+Y$.

Построить графики интегральной и дифференциальной функций случайной величины Z.

10 Случайная величина X равномерно распределена в интервале (-4; 1), а случайная величина Y равномерно распределена в интервале

(1; 6). Найти дифференциальную функцию случайной величины $Z=X+Y$ и начертить ее график.

11 Независимые случайные величины X и Y заданы дифференциальными функциями:

$f_1(x) = e^{-x}$ при $0 \le x < \infty$

$f_2(y) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$ при $0 \le y < \infty$.

Найти дифференциальную функцию случайной величины $Z=X+Y$.

12 Независимые случайные величины X и Y распределены по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Найти дифференциальную функцию случайной величины $Z=X+Y$. Показать, что случайная величина Z распределяется по нормальному закону.

13 Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания a и средним квадратическим отклонением σ. Найти плотность распределения случайной величины X.

14 Задана двумерная дискретная случайная величина:

Y \ X	2	4
0	0,1	0,3
5	0,2	0,15
10	0,15	0,1

Найти законы распределения составляющих случайных величин.

15 Задана двумерная дискретная случайная величина:

$Y \backslash X$	0	5	20
0	0,15	0,2	0,10
10	0,10	0,3	0,15

Найти математическое ожидание и дисперсию составляющих случайных величин X и Y.

16 Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы *(X, Y)*.

17 Функция распределения случайной двумерной величины задана в задании 3. Найти вероятность попадания случайной точки *(X, Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0,\ x = 2, y= 1,\ y = 5$.

18 Найти вероятность попадания случайной точки *(X, Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1,\ x=2,\ y=3,\ y=5$, если известна функция распределения:

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

19 Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}) & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы *(X, Y)*.

20 Распределение 100 студентов по количеству пропущенных часов занятий и экзаменационной оценке представлено в следующей таблице. Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин: количества пропущенных часов (*X*) и экзаменационной оценки (*Y*).

Количество пропущенных часов	Оценка на экзамене			
	2	3	4	5
0	0	5	10	10
4	5	15	20	15
10	10	5	5	0

21 Распределение хозяйств по дозам внесения удобрений и урожайности озимой пшеницы приведено в следующей таблице:

Дозы	Урожайность, ц с 1 га			
	до 35	30-35	35-40	Свыше 40
до 1	18	а	5	-
1-2	а	15	20	10
свыше 2	-	а	12	20

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин урожайности (*X*) и доз внесения удобрений (*Y*).

22 Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y) = a \sin(x + y)$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ и $f(x,y) = 0$, вне квадрата. Определить: а) коэффициент a; б) $M(X), M(Y)$; в) $Д(X), Д(У)$.

23 Дана дискретная двумерная величина (X, Y):

а)

Y \ X	2	4
10	0,15	0,10
15	0,3	0,05
20	0,15	0,25

б)

Y \ X	100	200
0	0,1	0,25
5	0,05	0,2
10	0,1	0,3

Найти: а) условный закон распределения *X* при условии, что *y=20*; б) условный закон распределения *У* при условии, что *x=200*.

24 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y) = cosx \cdot cosy$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ и $f(x,y)=0$, вне квадрата. Доказать, что составляющие *X* и *Y* независимы.

25 Непрерывная двумерная случайная величина *(X, Y)* распределена равномерно внутри треугольника с вершинами *O* (0,0), *A* (0,6) и *B* (6,0). Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

26 Система случайных величин *(X, Y)* распределена равномерно внутри квадрата со стороной а, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.

27 Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины *(X, Y)*:

$$f(x,y) = \begin{cases} 36xy\, e^{(-x^2+y^2)} & \text{при } x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0,\ y \le 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

28 Система случайных величин *(X, Y)* равномерно распреде-

лена в треугольнике, ограниченном прямыми *x=0, y=0, x+y=a (a > 0)*. Определить: а) математические ожидания и дисперсии случайных величин *X* и *Y*, б) корреляционный момент.

29 Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины *(X, Y)*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 2e^{-2x} & \text{при } x > 0 \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \ge 0, \\ 5e\text{-}5y & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы;

б) функцию распределения системы.

Вопросы для самопроверки

1 Как найти распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента?

2. Приведите формулы для нахождения математического ожидания функции случайного аргумента.

3 Как найти распределение функции двух случайных аргументов?

4 Охарактеризуйте распределение «хи квадрат», Стьюдента, Фишера-Снедекора.

5 Как может быть задан закон распределения дискретной двумерной случайной величины?

6 Приведите свойства функции распределения вероятностей и плотности совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины.

7 Как определить условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины?

8 Приведите способы отыскания плотностей и условных законов распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины.

9 Приведите формулы для определения математического ожидания и дисперсии непрерывной двумерной случайной величины.

ТЕМА 7 ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ. ЦЕПИ МАРКОВА

Цель изучения – познакомиться со случайными процессами и их характеристиками, марковским случайным процессом, уравнениями Колмогорова.

***Данная тема включает в себя*:**

- определение случайного процесса и его характеристики;
- понятие марковского случайного процесса;
- потоки событий;
- уравнения Колмогорова;
- процессы гибели и размножения;
- системы массового обслуживания с отказами;
- цепь Маркова.

Контрольные задачи

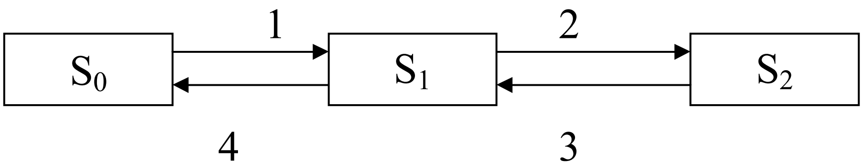
1 На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 1,5 вызовов в минуту.

Найдите вероятность того, что за две минуты: а) не придет ни одного вызова; б) придет ровно три вызова; в) придет хотя бы один вызов.

2 Постройте граф состояний следующего процесса: устройство работает, в случайный момент времени оно может выйти из строя, устройство осматривается в определенные моменты времени и в случае необходимости – ремонтируется, если оно ремонту не подлежит, то списывается.

Составьте систему уравнений для определения предельных вероятностей состояний.

3 Процесс гибели и размножения представлен графом (рис.). Найдите предельные вероятности состояний.



4 Покупатели приходят в магазин для покупок с интенсивностью 90 человек в час, а средняя продолжительность обслуживания составляет 5 минут. Определите показатели эффективности работы СМО (магазина) при наличии одного продавца.

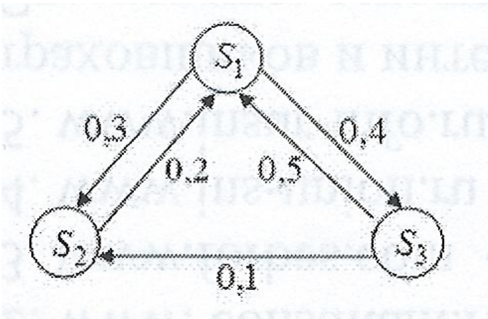
5 Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix},$$

а вектор начального распределения вероятностей - $\bar{p}(0) = (0;1)$.

Чему равен вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге.

6 Состояния банка S1, S2, S3 характеризуются годовыми процентными ставками, равными соответственно 7%, 9%, 11%. Эти ставки устанавливаются в начале года и не меняются до следующего года. Размеченный граф состояний с постоянными значениями переходных вероятностей представлен на рисунке:



Определите матрицу вероятностей перехода из состояния в состояние.

7 Цепь Маркова управляется матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Определите матрицу вероятностей переходов за три шага.

Вопросы для самопроверки

1 Что является предметом изучения теории случайных процессов?

2 Классификация случайных процессов по характеру изменения во времени и по области возможных значений.

3 Какими числовыми характеристиками может быть описан случайный процесс?

4 Что является предметом теории массового обслуживания?

5 Что представляет собой процесс работы системы массового обслуживания?

6 Характеристика простейшего потока событий.

7 Как составляются уравнения Колмогорова? Как определяются предельные вероятности системы?

8 Характеристика процессов гибели и размножения

9 Как определяются показатели эффективности системы массового обслуживания с отказами?

10 Как определяются вероятности состояния системы?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1 Имеется 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует. Построить многоугольник распределения.

2 Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

3 Непрерывная случайная величина задана дифференциальной функцией *f(x):*

$$f(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ \ x<-\dfrac{\pi}{2}\ \text{или}\ x>0,\\ \cos x\ \ \text{при}\ -\dfrac{\pi}{2}<x<0.\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения случайной величины *X*: *F(x).*

б) Построить графики *F(x)* и *f(x).*

в) Найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (-π/3;-π/4).

4 Дана интегральная функция распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ .$$

Найти: дифференциальную функцию f*(x), M(X), σ(X), D(X).*

5 Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,4 вторым - 0,6. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин *X* и *Y* - числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

6 Производится три независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,4. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в указанных испытаниях. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение *X.*

7 В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти закон распределения случайной вели-

чины *X,* равный числу стандартных деталей в выборке. Построить многоугольник распределения.

8 Непрерывная случайная величина задана функцией распределения *F(x):*

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ (1/\pi)(x-0{,}5\sin 2x) & \text{при } 0<x\le\pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

а) Найти плотность вероятности случайной величины *X*.

б) Построить графики *f(x), F(x).*

в) Найти вероятность попадания случайной величины *X* в (0; π/2).

9 Найти: *M(X)* непрерывной случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале (2;8); функцию распределения *F(x)* и функцию плотности вероятности *f(x);* вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал (3; 6).

10 Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *T* равна 0,001. Найти вероятность того, что за время *T* откажут ровно *X* элементов.

Определить закон распределения случайной величины *X* и её числовые характеристики.

11 В коробке 7 карандашей, из которых 4 красных. Из этой коробки наудачу извлекается 3 карандаша.

а) Найти закон распределения случайной величины *X* равной числу красных карандашей в выборке.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Найти вероятность события: $0<X\leq 2$.

12 Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 250 деталей окажется ровно X бракованных. Определить закон распределения случайной величины X и её числовые характеристики.

13 Устройство состоит из большего числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время не откажет хотя бы один элемент, равна 0,99.

14 Непрерывная случайная величина на всей числовой оси OX задана интегральной функцией:

$$F(x)= (1/2)+(1/\pi)arctg(x).$$

Найти вероятность, что в результате двух испытаний случайная величина примет значение, заключенное в интервале (0;1).

15 Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leq \pi/6, \\ C\sin 3x & \text{при } \pi/6< x\leq \pi/3, \\ 0 & \text{при } x>\pi/3. \end{cases}$$

Найти: постоянную C, интегральную функцию $F(x)$.

16 Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично» наугад извлекаются 3 работы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, если X - число работ оцененных

на «отлично» среди извлеченных. Построить многоугольник распределения. Чему равна вероятность событий $X>0$.

17 Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

18 В урне 5 белых и 20 черных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина X - число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения величины X.

19 Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти интегральную функцию и построить ее график.

20 Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le 1,\\ C(x^2-x) & \text{при } 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти: постоянную C, интегральную функцию $F(x)$. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (1/2; 3/2).

