ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.Б. Тухватов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 5

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

Учебное пособие для вузов

Издание второе исправленное

Уфа
Издательство БГАУ
2012

УДК 51(07)
ББК 22.1(я7)
Т 91

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Башкирского государственного аграрного университета

Автор: ***М.Б. Тухватов***

Рецензенты:
Башкирский государственный университет
д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой математического моделирования
С.И. Спивак;
Уфимский государственный авиационный технический университет
д.т.н., профессор, зав. каф. автоматизированных систем управления
Г.Г. Куликов

Т 91 **Лекции по общей математике: Ч. 5: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта**. Учебное пособие для вузов. – Уфа: БГАУ, 2012. – 640 с.

ISBN 978-5-7456-0274-0

Настоящее учебное пособие является продолжением четырех работ автора «Лекции по математике». Часть 1. Для поступающих в вузы и самообразования. Часть 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Математический анализ. Часть 3. Множества и их отображения. Дискретная математика. Часть 4. Математические модели и методы их решения. В отличие от них в данной книге рассматриваются случайные процессы и явления как статистические модели той или иной конкретной задачи.

Книга написана в соответствии с новой расширенной программой с уклоном для технических приложений по дисциплинам (разделам) математического цикла и является комплексным учебным пособием для вузов. Автором широко использованы общепринятые терминология, обозначения и сокращения часто употребляемых терминов и слов.

Данная часть книги содержит три взаимосвязанных раздела: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта. Такое разбиение книги на разделы позволяет легко комплектовать учебный материал в соответствии с конкретной программой того или иного факультета.

Каждый раздел разбит на главы, а главы, в свою очередь, состоят из параграфов, в которых выделены тематически значимые пункты. Каждый параграф, соответствуя определенной теме, является единицей учебного двухчасового лекционного материала.

Все темы пособия иллюстрируются большим количеством задач и примеров как теоретического, так и практического характера. В конце каждой главы даются контрольные задачи, которые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной форм обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать математику самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

УДК 51(07)
ББК 22.1(я7)

ISBN 978-5-7456-0274-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Любопытный отыскивает редкости только затем, чтобы им удивляться; любознательный же – затем, чтобы узнать их и перестать удивляться.
>
> Р. Декарт

Данная книга является (яв-ся) продолжением двух работ [51, 52] автора, где рассматривались (расв.) математические модели (ММ или мт. мд.) в основном детерминированных процессов и явлений с включением недетерминированных моделей лишь в двух параграфах: теория кодирования и мд-и задач в условиях неопределенности (неопр.). В отличие от них в этой книге расв-ся случайные процессы и явления как статистические модели (СМ или стсч-ие мд-и).

Настоящая часть книги содержит три взаимосвязанных раздела: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта. Причем третий раздел содержит и некоторые задачи анализа опытных данных: численное интегрирование и дифференцирование, интерполяция и т.д. Кроме того, отдельные темы третьего раздела излагаются и в первых двух разделах. Такое разбиение книги на разделы позволяет легко комплектовать учебный материал в соответствии (ств-и) с конкретной программой того или иного факультета.

В данной книге сделана попытка объединить эти три раздела и изложить их с единой точки зрения с уклоном технических и экономических приложений. При этом в книге предусмотрена и возможность изучения этих разделов по отдельности, исходя из различной программы для разных факультетов.

Кроме того, при создании СМ-ей изучаемого процесса часто возникает объективная необходимость (нх.) исследования процессов в целом как сложные системы [15, 20, 29, 39, 48, 49], или кибернетические системы [4, 33, 59], или системы с неопр. параметрами и неполной информацией (инф.) [10, 19, 39, 54]. В таких ситуациях специалист конкретной отрасли должен иметь базовые знания о моделировании (мдв.) и по др. отраслям в целостном их представлении. В связи с этим нами приведены примеры из различных отраслей, характерные для разнообразных ситуаций. А там, где сделать это было невозможно, мы старались словесно описать их и указать нх-ю литературу для дальнейшего изучения исследуемого процесса.

Поэтому в пособии сделана также попытка изложения тех вопросов, которые (к-ые) яв-ся общими для разных специальностей, т.е. дать базовое знание. Этим положением оправдано и название книги – «Лекции по общей математике», введенное впервые в [51].

В настоящее время в связи с возросшей ролью мт-ки в современной науке и технике необычайно большое число будущих инженеров, биологов, экономистов, социологов и т.д. нуждается в современной мт-ой подготовке, к-ая давала бы возможность мт. методами исследовать широкий круг новых проблем, применить современную вычт. технику, использовать теоретические (теор.) достижения на практике. Такой уровень владения мт-ой требует высокой мт. культуры, освоения фундаментальных (фунд.) основ мт-ки в целом, постоянного (пст.) использования полученных результатов (опытов) на практике.

Данная книга (кратко: лекции) вместе с [51, 52] в определенной (опрн.) степени учитывает эти требования и яв-ся комплексным учебным пособием для вузов. Причем содержание такого пособия должно быть шире содержания конкретной программы опрн-ой дисциплины мт-ки для вузов. Поэтому книга написана в ств. с расширенной программой по опрн-ым дисциплинам мт-ки и весь материал расположен по главам т.о., чтобы легко было компоновать совокупность тем, ств-щих той или иной программе данной специальности. А темы, выходящие за ее рамки, можно использовать в курсах по выбору или для самостоятельной работы реферативного характера, выполняемой студентом.

В книге широко использованы (как и в [50, 51, 52]) нх-я символика (знаки) и сокращенная запись, к-ые позволяют сэкономить не менее 20% бумаги. А др. преимущества такого сокращения см. в [51]: стр. 8, 384. При этом сокращение слов мы повторяем, чтобы читатель привыкал и быстро ориентировался.

В пособии стсч-ие мд-и и методы их решения излагаются совместно по главам (гл.), к-ые разбиты на параграфы. Каждый параграф (§), ств-ий опр-ой теме, яв-ся основной единицей учебного (двухчасового лекционного) материала. Все формулы (фм.), теоремы, опр-ия и т.д. обозначаются (обз.) и имеют ссылки внутри параграфа ств-но в виде: (2), т1, о5 и т.д. Если же ссылка дается на др-й параграф, то через двоеточие к ней добавляются две цифры, например (н-р), о3: 2.5 означает опр. 3 из гл. 2 §5. Кроме того, параграф состоит из пунктов, обз-ых через 1°, 2°, …, к-ые могут быть с названием или без него. В др-х классификационных целях используются обз: 1, 2, …; 1), 2), …; а), б), … Нумерация лекций – сплошная.

В книге большое внимание уделено прикладной стороне предмета, демонстрирующей приложения многих СМ в различных областях (где это возможно) науки и техники, использованы при этом различные источники [2, 19, 25, 28, 31, 38, 43, 47, 55, 58, 60 и др.].

С этой же целью все темы (лекции) сопровождаются большим количеством примеров и задач, выбранных из [5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 41, 54, 56 и др.]. Кроме того, в каждой гл. даются контрольные задачи, к-ые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

При написании пособия использованы также книги [3, 12, 16, 22, 23, 25, 26, 30, 34, 44, 58 и др.] для подбора материала и компоновки тем лекций.

В пособии большое внимание уделено соразмерному использованию принципов наглядности, абстракции, аналогии, обобщения и создания проблемных ситуаций, приводящих иногда к парадоксам [46].

По возможности мы уделяли также внимание воспитательной стороне и формированию правильного мировоззрения, н-р, с помощью подбора задач, приведения цитат и афоризмов (с указанием автора или знака NN, если имя автора не установлено), вступительной части разделов и т.д.

В книге нет исторических (кроме единичных фактов) и философских сведений, кроме динамики СМ и некоторых (нек-ых) общих понятий, связанных с СМ. Причем мы старались максимально избегать общих рассуждений при изложении, чтобы быстрее вводить читателя в суть дела. При этом темы, к-ые яв-ся фунд-ми или рабочим инструментом дальнейшего изучения, старались располагать раньше, чем остальные, в пределах главы.

Для самостоятельного – основного способа освоения мт-ки с меньшими затратами времени очень важно, чтобы все необходимые (нх.) материалы студент имел под рукой (в одной книге). Поэтому кроме теории в книге приведены демонстрационные примеры по каждой теме, контрольные задачи после каждой главы с решением типового варианта, математико-статистические таблицы (причем для удобства в использовании их на практике нек-ые таблицы, н-р, 4 и 19, а также 6, 8 и 10, даются в различных видах и диапазонах), нх-ые при решении задач, и краткий словарь специальных терминов (КС) для быстрой ориентации при появлении новых слов. Кроме того, КС включает в себя и познавательный справочный материал. Н-р, в КС Экономико-математические методы как обобщающее наз-ие комплекса экнч-их и мтч-их научных дисциплин, введенное академиком В.С. Немчиновым, приведена схема этих дисциплин, что позволяет ориентироваться при подборе тем для той или иной специальности и выделении кол-ва часов для занятий. Или, н-р, в КС Экономико-математические исследования в СССР говорится, что развитие любой науки должно опираться на предыдущий уровень ее развития. Поэтому мы не должны забывать исторические факты и достижения русских и советских ученых, заслуги к-ых отмечены в международном масштабе, о чем и говорится в данном КС, и т.д. Ссылки на КС даются внутри текста по ходу изложения теории.

Если студент при решении задач или выполнении заданий РГР забыл те или иные нх-ые сведения, то ему поможет предметный указатель, приведенный в конце книги.

Такая системная целостность в подаче материала очень важна, хотя она существенно (сущ.) увеличивает объем книги.

В список литературы, не претендуя на его полноту, мы включили и более специальные книги (н-р, см. [1, 4, 10, 11, 18, 23, 27, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 45, 53, 57, 59]). Конкретные ссылки на них даются в ствщ. темах с целью дальнейшего развития и углубления знаний для более подготовленного читателя, интересы к-го учтены во всех темах, где это было возможно.

В книге учтены и интересы начинающего читателя (в качестве первоначального чтения им рекомендуем книги [24, 32, 50]), для к-го во всех темах приводятся решенные примеры, а при нх-сти они могут обращаться в КС.

У читателя предполагается знание мт-ки в объеме обычной программы для вузов (н-р, [42]). Поэтому опущены док-ва многих теорем (иногда указана ств-ая литература), к-ые требуют знаний, выходящих за пределы этой программы.

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной форм обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать мт-у самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам проф. Спиваку С.И. и проф. Куликову Г.Г. за ряд предложений и замечаний, способствующих значительному улучшению содержания книги.

Автор благодарит всех, кто принял участие в обсуждении рукописи книги. При этом особую благодарность автор выражает проф. Дусыеву В.М., проф. Габдрафикову Ф.З., доц. Лукманову Р.Л.

Все замечания по книге просим направлять по адресу: 450001, Уфа, ул. 50 лет Октября, 34, БГАУ, каф. математики.

ВВЕДЕНИЕ

> Умение решать задачи – практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепиано: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь. Не ищите в этой книге чудодейственного ключа, который откроет перед вами все двери – научит решать все задачи. Однако вы найдете в ней хорошие образцы для подражания и множество благоприятных возможностей попрактиковаться. Если хотите научиться плавать – нужно войти в воду, а если желаете научиться решать задачи – решайте их.
>
> Дж. Пойа

1°. Основные назначения предмета. Широкое применение математики (мт.) в других (др.) областях науки (физика, химия, биология, медицина, генетика, социология, экономика, кибернетика, экология и т.д.) яв-ся общепризнанным фактом. В настоящее время этот процесс интенсивно продолжается, особенно в условиях случайных (слн.) явлений. Действительно (дсв-но), в научных исследованиях, технике и массовом производстве (прз-ве) мы часто встречаемся с опытами, операциями или явлениями, многократно повторяющимися в неизменных условиях. Однако, несмотря на постоянство (пст.) основного комплекса условий, с тщательностью воспроизводимых в отдельных опытах, результаты их разнятся друг от друга, т.е. они испытывают слн. рассеивание. Классическим примером яв-ся измерения каких-либо величин (длины, массы, тока и т.д.). Давно известно, что при повторении измерений одного и того же объекта, выполняемых с помощью одного и того же измерительного прибора с одинаковой тщательностью, мы никогда не получаем одинаковых данных в силу влияния многочисленных факторов, не поддающихся контролю. К числу таких факторов относятся слн-ые вибрации отдельных частей прибора, физиологические изменения органов чувств исполнителя, различные неучитываемые изменения в среде (температура, оптические, электрические и магнитные свойства (св-ва), влажность, сила ветра, рыночные цены и т.д.).

