ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области финансов, учета и мировой экономики
в качестве **учебного пособия** для студентов,
обучающихся по специальностям
080105 «Финансы и кредит»,
080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
080102 «Мировая экономика»,
080107 «Налоги и налогообложение»

МОСКВА
2010

УДК 681.140(075.8)
ББК 65.26я73
Б89

Рецензенты:

М.С. Кросс, проф. кафедры математического моделирования экономических процессов Финансовой академии, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Е.М. Панченко, заместитель директора НИИФ ЮФУ, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Е.Д. Гутлянский, ведущий научный сотрудник НИИ физики ЮФУ, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Г.А. Панферов, доц. кафедры прикладной математики Финансовой академии, канд. экон. наук, доц.

Брусов П.Н.

Б89 Финансовая математика : учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина. — М. : КНОРУС, 2010. — 224 с. — (Для бакалавров).

ISBN 978-5-406-00574-3

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Финансовая математика» для бакалавров. Пособие включает в себя сведения по финансовой математике, знание которых необходимо и финансисту, и экономисту широкого профиля. Оно состоит из пяти глав: «Теория процентов», «Финансовые потоки и ренты», «Доходность и риск финансовой операции», «Портфельный анализ», «Облигации».

Настоящее пособие отличается от других учебников и учебных пособий подробным и доступным изложением с выводами и доказательствами всех утверждений, значительно более широким рассмотрением затронутых вопросов.

В каждой главе пособия приведены практические примеры, в конце каждой главы даны вопросы и задания для самоконтроля.

Для бакалавров финансовых и экономических профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, международные экономические отношения и др. Также будет полезно специалистам всех финансовых и экономических специальностей.

УДК 681.140(075.8)
ББК 65.26я73

Брусов Петр Никитович
Брусов Павел Петрович
Орехова Наталья Петровна
Скородулина Светлана Владимировна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003365.04.09 от 01.04.2009 г.

Изд. № 2289. Подписано в печать 19.03.2010. Формат 60×90/16.
Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 2000 экз. Заказ № .

ООО «Издательство КноРус».
129110, Москва, ул. Большая Переяславская, 46, стр. 7.
Тел.: (495) 680-7254, 680-0671, 680-1278.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в ОАО «Московская типография № 2».
129085, Москва, пр. Мира, 105.

ISBN 978-5-406-00574-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для изучения бакалаврами курса «Финансовая математика» и состоит из пяти глав: «Теория процентов», «Финансовые потоки и ренты», «Доходность и риск финансовой операции», «Портфельный анализ», «Облигации». От других учебников и учебных пособий оно отличается подробным и доступным изложением с выводами и доказательствами всех утверждений, значительно более широким рассмотрением затронутых вопросов. Так, например, если во всех стандартных пособиях «Правило 70» (срок удвоения вклада при заданной процентной ставке) рассматривается только для случая сложных процентов, то в данном пособии приведены случаи увеличения вклада в произвольное число раз для всех видов процентных ставок: сложных, простых, непрерывных и при кратном начислении процентов. Доказывается (а не иллюстрируется на примерах, как во всех других пособиях), что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов, что скорость роста эффективной процентной ставки с увеличением кратности начисления замедляется.

В пособии выведены формулы для приведенной и наращенной величин непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов и с непрерывным начислением процентов.

Выведены также формулы для доходности и инфляции за несколько периодов, исследован синергетический эффект в этих случаях.

Такое подробное и последовательное изложение направлено на сознательное, творческое усвоение студентом программы курса, чтобы он имел возможность самостоятельно решать самые разнообразные задачи и проблемы, возникающие в практической деятельности.

В каждой главе пособия приведены детально разобранные практические примеры, а также даны вопросы и задания для контроля степени усвоения материала и закрепления изученного.

Пособие написано на основе компетентностного подхода курса лекций, читаемого первым из авторов на протяжении ряда лет для специалистов факультета «Финансовый менеджмент» Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации. При чтении курса лекций, а также подготовке пособия авторы использовали пособия известных российских финансовых математиков В.И. Малыхина и Е.М. Четыркина, а также коллег по Финансовой академии В.А. Бабайцева и В.Б. Гисина, П.Е. Рябова и А.Б. Шаповала. Всем им авторы выражают искреннюю благодарность.

Авторы являются энтузиастами внедрения математических методов в экономику и финансы. Понимание того, что финансы являются по своей сути количественной наукой, а количественные методы играют важнейшую роль в подготовке финансистов и экономистов всех профилей, все шире распространяется среди российских специалистов, отвечающих за их подготовку. Пример тому — внедрение в Финансовой академии при Правительстве РФ по инициативе первого автора курса «Основы финансовых вычислений (финансовая математика)» как обязательного для бакалавров всех профилей, что является важным шагом на пути интеграции отечественного финансового и экономического образования в общемировое, где математическая составляющая финансовых дисциплин достигает 70% и более.

Пособие предназначено для бакалавров всех финансовых и экономических профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет, аудит, налоги и налогообложение, страхование, международные экономические отношения и др.

Авторы работают над второй частью пособия — для магистров. В него войдут уже не общие, а специальные вопросы по каждой конкретной магистерской программе. В частности, для профиля «Финансовый менеджмент» будут рассмотрены стоимость и структура капитала (теория Модильяни—Миллера и ее модификация), дивидендная политика компании, лизинг и другие вопросы, а для профиля «Финансы и кредит» — погашение долгосрочных кредитов, *VaR* и его применение в банковском деле и др.

Авторы планируют выпустить задачник по финансовой математике по темам обеих частей учебного пособия.

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

Проценты могут быть определены как компенсация, выплачиваемая заемщиком кредитору за использование капитала [1]. Поэтому проценты можно рассматривать как арендную плату, которую заемщик платит кредитору, чтобы компенсировать потери от неиспользования последним капитала за время займа. В общем случае капитал и проценты не обязательно представляют собой один и тот же товар. Однако мы будем рассматривать капитал и проценты, выраженные в одних и тех же терминах — в терминах денег.

Итак, кредитор предоставляет заемщику некоторую сумму денег; по истечении установленного срока заемщик должен вернуть наращенную сумму, равную сумме долга плюс проценты.

Эффективная ставка процента — это сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода.

Обозначая наращенное значение единичной суммы в момент времени t через a_t, ставку процента — через i, а наращенное значение полной суммы — через S_t, имеем для первого периода начисления

$$i_1 = \frac{(1+i)}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \tag{1.1}$$

для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}. \tag{1.2}$$

Из этой формулы видно, что эффективная процентная ставка может меняться (и меняется) в зависимости от номера периода начисления, но, как будет показано ниже, в очень важном и широко применяемом случае сложных процентов эффективная процентная ставка для всех периодов начисления остается постоянной, т.е. для всех $n \geq 1$.

1.1. Простые проценты

Пусть S_0 — первоначальная сумма долга, i — ставка процента. В схеме простых процентов S_0 к концу единичного промежутка начисления (обычно это год) возрастет на iS_0, а наращенная сумма S_1 будет равна

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0\,(1 + i). \tag{1.3}$$

К концу второго промежутка начисления первоначальная сумма долга S_0 возрастет еще на iS_0 и наращенная сумма станет

$$S_2 = S_1 + iP = S_0(1 + 2i). \tag{1.4}$$

К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма будет

$$S_n = S_0(1 + ni). \tag{1.5}$$

Данная формула называется **формулой простых процентов**. Множитель $(1 + ni)$ называют **коэффициентом (множителем) наращения**, а величину ni — ставкой процентов за время n.

Таким образом, последовательность наращенных сумм $S_1, S_2, ..., S_n$, является арифметической прогрессией с начальным членом S_0 и разностью iS_0.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0 in. \tag{1.6}$$

Эффективная ставка процента в схеме простых процентов

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+in)-(1+i(n-1))}{1+i(n-1)} = \frac{1}{1+i(n-1)} \tag{1.7}$$

убывает с ростом n.

Если на разных промежутках начисления процентов $n_1, n_2, ..., n_m$ устанавливаются разные ставки процентов $i_1, i_2, ..., i_m$, то наращенная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0\left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right). \tag{1.8}$$

Момент возврата ссуды может не указываться точно, а быть переменной величиной (например, в случае накопительного вклада до востребования). Тогда формула простых процентов приобретает следующий вид [4]:

$$S_t = S_0(1 + i(t - t_0)), \tag{1.9}$$

где t_0 — момент выдачи ссуды;
t — момент возврата долга с процентами.

В соответствии с формулой (1.9) накопленная сумма является линейной функцией времени. Графиком этой функции на плоскости время—деньги служит луч с начальной точкой (t_0, S_0) и угловым коэффициентом S_0i. Очевидно,

$$S_t' = S_0 i. \tag{1.10}$$

1.2. Сложные проценты

При наращении по схеме сложных процентов происходит ***реинвестирование, или капитализация, полученных процентов;*** таким образом, при ставке i каждая следующая наращенная сумма возрастает на долю i от предыдущей суммы, в которой учтены проценты, начисленные в предыдущие периоды.

В схеме сложных процентов S_0 к концу единичного промежутка начисления возрастут на iS_0, а наращенная сумма S_1 будет равна

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1+i). \tag{1.11}$$

К концу второго промежутка начисления S_1 возрастут на iS_1 и наращенная сумма станет

$$S_2 = S_1 + iS_1 = S_1(1 + i) = S_0(1 + i)^2. \tag{1.12}$$

К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма будет

$$S_n = S_0(1 + i)^n. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) называется **формулой сложных процентов**. Таким образом, последовательность наращенных сумм S_0, S_1, S_2, ..., S_n является геометрической прогрессией с начальным членом S_0 и знаменателем прогрессии $q = (1+ i)$.

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов за n-й период начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = i \tag{1.14}$$

не зависит от n и равна номинальной.

Наращенная сумма S_n пропорциональна начальной сумме S_0. Коэффициент пропорциональности $(1 + i)^n$ называют **множителем наращения**.

Заметим, что в качестве «нулевого» может быть взят любой момент времени t_k. При этом формула (1.13) приобретает вид [4]:

$$S_n = S_k(1 + i_T)^{n-k}, \tag{1.15}$$

где i_T — процентная ставка за период T, постоянная для всех периодов.

Полагая $t = nT$, формулу (1.15) можно переписать следующим образом:

$$S(t) = S_0(1 + i_T)^{t/T}. \tag{1.16}$$

По формуле (1.16) можно вычислить накопленную сумму в произвольный момент времени t (не обязательно кратный периоду начисления T). В этом случае говорят, что используется **непрерывная модель** накопительного счета в схеме сложных процентов. В дальнейшем, если не оговорено противное, будет применяться именно эта модель.

Аналогом формулы (1.15) в непрерывной модели служит следующая формула [4]:

$$S(t) = S(\tau)(1 + i_T)^{(t-\tau)/T}. \tag{1.17}$$

При начислении процентов раз в год (или в более общем случае, если период начисления процентов совпадает с основной временной единицей) формулы (1.16) и (1.17) упрощаются:

$$S(t) = S_0(1 + i)^t; \tag{1.18}$$

$$S(t) = S(\tau)(1 + i)^{t-\tau}, \tag{1.19}$$

где i — годовая ставка процентов.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0[(1 + i)^n - 1]. \tag{1.20}$$

1.3. Кратное начисление процентов

Если начисление сложных процентов происходит несколько раз в году (m) (ежеквартально, ежемесячно и т.п.), то по истечении t лет наращенная сумма станет равной:

a) в случае простых процентов:

$$S(t,m)=S_0\left(1+\frac{i}{m}mt\right)=S_0(1+it),$$

т.е. наращенная сумма не зависит от кратности начисления. Этот вывод будет использован нами при рассмотрении непрерывного начисления процентов в случае простых процентов;

b) в случае сложных процентов:

$$S(t,m)=S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}. \tag{1.21}$$

В следующем параграфе будет показано, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов вырастает с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется.

1.4. Непрерывное начисление процентов

Если частота начисления сложных процентов m неограниченно возрастает, то имеет место **непрерывное начисление процентов**. В этом случае по истечении t лет наращенная сумма будет равна:

a) в случае простых процентов:

$$S(t,\infty)=\lim_{m\to\infty}S(t,m)=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}mt\right)=S_0(1+it),$$

т.е. наращенная сумма остается той же, что и при однократном начислении процентов. Этот вывод был сделан нами и в случае кратного начисления процентов. Оба вывода связаны с тем, что при любой кратности начисления процентов начисление производится на исходную сумму пропорционально времени вклада;

b) в случае сложных процентов:

$$\begin{gathered}S(t,\infty)=\lim_{m\to\infty}S(t,m)=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}=\\=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mit/i}=S_0e^{it}.\end{gathered} \tag{1.22}$$

Процентную ставку i в (1.22) называют также **силой роста** и обозначают обычно буквой δ. С учетом этого данную формулу можно записать так [4]:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{\delta t}. \tag{1.23}$$

Силу роста δ характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени

$$S'(t) = S_0 \cdot e^{\delta t} \cdot \delta = S(t) \cdot \delta, \tag{1.24}$$

или

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \delta \cdot dt. \tag{1.25}$$

Если сила роста зависит от времени, то $S(t)$ может быть получено как решение дифференциального уравнения (1.25). Интегрируя обе части (1.25), получаем [4]

$$\ln S(t) - \ln S_0 = \int_0^t \delta\, dt. \tag{1.26}$$

Значит,

$$S(t) = S_0 e^{\int_0^t \delta\, dt}. \tag{1.27}$$

Пример 1.1. В банк положен депозит в размере 1000 руб. под 10% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через три года при начислении процентов 1, 4, 6, 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

По формуле (1.21) имеем

$$S_{3/1} = 1000(1 + 0{,}1)^3 = 1331 \text{ руб.},$$

$$S_{3/4} = 1000\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{3 \cdot 4} = 1344{,}9 \text{ руб.},$$

$$S_{3/6} = 1000\left(1 + \frac{0{,}1}{6}\right)^{3 \cdot 6} = 1346{,}5 \text{ руб.},$$

$$S_{3/12} = 1000\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{3 \cdot 12} = 1348{,}2 \text{ руб.}$$

В случае непрерывного начисления процентов необходимо использовать формулу (1.22)

$$S_{3/\infty} = 1000e^{0,1 \cdot 3} = 1349,6 \text{ руб.}$$

Проценты за три года составили (руб.):
— при однократном начислении процентов — 331;
— при четырехкратном — 344,9;
— при шестикратном — 346,5;
— при двенадцатикратном — 348,2;
— при непрерывном — 349,6.

Приходим к выводу, что наращенная сумма, как и величина процентных денег, в схеме сложных процентов возрастает с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. Причем скорость роста обеих величин убывает с увеличением кратности начисления. (Доказательство этих фактов см. в параграфе 1.13.)

Пример 1.2. Вклад в размере 3000 руб. положен в банк на депозит 10 марта под 15% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 22 октября?

Используем формулу (1.13) для наращения по схеме сложных процентов:

$$S_n = S_0(1 + i)^n.$$

Продолжительность финансовой операции (в долях периода)

$$n = \frac{t}{T} = \frac{20 + 30 \cdot 6 + 22}{365} = 0,608$$

(считается, что в месяце 30 дней, в году — 365), поэтому имеем

$$S_n = S_0(1 + i)^n = 3000(1 + 0,15)^{0,608} = 3266,07 \text{ руб.}$$

Итак, 22 октября вкладчик получит 3266,07 руб.

1.5. Эквивалентность процентных ставок в схеме сложных процентов

Рассмотрим процентные ставки, с использованием которых может быть описана модель процентного роста накопленной суммы в схеме сложных процентов [4].

Если указана ставка начисления i за период начисления T, то

$$S_t = S_0(1 + i)^{t/T}. \tag{1.28}$$

Если указана годовая ставка j и кратность начисления (в течение года) p, то

$$S_t = S_0(1 + j/p)^{pt}. \tag{1.29}$$

В этом случае говорят, что j — **номинальная ставка**.

При непрерывном начислении процентов

$$S_t = S_0 e^{\delta t}, \tag{1.30}$$

и сила роста δ называется также **непрерывной номинальной ставкой.**

Наконец, если указана **эффективная ставка** $i_{эфф}$, накопленная сумма определяется по формуле

$$S_t = S_0(1 + i_{эфф})^t. \tag{1.31}$$

Формулы (1.28)—(1.31) имеют вид:

$$S_t = S_0 a^t, \tag{1.32}$$

где a — соответствующий (нормированный) **коэффициент роста**.

В каждом случае a получается как годовой коэффициент наращения.

Ставки называются **эквивалентными**, если они имеют одинаковые коэффициенты роста. Это означает, что при одинаковой начальной сумме суммы, накопленные к любому моменту времени t по эквивалентным ставкам, совпадают.

Коэффициент роста a и эффективная ставка $i_{эфф}$ связаны простым соотношением

$$a = 1 + i_{эфф}. \tag{1.33}$$

С учетом этого можно сказать, что ставки эквивалентны, если совпадают эквивалентные им эффективные ставки.

Несложно указать соотношения, обеспечивающие эквивалентность ставок различных типов.

Если j — годовая ставка при кратности начисления p, то ей эквивалентна ставка $i_T = i_{1/p} = j/p$ за период $T = 1/p$. Эквивалентная эффективная ставка определяется формулой [4]

$$i_{эфф} = \left(1 + \frac{j}{p}\right)^p - 1, \tag{1.34}$$

или

$$i_{эфф} = (1 + i_T)^{1/T} - 1. \tag{1.35}$$

Соответственно

$$j = p((1 + i_{эфф})^{1/p} - 1); \quad (1.36)$$

$$i_T = (1 + i_{эфф})^T - 1. \quad (1.37)$$

При непрерывном начислении процентов получаем [4]:

$$i_{эфф} = e^{\delta} - 1, \quad (1.38)$$

$$\delta = \ln(1 + i_{эфф}). \quad (1.39)$$

Ставки i_{T_1} и i_{T_2} с периодами начисления соответственно T_1 и T_2 эквивалентны, если

$$\left(1+i_{T_1}\right)^{1/T_1} = \left(1+i_{T_2}\right)^{1/T_2}. \quad (1.40)$$

Если на разных промежутках начисления процентов $n_1, n_2, ..., n_m$ устанавливаются разные ставки процентов $i_1, i_2, ..., i_m$, то наращенная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_m)^{n_m} = S_0\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}. \quad (1.41)$$

1.6. Сравнение наращения по простой и сложной ставкам процента

При одной и той же ставке процента наращение по схеме простых процентов более выгодно для периода наращения менее года. Для периода наращения более года более выгодно наращение по схеме сложных процентов (рис. 1.1). Для доказательства достаточно показать [5], что

$$f(t) = (1 + i)^t < g(t) = 1 + ti, \text{ если } 0 < t < 1;$$

$$f(t) = (1 + i)^t > g(t) = 1 + ti, \text{ если } t > 1.$$

Для второй производной функции $f(t)$ имеем $f''(t) = \ln^2(1 + i)(1 + i)^t > 0$, следовательно, $f(t)$ является выпуклой вниз функцией при $t > 0$, а $g(t) = 1 + it$ является хордой к $f(t)$, так как уравнение $f(t) = g(t)$ или $(1 + i)^t = 1 + ti$ имеет два решения: $t = 0$ и $t = 1$. Следовательно, $(1 + i)^t < 1 + ti$, если $0 < t < 1$, и $(1 + i)^t > 1 + ti$, если $t > 1$.

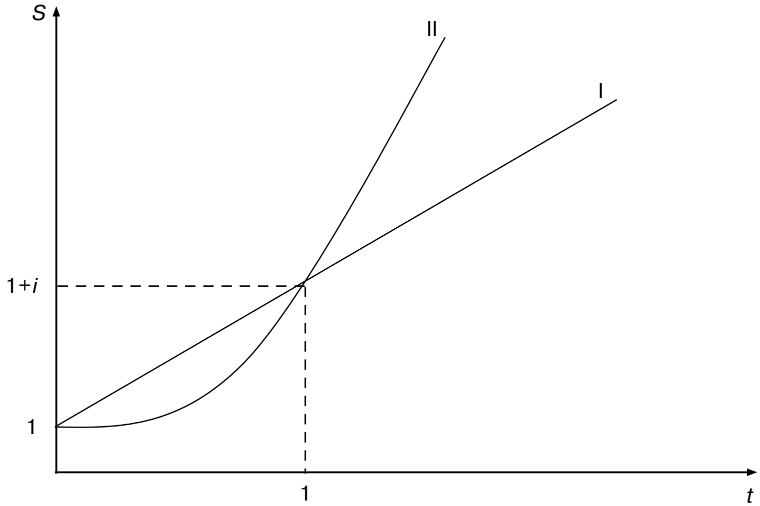

Рис. 1.1. Наращение по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

1.7. Дисконтирование и удержание процентов

Дисконтирование и удержание процентов в определенном смысле являются обратными по отношению к начислению процентов. Различают *математическое дисконтирование* и *банковский учет*.

Математическое дисконтирование позволяет узнать, какую исходную сумму S_0 нужно вложить, чтобы получить по истечении t лет сумму S_t при начислении на S_0 процентов по ставке i.

В случае простых процентов

$$S_0 = S_t/(1 + ti). \qquad (1.42)$$

В случае сложных процентов

$$S_0 = S_t/(1 + i)^t. \qquad (1.43)$$

В случае непрерывного начисления процентов

$$S_0 = S_t/\exp(\delta t). \qquad (1.44)$$

Величина S_0 называется **приведенным значением** величины S_t. Величины i и δ, которые ранее назывались процентными ставками, теперь означают **ставки дисконтирования**.

Банковский учет — это покупка банком денежных обязательств по цене меньшей номинальной, указанной в них суммы.

Примером денежных обязательств может служить **вексель** — долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал) в определенный срок.

В случае покупки банком векселя говорят, что последний *учитывается*, а клиенту выплачивается сумма

$$S_n = S_0 - I_n, \tag{1.45}$$

где S_0 — номинальная сумма векселя;
S_n — цена покупки векселя банком за n лет до погашения;
I_n — дисконт, или доход банка (процентные деньги).

$$I_1 = S_0 d, \tag{1.46}$$

где d — учетная ставка (как правило, через d будем далее обозначать и ставку дисконтирования).

Учетная ставка может быть простой и сложной в зависимости от того, какая схема используется — простых или сложных процентов.

В случае простых процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую арифметическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - nd)$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

В случае сложных процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую геометрическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - d)^n$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

1.7.1. Сравнение дисконтирования по сложной и простой учетной ставкам

Для банка ситуация с дисконтированием является инверсной по отношению к наращению. Так, при сроке учета менее одного года банку выгоднее проводить дисконтирование по сложной учетной ставке (рис. 1.2) (наращение — по простой (рис. 1.1)), а при сроке учета более одного года — по простой учетной ставке (рис. 1.2) (наращение — по сложной (см. рис. 1.1)).

Для доказательства достаточно показать, что [5]

$$f(t) = (1 - d)^t < g(t) = 1 - td, \text{ если } 0 < t < 1;$$

$$f(t) = (1 - d)^t > g(t) = 1 - td, \text{ если } t > 1.$$

Для второй производной функции $f(t)$ имеем $f''(t) = \ln^2(1 - d)(1 - d)^t >$ > 0, следовательно, $f(t)$ является выпуклой вниз функцией при $t > 0$, а $g(t) = 1 - id$ является хордой к $f(t)$, так как уравнение $f(t) = g(t)$ или $(1 - d)^t = 1 - dt$ имеет два решения: $t = 0$ и $t = 1$. Следовательно, $(1 - d)^t <$ $< 1 - dt$, если $0 < t < 1$, и $(1 - d)^t > 1 - dt$, если $t > 1$.

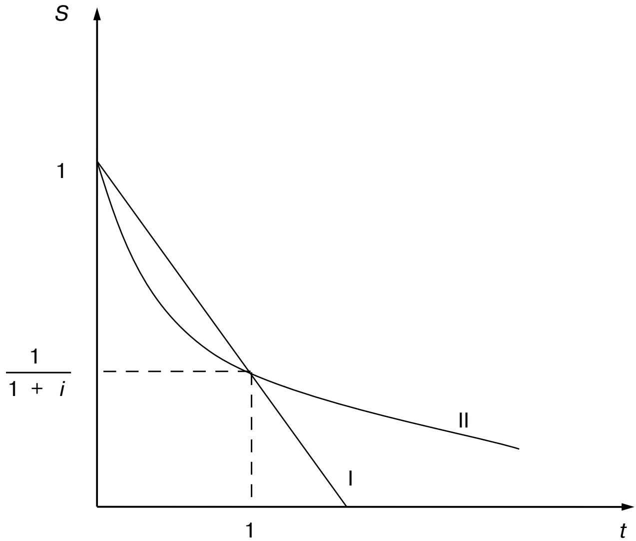

Рис. 1.2. Дисконтирование по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

1.7.2. Эффективная учетная ставка

Пусть $d_{эфф}$ — годовая (эффективная) учетная ставка (ставка дисконтирования) при кратности начисления m. Эквивалентная эффективная учетная ставка определяется исходя из принципа эквивалентности

$$S_0\left(1-d_{эфф}\right)^n = S_0\left(1-\frac{d}{m}\right)^{n\cdot m}, \qquad (1.47)$$

откуда

$$1-d_{эфф} = \left(1-\frac{d}{m}\right)^m, \qquad (1.48)$$

или

$$d_{эфф} = 1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^m. \qquad (1.49)$$

Обратно учетная ставка d выражается через эффективную учетную ставку $d_{эфф}$:

$$d = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d_{эфф}}\right). \tag{1.50}$$

Учетная ставка d и ставка процентов i приводят за промежуток времени t к одинаковому результату, если

$$S_0(1 + it) = S_t \text{ и } S_0 = S_t(1 - dt), \tag{1.51}$$

т.е.

$$(1 + it)(1 - dt) = 1. \tag{1.52}$$

Последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$i = d/(1 - td);\ d = i/(1 + ti). \tag{1.53}$$

Можно записать также соотношения между номинальными ставками наращения и дисконтирования

$$(1 + i/m)^m = (1 - d/p)^{-p}, \tag{1.54}$$

поскольку обе части уравнения равны $1 + i$.

При $m = p$ имеем

$$(1 + i/m)^m = (1 - d/m)^{-1}, \tag{1.55}$$

откуда

$$\frac{i}{m} - \frac{d}{m} = \frac{i}{m} \cdot \frac{d}{m}. \tag{1.56}$$

Если на разных промежутках дисконтирования $n_1, n_2, ..., n_m$ устанавливаются разные ставки дисконтирования $i_1, i_2, ..., i_m$, то современная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0(1+i_1)^{-n_1}(1+i_2)^{-n_2}\ldots(1+i_m)^{-n_m} = S_0\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{-n_k}. \tag{1.57}$$

Пример 1.3. Какую сумму нужно положить на депозит под 12% годовых, чтобы через пять лет получить 500 000 руб.?

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n} = \frac{500\,000}{(1+0{,}12)^5} = \frac{500\,000}{1{,}7623} = 283\,713{,}43 \text{ руб.}$$

Пример 1.4. Вексель стоимостью 100 000 руб. учитывается за четыре года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Требуется найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

Сумма, получаемая векселедержателем, равна

$$S_4 = S_0(1 - d)^4 = 100\,000(1 - 0{,}15)^4 = 52\,200{,}6 \text{ руб.}$$

Величина дисконта равна

$$I_4 = S_0 - S_4 = 100\,000 - 52\,200{,}6 = 47\,799{,}3 \text{ руб.}$$

1.8. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители

На практике для расчетов с простыми и сложными процентами пользуются таблицами мультиплицирующих и дисконтирующих множителей. Мультиплицирующий множитель показывает, во сколько раз возрастет за n лет исходная сумма, положенная в банк под i процентов годовых

$$M(n, i) = (1 + i)^n, \tag{1.58}$$

т.е. представляет собой будущую стоимость одной денежной единицы через n лет при ставке процента i. Дисконтирующий множитель показывает, какую часть составит исходная сумма, положенная в банк под i процентов годовых от суммы, наращенной к концу n-го года:

$$D(n, i) = 1/M(n, i) = (1 + i)^{-n}, \tag{1.59}$$

т.е. представляет собой *приведенную* или *современную* стоимость одной денежной единицы через n лет при ставке процента i.

1.9. «Правило 70»

Это правило позволяет ответить на вопрос: за сколько лет удвоится вклад, помещенный в банк под i процентов годовых? Ниже мы рассмотрим это Правило в случае сложных, простых, непрерывных процентов, а также при кратном начислении процентов. Мы также рассмотрим срок увеличения вклада в произвольное число раз.

1.9.1. Сложные проценты

Удвоение капитала в схеме сложных процентов при ставке i происходит примерно за

$$T = \frac{70}{i} \text{ лет.} \tag{1.60}$$

(Ставка в (1.60) задается в процентах.) Это правило легко получить из формулы сложных процентов. Действительно, $2S_0 = S_0(1 + i)^T$, отсюда $\ln 2 = T\ln(1 + i)$. Разлагая $\ln(1 + i)$ по степеням i, получим $\ln(1 + i) \approx \approx i$. Следовательно, $\ln 2 \approx iT$, откуда $T \approx \ln 2/i$. Окончательно получаем $T \approx 69{,}3/i \approx 70/i$. На практике чаще используется «Правило 72», поскольку число 72 имеет больше делителей, чем 70.

Учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln(1+i) \approx i - \frac{i^2}{2}$ дает результат $T \approx \frac{\ln 2}{i\left(1 - \frac{i}{2}\right)}$, увеличивающий срок удвоения капитала $T \approx \frac{\ln 2}{i}\left(1 + \frac{i}{2}\right)$ на $\Delta T \approx \frac{\ln 2}{2}$.

Пример 1.5. За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?

$$T = 70/i = 70/18 = 3{,}89 \text{ лет.}$$

1.10. Обобщение «Правила 70»

1.10.1. Простые проценты

В случае простых процентов имеем

$$2S_0 = S_0(1 + Ti),$$

отсюда $2 = 1 + Ti$, откуда $T = 1/i$, или (если i выражена в процентах):

$$T = 100/i. \tag{1.61}$$

Таким образом, «Правило 70» в случае простых процентов заменяется «Правилом 100».

Пример 1.6. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 18% годовых?

$$T = 100/i = 100/18 = 5{,}56 \text{ лет.}$$

Напомним, что в схеме сложных процентов удвоение при тех же условиях происходило за 3,89 лет.

1.10.2. Непрерывные проценты

При непрерывном начислении процентов имеем

$$2S_0 = S_0 e^{iT},$$

отсюда $\ln 2 = Ti$. Следовательно, $T = \ln 2/i$. Окончательно получаем

$$T \approx 69{,}3/i \approx 70/i. \tag{1.62}$$

Данная формула формально совпадает с «Правилом 70» случая сложных процентов. Отметим, однако, что в данном случае формула $T = \ln 2/i$ является точной в отличие от случая сложных процентов, где точная формула для срока удвоения капитала имеет вид $T = \ln 2/\ln(1 + i)$, а формула $T = \ln 2/i$ получается после разложения в ряд по малым i функции $\ln(1 + i)$.

1.10.3. Кратное начисление процентов

В случае m-кратного начисления процентов за период имеем

$$2S_0 = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mT}.$$

Отсюда $\ln 2 = mT\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$.

Таким образом, в этом случае имеем точную формулу

$$T = \frac{\ln 2}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}. \tag{1.63}$$

Разлагая $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$ по степеням i, получим $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right) \approx \frac{i}{m}$. Следовательно, $T \approx \ln 2/i$. Окончательно получаем $T \approx 69{,}3/i \approx 70/i$. То есть при кратном начислении процентов получаем, как и в случае однократного начисления процентов, «Правило 70». Из предыдущего известно, что наращенная сумма при кратном начислении процентов возрастает с ростом кратности начисления m, поэтому срок удвоения капитала должен убывать с ростом m, что противоречит «Правилу 70», поскольку в формулу $T \approx 70/i$ не входит m. Данное противоречие связано с использованием лишь первого приближения в разложении $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$ по степеням i. Уже учет следующего (квадратичного) по i-члена в разложении $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)\approx\frac{i}{m}-\frac{i^2}{2m^2}$ дает результат, зависящий от m:

$$T\approx\frac{\ln 2}{m\left(\frac{i}{m}-\frac{i^2}{2m^2}\right)}=\frac{\ln 2}{i\left(1-\frac{i}{2m}\right)}. \tag{1.64}$$

Легко видеть, что с ростом m срок удвоения капитала убывает от

$$T_1\approx\frac{\ln 2}{i\left(1-\frac{i}{2}\right)} \tag{1.65}$$

(срока удвоения капитала в случае однократного начисления процентов) до

$$T_\infty=\frac{\ln 2}{i} \tag{1.66}$$

(случая непрерывного начисления процентов).

1.11. Увеличение капитала в произвольное число раз

Рассмотрим более общую задачу о сроке увеличения вклада в произвольное число раз (n) при данной процентной ставке i.

Простые проценты

В случае простых процентов имеем

$$nS_0 = S_0(1 + Ti),$$

отсюда $n = 1 + Ti$, откуда

$$T = (n - 1)/i. \tag{1.67}$$

Например, при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза за

$$T = (n - 1)/i = 3/0{,}1 = 30 \text{ лет.}$$

Сложные проценты

Рассмотрим задачу об увеличении капитала в произвольное (n) число раз в схеме сложных процентов при данной процентной ставке i. Это правило легко получить из формулы сложных процентов.

Действительно, $nS_0 = S_0(1 + i)^T$, отсюда $\ln n = T\ln(1 + i)$. Разлагая $\ln(1 + i)$ по степеням i, получим $\ln(1 + i) \approx i$. Следовательно, $\ln n \approx iT$, откуда

$$T \approx \ln n/i. \tag{1.68}$$

Учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln(1+i) \approx i - i^2/2$ дает результат

$$T \approx \frac{\ln n}{i\left(1-\frac{i}{2}\right)}, \tag{1.69}$$

увеличивающий срок роста капитала в n раз $T \approx \frac{\ln n}{i}(1+i/2)$ на $\Delta T \approx \ln n/2$.

Таким образом, при рассмотрении задачи об увеличении капитала в произвольное число раз (n) в схеме сложных процентов при данной процентной ставке i необходимо в «Правиле 70» лишь сделать замену

$$\ln 2 \to \ln n. \tag{1.70}$$

Пример 1.7. За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?

$$T = 100/i = 100/18 = 5{,}56 \text{ лет}.$$

$$T \approx \ln n/i \approx 10\ln 4 \approx 13{,}86 \approx 14 \text{ лет}.$$

Непрерывные проценты

При непрерывном начислении процентов имеем

$$nS_0 = S_0 e^{iT},$$

отсюда $\ln n = Ti$. Следовательно,

$$T = \ln n/i. \tag{1.71}$$

Мы получили формулу, формально совпадающую со случаем сложных процентов. Отметим, однако, что в данном случае формула $T = \ln n/i$ является точной в отличие от случая сложных процентов, где точная формула для срока увеличения капитала в n раз имеет вид $T = \ln n/\ln(1 + i)$, а формула $T = \ln n/i$ получается после разложения в ряд по малым i функции $\ln(1 + i)$. Ситуация аналогична случаю удвоения капитала, рассмотренному выше.

Кратное начисление процентов

При m-кратном начислении процентов за период имеем:

$$nS_0 = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mT}.$$

Отсюда

$$\ln n = mT\ln\left(1+\frac{i}{m}\right).$$

Таким образом, в этом случае имеем точную формулу

$$T = \frac{\ln n}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}. \qquad (1.72)$$

Разлагая $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$ по степеням i, получим $\ln(1+\frac{i}{m}) \approx \frac{i}{m}$. Следовательно,

$$T \approx \ln n/i. \qquad (1.73)$$

Из предыдущего известно, что наращенная сумма при кратном начислении процентов возрастает с увеличением кратности начисления m, поэтому срок увеличения капитала в n раз должен убывать с ростом m, что противоречит формуле (1.73), поскольку в нее не входит m. Данное противоречие связано с использованием лишь первого приближения в разложении $\ln(1 + i/m)$ по степеням i. Уже учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right) \approx \frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2}$ дает результат, зависящий от m:

$$T \approx \frac{\ln n}{m\left(\frac{i}{m}-\frac{i^2}{2m^2}\right)} = \frac{\ln n}{i\left(1-\frac{i}{2m}\right)}. \qquad (1.74)$$

Легко видеть, что с ростом m срок увеличения капитала в n раз убывает от $T_1 \approx \frac{\ln n}{i\left(1-\frac{i}{2}\right)}$ (срока увеличения капитала в n раз в случае однократного начисления процентов) до $T_\infty = \frac{\ln n}{i}$ (случая непрерывного начисления процентов).

1.12. Влияние инфляции на ставку процента

1.12.1. Формула Фишера

Говорят, что инфляция составляет долю α в год, если стоимость товара за год увеличивается в $(1 + \alpha)$ раз [5]. Инфляция уменьшает реальную ставку процента. При инфляции деньги обесцениваются в $1 + \alpha$ раз, поэтому реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = S_0(1 + i)$ будет в $(1 + \alpha)$ раза меньше:

$$S_\alpha = S/(1+\alpha) = S_0(1+i)/(1+\alpha) = S_0(1+\alpha-\alpha+i)/(1+\alpha) = \\ = S_0\left(1+(i-\alpha)/(1+\alpha)\right) = S_0(1+i_\alpha). \quad (1.75)$$

В (1.75) мы обозначили через i_α процентную ставку с учетом инфляции (i по-прежнему ставка процента без учета инфляции), для которой получили следующее выражение (формула Фишера):

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}. \quad (1.76)$$

При малой инфляции реальная процентная ставка меньше номинальной примерно на величину инфляции. При достаточно высокой инфляции i_α может стать отрицательной. В такой ситуации кредитор будет работать себе в убыток, а заемщик обогащаться. Чтобы этого не произошло, необходимо скорректировать номинальную процентную ставку i, по которой происходит наращение (она должна, по крайней мере, превышать инфляцию: $i > \alpha$ и $i_\alpha > 0$). Для того чтобы номинальная процентная ставка i обеспечивала реальную процентную ставку i_α при годовой инфляции α, она должна удовлетворять уравнению $i = \alpha + i_\alpha(1 + \alpha)$. При малых i и α перекрестным членом $\alpha \cdot i_\alpha$ можно пренебречь и в этом (зачастую грубом) приближении номинальная процентная ставка i равна сумме эффективной процентной ставки i_α и темпа инфляции α: $i \approx \alpha + i_\alpha$. При этом эффективная процентная ставка i_α равна номинальной процентной ставке i, уменьшенной на темп инфляции α:

$$i_\alpha \approx i - \alpha. \quad (1.77)$$

Пример 1.8. Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь 10%-ную доходность?

Решим уравнение Фишера $i_\alpha = \dfrac{i-\alpha}{1+\alpha}$ относительно i:

$$i = i_\alpha(1 + \alpha) + \alpha = 0{,}1(1 + 0{,}08) + 0{,}08 = 0{,}188 = 18{,}8\%.$$

Итак, ответ 18,8% на 0,8% превышает простой ответ 18%, получаемый из (1.77) простым сложением темпа инфляции и эффективной процентной ставки.

1.12.2. Темп инфляции за несколько периодов

Пусть темпы инфляции за последовательные периоды времени t_1, t_2, ..., t_n равны α_1, α_2, ..., α_n соответственно. Найдем темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$. Здравый смысл подсказывает, что темп инфляции — величина аддитивная, так что α, по крайней мере приближенно, равен сумме темпов инфляции α_1, α_2, ..., α_n:

$$\alpha \approx \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n. \tag{1.78}$$

Ниже мы получим точное выражение для темпа инфляции за суммарный период времени t и увидим, насколько он отличается от интуитивного результата (1.78).

В конце первого периода наращенная сумма будет равна $S_1 = S_0(1 + i)$, а с учетом инфляции $S_1 = S_0\left(1+i\right)^{t_1} \Big/ \left(1+\alpha_1\right)$. В конце второго периода наращенная сумма будет равна $S_2 = S_0\left(1+i\right)^{t_1+t_2}$, а с учетом инфляции $S_2 = S_0\left(1+i\right)^{t_1+t_2} \Big/ \left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right)$. В конце n-го периода наращенная сумма будет равна $S_n = S_0\left(1+i\right)^{t_1+t_2+...+t_n}$, а с учетом инфляции она составит:

$$S_n = S_0\left(1+i\right)^{t_1+t_2+...+t_n} \Big/ \left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right)\cdot ... \cdot\left(1+\alpha_n\right). \tag{1.79}$$

С другой стороны, при темпе инфляции α в конце периода t наращенная сумма будет равна

$$S_n = S_0(1 + i)^t/(1 + \alpha). \tag{1.80}$$

Приравнивая правые части (1.79) и (1.80), получаем

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot ... \cdot (1 + \alpha_n) = 1 + \alpha. \tag{1.81}$$

Отсюда

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot ... \cdot (1 + \alpha_n) - 1. \tag{1.82}$$

Строгое доказательство этой формулы несложно получить методом математической индукции.

Отметим, что темп инфляции за n-периодов не зависит ни от длительности составляющих периодов, ни от периода t.

Для равных темпов инфляции $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$ (при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1. \tag{1.83}$$

Проанализируем отличие полученных результатов (1.82) и (1.83) от интуитивного выражения (1.78) и причину этого на примере временного периода, состоящего из двух периодов. Пусть темпы инфляции за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны α_1, α_2 соответственно. Тогда по формуле (1.82) темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2. \tag{1.84}$$

Как видим, отличие от суммы темпов инфляции состоит в появлении перекрестного члена $\alpha_1\alpha_2$. Хотя этот член и является малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с α_1 и α_2 при условии, что они малы, на практике необходимо их учитывать.

1.12.3. Синергетический эффект

Мы получили пример так называемого синергетического эффекта (т.е. эффект (результат) от двух (нескольких) частей больше аддитивного эффекта (простого суммирования)). Ответствен за синергетический эффект появляющийся перекрестный член $\alpha_1\alpha_2$. Он приводит к тому, что темп инфляции за два последовательных периода времени $t = t_1 + t_2$ оказывается больше суммы темпов инфляции.

Пример 1.9. Пусть темпы инфляции за два последовательных периода времени t_1 и t_2 равны 10 и 20% соответственно. Тогда по формуле (1.82) темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен:

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}32,$$

т.е. 32%. Таким образом, отличие от суммы темпов инфляции составляет 2%.

Пример 1.10. Пусть темп инфляции за год α равен 20%. Найти темп инфляции за квартал α_1 при условии его постоянства.

Применим формулу

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1.$$

Имеем

$$\alpha + 1 = (1 + \alpha_1)^n, \; \alpha_1 + 1 = \sqrt[n]{1+\alpha}\,,$$

и окончательно $\alpha_1 = \sqrt[n]{1+\alpha} - 1$. Подставив в это выражение $\alpha = 20\% = 0{,}2$, $n = 4$, получим для квартального темпа инфляции

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{1+\alpha} - 1 = \sqrt[4]{1{,}2} - 1 \approx 1{,}0466 - 1 = 0{,}0466 \approx 4{,}66\%.$$

Как видим, темп инфляции за квартал оказался ниже получаемого простым делением годового темпа инфляции на четыре, т.е. $20\% : 4 = 5\%$. Разница составляет 0,36%.

Пример 1.11. Решим обратную задачу. Пусть темп инфляции за месяц α_1 равен 2%. Найти темп инфляции за год α при условии постоянства темпа инфляции в течение года. Применим формулу $\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1$. Подставляя в нее $\alpha = 2\% = 0{,}02$, $n = 12$, получим для годового темпа инфляции

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^{12} - 1 = (1 + 0{,}02)^{12} - 1 =$$
$$= (1{,}02)^{12} - 1 \approx 1{,}268 - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\%.$$

Видим, что темп инфляции за год оказывается выше получаемого простым умножением месячного темпа инфляции на 12, т.е. $2\% \cdot 12 = 24\%$. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно сделать два вывода:

1) темп инфляции за суммарный период превышает сумму темпов инфляции за составляющие периоды;

2) темп инфляции за составляющий период оказывается меньше соответствующей ему доли темпа инфляции за суммарный период.

1.13. Эффективная процентная ставка

В параграфе 1.7.2 рассматривалась эффективная учетная ставка. Здесь же внимание подробно будет уделено эффективной процентной ставке.