21 С вероятностью попадания при явном выстреле 0,9 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. Дискретная случайная величина X - число промахов:

а) Найти закон распределения X.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Найти вероятность событий: $X<2$, $X\leq 3$, $1<X\leq 3$.

22 Бросают три монеты. Требуется: а) задать случайную величину X, равную числу выпавших "решеток"; б) построить ряд распределения.

23 Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности (закон Коши):

$$f(x)= C/(1+x^2).$$

Найти: а) постоянную $C=const$; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания в интервал $-1<X<1$; г) построить графики $f(x)$, $F(X)$.

24 Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины, имеющей плотность вероятности:

$$f(x)= 1/(3\sqrt{2\pi})\ exp\ (-(x+2)^2/18)$$

Указать интервал, симметричный относительно $M(X)$ в который попадает случайная величина X с вероятностью $p=0,9973$.

25 Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при четырёх бросках, если вероятность попадания равна 0,7.

26 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго 0,4. Дискретная случайная величина X - число попаданий в мишень.

а) Найти закон распределения X.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Найти вероятность $X\geq 1$.

27 Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа *X* бракованных изделий, содержащихся в выборке.

28 Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*:

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \ge x_0\ (x_0>0),\\ 0 & \text{при } x<x_0.\end{cases}$$

а) Найти плотность вероятности случайной величины *X*.

б) Построить графики *f(x), F(x)*.

в) Найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (0; 1).

29 *M(X)* и *σ(X)* нормально распределённой случайной величины *X* соответственно равны 10 и 2.

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (12,14).

30 Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} x\le 2,\\ (x-2)^2 & \text{при} 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при} x\ge 3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение: а) меньше 2, б) меньше 3, в) не меньше 3, г) не меньше 5.

31Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго 0,8, для третьего – 0,7. Найти закон распределения величины *X* – числа попадания в мишень. Построить многоугольник распределения. Чему равна вероятность получения не менее двух попаданий.

32 Случайная величина *X* распределена равномерно интервале (0, π). Найти закон распределения случайной величины У=*cosX*.

33 Случайная величина *X* равномерно распределена на отрезке [1, 3]. Найти плотность вероятности случайной величины У=X^2.

34 Дифференциальная функция непрерывной случайной величины *X* задана на всей числовой оси *OX*:

$$f(x)= 4C/ (1+x^2)$$

Найти постоянный параметр *C*.

35 Непрерывная случайная величина *X* задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при x} \le -2,\\ 0{,}5+(1/\pi)\arcsin(\mathrm{x}/2) & \text{при - 2} < \mathrm{x} \le 2,\\ 1 & \text{при x} \ge 2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате трех испытаний *X* примет значение в интервале (-1;1).

36 В первой урне 5 шаров – 2 белых и 3 черных. Во второй 3 шара – 1 белый и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили во вторую 2 шара, после чего, из второй в первую переложили 1 шар. Найти закон распределения случайной величины *X* – числа белых шаров в первой урне, после всех перекладываний шаров. Какова вероятность того, что число белых шаров не больше, чем первоначально. Построить многоугольник распределения.

37 Случайную величину X умножили на k. Как от этого изменяются ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

38 Функция распределения случайной величины X задана формулой

$$F(x)=A+B\operatorname{arctg} x \qquad (-\infty<X+\infty).$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f(x)$; в) вероятность того, что величина X попадет в отрезок [-1; 1].

39 Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ 0{,}5x-1, & 2<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 2, б) меньше 3, в) не меньше 3, г) не меньше 5.

40 Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4, \\ 1, & x>\pi/4. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию и вероятность попадания случайной величины на интервал $(\pi/16;\pi/8)$.

41 Вероятность изготовления стандартной детали – 0,98. Для контроля на удачу взято 100 деталей. Найти закон распределения случайной величины X, равный числу нестандартных деталей в вы-

борке. Построить многоугольник распределения. Найти вероятность событий:

а) в выборке 2 стандартных детали; б) в выборке более 2 стандартных деталей.

42 Найти *M(X)* числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 50 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,01.

43 Непрерывная случайная величина задана дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$$

в интервале *(-c; c),* вне этого интервала *f(x)=0*. Найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал *(-c/2;c/2)* и функцию распределения *F(x).*

44 Непрерывная случайная величина *X* распределена нормально с математическим ожиданием *a=10*. Вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал (0; 10)?

45 Производятся 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

46 Дискретная случайная величина *X* – число мальчиков в семьях с 5-тью детьми. Предполагают равновероятное рождение мальчика и девочки. Найти закон распределения. Построить многоугольник распределения.

Найти вероятность событий: а) в семье 2-3 мальчика, б) не более 3-х мальчиков, в) более 1 мальчика.

47 При 10 000 бросании монеты "герб" выпал 6400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?

48 Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время *t* равна 0,01, Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время *t* окажется меньше двух.

49 Непрерывная случайная величина задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$.

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (2;3).

50 Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

(распределение Лапласа). Найти математическое ожидание величины X.

Задачи 51 – 70. Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y. Составить законы распределений случайных величин $Z=X+Y$, $V=XY$. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W=2X-4Y$.

51

x_i	-1	3	4
p_i	0,2	p_2	0,6

y_j	2	5
q_j	0,4	0,6

52

x_i	2	7	9
p_i	p_1	0,3	0,2

y_j	0	1
q_j	0,7	0,3

53

x_i	4	6	9
p_i	0,1	0,5	p_3

y_j	3	5
q_j	0,4	0,6

54

x_i	1	2	5
p_i	p_1	0,1	0,8

y_j	1	3
q_j	0,4	0,6

55

x_i	-2	4
p_i	0,4	0,6

y_j	0	5	10
q_j	0,3	q_2	0,3

56

x_i	0	5	10
p_i	0,3	0,1	p_3

y_j	-2	4
q_j	0,3	0,7

57

x_i	-2	0	3
p_i	p_1	0,5	0,2

y_j	4	6
q_j	0,5	0,5

58

x_i	-5	0	10
p_i	0,2	0,2	0,6

y_j	1	6
q_j	q_1	0,4

59

x_i	-1	2	4
p_i	0,4	0,2	p_3

y_j	-3	1
q_j	0,4	0,6

60

x_i	4	7	10
p_i	0,3	0,2	p_3

y_j	1	5
q_j	0,1	0,9

61

x_i	-4	-2	1
p_i	0,1	0,6	0,3

y_j	0	4
q_j	q_1	0,2

62

x_i	-10	-6	-1
p_i	0,4	p_2	0,2

y_j	-1	2
q_j	0,2	0,8

63

x_i	-1	0	3
p_i	0,6	0,2	0,2

y_j	2	4
q_j	q_1	0,2

64

x_i	-2	-1	1
p_i	0,3	0,2	p_3

y_j	4	5
q_j	0,2	0,8

65

x_i	3	7	10
p_i	p_1	0,1	0,6

y_j	-4	4
q_j	0,3	0,7

66

x_i	-6	-2	-1
p_i	0,2	p_2	0,2

y_j	1	4
q_j	0,2	0,8

67

x_i	2	5
p_i	0,4	p_2

y_j	-1	3	7
q_j	0,1	0,3	0,6

68

x_i	0	10	20
p_i	0,4	p_2	0,4

y_j	-2	-1
q_j	0,3	0,7

69

x_i	-10	0	5
p_i	0,3	0,4	0,3

y_j	1	4
q_j	0,8	q_2

70

x_i	-2	1
p_i	0,1	p_2

y_j	-6	-1	2
q_j	0,2	0,3	0,5

В задачах 71 – 90 непрерывная случайная величина задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a;в)$; б) дифференциальную функцию (функцию плотности вероятностей) $f(x)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

71 $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{\pi^2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

$a = 1, \quad в = 2.$

72 $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{64}{81}x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{9}{8}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{9}{8}. \end{cases}$$

$a = 0{,}5, \quad в = 0{,}9.$

73 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ (x-2)^2 & \text{при} \quad 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$

$a=2{,}5$, $в=3$.

74 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{1}{6}(x^2-x) & \text{при} \quad 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$

$a=1$, $в=2$.

75 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -\frac{\pi}{2},\\ 0{,}5\cdot(\sin x+1) & \text{при} \quad -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

$a=0$, $в=\frac{\pi}{6}$.

76 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{16}{25}x^2 & \text{при} \quad 0<x\le \frac{5}{4},\\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{5}{4}.\end{cases}$

$a=0{,}5$, $в=1$.

77 $F(x)=\begin{cases}e^x & \text{при} \quad x\le 0,\\ 1 & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

$a=-2$, $в=0$.

78 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \ln x & \text{при} \quad 1<x\le e,\\ 1 & \text{при} \quad x>e.\end{cases}$

$a=2$, $в=e$.

79 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 100,\\ 1-\left(\frac{100}{x}\right)^3 & \text{при} \quad x>100.\end{cases}$

$a=110$, $в=120$.

80 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 1-e^{-2x} & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

$a=0$, $в=2$.

81 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{x^2}{e^2} & \text{при} \quad 0<x\le e,\\ 1 & \text{при} \quad x>e.\end{cases}$

$a=1$, $в=2$.

82 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 3,\\ \frac{x^4-81}{175} & \text{при} \quad 3<x\le 4,\\ 1 & \text{при} \quad x>4\end{cases}$

$a=3{,}2$, $в=3{,}5$.

83. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{x^4}{16} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

$a=1$, $в=1{,}5$.

84. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{(x-1)^2}{25} & \text{при} \quad 1<x\le 6,\\ 1 & \text{при} \quad x>6.\end{cases}$

$a=2$, $в=4$.

85 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ \dfrac{(x+2)^3}{216} & \text{при } -2<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$

$a=-1,\quad в=3.$

86 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x^3-x}{60} & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$

$a=1,\quad в=2.$

87 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{64}{49}x^2 & \text{при } 0<x\le \dfrac{7}{8},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{7}{8}.\end{cases}$

$a=0{,}5,\quad в=1.$

88 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ \dfrac{x^3+8}{16} & \text{при } -2<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

$a=-1,\quad в=1.$

89 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x^3-x^2}{48} & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$

$a=2,\quad в=3.$

90 $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le\sqrt{2},\\ \dfrac{x^6-x^4-4}{96} & \text{при } \sqrt{2}<x\le\sqrt{5},\\ 1 & \text{при } x<\sqrt{5}.\end{cases}$

$a=1{,}5,\quad в=2.$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

III МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕМА 1 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Цель изучения – ознакомиться с основными понятиями математической статистики и возможными областями применения методов математической статистики.

***Данная тема включает в себя*:**

- цели и задачи математической статистики;

- выборочный метод: сущность и основные понятия;

- статистическое распределение выборки и формы его представления;

- эмпирическая функция распределения;

- полигон и гистограмма.

Контрольные задачи

1 По списку на предприятии числится 100 рабочих, которые имеют следующие разряды:
1, 5, 2, 4, 3, 4, 6, 4, 5, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 2, 1,4, 5, 5, 4, 3, 4, 6, 1, 2, 4, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 5. 6, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 1, 2,4, 5, 3, 3, 2, 3, 6,4, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2, 6, 3, 3, 4, 5,4, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 5, 6, 1, 5.

Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.