Хотя результат каждого отдельного измерения при наличии слн-го рассеивания невозможно заранее предсказать, это еще не означает, что повторные измерения не обнаруживают никакой закономерности. Эта закономерность хорошо изучена. Мтч-ки она описывается нормальной кривой распределения (1), показанной на рис. 1,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=n(x,a,\sigma), \tag{1}$$

где a – значение измеряемой величины (вел.), σ – пст-ая (степень рассеивания) для данных условий вел-а, характеризующая точность измерений.

Пст-ые a и σ яв-ся параметрами нормальной (Гауссовой) кривой и носят ств-но мт-ое ожидание и среднеквадратическое отклонение (ср. кв. отк.), а $\sigma^2 = D(x)$ – дисперсия вел-ы x.

Площадь (пщ.) под нормальной кривой равна единице (ед.), т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 . \qquad (2)$$

Если вместо ∞ возьмем x, то получим функцию (см. рис. 2):

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = N(x, a, \sigma). \qquad (3)$$

Функция (фк.) $f(x)$ называется (наз.) плотностью распределения (вероятности), или дифференциальной (диф.) фк-ей, $F(x)$ – фк-ей распределения (рсп.), или интегральной (интн.) фк-ей.

Пщ., отвечающая какому-либо интервалу $]\alpha, \beta[$ оси абсцисс, т.е.

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (4)$$

изображает вероятность (вер.) попадания слн-го результата измерения в данный интервал. В среднем доля (процент или чистость) тех измерений, к-ые попадают в расв-ый интервал, приближенно ств-ет вел-е вер-ти и причем тем точнее, чем больше общее число измерений.

Из рис. 1 видно, что $F(\alpha, \beta)$ = $F(a-\sigma, a+\sigma)$ = 0,6827 (68,27%), $F(a-2\sigma, a+2\sigma)$ = 0,9545 и $F(a-3\sigma, a+3\sigma)$ = 0,9973, так что за «трехсигмовые» пределы выходит лишь 1 – $F(a-3\sigma, a+3\sigma)$ = 0,0027 (0,27%) всего числа измерений, т.е. ничтожная их доля.

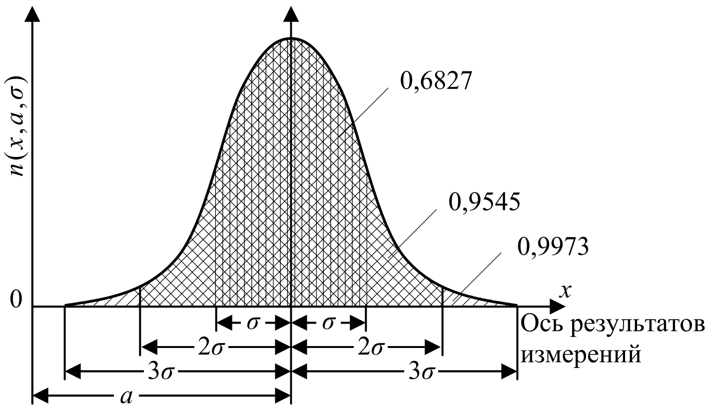


Рис. 1

Если мы в тех же условиях, тем же прибором и с той же точностью измерим другой объект со значением a_1 ($a_1 > a$), то кривая сместится вправо, как показано на рис. 4, причем параметр σ сохранит свое значение.

Если же изменим теперь метод измерения вел-ы a, н-р, измерим др-м прибором, то изменится среднеквадратическое отклонение σ, зависящее от точности метода измерений, сд-но, изменится и форма кривой, как на рис. 3.

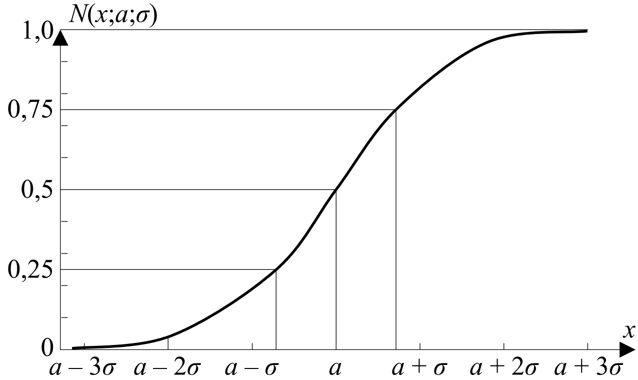


Рис. 2

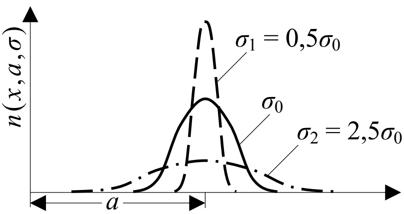


Рис. 3

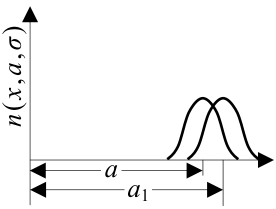


Рис. 4

Работа разнообразных систем автоматического управления также подвержена воздействию многочисленных слн-х факторов. Еще большую роль слн. рассеивание играет в биологии, агротехнике, медицине, метеорологии, гидрологии, мелиорации и др-х областях науки и техники.

Аналогичная картина рассеивания наблюдается и при артиллерийской стрельбе – из точек попадания снарядов, выпущенных из одного и того же орудия, а также при изготовлении массовой продукции из повторения опр-ых технологических операций и при др-х слн-х процессах и явлениях.

Во всех указанных областях математико-статистические методы находят широкое применение при решении задач, аналогичных задачам теории ошибок (сравнение средних, оценка степени рассеивания, проверка различных предположений и т.д.).

Однако законы слн-го рассеивания могут приобретать и др. формы, отличные от нормального закона. Существенным яв-ся то, что во многих случаях мы находим вполне закономерную связь между числовыми значениями (зн.) варьирующих признаков и вер-ю реализации этих зн-й в массе проводимых наблюдений (нбл.). Именно это обстоятельство дает возможность построить общую теорию, показывающую, какие приемы обработки нбл-й, какие средние показатели, выводимые из данного, обычно ограниченного (огр.), материала нбл-й, наилучшим образом отвечают специфике слн-го рассеивания в той или иной задаче.

При этом раздел оценки параметров законов расп-ия опытных данных яв-ся одним из наиболее важных в мт-ой стс-ке. Только знание законов расп-ия и их надлежащий учет в инженерных расчетах может обеспечить в подобных случаях надежную работу устройств и сооружений.

Другой раздел мт-ой стс-ки составляет стсч-ая проверка гипотез, т.е. предположений, относящихся к рассматриваемым (расв.) расп-ям опытов или нбл-й массовых явлений. В условиях, когда запас нбл-й ограничен (огр.) и данные о массовом процессе обнаруживают значительное рассеивание, объективное суждение о преимуществах того или иного метода измерений, стрельбы, технологического процесса, о пользе вносимого или предполагаемого удобрения, лекарства и т.д. можно вынести лишь на основе стсч-го анализа и сопоставления данных нбл-й или опытов, относящихся к ств-ей области. Мт. стс-ка разрабатывает приемы такого сопоставления, стараясь исчерпывающим образом использовать всю инф-ю, содержащуюся в имеющемся огр-ом материале, и получить обоснованные выводы.

Большой раздел мт-ой стс-ки составляет учение о зависимости (зв.) между величинами (вел.), каждая из к-ых испытывает вариации под действием слн-ых факторов. Этот раздел носит название теории корреляции.

Задач анализа влияния различных факторов на поведение интересующей нас вел-ы расв-ся в дисперсионном анализе.

Вероятностные закономерности рас-ых процессов и явлений, а также приведенных задач в абстрактном виде изучает особая мт. дисциплина – теория вероятностей (вер.). Она разрабатывает схемы или модели массовых явлений, связывая с каждым из возможных результатов опытов особую числовую меру объективной возможности его появления – вероятность.

Конкретно вел-а вер-ти каждого возможного результата опыта или события проявляется в той частоте, с к-ой оно встречается при массовых повторениях опыта. Теория вер-й расв-ет методы выч-ия вер-й сложных результатов массового явления по известным вер-ям более простых исходов. Тем самым открывается путь для анализа и выявления вер-ых закономерностей слн-х явлений, т.е. теория вер-й яв-ся теоретической основой мт-ой стс-ки.

А мт. обработка результатов опыта использует методы мт-ой стс-ки в практических приложениях при рас-и слн-ых процессов, а также применяет нек-ые численные методы.

Т.о., исходя из вышеизложенного, можно дать следующие (сд.) опр-ия.

Теория вероятностей – мт. дисциплина, изучающая закономерности случайных явлений. Она яв-ся основой мт-ой статистики.

Мт. статистика – это раздел мт-ки, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов нбл-й массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей.

Мт. обработка результатов опыта – это вопросы подбора эмпирических формул и оценки их параметров, вопросы оценки истинных значений измеряемых величин и точности измерений, вопросы исследования корреляционных зависимостей, а также нек-ые вопросы анализа – интерполяция, дифференцирование, интегрирование.

Итак, все три предмета изучают случайные явления и тесно связаны между собой. Поэтому желательно, если позволяет время, их изучать совместно.

Отметим, что в начальный период развития мт-ой стс-ки имели большое значение работы А. Кетле (1796-1874), Ф. Гальтона (1822-1911) и К. Пирсона (1857-1936).

С развитием естествознания и техники возник ряд новых проблем, решение к-ых привело к дальнейшему совершенствованию мт-их методов стс-ки. В ее развитии опр-ую роль сыграли труды Р. Фишера (1890-1962), Ю. Неймана, А. Вальда (1902-1950), Г. Крамера и др.

Большое значение в развитии мт-ой стс-ки имели работы советских ученых Е.Е. Слуцкого (1880-1948), А.Н. Колмогорова (1903-1987), В.И. Романовского (1880-1954) и др.

Закономерность слн-го рассеивания, выражаемая нормальным расп-ем, получили свое научной обоснование в теоретико-вероятностных исследованиях выдающихся русских мт-ов П.Л. Чебышева (1821-1894), А.А. Маркова (1856-1922) и А.М. Ляпунова (1857-1918), значительно расширивших результаты классических исследований Я. Бернулли (1654-1705), Муавра (1667-1754), Лапласа (1749-1827), К. Гаусса (1777-1855) и Пуассона (1781-1840).

Оказалось, что нормальному расп. будет, как правило, следовать всякая случайно-варьирующая вел., представляющая сумму большего числа независимых (незв.) слн-х слагаемых, подобно тому, как погрешность измерения прибора складывается из погрешностей его отдельных частей. Схема суммирования слн-х слагаемых охватывает довольно широкий круг явлений, нблм-х на практике. Наглядным примером такого суммирования яв-ся суммарное потребление электроэнергии многочисленными незв. друг от друга потребителями.

Теория вер-ей исследует разнообразные типы слн-х процессов, приводящих к различным закономерностям. Причем методы теории вер-ей столь же строги и логичны, как и методы др. мт-их наук.

За несколько последних десятилетий от теории вер-ей «отпочковались» такие отрасли науки, как теория слн-х функций, теория массового обслуживания, теории информации, эконометрическое моделирование и др. Этот процесс продолжается и в настоящее время.

Современное состояние теории вер-ей и мт-ой стс-ки складывалось в результате международного сотрудничества очень большого числа исследователей.

Дальнейшее развитие теории вер-ей связано с именами русских мт-ов С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина (1894-1959), Б.В. Гнеденко (1912-1995), Ю.В. Линника и др., а также зарубежных ученых Н. Винера (1894-1964), Э. Бореля (1871-1956), В. Феллера (1906-1970), Р. Фишера и др.