Эффективная ставка процента — это сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода. Обозначив наращенное значение единичной суммы в момент времени t через a_t, ставку процента — через i, а наращенное значение полной суммы — через S_t, для первого периода имеем начисления

$$i_1 = \frac{(1+i)}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \qquad (1.85)$$

для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}. \qquad (1.86)$$

Из формулы (1.86) видно, что эффективная процентная ставка может меняться и меняется в зависимости от номера периода начисления, однако, как будет показано ниже, в очень важном и широко применяемом случае сложных процентов эффективная процентная ставка остается постоянной для всех периодов начисления, т.е. для всех $n \geq 1$.

Эффективная ставка процентов может значительно отличаться от номинальной ставки, объявленной банком и фигурирующей в договоре банковского вклада или кредита. При вкладах она, как правило, оказывается меньше номинальной ставки (за счет инфляции, например) либо равна ей (однако она бывает и выше номинальной при кратном начислении процентов), а при взятии кредитов — выше. Эффективная ставка зависит от многих факторов: от кратности начисления процентов, от темпа инфляции, от номера периода начисления, от наличия и величины транзакционных издержек, от налогов и многих других. Ниже мы рассмотрим практически все перечисленные случаи.

1.13.1. Сложные и простые проценты

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_0 \left(1+i\right)^n - S_0 \left(1+i\right)^{n-1}}{S_0 \left(1+i\right)^{n-1}} = 1 + i - 1 = i \qquad (1.87)$$

не зависит от n и равна номинальной.

Эффективная ставка процента в схеме простых процентов для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{\left(1+in\right) - \left(1+i\left(n-1\right)\right)}{1+i\left(n-1\right)} = \frac{1}{1+i\left(n-1\right)} \qquad (1.88)$$

убывает с ростом n.

1.13.2. Кратное начисление процентов

При m-кратном начислении процентов наращенная за t лет сумма равна

$$S(t, m) = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}. \tag{1.89}$$

Найдем эффективную процентную ставку в случае кратного начисления процентов. Ее можно определить как такую процентную ставку, которая при однократном (за период) начислении процентов приводит к той же наращенной величине, что и при m-кратном. Приравнивая наращенные величины

$$S(t, m) = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = S_0\left(1+i_{\text{эфф}}\right)^{t}, \tag{1.90}$$

получим эффективную процентную ставку в случае кратного начисления процентов

$$i_{\text{эфф}} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1. \tag{1.91}$$

Покажем, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется. Для доказательства того, что эффективная процентная ставка растет с увеличением кратности начисления, необходимо показать, что производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$di_{\text{эфф}}/dm > 0. \tag{1.92}$$

Для доказательства того, что рост эффективной процентной ставки с ростом m замедляется и выходит на насыщение, необходимо показать, что вторая производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} < 0 \text{ и при } m \to \infty \frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} \to 0. \tag{1.93}$$

1. Покажем, что производная эффективной процентной ставки по кратности начисления $\frac{di_{\text{эфф}}}{dm} > 0$ (по крайней мере при малых номинальных ставках $i \le 1$).

$$i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1; \tag{1.94}$$

$$\frac{di_{\text{эфф}}}{dm} = \frac{d}{dm}\left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1\right] = \frac{d}{dm}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m. \tag{1.95}$$

Используем равенство

$$\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right). \tag{1.96}$$

Продифференцируем обе части равенства по m

$$\frac{\dfrac{d\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m}{dm}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m} = \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) - \frac{i}{i + m}, \tag{1.97}$$

отсюда

$$\frac{d\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m}{dm} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \left[\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) - \frac{i}{i + m}\right]. \tag{1.98}$$

При малых i, разлагая слагаемые в квадратных скобках по степеням $\frac{i}{m}$ до членов второго порядка $\left(\frac{i}{m}\right)^2$, имеем

$$\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) \approx \frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2}, \quad \frac{i}{i + m} \approx \frac{i}{m} - \frac{i^2}{m^2}. \tag{1.99}$$

Подставляя поученные выражения в (1.98), получим

$$\frac{di_{\text{эфф}}}{dm} = \frac{d\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m}{dm} \approx \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \left[\frac{i}{m} - \frac{i}{i + m}\right] = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \frac{i^2}{2m^2} > 0. \tag{1.100}$$

Мы доказали, что эффективная процентная ставка растет с увеличением кратности начисления. Отметим, что во всех других пособиях по финансовой математике этот факт лишь иллюстрируется на примерах, как и замедление скорости роста эффективной процентной ставки с увеличением кратности начисления.

2. Для доказательства последнего найдем вторую производную $\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2}$, продифференцировав обе части равенства (1.98) по m,

$$\frac{d^2\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}{dm^2}=\left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^m\right)'\left[\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)-\frac{i}{i+m}\right]+$$

$$+\left(1+\frac{i}{m}\right)^m\left[\frac{m}{i+m}\left(-\frac{i}{m^2}\right)+\frac{i}{(i+m)^2}\right]=$$

$$=\left(1+\frac{i}{m}\right)^m\left\{\left[\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)-\frac{i}{i+m}\right]^2-\frac{i^2}{m(i+m)^2}\right\}. \qquad (1.101)$$

При малых i имеем

$$\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2}=\frac{d^2\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}{dm^2}\approx(1+i)\left\{\left[\frac{i^2}{2m^2}\right]^2-\frac{1}{m}\left(\frac{i}{m}\right)^2\right\} \qquad (1.102)$$

или окончательно, с учетом малости $\frac{i}{m}$,

$$\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2}\approx-(1+i)\frac{1}{m}\left(\frac{i}{m}\right)^2<0. \qquad (1.103)$$

Итак, мы доказали, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов, а также замедление скорости роста эффективной процентной ставки с увеличением кратности начисления. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется.

1.13.3. Учет инфляции

При инфляции деньги обесцениваются в $1 + \alpha$ раз, поэтому реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = S_0(1 + i)$ будет в $(1 + \alpha)$ раза меньше

$$S_\alpha = \frac{S}{1+\alpha} = S_0 \frac{1+i}{1+\alpha} = S_0 \frac{1+\alpha-\alpha+i}{1+\alpha} =$$
$$= S_0\left(1+\frac{i-\alpha}{1+\alpha}\right) = S_0(1+i_\alpha). \qquad (1.104)$$

Здесь мы обозначили через i_α процентную ставку с учетом инфляции (i по-прежнему — ставка процента без учета инфляции), для которой получили формулу Фишера, определяющую эффективную процентную ставку при учете инфляции

$$i_{\text{эфф}} = i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}. \qquad (1.105)$$

1.13.4. Учет налогов

А. Проценты по вкладу в банке не облагаются налогами, если они не превышают ставку рефинансирования Банка России +5% (в настоящее время i_0 = 8,75% + 5% = 13,75%). В противном случае с процентов, превышающих ставку рефинансирования Банка России, взимается налог t = 35%. Проценты по вкладам в банках РФ достигают в настоящее время 15% и более, так что знание реальной (эффективной) процентной ставки крайне актуально.

Рассчитаем эффективную процентную ставку в этом случае. Рассмотрим один период начисления. Наращенная величина вклада в конце периода равна:

$$S = S_0\left[(1+i)-t(i-i_0)\right] = S_0\left[1+i(1-t)+ti_0\right] = S_0\left(1+i_{\text{эфф}}\right). \qquad (1.106)$$

Отсюда для эффективной процентной ставки при наличии налогов получаем

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t) + ti_0. \qquad (1.107)$$

Пример 1.12. Вклад помещен в банк под 17% годовых. Найти эффективную процентную ставку.

Для нахождения эффективной процентной ставки используем формулу (1.107):

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t) + ti_0 = 0{,}17(1-0{,}35) + 0{,}35 \cdot 0{,}1375 = 0{,}1586\%.$$

Таким образом, реальная (эффективная) процентная ставка 15,86% оказывается на 1,14% ниже объявленной номинальной (17%).

В. Проценты за кредит исключаются из налогооблагаемой базы, если они не превышают ставку рефинансирования Банка России плюс несколько пунктов (для рублевых кредитов) и фиксированную величину для валютных кредитов (обозначим эти величины i^*). Найдем эффективную кредитную процентную ставку в этом случае.

1. Если кредитная процентная ставка не превышает i^*, то реальная (эффективная) ставка по взятому кредиту D с учетом налога на прибыль компании t находится следующим образом:

$$iD - tiD = iD(1 - t) = i_{\text{эфф}}D, \tag{1.108}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = i(1 - t). \tag{1.109}$$

Величина $(1 - t)$ называется **налоговым щитом,** который показывает финансовую выгоду компании от использования заемного капитала.

2. Если кредитная процентная ставка превышает i^*, то из платы за кредит iD вычитается лишь величина ti^*D, поэтому имеем

$$\begin{aligned} i_{\text{эфф}}D &= iD - ti^*D = iD - tiD + tiD - ti^*D = \\ &= D\left[(1-t) + t\left(i - i^*\right)\right] = D\left[(1-t) + t\Delta i\right], \end{aligned} \tag{1.110}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t) + t\Delta i. \tag{1.111}$$

Пример 1.13. Кредит взят под 20% годовых. Найти эффективную кредитную процентную ставку, если ставка налога на прибыль составляет 20%, а ставка отсечения i^* (8,75% · 1,1 = 9,625%).

Используя формулу (1.111), имеем

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t) + t\Delta i = 0{,}2(1-0{,}2) + 0{,}2(0{,}2 - 0{,}09625) = 0{,}18075 = 18{,}08\%.$$

Таким образом, эффективная кредитная процентная ставка равна 18,08% вместо 20%.

1.13.5. Эквивалентность различных процентных ставок

Эквивалентность простых и сложных процентов

Легко получить формулы эквивалентности простых и сложных процентов.

Так, в простейшем случае однократного начисления процентов имеем

$$S_0(1 + i_{\text{п}}n) = S_0(1 + i_c)^n, \tag{1.112}$$

откуда

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[(1+i_c)^n - 1\right], \; i_c = \sqrt[n]{1+i_{\text{п}}n} - 1. \qquad (1.113)$$

В случае m-кратного начисления процентов имеем за n-периодов

$$S_0(1+i_{\text{п}}n) = S_0\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{m \cdot n}, \qquad (1.114)$$

откуда

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{n \cdot m} - 1\right], \; i_c = m\left(\sqrt[m \cdot n]{1+i_{\text{п}}n} - 1\right). \qquad (1.115)$$

Пример 1.14. Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную сложной ставке в 15% для временнóго интервала в пять лет при ежемесячном начислении процентов.

Используя первую формулу из (1.115), получим

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{n \cdot m} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{5 \cdot 12} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[(1{,}15)^{60} - 1\right] = 0{,}2214,$$

т.е. эквивалентная простая процентная ставка $i_{\text{п}}$ = 22,14%.

Эквивалентность простых и непрерывных процентов

Аналогично можно рассмотреть и эквивалентность других процентных ставок, например, простой и непрерывной

$$S_0(1+i_{\text{п}}n) = S_0 e^{i_{\text{н}} \cdot n}, \qquad (1.116)$$

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left(e^{i_{\text{н}} \cdot n} - 1\right), \; i_{\text{н}} = \frac{1}{n}\ln(1+i_{\text{п}}n). \qquad (1.117)$$

Пример 1.15. Найти непрерывную процентную ставку $i_{\text{н}}$, эквивалентную простой ставке в 15% для временнóго интервала в пять лет.

Используя вторую формулу из (1.117), получим

$$i_{\text{н}} = \frac{1}{n}\ln(1+i_{\text{п}}n) = \frac{1}{5}\ln(1+0{,}15 \cdot 5) =$$
$$= \frac{1}{5}\ln 1{,}75 = \frac{1}{5}0{,}5596 = 0{,}1119,$$

т.е. эквивалентная непрерывная процентная ставка $i_{\text{н}}$ = 11,19%.

Эквивалентность сложных и непрерывных процентов

Приравняем наращенные суммы в случае начисления сложных и непрерывных процентов за n-периодов

$$S_0(1+i_c)^n = S_0 e^{i_{\text{н}} \cdot n}. \qquad (1.118)$$

где $i_с$ — ставка сложных процентов;
$i_н$ — ставка непрерывных процентов.

Сокращая это равенство на S_0 и извлекая из обеих частей корень n степени (для сокращения n в показателе степени), получим

$$i_н = \ln(1 + i_c),\ i_c = e^{i_н} - 1. \qquad (1.119)$$

1.14. Внутренняя норма доходности

1.14.1. Понятие внутренней нормы доходности

Рассмотрим подробно одно из наиболее важных понятий в теории инвестиций — внутреннюю норму доходности [4], а также исследуем зависимость чистого приведенного дохода (NPV) от ставки дисконтирования.

Инвестиционный процесс, описываемый финансовым потоком, имеет вид:

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}. \qquad (1.120)$$

Величина C_k (K = 0, 1, ..., n) представляет собой баланс инвестиционных затрат и чистого дохода за k-й период, актуализированный на конец этого периода. Отрицательный платеж в (1.120) означает, что инвестиционные затраты превысили чистый доход, положительный платеж означает, что чистый доход превысил инвестиционные затраты.

Посредством ставки приведения i рассчитаем текущую величину потока (1.120), называемую в данном контексте чистым приведенным доходом (NPV):

$$NPV(i) = \frac{C_0}{(1+i)^{t_0}} + \frac{C_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}}. \qquad (1.121)$$

Если NPV имеет отрицательное значение, это означает, что доходы не окупают затрат при принятой норме доходности i.

Итак, рассмотрим зависимость NPV от ставки приведения (принятой нормы доходности) i. Сначала обратим внимание на простейший типичный случай, когда все затраты осуществляются в начальный момент, а затем инвестор начинает получать доходы. Пусть финансовый поток имеет вид:

$$CF = \{(0, -K), (1, C_1), (2, C_2), ..., (n, C_n)\}, \quad (1.122)$$

где $K > 0$ — начальные инвестиции, все платежи C_k, $k = 1, 2, ..., n$ неотрицательны, и среди них есть хотя бы один положительный.

Тогда

$$NPV(i) = -K + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k}. \quad (1.123)$$

При $i > -1$ чистый приведенный доход $NPV(i)$ является убывающей функцией ставки приведения i (рис. 1.3).

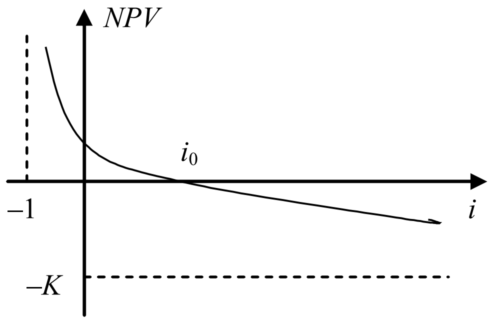

Рис. 1.3. Зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования [4]

С одной стороны, при i, стремящемся к -1 (справа), каждое слагаемое $\frac{C_k}{(1+i)^k}$ с положительным C_k стремится к бесконечности, а значит, и сумма (1.123) стремится к бесконечности. Следовательно, $PV(i) > 0$ для i достаточно близких к -1. С другой стороны, при неограниченном росте i все слагаемые $\frac{C_k}{(1+i)^k}$ стремятся к нулю, а сумма (1.123) стремится к — K. Значит, $PV(i) < 0$ для достаточно больших i. Таким образом, при $i > -1$ непрерывная функция $PV(i)$, убывая, меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $PV(i)$ обращается в ноль для некоторого $i = i_0$. Значение i_0 называют внутренней нормой доходности потока платежей (1.123).

Внутренняя норма доходности служит границей процентных ставок, для которых проект имеет положительную и отрицательную приведенную стоимость: если $i > i_0$, то $PV(i) < 0$, если $i < i_0$, то $PV(i) > 0$. Так как $PV(0) = \sum_{k=1}^{n} C_k - K$, то $i_0 > 0$ тогда и только тогда, когда

$\sum_{k=1}^{n} C_k > K$, т.е. нетто-сумма доходов превосходит начальные инвестиции.

Пример 1.16. Найти внутреннюю норму доходности потока

$$CF = \{(0, -8000), (1, 6000), (2, 5000)\}. \quad (1.124)$$

Составим уравнение:

$$-8000 + 6000(1 + i)^{-1} + 5000(1 + i)^{-2} = 0.$$

Заменяя $x = (1 + i)^{-1}$, получим квадратное уравнение

$$5000 \cdot x^2 + 6000 \cdot x - 8000 = 0, \text{ или}$$

$$5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 8 = 0.$$

Решая его, находим

$$(1 + i)^{-1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{5} = \frac{-3 \pm 7}{5}.$$

Из двух корней –2 и 0,8 нам подходит второй. Решая уравнение

$$(1 + i)^{-1} = 0{,}8,$$

получаем $i \approx 0{,}25$.

Следовательно, внутренняя норма доходности потока (1.124) составляет 25%.

В общем случае говорят, что финансовый поток (1.120) обладает внутренней нормой доходности, если уравнение

$$NPV(i) = 0 \quad (1.125)$$

имеет единственное решение $i_0 > -1$; решение уравнения (1.121) называется внутренней нормой доходности потока (1.120).

Рассмотрим произвольный финансовый поток

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), (t_2, C_2), ..., (t_n, C_n)\}, \quad (1.126)$$

в котором отрицательные платежи могут чередоваться с положительными, предполагая, однако, что он обладает внутренней нормой доходности. Будем дополнительно предполагать, что $C_0 < 0$, а $C_n > 0$. Представим поток CF в виде разности двух неотрицательных потоков A и B:

$$CF = A - B, \quad (1.127)$$

где

$$A = \{(t_0, A_0), (t_1, A_1), (t_2, A_2), \ldots, (t_n, A_n)\},$$

$$B = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1), (t_2, B_2), \ldots, (t_n, B_n)\}, \tag{1.128}$$

полагая $A_k = \max(0, C_k)$, $B_k = \max(0, -C_k)$. Пусть τ_A и τ_B — средние сроки потоков A и B. Тогда

$$\frac{A_0}{(1+i)^{t_0}} + \frac{A_1}{(1+i)^{t_1}} + \ldots + \frac{A_2}{(1+i)^{t_n}} = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{(1+i)^{\tau_A}}, \tag{1.129}$$

$$\frac{B_0}{(1+i)^{t_0}} + \frac{B_1}{(1+i)^{t_1}} + \ldots + \frac{B_2}{(1+i)^{t_n}} = \frac{B_0 + B_1 + \ldots + B_n}{(1+i)^{\tau_B}}. \tag{1.130}$$

Поэтому уравнение $PV(CF, i) = 0$ приобретает вид:

$$\frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{(1+i)^{\tau_A}} = \frac{B_0 + B_1 + \ldots + B_n}{(1+i)^{\tau_B}}. \tag{1.131}$$

Отсюда

$$(1+i)^{\tau_A - \tau_B} = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{B_0 + B_1 + \ldots + B_n}. \tag{1.132}$$

Следовательно,

$$i = \left(\frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{B_0 + B_1 + \ldots + B_n} \right)^{\frac{1}{\tau_A - \tau_B}} - 1. \tag{1.133}$$

Формула (1.133) может использоваться для приближенного вычисления внутренней нормы доходности.

Пример 1.17. Найти внутреннюю норму доходности потока (1.124), используя формулу (1.133).

Положим,

$$A = \{(0, 0), (1, 2000), (2, 3000)\},$$

$$B = \{(0, 4000), (1, 0), (2, 0)\}.$$

Очевидно, $\tau_B = 0$. Найдем приближенно средний срок потока A как взвешенную сумму моментов платежей:

$$\tau_A \approx \frac{2000}{2000+3000} \cdot 1 + \frac{3000}{2000+3000} \cdot 2 = 1{,}6.$$

Следовательно,

$$i_0 \approx \left(\frac{2000+3000}{4000} \right)^{\frac{1}{1,6}} - 1 = 14{,}97.$$

Напомним, что, непосредственно решая уравнение, мы получили ранее $i_0 = 15{,}14$.

1.14.2. Внутренняя норма доходности типичных инвестиционных потоков

В предыдущем параграфе было фактически установлено, что для финансового потока вида (1.122) внутренняя норма доходности i_0 определена, причем $i_0 > 0$, если нетто-сумма доходов превосходит начальные инвестиции.

Этот результат допускает обобщение на так называемые типичные инвестиционные потоки [4]. Под **типичным инвестиционным потоком** понимается поток платежей, в котором все отрицательные платежи предшествуют положительным, т.е. вложения преобладают над отдачей лишь на начальных этапах инвестиционного процесса. Таким образом, типичный инвестиционный поток имеет вид:

$$CF = \{(t_0, -C_0), \ldots, (t_m, -C_m), (t_{m+1}, C_{m+1}), \ldots, (t_n, C_n)\}, \qquad (1.134)$$

где все C_k — неотрицательны, причем C_0 и C_n отличны от нуля.

Докажем, что любой типичный инвестиционный поток имеет однозначно определенную внутреннюю норму доходности. Рассмотрим произвольный финансовый поток (1.134), удовлетворяющий условиям теоремы. Поток (1.134) можно представить в виде разности двух потоков:

$$CF = CF^{(+)} - CF^{(-)}, \qquad (1.135)$$

где

$$CF^{(+)} = \{(t_{m+1}, C_{m+1}), \ldots, (t_n, C_n)\} \qquad (1.136)$$

и

$$CF^{(-)} = \{(t_0, C_0), \ldots, (t_m, C_m)\}. \qquad (1.137)$$

Приведем величины потоков (1.136) и (1.137) к некоторому моменту времени τ, находящемуся между t_m и t_{m+1}. Пусть

$$P^{(+)}(i) = PV_\tau\left(CF^{(+)}, i\right) = \frac{C_{m+1}}{(1+i)^{t_{m+1}-\tau}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^{t_n-\tau}}, \qquad (1.138)$$

$$P^{(-)}(i) = PV_\tau(CF^{(-)}, i) = C_0(1+i)^{\tau-t_0} + \ldots + C_m(1+i)^{\tau-t_m}. \qquad (1.139)$$

Когда i пробегает от -1 до $+\infty$ величина $P^{(+)}(i)$ убывает от $+\infty$ до 0, а величина $P^{(-)}(i)$ возрастает от 0 до $+\infty$. Так как

$$PV_\tau(CF, i) = P^{(+)}(i) - P^{(-)}(i), \tag{1.140}$$

то $PV_\tau(CF, i)$ — убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, уравнение

$$PV_\tau(CF, i) = 0 \tag{1.141}$$

имеет единственное решение $i_0 > -1$. Поскольку

$$PV_\tau(CF, i) = (1+i)^\tau \cdot PV(CF, i), \tag{1.142}$$

уравнение

$$PV(CF, i) = 0 \tag{1.143}$$

равносильно уравнению (1.141). Следовательно, уравнение $PV(CF, i) = 0$ для потока (1.134) имеет единственное решение $i_0 > -1$, которое и является внутренней нормой доходности этого потока.

Определение внутренней нормы доходности и предыдущая теорема могут быть распространены на потоки, имеющие непрерывную составляющую. Так, если для финансового потока CF приведенная стоимость $PV(CF, i)$ определена и непрерывна по i, а уравнение

$$PV(CF, i) = 0 \tag{1.144}$$

имеет при $i > -1$ единственное решение i_0, то i_0 и служит внутренней нормой доходности потока CF.

Рассмотрим финансовый поток CF в промежутке времени от 0 до T, представимый в виде суммы

$$CF = CF^{(d)} + CF^{(c)}, \tag{1.145}$$

где

$$CF^{(d)} = \{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\}\ ,\ 0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T \tag{1.146}$$

есть дискретный поток, $CF^{(c)}$ — поток с непрерывной плотностью $\mu(t)$, $0 \le t \le T$.

При этом предполагается, что на промежутке времени от 0 до T имеется момент τ такой, что все отрицательные платежи предшествуют моменту τ, а положительные следуют за ним. Более точно мы предполагаем, что τ отличен от моментов платежей дискретного потока $CF^{(d)}$ и

$$C_k \le 0 \text{ при } t_k < \tau\ ;\ C_k \ge 0 \text{ при } t_k > \tau;$$

$$\mu(t) \le 0 \text{ при } t < \tau;\ \mu(\mathrm{t}) \ge 0 \text{ при } t > \tau. \tag{1.147}$$

Уравнение $PV(CF, i) = 0$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^{t_k}} + \int_0^T \frac{\mu(t)}{(1+i)^t} dt = 0. \tag{1.148}$$

Приводя стоимость потока к моменту τ и разбивая потоки на положительную и отрицательную части, от уравнения (1.148) переходим к уравнению

$$\sum_{t_k<\tau} \left|C_k\right| (1+i)^{\tau - t_k} + \int_0^{\tau} \left|\mu(t)\right| (1+i)^{\tau - t} dt =$$

$$= \sum_{t_k>\tau} \frac{C_k}{(1+i)^{t_k - \tau}} + \int_{\tau}^{T} \frac{\mu(t)}{(1+i)^{t-\tau}} dt. \tag{1.149}$$

Когда i пробегает промежуток от -1 до $+\infty$, левая часть уравнения (1.149) непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, а правая непрерывно убывает от $+\infty$ до 0. Следовательно, уравнение (1.149) имеет единственное решение: $i_0 > -1$, которое и является внутренней нормой доходности финансового потока CF.

Пример 1.18. Необходимо оценить внутреннюю норму доходности следующего проекта [4]. Разовые начальные инвестиции включают затраты на приобретение предприятия и закупку для него нового оборудования и составляют величину K. В течение последующих двух лет происходит постоянный относительный прирост ежедневных доходов на q начиная с дневного дохода R_0. Затраты на производство в течение двух лет постоянны и составляют в день величину z. По истечении T лет предполагается продать предприятие за сумму S.

Можно считать, что финансовый поток, связанный с описанным проектом, содержит дискретную и непрерывную составляющие. Дискретная компонента имеет вид:

$$CF^{(d)} = \{(0, -K), (T, S)\}.$$

Непрерывная компонента представляет собой финансовый поток с плотностью

$$\mu(t) = 365 \cdot (R_0 \cdot (1 + q)^t - z).$$

Внутренняя норма доходности определяется из уравнения

$$-K + 365 \cdot \int_0^T \frac{R_0(1+q)^t - z}{(1+i)^t} dt + S = 0. \tag{1.150}$$

Положим $\alpha = \ln(1 + q)$ и $\delta = \ln(1 + i)$. Тогда

$$\int_0^T \frac{R_0(1+q)^t - z}{(1+i)^t} dt = R_0 \int_0^T e^{(\alpha-\delta)t} dt - z \int_0^T e^{-\delta t} dt =$$
$$= \frac{R_0}{\alpha - \delta}\left(e^{(\alpha-\delta)T} - 1\right) - \frac{z}{\delta}\left(e^{-\delta T} - 1\right).$$

Соответственно уравнение (1.150) превращается в следующее уравнение относительно δ:

$$-K + \frac{R_0}{\alpha - \delta}\left(e^{(\alpha-\delta)T} - 1\right) - \frac{z}{\delta}\left(e^{-\delta T} - 1\right) + S = 0.$$

1.14.3. Внутренняя норма доходности финансовых потоков с чередованием положительных и отрицательных платежей

Для произвольного финансового потока, в котором отрицательные платежи чередуются с положительными, внутренняя норма доходности может оказаться неопределенной. Рассмотрим, например, такой финансовый поток:

$$CF = \{(0, -1000), (1, 3410), (2, -3856), (3, 1446)\}. \qquad (1.151)$$

В этом потоке сумма отрицательных платежей равна сумме положительных, так что приведенная стоимость равна нулю при $i_0 = 0$. Кроме корня i_0 уравнение

$$-1000 + \frac{3410}{1+i} + \frac{3856}{(1+i)^2} - \frac{1446}{(1+i)^3} = 0$$

имеет еще два корня: $i_1 = 0{,}1274$ и $i_2 = 0{,}2826$. Таким образом, на роль внутренней нормы доходности претендуют еще две ставки: 12,74 и 28,26%.

Другая проблема связана с «неустойчивостью» внутренней нормы доходности даже в том случае, когда она определена однозначно. Так, относительно небольшие изменения отдельных платежей могут привести к существенным изменениям внутренней нормы доходности.

Например, рассмотрим наряду с потоком платежей (1.151) потоки

$$CF = \{(0, -1000), (1, 3410), (2, -3856), (3, 1442)\} \qquad (1.152)$$

и

$$CF = \{(0, -1000), (1, 3410), (2, -3856), (3, 1452)\}, \qquad (1.153)$$

полученные из (1.51) изменением последнего платежа соответственно на 0,28 и 0,41%. Внутренняя норма доходности определена для потоков (1.152) и (1.153) однозначно. Для потока (1.152) она отрицательна и равна –6,15%, для потока (1.153) — положительна и равна 35,62%.

Тем не менее теорема о внутренней норме доходности типичного инвестиционного потока может быть распространена и на некоторые финансовые потоки с чередованием положительных и отрицательных платежей.

Будем называть **нетто-суммой** потока платежей

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), ..., (t_n, C_n)\}, \; t_0 \le t_1 \le ... \le t_n, \qquad (1.154)$$

к моменту времени τ величину $S(\tau) = \sum_{t_k \le \tau} C_k$.

Докажем, что если в потоке платежей (1.154) все нетто-суммы $S(t_k)$, $k = 1, ..., n$, неотрицательны, то он имеет неотрицательную приведенную стоимость при любой положительной ставке приведения. Если, кроме того, начальный платеж положителен, то и приведенная стоимость положительна при любой положительной ставке приведения.

Так как $C_0 = S_0$ и $C_k = S_k - S_{k-1}$ при $k = 1, 2, ..., n$, то

$$\frac{C_0}{(1+i)^{t_0}}. \qquad (1.155)$$

Если $i > 0$, то все слагаемые последней суммы неотрицательны, а первое слагаемое положительно, так что $PV(i) > 0$.

При доказательстве предыдущей теоремы использован дискретный аналог интегрирования по частям. В самом деле, пусть CF — непрерывный поток с непрерывной плотностью $\mu(t)$, $t \in [0, T]$. Предположим, все нетто-суммы $S(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau$ неотрицательны. Обозначим через $P(t)$ приведенную стоимость потока CF за промежуток времени $[0, t]$. Тогда $dP(t) = e^{-\delta t} dS(t)$, где $\delta = \ln(1 + i)$ — сила роста. Так как $P(0) = 0$, то $P(t) = \int_0^t e^{-\delta\tau} dS(\tau)$ и $PV(i) = \int_0^T e^{-\delta\tau} dS(\tau)$. Интегрируя по частям, получаем:

$$PV(i) = e^{-\delta\tau} S(\tau)\Big|_0^T + \int_0^T \delta e^{-\delta\tau} S(\tau) d\tau. \qquad (1.156)$$

Отсюда следует, что $PV(i) \geq 0$. Действительно, $e^{-\delta\tau}S(\tau)\Big|_0^T = e^{-\delta T}S(T) \geq 0$, а интегрируемая функция $\delta e^{-\delta\tau}S(\tau)$ неотрицательна, поскольку $\delta > 0$ при $i > 0$ и $S(\tau) \geq 0$ по предположению. Приняв дополнительно, что на некотором начальном промежутке $[0, t_0]$ функция плотности неотрицательна и $S(t_0) > 0$, можно доказать, что $PV(i) > 0$.

Ниже мы укажем класс финансовых потоков, для которых определена положительная внутренняя норма доходности.

Будем говорить, что финансовый поток (1.154) — поток платежей инвестиционного типа, если он обладает следующими свойствами:

— начальный платеж отрицателен;

— нетто-сумма всего потока положительна;

— существует момент, начиная с которого все платежи положительны, а все предшествующие нетто-суммы отрицательны.

Покажем, что для потока инвестиционного типа существует и однозначно определена положительная процентная ставка, относительно которой приведенная стоимость потока равна нулю.

Пусть (1.154) — поток инвестиционного типа. В соответствии с определением это означает, что $C_0 < 0$, $S(t_n) > 0$ и существует такое m, что $C_k > 0$ при $k \geq m + 1$, а $S(t_k) < 0$ при $k \leq m$. Для достаточно больших значений ставки приведения i знак величины $PV(i)$ совпадает со знаком C_0, так что $PV(i)$ отрицательно. В то же время $PV(0) = S(t_n) > 0$. Следовательно, $PV(i_0) = 0$ для некоторого $i_0 > 0$. Покажем, что i_0 определено однозначно, и в точке i_0 величина $PV(i)$ меняет знак с плюса на минус. Для этого достаточно установить, что $PV(i) < 0$ при всех $i > i_0$.

Введем в рассмотрение поток платежей

$$CF' = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1), ..., (t_n, B_n)\}, \tag{1.157}$$

в котором

$$B_k = \frac{C_k}{(1+i_0)^{t_k}}, \; k = 0, 1, ..., n. \tag{1.158}$$

Обозначим через $S'(t_k)$ нетто-сумму платежей потока CF' к моменту времени t_k. Покажем, что $S'(t_k) \leq 0$ для всех $k = 0, 1, ..., n$. Действительно,

$$S'(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \frac{C_l}{(1+i_0)^{t_l}}$$

есть приведенная стоимость платежей потока CF до момента t_k включительно (относительно ставки i_0). В соответствии с определением i_0 имеем $S'(t_n) = 0$. При $k > m$ платежи C_k положительны, а вместе с ними положительны и платежи B_k. Значит, $S'(t_k) < 0$ при $k > m$. Наконец, если $k \le m$, то все нетто-суммы потока платежей

$$\{(t_0, C_0), (t_1, C_1), ..., (t_k, C_k)\} \tag{1.159}$$

по предположению отрицательны. Тогда по доказанной выше теореме поток (1.159) имеет отрицательную приведенную стоимость относительно любой положительной ставки. В частности, $S'(t_k) < 0$.

Поскольку все нетто-суммы потока платежей (1.157) (кроме последней, равной нулю) отрицательны, поток (1.159) имеет отрицательную приведенную стоимость относительно любой положительной ставки. Тогда для любой ставки $i > i_0$, полагая $j = \frac{1+i}{1+i_0} - 1$, имеем

$$PV(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{(1+j)^{t_k}} < 0,$$

что и требовалось доказать.

1.15. Операции с валютой

Рассмотрим некоторые операции с валютой.

1.15.1. Депозиты с конверсией валюты и без конверсии

Возможность конвертации рублей в валюту и обратно валюты в рубли, а также возможность размещения на депозите как рублей, так и валюты увеличивают количество схем получения дохода с помощью депозитов. Сравним доходы от непосредственного размещения на депозите имеющихся денежных средств в национальной валюте (RR, *Russian ruble*) и через конвертацию национальной валюты в иностранную валюту (FC, *foreign currency*), размещение последней на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранной валюте в национальную.

Возможны четыре схемы получения дохода [2]:

1) $RR \to RR$;
2) $FC \to FC$;
3) $FC \to RR \to RR \to FC$;
4) $RR \to FC \to FC \to RR$.

Первая и вторая схемы не связаны с конвертацией валюты и достаточно полно описаны в предыдущих параграфах, тогда как третья и четвертая схемы предполагают конвертацию валюты в начале и конце финансовой операции.

Рассмотрим третью схему $FC \to RR \to RR \to FC$.

Введем обозначения:

P_{FC} — величина депозита в FC;
P_{RR} — величина депозита в RR;
S_{FC} — наращенная сумма в FC;
P_{RR} — наращенная сумма в RR;
K_0 — курс обмена $FC \to RR$ в начале операции;
K_1 — курс обмена $FC \to RR$ в конце операции;
n — срок депозита;
i — процентная ставка в RR;
j — процентная ставка в FC.

Операция состоит из трех этапов — конвертации иностранной валюты в национальную, размещения рублей на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранную валюту.

В результате всех этапов получим следующую наращенную сумму в иностранной валюте:

— в схеме простых процентов [2]:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + in)/K_1; \qquad (1.160)$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + i)^n/K_1. \qquad (1.161)$$

Множитель наращения (M) с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = K_0\left(1+in\right)\Big/K_1 = \frac{\left(1+in\right)}{K_1/K_0}; \qquad (1.162)$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = K_0\left(1+i\right)^n\Big/K_1 = \frac{\left(1+i\right)^n}{K_1/K_0}. \qquad (1.163)$$

Множитель наращения растет с повышением процентной ставки, срока депозита и начального обменного курса и убывает с ростом конечного обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом:

— в схеме простых процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + in)/K_1 = P_{FC}(1 + i_{эфф}n), \qquad (1.164)$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{K_0(1+in)/K_1 - 1}{n} = \frac{M-1}{n}; \qquad (1.165)$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + i)^n/K_1 = P_{FC}(1 + i_{эфф})^n, \qquad (1.166)$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{K_1/K_0}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \qquad (1.167)$$

При $n = 1$

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{K_1/K_0} - 1 = M - 1. \qquad (1.168)$$

Теперь рассмотрим четвертую схему $RR \to FC \to FC \to RR$.

Операция состоит из конвертации национальной валюты в иностранную, размещения иностранной валюты на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в национальную валюту.

В результате получим следующую наращенную сумму в национальной валюте:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + jn)K_1; \qquad (1.169)$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + j)^n K_1. \qquad (1.170)$$

Множитель наращения (M) с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1 + jn) = \frac{(1 + jn)}{K_0/K_1}; \qquad (1.171)$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1+j)^n = \frac{(1+j)^n}{K_0/K_1}. \qquad (1.172)$$

Множитель наращения растет с повышением процентной ставки, срока депозита, конечного обменного курса и убывает с ростом начального обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + in)/K_0 = P_{RR}(1 + i_{эфф}n), \qquad (1.173)$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{K_1(1+in)/K_0 - 1}{n} = \frac{M-1}{n}; \qquad (1.174)$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + i)^n/K_0 = P_{RR}(1 + i_{эфф})^n, \qquad (1.175)$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{K_0/K_1}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \qquad (1.176)$$

При $n = 1$

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{K_0/K_1} - 1 = M - 1. \qquad (1.177)$$

Пример 1.19. Поместим 2000 дол. после конвертации на депозит под простые проценты ($i = 15\%$) сроком на два года. Курс продажи доллара на начало срока депозита составил 26 руб., курс покупки доллара в конце операции — 34 руб. Ставка для долларового депозита (j) равна 5%. Надо сравнить эффективность данной операции с эффективностью непосредственного помещения долларов на валютный депозит.

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1+in)/K_1 = 2000 \cdot \frac{26}{34}(1+0{,}15 \cdot 2) = 1988{,}24 \text{ дол.}$$

Непосредственное помещение долларов на валютный депозит даст наращенную сумму

$$S_{FC} = P_{FC}(1 + jn) = 2000(1 + 0{,}05 \cdot 2) = 2200 \text{ дол.}$$

Таким образом, выгоднее непосредственное помещение долларов на валютный депозит.

1.15.2. Бивалютная корзина

Бивалютная корзина — операционный ориентир курсовой политики Центрального банка Российской Федерации (ЦБ РФ), введенный 1 февраля 2005 г. для определения реального курса рубля по отношению к основным валютам: доллару и евро. В момент введения бивалютная корзина складывалась из 10% евро и 90% дол. Текущие значения установлены 8 февраля 2007 г.; бивалютная корзина состоит из 45% евро и 55% дол. ЦБ РФ устанавливает коридор допустимых колебаний бивалютной корзины, намерен постепенно расширять границы коридора бивалютной корзины, приближаться к свободному курсу рубля и к процессу инфляционного таргетирования. В начале февраля 2009 г. стоимость бивалютной корзины составляла 41 руб. Расчет стоимости бивалютной корзины дан в примере 1.20.

Пример 1.20. Рассчитаем стоимость бивалютной корзины (БК) на 21.10.2009 г. Курс доллара составил 29,19 руб., курс евро — 43,69 руб. С учетом структуры корзины получим

$$\text{БК} = 29{,}19 \cdot 0{,}55 + 43{,}69 \cdot 0{,}45 = 35{,}72.$$

Итак, стоимость бивалютной корзины равна 35,72 руб.

Пример 1.21. В банке открыт мультивалютный вклад: 100 000 руб. под 16% годовых, 10 000 дол. под 6% годовых и 5000 евро под 5% годовых. Найти эффективную процентную ставку мультивалютного вклада, если курсы обмена валют в начале и конце (годового) срока вклада равны 29 и 34, 43 и 46 руб. соответственно.

Через год наращенные суммы составят:

$$S_p = P_p(1 + i) = 100\,000(1 + 0{,}16) = 116\,000 \text{ руб.}$$

$$S_\$ = P_\$(1 + i) = 10\,000(1 + 0{,}06) = 10\,600 \text{ дол.}$$

$$S_{\text{евро}} = P_{\text{евро}}(1 + i) = 5000(1 + 0{,}05) = 5250 \text{ евро.}$$

Конвертируя валюту по курсам конца срока вклада, получим полную наращенную сумму

$$S = 116\,000 + 10\,600 \cdot 34 + 5250 \cdot 46 = 717\,900 \text{ руб.}$$

Найдем начальную сумму вклада в рублях

$$S_0 = 100\,000 + 10\,000 \cdot 29 + 5000 \cdot 43 = 605\,000.$$

Эффективная процентная ставка мультивалютного вклада находится из формулы

$$S = S_0(1 + i_{эфф}),$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{S}{S_0} - 1 = \frac{S - S_0}{S_0} = \frac{717\,900 - 605\,000}{605\,000} = 18{,}67\%.$$

Итак, при ставках по отдельным валютам 16, 6 и 5% эффективная процентная ставка оказалась равной 18,67%. Факт, на первый взгляд странный, объясняется значительным ростом курсов конвертации за год (на 17,24% по доллару и 6,98% по евро).

Если же предположить, что курсы обмена сохранились на неизменном уровне, получим более понятный результат — 7,3%:

$$S = 116\,000 + 10\,600 \cdot 29 + 5250 \cdot 43 = 649\,150 \text{ руб.},$$

$$i_{эфф} = \frac{S - S_0}{S_0} = \frac{649\,150 - 605\,000}{605\,000} = 7{,}3\%.$$

Тот же результат получится, если найти средневзвешенную процентную ставку

$$i_{эфф} = i_p \cdot w_p + i_\$ \cdot w_\$ + i_{евро} \cdot w_{евро} =$$

$$= 0{,}16 \cdot \frac{100\,000}{605\,000} + 0{,}06 \cdot \frac{10\,000 \cdot 29}{605\,000} + 0{,}05 \cdot \frac{5000 \cdot 43}{605\,000} = \frac{44\,150}{605\,000} = 7{,}3\%.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Выведите эффективную процентную ставку в случае простых процентов (три случая).
2. Выведите эффективную процентную ставку в случае сложных процентов (три случая).
3. Выведите эффективную процентную ставку при наличии налогов (два случая).
4. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае простых процентов.
5. В банк положен депозит в размере 2000 руб. на три года под 16% годовых по схеме простых процентов. Найти наращенную сумму через шесть лет для двух случаев:

   1) депозит пролонгирован на три года по ставке 10% годовых;

   2) депозит закрывается через три года и вклад кладется на три года под 10% годовых.

6. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае сложных процентов.
7. Что такое математическое дисконтирование и банковский учет.
8. Номинальная учетная ставка равна 10%. Проценты начисляются ежеквартально. Найдите эффективную учетную ставку.
9. Сравните наращение по простой и сложной ставкам процента.
10. Что такое мультиплицирующие и дисконтирующие множители?
11. Выведите «Правило 70» в случае сложных процентов.
12. Выведите «Правило 70» в случае простых процентов. Как его можно назвать?
13. Выведите «Правило 70» в случае кратного начисления процентов.
14. Выведите «Правило 70» в случае непрерывного начисления процентов.
15. Выведите формулу Фишера.
16. Выведите формулу для темпа инфляции за несколько периодов.
17. Темп инфляции за год равен 24%. Найдите темп инфляции за месяц, предполагая, что он постоянен.
18. Темп инфляции за квартал равен 3%. Найдите темп инфляции за месяц, предполагая, что он постоянен.
19. Что называется внутренней нормой доходности?
20. Исследуйте зависимость чистого приведенного дохода (*NPV*) от ставки приведения (принятой нормы доходности) i. Приведите качественный график данной зависимости.
21. Найдите внутреннюю норму доходности потока
$$CF = \{(0, -500), (1, 250), (2, 300), (3, 400)\}.$$
22. Найдите внутреннюю норму доходности потока из п. 21, используя разделение потока на «положительный» и «отрицательный» (формула 1.125).
23. Докажите, что любой типичный инвестиционный поток имеет однозначно определенную внутреннюю норму доходности.
24. Докажите, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов.
25. Докажите, что скорость роста эффективной процентной ставки в схеме сложных процентов убывает с увеличением кратности начисления и обращается в ноль при непрерывном начислении процентов.
26. Поместим 120 000 руб. после конвертации в евро на депозит под сложные проценты ($j = 6\%$) сроком на три года. Курс продажи евро на начало срока депозита 34 руб., курс покупки евро в конце операции

44 руб. Ставка для депозита в рублях ($i = 14\%$). Сравните эффективность данной операции с эффективностью непосредственного помещения рублей на рублевый депозит.