2 Имеются следующие данные о числе производственных подразделений на каждом из 100 сельскохозяйственных предприятий:
4, 5, 3, 4, 6, 7, 4, 5, 3, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 6, 6, 5, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 2, 5, 3, 5, 4, 3, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 6, 7, 6,4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 5, 4,3, 4, 5, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 2 ,4, 3, 7, 5, 6, 4, 5.

Составить ряд распределения сельскохозяйственных предприятий по числу производственных подразделений на одно хозяйство.

Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.

3 Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии.

Таблица Распределение работников по стажу работы

Стаж работы, лет	до 1	1-5	5-10	10-20	20-40	Всего
Число работников	8	12	16	14	10	60

4 Для определения потерь зерна при уборке проведено 100 измерений случайным способом. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя величина потерь зерна с 1 га и возможная величина потерь, если площадь уборки зерновых составила 640 га.

5 С помощью случайной выборки изучалось время выполнения производственной операции рабочими бригады. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение производственной операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12 часа. Считая время выполнения производственной операции нормально распределенной случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время выполнения производственной операции всех рабочих с доверительной вероятностью: а) 0,9; б) 0,95.

6 Случайным бесповторным способом изучались остатки горючесмазочных материалов на складе предприятий. Обследовано 110

предприятий из 750. Средние остатки составили 150 т при среднем квадратическом отклонении 42 т. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будут находиться средние остатки горюче-смазочных материалов на одно предприятие и общие остатки горюче-смазочных материалов.

7 В районе имеется 10 000 дачных участков населения. В результате выборочного обследования 300 дачных участков оказалось, что средняя выборочная урожайность овощей составила 250 ц с гектара при среднем квадратическим отклонением 60 ц с гектара. Известно, что 40 % общей площади посевов овощей занимали помидоры. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на всех дачных участках и удельный вес посевов помидор. Сколько необходимо обследовать дачных участков, чтобы предельная ошибка выборки по признакам уменьшилась в 1,5 раза?

8 Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?

9 На фирме проведен выборочный опрос 10 % работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказалось 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства - 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой, - 21. С доверительной вероятно-

стью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

10 Взято 16 проб молока, поступившего на реализацию из акционерного сельскохозяйственного предприятия. Средняя жирность молока составила 3,7 % при среднем квадратическом отклонении 0,5 %. Какова вероятность того, что средняя жирность молока всех партий не выйдет за пределы от 3,6 % до 3,8 %?

11 Тридцать восемь студентов университета сдали экзамен по статистике на отличные и хорошие отметки. Чему равна вероятность того, что в случайной выборке из 100 студентов по крайней мере 30 окажутся с хорошими и отличными оценками по статистике?

12 Из 500 выпускников средних школ города 72 % собираются поступать в институт. Чему равна вероятность того, что среди случайно отобранных выпускников доля желающих поступить в вуз окажется выше 80 %?

Вопросы для самопроверки

1 Назовите основные задачи математической статистики.

2 Дайте определения понятий: генеральная и выборочная совокупности; объем генеральной и выборочной совокупности.

3 Как обеспечивается репрезентативность выборки? Назовите основные методы отбора объектов в выборочную совокупность.

4 Укажите основные виды представления результатов выборочных наблюдений.

5 Как найти эмпирическую функцию распределения?

6 В чем отличие полигона и гистограммы распределения?

ТЕМА 2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель изучения – ознакомиться с методами нахождения статистических оценок неизвестных параметров теоретического распределения.

***Данная тема включает в себя*:**

- статистическое оценивание параметров распределения (точечные и интервальные оценки);

- числовые характеристики выборки (средняя выборочная; выборочная и исправленная выборочная дисперсии; выборочное и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение);

- метод произведений и метод сумм нахождения числовых характеристик выборки.

Контрольные задачи

1 По списку на предприятии числится 100 рабочих, которые имеют следующие разряды:

1, 5, 2, 4, 3, 4, 6, 4, 5, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 2, 1,4, 5, 5, 4, 3, 4, 6, 1, 2, 4, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 1, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 5. 6, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 1, 2,4, 5, 3, 3, 2, 3, 6,4, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2, 6, 3, 3, 4, 5,4, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 5, 6, 1, 5.

Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2 Имеются следующие данные о числе производственных подразделений на каждом из 100 сельскохозяйственных предприятий:

2,4, 5, 3, 4, 6, 7, 4, 5, 3, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 6, 6, 5, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 2, 5, 3, 5, 4, 3, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 6, 7, 6,4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 5, 4,3, 4, 5, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 2 ,4, 3, 7, 5, 6, 4, 5.

Составить ряд распределения сельскохозяйственных предприятий по числу производственных подразделений на одно хозяйство. Определить среднее число производственных подразделений на одно хозяйство, модальное и медианное значения числа подразделений, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3 Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии.

Таблица Распределение работников по стажу работы

Стаж работы, лет	До 1	1-5	5-10	10-20	20-40	Всего
Число работников	8	12	16	14	10	60

Найти средний стаж работы, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

4 Имеются следующие данные о площади посевов овощей в хозяйствах совокупности районов.

Таблица Площадь посевов овощей на хозяйство

Район	Номер хозяйства						
	1	2	3	4	5	6	7
1	8	10	12	6	15	30	21
2	32	16	26	41	44	38	-
3	101	165	230	144	84	76	260
4	22	30	44	18	16	31	-
5	10	7	4	3	12	7	6
6	255	366	384	273	450	510	-
7	121	84	96	110	161	143	-
8	34	16	84	71	36	8	17
9	46	41	48	52	50	58	-
10	15	24	86	144	34	14	24

Дать сравнительную оценку колеблемости площади посевов овощей в хозяйствах двух районов.

5 Путем устного опроса изучалось качество продукции, выпускаемой фирмой и реализуемой в магазине этой фирмы. Посетители давали оценку качества по десятибалльной шкале. Были получены сводные данные.

Таблица Балльная оценка продукции предприятия

Оценка качества продукции, балл	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Число случаев	3	8	36	89	45

Определить средний балл качества продукции, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса.

6 По данным распределения студентов по результатам сдачи экзаменов определить: средний бал успеваемости студентов по каждому предмету и по всем предметам; дисперсии балла успеваемости по

предмету и в целом по всем предметам; межгрупповую дисперсию. Найти общую дисперсию успеваемости, используя правило сложения дисперсий.

Таблица Распределение студентов группы по результатам сдачи экзаменов

Оценка на экзамене	Число студентов, получивших оценку по предметам			
	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	6	10	8	8
4	10	8	9	9
5	7	6	4	5

7 Работники предприятия сгруппированы по возрасту.

Таблица Распределение работников предприятия по возрасту

Категории работников	Возраст работников, лет					Всего работников
	До 30	30-40	40-50	50-60	свыше 60	
Рабочие	43	141	216	127	118	645
Руководители	2	4	6	8	4	24
Специалисты	3	18	30	34	22	107
Всего работников	48	163	252	169	144	776

Определить: средний возраст работников, предприятия в целом и по отмеченным категориям; модальное и медианное значения возраста работников по категориям и предприятию; дисперсию и среднее квадратическое отклонение возраста по категориям работников и предприятию; межгрупповую дисперсию возраста работников. Найти общую дисперсию возраста работников, используя правило сложения дисперсий.

8 Администрацию универсама интересует оптимальный уровень запасов продуктов в торговом зале, а также среднемесячный объем покупок товаров, которые не являются предметом ежедневного потребления в семье (например таких, как сода). Для выяснения этого вопроса менеджер универсама в течение января регистрировал частоту покупок 100-граммовых пакетов с содой и собрал следующие данные x_i:

4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8.

Постройте вариационный ряд, определите его числовые характеристики. Какие рекомендации вы бы дали администрации универсама?

9 Считая данные задачи 1 результатом 20 %-ной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего, квадратического отклонения разряда рабочих; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал (0,95 $\bar{X}_в$; 1,05$\bar{X}_в$) покроет математическое ожидание разряда рабочего; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 1,5 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

10 Считая данные задачи 2 результатом 20 %-ной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения числа производственных подразделений в расчете на одно сельскохозяйственное предприятие; б) доверительный интервал для математического ожидания с

доверительной вероятностью 0,9; в) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,9 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

11 Считая данные задачи 3 результатом 20%-ной случайной бесповторной выборки, определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения изучаемого параметра; б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95; в) вероятность того, что интервал (0,95 $\bar{x}_в$; 1,05 $\bar{x}_в$) покроет математическое ожидание изучаемого параметра; г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

12 Для определения влажности зерна было взято случайным способом 25 проб. Средний процент влажности зерна составил 16 %, а выборочное среднее квадратическое отклонение - 2,5 %. Определить: а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения; б) интервал, который покроет математическое ожидание с доверительной вероятностью, 0,95.

13 Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1300 семей обследовано 130, по которым определен душевой доход на одного члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда.

Таблица Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи

Группы семей по месячному доходу на одного члена семьи, руб.	До 500	500-1000	1000-1500	1500-2000	Свыше 2000
Число семей	23	36	44	17	10

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также доля семей с доходами, менее 1000 руб. на одного члена семьи.

14 Для определения влияния микроэлементов на результаты откорма свиней проведен опыт на 8 группах животных. Рационы отличаются набором и дозами микроэлементов.

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться среднесуточный прирост свиней по каждому рациону и по опыту в целом.

Таблица Результаты откорма свиней в опыте

Рацион	Поголовье свиней, гол.	Среднесуточный прирост живой массы, г.	Среднее квадратическое отклонение, г.
1	90	500	40
2	75	575	45
3	100	610	54
4	50	450	52
5	70	590	65
6	60	650	70
7	ПО	490	48
8	80	540	62

15 Автотранспортная компания желает оценить среднее время транзита грузов из столицы в северные регионы страны. Случайная выборка 20 партий товаров дала $\bar{X}$ =2,6 дней, s = 0,4 дня. Постройте 99 %-ный доверительный интервал для среднего времени транзита товаров.

16 Предположим, что среднее время пребывания в очереди к кассиру, универмага составляет 12 мин. со средним квадратическим отклонением 3 мин. Если вы отобрали случайным образом 5 покупателей, то чему равна вероятность того, что их время пребывания в очереди составит по крайней мере 10 мин.? Чему равна средняя выборочная времени ожидания в очереди? Чему равно среднее квадратическое отклонение выборочной средней?

Вопросы для самопроверки

1 Приведите формулы для вычисления числовых характеристик выборки и укажите особенности их применения.

2 Назовите основные свойства точечных оценок.

3 Сравнительный анализ преимуществ и недостатков точечных и интервальных оценок.

4 Приведите формулу нахождения доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины по результатам выборочных наблюдений при известном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности.

5 Приведите примеры использования метода сумм и метода произведений для определения числовых характеристик выборки.

ТЕМА 3 ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИИ. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель изучения – ознакомиться с методами установления и оценки зависимости одной случайной величины от одной или нескольких других величин.

***Данная тема включает в себя*:**

- понятие функциональной и статистической зависимости, корреляционная зависимость;
- выборочные уравнение, линия и коэффициент регрессии;
- коэффициент корреляции и корреляционное отношение;
- линейная и криволинейная корреляция;
- множественная корреляция.