Как и все мтч-ие теоремы, положения теории вер-ей носят абстрактный, безразличный к конкретной природе массовых явлений характер. Н-р, при опр-ых предположениях вер-ть наступления слн-го явления в промежутке времени, равном t секунд, опр-ся стн-ем

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (5)$$

где λ – пст. положительное (плж.) число. Оказывается, эта схема, лежащая в основе вывода стн-ия (5), с большим или меньшим приближением может быть применена к поступлению телефонного вызова на автоматической телефонной станции, к остановкам станка в цехе из-за неполадок, к обрыву нити на ткацком станке, к распаду атома радиоактивного вещества и т.д. при различных значениях λ. Чтобы в конкретных условиях использовать эту закономерность для научного прогноза или инженерных расчетов, нх-мо сопоставить общую формулу для вер-ти с материалом нбл-ий массового явления. Т.о. мы снова приходим к стсч-им проблемам оценки параметров и проверки стсч-их гипотез.

2°. Советы читателю. Надо всегда помнить, что Голова – это центр управления всем организмом. Поэтому она должна постоянно работать и тренироваться, чтобы разумно управлять организмом. А мт-ка яв-ся единственным предметом для тренировки ума, как и физические снаряды для тренировки тела.

Для успешного использования мт-ки в своих исследованиях нужно иметь необходимые (нх.) знания, уметь обращаться с мт-им аппаратом и обладать мт-ой интуицией, фантазией. Эти качества приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе систематических знаний, в результате длительной и упорной работы. При этом Человек меньше устает от работы, чем от безделья и праздного времяпровождения.

Нх-мо постоянно и настойчиво решать мт-ие задачи. Мт-ик Гаусс стал великим именно потому, что решение мт-их задач для него было как воздух для человека. «Примеры учат лучше теории», – писал И. Ньютон. Причем лучше решать одну задачу десятью способами, чем решать десять задач одним способом.

В успешном и быстром усвоении мт-ки большую роль играют удачная символика (знаки), сокращенная запись, накопление мт-их терминов, к-ые облегчают и процесс мышления. При этом постоянно нх-мо пользоваться предметным указателем.

При изучении мт-ки нх-мо вырабатывать в себе опр-ную систему, стараясь идти от простого к сложному, от известного к неизвестному, от частного к общему, постоянно стремясь к практическим приложениям своих знаний.

Перед изучением любого раздела мт-ки надо поставить перед собой цель. «Самый медленный человек, не теряющий из виду своей цели, все же проворнее того, кто блуждает без цели», – писал Г. Лессинг.

Надо помнить, что мт-ка постоянно совершенствуется, и нельзя смотреть на ее положения, как на догмы. Мт-ка развивается, возникают новые методы, расширяется круг областей ее применения. Много еще в ней нерешенных проблем, как и в др. науках, к-ые ждут своего разрешения.

Глубокое усвоение мт-ки – это нелегкий труд. Успеха может добиться только тот, кто вооружен терпением и с карандашом в руке работает целенаправленно, постоянно преодолевая возникшие трудности.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Удачные обозначения обладают утонченностью и будят мысль, порой делая это, кажется, почти так же, как искусный учитель.

Бертран Рассел

1°. Список основных обозначений

$x \in A$ – элемент (эл.) принадлежит множеству (мн.) A

$x \,\overline{\in}\, A$ ($x \notin A$) – эл. x не принадлежит мн. A

$A \subset B$ – мн. A содержится в мн. B или A есть подмн-во мн-ва B

$\mathrm{B}(A) = 2^A$ – совокупность всех подмн-в мн-ва A

$\{x \in A : Q(x)\}$ – совокупность эл-ов х мн-ва A, обладающих свойством (св.) $Q(x)$

$m(A)$ – мера мн-ва A

$P(A)$ – вероятность (вер.) события (сб.) A

$W(A)$ – частота появления сб. A в n опытах

$\varnothing$ – пустое мн. (невозможное сб., $P(\varnothing) = 0$)

Ω – достоверное сб., $P(\Omega) = 1$

S – универсальное мн. (совокупность подмн-в изучаемого объекта)

$A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$ (AB, $A + B$, $A - B$) – пересечение, объединение, разность мн-в A и B

$A\Delta B = A\oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ – симметрическая разность мн-в A и B

$\overline{A} = S \setminus A$ (не A) – дополнение (замыкание, отрицание) мн. A при $A \subset S$

$A \Rightarrow B$ – знак следования: из A следует B

$A \Leftrightarrow B$ – знак равносильности (эквивалентности): A равн. (экв.) B

N, Z, Q, R – мн. всех натуральных (нтр.), целых, рациональных (рац.), действительных (дсв.) чисел

Z_+, R_+ – мн. всех положительных (плж.) целых, дсв-ых чисел

$k = \overline{1,n}$ – мн. нтр. чисел от 1 до n

$R_1 \times R_2 = \{(x, y)\colon x \in R_1, y \in R_2\}$ – декартово (дек.) произведение (пзв.), $R\times R = R^2$– плоскость (пл.)

$R^n = R\times R\times\ldots\times R = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_j \in R,\ j = \overline{1,n}\}$ – n-мерное линейное (векторное) пространство (пр.), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор пр-ва R^n

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$\triangleq$ – равенство (рав.) по определению (опр.)

$\equiv$ – тождество

$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \left(\prod\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ – сумма (пзв.) сб-ий A_k, $k = \overline{1,n}$

$M[X]$, $M(X)$, m_x – математическое (мт.) ожидание случайной (слн.) вел-ы X

$D[X]$, $D(X)$, σ_x^2 – дисперсия слн. вел-ы X, где $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ – среднеквадратическое отклонение (ср. кв. отк.) слн. вел-ы X

det K – определитель матрицы K

$A^{\mathrm{T}} = A'$ – транспонированная матрица

E – единичная матрица

A, B, C – слн. сб-ия

ω – элементарное (элр.) сб-е

$P(A/B)$ – условная вер. сб. A относительно (отс.) B

H_k – k-я гипотеза

C_n^m – число сочетаний из n по m

X, Y, Z – слн. вел-ы, а x, y, z – реализации этих слн-х вел-н
$\{\omega: X(\omega) \le x\}$ – мн. ω, для к-ых $X(\omega) \le x$
$P(X \le x)$ – вер. сб-ия $\{\omega: X(\omega) \le x\}$
$P_i \triangleq P\{X = x_i\}$ – вер. сб-ия $\{X = x_i\}$ рав-во по опр-ю
$F(x)\ \big(f(x)\big)$ – фк-ия (плотность) распределения (рсп.) слн. вел-ы X
$\overset{\circ}{X}\ \Big(\overset{*}{X}\Big)$ – центрированная (нормированная) слн. вел.
$\Phi(x)$ – фк-ия Лапласа
$\Gamma(x)$ – гамма-фк. Эйлера
$F(x, y)\ \big(f(x, y)\big)$ – фк-ия (плотность) рсп-ия двумерной слн. вел-ы (X, Y)
K_{xy} – корреляционный момент (ковариация) слн. вел-н X и Y
r_{xy} – коэффициент (коэф.) корреляции слн. вел-н x и y
K – ковариационная матрица с элементами (эл.) k_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$
R – корреляционная матрица
$p_{ij} \triangleq P\{X = x_i,\ Y = y_j\}$ – вер. сб-ия $\{X = x_i,\ Y = y_j\}$
$\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ – слн-я последовательность (посл.)
$X_n \xrightarrow{F} X$, $X_n \xrightarrow{P} X$, $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ – сходимость слн. посл-ти $\{X_n\}$ по рсп-ю, вер-ти, в ср. кв.
ν_r, μ_r – выборочные начальные и центральные моменты порядка r
$X \sim \chi^2(n)$, $S(n)$, $F(n, m)$ – слн. вел. X имеет рсп-ие хи-квадрат, Стъюдента, Фишера
$\hat{\theta}(Z_n)$ – выборочная оценка параметра θ
$L(Z_n, \theta)$ – фк-ия правдоподобия
$[x]$ – целая часть числа x

2°. Список основных сокращений

абс. – абсолютный
авт.; автц. (автн.; автч.) – автомат, автоматизация (автоматизированный, автоматический)
автокрц. – автокорреляция
авторег. – авторегрессия
алг. – алгебраический
алт. (алтч.) – алгоритм (алгоритмический)
анч. (анг.) – аналогично (аналогия)
ариф. – арифметический
АСУ (АСУП) – Автоматизированная система управления (АСУ производством)
АТС (ТС) – автоматическая телефонная станция (телефонная станция)
беск. – бесконечный
бином. – биномиальный
блп. (блпщ.) – (благоприятствует) благоприятствующий
бркн. (брк.) – бракованный (браковка)
вбр. (вбрч.) – выборка (выборочный)
вел. – величина
вер. (верн.) – вероятность (вероятностный)
взр. (взр-й) – возрастает (возрастающий)
врж. (врж-ть) – выражение (выражать)
врн. (вр-и) – временный (времени)
врц. (врцн., врт.) – вариация (вариационный, вариант)
в ттом – в том и только в том
ВЦ – вычислительный центр
выч. (вычт.; вычн.) – вычисление (вычислительный, вычисленный)
ГВЦ – главный вычислительный центр
геом. – геометрический
гиперпл. – гиперплоскость
гл. – глава
гнр. – генеральный
гос. (госн.) – государство (государственный)
гп. – гипотеза
грф. (грфч.) – график (графический)
ГТС – городская телефонная станция
дв. – двойственный
дек. – декартовое
диф. (дифм., дифн.) – дифференциал (дифференцируема, дифференцирование)
дк. – дискретный
днм. (днмч.) – динамика (динамический)
долговр. – долговременная
дпн. (дпнт.) – дополнение (дополнительный)
др. – другие
дсв. (дсв-но) – действительный (действительно)
дсп. (дспн.) – дисперсия (дисперсионный)
Д., д-во (д-ть) – доказательство (доказать)
Д.дт. – д-во достаточности
Д.нх. – д-во необходимости

дт. (дт-но) – достаточный (достаточно)
дтр. – детерминированный
ед. (едч., едн., еднт.) – единица (единичный, единственный, единственность)
ЕС – единая система
збр. (збрн.) – забраковать (забракованный)
зв. (звт., -ть) – зависимый, зависимость
зм. – замечание
зн. (знщ.) – значение (значащие)
ЗПР – задача принятия решений
изб. – изображенный
имт. (имтн.) – имитация (имитационный)
инп. (импн.) – интерполяция (интерполяционная)
инпц. (инпр.) – интерпретация (интерпретируется)
инр. (инрн.) – интервал (интервальный)
инсп. – инспектирование
инт. (интв.; интн.) – интеграл (интегрирование, интегральная)
инф. (инфн.) – информация (информационный)
иссл. (-ль), иссдм.; исслт. – исследование (исследователь), исследуемый, исследовательский
исп. – испытание
исх. – исходная
и т.д. – и так далее
ИТР – инженерно-технический работник
кас. – касательная
кач. (-но, качн.) – качество (качественно, качественный)
кбр. – кибернетика
кв. (квч.) – квадрат (квадратичная)
кн. (окн., мкн.) – канал (одноканальный, многоканальный)
кол. (-но, колн.) – количество (количественно, количественный)
коэф. – коэффициент
кптв. – капиталовложение
кпт-х влж-й – капитальных вложений
кр. (-ль) – контрольная (контроль)
крд. – координаты
крум. (крут.) – контролируемый (контролируется)
крт. – критический
крт. обл. (двс., лвс., прс.) – критическая область (двусторонняя, левосторонняя, правосторонняя)
КС – краткий словарь специальных терминов
крц.; крцн. (крв.) – корреляция, корреляционный (коррелированный)
кт. – критерия
к-ый (к-му) – который (которому)
лгр. (лгрч.) – логарифм (логарифмический)
лгч. – логический
лин. – линейный
лк. – лекция
ЛПР – лицо, принимающее решение
мгр. – многогранник
мд. (мдв.) – модель (моделирование)
мдм., мд-мый – моделируемый
МДР – множество допустимых решений
мкс. (max) – максимальный (максимум)
мксз. (-й) – максимизация (максимизирующий)
ММ, мт. мд. – математические модели
ММв, мт.мдв. – математическое моделирование
ммр. (мр.; дмр.; омр.; n-мр.) – многомерный (мерный, двумерный, одномерный, n-мерный)
мн. (мнн.; мн-ный) – множество (множественный)
мнм. (min) – минимальный (минимум)
мнмз. (-й) – минимизация (минимизирующий)
МО – массовое обслуживание
мотс. – межотраслевой
мр. – мерный
мт. (мтч., мт-й) – математика (математический)
мт.-стсч. – математико-статистический
мтр. – метрический
мфкт. (мфктн.) – много факторов (многофакторный)
муг. – многоугольник
мчл. – многочлен
наз. (назм.) – называется (называемый)
нач. (нач-ый) – начало (начальный)
нбл.; нблт. (нблм., нблв.) – наблюдение, наблюдатель (наблюдаемый, наблюдавшийся)
нб. – наибольший
невзр. – невозрастающий
недиф. – недифференцируемый
недт. – недостаточный
незв. (незвт.; незв-ть) – независимый (независимость)
нек-ый (-го) – некоторый (некоторого)
некрум. (некрут.) – неконтролируемый (не контролируется)
некрв. (некрцн.) – некоррелированный (некорреляционный)
нелин. – нелинейный
ненорв. – ненормированный
необс. – необслуженный
неогр. – неограниченный
неодн. – неоднородный
неопр. (-на) – неопределенный (не определена)
неопт. – неоптимальный
неотц. – неотрицательный
неплж. – неположительный
непр. – непрерывный
непрз. (непрзл.) – непроизводственный (непроизводительный)
непст. – непостоянный
нерав. – неравенство