27. Вклад в размере 5000 руб. положен в банк на депозит 14 февраля 2009 г. под 8% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму получит вкладчик 20 сентября 2011 г.? В случае схемы простых процентов при той же ставке?

ГЛАВА 2

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ, РЕНТЫ

2.1. Финансовые потоки (потоки платежей)

Финансовые потоки имеют довольно широкое распространение на практике. Примерами финансовых потоков являются: выплата заработной платы, оплата коммунальных платежей, арендная плата, выплаты в погашение потребительского кредита, кредита банка, налоговые платежи компании, регулярные взносы в пенсионный и другие фонды, выплаты процентов по ценным бумагам (акциям, облигациям и др.) и т.п. Практически любые регулярные (и нерегулярные) платежи представляют собой финансовые потоки. Так что важность их изучения трудно переоценить.

Теория финансовых потоков изложена во многих книгах по финансовой математике, мы будем придерживаться в основном изложения этой темы в [2; 4], расширяя и углубляя его, делая более детальным.

Платеж P, произведенный в момент времени t, назовем **финансовым событием**, т.е. финансовое событие — это упорядоченная пара (P, t), либо (t, P), состоящая из величины платежа P и момента платежа t. Платежи могут быть со знаком плюс (поступления) или со знаком минус (выплаты).

Конечная или бесконечная последовательность финансовых событий

$$(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), ..., (P_n, t_n), \tag{2.1}$$

называется (конечным или бесконечным) **дискретным финансовым потоком**. Предполагается, что $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ В случае бесконечного потока предполагается дополнительно, что t_k неограниченно возрастает с ростом k.

Финансовые потоки обозначаются символом CF (*cash flow*). Например, поток n-платежей (P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), ... , (P_n, t_n) записывается в виде:

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n)\}.$$

Графически финансовый поток может быть представлен различными способами, один из самых простых и практичных — точками на временно́й оси с обозначениями величин платежей (рис. 2.1).

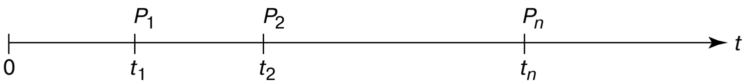

Рис. 2.1. Графическое изображение финансового потока

Финансовый поток можно охарактеризовать так называемой **платежной функцией**, которая каждому моменту времени t сопоставляет значение денежной суммы $C(t)$ так, что $C(t_k) = C_k$ и $C(t) = 0$, если t не совпадает ни с одним из моментов t_k, $k = 0, 1, \ldots$.

2.2. Текущая, современная, будущая, приведенная и конечная величины финансового потока

Пусть финансовый поток

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n), \ldots\}. \tag{2.2}$$

Напомним, что деньги имеют временну́ю ценность (см. главу 1). Это не позволяет непосредственно суммировать платежи, относящиеся к различным моментам времени. Для того чтобы вычислить *величину потока* в какой-то момент времени t, необходимо каждый платеж дисконтировать к этому моменту времени по некоторой процентной ставке i, которая предполагается известной и неизменной для всего потока, и затем суммировать эти дисконтированные платежи. Обычно дисконтирование происходит по схеме сложных процентов.

Сумма всех платежей денежного потока, приведенных к некоторому моменту времени t, называется **текущим**, или **приведенным**, **значением** потока (в момент времени t) и обозначается $PV_t(CF, i)$ (*present value*), или просто PV_t.

$$PV_t = \frac{P_0}{(1+i)^{t_0 - t}} + \frac{P_1}{(1+i)^{t_1 - t}} + \ldots . \tag{2.3}$$

В случае бесконечного потока текущее значение считается определенным лишь тогда, когда ряд в правой части (2.3) сходится.

Если $t_0 = 0$, текущее значение потока в начальный момент времени называется **современной величиной потока** и обозначается просто PV:

$$PV = P_0 + \frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots$$

Для момента $t > t_n$ величина потока равна

$$P = P_0(1+i)^{t-t_0} + P_1(1+i)^{t-t_1} + \ldots + P_n(1+i)^{t-t_n} = \sum_{k=0}^{n} P_k(1+i)^{t-t_k}. \quad (2.4)$$

Величину (2.4) называют **будущим накопленным значением** потока (2.2) и обозначают $FV_t(CF, i)$ (*future value*), или просто FV_t. В случае конечного потока

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n)\} \quad (2.5)$$

его величина на момент последнего платежа $t = t_n$, обозначаемая $FV(CF, i)$ или FV, называется **конечной величиной потока.** Она равна

$$FV = P_0(1+i)^{t_n-t_0} + P_1(1+i)^{t_n-t_1} + \ldots + P_{n-1}(1+i)^{t_n-t_{n-1}} + P_n. \quad (2.6)$$

Заменяя в (2.6) $t - t_k$ на $t - t_n + t_n - t_k$ и вынося общий множитель $(1+i)^{t-t_n}$, получим связь между величинами потока (2.5) в моменты времени t и t_n (при $t > t_n$)

$$FV_t = FV(1+i)^{t-t_n}. \quad (2.7)$$

Для конечного потока (2.5) и моментов τ и $t \geq t_n$ текущее значение PV_τ и будущее значение FV_t связаны соотношением

$$FV_t = PV_\tau(1+i)^{t-\tau}. \quad (2.8)$$

2.3. Средний срок финансового потока

Средним сроком финансового потока [4]

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n)\} \quad (2.9)$$

относительно ставки дисконтирования i называют такой момент времени t, для которого

$$PV_t(CF) = P_1 + P_2 + ... + P_n. \tag{2.10}$$

Последнее означает, что поток (2.9) и поток, состоящий из одного платежа $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ в момент времени t, имеют одинаковое текущее значение. Равенство (2.10) можно переписать следующим образом [4]:

$$\frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n}} = \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}{(1+i)^t}. \tag{2.11}$$

Разлагая $(1 + i)^{-x}$ по степеням i (при $|i| < 1$), получим

$$(1+i)^{-x} = 1 - xi + \frac{x(x+1)}{2} i^2 + \ldots .$$

Равенство (2.11) с точностью до слагаемых второго порядка малости (относительно i) запишется в виде:

$$P_1(1 - t_1 i) + ... + P_n(1 - t_n i) = (P_1 + ... + P_n)(1 - ti).$$

Отсюда

$$t = \frac{P_1 t_1 + \ldots + P_n t_n}{P_1 + \ldots + P_n}. \tag{2.12}$$

Пример 2.1. Найти средний срок потока

$$CF = \{(0, 100), (1, 200), (2, 400), (3, 100)\}.$$

По формуле (2.12) имеем

$$t = \frac{P_1 t_1 + \ldots + P_n t_n}{P_1 + \ldots + P_n} = \frac{100 \cdot 0 + 200 \cdot 1 + 400 \cdot 2 + 100 \cdot 3}{100 + 200 + 400 + 100} = \frac{1300}{800} = 1{,}625,$$

т.е. $t = 1{,}625$.

Если все платежи положительные, то $t_1 < t < t_n$, т.е. t лежит между начальным и конечным моментами времени. В общем же случае (когда платежи могут быть разных знаков) средний срок потока может лежать вне временно́го интервала платежей.

2.4. Непрерывные потоки платежей

2.4.1. Наращенная и приведенная стоимости непрерывных потоков платежей

Непрерывные потоки платежей используются для моделирования таких потоков, которые состоят из платежей с малыми промежутками между ними. Примерами такого рода потоков могут служить финансовый поток крупного банка, поток коммунальных платежей, налоговые платежи и др. При описании непрерывного потока вместо платежа в фиксированный момент времени t необходимо рассматривать сумму платежей, поступивших за промежуток времени от t_1 до t_2. Либо можно рассматривать сумму всех платежей, поступивших к моменту времени t, начиная с некоторого фиксированного момента.

Будем считать [4], что финансовый поток CF задается функцией $C(t)$, определенной как сумма платежей за период от начального момента времени 0 до момента t.

Величина $C(t_2) - C(t_1)$ представляет собой сумму платежей за время от момента t_1 до момента t_2, а производную от потока по времени $C'(t)$ называют **плотностью потока** $C(t)$ в момент времени t.

Если поток платежей $C(t)$ имеет плотность $\mu(t)$ в каждый момент времени t и при этом функция $\mu(t)$ непрерывна, то

$$C(t_2) - C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\,dt. \qquad (2.13)$$

Кроме того,

$$C'(t) = \mu(t). \qquad (2.14)$$

Таким образом, непрерывный поток платежей можно задавать его плотностью.

Рассмотрим теперь, как вычисляется накопленная сумма денежного потока $C(t)$ с непрерывной плотностью $\mu(t)$ [4].

Пусть δ — сила роста при непрерывном начислении процентов. Предположим, что к моменту времени t накопленная сумма составляет $S(t)$. Приращение накопленной суммы к моменту $t + \Delta t$ складывается из двух слагаемых: процентов на накопленную величину $S(t)$ и денег, принесенных потоком $C(t)$. Если Δt — малый промежуток времени, то проценты на сумму $S(t)$ за него составят приближенно $\delta S(t) \cdot \Delta t$; денежный поток $C(t)$ принесет за время Δt сумму, приближенно равную $\mu(t) \cdot \Delta t$ (приближение берется здесь с точностью до слагаемых порядка малости выше первого). Таким образом, линейная часть приращения $\Delta S(t)$ составляет $\delta S(t) \cdot \Delta t + \mu(t) \cdot \Delta t$. Переходя к дифференциалам, получаем уравнение [4].

$$dS(t) = \delta S(t) \cdot dt + \mu(t) \cdot dt,$$

или

$$S'(t) = \delta S(t) + \mu(t). \qquad (2.15)$$

Общее решение уравнения (2.15) можно найти, например, методом вариации постоянной. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$S(t) = \delta S(t). \qquad (2.16)$$

Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$S(t) = Ae^{\delta t}.$$

Решение уравнения (2.15) будем искать в виде $S(t) = A(t)e^{\delta t}$, считая A функцией t. Имеем:

$$S'(t) = A'(t)e^{\delta t} + \delta A(t)e^{\delta t}.$$

Подставляя в (2.15), получаем:

$$A'(t)e^{\delta t} + \delta A(t)e^{\delta t} = \delta A(t)e^{\delta t} + \mu(t).$$

Отсюда

$$A'(t) = \mu(t)e^{-\delta t}$$

и, значит,

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau + \text{const},$$

где const — произвольная постоянная;
t_0 — произвольный фиксированный момент времени.

Таким образом, общее решение уравнения (2.15) имеет вид [4]:

$$S(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)e^{-\delta\tau}d\tau + \text{const} \right) e^{\delta t}. \qquad (2.17)$$

Считая, что к моменту времени t_0 наращенная сумма составляет S_0, т.е. $S(t_0) = S_0$, формулу (2.17) можно записать следующим образом [4]:

$$S(t) = S_0 e^{\delta(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) e^{\delta(t-\tau)} d\tau. \tag{2.18}$$

В частности, если $t_0 = 0$ и $S_0 = 0$, то

$$S(t) = \int_{0}^{t} \mu(\tau) e^{\delta(t-\tau)} d\tau. \tag{2.19}$$

В соответствии с (2.19) приведенная стоимость потока платежей с плотностью $\mu(t)$ за промежуток времени от 0 до T составляет величину

$$A = e^{-\delta T} \int_{0}^{T} \mu(\tau) e^{\delta(T-\tau)} d\tau = \int_{0}^{T} \mu(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau. \tag{2.20}$$

Для вычисления приведенной стоимости и наращенной величины непрерывного потока платежей необходимо знать его плотность $\mu(t)$. Ниже мы рассмотрим два частных случая: 1) плотность $\mu(t)$ является линейной функцией времени; 2) плотность $\mu(t)$ является экспоненциальной функцией времени.

2.4.2. Линейно изменяющийся поток платежей

При линейно изменяющемся потоке платежей его плотность имеет вид:

$$\mu = R_0 + \alpha t,$$

где R_0 — начальный размер платежа.

Найдем приведенную стоимость потока платежей за время от 0 до t [4]:

$$A = \int_{0}^{t} (R_0 + \alpha\tau) e^{-\delta\tau} d\tau = R_0 \int_{0}^{t} e^{-\delta\tau} d\tau + \alpha \int_{0}^{t} \tau e^{-\delta\tau} d\tau =$$
$$= R_0 a_{\overline{n};\delta}^{(\infty)} + \frac{1}{\delta}\left(a_{\overline{n};\delta}^{(\infty)} - te^{-\delta\tau}\right)\alpha = \left(R_0 + \frac{\alpha}{\delta}\right) a_{\overline{n};\delta}^{(\infty)} - \frac{\alpha}{\delta} te^{-\delta\tau}. \tag{2.21}$$

Формула (2.21) показывает зависимость приведенной стоимости от начального размера платежа и скорости роста платежей.

Наращенная величина потока находится из соотношения

$$S = Ae^{\delta \cdot t}. \tag{2.22}$$

2.4.3. Экспоненциально изменяющийся поток платежей

При экспоненциально изменяющемся потоке платежей его плотность имеет вид: $\mu = R_0 e^{\beta \cdot t}$,

где β — непрерывный темп прироста платежей.

Найдем приведенную стоимость потока платежей за время от 0 до t.

$$A = \int_0^t R_0 e^{\beta t} e^{-\delta \tau} d\tau = R_0 \int_0^t e^{(\beta-\delta)\tau} d\tau = R_0 \frac{e^{(\beta-\delta)t} - 1}{\beta - \delta}. \qquad (2.23)$$

При этом разность β − δ можно выразить через дискретный темп прироста платежей q:

$$\beta - \delta = \ln[(1+q)/(1-q)]. \qquad (2.24)$$

Наращенная величина потока, как и прежде, находится из соотношения

$$S = Ae^{\delta \cdot t}. \qquad (2.25)$$

2.5. Регулярные потоки платежей

2.5.1. Обыкновенные ренты

Поток положительных платежей, разделенных равными временны́ми интервалами, называется **финансовой рентой**, или просто **рентой**. Промежуток времени между двумя последовательными платежами называется **периодом ренты** (*rent period*, *payment period*). Считается, что каждый платеж производится либо в начале соответствующего ему периода, либо в конце. В первом случае ренту называют **авансовой**, или **пренумерандо** (*annuity due*), во втором — **обыкновенной**, а также **подрасчетной**, или рентой **постнумерандо** (*ordinary annuity*). Ренты с конечным числом платежей называют **конечными**. Промежуток времени между началом первого периода и окончанием последнего называется **сроком** конечной ренты. Ренты с бесконечным числом платежей называют **бесконечными**, **вечными**, или **перпетуитетами** (*perpetuity*). Если все платежи равны между собой, ренту называют **постоянной**. (Значительная часть главы 2 посвящена рассмотрению именно постоянных рент.)

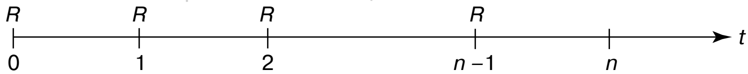

Рис. 2.2. Конечная годовая постоянная рента пренумерандо

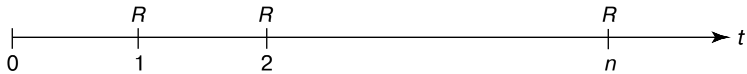

Рис. 2.3. Конечная годовая постоянная рента постнумерандо

Рента описывается следующими параметрами: размером отдельного платежа (член ренты), периодом и сроком ренты, процентной ставкой, числом платежей в году (p — срочные ренты, непрерывные ренты ($p \to \infty$)), а также методом (простые, сложные и непрерывные проценты) и частотой начисления процентов (ренты с ежегодным начислением процентов, с начислением k раз в году (k — кратные ренты), с непрерывным начислением).

В случае когда период постоянной ренты равен одному году, т.е. платежи производятся раз в год, ренту называют **годовой**, или **аннуитетом** (*annuity*) (рис. 2.2, 2.3). В русскоязычной литературе аннуитетом также называют постоянную ренту с произвольным периодом. В дальнейшем, если иное не оговорено, аннуитет будем называть рентой.

2.5.2. Коэффициенты приведения и наращения рент

2.5.2.1. Рента постнумерандо

Найдем текущую (приведенную) стоимость A ренты постнумерандо

$$\{(0, 0), (R, 1), (R, 2), ..., (R, n)\} \tag{2.26}$$

при процентной ставке i. По определению

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}. \tag{2.27}$$

Справа имеем сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $(1 + i)^{-1}$ и первым членом $R/(1 + i)$. Суммируя с помощью формулы для суммы n-членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, получаем:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.28)$$

Множитель при R в правой части (2.28) называют **коэффициентом приведения** годовой (обыкновенной) ренты. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $a_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.29)$$

Коэффициент приведения ренты показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Приведенная величина ренты $A = R \cdot a_{\overline{n}|i}$.

Наращенная сумма S ренты определяется равенством:

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R. \qquad (2.30)$$

Справа имеем сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1 + i)$ и первым членом R (рассматривая сумму справа налево). Суммируя, получаем:

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \qquad (2.31)$$

Множитель при R в правой части (2.31) называют **коэффициентом наращения** аннуитета и обозначают символом $s_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \qquad (2.32)$$

Коэффициент наращения ренты имеет смысл аналогичный коэффициенту приведения ренты: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше величины платежа.

Из (2.32) следует, что коэффициент наращения аннуитета зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения аннуитета имеет вид:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n}. \qquad (2.33)$$

Коэффициенты $a_{\overline{n}|i}$ и $s_{\overline{n}|i}$ представляют собой приведенную величину и наращенную сумму соответственно единичного аннуитета [4]:

$$H = \{(0, 0), (1, 1), (1,2), \ldots, (1, n)\}. \qquad (2.34)$$

Аналогичная связь существует и между приведенной и наращенной величинами ренты постнумерандо

$$S = A(1 + i)^n. \qquad (2.35)$$

2.5.2.2. Коэффициенты приведения и наращения за несколько соседних периодов

Вначале получим выражения для коэффициентов приведения и наращения за два соседних периода.

Если общий рассматриваемый срок равен $n = n_1 + n_2$, то, приводя ренту за каждый из периодов к началу первого периода и используя возможность складывать приведенные к одному моменту времени величины, получим:

$$A = A_1 + A_2, \qquad (2.36)$$

$$Ra_{\overline{n}|i} = Ra_{\overline{n_1}|i} + Ra_{\overline{n_2}|i}(1+i)^{-n_1}, \qquad (2.37)$$

откуда, сокращая обе части равенства на R, имеем

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i}\nu^{n_1} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i}(1+i)^{-n_1}, \qquad (2.38)$$

где $\quad v = (1 + i)^{-1}$.

При выводе формулы (2.38) мы использовали тот факт, что для приведения платежа (в данном случае ренты за второй период, уже приведенной к концу первого периода) к началу первого периода необходимо его дисконтировать с периодом n_1.

Теперь получим выражение для коэффициента наращения за два соседних периода. Приводя ренту за каждый из периодов к концу второго периода и используя возможность складывать приведенные к одному моменту времени величины, получим

$$S = S_1 + S_2, \qquad (2.39)$$

$$Rs_{\overline{n}|i} = Rs_{\overline{n_2}|i} + Rs_{\overline{n_1}|i}(1+i)^{n_2}, \qquad (2.40)$$

откуда, сокращая обе части равенства на R, имеем

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n_1}|i}\left(1+i\right)^{n_2} + s_{\overline{n_2}|i} = s_{\overline{n_1}|i} \cdot \nu^{-n_2} + s_{\overline{n_2}|i}. \qquad (2.41)$$

При выводе формулы (2.41) мы использовали тот факт, что для наращения платежа (в данном случае ренты за первый период, уже наращенной к началу второго периода) к концу второго периода необходимо его нарастить с периодом n_2.

Полученные выражения (2.38) и (2.41) легко обобщить на случай нескольких (k) соседних периодов $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i} \nu^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i} \nu^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i} \nu^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}; \qquad (2.42)$$

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n_k}|i} + s_{\overline{n_{k-1}}|i} \cdot \nu^{-n_k} + s_{\overline{n_{k-2}}|i} \cdot \nu^{-n_k-n_{k-1}} + \ldots + s_{\overline{n_1}|i} \cdot \nu^{-n_k-n_{k-1}-\ldots-n_2}. \quad (2.43)$$

Пример 2.2. Найти коэффициент приведения за три соседних периода продолжительностью 1, 2 и 3 соответственно при ставке 10%.

Сначала определим коэффициенты приведения для каждого из периодов с помощью формулы (2.29)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Получаем

$$a_{\overline{n_1}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-1}}{0{,}1} = 0{,}909, \; a_{\overline{n_2}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-2}}{0{,}1} = 1{,}736,$$

$$a_{\overline{n_3}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-3}}{0{,}1} = 2{,}487.$$

Далее по формуле (2.42)

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i} \nu^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i} \nu^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i} \nu^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}$$

имеем

$$a_{\overline{n}|i} = 0{,}909 + 1{,}736 \cdot \frac{1}{1{,}1^1} + 2{,}487 \cdot \frac{1}{1{,}1^{1+2}} = 0{,}909 + 1{,}578 + 1{,}869 = 4{,}356.$$

Результат легко проверить непосредственным вычислением коэффициента $a_{\overline{n}|i}$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} = 4{,}355.$$

2.5.2.3. Рента пренумерандо

Найдем текущую (приведенную) стоимость $\ddot{A}$ ренты пренумерандо

$$\{(R, 0), (R, 1), (R, 2), ..., (R, n-1), (0, n)\} \tag{2.44}$$

при процентной ставке i. По определению,

$$A = R + \frac{R}{(1+i)} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}. \tag{2.45}$$

Справа имеем сумму n-членов геометрической прогрессии со знаменателем $(1 + i)^{-1}$ и первым членом R. Суммируя с помощью формулы для суммы n-членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, получаем:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.46}$$

Множитель при R в правой части (2.46) называют **коэффициентом приведения** ренты пренумерандо. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.47}$$

Коэффициент приведения ренты пренумерандо показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Приведенная величина ренты $\ddot{A} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$.

Наращенная сумма $\ddot{S}$ ренты пренумерандо определяется равенством

$$\ddot{S} = R(1 + i)^n + R(1 + i)^{n-1} + \ldots + R(1 + i). \tag{2.48}$$

Справа имеем сумму n-членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1 + i)$ и первым членом $R(1 + i)$ (рассматривая сумму справа налево). Суммируя, получаем:

$$\ddot{S} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \tag{2.49}$$

Множитель при R в правой части (2.49) называют **коэффициентом наращения** ренты пренумерандо и обозначают символом $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \qquad (2.50)$$

Коэффициент наращения ренты пренумерандо имеет смысл аналогичный коэффициенту приведения ренты пренумерандо: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты пренумерандо больше величины платежа.

Из (2.50) следует, что коэффициент наращения ренты пренумерандо, как и постнумерандо, зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения ренты имеет вид аналогичный случаю ренты постнумерандо

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n. \qquad (2.51)$$

Коэффициенты $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ представляют собой приведенную величину и наращенную сумму соответственно единичного аннуитета [4]:

$$H = \{(1, 0), (1, 1), (1,2), ..., (0, n)\}. \qquad (2.52)$$

Аналогичная связь существует и между наращенной и приведенной величинами ренты пренумерандо

$$\ddot{S} = \ddot{A}(1+i)^n.$$

Видно, что формулы для вычисления приведенной величины и наращенной суммы (на конец года n) годовой авансированной ренты (пренумерандо) вида

$$\{(R, 0), (R, 1), ..., (R, n-1), (0, n)\} \qquad (2.53)$$

получаются из (2.46) и (2.49) умножением на коэффициент $(1 + i)$.

2.5.2.4. Связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета

Для годовых рент постнумерандо (как будет показано ниже, и для p-срочных рент) с однократным начислением процентов в конце года существует связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S, \qquad (2.54)$$

т.е.

$$S = A(1 + i)^n = v^{-n}A. \tag{2.55}$$

Здесь $v = (1 + i)^{-1}$.

Отсюда

$$A = S(1 + i)^{-n} = v^n S. \tag{2.56}$$

При начислении процентов k раз в году получаем

$$S = A(1 + i/k)^{kn}; \tag{2.57}$$

$$A = S(1 + i/k)^{-kn}. \tag{2.58}$$

Аналогичная связь, как отмечалось выше, существует и между коэффициентами приведения и наращения

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = a_{\overline{n}|i}\nu^{-n},\ a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)^{-n} = s_{\overline{n}|i}\nu^n. \tag{2.59}$$

2.5.2.5. Связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо

Коэффициенты приведения и наращения значения годовой ренты пренумерандо принято обозначать соответственно символами $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$. Следующие соотношения, связывающие коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо, вытекают непосредственно из определений:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = (1+i)a_{\overline{n}|i}; \tag{2.60}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) = (1+i)s_{\overline{n}|i}. \tag{2.61}$$

2.5.3. Расчет параметров ренты

Рассмотрим параметры, характеризующие ренту: размер отдельного платежа R, срок ренты n, процентную ставку i, наращенную сумму S, приведенную величину ренты A. Эти величины являются зависимыми, поэтому одни из них можно выразить через другие. Подобные расчеты применяются для нахождения неизвестных параметров ренты [2]. При этом возможны различные случаи.

1. Пусть известны n, i, R. Тогда наращенную сумму S и приведенную величину ренты A можно найти по формулам

$$A = R \cdot a(n, i), \; S = R \cdot s(n, i), \tag{2.62}$$

где $a(n, i)$ и $s(n, i)$ — соответственно коэффициенты приведения и наращения ренты (см., например, [2]), их величины можно взять из соответствующих таблиц, зная срок ренты n и процентную ставку i.

2. Если известны A, i, R, то n находится из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.63}$$

и равно

$$n = \left[-\frac{\ln(1 - Ai/R)}{\ln(1+i)} \right], \tag{2.64}$$

где [...] означает целую часть числа.

Альтернативным методом определения n является решение уравнения $A = R \cdot a(n, i)$ относительно n. Имеем $A/R = a(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов приведения ренты.

3. Аналогично предыдущему случаю, если известны S, i, R, то n находится из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.65}$$

и равно

$$n = \left[\frac{\ln(1 + Si/R)}{\ln(1+i)} \right]. \tag{2.66}$$

n может быть также найдено из уравнения $S = R \cdot s(n, i)$. Имеем $S/R = s(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов наращения ренты.

4. Если известны n, i, A, то $R = A/a(n, i)$.

5. Если известны n, i, S, то $R = S/s(n, i)$.

6. Если заданы n, R, A, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.67}$$

7. Если заданы n, R, S, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{2.68}$$

Уравнения п. 6 и 7 не решаются аналитически, их можно решить только приближенно. Для нахождения процентной ставки i можно использовать линейное приближение либо итерационный метод [2].

В линейном приближении, зная R и A (п. 6) или R и S (п. 7), сначала находим коэффициенты приведения (п. 6) или наращения (п. 7) по формулам (2.67) или (2.68)

$$a_{\overline{n}|i} = A/R;\ s_{\overline{n}|i} = S/R. \tag{2.69}$$

Далее находим процентную ставку i по интерполяционной формуле

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}, \tag{2.70}$$

где a_1 и a_2 — значения коэффициентов приведения или наращения при минимальной и максимальной процентной ставке (i_1 и i_2 соответственно);

a — значение коэффициента приведения или приращения при искомой процентной ставке i.

Оценка процентной ставки i по формуле (2.70) завышена при использовании коэффициента приведения и занижена — при использовании коэффициента наращения, при этом точность оценки растет с уменьшением интервала $i_2 - i_1$ [2].

Пример 2.3. Найти срок ренты постнумерандо, если известны $S = 2000$, $I = 15\%$, $R = 100$.

Воспользуемся формулой (2.66)

$$n = \left[\frac{\ln(1 + Si/R)}{\ln(1+i)}\right] = \left[\frac{\ln(1 + 2000 \cdot 0{,}15/100)}{\ln(1 + 0{,}15)}\right] =$$
$$= \left[\frac{\ln 4}{\ln 1{,}15}\right] = \left[\frac{1{,}386}{0{,}140}\right] = [9{,}9] = 9.$$

Итак, срок ренты составляет 9 лет (если брать целую часть ее срока), точнее, 9,9 лет.

2.5.4. Вечные, срочные и непрерывные ренты

Рассмотрим вечную ренту

$$\{(0,\ 0),\ (R,\ 1),\ (R,\ 2),\ \ldots)\}. \tag{2.71}$$

Ее приведенная стоимость A определяется как сумма ряда

$$A=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\ldots\ . \tag{2.72}$$

Суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию по формуле $S=\frac{a_1}{1-q}$ с $a_1=\frac{R}{1+i}$, $q=\frac{1}{1+i}$, получаем [4]:

$$A=\frac{R}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}=\frac{R}{i}. \tag{2.73}$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=1/i, \tag{2.74}$$

что согласуется с (2.73). С учетом этого полагаем

$$a_{\overline{\infty}|i}=1/i. \tag{2.75}$$

Равенство (2.73), записанное в виде

$$R=Ai, \tag{2.76}$$

можно интерпретировать следующим образом [4]: заплатив (отдав в долг «навсегда») сумму A, владелец вечной ренты получает право на получение рентных платежей, равных процентам на сумму A.

Наращенная величина вечной ренты и коэффициент наращения равны бесконечности. Для последнего имеем

$$s_{\overline{\infty}|i}=\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}(1+i)^n=a_{\overline{\infty}|i}\cdot\infty=\infty.$$

Пример 2.4. Найти размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке 14% годовых. По формуле (2.73)

$$A=\frac{R}{i}=\frac{2000}{0{,}14}=14\ 285{,}71\ \text{руб.}$$

Итак, положив на вклад 14 285,71 руб. под 14% годовых, владелец вклада (и его наследники) будет получать 2000 руб. в конце каждого года бесконечно долго.

2.5.5. *p*-срочная рента

Когда рентный платеж R производится не единовременно (один раз в конце годового периода), а разбит на p одинаковых платежей, равномерно распределенных в течение года, то соответствующий поток платежей имеет вид:

$$CF = \{(\,R/p,\, 1/p),\, (R/p,\, 2/p),\, \ldots,\, (R/p,\, n-1/p)\,),\, (R/p,\, n)\} \qquad (2.77)$$

и называется **p-срочной рентой** (рис. 2.4). Пусть при этом начисление процентов производится k раз в году. Рассмотрим следующие случаи:

$k = 1$, $k = p$, $k \neq p$.

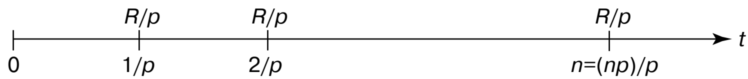

Рис. 2.4. *p*-срочная рента постнумерандо

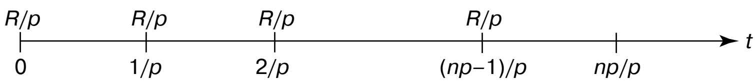

Рис. 2.5. *p*-срочная рента пренумерандо

2.5.5.1. *p*-срочная рента (случай *k* = 1)

Найдем приведенную величину *p*-срочной ренты постнумерандо. Всего за n лет производится np платежей по R/p каждый. Приводя их к $t = 0$, имеем

$$A^{(p)} = \frac{R}{p(1+i)^{1/p}} + \frac{R}{p(1+i)^{2/p}} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{np/p}}. \qquad (2.78)$$

Суммируя геометрическую прогрессию с $a_1 = R/p$, $q = \dfrac{1}{(1+i)^{1/p}}$

и $n \to np$, получаем **приведенную стоимость *p*-срочной ренты**:

$$A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-np/p}}{1-(1+i)^{-1/p}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \qquad (2.79)$$

Множитель

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} \qquad (2.80)$$

называется **коэффициентом приведения *p*-срочной ренты**.

Вычислим теперь наращенную величину p-срочной ренты. За n лет производится np платежей по R/p каждый. Рента представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом R/p и знаменателем $(1 + i)^{1/p}$ (начиная считать с последнего платежа)

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} + \frac{R}{p}(1+i)^{1/p} + \ldots + \frac{R}{p}(1+i)^{np/p}. \tag{2.81}$$

Находя ее сумму, получаем для **наращенной величины *p*-срочной ренты**

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = Rs_{\overline{n}|i}^{(p)}. \tag{2.82}$$

Множитель

$$s_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} \tag{2.83}$$

называется **коэффициентом наращения *p*-срочной ренты**.

2.5.5.2. Связь между приведенной и наращенной величинами *p*-срочной ренты

Установим связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты. Она легко получается из формул (2.80), (2.83) и имеет такой же вид, как и для обычной годовой ренты

$$S^{(p)} = A^{(p)} \cdot (1 + i)^n. \tag{2.84}$$

2.5.5.3. Непрерывная рента

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим непрерывный поток платежей с постоянной плотностью $\mu(t) = R$, так называемую *непрерывную ренту* [2, 4].

Найдем предел $A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p} - 1}$ при $p \to \infty$. Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{1/p} - 1}{1/p} = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{1/p}\left(-1/p^2\right)}{-1/p^2} \ln(1+i) = \ln(1+i).$$

Используя его, получим выражение для приведенной величины непрерывной ренты

$$A^{(\infty)}=\lim_{p\to\infty}A^{(p)}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (2.85)$$

Коэффициент приведения равен

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (2.86)$$

Для наращенной суммы и коэффициента наращения непрерывной ренты легко получаем из (2.85) и (2.86) формулы:

$$S=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}\cdot(1+i)^{n}=R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)};$$

$$s_{\overline{n}|i}^{(\infty)}=\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}. \qquad (2.87)$$

Из полученных формул видно, что переход от дискретных рент к непрерывным приводит к увеличению коэффициентов приведения и наращения в $i/\ln(1+i)$ раз, т.е. имеем следующую связь между коэффициентами

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)}=\frac{i}{\ln(1+i)}a_{\overline{n}|i},\ s_{\overline{n}|i}^{(\infty)}=\frac{i}{\ln(1+i)}s_{\overline{n}|i}. \qquad (2.88)$$

2.5.5.4. *p*-срочная рента (случай $k\neq p$)

Рассмотрим наиболее общий случай — p-срочную ренту с начислением процентов k раз в году. Число членов ренты равно np, платежи по R/p каждый. Рента представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом R/p и знаменателем $(1+i/k)^{k/p}$. Вычисляя ее сумму, получаем для *наращенной величины p-срочной ренты* [2]

$$S^{(p)}=S^{(p)}=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i/k)^{(k/p)(np)}-1}{(1+i/k)^{k/p}-1}=R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}=Rs_{\overline{kn}|i/k}^{(p)} \qquad (2.89)$$

Для приведенной стоимости ренты имеем

$$A^{(p)}=\frac{R}{p}\cdot\left[\frac{1}{(1+i/k)^{k/p}}+\frac{1}{(1+i/k)^{2k/p}}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i/k)^{-k/p}\left[1-(1+i/k)^{-(k/p)np}\right]}{1-(1+i/k)^{-(k/p)}}=$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}=Ra^{(p)}_{\overline{kn}|i/k}. \qquad (2.90)$$

2.5.5.5. Связь между приведенной и наращенной величинами *p*-срочной ренты с *k*-кратным начислением процентов

В заключение установим связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с k-кратным начислением процентов. Она легко получается из формул (2.89) и (2.90)

$$S_k^{(p)}=A_k^{(p)}(1+i/k)^{kn},\ A_k^{(p)}=S_k^{(p)}(1+i/k)^{-kn}. \qquad (2.91)$$

2.5.5.6. *p*-срочная рента (случай *k* = *p*)

Число членов ренты равно числу начислений процентов, платежи по R/k каждый. Этот случай наиболее часто встречается на практике. Из (2.90), полагая $p=k$, получаем для приведенной стоимости ренты

$$A^{(p)}=\frac{R}{k}\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i/k}=R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}. \qquad (2.92)$$

Множитель

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i}=\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i} \qquad (2.93)$$

является коэффициентом приведения p-срочной ренты в случае $k=p$.

Для наращенной величины p-кратной ренты получаем

$$S^{(p)}=\frac{R}{k}\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i/k}=R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}. \qquad (2.94)$$

2.5.5.7. *p*-срочная рента с непрерывным начислением процентов

Используя формулу (2.90)

$$A_k^{(p)} = R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$$

и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим для приведенной величины ренты

$$A_\infty^{(p)} = \lim_{k\to\infty} A_k^{(p)} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1},$$

$$A_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}. \tag{2.95}$$

Покажем, что связь между приведенной и наращенной величинами ренты с непрерывным начислением процентов имеет вид:

$$S_\infty^{(p)} = A_\infty^{(p)} \cdot e^{ni}. \tag{2.96}$$

Отсюда получаем выражение для наращенной величины p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$S_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1} \cdot e^{ni} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1},$$

$$S_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}. \tag{2.97}$$

2.5.5.8. Непрерывная рента с *k*-кратным начислением процентов

Найдем приведенную величину непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов

$$A_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}. \tag{2.98}$$

Используя правило Лопиталя, получим

$$A_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\left[1-(1+i/k)^{-nk}\right]\frac{1/p}{\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} R\left[1-(1+i/k)^{-nk}\right]\frac{-(1/p^2)}{(1+i/k)^{k/p}\,k\left(-1/p^2\right)\ln(1+i/k)} =$$

$$= R\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}. \tag{2.99}$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеем

$$A_{\infty,k} = R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}. \tag{2.100}$$

Аналогично найдем наращенную величину непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов. Используя формулу

$$S^{(p)} = R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} \tag{2.101}$$

и переходя к пределу при $p\to\infty$, имеем

$$S_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}. \tag{2.102}$$

Используя правило Лопиталя, получим

$$S_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\left[(1+i/k)^{nk}-1\right]\frac{1/p}{\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} R\cdot\left[(1+i/k)^{nk}-1\right]\frac{-(1/p^2)}{(1+i/k)^{k/p}\,k\left(-1/p^2\right)\ln(1+i/k)} =$$

$$= R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}. \tag{2.103}$$

Итак, для наращенной величины непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеем

$$S_{\infty,k} = R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}. \tag{2.104}$$

2.5.5.9. Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с *k*-кратным начислением процентов

В заключение установим связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов. Она легко получается из формул (2.100) и (2.104)

$$S_{\infty,k} = A_{\infty,k}\left(1+i/k\right)^{nk}. \tag{2.105}$$

Пример 2.5. Требуется вычислить наращенную величину 8-летней 15%-ной непрерывной ренты с 12-кратным начислением процентов и рентным платежом $R = 150$.

По формуле (2.104)

$$S_{\infty,k} = R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}.$$

Имеем

$$S_{\infty,12} = 150\cdot\frac{\left(1+0{,}15/12\right)^{8\cdot 12}-1}{12\ln(1+0{,}15/12)} = 150\cdot\frac{2{,}296}{0{,}149} = 2311{,}41.$$

2.5.5.10. Непрерывная рента с непрерывным начислением процентов

Из формулы (2.100)

$$A_{\infty,k} = R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln\left(1+i/k\right)}$$

легко получить приведенную величину непрерывной рента с непрерывным начислением процентов, переходя к пределу $k\to\infty$

$$A_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{\frac{k}{i}(-nk)\frac{i}{k}}}{\ln(1+i/k)^{\frac{k}{i}i}} = R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}. \tag{2.106}$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов получено выражение

$$A_{\infty,\infty} = R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}. \tag{2.107}$$

Аналогично найдем наращенную величину непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.

В формуле

$$S_{\infty,k} = R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{nk} - 1}{k \ln\left(1+i/k\right)}, \tag{2.108}$$

переходя к пределу $k \to \infty$, получим

$$S_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{nk} - 1}{k \ln\left(1+i/k\right)} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{\frac{k}{i}(nk)\frac{i}{k}} - 1}{\ln\left(1+i/k\right)^{\frac{k}{i}i}} = R \cdot \frac{e^{ni} - 1}{i}. \tag{2.109}$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов получено выражение

$$S_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{e^{ni} - 1}{i}. \tag{2.110}$$

2.5.5.11. Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов

В заключение отметим связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов. Ее легко получить из формул (2.107) и (2.110):

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty} \cdot e^{ni}. \tag{2.111}$$

2.5.5.12. Связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент

Проведенный анализ всех случаев связи между приведенной и наращенной величинами рент показывает, что коэффициент связи зависит *только* от кратности начисления процентов и не зависит от срочности ренты и любых других ее параметров.

Таким образом, имеем:

— при однократном начислении процентов:

$$S = A \cdot \left(1+i\right)^{n},\ A = S \cdot \left(1+i\right)^{-n}; \tag{2.112}$$

— при k-кратном начислении процентов:

$$S = A \cdot \left(1+i/k\right)^{kn},\ A = S \cdot \left(1+i/k\right)^{-kn}; \tag{2.113}$$

— при непрерывном начислении процентов:

$$S = A \cdot e^{ni},\ A = S \cdot e^{-ni}. \tag{2.114}$$

Пример 2.6. Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 10-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом $R = 300$ при ставке 14% годовых.

По формуле (2.101) найдем приведенную величину ренты

$$A_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{1 - e^{-ni}}{i} = 300 \cdot \frac{1 - e^{-10 \cdot 0,14}}{0,14} = 300 \cdot 5,38 = 1614.$$

Наращенную величину ренты можно найти либо по формуле (2.110)

$$S_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{e^{ni} - 1}{i} = 300 \cdot \frac{e^{10 \cdot 0,14} - 1}{0,14} = 300 \cdot 21,823 = 6546,9,$$

либо используя связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов (2.114)

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty} \cdot e^{ni} = 1614 \cdot e^{10 \cdot 0,14} = 1614 \cdot 4,055 = 6544,8.$$

Возникшая небольшая разница (2 : 6545 = 0,03%) связана с приближенными вычислениями по двум различным схемам.

2.5.6. Другие типы рент

2.5.6.1. Ренты пренумерандо

Как упоминалось выше, рентами пренумерандо называются ренты с платежами в начале периодов. По сравнению с рентой постнумерандо начисления на каждый член ренты (за исключением последнего) в данном случае выше в $(1 + i)$ раз за счет начислений за первый период. Поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо $\ddot{S}$ в $(1 + i)$ раз больше наращенной суммы ренты постнумерандо [2, 4]

$$\ddot{S} = S(1 + i). \tag{2.115}$$

Аналогичные соотношения имеют место для приведенных величин рент

$$\ddot{A} = A(1 + i). \tag{2.116}$$

Как отмечалось в предыдущих разделах, коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо связаны соотношениями

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i},\ \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}. \tag{2.117}$$

Для годовой ренты с начислением процентов k раз в году имеем

$$\ddot{S} = S(1+i/k)^k,\ \ddot{A} = A(1+i/k)^k. \tag{2.118}$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов k раз в году имеем [2]

$$k = 1:\ \ddot{S} = S(1+i)^{1/p},$$

$$k \neq p:\ \ddot{S} = S(1+i/k)^{k/p}. \tag{2.119}$$

Переходя в каждом из равенств (2.119) к пределу при $p \to \infty$, получаем, что для непрерывных рент (при любой кратности начисления процентов) выполняются соотношения

$$\ddot{S} = S,\ \ \ddot{A} = A. \tag{2.120}$$

То есть для непрерывных рент понятия «пренумерандо» и «постнумерандо» отсутствуют (или совпадают) в силу стремления к нулю интервала между платежами.

Формулы (2.120) легко получить из выражений для приведенной величины и наращенной суммы p-срочной ренты пренумерандо и постнумерандо, переходя к пределу при $p \to \infty$.