Контрольные задачи

1 На основании имеющихся данных:

№ п/п	Удой молока на фуражную корову, ц	Расход кормов на фуражную корову, ц корм. ед.
1	31,2	33,6
2	44,3	39,7
3	54,5	50,2
4	34,8	36,1
5	46,9	41,2
6	37,2	39,0
7	50,0	45,6
8	34,2	37,4
9	35,0	38,4
10	38,0	40,2
11	53,8	55,7

Определить параметры линейного уравнения регрессии между уровнем кормления и продуктивностью коров, рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить существенность величины коэффициентов корреляции и регрессии при уровне значимости 0,05.

2 Данные опыта приведены в таблице:

X_i	2	4	6	8	10	12	14
Y_i	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0	8,5	9,5

Полагая, что X и Y связаны зависимостью вида $y = a + bx$, найти коэффициенты a и b способом наименьших квадратов.

3 Дана таблица результатов наблюдений:

X_i	2	4	6	8	10	12	14
Y_i	3,5	6,0	7,0	6,0	7,5	8,5	10

Найти выборочный коэффициент корреляции и определить его значимость.

4 Распределение 60 предприятий химической промышленности по энерговооруженности труда Y (кВт-ч.) и фондовооруженности X (млн. руб.) дано в таблице

Y \ X	0-4,5	4,5-9,0	9,0-13,5	13,5-18,0	18,0-22,5	Итого
0-1,4	4	1	-	-	-	5
1,4-2,8	4	2	-	-	-	6
2,8-4,2	2	8	1	-	-	11
4,2-5,6	-	1	20	4	-	25
5,6-7,0	-	-	3	3	3	9
7,0-8,4	-	-	-	1	3	4
Итого	10	12	24	8	6	60

Необходимо: а) найти групповые средние и построить эмпирические линии регрессии; б) оценить тесноту связи и направление связи между переменными с помощью коэффициента корреляции; проверить значимость коэффициента корреляции и построить для него 95%-ный доверительный интервал; в) вычислить эмпирические корреляционные отношения и оценить их значимость на 5%-ном уровне; г) на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о линейной корреляционной зависимости между переменными Y и X; д) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики и найти 95%-ные доверительные интервалы для коэффициентов регрессии; е) оценить среднюю энерговооруженность труда на предприятиях, фондовооруженность которых равна 10 млн. руб., и построить для нее 95%-ный доверительный интервал; ж) найти коэффициент детерминации и пояснить его смысл; з) проверить значимость уравнения регрессии на 5%-ном уровне по F-критерию.

5 Имеются следующие данные об уровне механизации работ Y (%) и производительности труда X (т/ч.) для 14 однотипных предприятий:

X_i	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
Y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Необходимо: а) оценить тесноту и направление связи между переменными с помощью коэффициента корреляции; проверить значимость коэффициента корреляции и построить для него 95%-ный доверительный интервал; б) найти уравнения прямых регрессии; в) найти коэффициент детерминации и пояснить его смысл; г) проверить значимость уравнения регрессии на 5%-ном уровне по F-критерию; д) оценить среднюю производительность труда на предприятиях с уровнем механизации работ 60% и построить для нее 95%-ный доверительный интервал; аналогичный доверительный интервал найти для индивидуальных значений производительности труда на тех же предприятиях.

6 При исследовании корреляционной зависимости по данным 20 предприятий между капиталовложениями X (млн. руб.) и выпуском продукции Y (млн. руб.) получены следующие уравнения регрессии: $y=1,2x+2$ и $x=0,7y+2$.

Найти: а) коэффициент корреляции между рассматриваемыми признаками и оценить его значимость на 5%-ном уровне; б) средние значения капиталовложений и выпуска продукции.

7 При исследовании корреляционной зависимости между объемом продукции X (единиц) и ее себестоимостью Y (тыс. руб.) получено следующее уравнение регрессии Y по X: $Y_x=-0,0004x+4,22$. Составить уравнение регрессии X по Y, если коэффициент корреляции между этими признаками оказался равным -0,8, а средний объем продукции составляет 3000 единиц.

8 С целью исследования влияния факторов X_1 и X_2 на показатель $У$ по данным 37 предприятий были вычислены парные коэффициенты корреляции: r_{YX1}=0,105, r_{YX2}=0,024 и r_{X1X2}=0,996.

Определить: а) частные коэффициенты корреляции r_{YX1X2} и r_{YX2X1} и оценить их значимость на 5%-ном уровне; б) множественный коэффициент корреляции R_{YX1X2} и оценить его значимость; в) множественный коэффициент детерминации. Пояснить смысл полученных коэффициентов.

9 По данным 30 нефтяных компаний получено следующее уравнение регрессии между оценкой *Y* (ден. ед.) и фактической стоимостью *X* (ден. ед.) этих компаний: $У_x=0,875x+295$. Найти: 95%-ные доверительные интервалы для среднего и индивидуального значений оценки предприятий, фактическая стоимость которых составила 1300 ден. ед., если коэффициент корреляции между переменными равен 0,76, а среднее квадратическое отклонение переменной *X* равно 270 ден. ед.

10 На 10 опытных участках одинакового размера получены следующие данные об урожайности *X* (т) и содержании белка *Y* (%) для некоторой культуры:

Урожайность, т	9,9	10,2	11,0	11,6	11,8	12,5	12,8	13,5	14,3	14,4
Содержание белка, %	10,7	10,8	12,1	12,5	12,8	12,8	12,4	11,8	10,8	10,6

Необходимо: а) выровнять зависимость *Y* от *X* по параболе второго порядка и проверить значимость полученного уравнения регрессии; б) оценить тесноту связи между переменными с помощью индекса корреляции R_{yx} и коэффициента детерминации R^2_{yx}; в) определить, при каком значении урожайности средний процент содержания белка будет максимальным; найти этот процент.

11 Распределение 50 гастрономических магазинов по уровню издержек обращения *X* (%) и годовому объему товарооборота *Y* (млн. руб.) представлено в таблице.

Таблица Распределение магазинов по уровню издержек обращения и годовому объему товарооборота

Y / X	0,5-2,0	2,0-3,5	3,5-5,0	5,0-6,5	6,5-8,0	Итого
4-6	-	-	-	3	2	5
6-8	-	4	8	8	1	21
8-10	2	5	5	2	-	14
10-12	3	1	5	-	-	9
12-14	1	-	-	-	-	1
Итого	6	10	18	13	3	50

Необходимо: а) построить эмпирическую линию регрессии Y по X; б) выровнять полученную зависимость по прямой и гиперболе и вычислить остаточную дисперсию для каждого случая; в) оценить тесноту связи между переменными с помощью эмпирического корреляционного отношения η_{yx}, коэффициента корреляции r и индекса корреляции R_{yx}; проверить значимость η_{yx} и R_{yx} и сравнить их по величине; г) на основании результатов, полученных в пп. а), б), в), определить, какое из двух полученных уравнений регрессии целесообразнее использовать для исследования заданной зависимости.

12 Имеются следующие данные о годовых ставках месячных доходов по трем акциям за шестимесячный период:

Акция	Доходы по месяцам, %					
А	5,4	5,3	4,9	4,9	5,4	6,0
В	6,3	6,2	6,1	5,8	5,7	5,7
С	9,2	9,2	9,1	9,0	8,7	8,6

Есть основания предполагать, что доходы Y по акции С зависят от доходов X_1 и X_2 по акциям А и В.

Необходимо: а) составить уравнение регрессии Y по X_1 и X_2; б) найти множественный коэффициент корреляции R и коэффициент детерминации R^2 и пояснить и смысл; в) проверить значимость полученного уравнения регрессии; г) оценить средний доход по акции С, если доходы по акциям А и В составили соответственно 5,5 и 6,0%.

13 Имеются данные о выработке литья на одного работающего X_1 (т), браке литья X_2 (%) и себестоимости одной тонны литья Y (руб.) по 25 литейным цехам заводов:

№ п/п	X_1	X_2	Y
1	14,6	4,2	239
2	13,5	6,7	254
3	21,5	5,5	262
4	17,4	7,7	251
5	44,8	1,2	158
6	111,9	2,2	101
7	20,1	8,4	259
8	28,1	1,4	186
9	22,3	4,2	204
10	25,3	0,9	198
11	56,0	1,3	170
12	40,2	1,8	173
13	40,6	3,3	197
14	75,8	3,4	172
15	27,6	1,1	201
16	88,4	,1	130
17	16,6	4,1	251
18	33,4	2,3	195
19	17,0	9,3	282
20	33,1	3,3	196
21	30,1	3,5	186
22	65,2	1,0	176
23	22,6	5,2	238
24	33,4	2,3	204
25	19,7	2,7	205

Необходимо: а) найти парные, частные и множественный R_{YX1X2} коэффициенты корреляции между переменными и оценить их значимость; б) найти уравнение множественной регрессии Y по X_1 и X_2, оценить значимость этого уравнения и его коэффициентов; в) сравнить раздельное влияние на зависимую переменную каждой из объясняющих переменных, используя стандартизированные коэффициенты регрессии и коэффициенты эластичности; г) найти 95%-ные доверительные интервалы для коэффициентов регрессии, а также для среднего и индивидуальных значений себестоимости одной тонны литья в цехах, в которых выработка литья на одного работающего составляет 40 т, а брак литья – 5%.

Вопросы для самопроверки

1 Приведите примеры функциональной и статистической зависимости.

2 Как определяются выборочные уравнение, линия и коэффициент регрессии?

3 Как определяются коэффициент корреляции и корреляционное отношение?

4 Назовите общие и отличительные черты линейной и криволинейной корреляции.

5 Что понимается под множественной корреляцией?

6 Как определяются выборочные совокупный и частные коэффициенты корреляции?

ТЕМА 4 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель изучения – ознакомиться с основными понятиями и методами статистической проверки статистических гипотез.

***Данная тема включает в себя*:**

- понятие статистической гипотезы;
- виды статистических гипотез;
- общий порядок статистической проверки статистических гипотез;
- статистические критерии;
- ошибки при статистической проверке статистических гипотез;
- проверка статистических гипотез о неизвестных параметрах известных законов распределения генеральных совокупностей:
- сравнение двух средних генеральных совокупностей (большие независимые и малые независимые выборки);
- сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности (при известной и неизвестной дисперсии генеральной совокупности);
- сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки);
- сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей;
- сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности;

- сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема. Критерий Бартлетта;

- сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена;

- сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события;

- сравнение двух вероятностей биномиальных распределений;

- проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции;

- проверка гипотезы об однородности двух выборок по критерию Вилкоксона;

- проверка статистических гипотез о неизвестных законах распределения генеральных совокупностей:

- проверка гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности;

- проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности;

- проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности;

- проверка гипотезы о биномиальном распределении генеральной совокупности.

Контрольные задачи

1 По данным приложения *А* по одному показателю случайным способом провести 30%-ную выборку. По выборочной совокупности определить среднее значение. При уровне значимости 0,05 проверить

нулевую гипотезу о равенстве выборочного параметра среднему значению по всей совокупности.