неслн. – неслучайный
несущ. (-но) – несущественный (несущественно)
неуб. – неубывающий
неуд. – неудовлетворительный
неуп. – неупорядоченный
нецлч. – нецелочисленный
нм. – наименьший
норв. (нор-ют) – нормированный (нормируют)
норм. – нормальный
н-р, нп. – например
нтр. – натуральный
н/х – народное хозяйство
нх. (нх-ть) – необходимый (необходимость)
О: – ответ
обз. (обозм.) – обозначается (обозначаемая)
обл. – область
общс. – общественный
обс. – обслуживание
огр. (огрн.) – ограничение (ограниченный)
одн. (однс-и) – однородный (однородности)
ОДР – область допустимых решений
ож. – ожидание
окр. – окружность
окрс. – окрестность
опр., опрн., опрм., опрс., опрт., опрщ. – определение, определенный, определяемый, определенность, определитель, определяющий
опт. (оптз.) – оптимальный (оптимизация)
орг. (оргн.) – организация (организационный)
орт. (ортз., ортс.) – ортогональный (ортогонализируя, ортогональность)
ортонор. – ортонормированный
осн. – основное
ост. – остаточный
отб. – отображение
отк. – отклонение
отн. – отношение
отс. (-но) – относительный (относительно)
отц. – отрицательный
пвх. – поверхность
пер. – переменная
пж. – положение
ПЗ – постановка задачи
пзв. – произведение
пл. – плоскость
плж. – положительный
плн. – планирование
пм. – прямая
погр. – погрешность
подмн. – подмножество
подпр. – подпространство
подпрг. – подпрограмма
подынт. – подынтегральная
полупл. – полуплоскость
полупм. – полупрямая
посл. (посл-но) – последовательность (последовательно)
пр., пр-во – пространство
прб. – преобразование
прг. (пргв.) – программа (программирование)
прд. – предприятие
прж. – приближенный
прз. (прзн., прзл.) – производство (производственный, производительность)
прл., $\|$ – параллельный
прп., $\perp$ – перпендикулярный
прт. – приблизительно
прц. – пропорциональный
прч-ый (-на, -е) – предпочтительный (предпочтительна, предпочтительнее)
пст. – постоянная
птб. (птбл.) – потребность (потребительский)
пуг. – прямоугольник
пщ. – площадь
Р. – решение
рав. – равенство
рас. (расв., расн.) – рассмотрим (рассматриваем, рассмотренный)
рсп. (рспн.) – распределение (распределенный)
расх. – расходится
рег. (регн.) – регрессия (регрессионная)
рис. – рисунок
с. – страница
сб. – событие
св. – свойство
свк. – совокупность
сгж. – сглаживание
сд-й (сд-но) – следующий (следовательно)
сж. – сложение
ск. – скалярный
сл., сл-но (слн.) – случай, случайно (случайный)
СМ – статистические модели
см. – смотрите
см – сантиметр (с числом)
СМО – система массового обслуживания
сост. – составляющая
соц. (соцч.) – социальный (социологический)
ср. – средняя
ср. кв. отк. – среднее квадратическое отклонение
с.с., СС – сложная система
стд., стдн. (стдз., стдзн.) – стандарт, стандартный (стандартизация, стандартизированная)
ств., ств-но (-щая) – соответствие, соответственно (соответствующая)
ст. (-нь) – степенной (степень)
стн. – соотношение
стс. (стсч.) – статистика (статистический)
сум. (сумв., сумр.) – сумма (суммирование, суммарный)

сущ. (сущв., -но, -щих) – существует (существование, существенно, существующих)
сх. (схм.) – сходится (сходящимися)
с/х-ый – сельскохозяйственный
табл. – таблица
т.е. – то есть
теор. – теоретический
техл. – технологический
техн. – технический
т.к. – так как
т.о. – таким образом
тожд. (тожд-но) – тождество (тождественно)
ТП – технологический процесс
триг. – тригонометрический
ттогда – тогда и только тогда
туг. – треугольник
у., упж. – упражнение
уб. (уб-й) – убывает (убывающий)
уд., уд-но (уд-щий) – удовлетворяет, удовлетворительно (удовлетворяющий)
Ук. – указание
умн. – умножение
уп. – упорядочение
упл. – управление
ур. – уравнение
утв. – утверждение
усл. – условный
ФА – факторный анализ
фкт. (фктн., офктн., дфктн., мфктн.) – фактор (факторный, однофакторный, двухфакторный, многофакторный)
фк. – функция
фкс. (фксн.) – фиксируем (фиксированный)
фм. – формула
фнц. – функциональный
фнцр. – функционирование
фрмз. – формализация
фунд. – фундаментальный
хоз. – хозяйство
хрк., хркс., хркз. (хркч.) – характер, характеристика, характеризуется (характеристическая)
цлч. – целочисленный
ЦПТ – центральная предельная теорема
цтр. (цтрв.) – центральный (центрированный)
част. – частности
чуг. – четырехугольник
ЭВМ – электронная вычислительная машина
эвр. (эврч.) – эвристика (эвристический)
экв. – эквивалентный
экн., экнч. (экн-ст) – экономика, экономический (экономист)
экн.-мт. – экономико-математический
эксм. (эксл.) – экстремум (экстремальный)
эксп. (экспл., экспт.) – эксперимент (экспериментальный, экспериментатор)
экпц. – экспоненциальный
экпт. – экстраполяция
эл. (элр.) – элемент (элементарный)
эмп. – эмпирический
эф. (эфн., эфс.) – эффект (эффективный, эффективность)
яв-ся (явм-ся) – является (являющимися)
яв-хся (яв-яся, яв-йся) – являющихся (являющаяся, являющейся)
1, 2, …, a – обз-ия, действующие внутри д-ва теоремы, пункта и т.д.
а2 – аксиома 2
з1 – задача 1
зм5 – замечание 5
кз3 – контрольная задача 3
тз1 – типовая задача 1
тп4 – типовой пример 4
л2 – лемма 2
о5 – определение 5
пз7 – познавательная задача 7
п6 – пример 6
с4 – свойство 4
сл2 – следствие 2
т3 – теорема 3
у8 – упражнение 8
§ (§§) – параграф (параграфы)
5° – пункт 5
2°:3.1 – пункт 2 из гл. 3 §1
(3):2.3 – стн. (3) из гл. 2 §3
$A \underset{(2)}{\Rightarrow} B$ – из A по стн. (2) следует B
$A \underset{(3)}{=} B$ – A в силу стн. (3) равно B
■ – конец д-ва
! – подумай сам, почему так
!! – настоятельно рекомендуем провести рассуждения самим

I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

> Замечательно, что науке, начинающейся с рассмотрения азартных игр, суждено было стать важнейшим объектом человеческого знания…
>
> П.С. Лаплас

ЛЕКЦИЯ 1

1.1. ВЕРОЯТНОСТИ И ЧАСТОТЫ СОБЫТИЙ. КОМБИНАТОРИКА

1°. Возникновение предмета. Теория вероятностей (вер.) возникла в середине XVII в. в связи с задачами расчета шансов выигрыша в азартных играх. Страстный игрок в кости француз де Мере, стараясь разбогатеть, придумывал новые правила игры. Он предлагал бросать кость четыре раза подряд и держал пари, что при этом хотя бы один раз выпадет шестерка (6 очков). Для большей уверенности в выигрыше де мере обратился к мт-ку Паскалю с просьбой рассчитать вер-ть выигрыша в этой игре.

Паскаль задачу решил следующим (сд.) образом. При бросании кости имеется шесть исключающих друг друга равновозможных случаев (сл.), и вер-ть выпадения шестерки (появления события A) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$ $\left(\text{или} \frac{100}{6}\%\right)$, где n – число всевозможных сл-в, m – число благоприятствующих сл-в появлению события (сб.) A (здесь $n = 6$, $m = 1$). При двукратном бросании кости результат первого бросания – выпадение определенного (опр.) числа очков – не окажет никакого влияния на результат второго бросания, сд-но всех равновозможных сл-в будет $6 \cdot 6 = 36$. Из 36 равновозможных сл-в в 11 сл-ях шестерка появится хотя бы один раз (см. 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 2, 3, 4, 5, 6) и в $5 \cdot 5 = 25$ сл-ях шестерка не выпадет ни разу. Тогда вер-ть появления сб-я A (состоящего в том, что при двукратном бросании кости появится хотя бы один раз шестерка) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{11}{36}$ (теперь $n = 36$, $m = 11$). Вер-ть того, что шестерка не появится ни разу, т.е. вер-ть сб. $\overline{A}$, называемого (наз.) противоположным сб-ю A, равна $P\left(\overline{A}\right) = \frac{25}{36} = 1 - P(A)$, т.е. $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$. При трехкратном бросании кости число всех равновозможных сл-в будет $n = 36 \cdot 6 = 6^3$, при трехкратном бросании кости число сл-в, в к-ых шестерка не появится ни разу (появление сб-я $\overline{A}$), равно $m = 25 \cdot 5 = 5^3$, при четырехкратном – $m = 5^3 \cdot 5 = 5^4$. Тогда вер-ть того, что при четырехкратном бросании ни разу не выпадет шестерка, равна $P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{5^4}{6^4}$, а вер-ть появления шестерки хотя бы один раз, или вер-ть выигрыша де мере, равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}.$$

Т.о., у де Мере было больше шансов выиграть, чем проиграть.

Рассуждения Паскаля и все его выч-ия основаны на классическом опр-и понятия вер-ти как отношения (отн.) числа благоприятных сл-в к числу всех равновозможных сл-в.

Важно отметить, что произведенные выше расчеты относились к явлениям массового характера (хрк.). Утверждение (утв.), что вер-ть выпадения шестерки при бросании игральной кости равна 1/6, имеет сд-й объективный смысл: при большом количестве (кол.) бросаний доля числа выпадений шестерки будет в среднем равна 1/6; так при большом числе серий, н-р, при 600 бросаниях появления шестерки будет весьма близка к 100.

Отн-ие m/n числа появлений сб-ия к числу испытаний наз. частостью сб-я. Для однородных (одн.) массовых явлений частости сб-й ведут себя устойчиво, т.е. мало колеблются около средних вел-н, к-ые и принимаются за вер-ти этих событий (стсч-ое опр. понятия вер-ти).

Вышевведенные понятия более подробно рас-им далее.