2.5.6.2. Ренты с платежами в середине периодов

Если платежи распределяются более или менее равномерно, но их поступление не приходится на начало либо конец периода, можно суммарные платежи за период относить на середины периодов. В этом случае приведенные и наращенные величины ренты равны соответствующим величинам ренты постнумерандо, наращенным за половину периода [2]:

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2},\ A_{1/2} = A(1+i)^{1/2} \text{ при } p = 1,\ k = 1; \tag{2.121}$$

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p},\ A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p} \text{ при } p > 1,\ k = 1; \tag{2.122}$$

$$S_{1/2} = S(1+i/k)^{k/2},\ A_{1/2} = A(1+i/k)^{k/2}, \text{ при } p = 1,\ k > 1; \tag{2.123}$$

$$S_{1/2} = S(1+i/k)^{k/2p},\ A_{1/2} = A(1+i/k)^{k/2p}, \text{ при } p > 1,\ k > 1. \tag{2.124}$$

2.5.6.3. Немедленные и отложенные ренты

Немедленная рента — это рента, выплаты которой производятся в настоящее время (в начале или конце периодов). **Отсроченная рента** — это рента, начало выплат которой отложено на некоторое время t. Отсроченность ренты не влияет на ее наращенную величину, однако современная величина ренты ${}_tA$ при этом изменяется [2].

$$ {}_tA = A\nu^t = Ra_{\overline{n|}i}\nu^t. \qquad (2.125)$$

В таблицах 2.1 и 2.2 дана сводка приведенной и наращенной величин рент постнумерандо и пренумерандо.

Таблица 2.1

Приведенная и наращенная величины рент постнумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
Вечная		R/i	∞
p-срочная	$k=1$	$\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$	$\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{1/p}-1}$
	$k\neq p$	$R\cdot\dfrac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$	$R\cdot\dfrac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$
	$k=p$	$R\cdot\dfrac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}$	$R\cdot\dfrac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}$
Непрерывная		$R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}$
p-срочная с непрерывным начислением процентов		$\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}$	$\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов		$R\cdot\dfrac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$	$R\cdot\dfrac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов		$R\cdot\dfrac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\dfrac{e^{ni}-1}{i}$

Таблица 2.2

Приведенная и наращенная величины рент пренумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$	$R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)$
Вечная		$R(1+i)/i$	∞
p-срочная	$k=1$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{1/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{1/p}$
	$k\neq p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}\cdot(1+i/k)^{k/p}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}\cdot(1+i/k)^{k/p}$
	$k=p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}\cdot(1+i/k)$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}\cdot(1+i/k)$
Непрерывная		$R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}$
p-срочная с непрерывным начислением процентов		$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}$

2.5.7. Арифметические и геометрические ренты

Ниже будут рассмотрены ренты с постоянным абсолютным и постоянным относительным изменением платежей во времени — *арифметические* и *геометрические* ренты. В арифметической ренте величины периодических платежей изменяются линейно, в геометрической — экспоненциально.

2.5.7.1. Арифметические ренты

В арифметической ренте каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одну и ту же величину Q. Поток платежей годовой арифметической ренты за n лет имеет вид [2, 4]:

$$C^{(n)} = \{(R, 1), (R + Q, 2), ..., (R + (n - 1)Q, n)\}. \qquad (2.126)$$

Этот поток можно представить [4] в виде линейной комбинации двух рент $G^{(n)}$ и $I^{(n)}$:

$$C^{(n)} = R \cdot G^{(n)} + Q \cdot I^{(n)}. \qquad (2.127)$$

Здесь обыкновенная единичная рента:

$$G^{(n)} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, n)\}; \qquad (2.128)$$

единичная арифметическая рента:

$$H^{(n)} = \{(0, 1), (1, 2), ..., (n - 1, n)\}; \qquad (2.129)$$

Тогда

$$PV(C^{(n)}) = R \cdot PV(G^{(n)}) + Q \cdot PV(H^{(n)}). \qquad (2.130)$$

Приведем несколько способов вычисления приведенной стоимости единичной арифметической ренты [2, 4].

1. Для $v = (1 + i)^{-1}$ имеем [4]:

$$PV(H^{(n)}) = v^2 + 2v^3 + ... + (n - 1)v^n = v^2(1 + 2v + ... + (n - 1)v^{n-2}).$$

Положим,

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}.$$

Тогда

$$f'(x) = 1 + 2x + ... + (n - 1)x^{n-2}.$$

Значение $f(x)$ можно найти как сумму членов геометрической прогрессии:

$$f(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Следовательно,

$$f'(x) = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1 - x}.$$

Поскольку

$$PV(H^{(n)}) = v^2(1 + 2v + ... + nv^{n-1}) = v^2 \cdot f'(v),$$

получаем:

$$PV\left(H^{(n)}\right) = v^2 \cdot \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - v\frac{nv^n}{1-v} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^2} - \frac{n(1+i)^{-n}}{i}. \quad (2.131)$$

Используя (2.29), можно переписать (2.100) в виде:

$$PV\left(I^{(n)}\right) = \frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}, \; n \geq 2. \quad (2.132)$$

Отсюда получаем формулу будущей стоимости потока I (накопленной стоимости на момент времени $t = n$):

$$FV\left(H^{(n)}\right) = \frac{s_{\overline{n}|i} - n}{i}.$$

Запишем теперь формулы для приведенной и будущей стоимости арифметической ренты:

$$PV\left(C^{(n)}\right) = R \cdot a_{\overline{n}|i} + Q\frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}; \quad (2.133)$$

$$FV\left(C^{(n)}\right) = R \cdot s_{\overline{n}|i} + Q\frac{s_{\overline{n}|i} - n}{i}. \quad (2.134)$$

Переходя в (2.133) к пределу при n, стремящемся к бесконечности, получим приведенную стоимость бесконечной арифметической ренты $C^{(\infty)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n(1+i)^{-n} = 0$, то

$$PV\left(C^{(\infty)}\right) = \lim_{n\to\infty} PV\left(C^{(n)}\right) = R \cdot \frac{1}{i} + Q \cdot \frac{1}{i^2}. \quad (2.135)$$

2. Так же как и для обыкновенной ренты [4], формулы (2.133) и (2.124) для конечной арифметической ренты можно получить, начав с определения стоимости бесконечной ренты. В самом деле, поток платежей бесконечной арифметической ренты

$$H = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), ...\}$$

можно представить в виде суммы отсроченной на один год обыкновенной вечной ренты с единичными платежами

$$G_1 = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3), ...\}$$

и бесконечной арифметической ренты

$$H_1 = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), ...\}.$$

Приведя стоимости всех рент к начальному моменту времени, получаем уравнение

$$PV\,(H) = \frac{1}{1+i}\cdot\left(\frac{1}{i} + PV\,(H)\right).$$

Отсюда

$$PV\,(H) = \frac{1}{i^2},$$

что дает нам формулу (2.135). Наконец, представляя конечную арифметическую ренту как разность двух бесконечных (начинающихся соответственно в моменты времени $t = 0$ и $t = n$) и применяя формулу (2.135), получаем:

$$PV\left(C^{(n)}\right) = R\cdot\frac{1}{i} + Q\cdot\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(1+i)^n}\left((R+nQ)\cdot\frac{1}{i} + Q\frac{1}{i^2}\right).$$

3. Приведем еще один способ вычисления приведенной стоимости арифметической ренты [2]:

$$A = R\nu + (R+Q)\nu^2 + \ldots + \left(R + (n-1)Q\right)\nu^n. \qquad (2.136)$$

Здесь $v = (1 + i)^{-1}$.

Умножая равенство (2.136) на $(1 + i)$ и вычитая из него равенство (2.135), получим

$$Ai = R + Q\nu + Q\nu^2 \ldots + Q\nu^{n-1} - \left[R + (n-1)Q\right]\nu^n =$$
$$= R\left(1-\nu^n\right) + Q\sum_{j=1}^{n-1}\nu^j - nQ\nu^n + Q\nu^n.$$

Отсюда

$$A = R\left(\frac{1-\nu^n}{i}\right) + \frac{Qa_{\overline{n}|i} - nQ\nu^n}{i} = \left(R + \frac{Q}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{nQ\nu^n}{i}. \qquad (2.137)$$

2.5.7.2. *p*-срочная арифметическая рента

Рассмотрим p-срочную арифметическую ренту [2]

$$C^{(n)} = \{(R, 1), (R + Q/p, 2), ..., (R + (n-1)Q/p, n)\}.$$

Текущий платеж этой ренты равен $R + (j - 1)Q/p$, $j = 1, 2, ..., pn$. Для приведенной и наращенной величин ренты постнумерандо имеем соответственно

$$A = \sum_{j=1}^{pn}\left(R + \frac{Qj}{p}\right)\cdot \nu^{j/p}; \tag{2.138}$$

$$S = \sum_{j=1}^{pn}\left(R + \frac{Q(j-1)}{p}\right)\cdot \nu^{j/p-n}. \tag{2.139}$$

2.5.7.3. Непрерывные арифметические ренты

Непрерывным аналогом арифметической ренты служит поток платежей с плотностью $\mu(t) = R + \gamma t$. Приведенная стоимость такого потока за промежуток времени от 0 до T составляет величину [4]

$$A = \int_0^T (R + \gamma t)e^{-\delta t}dt, \tag{2.140}$$

где $\delta = \ln(1 + i)$ — сила роста.

Вычисляя интеграл, находим [4]:

$$A = -\left(\frac{\gamma}{\delta^2} + \frac{R}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta}t\right)e^{-\delta t}\Big|_0^T = \left(\gamma\delta^2 + r\delta\right)\left(1 - e^{-\delta T}\right) - \gamma\delta T e^{-\delta T} =$$

$$= R\cdot a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} + \gamma\cdot\frac{a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} - Te^{-\delta T}}{\delta} \tag{2.141}$$

(напомним, что $a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} = \dfrac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$).

2.5.7.4. Геометрические ренты постнумерандо

Геометрической называется рента, в которой платежи меняются со временем с постоянным относительным ростом q, т.е. каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одно и то же число процентов q. Другими словами, q является темпом прироста платежей. Поток платежей годовой геометрической ренты за n лет имеет вид [4]:

$$E^{(n)} = \{(1, R), (2, R(1 + q)), (3, R(1+ q)^2), ..., (n, R(1 + q)^{n-1})\}. \tag{2.142}$$

Вычисление приведенной стоимости геометрической ренты сводится к суммированию дисконтированных платежей, т.е. к вычислению суммы геометрической прогрессии с первым членом Rv и знаменателем $k = 1 + q$:

$$A=\sum_{t=1}^{n}\frac{R\left(1+q\right)^{t-1}}{\left(1+i\right)^{t}}=\frac{R}{1+i}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n}}{1-\frac{1+q}{1+i}}=R\cdot\frac{1-\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n}}{i-q}. \tag{2.143}$$

Отметим, что прирост может быть как положительным ($q > 0$), так и отрицательным ($q < 0$).

Для наращенной величины геометрической ренты получаем [4]

$$S=A\left(1+i\right)^{n}=R\frac{k^{n}-\left(1+i\right)^{n}}{k-\left(1+i\right)}=R\frac{\left(1+q\right)^{n}-\left(1+i\right)^{n}}{q-i}. \tag{2.144}$$

2.5.7.5. *p*-срочная геометрическая рента

Если платежи производятся p раз в году, а проценты (по ставке i) начисляются один раз в году постнумерандо, то платежи представляют собой геометрическую прогрессию

$$C^{(n)}=\{(R,1),(Rk,2),\ldots,(Rk^{np-1},n)\}. \tag{2.145}$$

Здесь $k = 1 + q$ — темп роста за период. Дисконтируя и суммируя члены прогрессии, получим для наращенной величины ренты [2, 4]

$$S=R\frac{k^{np}-\left(1+i\right)^{n}}{k-\left(1+i\right)^{1/p}}=R\frac{(1+q)^{np}-\left(1+i\right)^{n}}{1+q-\left(1+i\right)^{1/p}}. \tag{2.146}$$

Для приведенной величины ренты имеем [2, 4]:

$$A=R\frac{k^{np}\nu^{n}-1}{k-\left(1+i\right)^{1/p}}=R\frac{\left(1+q\right)^{np}\nu^{n}-1}{1+q-\left(1+i\right)^{1/p}}. \tag{2.147}$$

2.5.7.6. Геометрическая рента пренумерандо

Проводя аналогичные вычисления для геометрической ренты пренумерандо либо используя соотношения между значениями приведенной и наращенной величинами ренты постнумерандо и пренумерандо, указанными в главе 2, получим следующие выражения для ее приведенной и наращенной величин ренты [2, 4]

$$\ddot{A}=R\frac{\left(k\nu\right)^{n}-1}{k\nu-1}\left(1+i\right)=R\frac{1-\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n}}{q-i}\left(1+i\right); \tag{2.148}$$

$$\ddot{S} = R\frac{(k\nu)^n - 1}{k\nu - 1}(1+i)^n = R\frac{1-\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n}{q-i}(1+i)^{n+1}. \qquad (2.149)$$

2.5.8. Сравнение финансовых потоков и рент

2.5.8.1. Общий принцип сравнения финансовых потоков и рент

Достаточно часто возникает необходимость выбора между несколькими рентами с разными параметрами. Для осознанного решения проблемы выбора необходимо уметь сравнивать ренты. Та же проблема возникает и при сравнении финансовых потоков более общего типа. Если сроки сравниваемых рент или финансовых потоков одинаковы, то необходимо сравнивать наращенные величины рент (потоков) и выбирать ту ренту (поток), наращенная величина которой больше.

Альтернативными способами выбора ренты (потока) является сравнение их современных (дисконтированных к начальному моменту времени) или приведенных (дисконтированных к некоторому моменту времени между начальным и конечным моментами) величин.

Рассмотрим два потока:

$$CF_1 = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), ..., (P_n, t_n)\} \qquad (2.150)$$

и

$$CF_1 = \{(Q_0, t_0), (Q_1, t_1), ..., (Q_n, t_n)\},$$

отличающиеся лишь размерами платежей P_i и Q_i. Если сравнивать современные величины этих потоков, то результат сравнения в общем случае будет зависеть от ставки дисконтирования, т.е. при одной процентной ставке предпочтительным может оказаться первый поток, а при другой — второй. При некоторых условиях современная величина первого потока (ренты) будет больше современной величины второго потока (ренты) при любой ставке дисконтирования.

Очевидным достаточным условием этого является выполнение неравенств $P_i \geq Q_i$ для всех i. Еще одним достаточным условием предпочтительности первого потока (ренты) является $P \geq Q$, где $P = \sum_{i=0}^{n} P_i$, $Q = \sum_{i=0}^{n} Q_i$. Существуют и другие более слабые достаточные условия.

2.5.8.2. Сравнение годовых и срочных рент

Как упоминалось в предыдущем параграфе, при выборе рент необходимо сравнивать наращенные величины рент и выбирать ту из них, величина которой больше. Величина наращенной суммы ренты зависит от периода ренты и частоты начисления процентов. Если эти параметры ввести в качестве аргументов наращенной суммы ренты, то ее можно обозначить как $S(p, k)$. Таким образом, $S(p, k)$ — наращенная сумма p-кратной ренты с начислением процентов k раз в году.

Для рент с одинаковыми сроками, членами и размерами процентных ставок, отличающихся лишь двумя характеристиками — кратностью ренты и частотой начисления процентов из приведенных выше формул, можно получить ряд соотношений, полезных при предварительной оценке соглашения о ренте [2]:

$$S(1,1) < \underset{k>1}{S(1,k)} < S(1,\infty) < \underset{p>1}{S(p,1)} < \underset{p>k>1}{S(p,k)} < \underset{p=k>1}{S(p,k)} < \underset{k>p>1}{S(p,k)} < S(p,\infty); \qquad (2.151)$$

Из этих соотношений можно сразу оценить, что при равенстве всех остальных параметров рент при начислении процентов один раз в году p-кратная рента предпочтительней годовой с начислением процентов один раз в году. Также видно, что при k, $p > 1$ рента с $k > p$ будет предпочтительней ренты с $p > k$, т.е. рента с $k = 5$ и $p = 3$ предпочтительней ренты с $k = 3$ и $p = 5$.

Ренты с частотой начисления процентов равной кратности предпочтительней ренты с кратностью больше частоты начисления процентов ($p > k$), но менее предпочтительны, чем ренты с кратностью больше частоты начисления процентов ($k > p$).

2.5.9. Конверсия рент

Бывают ситуации, когда возникает необходимость изменить условия выплаты ренты, заменить одну ренту другой либо разовым платежом, либо, наоборот, заменить разовый платеж рентой, а также заменить несколько рент с разными параметрами одной. Во всех перечисленных выше случаях производится конверсия рент, подчиняющаяся простому правилу: современные величины старой (старых) и новой (новых) рент должны быть равны. Это следует из предположения, что конверсия рент не должна менять финансового положения сторон, т.е. должен соблюдаться принцип финансовой эквивалентности (принцип финансовой справедливости). Алгоритм расчета параметров новой ренты таков:

1. Определяется современная величина старой (старых) ренты.
2. В случае объединения рент эти величины складываются и дают современную величину новой ренты.
3. Зная современную величину новой ренты, по методу, описанному выше, рассчитываются параметры новой ренты, такие как размер отдельного платежа R, срок ренты n и процентная ставка i.

Рассмотрим такие виды конверсии рент, как изменение параметров ренты, замена одной ренты другой, выкуп ренты (замена ренты разовым платежом), рассрочка платежа (замена разового платежа рентой), а также консолидация (объединение) рент (замена нескольких рент с разными параметрами одной рентой).

2.5.9.1. Замена одной ренты другой

Изменение параметров ренты. На практике довольно часто возникает необходимость в изменении параметров ренты. Например, надо изменить срок ренты или величину рентного платежа либо изменить частоту выплат (срочность ренты) и т.д.

Алгоритм расчета параметров новой ренты такой же, как приведен выше: определяется приведенная величина старой ренты, которая будет равна приведенной величине новой ренты. Далее следует задать все параметры новой ренты, кроме одного, и из уравнения эквивалентности $A_1 = A_2$ найти недостающий параметр новой ренты (см. параграф 2.5.3).

Если задать такие параметры новой ренты, как размер отдельного платежа R и срок ренты n, можно из уравнения эквивалентности найти процентную ставку i либо при заданном сроке ренты n и процентной ставке i определить величину рентного платежа R и т.д. Возможны и более сложные случаи, в частности, может возникнуть необходимость заменить годовую ренту p-срочной либо наоборот. Подобные и другие случаи рассмотрим более подробно.

Замена обычной ренты срочной. Приведем три примера замены одной ренты другой. В качестве первого примера рассмотрим замену годовой ренты с параметрами R_1, n_1 p-кратной рентой с параметрами R_2, n_2, p. Приравняем современные величины старой и новой рент [2]:

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}. \qquad (2.152)$$

Из этого уравнения можно либо найти величину платежа срочной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и срочность p, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и срочность ренты p.

В первом случае [2]

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}}. \qquad (2.153)$$

Если сроки обеих рент, как и процентные ставки, одинаковы и отличаются только периодичностью рентных платежей (один платеж в год для первой ренты и p платежей в год для второй ренты), то платежи таких рент связаны соотношением [2]

$$R_2 = R_1 \frac{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}{i}. \qquad (2.154)$$

Во втором случае для нахождения срока ренты n_2 находим сначала коэффициент приведения для p-срочной ренты [2]

$$a^{(p)}_{\overline{n_2}|i} = \frac{A}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} a_{\overline{n_1}|i}. \qquad (2.155)$$

Решая это уравнение относительно n_2, определим срок p-срочной ренты [2]:

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)}. \qquad (2.156)$$

Пример 2.7. Заменить обычную (годовую) ренту с параметрами $R_1 = 200$, $n = 5$, $i = 10\%$ срочной (квартальной) рентой с параметрами $R_2 = 100$, $i = 10\%$.

Найдем сначала приведенную величину годовой ренты

$$A = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 200 \cdot 3{,}79 = 758.$$

Далее по формуле (2.145) находим срок 4 — срочной ренты

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R_2}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left[1 - \frac{758}{100}\left[(1+0{,}1)^{1/4} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+0{,}1)} =$$

$$= \frac{1{,}699}{0{,}0953} = 17{,}83 \text{ года.}$$

Замена немедленной ренты отсроченной. В качестве второго примера рассмотрим замену немедленной ренты с параметрами R_1, n_1 отсроченной рентой с параметрами R_2, n_2, t. Приравняем современные величины старой и новой рент [2]:

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t, \tag{2.157}$$

где $\nu^t = (1 + i)^{-t}$. (2.158)

Из этого уравнения можно либо найти величину платежа отсроченной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и продолжительность отсрочки t, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и продолжительность отсрочки t.

В первом случае величина платежа R_2 равна [2]:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}} (1+i)^t. \tag{2.159}$$

Если сроки обеих рент равны, их платежи связаны соотношением [2]

$$R_2 = R_1(1 + i)^t, \tag{2.160}$$

т.е. член отсроченной ренты равен наращенному за время отсрочки t члену немедленной ренты.

Во втором случае из равенства

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t \tag{2.161}$$

при заданных R_2 и t находим срок новой ренты (R_1 и n_1 известны). В случае сохранения размера члена ренты ($R_2 = R_1$) он определяется соотношением [2]

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \left[1 - (1+i)^{-n_1}\right](1+i)^t\right]}{\ln(1+i)}. \tag{2.162}$$

2.5.9.2. Консолидация рент

При замене нескольких рент одной равенство современных величин старых и новой рент имеет вид [2]:

$$A = \sum_i A_i. \tag{2.163}$$

Это равенство позволяет найти только один параметр консолидирующей ренты (член ренты либо ее срок), при этом все остальные ее параметры должны быть заданы. В случае если неизвестен член ренты, то он для ренты постнумерандо со сроком n определяется по формуле

$$R = \frac{\sum_i A_i}{a_{\overline{n}|i}}. \quad (2.164)$$

Если же неизвестен срок консолидирующей ренты, то сначала находим коэффициент приведения [2]

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\sum_i A_i}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \quad (2.165)$$

откуда уже находим срок ренты

$$n = \frac{-\ln\left(1 + i\sum_i A_i \Big/ R\right)}{\ln(1+i)}. \quad (2.166)$$

Важным частным случаем консолидации рент является ситуация, когда член консолидирующей ренты равен сумме членов заменяемых рент. При одинаковой процентной ставке всех рент из условия финансовой эквивалентности получаем [2]:

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_j R_j\left[1-(1+i)^{-n_j}\right]}{i}, \quad (2.167)$$

откуда находим срок ренты

$$n = \frac{\ln R - \ln\sum_j R_j (1+i)^{-n_j}}{\ln(1+i)}. \quad (2.168)$$

2.5.9.3. Выкуп ренты

Выкупом ренты называется замена ренты единовременным платежом. Принцип финансовой эквивалентности здесь сводится к тому, что единовременный платеж P должен равняться современной величине выкупаемой ренты [2] A:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P. \quad (2.169)$$

По этой формуле определяется величина единовременного платежа при известных параметрах выкупаемой ренты: размере отдельного платежа R, сроке ренты n и процентной ставке i.

Пример 2.8. Заменить две ренты постнумерандо с параметрами

$$R_1 = 200,\ n_1 = 4,\ i_1 = 12\%, R_2 = 250,\ n_2 = 6,\ i_2 = 14\%$$

разовым платежом в момент времени $n = 4$, $t = 15\%$.

Вначале найдем приведенные величины обеих рент:

$$A_1 = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i_1} = 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-4}}{0{,}12} = 200 \cdot 3{,}037 = 607{,}47;$$

$$A_2 = R_2 \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i_2} = 250 \cdot \frac{1-(1+0{,}14)^{-6}}{0{,}14} = 250 \cdot 3{,}889 = 972{,}17.$$

Теперь определим сумму приведенных величин обеих рент:

$$A = A_1 + A_2 = 607{,}47 + 972{,}17 = 1579{,}64.$$

Эта сумма должна равняться единовременному платежу, дисконтированному к начальному моменту времени:

$$A = \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Отсюда $P = A(1+i)^n = 1579{,}64(1+0{,}15)^4 = 2762{,}80.$

$P = 2762{,}80.$

2.5.9.4. Рассрочка платежа

Рассрочкой платежа называется замена долга (единовременного платежа) рентой. При этом задаются все параметры ренты, кроме одного, а этот неизвестный параметр определяется из условия равенства долга современной величине вводимой ренты [2]:

$$P = A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.170}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое финансовое событие и финансовый поток?
2. Дайте определение и выведите формулу для среднего срока финансового потока.

3. Дайте определение ренты, ренты пренумерандо, ренты постнумерандо.
4. Какими параметрами описывается рента?
5. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо.
6. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо.
7. Выведите связь между величинами $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ и A.
8. Выведите связь между величинами $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и S.
9. Выведите связь между величинами S и A.
10. Выведите связь между величинами S и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$.
11. Выведите связь между величинами $\ddot{S}$ и A.
12. Выведите связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета.
13. Выведите связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо.
14. Пусть известны n, i, R. Найдите наращенную сумму S и приведенную величину ренты A.
15. Пусть известны A, i, R. Найдите срок ренты n.
16. Пусть известны S, i, R. Найдите срок ренты n.
17. Пусть известны n, i, A. Найдите рентный платеж R.
18. Пусть известны n, i, S. Найдите рентный платеж R.
19. Пусть заданы n, R, A. Найдите процентную ставку i.
20. Пусть заданы n, R, S. Найдите процентную ставку i.
21. Что называется вечной, срочной и непрерывной рентой?
22. Найдите приведенную величину и наращенную сумму вечной ренты.
23. Приведите поток

$$CF = \{(0, 600), (1, 250), (2, 350), (3, 600)\}$$

к моменту времени $t = 2$.
24. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k = 1$).
25. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k \neq p$).
26. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k = p$).
27. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k = 1$).
28. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k \neq p$).

29. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k = p$).
30. Дайте определение непрерывной ренты и выведите формулы для ее коэффициентов приведения и наращения.
31. Найдите приведенную величину и наращенную сумму непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов.
32. Найдите приведенную величину и наращенную сумму непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.
33. Дайте определение немедленной и отложенной рент. Какова связь между приведенными величинами и наращенными суммами немедленной и отложенной рент?
34. Дайте определение арифметической и геометрической рент. Найдите приведенную величину и наращенную сумму арифметической ренты.
35. Дайте определение арифметической и геометрической рент. Найдите приведенную величину и наращенную сумму геометрической ренты.
36. Как формулируется общий принцип сравнения финансовых потоков и рент?
37. Замените годовую ренту с параметрами R_1, n_1 p-срочной рентой с параметрами R_2, n_2, p.
38. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2000$, $n_1 = 3$, $i_1 = 10\%$, $R_2 = 2500$, $n_2 = 5$, $i_2 = 15\%$ разовым платежом в момент времени $n = 4$, $i = 12\%$.
39. Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000$, $n_1 = 3$, $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, $R_3 = 2000$, $n_3 = 7$, $i = 10\%$ 4-летней рентой постнумерандо с $i = 15\%$.
40. Как заменить немедленную ренту с параметрами R_1, n_1 отсроченной рентой с параметрами R_2, n_2, t?
41. Дайте определение и приведите пример выкупа ренты.
42. Дайте определение и приведите пример консолидации рент.
43. Приведите пример замены немедленной ренты отсроченной.
44. Дайте определение и приведите пример рассрочки платежа.
45. Замените годовую ренту $R_1 = 2$, $n_1 = 3$, $i = 20\%$ на p-срочную (квартальную) ренту $n = 4$, $i = 20\%$.
46. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо за два соседних периода.
47. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо за несколько ($k > 2$) соседних периодов.
48. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо за два соседних периода.
49. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо за несколько ($k > 2$) соседних периодов.
50. Сравните два потока по среднему сроку

$$CF_1 = \{(0, 500), (1, 300), (2, 450), (3, 100)\},$$

$$CF_2 = \{(0, 600), (1, 250), (2, 350), (4, 50)\}.$$

51. Найдите коэффициент наращения за три соседних периода продолжительностью 1, 2 и 3 соответственно при ставке 10%.
52. Найдите срок ренты пренумерандо, если известны $S = 4000$, $i = 12\%$, $R = 100$.
53. Найдите срок ренты пренумерандо, если известны $A = 3000$, $i = 11\%$, $R = 200$.
54. Найдите срок ренты постнумерандо, если известны $A = 2500$, $i = 13\%$, $R = 250$.
55. Установите связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.
56. Установите связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов.
57. Установите связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с k-кратным начислением процентов.
58. Установите связь между приведенной и наращенной величинами ренты с k-кратным начислением процентов.
59. От каких параметров ренты зависит связь между приведенной и наращенной величинами ренты?
60. Замените единовременный платеж в момент времени $t = 5$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1 = 400$, $n_1 = 8$, $i_1 = 13\%$, $p = 12$.
61. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения p-срочной ренты постнумерандо с непрерывным начислением процентов.

ГЛАВА 3

ДОХОДНОСТЬ И РИСК ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

3.1. Доход и доходность финансовой операции

Финансовой называется любая операция, начальное и конечное состояние которой имеет финансовое (денежное) выражение (оценку) (P и P'). Одной из главных целей проведения любой финансовой операции является получение максимальной прибыли ($P' - P$), поэтому *прибыль* представляет собой одну из основных характеристик финансовой операции, наряду с полученным в результате ее *доходом* (P'). Более точно финансовую операцию характеризует ее *доходность* (или эффективность) ($(P' - P)/P$). В условиях детерминированности, рассмотренных в предыдущих главах, доходность составляет вполне определенную величину, зависящую от процентной ставки, уровня инфляции и других факторов, которые предполагались нами известными.

3.1.1. Доходность за несколько периодов

Найдем доходность за несколько периодов, если доходность за каждый период известна. Пусть доходности за последовательные периоды времени $t_1, t_2, ..., t_n$ равны соответственно $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Найдем доходность μ за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$. Здравый смысл подсказывает, что доходность — аддитивная величина, так что μ, по крайней мере приближенно, равна сумме доходностей за каждый период $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n \tag{3.1}$$

Ниже получим точное выражение для доходности за суммарный период времени t и увидим, насколько она отличается от интуитивного результата (3.1).

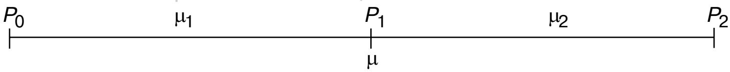

Рис. 3.1. К выводу формулы для доходности за два периода

Рассмотрим сначала два периода t_1 и t_2. Обозначив стоимость актива в моменты времени $t = 0$, $t = t_1$, $t = t_2$ через соответственно P_0, P_1, P_2 (рис. 3.1), имеем для доходностей за первый (μ_1) и второй (μ_2) периоды следующие выражения:

$$\mu_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \ \mu_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \tag{3.2}$$

Доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = \frac{P_2 - P_0}{P_0}. \tag{3.3}$$

Проведя почленное деление в (3.2) и (3.3), получим

$$\mu_1 = \frac{P_1}{P_0} - 1, \ \mu_2 = \frac{P_2}{P_1} - 1, \ \mu = \frac{P_2}{P_0} - 1. \tag{3.4}$$

Перенося –1 в левые части, имеем

$$\mu_1 + 1 = \frac{P_1}{P_0}, \ \mu_2 + 1 = \frac{P_2}{P_1}, \ \mu + 1 = \frac{P_2}{P_0}. \tag{3.5}$$

Перемножив первые два выражения, получим

$$(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) = \frac{P_2}{P_0}. \tag{3.6}$$

Правая часть (3.6) равна правой части третьего уравнения в (3.5). Приравнивая их, получим

$$(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) = \mu + 1 \tag{3.7}$$

или окончательно

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) - 1. \tag{3.8}$$

Обобщая (3.8) на случай n-периодов (рис. 3.2), для доходности μ за период $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ имеем

$$\mu = (\mu_1 + 1) \cdot (\mu_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\mu_n + 1) - 1. \tag{3.9}$$

Строгое доказательство формулы (3.9) несложно получить методом математической индукции.

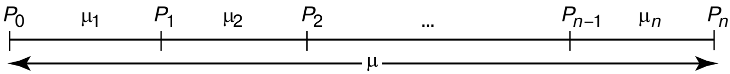

Рис. 3.2. К выводу формулы для доходности за несколько периодов

Отметим, что доходность за n-периодов не зависит как от длительности составляющих периодов, так и от периода t .

Полученный *результат для доходности за несколько периодов полностью аналогичен полученному нами ранее результату для темпа инфляции за несколько периодов.*

Для равных доходностей за отдельные периоды $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ (при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\mu = (1 + \mu_1)^n - 1. \tag{3.10}$$

Проанализируем отличие полученных результатов (3.9) и (3.10) от интуитивного выражения (3.1) и причину этого на примере временнóго интервала, состоящего из двух периодов.

Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны соответственно μ_1, μ_2. Тогда по формуле (3.9) доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = (1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2. \tag{3.11}$$

Как видим, отличие от суммы доходностей состоит в появлении перекрестного члена μ_1, μ_2. Хотя таковой и является малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с μ_1, μ_2 при условии, что они малы, на практике необходимо их учитывать.

3.1.2. Синергетический эффект

Здесь, как и в случае темпа инфляции, мы имеем пример синергетического эффекта (т.е. эффект (результат) от двух (нескольких) частей больше аддитивного эффекта (простого суммирования)). Ответствен за синергетический эффект, как и в случае темпа инфляции, появляющийся перекрестный член μ_1, μ_2. Он приводит к тому, что доходность за два последовательных периода времени $t = t_1 + t_2$ оказывается больше суммы доходностей.

Пример 3.1. Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны 20 и 30% соответственно. Тогда по формуле (3.11) доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = (1+\mu_1)(1+\mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2 = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}56,$$

т.е. 56%. Таким образом, отличие от суммы доходностей составляет 6%.

Пример 3.2. Доходность актива за год μ равна 20%. Требуется найти доходность актива за квартал μ_1 при условии ее постоянства.

Применим формулу

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1.$$

Имеем

$$\mu + 1 = (1+\mu_1)^n, \ \mu_1 + 1 = \sqrt[n]{1+\mu},$$

окончательно $\mu_1 = \sqrt[n]{1+\mu} - 1.$

Подставив в эту формулу $\mu = 20\% = 0{,}2$, $n = 4$, получим для квартальной доходности

$$\mu_1 = \sqrt[4]{1+\mu} - 1 = \sqrt[4]{1{,}2} - 1 \approx 1{,}0466 - 1 = 0{,}0466 \approx 4{,}66\%.$$

Видим, что доходность за квартал оказывается ниже получаемой простым делением годовой доходности на четыре, т.е. 20 : 4 = 5%. Разница составляет 5% – 4,66% = 0,36%.

Пример 3.3. Решим обратную задачу. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 2%. Найти доходность актива за год μ при условии, что месячная доходность в течение года постоянна.

Применим формулу

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1.$$

Подставляя сюда $\mu = 2\% = 0{,}02$, $n = 12$, получим для годовой доходности

$$\mu = (1+\mu_1)^{12} - 1 = (1+0{,}02)^{12} - 1 =$$
$$= (1{,}02)^{12} - 1 \approx 1{,}268 - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\%.$$

Оказывается, доходность за год выше получаемой простым умножением месячной доходности на двенадцать, т.е. 2% · 12 = 24%. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно заключить, что, во-первых, доходность за суммарный период превышает сумму доходностей за составляющие периоды; во-вторых, доходность за составляющий период меньше соответствующей ему доли доходности за суммарный период.

3.2. Риск финансовой операции

Однако, как правило, большая часть финансовых операций проводится в условиях неопределенности, когда перечисленные выше и другие факторы либо неизвестны, либо являются случайными величинами, что приводит к неопределенности и доходности финансовой операции.

В этой ситуации финансовая операция характеризуется помимо доходности еще одной величиной, тесно связанной с доходностью и определяющей степень неопределенности данной финансовой операции, а именно *риском* финансовой операции.

Термин «риск» понимается далеко не однозначно. Даже отвлекаясь от того факта, что существуют разные типы финансовых рисков (банковский, кредитный, валютный, инвестиционный, депозитный, страховой, инфляционный, ценовой, риск ликвидности активов и др.), отметим, что даже общее определение этого понятия неясно, неоднозначно и противоречиво.

Интуитивно риск понимается как возможные потери, связанные с проведением финансовой операции в условиях неопределенности. Наличие неопределенности не позволяет предсказать заранее результат финансовой операции, поэтому при ее проведении возможны как прибыль, так и убыток (или меньшая прибыль по сравнению с той, которая могла бы быть). При таком понимании риска вероятность убытков или получения меньшей прибыли считается риском, а вероятность получения большей прибыли риском не считается.

Часто различают риск и неопределенность. Считается, что риск имеет место тогда, когда известны вероятности различных исходов финансовой операции. Если же вероятности исходов неизвестны, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. С нашей точки зрения, риск существует в обоих случаях, а различаются они полнотой информации, характеризующей риск. Рассмотрим различные случаи неопределенности.

Еще одним аспектом понятия «риск» является наличие рискующего (инвестора). Ряд авторов называют операцию рискованной, если она может иметь несколько исходов, не равноценных для инвестора. Таким образом, в их представлении понятие риска обязательно предполагает рискующего — того, к кому этот риск относится, кто озабочен результатом операции. Сам риск, по их мнению, возникает, «только если операция может окончиться исходами, не равноценными для него, несмотря на, возможно, все его усилия по управлению этой операцией» [3].

Хотя такое определение риска на первый взгляд допустимо, оно представляется не вполне оправданным, по крайней мере по двум причинам: во-первых, оно вуалирует объективный характер риска, который зачастую бывает вызван внешними, не зависящими от инвестора обстоятельствами, а во-вторых, оно приводит к неоправданному усложнению рассматриваемой ситуации, связанному с введением еще одной степени свободы, обусловленной наличием инвестора.

Наличие инвестора нужно учитывать только там, где это действительно необходимо, а именно при рассмотрении системы предпочтений индивида и функции полезности. Там появится третья характеристика финансовой операции, связанная с наличием инвестора (функция полезности, функция удовольствия или иная аналогичная величина).

Во всех остальных случаях мы будем исходить из следующего определения риска финансовой операции. **Риском финансовой операции** в условиях неопределенности называется отклонение доходности от среднего значения. Таким образом, возможность отклонения доходности в любую сторону (прибыль или убыток) считается риском.

Итак, в условиях неопределенности финансовая операция приобретает еще одну характеристику — риск и, значит, характеризуется двумя величинами: доходностью и риском.

Перейдем к количественной оценке риска.

3.2.1. Количественная оценка риска финансовой операции

Для количественной оценки риска необходимо знать вероятности различных исходов финансовой операции, а следовательно, и вероятности P_i ее различных доходностей q_i. Мы имеем случайную величину — доходность Q, с законом распределения $p_i = p(q_i)$. **Средней ожидаемой доходностью финансовой операции** называется математическое ожидание (среднее значение) случайной величины Q : $M(Q) = \sum_i q_i p_i$.

Дисперсией доходности Q финансовой операции называется математическое ожидание квадрата отклонения доходности от своего среднего значения, т.е. среднее значение случайной величины $(q - M(q))^2$/ $D(Q) = M\left[(q - M(q))^2\right]$.

Риском финансовой операции называется среднее квадратичное (стандартное) отклонение доходности $r(q) = \sigma(q) = \sqrt{D(q)}$.

В теории и на практике для определения риска иногда используется среднее квадратичное отклонение дохода *D*. Введенное таким образом определение риска не характеризует полностью риск финансовой операции, поскольку не связывает его со средней ее доходностью. Ясно, что среднее квадратичное отклонение дохода на 10 дол. для двух операций с доходом 50 и 1 000 000 дол. означает совершенно разный риск, который в первой операции велик, а во второй — пренебрежимо мал. Поэтому, конечно, в качестве меры риска гораздо более логично вводить величину не среднего квадратичного отклонения дохода $r(d) = \sigma(d) = \sqrt{D(d)}$, а относительного среднего квадратичного отклонения дохода (отношения среднего квадратичного отклонения дохода к среднему доходу) $r(d) = \dfrac{\sigma(d)}{M(d)} = \dfrac{\sqrt{D(d)}}{M(d)}$, либо, как это сделано выше, среднего квадратичного отклонения доходности. Ниже мы будем использовать обе альтернативные меры риска, отдавая предпочтение определению риска на основе доходности (а не дохода).

При увеличении масштаба операции в *c* раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в *c* раз, эффективность операции возрастает в *c* раз, риск — в $|c|$ раз, а средняя доходность не изменяется. Первое свойство следует из того, что постоянный множитель можно вынести из-под знака среднего, второе — из того, что постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате. Докажем второе свойство:

$$D(cX) = M\left[(cX - M(cX))^2\right] = M\left[c^2(X - M(X))^2\right] =$$
$$= c^2 M\left[(X - M(X))^2\right] = c^2 D(X). \qquad (3.12)$$

Отсюда $r(cX) = \sigma(cX) = \sqrt{D(cX)} = \sqrt{c^2 D(X)} = c\sqrt{D(X)} = cr(X)$.

При изменении всех доходов на одно и то же постоянное число эффективность операции также изменяется на это число, а риск не изменяется.

Отметим одну общую формулу, известную в теории вероятностей и полезную при вычислении дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - m^2. \tag{3.13}$$

Она легко выводится:

$$D(X) = M\left[(X-m)^2\right] = M\left(X^2 - 2mX + m^2\right) =$$
$$= M\left(X^2\right) - 2mM(X) + M\left(m^2\right) =$$
$$= M\left(X^2\right) - 2m^2 + m^2 = M\left(X^2\right) - m^2.$$

Средняя ожидаемая доходность операции $M(q)$ и ее риск $r(q)$ связаны неравенством Чебышева

$$P\big(q - M(q)\big) > \delta) \le r_q^2/\delta^2, \text{ или } P\big(q - M(q)\big) < \delta) > 1 - r_q^2/\delta^2. \tag{3.14}$$

Смысл неравенства Чебышева состоит в утверждении, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения превысит заданное число δ, ограничена сверху числом $r_q^2/\delta^2 = D/\delta^2$, или соответственно, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения не превысит заданное число δ, ограничена снизу числом $1 - r_q^2/\delta^2 = 1 - D/\delta^2$. Таким образом, важность введения среднего квадратичного отклонения связана с тем, что оно определяет границы, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной величины. Так, например, из неравенства Чебышева $P\left(|X-m| < \varepsilon\right) > 1 - D/\varepsilon^2$ следует «*правило* 3σ»: для любой случайной величины X выполняется неравенство

$$P\left(|X-m| < 3\sigma\right) > 1 - D/9\sigma^2 = 8/9. \tag{3.15}$$

Это означает, что если известно среднее значение случайной величины и ее стандартное отклонение, то с вероятностью большей 8/9 (89%) можно утверждать, что значение случайной величины будет находиться в интервале $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. То есть значения случайной величины вне этого интервала можно на практике не учитывать.

Более того, в действительности для большинства случайных величин, встречающихся на практике, такая вероятность значительно ближе к 1, чем 8/9. Так, при распределении случайной величины, близком к нормальному, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной величины X (в нашем случае доходности Q) находится в границах $M(q) \pm \sigma$, с вероятностью 95% — в пределах $M(q) \pm 2\sigma$, а с вероятностью 99,7% — в пределах $M(q) \pm 3\sigma$ и т.д.

Для распределения случайных величин особую роль в экономике и финансах (впрочем, как и в естественных науках) играют равномерное и нормальное распределения.

3.3. Роль равномерного и нормального распределений

3.3.1. Роль равномерного распределения

Важная роль равномерного распределения связана с двумя факторами:

1) это распределение является простейшим из всех распределений и в ситуации, когда истинное распределение вероятностей неизвестно, равномерное распределение используется для первичной (пусть и грубой) оценки числовых характеристик случайных величин;

2) целый ряд ситуаций обладает симметрией, делающей равномерное распределение хорошим приближением реального распределения, так что расчеты с помощью этого распределения в подобных ситуациях вполне оправданы.

Приведем несколько основных формул для равномерного (одномерного) распределения (на отрезке $[a, b]$):

— плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}; \tag{3.16}$$

— функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{3.17}$$

— математическое ожидание (среднее):

$$M(x)=\frac{a+b}{2};\qquad(3.18)$$

— дисперсия:

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12};\qquad(3.19)$$

— стандартное отклонение:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}.\qquad(3.20)$$

3.3.2. Выделенная роль нормального распределения

Особая роль нормального распределения теоретически обоснована центральной предельной теоремой, которую идеологически можно сформулировать следующим образом: закон распределения среднеарифметического большого числа случайных величин при достаточно общих условиях близок к нормальному. Общие условия сводятся к тому, что отдельные отклонения каждой случайной величины должны быть одного порядка малости и малы по сравнению с суммарным отклонением (отклонением суммы случайных величин). Поскольку в экономических и финансовых приложениях довольно часто имеют дело со среднеарифметическими (или суммами) большого числа случайных величин, важность нормального распределения трудно переоценить: по этому закону распределены величины финансовых потоков, доходы компаний, зависящие от большого числа факторов, ошибки измерений различных величин и т.д.