2 Проверить гипотезу о равенстве средних урожайностей в двух хозяйствах, если в результате случайной выборки получены следующие результаты:

1-е хозяйство	
Урожайность, ц с 1 га	Число участков
x_i	n_i
25-35	30
35-45	30
45-55	40
	n=100

2-е хозяйство	
Урожайность, ц с 1 га	Число участков
y_i	m_i
15-25	30
25-35	30
35-45	40
45-55	50
	m=150

3 По двум независимым выборкам объема n_1 и n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, проверить гипотезу о равенстве средних при уровне значимости α=0,01, если:

а) $\bar{x}$=50; $\bar{y}$ 45; $D(X)$=1200; $D(Y)$=2025; n_1=35; n_2=45;

б) $\bar{x}$=70; $\bar{y}$=60; $D(X)$=1470; $D(Y)$=1320; n_1=60; n_2=40.

4 Провести две случайные выборки по одному из показателей приложения *А*, объемами n_1 и n_2. Проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних, при уровне значимости 0,05 (предполагается, что дисперсии неизвестны и одинаковы): а) n_1=n_2=20; б) n_1=20; n_2=10.

5 Проводилось испытание 8 сортов озимой пшеницы. Каждый сорт высевался на 6 делянках одинаковой площади. При 5 %-ном

уровне значимости проверить гипотезу о существенности различий в средней урожайности двух сортов озимой пшеницы (номера сортов даются студенту преподавателем). Урожайность озимой пшеницы, ц/га:

Повторения	Сорт							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	45	51	60	49	63	44	55	60
II	44	50	62	52	61	40	53	55
III	46	56	61	45	62	41	51	53
IV	44	52	56	48	56	43	58	57
V	47	54	61	47	62	45	54	54
VI	45	52	59	46	61	41	53	56

6 При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве среднего балла по теории вероятностей и математике:

Теория вероятностей	4	5	3	4	5	3	5	2	4	4	3	2	4	4	5	3
Математика	4	5	2	3	4	3	5	2	4	3	4	3	4	3	5	2

7 Произведено выборочное обследование 10 % приусадебных участков восьми районов случайным бесповторным способом. Получены следующие результаты об урожайности овощей:

№ п/п	Урожайность, ц/га	Среднее квадратическое отклонение, ц/га	Доля овощей в площади участков, %	Число обследованных участков
1	215	30	30	100
2	246	35	35	80
3	305	32	40	150
4	220	24	50	120
5	164	20	36	60
6	280	23	65	70
7	340	40	45	90
8	316	36	53	100

При уровне значимости 0,05 по двум районам проверить гипотезы о равенстве: дисперсий, средних выборочных урожайностей, долей посевов овощей в площади приусадебных участков.

8 Результаты выступлений спортсменов оценивались двумя судьями по десятибалльной шкале.

Номер спортсмена		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оценка	1	8,5	9	7,4	9,4	9,7	6,5	7,1	8,3	9,1	8,0
судьи	2	8,3	9,1	7,7	9,3	9,2	6,0	7,3	8,1	9,1	7,9

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости различий в оценке выступлений спортсменов двумя судьями.

9 По результатам задачи 1 темы 1 проверить гипотезу о нормальном распределении рабочих предприятия по разрядам.

10 По результатам задачи 2 темы 1 проверить гипотезу о том, что число производственных подразделений на предприятиях распределяется по нормальному закону.

Вопросы для самопроверки

1 Дайте определения статистической гипотезы, нулевой и альтернативной гипотез.

2 Почему проверка статистических гипотез называется статистической?

3 Назовите виды статистических гипотез и приведите примеры таких гипотез.

4 Какие исходы возможны при проверке статистических гипотез? Дайте определения ошибкам первого и второго родов.

5 Что называется статистическим критерием?

6 Сформулируйте понятия области принятия гипотезы и критической области. От чего зависит выбор типа критической области (левосторонней, правосторонней, двухсторонней), и как это связано с видом альтернативной гипотезы?

7 В чем заключается порядок статистической проверки статистических гипотез?

8 Что называется уровнем значимости при проверке статистических гипотез, и с какой вероятностью принимается решение?

9 Какой критерий применяется при проверке гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей? Как вычисляется наблюдаемое значение этого критерия?

10 Приведите формулу для определения наблюдаемого значения критерия при сравнении средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных генеральных дисперсиях и в случае больших независимых выборок.

11 Как проверить гипотезу о равенстве дисперсий нескольких нормально распределенных генеральных совокупностей в случае по выборкам одинакового объема? Что следует использовать в качестве оценки генеральной дисперсии, если выдвинутая гипотеза будет подтверждена?

12 В чем состоит сущность критерия Пирсона при проверке гипотезы о виде закона распределения генеральной совокупности? Приведите формулу для определения наблюдаемого значения критерия Пирсона.

13 В чем состоит отличие проверки гипотезы о виде закона распределения в случае различных законов распределения? Поясните это на примерах.

ТЕМА 5 РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Цель изучения – ознакомиться с методами статистического анализа количественных и качественных показателей.

***Данная тема включает в себя*:**

- коэффициент ранговой корреляции Спирмена;
- коэффициент ранговой корреляции Кендалла;
- проверка гипотезы о значимости ранговой корреляционной связи.

Контрольные задачи

1 Рейтинг 9 банков был оценен тремя экспертами. С помощью коэффициента ранговой корреляции найти пары экспертов, оценки которых наиболее близко соответствуют друг другу. Оценить значимость различий в оценке рейтинга банков экспертами.

Таблица Рейтинг банков (номер предпочтительности)

Эксперт	Номер банка								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	1	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	4	7	9	8	5	6
3	1	2	5	3	4	6	9	7	8

2 При приеме на работу семи кандидатам на вакантные должности было предложено два теста. Результаты тестирования (в баллах) приведены в таблице:

Тест	Кандидат						
	1	2	3	4	5	6	7
1	31	82	25	26	53	30	29
2	21	55	8	27	32	42	26

Вычислить ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла между результатами тестирования по двум тестам и на уровне α=0,05 оценить их значимость.

3 На соревнованиях по фигурному катанию 9 судей выставили следующие балльные оценки 10 фигуристам:

Фигурист	Судья								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6,0	5,8	5,7	5,8	6,0	5,9	5,9	5,9	5,8
2	5,4	5,3	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,3	5,1
3	5,2	5,0	4,9	5,1	5,2	5,0	4,8	5,3	4,9
4	5,9	5,9	5,8	5,7	5,9	5,8	6,0	5,8	5,7
5	5,0	4,9	4,9	4,9	5,1	5,0	5,0	4,8	4,7
6	5,6	5,5	5,4	5,4	5,5	5,5	5,7	5,6	5,5
7	4,8	4,7	4,6	4,6	4,8	4,9	5,0	4,6	4,5
8	5,4	5,6	5,4	5,5	5,6	5,7	5,4	5,3	5,2
9	5,8	5,7	5,6	5,7	5,8	5,9	5,6	5,7	5,8
10	5,3	5,2	5,1	5,4	5,5	5,4	5,2	5,3	5,2

Вычислить коэффициент конкордации рангов и оценить его значимость на уровне α=0,05.

Вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте условия применения ранговых коэффициентов корреляции.

2 Приведите формулы для нахождения коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

3 Как проверить гипотезу о значимости ранговой корреляционной связи?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1 а) Исходные данные представьте в виде интервального вариационного ряда.

б) Вычислите статистики (оценки) положения, рассеяния; коэффициенты асимметрии, эксцесса.

в) Подберите аппроксимирующие кривые распределения, используя нормальный закон распределения (дополнительно: используя любой другой закон распределения).

г) Проанализируйте исходные данные и результаты расчетов, сделайте предварительные (интуитивные) выводы, основываясь на практических вопросах задания.

д) Проведите проверку статистических гипотез для всех статистик (оценок) и кривых распределения.

е) Проведите сравнение результатов расчетов.

ж) Ответьте на практические вопросы задания (сделайте выводы).

1 Процесс извлечения гелия

Исследуется работа промышленных агрегатов по процессу извлечения гелия (He) из природного Оренбургского газа. Целью работы установки является более полное (близкое к 100%), извлечение гелия. Технологический процесс считается отлаженным, если в готовом продукте (баллоне с гелием) содержится не менее 99% He (или 0,99 He и только 0,01 примесей); качество продукта считается очень хорошим, если извлечено более 99,8% He. Испытываются два технологических режима *N1* и *N2* для того, чтобы выбрать лучший по признаку наибольшего процента извлечения гелия. Кроме того, необходимо повысить точность измерений, поэтому испытанию подвергаются два способа измерений: *A* и *B*. Еще одной целью исследования является установление стандарта на процент гелия (интервальная оценка математического ожидания), который может быть задан для изучаемого производственного процесса.

Результаты наблюдений в различных ситуациях представлены таблицами 1.1 - 1.4 (данные предварительно упорядочены, в табл. 1.3 и 1.4 данные представлены в абсолютных единицах).

Таблица 1.1 Технология *N1*, способ *A*; $N_1 = 210$

%He; X_j	98,50	98,75	98,80	98,93	98,99	99,10	99,20	99,32	99,40	99,55	99,65	99,90	99,98
n_j	10	10	15	20	25	30	20	20	15	15	5	15	10

Таблица 1.2 Технология *N2*, способ *B*; $N_2 = 120$

%He; *Xj*	98,30	98,50	98,72	98,91	99,00	99,15	99,2	99,50	99,72	99,85	99,86
n_j	2	2	4	10	6	10	24	30	26	4	2

Таблица 1.3 Технология *N1*, способ *B*; N_3=42

%He; X_j	0,9843	0,9850	0,9871	0,9882	0,9922	0,9954	0,9973	0,9992
n_j	1	2	10	6	12	6	4	1

Таблица 1.4 Технология *N2*, способ *A*; N_4=25

%He; X_j	0,9862	0,9883	0,9900	0,9945	0,9962	0,9971	0,9984	0,9990	0,9993
n_j	1	3	3	5	6	3	2	1	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, на основании которых можно выяснить:

- отличаются ли технологические режимы *N1* и *N2* и если да, то какой из них лучше?

- отличаются ли способы измерений *A* и *B*, какой из них точнее?

- какой стандарт можно установить на процентное содержание гелия?

- какое число измерений достаточно для того, чтобы определить, соответствует ли продукция стандарту?

Таблица 1.5 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,01; 0,05	0,005; 0,05	0,02; 0,05	0,025; 0,05
Точность вычислений (число знаков после запятой)	3	4	3	4

2 Процесс пропитки стеклоткани

Стеклоткань после пропитки специальными смолами становится токопроводящей и используется для создания одежды с подогревом, а также для некоторых нагревательных устройств. Для получения ткани с заданным номиналом электрического сопротивления (R, Ом) квадратного сантиметра ткани подбираются соответствующие технологические режимы пропитки. Было проанализировано три режима: *N1, N2, N3* производства ткани, обеспечивающих R = 100 Ом. Пропитывались ткани двух типов для того, чтобы выбрать один, обеспечивающий меньший разброс значений R около заданного номинала.

Результаты наблюдений представлены таблицами 2.1 - 2.5 (данные предварительно упорядочены).