В XVII-XVIII вв. теория вер-ей развивалась незначительно, так как (т.к.) область (обл.) ее применения ограничилась небольшим кругом вопросов (страхование, азартные игры, демография). В XIX в. и до настоящего времени в связи с запросами практики теория вер-ей непрерывно (непр.) и быстро развивается, находя применение все в более разнообразных обл-х науки, техники, экономики (теория ошибок наблюдений, теория стрельбы, статистика, молекулярная и атомная физика, химия, метеорология, вопросы планирования, стсч-й контроль в прз-ве и т.д.).

2°. Случайные события. Событие – первоначальное понятие, как точка, прямая и т.д. Поэтому опр-ия не имеет.

Под событием понимается любой исход, возможный или нет, при реализации некоторого (нек-го) комплекса условий.

Реализация комплекса условий называется (наз.) испытанием или опытом.

Событие наз. достоверным, если оно происходит при каждом испытании.

Событие наз. невозможным, если оно не происходит при любом (каждом) испытании.

События (сб.) обозначим (обз.) через $\varnothing$, A, B, C, …, Ω или A_1, A_2, …, A_n, где $\varnothing$ – невозможное, Ω – достоверное сб-я.

Множество (мн.) сб-й $F = \{\varnothing, A, B, C, \ldots, \Omega\}$ наз. полной группой сб-й, если в результате опыта непременно должен появиться хотя бы один из них.

Каждое сб. A может быть разложено на сб-я $\{\omega_i\}$, наз-мые элементарными (неразложимыми) сб-ми, то есть (т.е.) $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$.

Мн-во элементарных (элр.) сб-й $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ наз. пространством (пр.) или полем элр-ых сб-й, если при опыте появится ровно одно сб. ω_i. Т.о., мн-во сб-й F яв-ся системой подмножеств (подмн.) элр-ых сб-й.

п1. Пусть бросается однородная (одн.) шестигранная (1-6) игральная кость. Тогда бросание игральной кости – испытание, выпадение очков – событие, невозможное событие – выпадение 7 очков, достоверное событие – выпадение очков от 1 до 6, элр-ое событие – выпадение очка 5, сб. $A = \{2, 4, 6\}$ – выпадение четных очков, пр-во элр-ых событий – $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, т.к. один из i ($i = \overline{1,6}$) выпадает обязательно, значит, Ω – достоверное сб.

3°. Классическое определение вероятности событий. Частота событий. Рас-им мн-во сб-й

$$F = \{A, B, C, \ldots, E\}, \tag{1}$$

к-ое может обладать нек-ми св-ми. Введем сд-ие опр-ия.

Два сб-ия A и B наз. несовместимыми, если возможность одного исключает возможность другого (рис. 1). Иначе они совместны (рис. 2).

Мн. сб-й (1) наз. несовместимым, если несовместима любая пара из них.

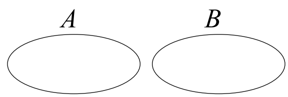


Рис. 1

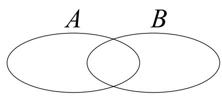


Рис. 2

Два сб. A и B наз. равновозможными, если появление одного столь же возможно, как появление другого.

Мн. сб-й (1) наз. равновозможным, если равновозможна любая пара из них.

Пусть мн-во сб-й (1) обладает сд. св-ми: 1) образует полную группу событий; 2) несовместимо; 3) равновозможно.

События, обладающие этими тремя св-ми, наз. случаями (шансами). Н-р, сб-ия для игральной кости $F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Случай (сл.) наз. благоприятствующим (блп.) нек-му сб-ю, если появление этого сл-я влечет за собой появление данного сб-я.

Вероятностью (вер.) сб-я A наз. число $P(A) = P = m/n$, где m – число сл-в, блп-их сб-ю A, n – число элр-ых сб-й полной группы сб-й. Данное опр. яв-ся классическим опр-ем вер-ти.

п2. Пусть бросается игральная кость. Здесь имеем шесть случаев: появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (это мн. образует полную группу сб-й, несовместимых и равновозможных). Найти вер-ти сб-й $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2\}$, $C = \{7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Решение (Р.). $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$, $P(C) = \dfrac{0}{6} = 0$, т.е. $C = \varnothing$; $P(D) =$ $= 6/6 = 1$, т.е. $D = \Omega$.

Т.о., для невозможного сб-я $P(\varnothing) = 0$, достоверного $P(\Omega) = 1$, а для случайного (слн.) сб-я $P(A) \in [0,1]$, н-р, для монеты выпадение герба (Γ) и цифры ($\overline{\Gamma}$), одинаково возможны, поэтому $P(\Gamma) = P(\overline{\Gamma}) = 1/2$. Итак, получим

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{2}$$

Если испытание (исп.) не сводится к схеме случаев (н-р, игральная кость неправильная, т.е. неоднородная (неодн.) или при стрельбе по движущейся мишени), то классическим опр-ем вер-ти сб-й пользоваться нельзя и мы приходим к понятию частоты сб-й.

Частота есть выражение вер-ти, полученной из опыта, практики и обз-ся через $P^*(A) = P_n = m/n$. Пусть $\nu_i = 1$, если на i-ом опыте сб. A произошло, и $\nu_i = 0$ в противном случае. Тогда отн. $P^*(A) = P_n = \dfrac{1}{n}(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n) = \dfrac{m}{n}$ наз. частотой сб. A при n исп-ях. Н-р, если мы хотим проверить, что $P(Г) = 1/2$, то подбрасываем монету n раз и считаем m – выпадение герба. Тогда $P_n = m/n$. Причем $P_n \to P(Г)$ при $n \to \infty$. Этот факт выражает существование (сущв.) объективной закономерности, наз-мой устойчивостью частот. Поэтому мы принимаем $P(Г) = 1/2$.

п3. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Найти вер-ть того, что вынутый шар будет белым.

Р. Пусть A – событие, состоящее в появлении белого шара. Тогда $m = 2$, $n = 5$. Отсюда получим $P(A) = 2/5$.

4º. Элементы комбинаторики. Рас-им мн. из n элементов (эл.) $M_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в частности (част.) $M_3 = \{a, b, c\}$. Дадим сд-ие опр-ия.

о1. Перестановками из n эл-ов наз. такие их соединения, к-ые различаются друг от друга только **порядком** входящих в них эл-ов и обз-ся

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n. \qquad (3)$$

В част., для M_3 имеем $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Дсв-но: abc, bca, cab, bac, cba, acb.

о2. Размещениями из n эл-ов по m наз. такие их соединения, к-ые различаются друг от друга самими **эл-ми** и их **порядком** и обз-ся

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (4)$$

откуда при $m = n$ получим $A_n^m = P_n$. В част., $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$. Дсв-но, имеем: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

о3. Сочетаниями из n эл-ов по m наз. такие их соединения, к-ые отличаются друг от друга только самими **эл-ми** и обз-ся

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (5)$$

В част., $C_3^2 = \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$. Дсв-но, получим: ab, ac, bc.

Из формул (фм.) (3)-(5) получим сд-ие их св-ва.

с1. $P_0 = 0! = 1$.

Доказательство (Д., д-во). $P_n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n = P_{n-1}\cdot n$. Отсюда при $n = 1$ получим $P_1 = P_0\cdot 1 = 1$, т.к. $P_1 = 1! = 1$. Тогда $P_0 = 0! = 1$.

с2. $A_n^0 = 1$. Д. Из $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ при $m = 0$ имеем $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.

с3. $C_n^0 = 1$. Д. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1\cdot n!} = 1$. В част., $C_n^1 = \dfrac{n}{1!} = n$.

с4. $C_n^n = C_n^{n-m}$. Д. $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$. В част., $C_n^0 = C_n^n = 1$.

с5. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$. Д. Т.к. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ (см. о2), то $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

с6. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, $1 \le m < n$ (правило Паскаля).

Д. Имеем $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \dfrac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m}+\frac{1}{m}\right) = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\,\frac{n}{(n-m)m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

с7. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Д. Из ф-мы бинома Ньютона (см. [50]) имеем $(a+x)^n = a^n + \dfrac{n}{1!}a^{n-1}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n \Rightarrow (a+x)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}x + C_n^2\, a^{n-2}x^2 + C_n^3\, a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^n\, x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} x^i$. Отсюда при $a = x = 1$ получим $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

зм1. При решении комбинаторных задач два действия могут выполняться одновременно по правилу умножения (н-р, P_nP_k, $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ и т.д.) или может быть выполнено либо первое действие, либо второе по правилу сложения (н-р, $A_n^k + A_m^k$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$ и т.д.). Причем правила умножения (умн.) и сложения (сж.) можно распространять на любое конечное число действий.

п4. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на расположенные подряд стулья, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – с нечетными. Сколькими способами это можно сделать?

Р. Здесь соединения отличаются друг от друга только порядком. Тогда мальчики могут садиться $P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ способами. Столько же – P_4 возможностей – имеют и девочки. Эти действия (перестановки) выполняются одновременно. Значит, всего будет $P_4\,P_4 = 24\cdot 24 = 576$ способов.

п5. Нх-мо составить варианты контрольной (кр.) работы, каждый из к-ых должен содержать три задачи. Одна задача выбирается из любого параграфа (§) I гл. сборника задач, вторая – из любого § II гл., а последняя – из любого § III гл. При этом следует учесть, что I и III гл. содержат два §, а II гл. – три §.

Сколько видов кр-ой работы можно составить исходя из этих условий, если вид работы опр-ся только номерами §-ов, из к-ых выбраны задачи.

Р. Для каждой гл. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком, значит, гл-ам I, II и III ств-но имеем $A_2^1 = 2$, $A_3^1 = 3$ и $A_2^1 = 2$ способов. Здесь сами эл-ты не играют роли из-за выбора по одному эл-ту (сравни с п6). Они наступают одновременно, тогда всего $A_2^1 \ A_3^1 \ A_2^1 = 2\cdot3\cdot2 = 12$ способов.

п6. В группе 25 учащихся. Нх-мо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать.

Р. В данном случае из 25 учащихся выбираем старосту и из оставшихся 24 – профорга, можно выбирать и наоборот: сначала профорга, затем старосту, т.е. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком. Значит, имеем всего $A_{25}^2 = 25\cdot24 = 600$ способов выбора.

Задачу можно решить и так: сначала выбираем старосту $A_{25}^1 = 25$ способами, затем профорга $A_{24}^1 = 24$ способами. Т.к. эти действия выполняются одновременно, то по правилу умножения получим $A_{25}^1 \ A_{24}^1 = 25\cdot24 = 600$.

п7. В группе 25 чел. Сколькими способами из них можно выбрать двоих на дежурство?

Р. Ясно, что здесь соединения отличаются друг от друга только самими эл-ми, сд-но, получим всего $C_{25}^2 = \dfrac{25\cdot 24}{2!} = 300$ способов выбора.

п8. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Нх-мо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывается порядок выбора изделий?

Р. При выборе двух изделий в каждом сорте соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком, значит, $A_{20}^2 = 20\cdot19 = 380$ и $A_{30}^2 =$ $= 30\cdot29 = 870$. Причем два изделия выбираются или из первого сорта, или из второго, тогда по правилу сж-ия получим всего $A_{20}^2 + A_{30}^2 = 380 + 870 = 1250$ способов выбора.

п9. Сколько существует (сущ.) вариантов опроса 12 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое кол-во учащихся, причем порядок, в к-ом опрашиваются учащиеся, безразличен?

Р. Здесь соединения различаются друг от друга только самими эл-ми, т.е. имеем дело с сочетаниями C_{12}^m, $m = \overline{0{,}12}$. Преподаватель (преп.) может не спросить ни одного из 12 учащихся, тогда таких вариантов будет C_{12}^0. Преп. может спросить только одного учащегося – C_{12}^1, двух – C_{12}^2 и т.д. до двенадцати – C_{12}^{12}. Тогда по правилу сж-ия (с учетом с7) получим $C_{12}^0 + C_{12}^1 +$ $+ C_{12}^2 + \ldots + C_{12}^{12} = 2^{12}$.

Задачу можно решить и так: для каждого учащегося сущ-ет две возможности: он будет опрошен или не опрошен. Тогда по правилу умн-ия имеем: $2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^{12} = C_{12}^{0} + C_{12}^{1} + C_{12}^{2} + \ldots + C_{12}^{12}$, что и следовало найти.