Приведем несколько основных формул для нормального (одномерного) распределения, которые могут оказаться полезными:

— плотность распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right];\qquad(3.21)$$

— функция распределения:

$$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);\qquad(3.22)$$

— математическое ожидание (среднее):

$$M(x) = m;\qquad(3.23)$$

— дисперсия

$$D(x) = \sigma^2. \tag{3.24}$$

Здесь $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ — функция Лапласа, σ — стандартное отклонение.

3.4. Коррелированность финансовых операций

Понятия коррелированности, взаимосвязи, взаимозависимости финансовых операций являются одними из важнейших в финансовом анализе. Это связано с тем, что в реальном бизнесе коррелированные, взаимосвязанные финансовые операции встречаются значительно чаще, чем независимые и некоррелированные. При хеджировании, например, необходимо подбирать только коррелированные операции, причем коррелированные с основной операцией отрицательно. При диверсификации необходимо проводить либо независимые (некоррелированные) операции, либо отрицательно коррелированные. Ниже мы изучим основные свойства коррелированных финансовых операций.

Случайные величины X и Y называются коррелированными, если их корреляционный момент (или ковариация)

$$K_{xy} = Cov(X,Y) = M\Big[\big(x - M(x)\big)\big(y - M(y)\big) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)\Big]$$

отличен от нуля, и некоррелированными, если он равен нулю. Корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции ρ_{xy} связаны между собой следующим соотношением $K_{xy} = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$; независимые случайные величины некоррелированы, обратное утверждение неверно.

Пусть операции $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий, поэтому риск суммарной операции равен $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

В общем случае, т.е. для двух произвольных финансовых операций $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, риск суммарной операции равен:

$$r = \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 \rho_{12} + r_1^2},$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции случайных доходов операций.

Это следует из свойства дисперсии суммы случайных величин

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{3.25}$$

Докажем, что $|\rho_{12}| \le 1$. Рассмотрим очевидное неравенство

$$M\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] > 0. \quad (3.26)$$

Возводя в квадрат выражение под знаком математического ожидания, получим

$$M\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \pm 2\frac{X-m_X}{\sigma_X}\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y} + \left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} M(X-m_X)^2 \pm \frac{2}{\sigma_X\sigma_Y} M\left[(X-m_X)(Y-m_Y) + \frac{1}{\sigma_Y^2} M(X-m_Y)\right] =$$

$$= \frac{D(X)}{\sigma_X^2} \pm \frac{2\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{D(Y)}{\sigma_Y^2} =$$

$$= 2 \pm \frac{2\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = 2 \pm 2\rho_{12} = 2(1 \pm \rho_{12}) > 0. \quad (3.27)$$

Отсюда следует, что $\pm\rho_{12} < 1$, т.е.

$$|\rho_{12}| \le 1. \quad (3.28)$$

Из формулы $|\rho_{12}| \le 1$ вытекает, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ (если $\rho_{12} > 0$ — при так называемой положительной корреляции доходностей операций), так и меньше этой величины (если $\rho_{12} < 0$ — при отрицательной корреляции доходностей операции). Вообще говоря, риск суммарной операции находится в пределах

$$|r_1 - r_2| \le r \le r_1 + r_2. \quad (3.29)$$

При этом граничные значения $(|r_1 - r_2|, r_1 + r_2)$ достигаются при полной отрицательной ($\rho_{12} = -1$) и полной положительной ($\rho_{12} = 1$) корреляции операций соответственно. Эти крайние случаи называются случаями полной антикорреляции и полной корреляции соответственно.

Рассмотрим две важные и наглядные коррелированные финансовые операции. Найдем коэффициент корреляции случайных величин X и $Y = \alpha X$.

$$Cov(X,Y) = Cov(X,\alpha X) = M\left(\alpha X^2\right) - M(X)M(\alpha X) =$$
$$= \alpha\left[M\left(X^2\right) - M^2(X)\right] = \alpha D(X). \tag{3.30}$$

Отсюда находим:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\alpha D(X)}{|\alpha|\sigma_X^2} = \text{sign}\alpha, \tag{3.31}$$

где
$$\text{sign}\,\alpha = \begin{cases} 1, \alpha > 0 \\ -1, \alpha < 0. \end{cases} \tag{3.32}$$

Видно, что операции X и $Y = \alpha X$ при $\alpha > 0$ положительно коррелированны с коэффициентом корреляции $\rho_{XY} = 1$, а при $\alpha < 0$ финансовые операции отрицательно коррелированны с коэффициентом корреляции $\rho_{XY} = -1$.

Значения $\rho_{XY} = 1$ и $\rho_{XY} = -1$ означают самую сильную корреляцию и антикорреляцию, что, как известно, и имеет место при линейной зависимости между случайными величинами.

3.5. Другие меры риска

Среднее квадратичное отклонение наилучшим образом характеризует количественно риск финансовой операции. Однако риски могут быть измерены и другими величинами. В большинстве случаев эти величины являются вероятностями нежелательных событий. Приведем ряд примеров [3].

Если известна функция распределения $F(d)$ случайного дохода D операции, то из ее определения следует, что вероятность того, что доход операции будет меньше заданного d, равен $P(D < d) = F(d)$. Вероятность того, что доход будет меньше среднего ожидаемого дохода m, также равна $F(m)$. При этом вероятность убытков равна $F(0)$, их средний ожидаемый размер равен $\int_{-\infty}^{0} x dF(x) = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx$ (здесь $f(x)$ — плотность распределения дохода), а отношение средних ожидаемых убытков к среднему ожидаемому доходу равно $\int_{-\infty}^{0} x dF(x) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$. Чем меньше это отношение, тем меньше риск разорения.

В главе 5 будут рассмотрены такие меры риска, как дюрация и выпуклость. Ниже мы остановимся еще на одной — так называемой «стоимости под риском» (*Value at risk*, *VaR*), которая уже более двух декад служит важнейшей мерой риска.

3.5.1. Стоимость под риском

Стоимость под риском (*VaR*) рекомендована Базельским комитетом по банковскому надзору и является сегодня наиболее распространенным методом измерения и контроля рыночных и кредитных рисков в нормальных бизнес-условиях.

Стоимость под риском — это абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом (или портфелем финансовых инструментов) в течение некоторого фиксированного (заданного) периода времени (временнóго горизонта) в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

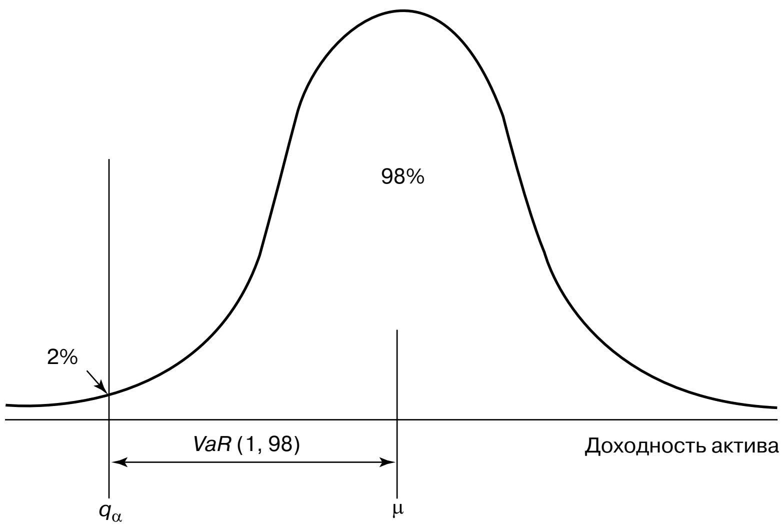

Рис. 3.3. *VaR* (1, 98)

Таким образом, *VaR* — это:

1) наибольший ожидаемый убыток от колебания стоимости портфеля активов заданной структуры, которое может произойти за дан-

ный период времени с заданной вероятностью возникновения. Более формально:

$$P(X \le VaR) = 1 - \alpha,$$

где α — заданный уровень доверительной вероятности;

2) величина убытка, который может быть превышен с вероятностью не более $1 - \alpha$ в течение последующих t дней (временнóго горизонта).

Не применяется *VaR* для рынков, находящихся в состоянии шока. Для этого используется методология стресс-тестинга.

На базе *VaR* рассчитываются необходимые резервы капитала. Требования к размеру резервного капитала рассчитываются как максимум двух величин: текущей оценки непредвиденных потерь, определяемой как оценка максимально возможного убытка от неблагоприятного изменения рыночных цен, и среднего за предыдущие 60 дней, умноженного на фактор λ, лежащий в пределах от 3 до 4. При этом значение фактора λ зависит от точности однодневного предсказания модели за предыдущие периоды времени.

Методы, используемые для нахождения оценки риска *VaR*, можно классифицировать по предположениям относительно вероятностного распределения факторов риска, а также относительно вида функциональной зависимости изменений стоимости портфеля от изменений факторов риска. В этих методах главную роль играет статистическая мера — квантиль (медиана, дециль, перцентиль).

В настоящий момент модели, используемые для вычисления *VaR*, классифицируются следующим образом:

1) параметрические модели (иначе — метод вариаций-ковариаций, или дельта-нормальный метод), включающие:

– метод постоянных ковариаций;

– метод экспоненциально-взвешенных ковариаций;

2) полупараметрические модели;

3) непараметрические модели, включающие:

– метод моделирования по историческим данным (историческое моделирование);

– метод Монте-Карло;

4) модели, использующие теорию экстремальных значений;

5) модели, использующие сценарный анализ.

Параметрические и непараметрические модели различаются следующим образом:

1) параметрические модели расчета *VaR* характеризуются тем, что делаются предположения о принадлежности функции распределе-

ния к какому-либо семейству аналитических функций распределения, которые различаются по следующим предположениям:

— о многомерном нормальном распределении — метод вариаций-ковариаций. Для оценки параметров распределения — ковариационной матрицы — используются различные методы, как параметрические, так и непараметрические;

— о характере распределения, отличном от нормального. Например, это может быть какое-либо из распределений, подходящее для описания «тяжелых хвостов» распределений. В этом случае используются, например, методы теории экстремальных значений;

2) непараметрический метод расчета *VaR* характеризуется тем, что не делается никаких предположений о виде распределения, а используется эмпирическая функция распределения. Пример такого метода — историческое моделирование.

Более подробно *VaR* в банковском деле будет рассмотрен в учебном пособии «Финансовая математика (для магистров)».

3.6. Виды финансовых рисков

В настоящее время существуют следующие финансовые риски.

***Банковский риск*:** банковские риски подразделяются на внешние и внутренние. К внешним относятся риски, не связанные с деятельностью банка или конкретного клиента: политические, экономические и др. Внутренние риски в свою очередь делятся на потери по основной и вспомогательной деятельности банка. Первые представляют самую распространенную группу рисков — кредитный, процентный, валютный и рыночный риски. Вторые включают потери по формированию депозитов, риски по новым видам деятельности, риски банковских злоупотреблений.

***Кредитный риск*:** опасность невозврата в срок взятого кредита.

***Валютный риск*:** опасность валютных потерь, вызванная колебаниями курса иностранной валюты по отношению к национальной при проведении внешнеторговых операций.

***Инвестиционный риск*:** риск обесценивания капиталовложений в результате действий органов государственной власти и управления.

***Инфляционный риск*:** возможность обесценивания денежных активов, доходов и прибыли компании в связи с ростом инфляции. Одним из методов страхования инфляционного риска является включение в состав будущего дохода инфляционной премии.

Депозитный риск: возможность досрочного отзыва депозита.

Страховой риск: предполагаемое событие, на случай наступления которого проводится страхование. Событие, рассматриваемое в качестве страхового риска, должно обладать признаками вероятности и случайности его наступления.

Ценовой риск: риск потерь из-за будущих изменений рыночной цены товара или финансового инструмента. Различают три типа ценовых рисков: валютный риск, риск ставки процента и рыночный риск.

Риск ликвидности активов: невозможность обеспечить банком выплаты денежных средств своим клиентам, вложившим средства на краткосрочной основе.

Риск разорения: вероятность больших потерь, ведущих к разорению инвестора.

3.7. Методы уменьшения риска финансовых операций

3.7.1. Диверсификация

В основе метода диверсификации (применительно к некоррелированным финансовым операциям) лежит следующее утверждение:

отношение риска (композитной) финансовой операции, состоящей из n некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной финансовой операции уменьшается.

Докажем это. Пусть доход финансовой операции $X = \sum_i X_i$, тогда $M(X) = \sum_i M(X_i) \infty n$,

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = M\left(\sum_i X_i - M\left(\sum_i X_i\right)\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_i \left(X_i - M(X_i)\right)\right)^2 = M\left(\sum_i \Delta X_i\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_i (\Delta X_i)^2 + 2\sum_{i \neq j} \Delta X_i \Delta X_j\right). \tag{3.33}$$

В силу некоррелированности финансовых операций, составляющих финансовую операцию X, $M\left(\sum_{i\neq j}\Delta X_i \Delta X_j\right)=0$, следовательно, $D(X)=M\left(\sum_i (\Delta X_i)^2\right)\infty n$, a $r(X)=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\infty\sqrt{n}$.

Отсюда следует:

$$\frac{r(X)}{M(X)}\infty\frac{\sqrt{n}}{n}\infty\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{3.34}$$

Таким образом, относительный риск композитной финансовой операции с ростом n уменьшается. При доказательстве утверждения предполагалось, что доходы финансовых операций, составляющих операцию X, являются величинами одного порядка, равно как и их риски.

К аналогичному выводу приходим, рассматривая финансовую операцию как «среднеарифметическую» нескольких некоррелированных операций [3]: $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n)/n$. В этом случае эффективность композитной операции равна $\mu=(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n)/n$, т.е. остается примерно равной эффективности отдельной операции, а ее риск $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2}/n$ и, таким образом (поскольку $r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2\infty n$, а $\sqrt{r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2}\infty\sqrt{n}$), оказывается обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n уменьшается.

Итак, при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность порядка эффективности каждой из операций, а риск уменьшается. В случае операции, равной сумме исходных операций, как было показано выше, при увеличении числа некоррелированных операций с ростом n уменьшается относительный риск.

Этот эффект называется **эффектом диверсификации.** Он означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции. (Он также известен как принцип «не класть все яйца в одну корзину».) При такой стратегии эффективность операции «среднеарифметическая» усредняется, а риск уменьшается.

Рассмотрим еще один пример *влияния масштабов диверсификации на риск композитной финансовой операции.* Пусть финансовая операция является линейной комбинацией ряда финансовых операций, а ее доход есть случайная величина $X = \sum_i a_i X_i$. Дисперсия дохода композитной финансовой операции в общем случае равна

$$D(X) = D\left(\sum_i a_i X_i\right) = \sum_i a_i^2 D(X_i) + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j. \tag{3.35}$$

Если финансовые операции некоррелированные,

$$D(X) = D\left(\sum_i a_i X_i\right) = \sum_i a_i^2 D(X_i). \tag{3.36}$$

В случае равных весов и дисперсий отдельных операций ($a_i = 1/n = \text{const}$ и $\sigma_i = \sigma = \text{const}$):

$$D(X) = a_i^2 \sum_i D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_i D(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{3.37}$$

где n — количество финансовых операций, составляющих композитную.

Для одной финансовой операции $D_1 = \sigma^2$, для двух $D_2 = \sigma^2/2$, $\sigma_2 = \sigma/\sqrt{2} = 0{,}71\sigma$, для трех $D_3 = \sigma^2/3$, $\sigma_3 = \sigma/\sqrt{3} = 0{,}58\ \sigma$.

Видно, что с увеличением количества финансовых операций, составляющих композитную и проводимых одновременно, риск композитной операции уменьшается даже при одинаковых рисках отдельных операций.

Как можно видеть из выводов всех трех примеров, требование некоррелированности операций является существенным и необходимым для уменьшения риска операции «среднеарифметическая» (или риска композитной операции). Легко показать, что если между операциями, составляющими «среднеарифметическую» (композитную), существуют положительные корреляции (коэффициенты корреляции положительны), то риск последней не уменьшается. Так, если в качестве операций, составляющих «среднеарифметическую», выбрать одинаковые операции [3], то риск «среднеарифметической» операции будет равен риску отдельной операции (в этом случае масштаб операции увеличивается в один раз, следовательно, и риск увеличивается в один раз, т.е. не меняется).

Таким образом, эффект диверсификации имеет место при отсутствии положительных корреляций (коэффициенты корреляций должны быть либо отрицательными, либо равными нулю).

Эффект диверсификации проявляется при усреднении операций, не только проводимых одновременно [3], но и осуществляемых в разных местах (усреднение в пространстве) и в разное время (усреднение во времени). Он положителен, так как эффективность усредняется, а риск уменьшается. Однако эффект диверсификации может стать несущественным, если затраты на проведение самой диверсификации (связанные с проведением большого числа операций, отслеживанием их результатов и т.д.) слишком велики. Более подробно эффект диверсификации рассмотрен в теории портфеля в главе 5.

3.7.2. Хеджирование

Для использования эффекта диверсификации композитную операцию составляют из нескольких существующих операций. Суть хеджирования (*hedge* — изгородь) состоит в подборе или специальном конструировании таких новых операций, которые при их проведении совместно с основной уменьшают риск.

При диверсификации необходимо проводить независимые (некоррелированные) операции либо отрицательно коррелированные. При хеджировании следует подбирать только операции, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Рассмотрим дисперсию финансовой операции, состоящей из двух операций [3]: основной Q_1 и вспомогательной $Q^{(2)}$. Тогда дисперсия композитной операции, равной сумме двух операций $Q^{(1)} + Q^{(2)}$, есть

$$D(Q_1 + Q_2) = r_1^2 + r_2^2 + 2\rho_{12} r_1 r_2,$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции основной и вспомогательной операций.

Видно, что дисперсия может быть меньше дисперсии основной операции только в случае, если коэффициент корреляции отрицателен. При этом должно выполняться условие

$$r_2^2 + 2\rho_{12} r_1 r_2 < 0, \text{ или } \rho_{12} < -r_2/2r_1. \tag{3.38}$$

Не всегда бывает просто подобрать вспомогательную операцию, отрицательно коррелированную с основной и нулевой эффективностью. Обычно допускается небольшая отрицательная эффективность вспомогательной операции, из-за чего эффективность композитной операции становится несколько меньше, чем основной. Насколько допустимо уменьшение эффективности композитной операции при уменьшении ее риска, зависит от отношения инвестора к соотношению эффективность — риск.

Разновидностями хеджирования являются *опционы* и *страхование.*

Опционы — вид биржевой сделки с премией, уплачиваемой за право продать или купить товар, валюту, ценную бумагу в определенном количестве по цене и в сроки, оговоренные в опционном контракте.

Страхование (*insurance*) — финансовая операция, направленная на компенсацию (в денежной форме) возможных убытков при наступлении страхового случая.

3.8. Финансовые операции в условиях неопределенности

3.8.1. Матрицы последствий и рисков

Степень неопределенности ситуации может быть различной. Если информация отсутствует, ситуация является полностью неопределенной. Если известны, скажем, вероятности различных исходов, ситуация вероятностна и лишь частично неопределенна. Рассмотрим обе ситуации и возможное поведение в них инвестора [3]. Предположим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Результат ее неясен, поэтому анализируется несколько возможных решений и их последствий. Ситуация неопределенна, известно лишь, что реализуется какой-то из рассматриваемых вариантов. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть j-я, то инвестор получит доход q_{ij}. Матрица $\|q_{ij}\|$ называется матрицей последствий (возможных решений). (Альтернативой матрице последствий, составленной из возможных доходов, является матрица последствий, составленная из возможных доходностей.) Какое решение должен принять инвестор? В этой неопределенной ситуации могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты инвестором. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Оценим риск в данной схеме. Начнем с риска, который несет i-е решение. Реальная ситуация неизвестна, но если бы инвестор ее знал, то выбрал бы наилучшее решение, которое приносит наибольший доход. Если ситуация j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т.е. принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = \|r_{ij}\|$ называется матрицей рисков.

Пример 3.4. Пусть матрица последствий есть

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу рисков, вычитая данный элемент из максимального в каждом столбце. Для максимального в каждом столбце элемента имеем:

$$q_1 = \max_i q_{i1} = 10;\ q_2 = \max_i q_{i2} = 6;\ q_3 = \max_i q_{i3} = 9;\ q_4 = \max_i q_{i4} = 8.$$

Теперь можем записать матрицу рисков как

$$R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.8.2. Принятие решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием любой дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов, реальной ситуации). Вместе с тем существуют правила-рекомендации по принятию решений и в этой ситуации [3].

3.8.2.1. Правило Вальда (правило крайнего пессимизма)

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min_j q_{ij}$ (работаем с матрицей последствий). Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $i_0 = \max_i \left(\min_j q_{ij}\right)$. Так, в нашем примере имеем $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 1$. Теперь из чисел 3, 6, 1 находим максимальное: 6. Значит, правило Вальда рекомендует принять *второе решение*.

3.8.2.2. Правило Сэвиджа (правило минимального риска)

При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = \|r_{ij}\|$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i \min_i \left(\max_j r_{ij}\right)$.

Так, в нашем примере имеем $b_1 = 7$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$. Теперь из чисел 7, 2, 8 находим минимальное: 2. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять *второе решение*.

3.8.2.3. Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i, при котором достигается максимум

$$\left[\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right],$$

где $\quad 0 \le \lambda \le 1$.

Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда; при приближении λ к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма» [3].

В нашем примере:

1. При $\lambda = {}^1/_2$ имеем

$$c_1 = \frac{1}{2}(3+6) = 4{,}5;\ \ c_2 = \frac{1}{2}(6+10) = 8;\ \ c_3 = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 8, приходим к выводу, что правило Гурвица рекомендует *второе решение*.

2. Если выбрать $\lambda = {}^1/_4$, то

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 6 = 5{,}25;\ \ c_2 = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{3}{4}\cdot 10 = 9;\ \ c_3 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 9 = 7.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 9, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

3. Если выбрать $\lambda = {}^3/_4$, получим

$$c_1 = \frac{3}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 6 = 3{,}75;\ \ c_2 = \frac{3}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 10 = 7;\ \ c_3 = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 9 = 3.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 7, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

Итак, все три правила (а правило Гурвица при всех трех значениях λ) рекомендуют *второе решение*, так что его и принимаем.

3.9. Принятие решений в условиях частичной неопределенности

Предположим, в рассматриваемой схеме известны вероятности того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Решение в такой ситуации принимается в соответствии с одним из следующих правил [3].

3.9.1. Правило максимизации среднего ожидаемого дохода

Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $p_j(q_{ij})$. Математическое ожидание $M(Q_i)$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также Q_i. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Предположим, в нашем примере вероятности есть 1/5, 4/15, 4/15, 4/15. Тогда средний ожидаемый доход при каждом решении равен

$$M(Q_1) = \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{4}{15}(4+5+6) = 4{,}6;$$

$$M(Q_2) = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{4}{15}(6+7+8) = 7{,}6;$$

$$M(Q_3) = \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{4}{15}(5+9+1) = 4{,}4.$$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7,6 и соответствует *второму решению*.

3.9.2. Правило минимизации среднего ожидаемого риска

Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения $p_j(r_{ij})$. Математическое ожидание $M(R_i)$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R}_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск. Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях:

$$M(R_1)=\frac{1}{5}\cdot 7+\frac{4}{15}(2+4+2)=3{,}5(3);$$

$$M(R_2)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{4}{15}(0+2+0)=0{,}5(3);$$

$$M(R_3)=\frac{1}{5}\cdot 8+\frac{4}{15}(1+0+7)=3{,}7(3).$$

Получаем $\bar{R}_1=3{,}5(3);\bar{R}_2=0{,}5(3);\bar{R}_3=3{,}7(3)$. Минимальный средний ожидаемый риск равен 0,5(3) и соответствует все тому же *второму решению*. Отличие частичной (вероятностной) неопределенности от полной очень существенно [3]. Конечно, принятие решений по правилам Вальда, Сэвиджа, Гурвица не является окончательным, лучшим (приведенный пример — исключение). Это только лишь первый шаг, некоторые предварительные соображения. Далее пытаются узнать что-то о вариантах реальной ситуации, прежде всего о возможности того или иного варианта, о его вероятности. Но когда мы начинаем оценивать вероятность варианта, это уже предполагает повторяемость рассматриваемой схемы принятия решений: это уже было в прошлом или это будет в будущем, или это повторяется где-то, например, в филиалах фирмы.

3.9.3. Оптимальная (по Парето) финансовая операция

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения. Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

Рассмотрим такую задачу в общем виде [3]. Пусть A — некоторое множество операций, каждая операция a имеет две числовые характеристики $E(a)$, $r(a)$ (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы E было больше, а r меньше.

Будем говорить, что операция a доминирует над операцией b, и обозначать $a > b$, если $E(a) \geq E(b)$ и $r(a) \leq r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция a называется доминирующей, а операция b — доминируемой. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди доминируемых операций. Множество этих операций называется множеством Парето, или множеством оптимальности по Парето.

На множестве Парето каждая из характеристик *E, r* — (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую. Докажем это [3]. Пусть *a, b* — две операции из множества Парето, тогда *r*(*a*), *r*(*b*) — числа. Предположим, $r(a) \le r(b)$, тогда *E*(*a*) не может быть равно *E*(*b*), так как обе точки *a*, *b* принадлежат множеству Парето. Доказано, что по характеристике *r* можно определить характеристику *E*. Так же просто доказывается, что по характеристике *E* можно определить характеристику *r*.

Продолжим анализ приведенного примера. Рассмотрим графическую иллюстрацию (рис. 3.4). Каждую операцию (решение) (*Q*, *R*) отметим точкой на плоскости — доход откладываем по оси абсцисс, а риск — по оси ординат. Получили три точки и продолжаем анализ примера. Чем выше точка (*Q*, *R*), тем более рисковая операция, чем точка правее, тем она более доходная. Значит, нужно выбирать точку ниже и правее. В нашем случае множество Парето состоит только из одной *второй операции*.

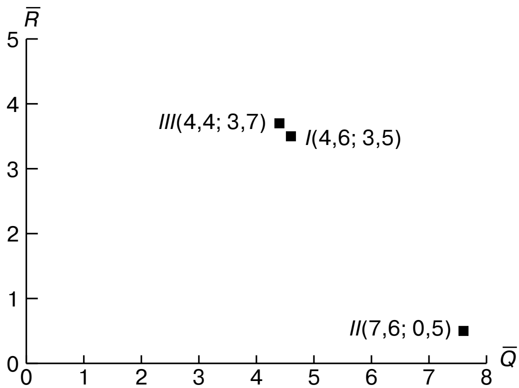

Рис. 3.4. Усредненные характеристики (*Q*, *R*) трех операций (решений)

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая выражает отношение инвестора к доходу и риску. Для операции *Q* с характеристиками $(\bar{R}, \bar{Q})$ взвешивающая формула дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию. Например, пусть взвешивающая формула есть $f(Q) = 2\bar{Q} - \bar{R}$. Это означает, что инвестор согласен на увеличение риска операции на две единицы, если доход операции увеличивается при этом не менее чем на одну единицу. Тогда для финансовых операций нашего примера имеем:

$$f(Q_1) = 2 \cdot 4{,}6 - 3{,}5 = 5{,}7;$$

$$f(Q_2) = 2 \cdot 7{,}6 - 0{,}5 = 14{,}7;$$

$$f(Q_3) = 2 \cdot 4{,}4 - 3{,}7 = 5{,}1.$$

Видно, что *вторая операция — лучшая*, а третья — худшая.

3.9.4. Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности p_j считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение дохода, доходности и риска финансовой операции.
2. Выразите доходность актива за два периода через доходности актива за каждый из периодов.
3. Выразите доходность актива за три периода в целом через доходность актива за каждый из периодов.
4. Выразите доходность актива за несколько периодов в целом через доходность актива за каждый из периодов (используйте метод математической индукции).
5. В чем состоит синергетический эффект при рассмотрении доходности актива за несколько периодов?
6. В чем состоит выделенная роль равномерного и нормального распределений?
7. Докажите, что $|\rho_{12}| \le 1$.
8. Чем измеряется коррелированность финансовых операций?
9. Приведите известные вам меры риска.
10. Перечислите виды финансовых рисков, дайте им определение и краткую характеристику.
11. Дайте определение *VaR*.
12. Перечислите известные вам методы уменьшения риска финансовых операций, дайте им определение и краткую характеристику.
13. Дайте определение диверсификации, приведите пример.

14. Дайте определение хеджирования, приведите пример.
15. Дайте определение матрицам последствий и рисков.
16. Выберите матрицу последствий размерности 3 x 4, найдите матрицу рисков и проведите полный анализ ситуации.
17. Сформулируйте алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности.
18. Сформулируйте правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Приведите примеры.
19. Сформулируйте правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Приведите пример.
20. Сформулируйте правило минимизации среднего ожидаемого риска. Приведите пример.
21. Сформулируйте правило Лапласа равновозможности. Приведите пример.

ГЛАВА 4

ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Главная цель любого инвестора — обеспечить максимальную доходность инвестиций. При реализации этой цели возникают как минимум две основные проблемы: первая — в какие активы из имеющихся и в каких пропорциях вкладывать средства? Вторая проблема заключается в том, что на практике, как известно, более высокий уровень доходности связан с более высоким риском. Поэтому инвестор может выбрать актив с высокой доходностью и большим риском или более-менее гарантированной низкой доходностью. Две описанные выше проблемы выбора и составляют проблему формирования инвестиционного портфеля, решение которой дает *теория портфеля*.

4.1. Доходность ценной бумаги и портфеля

Рынок ценных бумаг будем рассматривать как статический и исследуем его функционирование на фиксированном интервале времени, в течение которого инвестор владеет ценной бумагой, стоимость которой в начале интервала обозначим p_0, в конце интервала — p_1. Пусть d — дивиденды, выплаченные за рассматриваемый промежуток времени. Тогда **доходностью ценной бумаги** за этот интервал времени называется величина

$$r = (p_1 + d - p_0)/p_0. \tag{4.1}$$

Если не рассматривать дивиденды и другие величины, от которых зависит доходность (инфляция и т.п.), то формула (4.1) принимает максимально простой вид: $r = (p_1 - p_0)/p_0$.

Портфелем, состоящим из n видов ценных бумаг, называют вектор

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.2}$$

где x_i — ценовая доля инвестиций в ценные бумаги вида i.

Доходностью портфеля *X* называют величину

$$r_X = \frac{p_{X_1} + d_X - p_{X_0}}{p_{X_0}}, \tag{4.3}$$

где p_{X_0} — стоимость портфеля в начале периода;
p_{X_1} — стоимость портфеля в конце периода;
d_x — дивиденды, полученные по всем бумагам портфеля.

Доходность портфеля *X* выражается формулой

$$r_X = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n, \tag{4.4}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — доходности ценных бумаг, входящих в портфель *X*.

Для каждой ценной бумаги вида *i* из формулы (4.1) имеем

$$p_{i_1} = p_{i_0} + r_i p_{i_0} - d_i. \tag{4.5}$$

Умножая равенство (4.5) на множитель n_i — количество бумаг *i*-го вида в портфеле и складывая для всех *i*, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_1} + \sum_{i=1}^{n} n_i d_i = \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} + \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} r_i. \tag{4.6}$$

где $\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_1} = p_{X_1}$ — стоимость портфеля в конце периода;
$n_i p_{i_0}$ — объем инвестиций в ценные бумаги вида *i*;
$\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} = p_{X_0}$ — стоимость портфеля в начале периода;
$\sum_{i=1}^{n} n_i d_i = d_X$ — дивиденды, полученные по всем бумагам портфеля.

Следовательно,

$$p_{X_1} + d_X = p_{X_0} + \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} r_i. \tag{4.7}$$

Отсюда

$$r_X = \frac{p_{X_1} + d_X - p_{X_0}}{p_{X_0}^0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i p_{i_0}}{p_{X_0}^0} r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i,$$

что доказывает формулу (4.4).

Стоимости ценных бумаг в начале периода p_{i_0} — детерминированные величины, в то время как в конце периода они уже являются случайными величинами, поэтому и доходности отдельных ценных бумаг и доходность всего портфеля являются случайными величинами, и мы их будем обозначать заглавными буквами R_i и R_X. Математическое ожидание доходности ценной бумаги называется ее эффективностью, а математическое ожидание доходности портфеля называется **эффективностью портфеля**.

Найдем выражения для эффективности портфеля $\mu = M(R_X)$ и дисперсии или квадрата риска $\sigma^2 = D(R_X)$ доходности портфеля R_X через соответствующие характеристики ценных бумаг.

Из формулы (4.4) и из свойств математического ожидания (математическое ожидание суммы всегда равно сумме математических ожиданий, константу можно выносить за знак математического ожидания) получим формулу для ожидаемой доходности портфеля:

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n, \tag{4.8}$$

где $\mu_1 = M(R_1)$, $\mu_2 = M(R_2)$, ..., $\mu_n = M(R_n)$ — эффективности ценных бумаг (математические ожидания доходностей $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, составляющих портфель.

Обозначим через $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ — вектор эффективностей (ожидаемых доходностей) портфеля X, тогда формулу (4.8) можно записать в матричных обозначениях следующим образом:

$$\mu = \vec{\mu}^T X\cdot \tag{4.9}$$

Для вычисления квадрата риска воспользуемся формулой

$$\sigma^2 = X^T V X, \tag{4.10}$$

где V — ковариационная матрица случайных величин R_1, R_2, ..., R_n.

В дальнейшем мы будем использовать матричные обозначения. При этом все векторы будут мыслиться векторами-столбцами. Обозначим вектор, состоящий из одних единиц, через $I = (1, 1, ..., 1)^T$.

Таким образом, с каждым портфелем X связаны две величины: эффективность (ожидаемая доходность) μ и риск σ. Инвестор хотел бы иметь такой портфель, который обеспечивал бы наибольшую ожидаемую доходность при минимальном риске. Такая задача, однако, противоречива, поскольку, вообще говоря, большая ожидаемая доходность влечет за собой увеличение риска. Поэтому можно рассмотреть следующие задачи:

1) найти портфель минимального риска при заданной его эффективности (при эффективности не менее заданной, при произвольной эффективности);

2) найти портфель максимальной эффективности при минимальном риске (при риске, не превышающем данный уровень).

В следующем параграфе будет рассмотрен портфель из двух бумаг как более простой случай и подробно исследованы основные свойства такого портфеля. Их знание значительно облегчит восприятие общего портфельного анализа, проводимого в последующих параграфах, в рамках которого будут рассмотрены портфели Марковица и Тобина.

4.2. Портфель из двух бумаг

4.2.1. Необходимые сведения из теории вероятностей

Дисперсия портфеля из двух бумаг равна

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \tag{4.11}$$

риск равен

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2},$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции двух бумаг;

σ_i — риск;

x_i — ценовая доля i-бумаги.

Доходность портфеля равна

$$\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \tag{4.12}$$

где μ_i — эффективность i-бумаги.

Условие нормировки имеет вид

$$x_1 + x_2 = 1. \tag{4.13}$$

Ковариация доходностей определяется как

$$\mathrm{Cov}(r_i, r_j) = M(r_i \cdot r_j) - M(r_i) M(r_j); \tag{4.14}$$

$$\mathrm{Cov}(r_i, r_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j; \tag{4.15}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i\sigma_j}; \tag{4.16}$$

$$|\rho_{ij}| \le 1. \tag{4.17}$$

В случае независимых случайных величин (доходностей) R_i, R_j $M\left(r_i \cdot r_j\right) = M\left(r_i\right) M\left(r_j\right)$, поэтому $\mathrm{Cov}\left(r_i, r_j\right) = 0$, т.е. ковариация является мерой зависимости случайных величин.

Ковариационная матрица — матрица, элементами которой являются соответствующие ковариации ценных бумаг. Так, для портфеля из трех бумаг имеем

$$\left\|\mathrm{cov}\left(r_1, r_2\right)\right\| = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}\left(r_1, r_1\right) & \mathrm{cov}\left(r_1, r_2\right) & \mathrm{cov}\left(r_1, r_3\right) \\ \mathrm{cov}\left(r_2, r_1\right) & \mathrm{cov}\left(r_2, r_2\right) & \mathrm{cov}\left(r_2, r_3\right) \\ \mathrm{cov}\left(r_3, r_1\right) & \mathrm{cov}\left(r_3, r_2\right) & \mathrm{cov}\left(r_3, r_3\right) \end{pmatrix}; \tag{4.18}$$

$$\left\|\rho\left(r_1, r_2\right)\right\| = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_1, r_1\right)}{\sigma_1^2} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_1, r_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_1, r_3\right)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_2, r_1\right)}{\sigma_2\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_2, r_2\right)}{\sigma_2^2} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_2, r_3\right)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_3, r_1\right)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_3, r_2\right)}{\sigma_3\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_3, r_3\right)}{\sigma_3^2} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

С учетом того, что

$$\mathrm{Cov}\left(r_i, r_i\right) = M\left(r_i \cdot r_i\right) - M\left(r_i\right) M\left(r_i\right) = M\left(r_i^2\right) - M^2\left(r_i\right) = D\left(r_i\right) = \sigma_i^2,$$

получаем

$$\left\|\rho\left(r_i, r_j\right)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_1, r_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_1, r_3\right)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_2, r_1\right)}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_2, r_3\right)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_3, r_1\right)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}\left(r_3, r_2\right)}{\sigma_3\sigma_2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Пример 4.1. Дана ковариационная матрица $V = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 6 \\ -8 & 16 & -11 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти корреляционную матрицу.

По диагонали стоят дисперсии, поэтому для рисков бумаг имеем:

$$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3,\ \sigma_2 = \sqrt{16} = 4,\ \sigma_3 = \sqrt{4} = 2.$$

Далее по формуле (4.16) $\rho_{ij} = \dfrac{\mathrm{Cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ вычисляем недиагональные члены (все диагональные члены корреляционной матрицы равны 1):

$$\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-8}{3\cdot 4} = -\frac{2}{3} = \rho_{21},$$

$$\rho_{13} = \frac{\mathrm{Cov}(r_1, r_3)}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{6}{3\cdot 2} = 1 = \rho_{31},$$

$$\rho_{23} = \frac{\mathrm{Cov}(r_2, r_3)}{\sigma_2\sigma_3} = \frac{-11}{4\cdot 2} = -\frac{11}{8} = \rho_{32}.$$

Получаем следующую корреляционную матрицу

$$\left\|\rho(r_i, r_j)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{8} \\ 1 & -\frac{11}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Обратная задача нахождения ковариационной матрицы по заданной корреляционной матрице является неопределенной: она не имеет однозначного решения. Это следует из того, что в силу симметричности корреляционной матрицы заданы лишь три величины $\rho(r_1, r_2), \rho(r_1, r_3), \rho(r_2, r_3)$, что позволяет записать три уравнения:

$$\frac{\mathrm{cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \rho(r_1, r_2);\ \ \frac{\mathrm{cov}(r_1, r_3)}{\sigma_1\sigma_3} = \rho(r_1, r_3);\ \ \frac{\mathrm{cov}(r_2, r_3)}{\sigma_2\sigma_3} = \rho(r_2, r_3)$$

для шести неизвестных

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \mathrm{cov}(r_1, r_2), \mathrm{cov}(r_1, r_3), \mathrm{cov}(r_2, r_3).$$

4.2.2. Случай полной корреляции

В случае полной корреляции

$$\rho_{12} = \rho = 1. \tag{4.21}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \left(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем для риска портфеля

$$\sigma = \left|\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2\right|. \tag{4.22}$$

Поскольку все переменные неотрицательны, знак модуля можно опустить:

$$\sigma = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2. \tag{4.23}$$

Заменяя $x_1 \to 1 - t; x_2 \to t$, так что $x_1 + x_2 = 1$, получим:

$$\sigma = \sigma_1 (1 - t) + \sigma_2 t. \tag{4.24}$$

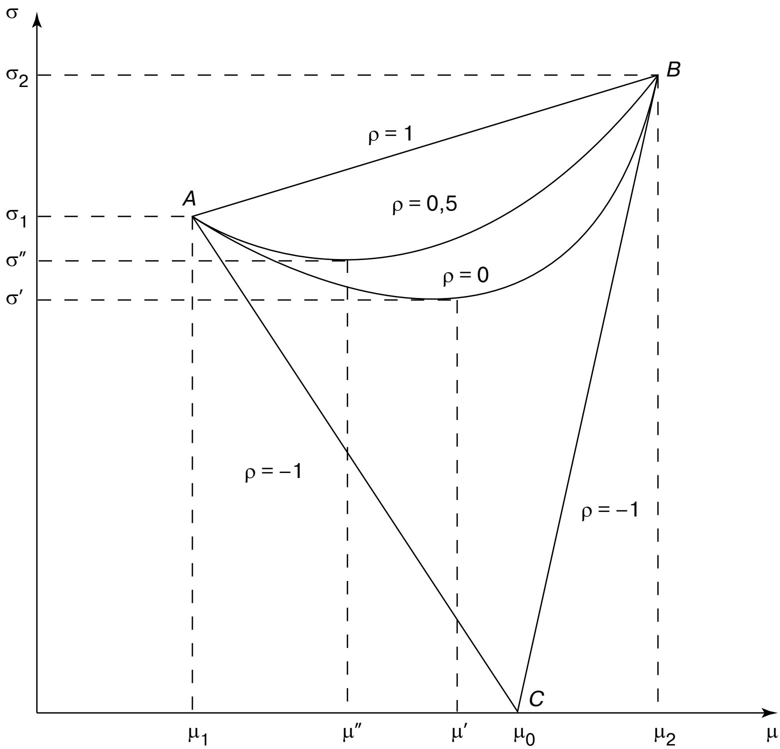

Рис. 4.1. Зависимость риска портфеля из двух бумаг от его эффективности при фиксированных параметрах обеих бумаг и увеличении коэффициента корреляции от –1 до 1.

Это уравнение отрезка (*AB*), где точки *A* и *B* имеют следующие координаты: $(\cdot)A = (\mu_1, \sigma_1); (\cdot)B = (\mu_2, \sigma_2)$. t пробегает значения от 0 до 1.

При $t = 0$ портфель находится в точке A, при $t = 1$ — в точке B. Таким образом, допустимое множество портфелей в случае полной корреляции ценных бумаг представляет собой отрезок (AB) (рис. 4.1).

Если инвестор формирует портфель минимального риска, он должен включить в него бумагу одного типа, имеющую меньший риск, в данном случае бумагу 1, и портфель в этом случае имеет вид $X = (1, 0)$. Доходность портфеля $\mu = \mu_1$.

При формировании портфеля максимальной доходности, в него необходимо включить только бумагу, имеющую большую доходность, в данном случае бумагу 2, и портфель в этом случае имеет вид $X = (0, 1)$. Доходность портфеля $\mu = \mu_2$.

4.2.3. Случай полной антикорреляции

В случае полной антикорреляции

$$\rho_{12} = \rho = -1. \tag{4.25}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем для риска портфеля

$$\sigma = \left|\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right|. \tag{4.26}$$

Допустимое множество портфелей в случае полной антикорреляции ценных бумаг представляет собой два отрезка (A, C) и (B, C) (см. рис. 4.1). При полной антикорреляции возможен портфель нулевого риска (точка $C(\mu_0, 0)$). Найдем портфель нулевого риска и его доходность.

Из (4.26) имеем:

$$\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2 = 0. \tag{4.27}$$

Подставляя в (4.27) $x_2 = 1 - x_1$, получим

$$\sigma_1 x_1 - \sigma_2 \left(1 - x_1\right) = 0;$$

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \tag{4.28}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{4.29}$$

Таким образом, портфель нулевого риска имеет вид

$$X=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right), \tag{4.30}$$

а его доходность равна

$$\mu_0=\frac{\mu_1\sigma_2+\mu_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}. \tag{4.31}$$

Отметим, что портфель нулевого риска не зависит от доходностей бумаг, а определяется только их рисками, причем ценовая доля одной бумаги пропорциональна риску другой.

Поскольку $|\rho|\le 1$, то все допустимые портфели находятся внутри ($|\rho|<1$) или на границе ($|\rho|=1$) треугольника *ABC*.

Пример 4.2. Для портфеля из двух бумаг с доходностью и риском соответственно (0,2; 0,5) и (0,4; 0,7) в случае полной антикорреляции найти портфель нулевого риска и его доходность.