Таблица 2.1 Режим *N1*, ткань *A*; N_1 = 100

R; X_j	86	88	93	98	101	104	109	115	122
n_j	5	12	20	30	10	13	6	3	1

Таблица 2.2 Режим *N2*, ткань *A*; N_2 = 125

R; X_j	84	85	93	97	101	104	107	112	117
n_j	1	8	10	16	35	30	17	6	2

Таблица 2.3 Режим *N3*, ткань *A;* N_3 = 90

R; X_j	90	93	98	100	102	104	106
n_j	1	5	12	20	30	10	12

Таблица 2.4 Режим N1, ткань B; N_4 = 25

R; X_j	92	96	101	105	109
n_j	5	12	2	4	2

Таблица 2.5 Режим *N3*, ткань *B*; N_5 = 160

R; X_j	90	94	97	100	102	105	108	111	114
n_j	6	15	15	21	32	25	13	30	3

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, на основании которых можно:

- сравнить различные технологические режимы и выбрать из них тот, который обеспечивает заданный номинал R=100 Ом с наибольшей точностью;

- выбрать тип ткани A или B, который не влияет на точность процесса и заданный номинал;

- определить, сколько опытов достаточно проводить, чтобы уверенно контролировать качество продукции.

Таблица 2.6 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,01; 0,05	0,005; 0,05	0,02; 0,05	0,025; 0,05
Точность вычислений (число знаков после запятой)	3	2	3	2

3 Анализ продуктов питания

Лаборатория проводит анализ продуктов питания с целью определения в них наличия вредных веществ. С определенным видом продуктов работают два лаборанта, результаты анализов сравниваются. Продукты поступают из двух пунктов. Лаборатория должна дать заключение, где производятся наиболее «чистые» продукты. Кроме того, руководителя лаборатории интересует вопрос: отличаются ли по точности результаты экспериментов у первого и второго лаборанта. Им было предложено независимо проанализировать одни и те же образцы. Для этих образцов необходимо было определить содержание вредного вещества X. В единице объема продукта количество X не должно превышать 0,015. Данные измерений представлены таблицами 3.1 - 3.4.

Таблица 3.1 Лаборант 1, пункт 1; N_1=120

X_j	0,0110	0,0120	0,0127	0,0130	0,0138	0,0014	0,0150	0,0156	0,0170	0,0180
n_j	2	2	7	16	30	35	20	5	2	1

Таблица 3.2 Лаборант 1, пункт 2; N_2=25

X_j	0,0120	0,0128	0,0135	0,0140	0,0147	0,0156	0,0160
n_j	1	2	5	10	4	2	1

Таблица 3.3 Лаборант 2, пункт 1; N_3=110

X_j	0,0100	0,0120	0,0135	0,0142	0,0149	0,0152	0,0160	0,0175	0,0190
n_j	2	10	17	30	25	17	5	3	1

Таблица 3.4 Лаборант 2, пункт 2; N_4=20

$\mathrm{X_j}$	0,0115	0,0127	0,0136	0,0142	0,0150	0,0152	0,0165
$\mathrm{n_j}$	1	1	3	10	3	1	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, на основании которых можно выяснить:

- можно или нет, двум пунктам поставки продуктов предъявить сертификат качества?

- одинакова ли квалификация обоих лаборантов (то есть, отличаются ли у них значимо результаты анализов)?

- сколько образцов достаточно брать для испытаний на первом и втором пунктах?

Таблица 3.5 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,02	0,05; 0,01	0,05; 0,005	0,05; 0,025
Точность вычислений (число знаков после запятой)	3	4	4	3

4 Курс ценных бумаг

Изучаются колебания X_j (денежные единицы) курсов ценных бумаг (тип *N1, N2, N3, N4*), принадлежащих разным группам риска (риск оценивается величиной дисперсии) и в различные периоды времени. Исследования ведутся двумя независимыми аналитическими центрами *А* и *В*. Банк, заинтересованный в результатах анализа, в целях формирования «портфеля ценных бумаг», желает знать результаты классификации по группам. Сделав случайную выборку информации о колебании курсов, аналитики получили следующие данные (табл. 4.1 - 4.6). X_j - цена одного пакета ценных бумаг.

Таблица 4.1 Бумаги *N1*, центр *А*; N_1=190

$X_j \cdot 10^2$	2	3	6	8	9	11	13	14	16	17	19	20
n_j	5	5	5	10	25	30	40	30	20	10	5	5

Таблица 4.2 Бумаги *N2*, центр *А*; N_2=132

$X_j \cdot 10^2$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n_j	1	5	5	10	25	20	25	20	15	5	1

Таблица 4.3 Бумаги *N2*, центр *В*; N_3=93

$X_j \cdot 10^2$	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_j	2	3	15	20	30	15	5	2	1

Таблица 4.4 Бумаги *N3*, центр *A*; N_4=175

$X_j \cdot 10^2$	3	5	7	8	9	11	13	14	16	17	19	21
n_j	1	5	10	20	30	40	35	15	10	5	3	1

Таблица 4.5 Бумаги *N4*, центр *B*; N_5=90

$X_j \cdot 10^2$	9	10	11	12	13	14	15	16
n_j	1	2	10	25	30	15	5	2

Таблица 4.6 Бумаги *N4*, центр *A*; N_6=22

$X_j \cdot 10^2$	11	12	13	14	15	16
n_j	1	5	10	3	2	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

- какие бумаги можно отнести к бумагам одинаковой группы риска?

- отличаются ли арифметические средние колебания курса?

- различны ли выводы аналитических центров *A* и *B*?

- какой тип бумаг Вы предпочтете купить, если Ваши средства ограничены суммой не более *C* денежных единиц за один пакет ценных бумаг?

Таблица 4.7 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,01	0,05; 0,025	0,05; 0,005	0,05; 0,005
Допустимая цена (*C*) одного пакета ЦБ	1100	1000	1200	1300

5 Процесс обогащения руды

На обогатительных фабриках происходит отделение частиц металла от пустой породы (после раздробления руды и последующей ее обработки). Одним из показателей качества готовой продукции - концентрата - являются классы крупности X_j (d, мк) частиц металла, входящих в него. В результате анализов, проведенных на одной из обогатительных фабрик Зангезурского медно-молибденового рудника, были получены данные по распределениям классов крупности при различных технологических режимах. При этом проходили испытания нового автоматического прибора (гранулометра), по измерению классов крупности. Точность анализов гранулометра сравнивалась с точностью при традиционных лабораторных способах измерений. Результаты анализов представлены таблицами 5.1 - 5.6.

Таблица 5.1Технология $N1$, лаб. анализ; N_1=100

X_j	0,63	0,64	0,65	0,67	0,68	0,70	0,73	0,75	0,77	0,79	0,82	0,85
n_j	1	3	1	2	8	5	45	15	5	7	3	5

Таблица 5.2 Технология $N1$, гранулометр; N_2 =95

X_j	0,59	0,63	0,65	0,67	0,70	0,72	0,73	0,75	0,78	0,79	0,85
n_j	1	3	1	2	8	5	45	15	5	7	3

Таблица 5.3 Технология $N2$, лаб. анализ; N_3=105

X_j	0,62	0,67	0,69	0,72	0,74	0,75	0,79	0,80	0,81	0,85
n_j	5	5	10	15	5	45	8	5	2	5

Таблица 5.4 Технология $N2$, гранулометр; N_4=100

X_j	0,58	0,64	0,67	0,70	0,72	0,73	0,76	0,79	0,80	0,83	0,89
n_j	5	5	3	7	5	10	40	10	5	5	5

Таблица 5.5 Технология *N3*, гранулометр; N_5=26

X_j	0,66	0,68	0,70	0,72	0,73	0,74	0,76	0,78
n_j	1	2	1	2	5	10	4	1

Таблица 5.6 Технология *N3*, лаб. анализ; N_6=28

X_j	0,67	0,68	0,71	0,73	0,74	0,75	0,77
n_j	1	1	2	10	8	5	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

- существенно ли различаются между собой три технологии?

- какая из технологий наилучшим образом удовлетворяет ГОСТу на классы крупности: $d \in [0,64; 0,84]$, $\bar{d} = 0,74$?

- можно ли считать успешными испытания автоматического гранулометра или же лабораторные анализы более точны?

Таблица 5.7 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,025	0,05; 0,02	0,05; 0,01	0,05; 0,005
Точность вычислений (число знаков после запятой)	2	3	2	3

6 Процесс листопроката

В одном из цехов анализируется работа листопрокатного стана по результатам контроля качества продукции. Основным показателем качества является толщина (X_j, мм) готового стального листа. Целью исследования является выяснение вопроса: достаточно ли проводить только настройку технологического процесса или необходимо уже проводить ремонт и замену оборудования для обеспечения заданной точности по толщине металла. Кроме того, попутно решается вопрос, какая доля брака может быть пущена как годная продукция другого сорта (другой толщины листа).

Исследуемая номинальная толщина листа 1,9 мм (допуск ±0,04 мм); 2,0 мм (допуск ±0,04 мм); 2,1 мм (допуск ±0,05 мм). Результаты измерений в разных условиях представлены в таблицах 6.1-6.6.

Таблица 6.1 Настройка сразу после ремонта; N_1=145 (номинал 2 мм)

X_j, мм	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	2,01	2,03	2,05	2,06	2,08	2,10
n_j	2	3	3	7	10	20	23	30	28	13	4	1	1

Таблица 6.2 Настройка без проведения ремонта; N_2=115 (номинал 2 мм)

X_j, мм	1,90	1,92	1,96	1,97	1,98	2,00	2,02	2,04	2,05	2,06	2,07	2,09	2,10
n_j	2	1	3	7	12	20	25	17	7	10	7	3	1

Таблица 6.3 Настройка сразу после ремонта; N_3=105 (номинал 1,9 мм)

X_j, мм	1,85	1,86	1,87	1,89	1,90	1,91	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96
n_j	1	6	5	20	25	15	20	5	4	3	1

Таблица 6.4 Настройка без проведения ремонта; N_4=76 (номинал 1,9 мм)

X_j, мм	1,85	1,87	1,89	1,91	1,92	1,93	1,94	1,96	1,97	1,98
n_j	1	2	10	10	27	10	6	5	4	1

Таблица 6.5 Настройка после проведения ремонта; N_5=30 (номинал 2,1 мм)

X_j, мм	2,04	2,06	2,08	2,09	2,10	2,11	2,12	2,14
n_j	1	1	2	4	10	8	3	1

Таблица 6.6 Настройка без проведения ремонта; $\mathbf{N_6}$=29 (номинал 2,1 мм)

X_j, мм	2,04	2,06	2,08	2,09	2,10	2,11	2,12	2,13	2,14	2,16
n_j	1	1	2	1	3	4	8	1	7	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

- существенно ли разнится точность настройки процесса до ремонта и после ремонта?

- существенно ли разнится точность настройки в зависимости от того номинала, на который ведется настройка?

- какая доля брака при различных настройках может быть использована как годная продукция другого сорта (номинала)?

- сколько замеров толщины стенки листа стали необходимо произвести, чтобы быть уверенными в статистических выводах?