Теперь, используя эл-ты комбинаторики, решим задачи теории вер-ей.

п10. В урне 3 белых шара и 4 черных. Из урны наугад вынимаются два шара. Найти вер-ть того, что оба шара будут белыми.

Р. Вытаскиваем два белых шара, значит, они отличаются не порядком, а самими эл-ми. Тогда $n = C_7^2$ – число всевозможных сл-ов, $m = C_3^2$ – число блп-их сл-в сб-ю B – оба шара белые. Отсюда $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 6} = \dfrac{1}{7}$.

п11. В партии из N изделий M бракованных (бркн.). Из партии наугад выбирается n изделий. Найти вер-ть того, что из n изделий будет m брак-х.

Р. Пусть событие A – вытащили m бркн-х изделий, т.е. они отличаются лишь самими эл-ми. Тогда C_N^n – число всевозможных сл-в, $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ – число блп-ых сл-в; т.к. m бркн-х и $n - m$ не бркн-х изделий появляются одновременно. Отсюда получим

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{NM}(n,m). \qquad (6)$$

Заметим, что на п11 в дальнейшем мы будем ссылаться неоднократно.

ЛЕКЦИЯ 2

1.2. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

1°. Алгебра событий. Сб-ия A, B, C, …, E можно рассматривать (расв.) как мн-ва, каждое из к-ых состоит из эл-ов (элр-ых сб-й, см. 2°: 1.1) $\{\omega_i\}$. Поэтому все операции мн-в (более подробно см. в [51]) автоматически переносятся и сюда. Пусть даны мн-ва (сб-ия) A и B.

о1. Если при каждом опыте σ с появлением сб. A происходит и сб. B, то будем говорить, что A влечет за собой B, или A яв-ся подмн-ом мн-ва B и обз-ся $A \subset B$ (см. рис. 1). При этом равенство (рав.) мн-в вводится так:

$$A = B, \text{ если } A \subset B \text{ и } A \supset B.$$

В качестве примера рас-им мн-ва A, B (рис. 3) и $C = \{1, 2, 5\}$, $D = \{2, 3, 5\}$, для к-ых имеет место $A \not\subset B$ и $C \not\subset D$, $A \not\supset B$ и $C \not\supset D$.

о2. Объединением (суммой) мн-в A и B наз. мн. $C = A \cup B$ (читается (чт.): A или B), состоящее из всех эл-ов, принадлежащих хотя бы одному из мн-в A или B, т.е.

$$A \cup B = \{\omega\colon \omega \in A \text{ или } \omega \in B\} = \{\omega\colon \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

В част., $A \cup A = A$, $\varnothing \cup A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$, $A \cup B = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ (рис. 3), $C \cup D = \{1, 2, 3, 5\}$, где $\varnothing$ – невозможное сб., Ω – достоверное сб.

о3. Разностью мн-в A и B наз. мн. $C = A \setminus B$ (чт.: A минус B) тех эл-ов из A, к-ые не содержатся в B, т.е.

$$A \setminus B = \{\omega\colon \omega \in A \text{ и } \omega \,\overline{\in}\, B\} = \{\omega\colon \omega \in A \wedge \omega \,\overline{\in}\, B\}.$$

Причем не предполагается, что $A \supset B$, н-р, $A \setminus B = \{\mathrm{I}\}$ (рис. 3), $C \setminus D = \{1\}$.

Рас-им полную группу событий $F(A \subset F)$. Тогда разность $F \setminus A = CA = C_F A = \overline{A}$ наз. дополнением к мн-ву A (отс-но F), т.е.

$$\overline{A} = F \setminus A = \{\omega\colon \omega \in F \wedge \omega \,\overline{\in}\, A\}.$$

Н-р, $F \setminus A = \overline{A}$ (рис. 2, чт.: не A). Имеет место и $F \setminus \overline{A} = A$.

Симметрической разностью или разностным сложением (сж.) наз. сумма разностей $A \setminus B$, $B \setminus A$ и обз-ся

$$A \,\Delta\, B = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (A \setminus B) = \{\omega\colon (\omega \in A \wedge \omega \,\overline{\in}\, B) \vee (\omega \in B \wedge \omega \,\overline{\in}\, A)\}.$$

Н-р, $A \,\Delta\, B = \{\mathrm{I}, \mathrm{III}\}$ (рис. 3), $C \,\Delta\, D = \{1, 3\}$. Причем $A \,\Delta\, B$ чт.: A плюс B.

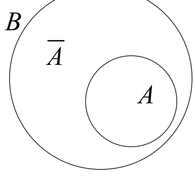


Рис. 1

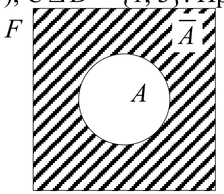


Рис. 2

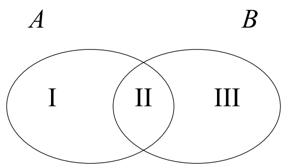


Рис. 3

о4. Пересечением (произведением) мн-в A и B наз. мн. $C = A \cap B$ (чт.: A и B), состоящих из эл-ов, принадлежащих A и B, т.е.

$$A \cap B = \{\omega\colon \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

В част., $A \cap A = A$, $\varnothing \cap A = \varnothing$, $\Omega \cap A = A$, $A \cap B = \{\mathrm{II}\}$ (рис. 3), $C \cap D = \{2, 5\}$.

зм1. Здесь использованы операции $\vee$ – «или», $\wedge$ – «и», яв-еся логическими операциями, ств-но дизъюнкции и конъюнкции (см. в [51]). Кроме того, на практике (н-р, в электротехнике) допускаются и обз-ия: $A + B = A \cup B$, $AB = A \cap B$.

зм2. Пусть дана система мн-в $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in M$. Тогда объединение и пересечение можно обобщать: $A = \bigcup\limits_{\alpha \in M} A_i$, $A = \bigcap\limits_{\alpha \in M} A_i$.

зм3. Из о1-о4 вытекает: если $A \cap B = \varnothing$, то сб-ия A и B несовместимы (см. 3°:1.1), н-р, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (рис. 2); если $A \cap B = A$, то $A \subset B$. Сб-ие $A \cup \overline{A} = \Omega$ есть достоверное сб.

Приведем основные св. операций над сб-ми.

с1. $A \cup A = A$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$.

с2. $A \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

с3. Если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

с4. Если $A \subset B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$.

с5. $A \setminus B = A\overline{B}$ (здесь и дальше $A\overline{B}$ означает $A \cap \overline{B}$).

с6. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

с7. $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$.

с8. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

с9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ и $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

с10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, обобщение: $F \setminus \cup A_\alpha = \cap (F \setminus A_\alpha)$.

с11. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, обобщение: $F \setminus \cap A_\alpha = \cup (F \setminus A_\alpha)$.

с12. $\overline{\overline{A}} = A$.

Для каждого из с1-с12 используем стандартный метод д-ва $A = B$: полагаем $x \in A$ и убеждаемся, что $x \in B$, тогда $A \subset B$ 1. Затем полагаем $x \in B$ и убеждаемся, что $x \in A$, и тогда $B \subset A$ 2. Из 1 и 2 следует $A = B$. Н-р, д-ем с9. Пусть $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in A \cup B = \{x\colon x \in A$ или $x \in B\}$ и $x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, тогда $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap$
$\cap\, C) \cup (B \cap C)$ 1. Теперь пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap C$ или
$x \in B \cap C \Rightarrow x \in C$, $x \in A$ или $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$, тогда $(A \cap C) \cup (B \cap$
$\cap\, C) \subset (A \cup B) \cap C$ 2. Из 1 и 2 следует $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

зм4. Св-ва с1-с12 можно д-ть и геом-ки, н-р, д-ем с11: из рис. 4 имеем $\overline{A \cap B} = \{\mathrm{I, III, IV}\}$ и $\overline{A} \cup \overline{B} = \{\mathrm{III, IV}\} \cup \{\mathrm{I, IV}\} = \{\mathrm{I, III, IV}\}$, сд-но $\overline{A \cap B} =$
$= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

2°. Геометрия и аксиоматика вероятности. Классическое опр. вер-ти, основанное на рас-и конечной группы равновероятных сб-й, недостаточно (недт.) для сл-ев, когда имеем бесконечное (беск.) мн-во исходов. Это приводит к понятию геом-ой вер-ти.

Пусть на плоскости (пл.) имеется обл. G и в ней содержится обл. g с квадрируемой границей. В обл. G наудачу бросается точка. Найти вер-ть попадания точки в обл. g.

Ясно, что вер-ть попадания точки в обл. g пропорциональна (прц.) ее мере (длине, площади, объему и т.д.) mes g (обз-им ее через mg) и не зависит от ее расположения и формы. Поэтому приходим к сд-му опр. геом-ой вер-ти

$$P = \frac{mg}{mG}. \tag{1}$$

зм5. Если обл. G нормировать (норв.), то $mG = 1$. Тогда $P = mg$, т.е. вер-ть сб-ия A можно выразить через ее меры: $P(A) = mg$. Это позволит д-ть ряд теорем.

п1 (задача о встрече). Два лица A и B условились встретиться в опр-ом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 мин, после чего уходит. Чему равна вер-ть встречи лиц A и B, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы (незв.).

Р. Обз-им приход лица A через x и лица B через y. Чтобы встреча произошла, нх-мо и дт-но выполнения условия $|x - y| \le 20$. Благоприятствующая (блпщ.) встрече $g = 60^2 - 40^2$. (рис. 5). Тогда $P = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$.

Если согласно зм5 $mG = 60^2$ нормируем (нор.) (тогда $mG = 1$) и обз-им через C – сб. встречи двух лиц, то получим (см. рис. 6) $P = P(C) = mG = 1^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

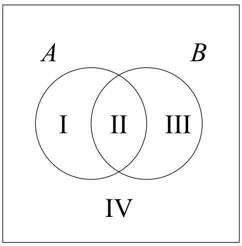


Рис. 4

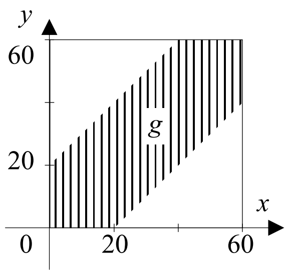


Рис. 5

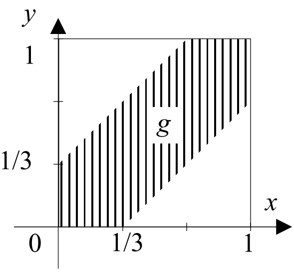


Рис. 6

Теперь рас-им аксиоматическое опр-ие вер-ти. Различные опр. вер-ти и нечеткости др. основных понятий привели к нх-ти обоснования (аксиоматическому построению) теории вер-ей, как и др. разделов математики – геометрии, теории групп и т.д. Здесь изложим аксиоматику вер-ти, предложенную А.Н. Колмогоровым [14, 28].

Рас-им мн-во (пр-во) $\Omega = \{\omega_i\}$ (i – конечное или беск.) элр-х сб-й. Образуем систему (поле сб-й) F подмн-в мн-ва Ω, т.е. $F = \{A, B, C, \dots, \Omega\}$, где эл-ты $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ наз. случайными событиями. Более конкретно к структуре систем F предъявляются требования: 1) $\Omega \in \mathrm{F}$; 2) если A и B подмн-ва мн-ва Ω входят в F, то мн-ва $A + B$, AB, $\overline{A}, \overline{B} \in F$; 3) если подмн-ва $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ мн-ва Ω яв-ся эл-ми мн-ва F, то их сумма $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ и пзв. $A_1A_2\ldots A_n\ldots$ также яв-ся эл-ми мн. F.

Теперь сформулируем аксиомы, опрщ-ие вер-ть.

а1. Каждому слн-у сб-ю A из поля сб-й F поставлено в ств-ие неотрицательное (неотц.) число $P(A)$, наз-ое его вер-ю.

а2. $P(\Omega) = 1$.

а3 (сложения). Если сб-ия $A_1, \ldots, A_n$ несовместимы, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n). \qquad (1)$$

На практике из-за рас-ния сб-й, различающихся на беск., число элр-х сб-й (как в 3)) возникает нх-ть расширения а3.