Сначала по формуле (4.30) найдем портфель нулевого риска

$$X_0=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)=\left(\frac{0{,}7}{0{,}5+0{,}7},\frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}7}\right)=(0{,}583;\,0{,}417).$$

Затем по формуле (4.31) найдем его доходность

$$\mu_0=\frac{\mu_1\sigma_2+\mu_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}7}=0{,}283.$$

Как видим, доходность портфеля является промежуточной между доходностями обеих бумаг (но при этом риск нулевой!).

Можно проверить результат для доходности портфеля, вычислив его по формуле (4.8):

$$\mu=x_1\mu_1+x_2\mu_2=0{,}583\cdot 0{,}2+0{,}417\cdot 0{,}4=0{,}283.$$

4.2.4. Независимые бумаги

Для независимых бумаг

$$\rho_{12}=\rho=0. \tag{4.32}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2. \tag{4.33}$$

Найдем портфель минимального риска и его доходность и риск.

То есть необходимо минимизировать целевую функцию

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \qquad (4.34)$$

при условии

$$x_1 + x_2 = 1. \qquad (4.35)$$

Это задача на условный экстремум, которая решается с помощью функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее экстремум

$$L = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 - 1\right). \qquad (4.36)$$

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases} \qquad (4.37)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_2.$$

Далее, используя третье уравнение, имеем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2\left(1 - x_1\right).$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2},\ x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Портфель

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right), \qquad (4.38)$$

а его доходность

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \qquad (4.39)$$

Риск портфеля равен

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^4+\sigma_1^4\sigma_2^4}{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)^2}}=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}. \qquad (4.40)$$

В случае трех бумаг прямой аналогии с формулой (4.38) нет (см. параграф 4.2.5).

Пример 4.3. С помощью формулы (4.40) легко продемонстрировать влияние диверсификации на риск портфеля. Пусть портфель состоит из двух независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}1$ и $\sigma_2 = 0{,}2$ соответственно. Вычислим риск портфеля по формуле (4.40)

$$\sigma=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{\sqrt{0{,}01+0{,}04}}\approx 0{,}0894.$$

Итак, риск портфеля $\sigma\approx 0{,}0894$ оказался ниже риска каждой из бумаг (0,1; 0,2). Это и есть иллюстрация принципа диверсификации: при «размазывании» портфеля по независимым бумагам его риск уменьшается.

4.2.5. Три независимые бумаги

Хотя этот случай выходит за рамки вопроса о портфеле из двух бумаг, мы рассматриваем его здесь как обобщение случая портфеля из двух бумаг.

Для независимых бумаг

$$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0. \qquad (4.41)$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+\sigma_3^2x_3^2. \qquad (4.42)$$

Найдем портфель минимального риска, его доходность и риск. То есть необходимо минимизировать целевую функцию

$$\sigma^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+\sigma_3^2x_3^2$$

при условии

$$x_1+x_2+x_3=1. \qquad (4.43)$$

Это задача на условный экстремум решается с помощью функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее экстремум

$$L = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right). \tag{4.44}$$

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2\sigma_3^2 x_3 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{4.45}$$

Вычитая из первого уравнения второе, затем третье, получаем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_2,\ \sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_3.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} x_1,\ x_3 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} x_1. \tag{4.46}$$

Подставив (4.46) в условие нормировки

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{4.47}$$

получим

$$x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} x_1 = 1. \tag{4.48}$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}} = \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \tag{4.49}$$

Подставив полученное значение x_1 в (4.46), получим еще две компоненты портфеля

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \tag{4.50}$$

$$x_3 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \tag{4.51}$$

Портфель имеет вид

$$X=\frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_2^2\right), \tag{4.52}$$

а его доходность равна

$$\mu=\frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2+\mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2+\mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}. \tag{4.53}$$

Риск портфеля равен

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+\sigma_3^2x_3^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sigma_1^2\sigma_2^4\sigma_3^4+\sigma_2^2\sigma_1^4\sigma_3^4+\sigma_3^2\sigma_1^4\sigma_2^4\right)}{\left(\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}}. \tag{4.54}$$

Пример 4.4. Для портфеля из трех независимых бумаг с доходностью и риском соответственно (0,1; 0,4), (0,2; 0,6) и (0,4; 0,8) найти портфель минимального риска, его риск и доходность.

Портфель минимального риска имеет вид (4.52):

$$X=\frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_2^2\right)=$$

$$=\frac{\left(0{,}6^2\cdot0{,}8^2;\,0{,}4^2\cdot0{,}8^2;\,0{,}4^2\cdot0{,}6^2\right)}{0{,}6^2\cdot0{,}8^2+0{,}4^2\cdot0{,}8^2+0{,}4^2\cdot0{,}6^2}=\frac{(0{,}2304;\,0{,}1024;\,0{,}0576)}{0{,}2304+0{,}1024+0{,}0576}=$$

$$=\frac{(0{,}2304;\,0{,}1024;\,0{,}0576)}{0{,}3904}=(0{,}590;\,0{,}263;\,0{,}147).$$

Итак, $X=(0{,}590;\,0{,}263;\,0{,}147)$.

Риск портфеля минимального риска находится по формуле (4.54):

$$\sigma=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}}=\frac{0{,}4\cdot0{,}6\cdot0{,}8}{\sqrt{0{,}6^2\cdot0{,}8^2+0{,}4^2\cdot0{,}8^2+0{,}4^2\cdot0{,}6^2}}=$$

$$=\frac{0{,}192}{\sqrt{0{,}2304+0{,}1024+0{,}0576}}=\frac{0{,}192}{\sqrt{0{,}3904}}=\frac{0{,}192}{0{,}6348}=0{,}307.$$

Наконец, доходность портфеля вычисляется по формуле (4.53):

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2 + \mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2}{0{,}6^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2} =$$

$$= \frac{0{,}02304 + 0{,}02048 + 0{,}02304}{0{,}2304 + 0{,}1024 + 0{,}0576} = \frac{0{,}06656}{0{,}3904} = 0{,}1705.$$

Как видно, риск портфеля меньше риска каждой отдельной бумаги, а доходность портфеля больше доходности первой бумаги, чуть меньше доходности второй и меньше доходности третьей бумаги.

4.2.6. Безрисковая бумага

Пусть одна из двух бумаг портфеля — безрисковая. Портфель из *n*-бумаг, включающий безрисковую, носит имя Тобина, впервые исследовавшего его, и обладает свойствами, существенно отличными от свойств портфеля, состоящего только из рисковых бумаг (см. параграф 4.4). Здесь же рассмотрим, как влияет включение безрисковой ценной бумаги в портфель из двух бумаг.

Итак, мы располагаем двумя бумагами: $1(\mu_1, 0)$ и $2(\mu_2, \sigma_2)$, при этом $\mu_1 < \mu_2$ (иначе необходимо было бы формировать портфель (1,0), состоящий только из безрисковой бумаги, и у нас был бы безрисковый портфель максимальной доходности).

Имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ &\sigma = \sigma_2 x_2, \\ &x_1 + x_2 = 1. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Из них легко получить допустимое множество портфелей

$$\mu = \mu_1(1 - x_2) + \mu_2 x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2},$$

которое является отрезком

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2},\ 0 \le \sigma \le \sigma_2. \tag{4.56}$$

При $\sigma = 0$ портфель находится в точке $1(\mu_1, 0)$, а при $\sigma = \sigma_2$ — в точке $2(\mu_2, \sigma_2)$ (рис. 4.2).

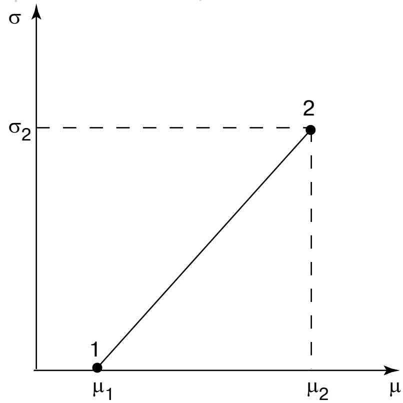

Рис. 4.2. Допустимое множество портфелей, состоящих из двух бумаг, одна из которых безрисковая

Хотя этот случай очень простой, тем не менее из него можно сделать два вывода:

1) допустимое множество портфелей не зависит от коэффициента корреляции (хотя обычно безрисковая ценная бумага считается некоррелированной с остальными (рисковыми) бумагами;

2) допустимое множество портфелей сузилось с треугольника до отрезка.

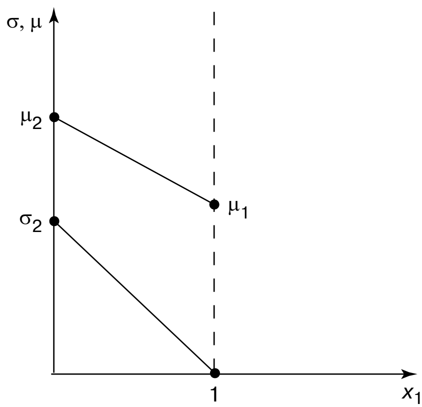

Рис. 4.3. Зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги x_1

Аналогичный эффект имеет место и в случае портфеля Тобина.

В заключение приведем зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги (рис. 4.3).

Риск портфеля линейно убывает от σ_2 при $x_1 = 0$ до нуля при $x_1 = 1$, при этом доходность также линейно убывает от μ_2 при $x_1 = 0$ до μ_1 при $x_1 = 1$.

4.2.7. Портфель заданной эффективности

В случае портфеля из двух бумаг задание эффективности портфеля либо его риска однозначно определяет портфель (за исключением случая $\mu_1 = \mu_2$, когда только задание риска портфеля однозначно определяет и сам портфель, подробнее см. ниже).

При задании эффективности портфеля он однозначно находится как решение системы

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \tag{4.57}$$

а при задании риска портфеля — как решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{4.58}$$

Поэтому в случае портфеля из двух бумаг говорить о минимальной границе (минимальном риске портфеля при заданной его эффективности) не приходится. Рассуждения по этому поводу в [4] ошибочны.

Рассмотрим первый случай, когда задана эффективность портфеля. Предположим, $\mu_1 \neq \mu_2$. Портфель однозначно находится как решение системы (4.57):

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Выразив x_2 из второго уравнения и подставив его в первое, получим:

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = x_1\mu_1 + (1 - x_1)\,\mu_2 = x_1(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2},\ x_2 = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2}. \tag{4.59}$$

Подставив данные выражения в выражение для квадрата риска портфеля, получим:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu-\mu_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(\mu_2-\mu_1)^2}. \qquad (4.60)$$

В [4] это уравнение ошибочно названо уравнением минимальной границы. На самом деле оно является уравнением (однозначной) связи риска портфеля с его эффективностью.

Лишь в случае $\mu_1 = \mu_2$, когда для всех значений x_1 и x_2 выполняется равенство $\mu = \mu_1 = \mu_2$ и допустимое множество портфелей с треугольника сужается до (вертикального) отрезка, можно говорить о минимальной границе, которая в этом случае состоит из единственной точки (μ, σ_1) (при $\sigma_1 < \sigma_2$) или (μ, σ_2) (при $\sigma_1 > \sigma_2$).

Рассмотрим разобранные выше различные предельные случаи.

1. ***Случаи полной корреляции*** ($\rho_{12} = 1$) и ***полной антикорреляции*** ($\rho_{12} = -1$).

Ввиду того что коэффициент корреляции ρ не превосходит по абсолютной величине 1, начнем исследование уравнения (4.60) для крайних значений $\rho = \pm 1$.

Вначале приведем общие соображения. Для $\rho = \pm 1$ известно, что случайные величины R_1 и R_2 линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что $R_2 = aR_1 + b$. Тогда доходность портфеля запишется следующим образом:

$$R_X = x_1R_1 + (1-x_1)R_2 = (x_1 + a(1-x_1))R_1 + (1-x_1)b.$$

Поэтому

$$\sigma^2 = (x_1 + a(1-x_1))^2\sigma_1^2,\ \mu = (x_1 + a(1-x_1))\mu_1 + (1-x_1)b.$$

После исключения параметра x_1 получим соотношение вида:

$$\sigma^2 = (c\mu + d)^2,$$

т.е. риск как функция эффективности будет иметь форму отрезка либо угла (см. рис. 4.1).

Теперь исследуем уравнение (4.60) в случаях $\rho = \pm 1$.

Случай полной корреляции ($\rho_{12} = 1$):

$$\sigma = \left|\frac{\sigma_1(\mu-\mu_2) - \sigma_2(\mu-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_1)}\right|. \qquad (4.61)$$

Случай полной антикорреляции ($\rho_{12} = -1$):

$$\sigma = \left| \frac{\sigma_1(\mu - \mu_2) + \sigma_2(\mu - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)} \right|. \tag{4.62}$$

2. ***Независимые бумаги*** ($\rho_{12} = 0$).

Уравнение (4.60) принимает вид:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu - \mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu - \mu_1)^2}{(\mu_2 - \mu_1)^2}. \tag{4.63}$$

Далее будет показано, что для промежуточных значений коэффициента корреляции ρ риск портфеля как функция его эффективности имеет вид (4.71):

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}. \tag{4.64}$$

Если найти вид зависимости риска портфеля от его эффективности для фиксированного портфеля (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2), но при различных значениях коэффициента корреляции ρ, то можно прийти к следующему заключению: при увеличении коэффициента корреляции от -1 до 1 происходит уменьшение μ_M. При этом график зависимости риска портфеля от его эффективности становится все более вытянутым по оси абсцисс, т.е. при фиксированном изменении ожидаемой доходности μ увеличение риска σ становится все меньше (см. рис. 4.1).

Если представить, что $x_1 \in [0,1]$, а значит, и $x_2 \in [0,1]$, то из первой формулы (4.57) следует, что $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ в предположении $\mu_1 < \mu_2$, так как является их выпуклой комбинацией. Портфели составляют часть границы *AMB*, а именно ее часть, соединяющую точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2) (рис. 4.1). Таким образом, в случае $n = 2$ и при дополнительном предположении $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ множество портфелей представляет собой куски гипербол или ломаных, соединяющих точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2).

4.2.8. Портфель заданного риска

Допустим, задан риск портфеля.

Портфель теперь находится как (однозначное или двузначное) решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{4.65}$$

Выразив x_2 из второго уравнения и подставив его в первое, получим:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 \left(1 - x_1^2\right) + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 \left(1 - x_1\right). \tag{4.66}$$

После элементарных преобразований получаем квадратное уравнение для x_1:

$$x_1^2\left(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) + 2\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right)x_1 + \left(\sigma_2^2 - \sigma^2\right) = 0.$$

Решая это уравнение, находим x_1-компоненту портфеля

$$x_1 = \frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \tag{4.67}$$

где

$$\begin{aligned} D &= \sigma_2^2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 - \left(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)\left(\sigma_2^2 - \sigma^2\right) = \\ &= \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2 + \rho_{12}^2\sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\sigma^2. \end{aligned}$$

Для компоненты x_2 портфеля имеем:

$$x_2 = 1 - \frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1\left(\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2\right) \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \tag{4.68}$$

Таким образом, портфель при заданном риске портфеля σ (он входит в дискриминант D) имеет вид:

$$X = \left(\frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1\left(\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2\right) \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right). \tag{4.69}$$

Рассмотрим разобранные выше различные предельные случаи.

1. ***Независимые бумаги*** ($\rho_{12} = 0$):

$$D = \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2; \tag{4.70}$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2 \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2 \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right). \tag{4.71}$$

Это не найденный выше портфель минимального риска, имеющий вид $X = \left(\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$, а портфель с риском σ.

2. ***Случай полной корреляции*** ($\rho_{12} = 1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2; \tag{4.72}$$

$$X = \left(\frac{-\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \mp \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}\right). \tag{4.73}$$

3. ***Случай полной антикорреляции*** ($\rho_{12} = -1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2; \tag{4.74}$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \mp \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}\right). \tag{4.75}$$

Отсюда легко получить портфель нулевого риска, положив $\sigma = 0$:

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right), \tag{4.76}$$

естественно, совпадающий с полученным выше другим способом.

4.3. Портфели из *n*-бумаг. Портфели Марковица

4.3.1. Портфель минимального риска при заданной его эффективности

Первая из этих задач была поставлена и решена Марковицем. Итак, рассматриваем следующую задачу: требуется найти портфель $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который минимизировал бы риск σ и обеспечивал заданную величину ожидаемой доходности μ.

В математической постановке задача выглядит следующим образом:
найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.77}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu; \tag{4.78}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.79}$$

Заметим, что числовой множитель в целевой функции введен для удобства. Ищем минимум квадрата риска, это обусловлено также техническими соображениями. Условие (4.78) обеспечивает данный уровень эффективности. Условие (4.79) следует из определения вектора X.

Если дополнительно предполагать, что вектор X состоит из неотрицательных чисел

$$X \geq 0, \tag{4.80}$$

то компоненты X можно интерпретировать как доли инвестиций, вложенные в соответствующий актив. В общем случае среди чисел x_1, x_2, ..., x_n могут встречаться отрицательные, что означает долговое обязательство.

В дальнейшем мы предполагаем, что ковариационная матрица V положительно определена, а вектор эффективностей $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ ..., \mu_n)^T$ не коллинеарен вектору I, иными словами, не все эффективности равны.

Первое предположение, в частности, означает, что ковариационная матрица невырождена и выполняется на практике для рисковых активов (акций). В частности, существует обратная матрица V^{-1}, которая также положительно определена. Случай безрискового актива будет рассмотрен позже. При нарушении второго предположения поставленная задача имеет более простое решение, которое будет указано ниже.

Обратимся к следующим константам [4]:

$$\alpha = I^T V^{-1} I,\ \beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu},\ \delta = \alpha\gamma - \beta^2. \tag{4.81}$$

Равенство для β следует из симметричности матрицы V^{-1}.

Докажем, что константы α, γ, δ положительные числа [4]. Положительность чисел α, γ следует из того, что для любой положительно определенной матрицы M и любого ненулевого вектора W число $W^T M W$ будет положительно.

Для доказательства положительности числа δ в качестве вектора W рассмотрим вектор $\alpha\vec{\mu} - \beta I$. Он ненулевой, так как, по предположению, вектор эффективностей $\vec{\mu}$ не коллинеарен вектору I. Имеем

$$(\alpha\vec{\mu} - \beta I)^T V^{-1} (\alpha\vec{\mu} - \beta I) = \alpha^2\gamma - 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 = \alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 = \alpha\delta > 0.$$

Поэтому $\delta > 0$.

Докажем, что задача нахождения оптимального портфеля с целевой функцией (4.77) при условиях (4.78)—(4.79) имеет единственное решение:

$$X = V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right),\ \lambda = \left(\gamma - \beta\mu\right)/\delta,\ \nu = \left(\alpha\mu - \beta\right)/\delta. \tag{4.82}$$

Целевая функция (4.77) является квадратичной формой с положительно определенной матрицей V. Всякая такая форма с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования приводится к виду $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$. При этом ограничения (4.78)—(4.79) превращаются в систему двух линейных уравнений относительно новых переменных y_1, y_2, ..., y_n. Пусть P — плоскость в пространстве R^n (размерности n–1 или n–2), определяемая этими ограничениями. Исходная задача сводится к нахождению в плоскости P точки, ближайшей к началу координат. Как известно, такая задача имеет единственное решение.

Чтобы найти явные формулы (4.82), воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию Лагранжа для оптимизационной задачи (4.77)—(4.79):

$$L(X,\lambda,\nu) = \frac{1}{2}X^T VX + \lambda\left(1 - I^T X\right) + \nu\left(\mu - \vec{\mu}^T X\right).$$

Приравнивая к нулю производные по X, λ, ν, получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} VX = \lambda I + \nu\vec{\mu}, \\ I^T X = 1, \\ \vec{\mu}^T X = \mu. \end{cases} \tag{4.83}$$

Выразим неизвестное X из первого уравнения

$$X = V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right) \tag{4.84}$$

и подставим во второе и третье уравнения системы

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta\nu = 1, \\ \beta\lambda + \gamma\nu = \mu. \end{cases} \tag{4.85}$$

Определитель системы (4.85) $\delta \neq 0$ (мы доказали выше, что $\delta > 0$), так что она имеет единственное решение

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta\mu}{\delta},\ \nu = \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta}. \tag{4.86}$$

Эти формулы вместе с равенством (4.84) дают решение оптимизационной задачи (4.77)—(4.79):

$$X = V^{-1}\left(\frac{\gamma-\beta\mu}{\delta}I + \frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}\vec{\mu}\right). \tag{4.87}$$

Итак, для каждого значения ожидаемой доходности μ имеется единственный портфель X, обеспечивающий минимальное значение риска $\sigma = \sigma_{\min}$, т.е. определена функция

$$\sigma = \sigma\,(\mu). \tag{4.88}$$

График функции (4.88) называют **минимальной границей**.

4.3.2. Минимальная граница и ее свойства

Далее рассмотрим решение еще двух задач о портфеле Марковица: портфеле минимального риска при эффективности не менее заданной и портфеле минимального риска при произвольной эффективности. Для их решения воспользуемся уже полученным решением задачи о портфеле Марковица минимального риска при заданной его эффективности, а также представлением о *минимальной границе*, к подробному описанию которой мы переходим.

Как уже упоминалось, график зависимости минимального риска портфеля от его эффективности, т.е. график функции (4.88), называют *минимальной границей*. Покажем, что таковая представляет собой ветвь гиперболы, уравнение которой имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}. \tag{4.89}$$

Для нахождения искомого уравнения достаточно подставить найденное решение X в выражение для σ:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= X^T V X = \left(V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right)\right)^T V\cdot V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right) = \\ &= \left(\lambda I^T + \nu\vec{\mu}^T\right)V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right) = \lambda^2\alpha + 2\lambda\nu\beta + \nu^2\gamma = \\ &= \lambda\left(\lambda\alpha + \nu\beta\right) + \nu\left(\lambda\beta + \nu\gamma\right).\end{aligned} \tag{4.90}$$

Подставляя значения для выражений в скобках из системы (4.85), имеем:

$$\sigma^2 = \lambda + \nu\mu = \frac{\gamma-\beta\mu}{\delta} + \frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}\mu = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}, \tag{4.91}$$

откуда и получаем уравнение минимальной границы. Приведем его к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, или в наших переменных $\frac{\sigma^2}{a^2}-\frac{\mu^2}{b^2}=1.$ Для этого выделим полный квадрат в правой части уравнения

$$\sigma^2=\frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right]=\frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\delta}{\alpha^2}\right]=\frac{\alpha}{\delta}\left(\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{\alpha}.$$

Каноническое уравнение минимальной границы имеет вид:

$$\alpha\sigma^2-\frac{\alpha^2}{\delta}\left(\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=1,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{a^2}-\frac{\tilde{\mu}^2}{b^2}=1, \tag{4.92}$$

где

$$a^2=1/\alpha,\ b^2=\delta/\alpha^2,\ \tilde{\mu}=\mu-\frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.93}$$

Минимальная граница представляет собой ветвь гиперболы с асимптотами $\sigma=\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right|$ и абсолютным минимумом $M\left(\frac{\beta}{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Получим уравнение асимптот, которое имеет вид: $y=\pm\frac{b}{a}x$, или в наших переменных

$$\sigma=\pm\frac{a}{b}\tilde{\mu}=\pm\frac{a}{b}\left|\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{\alpha}{\alpha\sqrt{\delta\alpha}}\left|\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu-\frac{\beta}{\alpha}\right|. \tag{4.94}$$

Нетрудно видеть, что в вырожденном случае, когда все ожидаемые доходности совпадают и равны μ, минимальная граница сводится к одной точке $M\left(\mu,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$, причем $X=\frac{1}{\alpha}V^{-1}I.$

График минимальной границы представлен на рис. 4.4. На нем AMB — минимальная граница, $M\left(\frac{\beta}{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ — точка абсолютного минимума, пунктиром обозначены асимптоты.

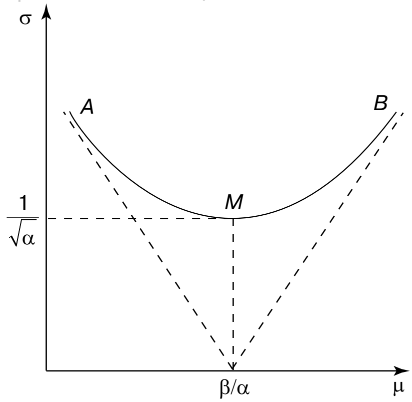

Рис. 4.4. Вид минимальной границы для портфеля Марковица

Поскольку инвестора интересует увеличение эффективности μ, то ясно, что он выберет точку на более доходной части минимальной границы, а именно на кривой *MB*, которая называется **эффективной границей**.

Пример 4.5. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$; $\mu_2 = 20\%$; $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$ и его риск. Требуется написать уравнение минимальной границы.

Заметим, что V является положительно определенной. Найдем обратную матрицу V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем константы α, β, γ, σ:

$$\alpha = I^T V^{-1} I,\ \beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu},\ \delta = \alpha\gamma - \beta^2,$$

где $I = (1, 1, 1)^T$, $\mu = (10; 20; 30)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = \frac{1}{14}(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{7},$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19,5,6)\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{235}{7},$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(10,20,30)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}(230,90,150)\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{4300}{7},$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{4300}{7}\cdot\frac{15}{7} - \left(\frac{235}{7}\right)^2 = \frac{9275}{49} = 189{,}3.$$

Найдем также константы λ и v:

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta \text{ и } \nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta,$$

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta = \left(\frac{4300}{7} - \frac{235}{7}\cdot 25\right)\Big/189{,}3 = -225/189{,}3 = -1{,}19,$$

$$\nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta = \left(\frac{15}{7}\cdot 25 - \frac{235}{7}\right)\Big/189{,}3 = 20/189{,}3 = 0{,}106.$$

Теперь определим портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$:

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1{,}19 + 0{,}106\cdot 10\\ -1{,}19 + 0{,}106\cdot 20\\ -1{,}19 + 0{,}106\cdot 30\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}13\\ 0{,}93\\ 1{,}99\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}1{,}77\\ 3{,}59\\ 8{,}76\end{pmatrix} = (0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62)^T.$$

Таким образом, портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$ равен $X = (0{,}12; 0{,}26; 0{,}62)^T$: необходимо взять 12% бумаг первого вида, 26% — второго и 62% — третьего вида.

Найдем риск портфеля

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = (0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 9 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}12\\ 0{,}26\\ 0{,}62\end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{(-0{,}14;\ 0{,}98;\ 1{,}96)\begin{pmatrix}0{,}12\\ 0{,}26\\ 0{,}62\end{pmatrix}} = \sqrt{1{,}4532} = 1{,}205.$$

Риск портфеля оказался чуть больше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 1$), но меньше риска второй ($\sigma_2 = 3$) и третьей ($\sigma_3 = 2$) бумаг. При этом его доходность (25%) на 15% больше доходности первой бумаги, на 5% больше доходности второй и лишь на 5% меньше доходности третьей бумаги.

Отметим интересный факт: доля (ценовая) второй бумаги в портфеле минимального риска оказалась выше доли первой более чем в 2 раза, притом что риск второй бумаги выше, чем риск первой, в 3 раза. Это означает, что риск портфеля в значительной степени зависит от корреляций бумаг, а не только от их индивидуальных рисков.

Запишем вид минимальной границы. По формуле (4.89)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}.$$

Подставляя сюда найденные нами значения констант α, β, γ, δ, получим

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{15}{7}\cdot\mu^2 - 2\cdot\frac{235}{7}\cdot\mu + \frac{4300}{7}}{\frac{9275}{49}}} = \sqrt{0{,}011\mu^2 - 0{,}355\mu + 3{,}245}.$$

Итак, минимальная граница имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{0{,}011\mu^2 - 0{,}355\mu + 3{,}245},$$

или

$$31{,}6\cdot\sigma = \sqrt{11\mu^2 - 355\mu + 3245}.$$

4.3.3. Портфель Марковица минимального риска с эффективностью не меньшей заданной

Наряду с задачей (1) ((4.77)—(4.79)) найдем портфель минимального риска из всех портфелей эффективности не менее заданной (задача (1')). Такой портфель назовем оптимальным портфелем Марковица.

Для этого рассмотрим оптимизационную задачу [7]:
найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.95}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X \ge \mu, \tag{4.96}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.97}$$

Из строения квадратичной функции (4.91), задающей уравнение минимальной границы, видно, что задачи (1) и (1') имеют одно и то же решение при любом $\mu \geq \mu_0 = \beta/\alpha$, а именно $\sigma_{\min} = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$, а сам портфель $X = V^{-1}\left(\dfrac{\gamma - \beta\mu}{\delta} I + \dfrac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right)$.

При $\mu \leq \beta/\alpha$ рассматриваемые задачи имеют разные решения: именно, решение задачи (1') при всех $\mu \leq \beta/\alpha$ есть одно-единственное решение задачи (1) при $\mu = \beta/\alpha$ (см. рис. 4.4). А именно

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha\mu_0^2 - 2\beta\mu_0 + \gamma}{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \tag{4.98}$$

а сам портфель

$$\begin{aligned} X &= V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta\mu_0}{\delta} I + \frac{\alpha\mu_0 - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right) = \\ &= V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta^2/\alpha}{\delta} I + \frac{\beta - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right) = \frac{1}{\alpha} V^{-1} I. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Понятно, что при $\mu \leq \beta/\alpha$ нет смысла решать задачу (1) — надо решать задачу (1') и решение этой задачи будет лучше решения задачи (1), ибо эффективность портфеля, являющегося решением задачи (1'), равна $\mu_0 = \beta/\alpha$, т.е. даже больше, чем требуется, а дисперсия равна $\sigma^2 = 1/\alpha$, т.е. даже меньше, чем у портфеля, являющегося решением задачи (1) при данном μ.

4.3.4. Портфель минимального риска

Решим еще одну оптимизационную задачу, в которой надо найти портфель минимального риска из всех возможных портфелей, т.е. портфелей любой эффективности [7].

Для этого необходимо найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2} X^T V X \to \min \tag{4.100}$$

при условии

$$I^T X = 1. \tag{4.101}$$

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L(X,\lambda)=\frac{1}{2}X^{T}VX+\lambda\left(1-I^{T}X\right). \quad (4.102)$$

Приравнивая к нулю производные по X, λ, получим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} VX=\lambda I, \\ I^{T}X=1. \end{cases} \quad (4.103)$$

Выразим неизвестное X из первого уравнения

$$X=V^{-1}\lambda I \quad (4.104)$$

и подставим во второе уравнение системы.

Получим

$$\lambda=\frac{1}{I^{T}V^{-1}I}=\frac{1}{\alpha}. \quad (4.105)$$

Для X имеем

$$X=\frac{V^{-1}I}{I^{T}V^{-1}I}. \quad (4.106)$$

Итак, портфель минимального риска есть

$$X=\frac{V^{-1}I}{I^{T}V^{-1}I}=\frac{V^{-1}I}{\alpha}. \quad (4.107)$$

Сама же минимальная дисперсия равна

$$X^{T}VX=\left(\frac{I^{T}V^{-1}}{\alpha}\right)V\left(\frac{V^{-1}I}{\alpha}\right)=\frac{I^{T}V^{-1}I}{\alpha^{2}}=\frac{1}{\alpha}. \quad (4.108)$$

Итак, обратная величина параметра α численно равна минимальной дисперсии всех портфелей.

Интересно отметить [7], что минимальная дисперсия и сам портфель минимального риска определяются исключительно матрицей V (или, точнее, V^{-1}). Однако эффективность такого портфеля зависит и от вектора $\vec{\mu}$, и она равна

$$\mu=\vec{\mu}^{T}X=\frac{\vec{\mu}^{T}V^{-1}I}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}. \quad (4.109)$$

Таким образом, эффективность портфеля минимального риска равна β/α. Отметим, что предположение $\delta > 0$ здесь не используется.

Качественно полученный результат можно получить из графика минимальной границы.

Запишем дисперсию (ковариацию) доходности портфеля в виде:

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} x_i V_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_j. \qquad (4.110)$$

Назовем величину $V_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_j$ портфельной ковариацией доходности i-й ценной бумаги. Вектор-столбец с компонентами из портфельных ковариаций, т.е. вектор VX, называется вектором портфельных ковариаций.

Характеристическое свойство портфеля минимального риска: портфель имеет минимальный риск тогда и только тогда, когда все портфельные ковариации в нем одинаковы.

Действительно [7], оптимальный портфель минимального риска есть $X = \frac{V^{-1}I}{\alpha}$, и в нем вектор портфельных ковариаций есть $R = VX = \frac{VV^{-1}I}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. Обратно: предположим, что для некоторого портфеля X все портфельные ковариации одинаковы, т.е. $VX = cI$. Тогда $X = cV^{-1}I$. Так как $I^T X = 1$, то $c = 1/\alpha$. Дисперсия такого портфеля равна $X^T VX = c^2 I^T V^{-1} VV^{-1} I = 1/\alpha$, что совпадает с наименьшим значением дисперсии портфелей.

Отметим, что характеристическое свойство портфеля минимального риска вытекает из общего свойства условного экстремума задач типа рассмотренных в данном пункте: в точке экстремума градиент целевой функции пропорционален нормальному вектору гиперплоскости, задающей линейное ограничение в форме равенства.

4.3.5. Портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Наряду с портфелями минимального риска имеет также смысл искать и портфели максимальной эффективности из некоторого множества портфелей.

Эта задача сводится к решению следующей оптимизационной задачи [7]:
найти максимум целевой функции

$$\vec{\mu}^T X \to \max \qquad (4.111)$$

при условиях

$$\frac{1}{2}X^T VX = \frac{1}{2}\sigma^2, \tag{4.112}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.113}$$

Прямой подход — составление функции Лагранжа и т.д. — не приводит к решению задачи. Поэтому предлагается следующий подход. Ранее мы получили, что для портфеля, являющегося решением задачи (1),

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu,$$

$$I^T X = 1.$$

дисперсия и эффективность связаны формулой (4.71) $\sigma^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}$.

На плоскости (μ, V) изобразим кривую (4.71). На рис. 4.5 множество портфелей заштриховано, β/α, $1/\alpha$ — эффективность и дисперсия портфеля минимального риска.

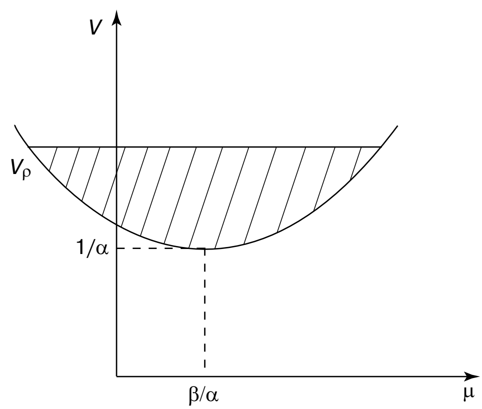

Рис. 4.5. К нахождению портфеля Марковица максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Итак, если фиксировать эффективность портфеля μ, то низшая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей вертикали, есть портфель Марковица — решение задачи (1). Если же фиксировать дисперсию портфеля V, то самая правая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей горизонтали, даст, очевидно, решение задачи (4.111)—(4.113), т.е. портфель максимальной эффективности и заданного риска.

Таким образом, решение задачи (4.111)—(4.113) можно получить следующим образом [7]:

1) вычислить константы α, β, γ, δ по формулам (4.61);

2) для заданного значения дисперсии портфеля V решить квадратное уравнение (4.71)

$$\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma = V\delta; \tag{4.114}$$

3) найти наибольший корень μ_0 этого уравнения:

$$\mu_0 = \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{4.115}$$

Его абсцисса отстоит от β/α вправо на величину $\sqrt{\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\delta}{\alpha}}$, при этом $\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)$ есть превышение задаваемой дисперсии портфеля над минимальным ее значением. Понятно, что решение задачи (4.111)—(4.113) существует только при $V \geq 1/\alpha$;

4) найти вектор X по формулам (4.62).

Теперь видно, что рассмотренная задача (4.111)—(4.113) эквивалентна формально более общей задаче — найти максимум целевой функции

$$\vec{\mu}^T X \to \max \tag{4.116}$$

при условиях

$$\frac{1}{2} X^T V X = \frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{2} V, \tag{4.117}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.118}$$

4.4. Портфели Тобина

Ситуация меняется кардинально, если на рынке есть безрисковая ценная бумага. Предполагается, что доходность безрисковой бумаги — случайная величина, не коррелированная с доходностью других — рисковых — бумаг, поэтому при наличии безрисковой бумаги в матрице ковариаций появляются нулевые строка и столбец, в силу чего рассуждения, использованные при рассмотрении портфелей Марковица, оказываются неверными. Эффективность безрисковой бумаги обозначим μ_f и будем считать ее положительной.

4.4.1. Портфель Тобина минимального риска из всех портфелей заданной эффективности

Итак, предположим, что вместе с n-рисковыми активами портфель инвестора включает безрисковую бумагу с детерминированной доходностью $\mu_f = R_f$ и долей в портфеле, составляющей x_f. При этом задача (4.57)—(4.59) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.119}$$

при условиях

$$\mu_f x_f + \vec{\mu}^T X = \mu, \tag{4.120}$$

$$x_f + I^T X = 1. \tag{4.121}$$

Выражение для квадрата риска не изменилось из-за безрисковости добавленного актива. В этом случае, впервые рассмотренном Тобиным, вид минимальной границы изменится.

Прежде всего переформулируем задачу (4.119)—(4.121). Для этого исключим переменную x_f из соотношений, умножив (4.121) на μ_f и вычтя из (4.121):

$$\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X = \mu - \mu_f. \tag{4.122}$$

Для решения задачи (4.119), (4.122) составим функцию Лагранжа и запишем для нее необходимые условия экстремума [4]:

$$L = \frac{1}{2}X^T VX - \lambda\left(\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X - \mu + \mu_f\right).$$

$$\begin{cases} VX = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)\lambda, \\ \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X = \mu - \mu_f. \end{cases} \tag{4.123}$$

Выразим X из первого уравнения системы (4.103) и подставим во второе

$$\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)\lambda = \mu - \mu_f. \tag{4.124}$$

Обозначим

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)} = \sqrt{\alpha\mu_f^2 - 2\beta\mu_f + \gamma}. \qquad (4.125)$$

Это определение корректно, поскольку векторы $\vec{\mu}$ и I не коллинеарны, а матрица V^{-1} положительно определена. Поэтому из (4.124)

$$\lambda = \frac{\mu - \mu_f}{d^2},$$

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) \qquad (4.126)$$

— искомый вектор рисковых долей, безрисковая доля находится следующим образом из соотношения (4.121):

$$x_f = 1 - I^T X = 1 - \frac{\mu - \mu_f}{d^2} I^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right). \qquad (4.127)$$

Теперь нетрудно найти уравнение минимальной границы. Для этого достаточно подставить найденное X в выражение для квадрата риска

$$\sigma^2 = \left(\frac{\mu - \mu_f}{d^2}\right)^2 \left(V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)\right)^T V V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) =$$

$$= \left(\frac{\mu - \mu_f}{d^2}\right)^2 \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \left(\frac{\mu - \mu_f}{d}\right)^2.$$

Таким образом, уравнение минимальной границы

$$\sigma^2 = \left(\frac{\mu - \mu_f}{d}\right)^2. \qquad (4.128)$$

Обычно предполагают, что ожидаемая доходность портфеля должна быть не меньше доходности безрискового актива, т.е. $\mu \geq \mu_f$. В противном случае следовало бы сформировать портфель только из него одного. Поэтому уравнение (4.128) превращается в линейное:

$$\sigma = \frac{\mu - \mu_f}{d}. \qquad (4.129)$$

Докажем, что прямая (4.129) является касательной к графику минимальной границы (4.69). Для доказательства найдем точки пересечения гиперболы (4.69) и прямой (4.129), решая совместно их уравнения, и убедимся, что такая точка одна. Приравнивая правые части (4.128) и (4.69), получим

$$\left(\frac{\mu-\mu_f}{d}\right)^2=\frac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}. \qquad (4.130)$$

Далее получим квадратное относительно μ уравнение и найдем его корни:

$$\mu^2\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)+2\mu\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)+\left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2-\gamma\right)=0. \qquad (4.131)$$

Дискриминант данного уравнения равен нулю:

$$4\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)^2-4\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)\left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2-\gamma\right)=0. \qquad (4.132)$$

Это доказывает, что прямая (4.129) является касательной к графику минимальной границы (4.69).

Найдем теперь координаты точки касания (координаты касательного портфеля):

$$\mu=\frac{-2\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)}{2\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)}=-\frac{\beta d^2-\delta\mu_f}{\delta-\alpha d^2}=$$

$$=-\frac{\alpha\left(\gamma-\beta\mu_f\right)\left(\mu_f-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left(\mu_f-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=-\frac{\left(\gamma-\beta\mu_f\right)}{\alpha\left(\mu_f-\frac{\beta}{\alpha}\right)}.$$

Итак, эффективность касательного портфеля μ_T равна:

$$\mu_T=\frac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}. \qquad (4.133)$$

Подставляя найденное значение эффективности μ_T в уравнение касательной, найдем риск касательного портфеля σ_T:

$$\sigma=\frac{\mu-\mu_f}{d}=\frac{\frac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}-\mu_f}{d}=$$

$$=\frac{\gamma-2\beta\mu_f+\alpha\mu_f^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d}{(\beta-\alpha\mu_f)}.$$

Итак, для координат касательного портфеля имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f},\ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}. \tag{4.134}$$

При этом сам касательный портфель T находится из (4.126) подстановкой $\mu = \mu_T$:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right). \tag{4.135}$$

Показать, что прямая (4.129) является касательной к графику минимальной границы (4.69), можно и геометрически (рис. 4.6). Всякий минимальный портфель является линейной комбинацией безрискового актива и рисковой части, лежащей на минимальной границе. Поэтому всякая такая точка лежит на луче FA, где точка F соответствует безрисковому активу. Из точки A можно переместиться вдоль горизонтальной оси в точку B, лежащую на касательной FT, у которой риск тот же, а доходность выше. Поэтому касательная FT является искомой минимальной границей.

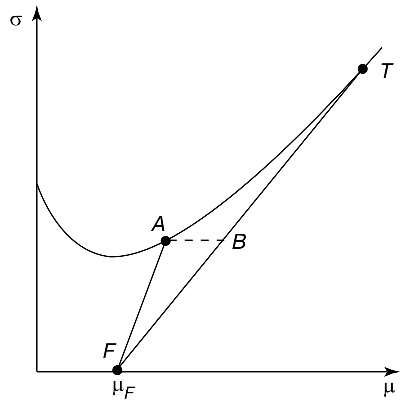

Рис. 4.6. Минимальная граница портфеля Тобина, касательный портфель

Точки минимальной границы представляются в виде линейной комбинации

$$M = \lambda F + (1 - \lambda)T,$$

причем при движении точки от F до T параметр λ меняется от 1 до 0.

Пример 4.6. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$.

Найти портфели Тобина ожидаемой доходности 10, 11, 12% и минимального риска и их риски.

Из (4.125) и (4.126) имеем для параметра d и искомого портфеля X следующие выражения:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)}, \; X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right).$$

1) $\mu = 10\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T, \mu = 10, \mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{10-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00384 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}25$.

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 10% и минимального риска имеет вид:

$$X = (0{,}5;\ 0{,}25;\ x_f = 0{,}25).$$

Риск портфеля равен:

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}5; 0{,}25)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = \sqrt{(5{,}75; 11{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = 2{,}4.$$

Риск портфеля меньше риска каждой из рисковых бумаг, которые равны $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{36} = 6$ соответственно для первой и второй бумаг;

2) $\mu = 11\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T, \mu = 11, \mu_f = 5$.

Параметр d по-прежнему равен 4,35.

Найдем портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{11-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 0{,}00461 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}1.$

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 11% и минимального риска имеет вид:

$$X = (0{,}6;\ 0{,}3;\ x_f = 0{,}1).$$

Риск портфеля равен:

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}6;\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = \sqrt{(6{,}9;\ 13{,}8)\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = 2{,}88.$$

Несмотря на увеличение требуемой доходности на 1%, риск портфеля остается меньше риска каждой из рисковых бумаг;

3) здесь $\vec{\mu} = (10;15)^T$, $\mu = 12$, $\mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5;\ 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{299}(130;\ 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{12-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 0{,}00538\begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}.$$

Сумма долей уже рисковых активов превышает единицу, поэтому сформировать портфель Тобина ожидаемой доходности 12% (и выше) и минимального риска не удается.