Таблица 6.7 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,001	0,05; 0,025	0,05; 0,01	0,05; 0,005
Точность вычислений (число знаков после запятой)	4	3	4	3

7 Задача инвестирования

Инвестиционная компания *N1* объявила средний годовой доход по акциям от определенного производства равным 11,2%. Инвестор желает проверить, действительно ли это так, и делает случайные выборки объемом *N* акций интересующей его отрасли индустрии. Попутно инвестор проводит анализ годового дохода по акциям инвестиционной компании *N2*, по которым объявлен средний годовой доход 12,0%. Имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы отказаться от инвестирования в компанию *N1*? Необходимые статистические данные представлены таблицами 7.1 - 7.4.

Таблица 7.1 Компания *N1*, 1-ый год; N_1=115

X_j, %	9,7	10,1	10,4	10,6	10,9	11,0	11,2	11,3	11,4	11,6	12,1
n_j	1	3	10	18	29	25	15	8	3	2	1

Таблица 7.2 Компания *N2*, 1-ый год; N_2=70

X_j, %	10,3	10,6	10,8	10,9	11,1	11,4	11,7	12,2	12,4
n_j	1	3	5	10	20	18	8	3	2

Таблица 7.3 Компания *N1*, 2-ой год; N_3=25

X_j, %	10,7	10,9	11,0	11,1	11,4	11,7	12,0
n_j	1	1	5	10	5	2	1

Таблица 7.4 Компания *N2*, 2-ой год; N_4=25

X_{j}, %	10,6	11,0	11,2	11,5	11,6	11,8	11,9
$\mathrm{n_j}$	1	3	5	8	5	2	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

- отличаются ли результаты анализа за 1-ый и 2-ой года?
- существенно ли различие средних годовых доходов компаний *N1, N2*?
- отличаются ли наблюдаемые средние годовые доходы от объявленных инвестиционными компаниями?
- акции какой компании Вы предпочтете, учитывая риск (измеряемый дисперсией) от приобретения этих акций? Если уровень риска: ограничен, не ограничен?
- можно ли пользоваться результатами анализа по малым выборкам?

Таблица 7.5 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,005	0,05; 0,01	0,05; 0,02	0,05; 0,025
Допустимая доля риска	0,35	0,30	0,40	0,28
Точность вычислений (число знаков после запятой)	3	4	3	2

8 Процесс трубосварки

Трубосварочный цех металлургического завода выпускает сварные стальные трубы разного диаметра X_j (D, мм). По данным отдела технического контроля для исследуемого трубоэлектросварочного агрегата желательно установить оптимальное время планового ремонта (17 или 20 суток). Ремонт необходимо проводить тогда, когда возникает опасность того, что доля брака превысит допустимый уровень. Замеры диаметров производятся двумя контролерами: *А* и *В*. Результаты измерений приведены в таблицах 8.1-8.6. Продукция считается годной, если отклонение от номинала не превышает ±1%.

Таблица 8.1 Контролер *А*, 5 суток после ремонта; N_1=36 (номинал 18 мм)

X_j	16, 0	16,6	17,0	17,4	17,8	18,0	18,2	18,6	19,2	19,8
n_j	1	2	1	3	8	10	5	3	2	1

Таблица 8.2 Контролер *А*, 20 суток после ремонта; N_2=105 (номинал 18 мм)

X_j	16,8	17,2	17,6	18,2	18,4	18,8	19,2	19,4	19,8	20,2	20,8
n_j	1	1	10	15	18	25	10	15	7	2	1

Таблица 8.3 Контролер *В*, 5 суток после ремонта; N_3=30 (номинал 20 мм)

X_j	17,6	18,0	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6	21,4	22,0
n_j	1	1	2	3	2	10	6	3	1	1

Таблица 8.4 Контролер *В*, 17 суток после ремонта; N_4=95 (номинал 20 мм)

X_j	18,2	18,4	18,8	19,2	19,8	20,4	20,6	21,0	21,2	21,4	22,0	22,6	22,8
n_j	1	2	3	5	10	20	10	15	12	8	5	3	1

Таблица 8.5 Контролер *А*, 20 суток после ремонта; N_5=140 (номинал 22 мм)

X_j	19,6	20,2	20,8	21,4	21,6	22,0	22,2	22,6	22,8	23,0	23,6	23,8
n_j	1	2	5	5	12	15	30	18	25	15	8	4

Таблица 8.6 Контролер B, 20 суток после ремонта; N_6=140 (номинал 22 мм)

X_j	19,8	20,6	21,0	21,6	21,8	22,4	22,6	23,0	23,4	23,8	24,0
n_j	1	2	7	10	18	24	28	20	19	10	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

- существенно ли отличаются результаты работы агрегата сразу после ремонта, или через 17 и 20 суток?
- когда лучше проводить плановый ремонт: через 17, 20 суток или раньше? Допустимая доля брака представлена в таблице 8.7.
- разнятся ли по точности результаты двух контролеров?
- какая доля брака одного номинала может быть использована как годная продукция другого номинала?
- сколько измерений диаметра труб желательно проводить для того, чтобы быть уверенными в статистических выводах? Какова степень уверенности в различных случаях?

Таблица 8.7 Условия выполнения

Уровень значимости α	0,05; 0,01	0,05; 0,001	0,05; 0,025	0,05; 0,005
Доля брака Точность вычислений (число знаков после запятой)	12% 3	10% 4	8% 3	11% 4

Задание 2 а) Запишите уравнение регрессии в общем виде. Вычислите коэффициенты регрессии.

б) Проверьте адекватность модели. Проверьте значимость коэффициентов регрессии.

в) Рассчитайте стандартные ошибки для Y.

г) Выберите лучшую регрессию.

д) Определите X_1 и X_2, обеспечивающие номинал, и найдите соответствующие этому выбору ошибки ε.

е) Изобразите результаты расчетов графически.

ж) Дайте физическую интерпретацию модели, покажите возможности ее использования.

1 Процесс извлечения гелия

Исследуется работа промышленных агрегатов по процессу извлечения гелия (He) из природного Оренбургского газа. Целью исследования является определение зависимости выходного показателя Y (% извлечения гелия, %He), от технологических переменных X_1 (температура, °С) и X_2 (давление, атм.). В реальных условиях процент извлечения гелия зависит от сотен технологических факторов. В настоящей работе исследуется одна из простейших производственных ситуаций. Из многих переменных выбраны только две, используемые на последних этапах процесса извлечения. Данные наблюдений приведены в таблице 2.1. Величины Y заданы в абсолютных единицах, X_1 и X_2- в относительных (абсолютные значения: $X_1 \in$ [-250 °С; -230 °С]; $X_2 \in$ [4,4 атм.; 5,0 атм.]). Определенные наборы значений X_1 и X_2 при фиксированных значениях других параметров соответствуют различным технологиям производства. Предполагается, что измерения достаточно точны и погрешность невелика. Необходимо найти зависимость $Y=f(X_1,X_2)$, оцениваемую результатами наблюдений, и определить значения X_1 и X_2, обеспечивающие заданный номинал $Y_{ном.}$=

99,8; 99,5; 99,9; 99,85. Определить точность ε, с которой достигается это значение.

Таблица 2.1 Данные наблюдений

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
1	3	7	99,25
2	3	7	99,35
3	3	7	99,10
4	6	3	98,50
5	6	3	98,70
6	5	6	99,00
7	7	4	98,50
8	7	4	98,00
9	7	4	98,40
10	4	6	98,75
11	5	5	98,75
12	5	5	98,60
13	5	5	98,55
14	3	8	99,75
15	3	8	99,60
16	10	1	97,50
17	1	10	99,98
18	1	10	99,50
19	8	2	97,80
20	2	9	99,85
21	2	9	99,70
22	9	1	97,75
23	9	1	98,25
24	9	1	97,90
25	2	10	99,95
26	2	10	99,85
27	6	8	99,25
28	6	8	99,35
29	3	6	99,20
30	3	6	99,40

2 Процесс пропитки стеклоткани

В результате пропитки стеклоткани специальными смолами она становится токопроводящей и используется в различных нагревательных устройствах. Выходной показатель Y (сопротивление 1 см^2 ткани; Ом) измеряется в случайно выбранных квадратах ткани из полотна (1,2х40)м^2. Электрическое сопротивление квадрата ткани зависит от некоторых технологических переменных. В исследуемых лабораторных условиях наибольшее влияние на величину Y и точность ее поддержания оказывали переменные X_1 (удельное сопротивление пропитывающей смолы; ρ, Ом) и X_2 (зазор между обжимным валиком, снимающим излишки смолы; δ, мм), заданные в относительных единицах (абсолютные значения $\rho \in [60; 110]$; $\delta \in [4,2; 4,7]$). Данные одной серии испытаний приведены в таблице 2. Значения Y заданы в абсолютных единицах.

Необходимо определить зависимости $Y=f(X_1,X_2)$, выбрать из них наилучшие и подобрать значения X_1 и X_2, которые обеспечивают номинал $Y_{ном.} = 80; 90; 100; 110$ Ом. С какой точностью ε могут поддерживаться эти значения?

Таблица 2.2 Данные серии испытаний

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_I
1	2	3	4
1	1	1	75
2	1	1	85
3	10	10	115
4	10	10	110
5	1	2	85
6	1	2	70

Продолжение таблицы 2.2

1	2	3	4
7	1	2	80
8	8	9	100
9	8	9	115
10	8	9	120
11	2	3	75
12	2	3	90
13	9	8	120
14	9	8	115
15	4	3	100
16	4	3	105
17	6	7	110
18	6	7	100
19	5	5	90
20	5	5	105
21	5	5	85
22	7	6	95
23	3	4	90
24	3	4	95
25	3	3	80
26	3	3	85
27	10	8	100
28	2	1	85
29	2	1	70
30.	9	7	95

3 Анализ продуктов питания

Лаборатория производит анализ продуктов, которые обрабатываются при определенной температуре X_1 (t, °С), и в которые добавляются для увеличения срока годности определенные консерванты X_2 (мг). В готовом продукте может содержаться некоторое количество нежелательных веществ Y (в долях к общей массе). X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные значения $t \in [60; 80]$; консервант $X_2 \in [0,5; 1]$), Y - в абсолютных.

Необходимо определить зависимость $Y=f(X_1,X_2)$ и установить значения X_1 и X_2, которые обеспечивают номинал $Y_{ном.}$ =0,009; 0,010; 0,011; 0,01 г. Определить ошибку ε, которая соответствует установленному номиналу $Y_{НОМ}$.

Таблица 2.3 Данные анализа

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
1	2	3	4
1	3	6	0,016
2	3	6	0,015
3	3	6	0,014
4	6	4	0,014
5	4	7	0,013
6	4	7	0,013
7	9	1	0,011
8	9	1	0,012
9	1	10	0,012
10	1	10	0,017
11	1	10	0,015
12	9	2	0,009
13	9	2	0,010
14	2	9	0,014
15	2	9	0,018
16	2	9	0,016
17	8	1	0,009
18	5	5	0,013
19	5	5	0,011
20	5	5	0,014
21	3	7	0,016
22	4	6	0,012
23	4	6	0,011

Продолжение таблицы 2.3

1	2	3	4
24	7	3	0,013
25	7	3	0,012
26	2	8	0,011
27	10	2	0,010
28	10	2	0,009
29	7	4	0,010
30	7	4	0,011

4 Рынок ценных бумаг

Исследуются три типа ценных бумаг, доходность которых равна соответственно: Y, X_1 и X_2. Целью исследования является определение зависимости Y от переменных X_1 и X_2, т.е. изучаются взаимосвязанные колебания курсов ценных бумаг. X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные значения: $X_1 \in [500; 900]$, $X_2 \in [800; 1100]$), Y - в абсолютных денежных единицах.