а4 (расширенная аксиома сложения). Если сб. A равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместимых сб-й $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, то

$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots \qquad (2)$$

Аксиомы а3 и а4 можно объединить, написав

$$P\left(\bigcup_{i \in M} A_i\right) = \sum_{i \in M} P(A_i), \qquad (3)$$

где M – конечное или счетное мн-во.

Заметим, что а4 можно заменить равносильной ей

а4* (непрерывности). Если последовательность (посл.) сб-й $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ таковы, что каждое последующее влечет за собой предыдущее ($B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$) и пзв. всех сб-й B_n есть невозможное сб., то

$$P(B_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (4)$$

Система аксиом Колмогорова не противоречива, т.к. сущ-ют реальные объекты, к-ые им удовлетворяют (уд.).

Система аксиом Колмогорова не полна: даже для одного и того же мн-ва Ω вер-ти в F можно выбирать различными способами. Н-р, для игральной кости мы можем положить $P(A_1) = \ldots = P(A_6) = \dfrac{1}{6}$ или $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{4}$, $P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \dfrac{1}{12}$. Неполнота аксиом вызвана существом дела, ведь игральная кость может быть неодн-ой.

Из а1-а4 получим ряд утв-й. Н-р, из рав. $\Omega = \varnothing + \Omega$ по а3 получим $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$. Откуда следует 1) $P(\varnothing) = 0$. Аналогично можно получить: 2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; 3) $0 \le P(A) \le 1$; 4) если $A \subset B$. то $P(A) \le P(B)$; 5) пусть A и B – произвольные сб-я ($A \cap B \ne \varnothing$). Поскольку в суммах $A + B = A + (B - AB)$, $B = AB + (B - AB)$ слагаемые несовместимы, то по а3 получим $P(A + B) = P(A) + P(B - BA)$, $P(B) = P(AB) + P(B - AB)$, отсюда $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Т.к. по а1 $P(AB) \ge 0$, то $P(A+B) \le P(A) + P(B)$.

3°. Теорема сложения. Формула Стирлинга. На основе классического опр-ия вер-ть $P(A) = m/n$, где m – число сл-в, блпщ-х сб-ю A, n – число элр-ых сб-й полной группы сб-й. В част., $P(\Omega) = n/n = 1$ и $P(\varnothing) = 0/n = 0$, где Ω – достоверное сб. и $\varnothing$ – невозможное сб. Сформулируем сд-ю

т1 (сложения). Если $C = A \cup B = A + B$, $AB = \varnothing$ [$AB \neq \varnothing$] и $A, B, C \subset F$, то

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

$$[P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)] \tag{6}$$

Д. Пусть $AB = \varnothing$ (сб. A и B несовместимы, рис. 7) и сб-ю A блп-ет k сл-в, сб-ю B – s сл-в, а $n = k + s + r$. Тогда $P(C) = P(A + B) = \dfrac{k+s}{n} = \dfrac{k}{n} + \dfrac{s}{n} = P(A) + P(B)$.

Теперь пусть $AB \neq \varnothing$ (сб. A и B совместимы, рис. 8), сб. A блп-ет $k + l$ сл-в, сб. B – $l + s$ сл., а $n = k + l + s + r$. Тогда $P(C) = P(A + B) = \dfrac{k+l+s}{n} =$

$= \dfrac{k+l+s+l-l}{n} = \dfrac{k+l}{n} + \dfrac{s+l}{n} - \dfrac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$■

зм6. Стн-ие (6) теоремы 1 можно д-ть и на основе геом-го опр-ия вер-ти, используя зм5 (рис. 9). Пусть $mG = \{\mathrm{I, II, III, IV}\} = 1$ и покажем, что $P(C) = P(A + B) = mg = \{\mathrm{I, II, III}\}$. Из рис. 9 имеем $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \{\mathrm{I,II}\} + \{\mathrm{II, III}\} - \{\mathrm{II}\} = \{\mathrm{I, II}\} + \{\mathrm{III}\} = \{\mathrm{I, II, III}\} = mg$. Причем отличие рис. 8 и 9 состоит в том, что рис. 8 выражает (врж.) кол-во всевозможных и блпщ-их сл-ев сб-й A и B, а рис. 9 врж-ет кол-во сл-ев через их ств-ие площади (пщ.), т.е. $\{k, l, s, r\}$ – кол. сл-в сб-й, а $\{\mathrm{I, II, III, IV}\}$ – кол. ств-их пщ-ей сл-ев этих сб-й, тогда мн-ва сб-й F врж-ся через мн. пщ-ей G, где $mG = P(F) = 1$, $\{\mathrm{I, II}\} = mA = P(A) = (k + l)/n$, $\{\mathrm{II}\} = m(AB) = P(AB) = l/n$, $n = k + l + s + r$. Аналогично д-ся и стн-ие (5). Более того, для трех совместимых сб-й получим:

$$\begin{gathered} P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{gathered} \tag{7}$$

Для д-ва стн. (7) используем рис. 10. Пусть $mG = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ и покажем, что $P(D) = mg = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Дсв-но, из рис. 10 получим $P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \{1, 2, 4, 5\} + \{2, 3, 5, 6\} + \{4, 5, 6, 7\} - \{2, 5\} - \{4, 5\} - \{5, 6\} + \{5\} = \{1, 4\} + \{2, 3\} + \{6, 7\} + \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = mg$.

Методом мт-ой индукции фм-у (7) можно обобщить:

$$\begin{gathered} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i; A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i; A_j; A_k) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая стн. 8 и $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$, можно обобщить и фм-у (5):

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{9}$$

Из m1 с учетом $P(\Omega) = 1$ получим ряд следствий.

сл1. Если $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$, то $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

сл2. Из сл1 получим, что $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$, Тогда

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (10)$$

с3. Если $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$. Дсв-но, $B=A+\overline{A}B$ (рис. 1) и $A\cap\overline{A}B=\varnothing$, тогда в силу т1 имеем $P(B)=P(A+\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A}B)\ge P(A)$, ибо $P(\overline{A}B)\ge 0$.

с4. Вер-ть любого сб-ия заключена между нулем и единицей. Дсв-но, из $\varnothing\subset A+\varnothing=A=A\Omega\subset\Omega\Rightarrow 0=P(\varnothing)\le P(A)\le P(\Omega)=1$, т.е. $0\le P(A)\le 1$.

п2. Из колоды 36 карт наудачу вынимаются три карты. Найти вер-ть того, что среди них окажется точно один туз (см. стн. (6) из 4°:1.1).

Р. Пусть A – сб. «вытащили один туз». По условию задачи $n=C_{36}^3$ – число сл-в, $m=C_4^1\,C_{32}^2$ – число блп-их сл-в. Тогда получим $P(A)=\dfrac{C_4^1\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}=$

$$=\frac{4\cdot 32\cdot 31\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 36\cdot 35\cdot 34}=\frac{31\cdot 16}{35\cdot 3\cdot 17}=\frac{496}{1785}\approx 0{,}2778.$$

п3. Из колоды карт наудачу вынимаются три карты. Найти вер-ть того, что среди них окажется хотя бы один туз.

Р. Пусть $A=A_1+A_2+A_3$, где несовместимые сб-я означают: A_1 – появление одного туза, A_2 – двух, A_3 – трех тузов. Тогда по стн. (9) из т1 имеем $P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\dfrac{C_4^1\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}+\dfrac{C_4^2\cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}+\dfrac{C_4^3\cdot C_{32}^0}{C_{36}^3}=$

$$=\frac{16\cdot 31}{3\cdot 35\cdot 17}+\frac{3\cdot 16}{3\cdot 35\cdot 17}+\frac{1}{3\cdot 35\cdot 17}=0{,}2778+0{,}0269+0{,}0006=0{,}3053.$$

Р (другой способ). Найдем вер-ть противоположного сб-я $\overline{A}$ (среди вынутых карт не окажется ни одного туза): $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_{32}^3C_4^0}{C_{36}^3}=\dfrac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 36\cdot 35\cdot 34}=$

$=\dfrac{31\cdot 8}{3\cdot 37\cdot 7}=0{,}6947$. Тогда по стн-ю (10) получим $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}6947=0{,}3053$. Выч-ие $P(A)$ этим способом выгодно в силу неразложимости $\overline{A}$ на элр-ые сб-я.

зм7. При выч-и факториалов полезна фм-а Стирлинга [32]

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\;n^ne^{-n}. \qquad (10^*)$$

п4. Колоду из 36 карт разделяют пополам. Найти вер-ть того, что в обеих частях равное число черных и красных карт.

Р. Имеем $n=C_{36}^{18}$, $m=C_{18}^9\,C_{18}^9$. Тогда $P(A)=\dfrac{C_{18}^9C_{18}^9}{C_{36}^{18}}=\dfrac{18!\,18!\,18!\,18!}{9!\,9!\,9!\,9!\,36!}=$

$$=\frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}=\frac{(2\pi\cdot 18)^2\left(18^{18}e^{-18}\right)^4}{\sqrt{2\pi\cdot 36}\;36^{36}e^{-36}(2\pi\cdot 9)^2\left(9^9e^{-9}\right)^4}=\frac{2}{\sqrt{18\pi}}\approx 0{,}26.$$

п5. Вер-ть попадания в мишень первого стрелка равна 0,8, второго – 0,7. Найти вер-ть попадания при совместной стрельбе.

Р. Пусть сб. A – попадание первого стрелка, B – второго, причем $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$. Сб. совместны, т.е. $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}56$. Тогда по ф-ме (6) получим $P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}7 – 0{,}56 = 0{,}94$.

4°. Независимость событий. Условная вероятность. Теорема умножения. Дадим сд-ие

о5. Сб. A наз. независимым (незв.) от сб. B, если вер-ть сб-я A не зависит от того, произошло сб. B или нет.

о6. Сб. A наз. зависимым (зв.) от сб. B, если вер-ть сб-я A меняется в зв-ти от того, произошло сб. B или нет.

о7. Вер-ть сб-я A при условии, что B произошло, наз. условной вер-ю и обз-ся $P(A/B)$.

Из этого обз-ния вытекает условие незв-ти [зв-ти] сб-ия A и B:

$$P(A/B) = P(A), \tag{11}$$

$$[P(A/B) \neq P(A)]. \tag{12}$$

Н-р, пусть бросаются две монеты и пусть сб. A – появление герба на первой монете, B – появление герба на второй. Здесь сб. A незв-т от B, т.е. $P(A/B) = P(A)$. В п5 сб-ия A – попадание первого стрелка и B – второго также незв-ы, т.е. $P(A/B) = P(A) = 0{,}8$, $P(B/A) = P(B) = 0{,}7$.

п6. В урне три шара: два белых и один черный. Два лица наугад вынимают из урны по одному шару. Рас-им сб-ия A – появление белого шара у первого лица, B – появление белого шара у второго лица.

Вер-ть сб. A до сб-ия B равна $P(A) = 2/3$. Если стало известно, что сб. B произошло, то $P(A/B) = 1/2$, т.е. A зв-т от B.

т2 (умножения). Вер-ть произведения (пзв.) двух сб-й равна пзв-ю одного из них на условную вер-ть другого, выч-ую при условии, что первое имело место, т.е.

$$P(AB) = P(B)\,P(A/B), \tag{13}$$

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A). \tag{14}$$

Д. Пусть сб-ю A блп-ет $k + l$ (рис. 8) элр-ых сб-й, AB – l сб-й, B – $l + s$ сб-й, всем остальным блп-ет r сб-й. Тогда $n = k + l + s + r$ – общее число сб-й. Из т1 имеем $P(AB) = l/n$. Выч-им $P(A/B)$.

Если сб. B произошло, то сб-ю A блп-ет l сб-й (рис. 8), т.е. получим $P(A/B) = \dfrac{l}{l+s} = \dfrac{l}{n} : \dfrac{l+s}{n} = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, откуда следует (13). Аналогично д-ся стн. (14): $P(B/A) = \dfrac{l}{k+l} = \dfrac{l}{n} : \dfrac{k+l}{n} = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

зм8. Если сб-ия A и B несовместимы (рис. 7) или одно из них (н-р, сб. A, к-му блп-ет k сб-й) невозможно (рис. 11), то получим $P(A/B) = \dfrac{0}{l+s} = \dfrac{0}{n} : \dfrac{l+s}{n} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$ и $P(AB) = 0$.