Пример 4.7. Для условия предыдущего примера надо найти касательный портфель, его ожидаемую доходность и риск. Итак, портфель состоит из трех ценных бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$.

Искомый касательный портфель T имеет вид (4.135):

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right),$$

а для его координат из (4.134) имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f}, \ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}.$$

Из (4.125) имеем для параметра d следующее выражение:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)},$$

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Найдем константы α, β, γ:

$$\alpha = I^T V^{-1} I, \ \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I, \ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu}.$$

Здесь $I = (1,\ 1)^T$, $\mu = (10,\ 15)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = (1,\ 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31,\ 4)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{35}{299} = 0{,}117,$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = (1,\ 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31,\ 4)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{370}{299} = 1{,}24,$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = (10,\ 15)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(285,\ 85)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{4125}{299} = 13{,}80.$$

Теперь найдем координаты касательного портфеля T:

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{13{,}8 - 1{,}24\cdot 5}{1{,}24 - 0{,}117\cdot 5} = \frac{7{,}6}{0{,}655} = 11{,}6,$$

$$\sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{\sqrt{4{,}35}}{1{,}24 - 0{,}117\cdot 5} = \frac{2{,}086}{0{,}655} = 3{,}18.$$

И, наконец, найдем касательный портфель T:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) =$$

$$= \frac{11{,}6-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00507\begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6597 \\ 0{,}3298 \end{pmatrix}.$$

Итак, касательный портфель равен $T = (0{,}66; 0{,}33)$, т.е. он включает 66% первой бумаги и 33% второй бумаги и практически не включает безрисковую бумагу.

Риск касательного портфеля ($\sigma_T = 3{,}18$) чуть выше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 3$) и почти вдвое меньше риска второй бумаги ($\sigma_2 = 6$).

Доходность касательного портфеля $\mu_T = 11{,}6\%$ является максимальной доходностью, при которой можно сформировать портфель минимального риска.

Учитывая в дополнение результаты предыдущего примера, можно сделать очевидный вывод, что с ростом доходности от 10 до 12% риск портфеля растет от 2,4% (при $\mu = 10\%$) до 2,88% (при $\mu = 11\%$) и далее до 3,18% (при $\mu = 11{,}6\%$ у касательного портфеля). А при $\mu > 11{,}6\%$ сформировать портфель минимального риска уже не удается.

4.4.2. Портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Наряду с задачей Тобина (4.119)—(4.121) рассмотрим оптимизационную задачу [7]:

$$\mu_f x_f + \vec{\mu}^T X \to \max \tag{4.136}$$

при условиях

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2} X^T V X < \frac{1}{2} V, \tag{4.137}$$

$$x_f + I^T X = 1. \tag{4.138}$$

Для решения задачи рассмотрим плоскость (μ, σ) (в переменных эффективность-риск) (рис. 4.7). На этой плоскости изобразим ломаную

$$\sigma = \left|\mu - \mu_f\right| / d,$$

где

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)} = \sqrt{\alpha\mu_f^2 - 2\beta\mu_f + \gamma}.$$

На рис. 4.7 множество портфелей для рассматриваемой ситуации заштриховано.

Итак, если фиксировать эффективность портфеля μ, то низшая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей вертикали, есть портфель Тобина — решение задачи (4.119)—(4.121). Если же фиксировать риск портфеля σ, то самая правая точка заштрихованного множества, лежащая не выше соответствующей горизонтали, т.е. в точности на ней, даст, очевидно, решение задачи (4.136)—(4.138), т.е. портфель максимальной эффективности и ограниченного риска. Из (4.129) находим

$$\mu = \mu_f + d \cdot \sigma. \tag{4.139}$$

После этого для найденного μ по формуле (4.126) определяем искомый портфель X.

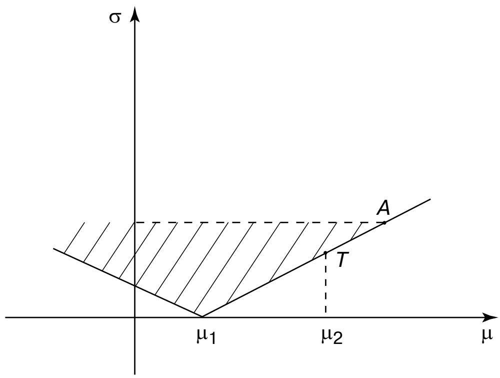

Рис. 4.7. К нахождению портфеля максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

4.5. Оптимальные неотрицательные портфели

4.5.1. Теорема Куна—Таккера

В этом разделе мы будем рассматривать только неотрицательные портфели $X \geq 0$. К условиям оптимальной задачи (4.57)—(4.59) следует добавить условие (4.60). Неотрицательность компонент портфеля означает, что их можно теперь трактовать как ценовые (стоимостные) доли инвестиций в ту или иную бумагу портфеля. При этом, однако, меняется и алгоритм решения задачи, и само решение. Условия (4.58)—(4.60) определяют выпуклый многогранник, т.е. ограниченное замкнутое множество. Решение оптимальных задач при таких условиях (наличие ограничений не только в виде равенств, но и в форме неравенств) имеет свою специфику. Эти задачи являются задачами нахождения экстремумов выпуклых (вогнутых) функций, заданных на выпуклых множествах. Решение оптимальных задач такого типа требует модификации метода, основанного на поиске экстремумов функции Лагранжа, что составляет алгоритм нахождения условных экстремумов (при наличии ограничений только в виде равенств). Такая модификация может быть произведена с помощью теоремы Куна—Таккера и связанных с ней теорем, смысл которых сводится к тому, что точка локального экстремума (и даже стационарная) выпуклой (вогнутой) функции, заданной на выпуклом множестве, является на нем точкой глобального экстремума (рис. 4.8).

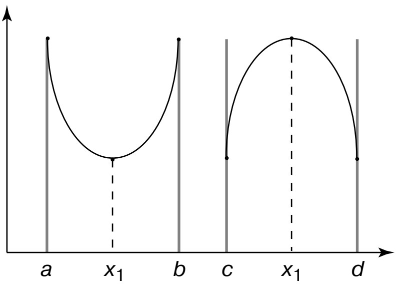

Рис. 4.8. Иллюстрация того, что точка локального экстремума (и даже стационарная) выпуклой (вогнутой) функции, заданной на выпуклом множестве, является на нем точкой глобального экстремума

Сформулируем несколько таких теорем.

1. Пусть X_0 точка локального (условного) экстремума функции $f(X)$ на выпуклом множестве M. Тогда:

a) если X_0 — точка локального минимума, а $f(X)$ — выпукла на множестве M, то X_0 — точка глобального минимума на множестве M;

b) если X_0 — точка локального максимума, а $f(X)$ — вогнута на множестве M, то X_0 — точка глобального максимума на множестве M.

2. Если функция $f(X)$ строго выпукла (строго вогнута) на выпуклом множестве M, то она может иметь не более одного экстремума на этом множестве.

3. Теорема Куна—Таккера.

Пусть выпуклое множество M задано системой ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \;\; i = 1, 2, ..., l, \\ g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \;\; j = l+1, l+2, ..., m; \end{cases} \tag{4.140}$$

f, g_1, ..., g_m — дифференцируемые и вогнутые на множестве M функции.

Тогда критерием (необходимым и достаточным условием) глобального на множестве M максимума в точке $X_0 \in M$ является существование m-мерного вектора множителей Лагранжа $\vec{\lambda}$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{aligned} &L'_{x_i}(X, \vec{\lambda}) = 0, \;\; i = 1, ..., n; \\ &\lambda_j g_j(X) = 0, \;\; j = 1, ..., l; \\ &\lambda_k \geq 0, \;\; k = 1, ..., l. \end{aligned} \tag{4.141}$$

4.5.2. Доходность неотрицательного портфеля

Докажем [4], что в неотрицательном портфеле доходность μ лежит на отрезке $[\mu_{min}, \mu_{max}]$, где μ_{min} и μ_{max} — минимальное и максимальное значения доходностей отдельных бумаг, входящих в портфель

$$\mu_{min} = \min(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n), \tag{4.142}$$

$$\mu_{max} = \max(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n),, \tag{4.143}$$

то есть, что доходность μ удовлетворяет неравенствам

$$\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max}. \tag{4.144}$$

В формуле

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n$$

все μ_i, i = 1, 2, ..., n заменим сначала на μ_{min}, затем на μ_{max} и, используя условие неотрицательности всех x_i, получим

$$\mu_{min}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \mu_{max}.$$

Отсюда

$$\mu_{\min} \le \mu \le \mu_{\max}.$$

Итак, мы доказали [4], что доходность μ неотрицательного портфеля не может быть меньше минимальной и больше максимальной доходности отдельных бумаг, входящих в портфель.

С учетом полученных ограничений на доходность μ неотрицательного портфеля задача о нахождении портфеля минимального риска с заданной доходностью (эффективностью) имеет тот же вид, что и для произвольного портфеля. В этом случае, однако, приходится накладывать на переменные требование неотрицательности. Так, задача Марковица (4.57)—(4.60) выглядит следующим образом.

Найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.145}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu,\ I^T X = 1,\ X \ge 1. \tag{4.146}$$

Это и есть классическая постановка задачи Марковица. Так как допустимое множество компактно, то искомый портфель существует. Предположим, матрица V положительно определена, тогда, учитывая строгую выпуклость целевой функции, линейность ограничения и дифференцируемость рассматриваемых функций, заключаем, что условия Куна—Таккера есть необходимые и достаточные условия условного минимума:

$$X^T V - \lambda I^T - \nu\vec{\mu}^T \ge 0,\ \left(X^T V - \lambda I^T - \vec{\mu}^T\right) X = 0,$$
$$I^T X = 1,\ \vec{\mu}^T X = \mu,\ X \ge 0. \tag{4.147}$$

Решение этой системы уравнений и неравенств в общем случае крайне сложно. При небольшом числе n ценных бумаг можно решить систему (4.147) перебором случаев.

Докажем, что задача (4.145)—(4.146) имеет решение для любого

$$\mu \in \left[\mu_{\min}, \mu_{\max}\right].$$

Докажем также, что минимальная граница есть выпуклая кривая, состоящая из конечного числа кусков гипербол [4].

Поскольку целевая функция строго выпуклая, а допустимые решения образуют выпуклый многогранник, то решение данной задачи существует, если допустимое множество непусто. Обозначим через $X_{\min}$

соответственно $X_{\max}$ портфели, соответствующие $\mu_{\min}(\mu_{\max})$. Ясно, что для любого $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ имеется единственная выпуклая комбинация $X_{\min}$ и $X_{\max}$, для которой принимается значение ожидаемой доходности μ.

Таким образом, с учетом полученных ограничений на доходность μ неотрицательного портфеля задача о нахождении портфеля минимального риска с заданной доходностью (эффективностью) имеет единственное решение.

Докажем теперь выпуклость минимальной границы [4]. Выберем два значения параметра μ: $\mu_1, \mu_2 \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, для которых имеются неотрицательные портфели X_1, X_2. Портфель $X = tX_1 + (1-t)X_2$, $t \in [0, 1]$ будет допустимым для значения $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. Теперь выпуклость минимальной границы следует из выпуклости целевой функции

$$\sigma^2(\mu) \le \sigma^2(X) \le t\sigma^2(X_1) + (1-t)\sigma^2(X_2) = t\sigma^2(\mu_1) + (1-t)\sigma^2(\mu_2). \quad (4.148)$$

Отметим, что при нахождении оптимального портфеля, как и при решении оптимальных задач линейного программирования, важную роль играют так называемые угловые точки — минимальной границы, в которых меняется ее аналитическое задание, или точки, принадлежащие отрезкам, плоскостям, для которых не существует окрестность, целиком принадлежащая данному отрезку, плоскости.

Существует алгоритм нахождения угловых точек, похожий на алгоритм симплекс-метода. Если известны все угловые точки, то исходная задача нахождения уравнения минимальной границы сводится к нескольким задачам нахождения уравнения минимальной границы для двух точек.

4.5.3. Неотрицательный портфель из двух бумаг

Как и выше, в случае произвольного портфеля, рассмотрение неотрицательного портфеля из n-бумаг начнем с простейшего случая портфеля из двух бумаг.

Рассмотрим сначала неотрицательный портфель из двух независимых бумаг:

$$\rho_{12} = \rho = 0. \quad (4.149)$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2. \quad (4.150)$$

Найдем неотрицательный портфель минимального риска и его доходность и риск. То есть необходимо минимизировать целевую функцию

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \tag{4.151}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 1, \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.152}$$

Это задача на условный экстремум, которая решается с помощью условий Куна—Таккера.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее экстремум

$$L = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 - 1\right) + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2. \tag{4.153}$$

Наличие двух последних слагаемых связано с условиями неотрицательности компонент портфеля.

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ \lambda_1 x_1 = 0; \lambda_2 x_2 = 0. \end{cases} \tag{4.154}$$

Рассмотрим различные возможности, следующие из двух последних условий (условий неотрицательности):

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В этом случае получаем такой же портфель, как и при отсутствии условий неотрицательности

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right).$$

2) $\lambda_1 = x_2 = 0$. Портфель имеет вид $X = (1,0)$.

3) $\lambda_2 = x_1 = 0$. Портфель имеет вид $X = (0,1)$.

Если изобразить полученные портфели на плоскости (x_1, x_2), легко увидеть (рис. 4.9), что точка 1 $\left(\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$ лежит на отрезке, соединяющем точки 2 и 3.

Таким образом, множество эффективных портфелей представляет собой отрезок, соединяющий точки (0,1) и (1,0).

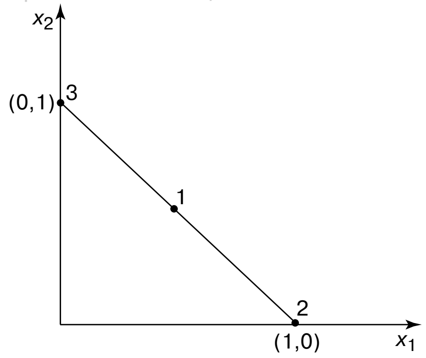

Рис. 4.9. Неотрицательный портфель из двух бумаг на плоскости (x_1, x_2)

4.5.4. Примеры неотрицательных портфелей из трех независимых бумаг

Пусть риски ценных бумаг трех видов равны

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3,$$

а их ожидаемые доходности

$$\mu_1 = 10\%, \mu_2 = 20\%, \mu_3 = 30\%.$$

Для нахождения эффективной границы необходимо найти точку глобального минимума выпуклой функции $\sigma^2(x_1, x_2, x_3)$, используя условия Куна—Таккера.

Поскольку ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, квадрат риска портфеля

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 \qquad (4.155)$$

является строго выпуклой функцией. Эффективный портфель с ожидаемой доходностью μ мы будем искать как точку минимума функции σ^2 на множестве ограничений.

Составим функцию Лагранжа:

$$L = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3) +$$
$$+\kappa(\mu - 0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3, \qquad (4.156)$$

где λ, κ, ν_1, ν_2, ν_3 — параметры.

К исходным ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = \mu, \quad (4.157)$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

добавляются условия Куна—Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda - 0{,}1\kappa + v_1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8x_2 - \lambda - 0{,}2\kappa + v_2 = 0, \quad (4.158)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 18x_3 - \lambda - 0{,}3\kappa + v_3 = 0;$$
$$\nu_i x_i = 0, \ i = 1, 2, 3;$$
$$\nu_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Данная система условий представляется достаточно сложной. Однако рассмотрение специальных случаев облегчает задачу.

1) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Из условий Куна—Таккера находим

$$X = \left(\frac{1}{2}(\lambda + 0{,}1\kappa); \frac{1}{8}(\lambda + 0{,}2\kappa); \frac{1}{18}(\lambda + 0{,}3\kappa)\right). \quad (4.159)$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} \frac{49}{72}\lambda + \frac{11}{120}\kappa = 1, \\ \frac{11}{120}\lambda + \frac{3}{200}\kappa = \mu, \end{cases} \quad (4.160)$$

находим

$$\lambda = \frac{108 - 660\mu}{13}; \quad \kappa = \frac{620 + 12100\mu}{39}. \quad (4.161)$$

Отсюда

$$X^*(\mu) =$$
$$= \left(\frac{9}{2} - \frac{55\mu}{2} + \frac{31}{39} + \frac{605\mu}{39}; \frac{9}{8} - \frac{55\mu}{8} + \frac{62}{39} + \frac{1210\mu}{39}; \ 1 - \frac{55\mu}{72} + \frac{31}{117} + \frac{605\mu}{117}\right) =$$
$$= \left(\frac{413}{78} - \frac{935\mu}{78}; \frac{847}{312} + \frac{7535\mu}{312}; \ \frac{148}{117} + \frac{37125\mu}{8424}\right). \quad (4.162)$$

Так как $X \geq 0$, то $\mu \leq 0{,}44$. На самом деле, как следует из доказанного нами, свойства доходности портфеля $\mu \leq \mu_{\max} = 0{,}3$;

2) $\nu_1 = \nu_2 = x_3 = 0$.

Из условий Куна—Таккера находим:

$$X = \left(\frac{1}{2}(\lambda + 0{,}1\kappa);\ \frac{1}{8}(\lambda + 0{,}2\kappa);\ 0\right),\ \ \nu_3 = \lambda + 0{,}3\kappa. \tag{4.163}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda + 0{,}1\kappa) + \frac{1}{8}(\lambda + 0{,}2\kappa) = 1, \\ \frac{1}{20}(\lambda + 0{,}1\kappa) + \frac{1}{40}(\lambda + 0{,}2\kappa) = \mu, \end{cases} \tag{4.164}$$

находим

$$\lambda = -120\mu + 16;\quad \kappa = 1000\mu - 120. \tag{4.165}$$

Отсюда

$$X^*(\mu) = (-10\mu + 2; 80\mu - 8;\ 0),\ \ \nu_3 = 180\mu - 20. \tag{4.166}$$

Так как $X \geq 0$, $\nu_3 \geq 0$, то $\mu \in [10\%; 20\%]$.

Рассматривая далее все остальные специальные случаи:

3) $\nu_1 = x_2 = \nu_3 = 0$;

4) $x_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$;

5) $x_1 = x_2 = \nu_3 = 0$, портфель $X = (0, 0, 1)$;

6) $x_1 = \nu_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (0, 1, 0)$;

7) $\nu_1 = x_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (1, 0, 0)$,

найдем остальные *угловые портфели*.

Далее поскольку ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, то из условий Куна—Таккера следует, что эффективное множество портфелей есть конечнозвенная ломаная в R^n, вершинами которой являются угловые портфели. Так что всякий эффективный портфель представляет собой линейную комбинацию смежных угловых портфелей.

Приведем еще один более простой пример [4]. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой

$$V = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.167}$$

а их ожидаемые доходности — равенствами:

$$\mu_1 = 3\%, \mu_2 = 6\%, \mu_3 = 9\%. \tag{4.168}$$

Найти эффективную границу.

Найдем точку глобального минимума выпуклой функции $\sigma^2(x)$, используя условия Куна—Таккера [4]. Поскольку дисперсии доходностей ценных бумаг всех трех видов одинаковы, наименее рискованный портфель — вектор

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right). \tag{4.169}$$

Ожидаемая доходность такого портфеля будет

$$\mu_0 = \frac{3+6+9}{3} = 6\%. \tag{4.170}$$

Так как ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, функция (квадрат риска портфеля)

$$\sigma_X^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 \tag{4.171}$$

строго выпуклая. Эффективный портфель с ожидаемой доходностью μ будем искать как точку минимума функции σ_X^2 на множестве ограничений. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3) + \\ + \kappa(\mu - 3x_1 - 6x_2 - 9x_3) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{aligned} \tag{4.172}$$

Эффективные портфели находятся путем исследования следующих условий.

Исходные ограничения:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = \mu, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{4.173}$$

Условия Куна—Таккера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 - \lambda - 3\kappa + v_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 - \lambda - 6\kappa + v_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 - \lambda - 9\kappa + v_3 = 0; \end{aligned} \tag{4.174}$$

$$\nu_i x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$$

$$\nu_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим специальные случаи:

1) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$

Из условий Куна—Таккера находим

$$X = (\lambda + 3\kappa; \lambda + 6\kappa; \lambda + 9\kappa). \tag{4.175}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} 3\lambda + 18\kappa = 1, \\ 18\lambda + 126\kappa = \mu. \end{cases} \tag{4.176}$$

Находим

$$\lambda = \frac{7-\mu}{3};\quad \kappa = \frac{\mu}{18} - \frac{1}{3}. \tag{4.177}$$

Отсюда

$$X^*(\mu) = \left(\frac{4}{3} - \frac{\mu}{6};\ \frac{1}{3};\ \frac{\mu}{6} - \frac{2}{3}\right). \tag{4.178}$$

Так как $X \geq 0$, то $\mu \in [4; 8]$. При этом $X^*(\mu)$ — эффективный портфель, если $\mu \geq \mu_0 = 6$.

2) $x_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$

Из условий Куна—Таккера находим

$$X = (0; \lambda + 6\kappa; \lambda + 9\kappa),\ \nu_1 = -\lambda - 3\kappa. \tag{4.179}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} 2\lambda + 15\kappa = 1, \\ 15\lambda + 117\kappa = \mu. \end{cases} \tag{4.180}$$

Находим

$$\lambda = \frac{117 - 15\mu}{9};\quad \kappa = \frac{2\mu - 15}{9}. \tag{4.181}$$

Отсюда

$$X^*(\mu) = \left(0; 3 - \frac{\mu}{3};\ \frac{\mu}{3} - 2\right),\ \nu_1 = \mu - 8. \tag{4.182}$$

Так как $X \geq 0, \nu_1 \geq 0$, то $\mu \in [8; 9]$.

Рассмотрев остальные специальные случаи, найдем все угловые портфели:

3) $x_1 = x_2 = \nu_3 = 0$, портфель $X = (0;\, 0;\, 1)$;

4) $x_1 = \nu_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (0;\, 1;\, 0)$;

5) $\nu_1 = x_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (1;\, 0;\, 0)$.

Из полученных формул ясно, что эффективные портфели образуют ломаную в R^3 с вершинами:

$$X^*(6) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad X^*(8) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad X^*(9) = (0;0;1),$$
$$X^*(3) = (1;0;0), X^*(6) = (0;1;0). \tag{4.183}$$

Эффективное множество портфелей является ломаной в R^3, проведенной через полученные точки (угловые портфели).

4.5.5. Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами

Искать портфель максимального риска на первый взгляд представляется абсурдной задачей, поскольку все инвесторы стремятся минимизировать риск портфеля. Однако рассмотрение подобной задачи может иметь смысл. Во-первых, повышение доходности портфеля, как правило, влечет за собой увеличение его риска, поэтому поиск высокоэффективных портфелей тесно связан с рассмотрением портфелей с высокими рисками. Во-вторых, венчурное инвестирование всегда подразумевает высокие риски, так что инвестирование в развитие новых технологий также связано с рассмотрением портфелей с высокими рисками. И, наконец, на практике может сложиться ситуация, когда задача о портфеле минимального риска (в отличие от портфеля максимального риска) не может быть решена либо по каким-нибудь причинам такой портфель не может быть сформирован. В этой ситуации знание структуры портфелей с высокими рисками позволит инвестору их избежать.

Итак, решим оптимизационную задачу [7]:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \max \tag{4.184}$$

при условиях

$$I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.185}$$

Так как множество рассматриваемых портфелей компактно (напомним, что число различных видов ценных бумаг конечно), то точка максимума существует. Пусть Z какая-нибудь точка максимума, $c = z_1 + z_2$, $T = \left\{(t_1, t_2, z_3, \ldots, z_n) \,/\, t_1 + t_2 = c, t_1, t_2 \geq 0\right\}$. Поскольку допустимое множество задачи выпукло, то T лежит в допустимом множестве. Выпуклая функция $\frac{1}{2}X^T VX$ на множестве T принимает наибольшее значение на одном из двух концов T, т.е. одна из переменных z_1, z_2 должна быть равна 0. Из этого рассуждения вытекает, что только одна из компонент точки Z может быть отлична от 0.

Следовательно, портфель максимального риска с неотрицательными компонентами состоит просто из бумаг максимального риска. А максимальное значение риска такого портфеля совпадает с риском бумаг максимального риска.

Полученные выводы остаются в силе и при наличии на рынке безрисковой бумаги.

4.5.6. Портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами

Для нахождения портфеля максимальной эффективности с неотрицательными компонентами необходимо решить оптимизационную задачу [7]:

$$\vec{\mu}X \to \max \tag{4.186}$$

при условиях

$$I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.187}$$

Рассматриваемая задача является задачей линейного программирования. Из теории линейного программирования известно, что в оптимальном решении задачи (4.185)—(4.187) только одна переменная может быть отлична от нуля. Следовательно, искомый портфель состоит только из бумаги наибольшей эффективности.

4.5.7. Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами

Если имеется безрисковая бумага, то портфель, составленный только из нее, есть искомый. Если безрисковой бумаги нет, то матрицу

V можно считать положительно определенной. В этом случае решим оптимизационную задачу

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.188}$$

при условиях

$$I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.189}$$

Так как допустимое множество компактно, то искомый портфель существует. Учитывая строгую выпуклость целевой функции, линейность ограничения и дифференцируемость рассматриваемых функций, заключаем, что условия Куна—Таккера дают необходимые и достаточные условия условного минимума:

$$X^T V - \lambda I^T \geq 0,\ \left(X^T V - \lambda I^T\right)X = 0,\ I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.190}$$

Решение этой системы уравнений и неравенств в общем случае крайне сложно. При небольшом числе n-ценных бумаг можно решить систему (4.190) перебором случаев.

4.5.8. Диверсификация портфеля

Диверсификация (от лат. *diversus* — разный и *facere* — делать, англ. *diversification*) в области финансов — это распределение инвестиций по разным финансовым инструментам.

Диверсификация инвестиционного портфеля — это распределение средств между различными объектами инвестирования с целью избежания серьезных потерь в случае падения цен одного или нескольких активов инвестиционного портфеля.

В параграфе 3.7.1 было сказано, что в основе метода диверсификации (применительно к некоррелированным финансовым операциям) лежит следующее утверждение (доказанное в том же параграфе): отношение риска (композитной) финансовой операции, состоящей из n некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной финансовой операции уменьшается.

Таким образом, относительный риск композитной финансовой операции с ростом n уменьшается. При доказательстве утверждения предполагалось, что доходы финансовых операций, составляющих операцию X, являются величинами одного порядка, равно как и их риски.

В том же параграфе доказано, что при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность порядка эффективности каждой из этих операций, а риск $\left(\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2} \Big/ n \propto 1\big/\sqrt{n}\right)$ оказывается обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n уменьшается.

Этот эффект называется **эффектом диверсификации** и означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом либо отрицательно коррелированные операции. (Он также известен как принцип «не класть все яйца в одну корзину».) При такой стратегии эффективность финансовой операции либо портфеля усредняется, а риск уменьшается.

В более узком смысле вопрос о диверсификации портфеля рассмотрен в [4]. Там изучен вопрос об изменении минимальной границы при пополнении портфеля Марковица новым активом. Ответ на вопрос дает следующее утверждение.

Пусть к портфелю $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ добавили ценную бумагу, так что получился портфель $\tilde{X} = \left(X, x_{n+1}\right)$. Тогда для уравнений минимальных границ $\sigma_X\left(\mu\right)$ и $\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right)$ для всех μ выполняется неравенство

$$\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right) \le \sigma_X\left(\mu\right). \tag{4.191}$$

Действительно, задача (4.77)—(4.79) для портфеля X является частным случаем аналогичной задачи для портфеля $\tilde{X}$, а именно надо положить $x_{n+1} = 0$. Отсюда следует неравенство (4.191).

Таким образом, пополнение портфеля новым активом по крайней мере не ухудшает ситуацию для инвестора, так как минимальный риск при той же доходности не увеличивается. На практике, однако, не всегда удается сформировать оптимальный портфель (портфель минимального риска), в этом случае риск портфеля при добавлении нового актива может возрасти.

В общем случае «размазывание» портфеля по большему числу некоррелированных либо отрицательно коррелированных ценных бумаг снижает риск портфеля.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение доходности ценной бумаги и портфеля.
2. Выведите формулу доходности портфеля из n-бумаг через доходности отдельных бумаг.

3. Дана ковариационная матрица $V = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 6 \\ -5 & 11 & -7 \\ 6 & -7 & 12 \end{pmatrix}$. Найдите корреляционную матрицу.
4. Данные о распределении доходностей двух бумаг A и B приведены в таблице. Найдите ковариацию и коэффициент корреляции этих бумаг.

A	–8	–1/2	7	29/2	22
B	28	19	10	1	–8
P (вероятность)	0,2	0,1	0,3	0,05	0,35

5. Портфель из двух бумаг. Случай полной корреляции.
6. Портфель из двух бумаг. Случай полной антикорреляции.
7. Дан портфель из двух независимых бумаг. Как определить портфель минимального риска и его доходность?
8. Как найти портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 10 и 15?
9. Портфель из трех независимых бумаг. Найдите портфель минимального риска и его доходность.
10. Найдите портфель минимального риска из трех независимых бумаг, дисперсии которых равны 9, 16 и 25.
11. Как найти портфель из двух независимых бумаг, одна из которых безрисковая?
12. Опишите портфели Марковица.
13. Как определить портфель минимального риска при заданной его эффективности?
14. Каковы минимальная граница и ее свойства?
15. Докажите, что уравнение минимальной границы $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$ является ветвью гиперболы. Найдите ее асимптоты.
16. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,2 и 0,4, а риски 0,3 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,2. Найти портфель минимального риска, его риск и доходность.
17. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,4, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,3. Найдите портфель минимального риска и его доходность.
18. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен $^1/_2$. Найдите портфель минимального риска и его доходность.
19. Для портфеля из двух бумаг с доходностью и риском соответственно (0,3; 0,6) и (0,5; 0,9) в случае полной антикорреляции найдите портфель нулевого риска и его доходность.

20. Портфель минимального риска с эффективностью не меньшей заданной.
21. Портфель минимального риска.
22. Портфель максимальной эффективности риска не более заданного.
23. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 5\%$; $\mu_2 = 10\%$; $\mu_3 = 15\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & -3 \\ 0 & -3 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью $\mu = 12\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.
24. Опишите портфели Тобина.
25. Найдите касательный портфель, его ожидаемую доходность и риск, если портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 7% и двух рисковых с эффективностью соответственно 12 и 20% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$.
26. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с ожидаемой доходностью 4% и двух рисковых с эффективностью соответственно 8 и 12% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите портфели Тобина ожидаемой доходности 7, 8, 10 и 11% и минимального риска и их риски.
27. Как определить портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности?
28. Как определить портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного?
29. Опишите теорему Куна—Таккера.
30. Найдите доходность неотрицательного портфеля.
31. Как определяется портфель максимального риска с неотрицательными компонентами?
32. Как найти портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами?
33. Как найти портфель минимального риска с неотрицательными компонентами?
34. Как найти портфель минимального риска, заданной эффективности с неотрицательными компонентами?

ГЛАВА 5

ОБЛИГАЦИИ

По источникам финансирования финансовые средства компании делятся на собственные, заемные, привлеченные и государственные. В качестве заемных средств, помимо кредитов, может выступать облигационный заем, или облигации, выпускаемые эмитентом для заимствования денежных средств. В качестве эмитента могут выступать государство, муниципалитет, корпорации, финансовые или коммерческие учреждения.

5.1. Основные понятия

Облигация — это ценная бумага, свидетельствующая о предоставлении ее обладателем эмитенту заем на фиксированный, обычно длительный срок, и обеспечивающая ее обладателю оговоренный доход. Этот доход обычно ниже, чем от других ценных бумаг, в то же время он более надежен и стабилен, чем, например, дивиденды по акциям, так как не зависит от колебаний коньюктуры. В связи с этим в облигации инвестируют свободные ресурсы пенсионные фонды, страховые компании, паевые инвестиционные фонды и т.д.

Облигацию характеризуют следующие параметры [4]:

— **дата погашения** ($t = T$, где T – время обращения облигации с момента выпуска);

— **срок погашения** ($n = T - \tau$, где τ – текущая дата);

— **номинальная стоимость** (N) – сумма денег, выплачиваемая владельцу облигации на дату погашения. Номинальная стоимость обычно указывается на самой облигации;

— **выкупная стоимость** (если она отличается от номинальной);

— **купонный доход** (C) – постоянные платежи, которые выплачиваются владельцу ежегодно по **купонной ставке** (норма дохода) $c = C/N$. Если выплаты по купонам не предусмотрены, то такую облигацию называют **бескупонной**. Доход по ней образуется за счет курсовой разницы стоимости облигации.

5.2. Текущая стоимость облигации

С каждой облигацией связан поток платежей, состоящий из ежегодной выплаты купонного дохода и выплаты номинальной стоимости на дату погашения. Поэтому в момент времени t можно говорить о *текущей стоимости* P облигации. Пусть r — ставка рефинансирования (процентная ставка), а до погашения облигации осталось ровно n лет. Тогда имеем [4]:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^k} + \frac{N}{(1+r)^n}. \tag{5.1}$$

Купонные платежи $C = cN$ образуют простую ренту, так что формулу (5.1) можно переписать в замкнутой форме

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}. \tag{5.2}$$

Пример 5.1. Надо найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 ден. ед., сроком погашения пять лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15% при годовой процентной ставке 20%. Имеем $N = 1000$, $n = 5$, $c = 0{,}15$, $r = 0{,}2$. Подставляя эти значения в формулу (5.2), получим:

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} =$$

$$= 150\frac{1-1{,}2^{-5}}{0{,}2} + 1000 \cdot 1{,}2^{-5} = 448{,}59 + 401{,}88 = 850{,}47 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, текущая стоимость облигации $P = 850{,}47$ ден. ед., что меньше номинальной стоимости.

5.3. Текущая доходность и доходность к погашению

Потенциальный инвестор, инвестирующий в облигации, должен сделать выбор между многими имеющимися на рынке облигациями. С этой целью он должен сравнить параметры различных облигаций, в качестве которых могут выступать различные показатели доходности, средний срок, дюрация, модифицированная дюрация, выпуклость и др. Рассмотрим основные параметры, по которым производится выбор облигаций, — показатели доходности, в качестве которых рассмотрим текущую доходность и доходность к погашению.

Купонная процентная ставка является измерителем доходности только в случае, когда облигация продается по номиналу, так что обратим внимание на текущую доходность и доходность к погашению. После выпуска облигации она поступает на рынок, где свободно продается и покупается по рыночной цене V, которая не совпадает с текущей стоимостью, рассчитанной по формулам (5.1), (5.2). При этом отношение рыночной цены облигации V к номиналу N называется **курсом облигации** (K):

$$K = \frac{V}{N} \cdot 100. \tag{5.3}$$

5.3.1. Текущая доходность облигации

Текущая доходность i-облигации равна отношению купонных выплат

$$cN = C \tag{5.4}$$

к рыночной цене облигации V:

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{C}{V}. \tag{5.5}$$

Пример 5.2. Пусть курс облигации равен 105, купонный доход 15%. Требуется найти текущую доходность облигации. Подставив в (5.5) $V = KN/100$, получим:

$$i = 100c/K = 15/105 = 0{,}14285 = 14{,}285\%.$$

Таким образом, текущая доходность облигации равна 14,285%.

Отметим, что если купонные выплаты производятся p-раз в году по ставке c/p, то и в этом случае текущая доходность облигации рассчитывается по формуле (5.5). Из нее следует, что если облигация куплена с дисконтом ($V < N$), то текущая доходность облигации больше купонной ставки ($i > c$), если же облигация куплена с премией $V > N$, то текущая доходность облигации меньше купонной ставки ($i < c$).

Если купонные выплаты (купонный доход) изменяются во времени и известны их величины, то можно найти среднюю текущую доходность облигации [8]:

$$\overline{i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{n} \frac{N}{V}. \tag{5.6}$$

Если по условиям эмиссии облигаций предусмотрен постоянный относительный прирост купонных выплат (купонного дохода) q, то купонные выплаты образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q: c, cq, cq^2, ...

Вычислив сумму n-членов геометрической прогрессии по формуле

$$S_n = c\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{5.7}$$

получим выражение для средней купонной ставки

$$\overline{c} = c\frac{1-q^n}{1-q}\cdot\frac{1}{n}. \tag{5.8}$$

При этом текущая доходность таких облигаций равна

$$\overline{i} = \overline{c}\frac{N}{V}. \tag{5.9}$$

5.3.2. Доходность к погашению

Текущая доходность с точки зрения оценки эффективности инвестирования в облигации имеет существенный недостаток, поскольку не учитывает вторую часть дохода по облигациям — изменение стоимости облигации к концу ее срока. Поэтому достаточно сказать, что облигации с нулевым купонным доходом, текущая доходность которых равна нулю, зачастую оказываются весьма выгодными для инвестора при учете всего срока их жизни.

Более важным показателем является доходность к погашению ρ. Эта величина служит заменой процентной ставки r в ситуации, когда текущая стоимость P облигации не совпадает с ее рыночной стоимостью V.

Если известны рыночная цена облигации V, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению определяют как решение уравнения [4]:

$$V = \sum_{k=1}^{n}\frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n}. \tag{5.10}$$

Суммируя геометрическую прогрессию в первом слагаемом с $a_1 = \frac{1}{(1+\rho)}$, $q = \frac{1}{(1+\rho)}$, получим эквивалентное уравнение для ρ:

$$V = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{5.11}$$

Проблема существования и единственности такого решения решается так же, как в случае определения внутренней нормы доходности потока платежей специального вида [4]. А именно из формулы (5.10) видно, что правая часть является убывающей функцией от аргумента $\rho > -1$, принимающей любые положительные значения, так что для любого $V > 0$ имеется единственное решение уравнения (5.10).

При больших значениях n для нахождения доходности к погашению используют приближенные формулы. В [4] приведена одна из таких формул:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)}. \tag{5.12}$$

Поделив обе части уравнения (5.11) на N, получим

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}. \tag{5.13}$$

Для вывода формулы (5.12) воспользуемся разложением в ряд

$$\frac{n\rho}{1-(1+\rho)^{-n}} = 1 + \frac{n+1}{2}\rho + \frac{n^2-1}{12}\rho^2 + \dots . \tag{5.14}$$

Формулу (5.13) перепишем в виде:

$$\frac{K-1}{n}\cdot\frac{n\rho}{1-(1+\rho)^{-n}} = c-\rho. \tag{5.15}$$

Подставим формулу (5.14) в (5.15), ограничившись только линейной частью разложения. Получим

$$\frac{K-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{2}\rho\right) = c-\rho,$$

откуда

$$\rho = \frac{2(cn+1-K)}{K-1+(K+1)n}. \tag{5.16}$$

Для уточнения приближенных формул используют стандартные методы, например метод касательных Ньютона.

Можно показать, что если рыночная цена больше номинальной стоимости, то доходность к погашению меньше купонной ставки. Оказывается, что в общем случае выполняются следующие утверждения [4]:

1) рыночная цена облигации равна ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению равна купонной ставке;

2) рыночная цена облигации больше ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению меньше купонной ставки;

3) рыночная цена облигации меньше ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению больше купонной ставки.

Доказательство следует из того факта, что функция $V = V(\rho)$ является убывающей в своей области определения, и все три утверждения следуют из равенства $V(c) = N$, которое непосредственно вытекает из формулы (5.11).

Пример 5.3. Как определить доходность к погашению облигации со сроком обращения восемь лет, номинальной стоимостью 3000 ден. ед. и купонной ставкой 8%, если: 1) она продается за 3000 ден. ед.; 2) ее рыночная цена увеличится на 10%; 3) уменьшится на 5%?

В первом случае облигация продается по номиналу, поэтому доходность к погашению равна купонной ставке $\rho = 8\%$.

Во втором случае облигация продается с премией за 3300 ден. ед., поэтому надо ожидать, что доходность к погашению упадет ниже 10%. Действительно, в этом случае $K = 1{,}1$, так что вычисления по формуле (5.12) дают следующее приближенное значение:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-1{,}1)}{1{,}1-1+8(1+1{,}1)} = \frac{1{,}08}{16{,}9} = 0{,}0639 = 6{,}39\%.$$

В третьем случае облигация продается с дисконтом за 2850 ден. ед., поэтому согласно теореме доходность должна быть больше 8%. В этом случае $K = 0{,}95$.

Вычисления дают в этом случае $\rho = 8{,}87\%$.

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-0{,}95)}{0{,}95-1+8(1+0{,}95)} = \frac{1{,}38}{15{,}55} = 0{,}0887 = 8{,}87\%.$$

Заметим, что в рассмотренных случаях изменения доходности пропорциональны изменениям курса облигации $\frac{10\%}{5\%} \approx \frac{1{,}61\%}{0{,}87\%}$ $(2 \approx 1{,}85)$. Этот факт мы обсудим в следующих параграфах.

5.4. Зависимость доходности к погашению облигации от параметров

Исследуем [4] зависимость доходности к погашению облигации от параметров, входящих в формулу (5.13):

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}, \tag{5.17}$$

где $K = \dfrac{V}{N}$ – курс акции.

Заметим, что $K = 1$, если облигация продается по номиналу, $K < 1$, если облигация продается с дисконтом, и $K > 1$, если облигация продается с премией.

Докажем, что если доходность облигации ρ не меняется в течение времени ее обращения, то величина дисконта или премии уменьшается при уменьшении срока ее обращения n. Формулу (5.17) перепишем в виде:

$$K = \frac{c + (\rho - c)(1+\rho)^{-n}}{\rho}. \tag{5.18}$$

Тогда при $\rho > c$ функция $K = K(n)$ убывает, так что при уменьшении n величина K увеличивается, а величина дисконта, равная $N - V = N(1 - K)$, уменьшается. Аналогично, при $\rho < c$ функция $K = K(n)$ возрастает, так что при уменьшении n величина K уменьшается, а величина премии, равная $V - N = N(K - 1)$, уменьшается. При данных условиях цена облигации с уменьшением срока ее обращения приближается к номинальной.

На рисунке 5.1 приведены графики зависимостей $K = K(n)$ для двух n-летних облигаций с одинаковым номиналом и одинаковой купонной ставкой. При этом доходность одной облигации (с дисконтом, см. нижний график) больше доходности второй (с премией, см. верхний график). На оси абсцисс указана временна́я шкала.

Пример 5.4. Требуется найти изменение дисконта облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$ ден. ед., купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при продаже ее в настоящий момент и через год.

Дисконт I (разность между номиналом N и текущей рыночной стоимостью облигации V) при продаже ее в настоящий момент равен $I_1 = N - V_1$.

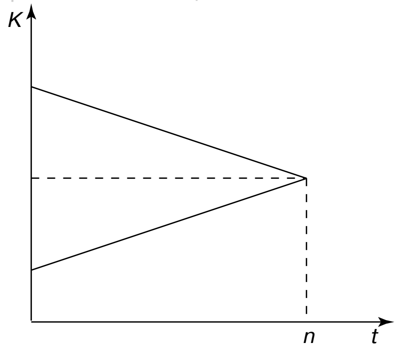

Рис. 5.1. Графики зависимостей $K = K(n)$ для двух n-летних облигаций с одинаковыми номиналом и купонной ставкой [4]

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 по формуле (5.11):

$$V_1 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-7} =$$

$$= 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16.$$

Дисконт I при продаже облигации через год равен $I_2 = N - V_2$.

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации V_2 через год по той же формуле (5.11):

$$V_2 = 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-6} =$$
$$= 1742{,}10 + 2822{,}37 = 4564{,}47 \text{ ден. ед.}$$

Теперь найдем величины дисконтов:

$$I_1 = N - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84 \text{ ден. ед.},$$

$$I_2 = N - V_2 = 5000 - 4564{,}47 = 435{,}53 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, дисконт уменьшился с 486,84 до 435,53 ден. ед.

Докажем, что если доходность к погашению облигации не меняется в течение времени ее обращения, то величины дисконта или премии будут уменьшаться тем быстрее, чем меньше срок обращения [4].

Из математического анализа известно, что утверждение теоремы эквивалентно вогнутости функции $|V-N|$ или неравенству $|V-N|''_n<0.$ Иными словами, график $V(n)$ имеет форму, показанную на рис. 5.1. Для доказательства запишем формулу (5.11) в форме

$$V-N=N\left(\frac{c}{\rho}-1+\left(1-\frac{c}{\rho}\right)(1+\rho)^{-n}\right). \tag{5.19}$$

Тогда

$$(V-N)''_n=N\left(1-\frac{c}{\rho}\right)(1+\rho)^{-n}\ln^2(1+\rho). \tag{5.20}$$

Если облигация продается с премией, т.е. $\rho < c$, то $V > N$ и $|V-N| = V-N$. Тогда из формулы (5.20) видно, что $(V-N)''_n<0$. Если же облигация продается с дисконтом, т.е. $\rho > c$, то $V < N$ и $|V-N| = N-V$. В этом случае также $(N-V)''_n<0$.