Необходимо определить зависимость $Y=f(X_1,X_2)$ и установить значения X_1 и X_2, которые обеспечивают номинал $Y_{ном.}$ = 900; 1000; 1100; 1200. Определить ошибку ε, которая соответствует установленному номиналу $Y_{ном}$.

Таблица 2.4 Данные исследования

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
1	2	3	4
1	10	10	1100
2	10	10	1000
3	1	2	500
4	1	2	450
5	6	7	1100
6	6	7	700

Продолжение таблицы 2.4

1	2	3	4
7	6	7	900
8	5	5	800
9	5	5	1000
10	5	5	900
11	9	8	1400
12	9	8	1250
13	2	1	600
14	2	1	800
15	2	1	700
16	7	7	1300
17	7	7	1100
18	3	3	700
19	3	3	650
20	4	2	600
21	4	2	750
22	3	4	1000
23	8	9	800
24	8	9	1200
25	1	1	700
26	1	1	400
27	6	3	900
28	8	7	1600
29	10	1	1550
30	10	1	1400

5 Процесс обогащения руды

Исследуются различные технологические режимы на фабрике обогащения руды. Режимы отличаются друг от друга по многим параметрам. Для анализа выбраны два основных: X_1 (скорость дробления; v, обор/мин) и X_2 (степень смачивания отдельных частиц измельченной руды; %). X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные единицы: $v \in [20; 50]$; % $\in [80; 98]$). Показателем качества дробления Y является класс крупности (d, мм) частиц в пульпе (смесь измельченной в пыль руды, смоченной жидкостью). Значения Y в таблице данных представлены в абсолютных единицах.

Необходимо найти зависимость $Y = f(X_1, X_2)$ и установить значения X_1 и X_2, которые обеспечивают номинал $Y_{ном.}$ = 68; 70; 72; 75. Определить ошибку ε, которая соответствует установленному номиналу $Y_{ном}$.

Таблица 2.5 Данные исследования

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_I
1	2	3	4
1	10	10	80
2	1	2	90
3	1	2	80
4	6	7	80
5	6	7	75
6	4	4	75
7	4	4	85
8	4	4	80
9	8	7	85
10	8	7	90
11	8	7	70
12	2	2	85
13	2	2	70
14	7	6	75
15	7	6	85
16	5	5	80
17	5	5	75
18	5	5	85
19	3	3	80
20	3	3	90

Продолжение таблицы 2.5

1	2	3	4
21	8	9	75
22	8	9	60
23	8	10	70
24	8	10	65
25	2	1	85
26	2	1	90
27	9	10	70
28	9	10	90
29	1	1	85
30	3	4	90

6 Процесс листопроката

Процесс листопроката является одним из самых распространенных в металлургическом производстве. Хорошее качество листопроката зависит от многих параметров. Качество характеризуется несколькими показателями, в том числе толщиной листа Y (мм) с соблюдением допуска на толщину ε. В таблице приведены данные зависимости Y только от двух параметров: X_1 (скорость проката; v, обор./мин.) и X_2 (зазор между валками в последней клети; δ, мм). Значения X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные значения: $v \in [40; 50]$; $\delta \in [1{,}6; 2{,}1]$), Y - в абсолютных.

Необходимо определить $Y=f(X_{1,} X_2)$ и установить значения X_1 и X_2, обеспечивающие заданный номинал $Y_{НОМ.}$ = 1,9; 2,0; 2,1; 2,2. Определить, какая погрешность ε соответствует этим номиналам.

Таблица 2.6 Данные исследования

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
1	10	1	1,85
2	4	7	2,15
3	4	7	2,10
4	4	7	2,05
5	9	1	1,90
6	5	5	2,00
7	5	5	1,85
8	5	5	2,10
9	8	2	1,80
10	8	2	2,00
11	3	6	2,15
12	3	6	1,85
13	2	8	2,15
14	6	3	1,90
15	6	3	1,95
16	6	3	1,85
17	2	9	1,95
18	2	9	2,10
19	2	9	1,90
20	7	4	1,80
21	7	4	2,10
22	7	4	1,85
23	9	2	1,75
24	1	10	2,20
25	1	10	2,15
26	4	6	2,10
27	3	9	2,00
28	3	9	1,90
29	1	9	2,25
30	1	9	2,00

7 Инвестирование

Инвестиционная компания объявляет средний годовой доход $Y_{НОМ.}$ по акциям определенного производства. Средний годовой доход Y (измеряется в %) зависит от воздействия внешнего рынка X_1 (спрос растет в %) и внутреннего X_2 (конкуренция, спрос падает в %). Значения X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные значения: $X_1 \in [1; 5]$ %, $X_2 \in [1; 1,5]$ %), Y - в абсолютных. Инвестор желает установить зависимость $Y=f(X_1,X_2)$ и прогнозировать с ее помощью возможность объявленного номинала $Y_{ном.}$ = 11; 11,5; 12,0; 12,5%, а также прогнозировать точность установления $Y_{ном}$.

Таблица 2.7 Данные исследования

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
1	2	3	4
1	6	4	11
2	6	4	12,2
3	1	10	10,05
4	1	10	11
5	10	2	11,75
6	10	2	11,65
7	5	5	11,25
8	5	5	12
9.	5	5	10,25
10	9	1	12,5
11	9	1	12,1
12	9	1	12
13	4	7	11,5
14	8	1	11,75
15	8	1	11,8
16	6	1	11,85
17	3	7	10,75
18	4	6	10,5
19	4	6	9,8

Продолжение таблицы 2.7

1	2	3	4
20	4	6	10,6
21	1	9	10,75
22	2	10	11
23	2	10	10,9
24	3	6	12
25	3	6	11,9
26	7	3	12
27	2	9	11,25
28	2	9	10,5
29	9	2	11,25
30	7	3	11,5

8 Процесс трубосварки

Трубосварочный цех металлургического завода выпускает стальные трубы различного диаметра Y (мм). Различный диаметр труб обеспечивается соответствующим технологическим процессом, в том числе установлением определенного зазора X_1 (δ, мм) между обжимными валками в последней клети установки, и скоростью проката X_2 (v, м/мин.). В таблице значения X_1 и X_2 даны в относительных единицах (абсолютные значения: $\delta \in [16; 21]$; $v \in [40; 50]$), Y - в абсолютных.

Необходимо определить зависимость $Y=f(X_1,X_2)$ и найти значения X_1 и X_2, обеспечивающие заданный номинал $Y_{ном.}$ = 18; 20; 21; 22 мм. С какой ошибкой устанавливаются $Y_{ном}$?

Таблица 2.8 Данные исследования

№	X_{1i}	X_{2i}	Y_I
1	10	1	22,0
2	10	1	23,0
3.	10	1	22,5
4	1	10	17,0
5	10	2	20,5
6	10	2	21,5
7	2	8	18,0
8	2	8	17,5
9	5	5	19,5
10	5	5	20,0
11	5	5	20,0
12	1	9	19,00
13	1	9	21,00
14	9	2	21,5
15	9	2	19,5
16.	8	1	21,5
17	8	1	20,5
18	3	7	19,5
19	3	7	18,5
20	4	6	20,0
21	4	6	21,0
22	4	6	19,8
23	7	3	20,5
24	6	4	21,5
25	6	4	19,5
26	6	4	19,0
27	4	7	18,0
28	3	6	21,0
29	3	6	20,5
30	5	7	20,0

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам [Текст] / Д. Т. Письменный . - 4-е изд., испр. - М.: Айрис Пресс, 2008. - 287 с.

2 Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб. - М.: Высшее образование, 2007, 1997. - 479 с.

3 . Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В. Е. Гмурман. - 10-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 1999, 2005, 1997. - 404 с.

4 Мхитарян, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для студ. вузов, обуч. по направлениям "Математические методы в экономике" и "Прикладная информатика (по областям)" и другим экономическим специальностям : допущено УМО по образованию / В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов, А. Ю. Козлов. - М.: Издательский центр Академия, 2012. - 416 с. - Режим доступна: http://biblio.bsau.ru/metodic/12612.djvu

5 Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб.для студ.вузов,обуч.по экон.спец. / Н. Ш. Кремер. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. - 544 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	135.4	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0010	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение Б

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	80,00	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	81,00	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	82,00	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	83,00	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	84,00	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	85,00	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	86,00	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	87,00	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	88,00	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	89,00	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	90,00	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	91,00	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	92,00	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	93,00	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	94,00	0,3264
0,23	0,9100	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	0,37	0,4147	0,78	0,4525	2,36	0,4909
0,97	0,3340	0,38	0,4162	0,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	0,39	0,4177	0,80	0,4641	2,40	0,4918
0.99	0,3389	0,40	0,4192	0,81	0,4649	2,42	0,4922
0,00	0,3413	0,41	0,4207	0,82	0,4656	2,44	0,4927
0,01	0,3438	0,42	0,4222	0,83	0,4664	2,46	0,4931
0,02	0,3461	0,43	0,4236	0,84	0,4671	2,48	0,4934
0,03	0,3485	0,44	0,4251	0,85	0,4678	2,50	0,4938
0,04	0,3508	0,45	0,4265	0,86	0,4686	2,52	0,4941
0,05	0,3531	0,46	0,4279	0,87	0,4693	2,54	0,4945
0,06	0,3554	0,47	0,4292	0,88	0,4699	2,56	0,4948
0,07	0,3577	0,48	0,4305	0,89	0,4706	2,58	0,4951

Продолжение приложения Б

0,08	0,3599	0,49	0,4319	0,90	0,4713	2,60	0,4953
0,09	0,3621	0,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
0,10	0,3643	0,51	0,4345	0,92	0,4726	2,64	0,4959
0,11	0,3665	0,52	0,4357	0,93	0,4732	2,66	0,4961
0,12	0,3686	0,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
0,13	0,3708	0,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
0,14	0,3729	0,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	0,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
0,16	0,3770	0,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
0,17	0,3790	0,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
0,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
0,20	0,3849	0,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
0,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
0,22	0,3883	1,03	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4616	1,77	0,4616				

Приложение В

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии,

k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости α = 0,01												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,2!	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6.47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5.47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5.06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,80	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4 44	4,20	4,03	3,89	3 78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Приложение Г

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии,

k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости α = 0,05												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,45	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	270	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3.20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Приложение Д

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,79
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Учебное пособие

Лубова Татьяна Николаевна

Учебное пособие

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать _________ 2015 г. Формат бумаги

Усл. печ. л. ____ Усл. изд. л. ______ Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Заказ _____. Тираж 50 экз.

Издательство Башкирского государственного аграрного университета

Типография Башкирского государственного аграрного университета

Адрес издательства и типографии: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34