Докажем, что уменьшение доходности облигации приведет к росту ее рыночной цены на величину большую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину [4].

Речь идет о характере зависимости убывающей функции $V = V(\rho)$. Фиксируем доходность к погашению ρ и отступим от выбранного значения на величину $\Delta\rho>0$ влево и вправо. При изменении доходности к погашению изменится и цена облигации. Положим,

$$\Delta V_1=V(\rho-\Delta\rho)-V(\rho)>0,$$

$$\Delta V_2=V(\rho)-V(\rho+\Delta\rho)>0.$$

Теорема утверждает, что выполняется неравенство

$$\Delta V_1>\Delta V_2. \tag{5.21}$$

Утверждение теоремы следует из выпуклости функции $V = V(\rho)$, а это свойство непосредственно вытекает из вида функции (5.10).

Пример 5.5. Найти изменение текущей рыночной стоимости облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$ ден. ед., купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при увеличении и уменьшении доходности к погашению на 2%.

1. Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_0 по формуле (5.11) (см. пример 5.4):

$$V_0 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-7} =$$

$$= 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16 \text{ ден. ед.}$$

2. Определим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 при увеличении доходности к погашению на 2% по формуле (5.11):

$$V_1 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} + 5000(1+0{,}12)^{-7} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} + 5000(1+0{,}12)^{-7} =$$

$$= 1825{,}50 + 2261{,}75 = 4087{,}25 \text{ ден. ед.}$$

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = 4087{,}25 - 4513{,}16 = -425{,}91 \text{ ден. ед.}$$

Итак, при увеличении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 425,91 ден. ед.

3. Вычислим теперь текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_2 при уменьшении доходности к погашению на 2% по той же формуле (5.11):

$$V_2 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}08)^{-7}}{0{,}08} + 5000(1+0{,}08)^{-7} =$$

$$= 2082{,}55 + 2917{,}45 = 5000 \text{ ден. ед.}$$

Этот результат можно было предсказать, поскольку при уменьшении доходности к погашению на 2% она стала равной купонной ставке, а при этом рыночная стоимость облигации становится равной номинальной.

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации:

$$\Delta V_2 = V_0 - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84 \text{ ден. ед.}$$

Итак, при уменьшении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 486,84 ден. ед.

Отметим, что в соответствии с доказанным выше утверждением уменьшение доходности облигации привело к росту ее рыночной цены на величину (486,84) бóльшую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину (425,91).

Следующее утверждение показывает зависимость относительного изменения цены облигации от купонной ставки. Докажем, что относительное изменение цены облигации (в %) в результате изменения доходности к погашению будет тем меньше, чем выше купонная ставка [4]. Формулу (5.11) для цены облигации запишем в виде:

$$P(c) = N(ac + b), \tag{5.22}$$

где $a = \dfrac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} > 0$, $b = (1 + \rho)^{-n} > 0$. $c = (1 + \rho)^{-n} > 0$

Дифференцируя (5.22) по c, получим

$$dP(c) = Nadc. \tag{5.23}$$

Заменив приращение функции дифференциалом и поделив (5.23) на (5.22), относительное приращение цены облигации запишем в виде:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{Na\Delta c}{N(ac+b)} = \frac{a\Delta c}{ac+b}. \tag{5.24}$$

Теперь утверждение следует из того, что $\dfrac{a}{ac+b}$ – убывающая функция от аргумента c при положительных значениях a, b.

5.5. Дополнительные характеристики облигации

5.5.1. Средний срок поступления дохода

Кроме доходности облигации необходимо также уметь оценивать ее риск, связанный со сроком облигации: чем больше срок до погашения, тем выше риск. Помимо непосредственно сроков надо учитывать распределение доходов во времени. Для такого рода оценки облигации вводят средний срок поступления дохода от облигации, исследуемый в данном параграфе [8].

Средний срок поступления дохода — это средняя взвешенная величина всех видов поступлений (доходов) от облигации. В качестве весов берутся суммы поступлений (доходов). Отметим, что *средний срок поступления дохода от облигации* отличается от *среднего срока жизни облигации*, который усредняет только сроки оплаты номинала облигаций (допускающих досрочное погашение), но не учитывает сроки выплат купонного дохода. Средний срок жизни облигации (t) определяется по формуле

$$\overline{t} = \sum_{i=1}^{k} x_i t_i, \tag{5.25}$$

где k – количество серий;

x_i – последовательные доли погашения облигаций, $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$. (5.26)

Средний срок поступления дохода от облигации (T) находим следующим образом:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}, \tag{5.27}$$

где S_i – сумма дохода;

n – срок облигации;

t_i – сроки поступления купонных доходов.

Расчет по формуле (5.27) можно упростить.

Сумма купонного дохода и номинала, стоящая в знаменателе, равна:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = cNn + N. \tag{5.28}$$

Сумма сроков, взвешенных по величине доходов, стоящая в числителе, равна

$$\sum_{i=1}^{n} t_i S_i = cN \sum_{i=1}^{n} t_i + nN. \tag{5.29}$$

$$T = \frac{cN \sum_{i=1}^{n} t_i + nN}{cNn + N}. \tag{5.30}$$

В случае $t_i = 1, 2, ..., n$ $\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Разделив числитель и знаменатель (5.30) на nN, получим

$$T = \frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}}. \tag{5.31}$$

Отметим, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала. При этом чем больше купонный доход, тем меньше средний срок. Докажем последнее утверждение. Пусть $c_2 > c_1$, срок облигации равен n, покажем, что $T_1 > T_2$ при $n > 1$.

Из (5.31) имеем

$$T_1 = \frac{\frac{c_1(n+1)}{2}+1}{c_1+\frac{1}{n}} > \frac{\frac{c_2(n+1)}{2}+1}{c_2+\frac{1}{n}} = T_2.$$

$$\left[\frac{c_1(n+1)}{2}+1\right]\left[c_2+\frac{1}{n}\right] > \left[\frac{c_2(n+1)}{2}+1\right]\left[c_1+\frac{1}{n}\right].$$

Раскрывая скобки, получим

$$\frac{c_1c_2(n+1)}{2}+c_2+\frac{c_1(n+1)}{2n}+\frac{1}{n} > \frac{c_1c_2(n+1)}{2}+c_1+\frac{c_2(n+1)}{2n}+\frac{1}{n},$$

или

$$c_2+\frac{c_1(n+1)}{2n} > c_1+\frac{c_2(n+1)}{2n}.$$

Далее имеем

$$c_2-c_1 > \frac{(c_2-c_1)(n+1)}{2n},$$

или, сокращая на $(c_2 - c_1) > 0$,

$$1 > \frac{n+1}{2n},$$

откуда имеем

$$2n > n + 1, n > 1.$$

Итак, доказано [8], что при сроке жизни облигации более года средний срок поступления дохода уменьшается с ростом купонного дохода облигации. К тому же у облигаций с купонным доходом $T < n$, а у бескупонных облигаций или выплатой процентов в конце срока $T < n$. Облигации с последовательным погашением номиналов (например, серийные) имеют меньший средний срок, чем облигации с погашением в конце срока.

Пусть теперь купоны оплачиваются p-раз в году. Тогда для суммы сроков платежей имеем [8]:

$$\sum_{i=1}^{np} t_i = \frac{np\left(n + 1/p\right)}{2}, \tag{5.32}$$

где n — срок облигации в годах;

$t_i = 1/p,\ 2/p, \ldots, n.$

Средний срок поступления дохода от облигации вместо формулы (5.31) определяется выражением

$$T = \frac{\dfrac{c\left(n + 1/p\right)}{p} + 1}{c + \dfrac{1}{n}}. \tag{5.33}$$

Увеличение кратности выплаты процентов по облигации снижает средний срок поступления дохода от облигации.

В заключение поясним смысл введенного понятия «средний срок поступления дохода от облигации». Он дает тот момент времени общего срока облигации, при котором суммы кредитных услуг (кредитная услуга — произведение суммы кредита на его срок) равны между собой до этого момента и после. Чем меньше средний срок, тем скорее владелец облигации получает от нее отдачу и, следовательно, тем меньше риск.

5.5.2. Дюрация облигации

Введенное выше понятие среднего срока поступления дохода от облигации имеет тот очевидный недостаток, что в нем игнорируется временна́я стоимость денег. Этот недостаток отсутствует в другой величине, учитывающей не размеры доходов, а их дисконтированные величины. Эта величина носит название дюрации.

Рассмотрим вначале общую ситуацию [4]. Пусть имеется поток платежей

$$\{(t_1, R_1), (t_2, R_2), \ldots, (t_n, R_n)\}, \tag{5.34}$$

так что можно говорить о текущей стоимости P потока (5.34) относительно процентной ставки y:

$$P(y)=\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}. \tag{5.35}$$

Продифференцируем функцию (5.35) по аргументу y:

$$P'(y)=-\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k-1} = -\frac{1}{1+y}\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} \tag{5.36}$$

и разделим обе части равенства (5.36) на $P(y)$. Получим соотношение

$$\frac{P'(y)}{P(y)}=-\frac{1}{1+y}\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}}=-\frac{1}{1+y}\sum_{k=1}^{n} w_k t_k; \tag{5.37}$$

$$w_k=\frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}}=\frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{P} \tag{5.38}$$

— весовые коэффициенты, определяющие вес каждого платежа R_k в текущей стоимости всего потока (5.34). Сумма всех весовых коэффициентов равна единице

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1. \tag{5.39}$$

Маколей ввел новое понятие — «дюрация (дюрация Маколея) потока платежей». **Дюрацией** потока платежей (5.39) называют величину

$$D=\sum_{k=1}^{n} w_k t_k. \tag{5.40}$$

Мы будем рассматривать в дальнейшем положительные потоки платежей. В этом случае все весовые коэффициенты w_k — положительные числа, сумма которых равна единице. Поэтому дюрация — это центр тяжести платежей на временно́й шкале (рис. 5.2).

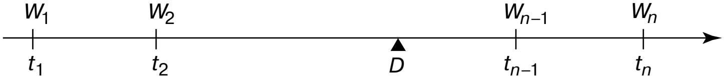

Рис. 5.2. Дюрация как центр тяжести платежей на временно́й шкале

Пример 5.6. Надо найти дюрацию потока платежей {(100, 1), (200, 2), (300, 3), (400, 4)} при процентной ставке $y = 12\%$.

Приведем поток к начальному моменту времени:

$$P = 100 \cdot 1{,}12^{-1} + 200 \cdot 1{,}12^{-2} + 300 \cdot 1{,}12^{-3} + 400 \cdot 1{,}12^{-4} =$$
$$= 89{,}29 + 159{,}44 + 213{,}53 + 254{,}21 = 716{,}47.$$

Далее найдем весовые коэффициенты по формуле (5.38)

$$w_k = \frac{R_k(1+y)^{-t_k}}{P},$$

$$w_1 = \frac{100 \cdot 1{,}12^{-1}}{716{,}47} = 0{,}125,\ w_2 = \frac{200 \cdot 1{,}12^{-2}}{716{,}47} = 0{,}223,$$

$$w_3 = \frac{300 \cdot 1{,}12^{-3}}{716{,}47} = 0{,}298,\ w_4 = \frac{400 \cdot 1{,}12^{-4}}{716{,}47} = 0{,}355.$$

Легко проверить, что сумма всех весов равна единице:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1.$$

Теперь по формуле (5.40) найдем

$$D = \sum_{k=1}^{4} w_k t_k = 0{,}125 \cdot 1 + 0{,}223 \cdot 2 + 0{,}298 \cdot 3 + 0{,}355 \cdot 4 = 2{,}885.$$

5.5.3. Свойства дюрации

Рассмотрим некоторые свойства дюрации для положительных потоков платежей [4].

1. Если $n = 1$, то $D = t_n$.Если $n > 1$, то $D < t_n$.
2. Выполняется соотношение

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{D}{1+y} = -MD. \qquad (5.41)$$

Эта формула является одной из основных формул, связанных с дюрацией. Она показывает, что дюрация, точнее, модифицированная дюрация $MD = D/1 + y$ определяет чувствительность цены облигации к изменению уровня процентной ставки на рынке. В этом состоит основная ценность данного показателя. Модифицированная дюрация для облигации с выплатами купонного дохода p-раз в году равна $MD = \dfrac{D}{1 + y/p}$.

3. $D = D(y)$ – убывающая функция от процентной ставки y.

Первое свойство очевидно, второе есть непосредственное следствие равенства (5.37), для доказательства третьего свойства найдем производную дюрации из формулы

$$D(y)=\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}};$$

$$D'(y)=$$

$$=\frac{-\sum_{k=1}^{n} t_k^2 R_k (1+y)^{-t_k-1}\cdot\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}+\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}\cdot\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k-1}}{P^2}=$$

$$=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}\right)^2-\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}\cdot\sum_{k=1}^{n} t_k^2 R_k (1+y)^{-t_k}}{(1+y)P^2}.$$

Нужный результат получается из следующего утверждения: для любой последовательности $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right)^2 < \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} t_k^2 a_k. \qquad (5.42)$$

Для доказательства достаточно применить неравенство Коши—Буняковского:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2 \le (\vec{a},\vec{a})\cdot\left(\vec{b},\vec{b}\right),$$

если положить $\vec{a}=\left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)$, $\vec{b}=\left(t_1\sqrt{a_1}, \ldots, t_n\sqrt{a_n}\right)$. Неравенство строгое, поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Положим $a_k = R_k(1 + y)^{-k}$ и применим (5.42). В выражении для производной $D'(y)$ числитель имеет отрицательный знак, и это доказывает третье свойство.

Применим изложенный выше материал к случаю облигаций. Тогда поток платежей относительно процентной ставки (доходности к погашению) y имеет вид:

$$\{(1, cN), (2, cN), \ldots, (n, cN+N)\},$$

где c – купонная ставка;
N – номинальная стоимость;
n – срок погашения.

Свойства 1—3 в случае облигаций формулируются следующим образом.

1. Для бескупонной облигации ($c = 0$) дюрация совпадает со сроком погашения $D = n$.

2. Для относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y. \tag{5.43}$$

3. $D = D(y)$ — убывающая функция относительно доходности к погашению y.

Выведем формулу для нахождения дюрации. Покажем, что дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и дается формулой

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n - 1\right)+y}. \tag{5.44}$$

Из формулы (5.41) следует, что

$$D = -\frac{P'_y}{P}(1+y). \tag{5.45}$$

Для текущей стоимости облигации имеем

$$P = cN\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} + N(1+y)^{-n}, \tag{5.46}$$

откуда

$$P'_y = N\left(c\frac{n(1+y)^{-n-1}y - 1 + (1+y)^{-n}}{y^2} - n(1+y)^{-n-1}\right),$$

поэтому

$$-P'_y(1+y) = N\left(n(1+y)^{-n} - c\frac{ny(1+y)^{-n} + (1+y)\left((1+y)^{-n}-1\right)}{y^2}\right). \tag{5.47}$$

Подставляя (5.46) и (5.47) в формулу для дюрации (5.45), получим

$$D=\frac{n(1+y)^{-n}-c\dfrac{ny(1+y)^{-n}+(1+y)\left((1+y)^{-n}-1\right)}{y^2}}{c\dfrac{1-(1+y)^{-n}}{y}+(1+y)^{-n}}=$$

$$=\frac{ny^2(1+y)^{-n}-cny(1+y)^{-n}+c(1+y)\left(1-(1+y)^{-n}\right)}{y\left(c\left(1-(1+y)^{-n}\right)+y(1+y)^{-n}\right)}=$$

$$=\frac{ny^2-cny+c(1+y)\left((1+y)^{n}-1\right)}{y\left(c\left((1+y)^{n}-1\right)+y\right)}=$$

$$=\frac{1+y}{y}-\frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^{n}-1\right)+y}.$$

Это доказывает формулу (5.44).

4. Если облигация продается по номиналу, т.е. $c = y$, то

$$D=\frac{1+y}{y}\left(1-(1+y)^{-n}\right), \qquad (5.48)$$

что непосредственно вытекает из формулы (5.44).

5. $D = D(c)$ — убывающая функция купонной ставки c.

Формулу (5.44) можно переписать в следующем виде:

$$D=a-\frac{nc+b}{kc+y},$$

где $a, b, k > 0$ — константы.

Тогда

$$D=a-\frac{n}{k}+\frac{\dfrac{ny}{k}-b}{kc+y}.$$

Поэтому достаточно показать, что выполняется неравенство $ny - bk > 0$.

Вернемся к исходным обозначениям:

$$ny-(1+y-ny)\left((1+y)^n-1\right)=$$
$$=ny(1+y)^n-(1+y)\left((1+y)^n-1\right)>0.$$

Выполним замену переменной $t=1+y, t\geq 1$. Тогда

$$n(t-1)t^n-t\left(t^n-1\right)=(t-1)\left(nt^n-\left(t^n+\ldots+t\right)\right)\geq 0,$$

что и требовалось.

6. Для бессрочных облигаций $(n\to\infty)$

$$D_\infty=\frac{1+y}{y}. \tag{5.49}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+y}{y}-\frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n-1\right)+y}\right)=\frac{1+y}{y}.$$

Наиболее сложной задачей является выяснение зависимости D от аргумента n. Справедливо утверждение, что если купонная ставка больше или равна доходности к погашению $(c\geq y)$, то $D=D(n)$ — возрастающая функция от n.

Если $c<y$, то функция $D(n)$ имеет единственный максимум, приближенная оценка которого

$$n_{\max}\approx\frac{1}{\ln(1+y)}+\frac{1+y}{y-c}.$$

Поэтому $D(n)$ возрастает при $n<n_{\max}$ и убывает при $n>n_{\max}$.

Производная по n имеет вид:

$$D'(n)=\frac{c(1+y)^n\left(n(c-y)\ln(1+y)+(1+y)\ln(1+y)-(c-y)\right)+(c-y)^2}{d^2},$$

где $$d=c\left((1+y)^n-1\right)+y.$$

Функция $D(n)$ имеет горизонтальную асимптоту $D=D_\infty$, и график $D(n)$ (рис. 5.3) пересекается с асимптотой тогда и только тогда, когда выполняется равенство $n(c-y)+1+y=0$.

Поэтому если $c \geq y$, то это уравнение не имеет решения для положительных значений n, так что выполняется неравенство $D(n) < D_\infty$. Поскольку уравнение $D'(n) = 0$ имеет не более одного корня, то график $D(n)$ выглядит следующим образом (рис. 5.3, I).

Пусть теперь $c < y$. Тогда график пересекает асимптоту при $n_0 = \dfrac{1+y}{y-c}$.

Поэтому имеется единственный максимум функции $D(n)$, приближенное значение которого можно получить из уравнения

$$n(c-y)\ln(1+y) + (1+y)\ln(1+y) - (c-y) = 0,$$

так что

$$n_{\max} \approx \frac{1+y}{y-c} + \frac{1}{\ln(1+y)}.$$

Типичный график имеет вид (рис. 5.3, кривая II).

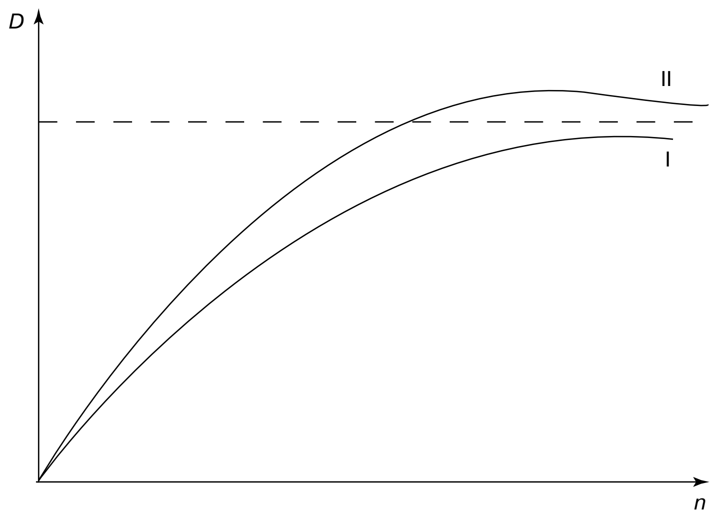

Рис. 5.3. Зависимость дюрации D облигации от ее срока погашения n при $c \geq y$ (I) и $c < y$ (II) [4]

Пример 5.7. Найти дюрацию облигации, продаваемой по номинальной стоимости со сроком погашения n = 10 лет и купонной ставкой

$c = 8\%$ (с ежегодной выплатой). Так как облигация продается по номиналу, то $y = c = 0{,}08$ и можно воспользоваться формулой (5.48):

$$D = \frac{1+y}{y}\left(1-(1+y)^{-n}\right) = \frac{1{,}08}{0{,}08}\left(1-1{,}08^{-10}\right) = 7{,}25.$$

Пример 5.8. Облигация со сроком погашения $n = 15$ лет и купонной ставкой $c = 10\%$ (с ежегодной выплатой) имеет доходность к погашению $y = 8\%$. Найти ее дюрацию. Воспользуемся формулой (5.44)

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n-1\right)+y} =$$

$$= \frac{1{,}08}{0{,}08} - \frac{15\cdot 0{,}02+1{,}08}{0{,}1\left(1{,}08^{12}-1\right)+0{,}08} = 13{,}5 - \frac{1{,}38}{0{,}2318} = 7{,}55.$$

Наиболее важное приложение дюрации связано с применением формулы (5.43) ввиду ее простоты.

Пример 5.9. Дюрация облигации равна $D = 10$. Известно, что ее доходность к погашению увеличилась с 12 до 13,5%. Определить, на сколько процентов изменилась цена облигации.

Воспользуемся формулой (5.43)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y = -\frac{10}{1+0{,}12}\cdot 1{,}5\% = -13{,}39\%.$$

Таким образом, цена облигации уменьшилась на 13,39%.

Для уточнения приближенной формулы (5.48) вводится понятие выпуклости.

5.5.4. Выпуклость облигации

Выпуклостью облигации $W(y)$ при данной доходности y называют величину [4]

$$W(y) = \frac{V''(y)}{V(y)}(1+y)^2. \tag{5.50}$$

Для нахождения выпуклости используют формулу, которая получается непосредственным дифференцированием формулы (5.10) с заменой переменной ρ на y:

$$W(y) = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(1+y)^{-k} + \frac{n(n+1)}{K}(1+y)^{-n}. \tag{5.51}$$

Напомним, что c — купонная ставка, $K = V/N$ — курс облигации, n — срок погашения, y — доходность облигации. В принципе можно получить замкнутую формулу для выпуклости, аналогичную формуле (5.44) для дюрации, но мы этого делать не будем. Главное приложение выпуклости — это уточнение приближенной формулы (5.43). А именно справедливо утверждение, что для относительного изменения цены облигации $\Delta V/V$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y + \frac{1}{2}W \cdot (\Delta y)^2. \tag{5.52}$$

Для доказательства формулы (5.45) необходимо разложить функцию $V(y)$ в ряд Тейлора с точностью до члена второго порядка малости $(\Delta y)^2$.

На рисунке 5.4 показаны графики зависимостей $V = V(y)$ для двух облигаций, у которых при $y = y_0$ совпадают доходности и дюрации, однако выпуклость одной (показана штрихом) больше другой (сплошная линия).

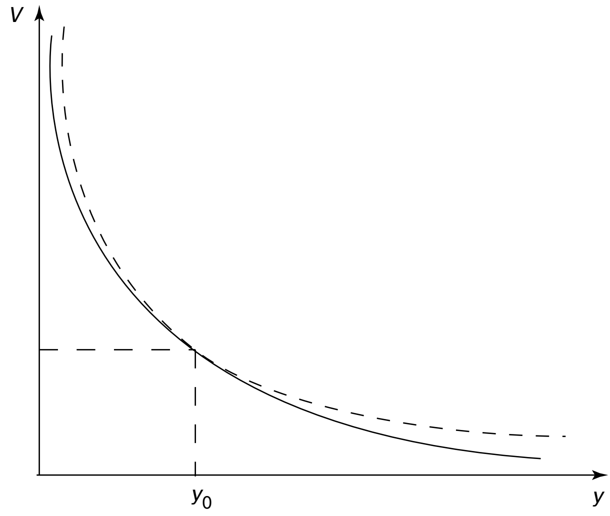

Рис. 5.4. Зависимости цены облигации V от доходности облигации y $V = V(y)$ для двух облигаций, у которых при $y = y_0$ совпадают доходности и дюрации [4]

Рассмотрим более подробно эту ситуацию в следующем параграфе.

5.6. Иммунизация портфеля облигаций

Под **иммунизацией портфеля облигаций** понимается такое управление портфелем, которое позволяет сохранять уровень его доходности на протяжении некоторого периода, несмотря на скачки рыночной процентной ставки. Примером иммунизированного портфеля может служить портфель облигаций, принадлежащий, скажем, пенсионному фонду, если дюрация портфеля облигаций равна дюрации обязательств этого фонда.

Рассмотрим теорему об иммунизации, следуя [4].

Предположим, необходимо выплатить долг R ровно через n лет. Дюрация такого платежа равна n. Один из способов оплаты долга состоит в покупке бескупонной n-годичной облигации номинальной стоимостью $N = R$ под годовую процентную ставку r. Тогда покупка облигации обойдется в $P = N/(1 + r)^2$. Самюэльсон указал на возможность замены одной облигации двумя так, что при данной процентной ставке текущая стоимость не меняется, а при изменении процентной ставки только увеличивается. Это связано с тем, что текущая стоимость есть убывающая функция от процентной ставки, а облигации с разными сроками погашения по-разному реагируют на изменение процентной ставки.

Итак, пусть требуется выплатить долг в размере R в момент времени t. Покупка облигации номинальной стоимостью $N = R$ со сроком погашения t обеспечит выплату долга. Назовем ее облигацией I, текущая стоимость которой равна

$$P_1 = N/(1 + r)^2. \tag{5.53}$$

Рассмотрим две бескупонные облигации с номинальными стоимостями N_1 и N_2 и сроками погашения соответственно t_1 и t_2, причем выполняется неравенство

$$t_1 < t < t_2.$$

Портфель, состоящий из этих облигаций, назовем облигацией II. Облигация II имеет текущую стоимость

$$P_2 = \frac{N_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{N_2}{(1+r)^{t_2}}. \tag{5.54}$$

Потребуем, чтобы при $r = r_0$ выполнялись условия

$$\begin{cases} P_1(r_0) = P_2(r_0), \\ D_1(r_0) = D_2(r_0). \end{cases} \tag{5.55}$$

Эти условия обеспечивают эквивалентность двух денежных потоков, связанных с облигациями I и II, и равенство их дюраций при $r = r_0$. При этом графики функций $P_1(r)$ и $P_2(r)$ выглядят так же, как на рис. 6, т.е. они касаются в некоторой точке $r = r_0$. Мы хотим показать, что для остальных значений r выполняется неравенство

$$P_1(r) < P_2(r). \tag{5.56}$$

Для этого достаточно убедиться, что такое же неравенство справедливо для вторых производных при $r = r_0$. Имеем

$$P_1' = -Nt(1+r)^{-t-1},$$

$$P_1'' = Nt(t+1)(1+r)^{-t-2} = \frac{N}{(1+r)^2}\left(\frac{t^2}{(1+r)^t} + \frac{t}{(1+r)^t}\right) =$$

$$= \frac{P}{(1+r)^2}\left(\frac{t^2 N}{P(1+r)^t} + D_1\right). \tag{5.57}$$

Аналогично

$$P_2' = -N_1 t_1 (1+r)^{-t_1-1} - N_2 t_2 (1+r)^{-t_2-1},$$

$$P_2'' = \frac{P_2}{(1+r)^2}\left(\frac{t_1^2 N_1}{P_2(1+r)^{t_1}} + \frac{t_2^2 N_2}{P_2(1+r)^{t_2}} + D_2\right). \tag{5.58}$$

Поскольку $P_1 = P_2 = P$ и $D_1 = D_2 = D,$ то осталось проверить, что

$$\frac{t_1^2 N_1}{P(1+r)^{t_1}} + \frac{t_2^2 N_2}{P(1+r)^{t_2}} > \frac{t^2 N}{P(1+r)^t}. \tag{5.59}$$

Поскольку

$$w_1 = \frac{N_1}{P(1+r)^{t_1}},\ w_2 = \frac{N_2}{P(1+r)^{t_2}},\ w_1 + w_2 = 1,$$

неравенство (5.59) можно переписать в следующем виде:

$$w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 > t^2, \tag{5.60}$$

причем из равенства дюраций следует, что

$$t = w_1 t_1 + w_2 t_2. \tag{5.61}$$

Подставляя выражение для t в (5.60) и раскрывая скобки, легко получим

$$t^2 = w_1^2 t_1^2 + w_2^2 t_2^2 + 2w_1 w_2 t_1 t_2 =$$

$$= w_1 (1 - w_2) t_1^2 + w_2 (1 - w_1) t_2^2 + 2w_1 w_2 t_1 t_2 =$$

$$= w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 - w_1 w_2 (t_1 - t_2)^2 < w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2. \tag{5.62}$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий (5.55), достаточно потребовать, чтобы веса платежей w_1, w_2 удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ t_1 w_1 + t_2 w_2 = t. \end{cases} \tag{5.63}$$

В рассмотренной ситуации говорят, что облигация II иммунизирует облигацию I.

Пример 5.10. Построить портфель из трех- и пятигодичной облигаций, иммунизирующий четырехгодичную облигацию номинальной стоимостью 3000 ден. ед. для процентной ставки 15%.

Запишем систему уравнений (5.63)

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ 3w_1 + 5w_2 = 4, \end{cases}$$

откуда находим

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}.$$

Теперь определим текущие стоимости всех облигаций:

$$P = 3000 \cdot 1{,}15^{-4} = 1715{,}26;\ P_1 = \frac{1}{2} P = 857{,}63;\ P_2 = \frac{1}{2} P = 857{,}63.$$

Далее найдем номинальные стоимости облигаций, входящих в портфель

$$N_1 = P_1 \cdot 1{,}15^3 = 1304,\ 35;\ N_2 = P_2 \cdot 1{,}15^5 = 1725.$$

Таким образом, иммунизирующий портфель состоит из трехгодичной облигации номинальной стоимостью 1304,35 и пятигодичной номиналом 1725. Можно легко проверить, что при изменении процентной ставки текущая стоимость данного портфеля будет выше.

5.7. Портфель облигаций

Портфель облигаций, состоящий из облигаций разных видов, сроков погашения, размеров купонного дохода и других характеристик, имеет свою доходность, средний срок поступлений, дюрацию, модифицированную дюрацию, выпуклость и иные параметры, характеризующие портфель в целом. Рассмотрим вычисление этих характеристик портфеля в соответствии с [8].

5.7.1. Доходность портфеля облигаций

Напомним, как определяется доходность отдельной облигации (параграф 5.3.2). Если известны рыночная цена облигации, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению ρ определяют как решение уравнения

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n} \tag{5.64}$$

или эквивалентно, как решение уравнения

$$V = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{5.65}$$

При определении доходности портфеля облигаций она также находится как решение уравнения, в котором сумма приведенных величин общего потока доходов приравнивается к общей рыночной стоимости облигаций, составляющих портфель

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{(1+\rho)^i} = \sum_{k=1}^{m} q_k P_k, \tag{5.66}$$

где S_i — суммарный доход от облигаций в момент времени $t = i$;
q_k — количество облигаций вида k;
P_k — цена облигации вида k;
M — количество видов облигаций в портфеле;
n — максимальный срок выплаты дохода.

В общем случае решение уравнения (5.66) относительно процентной ставки (доходности портфеля) ρ находится итерационными методами, например методом Ньютона—Рафсона, или на основе линейной интерполяции. В последнем случае можно использовать формулу

$$\rho = \rho' + \frac{P' - P}{P' - P''}(\rho' - \rho''), \tag{5.67}$$

где ρ', ρ'' — минимальное и максимальное значения доходности портфеля облигаций, ограничивающие интервал, в пределах которого ожидается неизвестное значение доходности портфеля ρ;

P — рыночная стоимость портфеля;

P', P'' — расчетные стоимости портфеля при применении ставок ρ', ρ''.

Величину ставки удобнее определять не по формуле (5.67), а как среднюю взвешенную величину доходности всей совокупности облигаций. Теперь под ρ будем подразумевать среднюю взвешенную величину доходности. В качестве веса берется рыночная стоимость соответствующего количества облигаций ($q_k P_k$ или $q_k K_k$):

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k}, \tag{5.68}$$

где K_k — курс облигаций вида k.

Более адекватно, однако, использование в качестве весов произведение дюрации каждого вида облигации (D_k) на стоимость соответствующего количества облигаций:

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k P_k}{\sum_k D_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k K_k}{\sum_k D_k q_k K_k}. \tag{5.69}$$

5.7.2. Средний срок поступления дохода портфеля облигаций

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций в целом (T_0) находится как средняя взвешенная величина. В качестве весов берутся стоимости облигаций [8]:

$$T_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}, \tag{5.70}$$

где T_k — средний срок поступления дохода облигаций вида k.

Портфель с меньшим средним сроком поступления дохода при прочих равных условиях имеет меньший риск, чем с более длительным сроком.

5.7.3. Дюрация портфеля облигаций и его выпуклость

Дюрация — это средняя взвешенная продолжительность выплат доходов от облигации с весами, равными дисконтированным величинам доходов. Установим связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля [8].

Пусть портфель состоит из двух облигаций с потоками доходов R_k и S_k и дюрациями

$$D_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{P_1} \text{ и } D_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{P_2}. \tag{5.71}$$

Для объединенного потока доходов от двух облигаций имеем

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} + \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{P_1 + P_2}. \tag{5.72}$$

Если в портфеле q_1 и q_2 облигаций, то потоки доходов увеличиваются пропорционально этим величинам. Имеем

$$D_0 = \frac{q_1 \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} + q_2 \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \tag{5.73}$$

Из (5.71) следует, что

$$D_1 P_1 = \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} \text{ и } D_2 P_2 = \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k},$$

поэтому

$$D_0 = \frac{D_1 q_1 P_1 + D_2 q_2 P_2}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \tag{5.74}$$

Таким образом, приходим к выводу, что дюрация портфеля облигаций равна средней взвешенной дюраций отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций.

Обобщая (5.74) на случай m-видов облигаций, получим

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} D_k h_k, \tag{5.75}$$

где h_k — стоимостная доля облигаций вида k.

Стоимостную долю облигаций можно получить на основе не только цен облигаций, но и их курсов. В этом случае

$$h_k = \frac{q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \frac{q_k K_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k K_k}, \tag{5.76}$$

при этом

$$\sum_{k=1}^{m} h_k = 1. \tag{5.77}$$

Выпуклость портфеля облигаций (C_0), как и дюрация, есть средняя взвешенная выпуклость отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций, и определяется по формуле

$$C_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} C_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} C_k h_k. \tag{5.78}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите и дайте определение параметрам, характеризующим облигацию.
2. Дайте определение и приведите формулу для текущей стоимости облигации.
3. Дайте определение курса (курсовой стоимости) облигации. Приведите пример.
4. Дайте определение и приведите формулу для текущей доходности облигации. Проиллюстрируйте примером.
5. Дайте определение и приведите формулу для доходности облигации к погашению. Приведите пример.
6. Какова связь рыночной цены облигации с ее номинальной стоимостью при различных соотношениях доходности к погашению и купонной ставки?
7. Проанализируйте зависимость доходности к погашению облигации от параметров.
8. Выведите приближенную формулу для относительного изменения цены облигации при изменении ее доходности.
9. Докажите, что уменьшение доходности облигации приведет к росту ее рыночной цены на величину бóльшую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину.
10. Докажите, что относительное изменение цены облигации (в процентах) в результате изменения доходности к погашению будет тем меньше, чем выше купонная ставка.

11. Дайте определение и приведите формулу для среднего срока поступления дохода облигации. Сказанное подтвердите примером.
12. Докажите, что при сроке жизни облигации более года средний срок поступления дохода уменьшается с ростом купонного дохода облигации. Приведите пример.
13. Докажите, что увеличение кратности выплаты процентов по облигации снижает средний срок поступления дохода от облигации.
14. Поясните смысл понятия «средний срок поступления дохода от облигации».
15. Дайте определение и приведите формулу для дюрации облигации. Приведите пример.
16. Перечислите свойства дюрации для положительных потоков платежей.
17. Докажите, что для бескупонной облигации ($c = 0$) дюрация совпадает со сроком погашения $D = n$.
18. Докажите, что для относительного изменения цены облигации $\Delta V/V$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\Delta V/V \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y.$$

19. Докажите, что дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и дается формулой

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n - 1\right)+y}.$$

20. Докажите, что дюрация облигации является убывающей функцией доходности к погашению y.
21. Докажите, что дюрация облигации является убывающей функцией купонной ставки c.
22. Докажите, что для бессрочных облигаций $(n \to \infty)$

$$D_\infty = \frac{1+y}{y}.$$

23. Дайте определение и приведите формулу для модифицированной дюрации облигации. Приведите пример.
24. Дайте определение выпуклости облигации и приведите формулу для ее вычисления.
25. Докажите, что для относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула (5.57)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y + \frac{1}{2}W \cdot (\Delta y)^2.$$

26. Дайте определение иммунизации портфеля облигаций.
27. Сформулируйте и докажите теорему об иммунизации портфеля облигаций.
28. Дайте определение доходности портфеля облигаций.
29. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении средней взвешенной величины доходности портфеля облигаций?
30. Дайте определение среднего срока поступления дохода портфеля облигаций.
31. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении среднего срока поступления дохода портфеля облигаций как средней взвешенной величины?
32. Как вывести связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля?
33. Как выразить стоимостную долю облигаций через их курсовую стоимость (курсы облигаций)?
34. Дайте определение и приведите формулу для выпуклости портфеля облигаций.
35. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении выпуклости портфеля облигаций как средней взвешенной величины?
36. Найдите изменение цены облигации со сроком погашения $n = 7$ лет, доходностью $y = 8$, купонной ставкой $c = 7$ при уменьшении доходности до 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kellison S.G.* The theory of interest. Irwin/McGraw-Hill, 1991.
2. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М. : Дело, 2001.
3. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
4. *Бабайцев В.А., Гисин В.Б.* Математические основы финансового анализа. М. : ФА, 2005.
5. *Рябов П.Е., Шаповал А.Б.* Математические основы финансового анализа. М. : ФА, 2003.
6. *Бабайцев В.А., Гисин В.Б., Рябов П.Е.* Математические методы финансового анализа, руководство к решению задач. М. : ФА, 2004.
7. *Малыхин В.И.* Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг. М. : ГУУ, 2002.
8. *Четыркин Е.М.* Облигации. М. : Дело, 2005.

КОМПЕТЕНЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

1. Уметь вычислять наращенную сумму в случае простых и сложных процентов в случае кратного и непрерывного начисления процентов. Уметь сравнивать наращение по простой и сложной ставкам процента. Уметь проводить дисконтирование и удержание процентов. Уметь сравнивать дисконтирование по сложной и простой учетной ставкам. Уметь рассчитывать мультиплицирующие и дисконтирующие множители.

2. Знать и уметь применять «Правило 70», а также его обобщение на случай простых процентов («Правило 100»), непрерывных процентов, кратного начисления процентов. Уметь рассчитывать увеличение капитала в произвольное число раз в случае простых процентов, сложных процентов, непрерывных процентов, кратного начисления процентов.

3. Уметь учитывать влияние инфляции на ставку процента. Знать связь номинальной и реальной процентных ставок (формула Фишера). Уметь вычислять темп инфляции за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае темпа инфляции за несколько периодов.

4. Владеть понятием эффективной процентной ставки. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента для n-го периода начисления в случае простых процентов и сложных процентов. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента в случае кратного начисления процентов в случае непрерывных процентов, а также с учетом инфляции и с учетом налогов. Знать эквивалентность различных процентных ставок (простых и сложных процентов, простых и непрерывных процентов, сложных и непрерывных процентов).

5. Уметь рассчитывать эффективность операций с валютой, доходность депозитов с конверсией валюты и без конверсии, мультивалютных депозитов.

6. Владеть понятием внутренней нормы доходности. Уметь вычислять внутреннюю норму доходности типичных инвестиционных потоков, а также финансовых потоков с чередованием положительных и отрицательных платежей.

7. Владеть понятием финансового потока. Уметь рассчитывать его приведенную и наращенную величины. Владеть понятием и уметь вычислять средний срок финансового потока.

8. Владеть понятием непрерывного потока платежей, уметь вычислять его наращенную и приведенную стоимости. Уметь вычислять наращенную и приведенную стоимости линейно изменяющегося и экспоненциально изменяющегося потоков платежей.

9. Владеть понятием регулярных потоков платежей, обыкновенных рент. Знать и уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения рент постнумерандо и пренумерандо.

10. Уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения ренты за несколько соседних периодов. Знать связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета. Знать связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо. Уметь рассчитывать параметры ренты.

11. Владеть понятиями вечной, кратной и непрерывной ренты. Уметь рассчитывать их коэффициенты приведения и наращения. Знать связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты для разной кратности начисления процентов. Знать связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент.

12. Владеть понятиями рент с платежами в середине периодов, немедленных и отложенных рент. Владеть понятиями арифметических и геометрических рент, в том числе срочных и непрерывных.

13. Знать общий принцип сравнения финансовых потоков и рент и уметь их сравнивать. Уметь сравнивать годовые и срочные ренты. Уметь проводить конверсию рент:

– изменение параметров ренты;
– замену одной ренты другой;
– замену обычной ренты срочной;
– замену немедленной ренты отсроченной;
– консолидацию рент;
– выкуп ренты;
– рассрочку платежа.

14. Владеть понятиями дохода и доходности финансовой операции. Уметь рассчитывать доходность за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае доходности за несколько периодов.

15. Владеть понятием риска финансовой операции. Знать различные количественные оценки риска финансовой операции. Знать выделенную роль равномерного и нормального распределений. Владеть понятием коррелированности финансовых операций. Владеть понятием стоимости под риском (Value at risk, *VaR*). Знать виды финансовых рисков. Знать методы уменьшения риска финансовых операций (диверсификация, хеджирование, опционы, страхование).

16. Уметь анализировать финансовые операции в условиях неопределенности. Владеть понятиями матриц последствий и рисков. Знать алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности. Знать правила минимакса: Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Знать алгоритм принятия решений в условиях частичной неопределенности. Знать правило максимизации среднего ожидаемого дохода и правило минимизации среднего ожидаемого риска. Владеть понятием оптимальной (по Парето) финансовой операции. Знать правило Лапласа равновозможности.

17. Владеть понятием доходности и риска ценной бумаги и портфеля. Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг. Знать предельные случаи (полной корреляции и полной антикорреляции), промежуточные случаи. Уметь анализировать случаи независимых бумаг (две бумаги, три и более). Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг, одна из которых безрисковая. Уметь находить портфель заданной эффективности и портфель заданного риска из двух ценных бумаг.

18. Уметь находить портфели Марковица из n-бумаг (минимального риска при заданной эффективности, минимального риска с эффективностью не меньшей заданной, минимального риска).

19. Владеть понятием минимальной границы и знать ее свойства.

20. Уметь находить портфели Тобина из N-бумаг (минимального риска из всех портфелей заданной эффективности, максимальной эффективности из всех портфелей риска, не более заданного).

21. Уметь находить оптимальные неотрицательные портфели. Уметь рассчитывать доходность неотрицательного портфеля. Уметь анализировать неотрицательный портфель из двух и из трех бумаг. Уметь находить портфели с неотрицательными компонентами (максимальной эффективности, минимального риска). Владеть понятием диверсификация портфеля.

22. Владеть понятием облигации, ее текущей стоимости, текущей доходности и доходности к погашению. Знать зависимость доходности к погашению облигации от параметров. Знать дополнительные характеристики облигации:

– средний срок поступления дохода;

– дюрация и ее свойства;

– выпуклость.

23. Владеть понятием иммунизации портфеля облигаций. Для портфеля облигаций уметь рассчитывать доходность, средний срок поступления дохода. Владеть понятиями и уметь рассчитывать дюрацию и выпуклость портфеля облигаций.