Из т2 получим сд-ие следствия.

сл3. Если сб. A незв-мо от B, то и B незв-мо от A. Дсв-но, из (13), (14) $\Rightarrow$

$$P(B)\, P(A/B) = P(A)\, P(B/A). \qquad (15)$$

Откуда, с учетом $P(A/B) = P(A)$, получим $P(B)P(A) = P(A)\, P(B/A)$ или $P(B/A) =$ $= P(B)$, т.е. B незв-мо от A.

сл4. Если сб-ия A и B незв-мы (см. рис. 12, где $A = \{\mathrm{I}\}$, $\overline{A} = \{\mathrm{III}\}$, $B =$ $= \{\mathrm{II}\}$, $\overline{B} = \{\mathrm{IV}\}$), то незв-мы сб-я A и $\overline{B}$. Дсв-но, т.к. $P(B/A) + P\left(\overline{B}/A\right) = 1$ и, по предположению, $P(B/A) = P(B)$, то $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B) = P\left(\overline{B}\right)$ в силу (10), т.е. A и $\overline{B}$ незв-мы.

Отсюда получаем важное заключение: если сб-ия A и B незв-мы, то незв-мы также каждые два сб-ия $\left(\overline{A}, B\right)$, $\left(A, \overline{B}\right)$, $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$. Читателю предлагается д-ть их, используя рис. 12!!

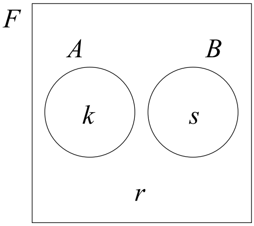


Рис. 7

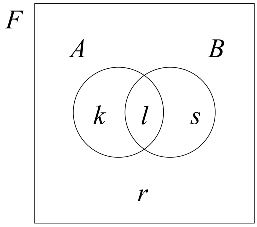


Рис. 8

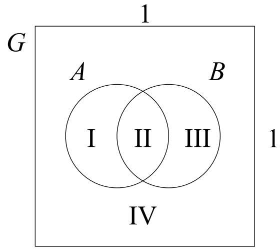


Рис. 9

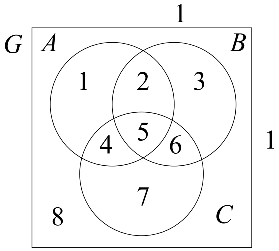


Рис. 10

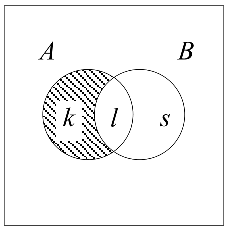


Рис. 11

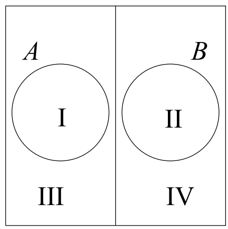


Рис. 12

Если два сб. A и B незв-мы, то т2 запишется

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad (16)$$

и вообще,

$$P(AB\ldots EH) = P(A)P(B)\ldots P(E)P(H), \qquad (17)$$

если сб-ия A, B, …, E, H незв-мы.

зм9. Методом мт-ой индукции стн. (14) можно обобщить

$$P(ABC\ldots EH) = P(A)P(B/A)P(C/AB)\ldots P(H/ABC\ldots E). \qquad (18)$$

зм10. Для незв-ти совокупных сб-й недт-но их попарной незв-ти, а нх-ма незв-ть любого из них от любой совокупности остальных.

п7. В ящике 8 шаров, на к-ых написаны номера: 1, 2, 3, 12, 13, 20, 30, 123. И пусть сб. A означает извлечение шара с цифрой 1 (1, или 12, или 13, или 123), B – цифрой 2, C – цифрой 3. Установить зв-ть или незв-ть сб-й A, B, C.

Р. По условию $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(AB) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(AC) = \frac{1}{4}$, $P(BC) = \frac{1}{8}$. Отсюда $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, $P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8} = P(BC) \neq P(B)P(C) = \frac{1}{4}$, т.е. B и C зв-мы. Хотя $P(ABC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C)$ – независимы. Но в общем A, B, C – зависимы, т.к. B и C зв-мы.

п8. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вер-ть того, что оба шара белые, при условии: 1) вынутый шар в урну не возвращается; 2) возвращается.

Р. 1) Пусть сб. A_1 – появление белого шара при I вынимании, A_2 – II, $A = A_1A_2$ – появление двух (белых шаров) сб-й. Тогда $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}1$. 2) Поскольку шар возвращается в урну, то A_1 и A_2 незв-мы. Тогда $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = 0{,}16$.

Заметим, что на практике обычно теоремы сж-я и умн-я используют вместе.

п9. Рабочий обслуживает 3 станка. Вер-ть того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для 1-го станка 0,9, 2-го – 0,8, 3-го – 0,85. Найти вер-ть того, что в течение нек-го часа не потребует внимания рабочего: 1) ни один станок, 2) по крайней мере один станок.

Р. Пусть сб. A_1 означает, что не потребует внимания рабочего 1-й станок, A_2 – 2-й станок, A_3 – 3-й станок. Сб-ия A_1, A_2, A_3 незв-мы, но совместны. Тогда

1) $P(A_1A_2A_3) = 0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}85 = 0{,}612$.

2) $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}85 - 0{,}9\cdot0{,}8 - 0{,}9\cdot0{,}85 - 0{,}8\cdot0{,}85 + 0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}85 = 0{,}997$.

Ответ можно найти и короче. Пусть $D = A_1 + A_2 + A_3$, тогда $\overline{D} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$, где $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – незв. в силу сл4. Тогда $P\left(\overline{D}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right) = 0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}15 = 0{,}003$. Откуда $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$. Отсюда следует

зм11. Если противоположное сб. разлагается на меньшее число элр-ых сб-й, чем прямое сб., то имеет смысл при выч-и вер-ей переходить к противоположному сб-ю.

п10. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вер-ть попадания при 1-ом выстреле равна 0,4, 2-ом – 0,5, 3-ем – 0,7. Найти вер-ть того, что в результате трех выстрелов в мишени будет: 1) ровно одна пробоина, 2) хотя бы одна пробоина.

Р. Пусть сб. A_i – пробоина при i-ом выстреле, $\overline{A_i}$ – промах (i = 1, 2, 3). 1) $A = A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$, $P(A)$ = 0,4·0,5·0,3 + 0,6·0,5·0,3 + 0,6·0,5·0,7 = = 0,36. 2) $B = A_1 + A_2 + A_3 = A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 +$ $+ \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3$. Ясно, что выч-ть $P(B)$ трудно. Поэтому выч-им $P\left(\overline{B}\right) =$ $= P\left(\overline{A_1A_2A_3}\right)$ = 0,6·0,5·0,3 = 0,09 и получим $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right)$ = 1 – 0,09 = 0,91.

5°. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Используя основные теоремы (сж-ия и умн-ия), выведем важные ф-мы.

Пусть требуется опр-ть вер-ть нек-го сб. A, к-ое может произойти вместе с одним из сб-й $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместимых сб-й, т.е. $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ (причем $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$). Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P\left(A/H_i\right). \tag{19}$$

Д. $P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P\left(A/H_i\right)$ ■

Стн. (19) наз. фм-ой полной вер-ти. Сб-ия $H_1, H_2, \ldots, H_n$ наз. гипотезами.

Следствием теоремы умн-ия и фм-ы полной вер-ти яв-ся так наз-мая теорема гипотез или формула Байеса.

Пусть имеется полная группа несовместимых гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Допустим, что сб. $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ произошло. Требуется уточнить вер-ть сб-ия H_j, т.е. найти $P\left(H_j/A\right)$.

Используя (15) и (19), получим $P(AH_j) = P(A)P\left(H_j/A\right) = P(H_j)P\left(A/H_j\right) \Rightarrow$

$$P\left(H_j/A\right) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{20}$$

Стн. (20) наз. фм-ой Байеса.

п11. Имеются три одинаковые на вид урны. В I урне 2 белых и 1 черный шар, во II – 3 б и 1 ч, в III – 2 б и 2 ч шаров. Наугад выбирают одну урну и вынимают из нее шар. Найти вер-ть того, что это белый шар, т.е. наступит сб. A.

Р. Рас-им три гипотезы: H_1 – выбор I урны, H_2 – II, H_3 – III, причем $P(H_1) =$ $= P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Условная вер-ть A при этих гипотезах ств-но равна $P\left(A/H_1\right) = \frac{2}{3}$, $P\left(A/H_2\right) = \frac{3}{4}$, $P\left(A/H_3\right) = \frac{1}{2}$. Тогда по (19) получим $P(A) =$ $= P(H_1)P\left(A/H_1\right) + P(H_2)P\left(A/H_2\right) + P(H_3)P\left(A/H_3\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{23}{36}$.

п12. Около 40% приборов собирается из высококачественных деталей, а 60% – из деталей обычного качества. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность (вер-ть безотказной работы) за время t равна 0,95. Если из деталей обычного качества – его надежность равна 0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вер-ть того, что он собран из высококачественных деталей.

Р. Пусть H_1 – прибор собран из высококачественных деталей, H_2 – из обычных. До опыта $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$, а $P(A/H_1) = 0{,}95$, $P\left(A/H_2\right) = 0{,}7$. Тогда по ф-ме (20) получим:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}4\cdot 0{,}95 + 0{,}6\cdot 0{,}7} = 0{,}475.$$

ЛЕКЦИЯ 3

1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ, ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА

1°. Повторение независимых испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона. Если производится несколько испытаний (опытов), причем вер-ть сб-ия A при каждом опыте не зависит от исходов др-х опытов, то такие опыты наз. независимыми (незв.) отн-но сб-я A.

Незв. опыты могут производиться в одинаковых условиях (p = const, н-р, выстрелы по мишени) и в различных условиях (p_i разные, н-р, выстрелы по движущейся мишени).

з1 (частная задача). Производится n незв-х опытов $E_1, E_2, \ldots, E_n$, в каждом из к-ых сб. A появляется с вер-ю p и не появляется с вер-ю $q = 1 - p$. Найти вер-ть $p_n(m)$ того, что сб. A появится ровно m раз из n опытов.

Р. Обз-им через B_m сб. «при n опытах A произойдет m раз». Пусть A_j – появление сб-я A при E_j-ом испытании, $\overline{A}_j$ – непоявление сб. A при E_j. Тогда $B_m = A_1 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_{n-1} \overline{A}_n + A_1 \ldots \overline{A}_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_{n-1} A_n + \ldots + \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n$. Отсюда $P_n(m) = P(B_m) = p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}$. Итак, имеем

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Стн. (1) наз. фм-ой биномиального распределения (рсп.) вер-ей или фм-ой (схемой) Бернулли.

Если составим так назм-ую производящую фк-ю $\varphi_n(x) = (q + px)^n = q^n + \frac{n}{1!} q^{n-1} px + \frac{n(n-1)}{2!} q^{n-2} p^2 x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!} q p^{n-1} x^{n-1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} p^n x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} x^i$, то $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ есть коэф-т при x^m.

Если $x = 1$ и $q + p = 1$, тогда $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$, т.к. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (q + p)^n = 1$.

з2 (общая задача). Производится n незв-х опытов ($E_1, \ldots, E_n$) при различных условиях, т.е. вер-ть появления сб. A при E_i опыте равна $p_i = P(A_i)$. Найти вер-ть $P_n(m)$ того, что A произойдет ровно m раз.

Р. $B_m = A_1 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_{n-1} \overline{A}_n + A_1 \ldots \overline{A}_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_{n-1} A_n + \ldots + \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n \Rightarrow P_n(m) = P(B_m) = p_1 \ldots p_m q_{m+1} \ldots q_n + p_1 \ldots p_{m-1} q_m \ldots q_{n-1} p_n + \ldots q_1 \ldots q_{n-m} p_{n-m+1} \ldots p_n \Rightarrow$

$$P_n(m) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\alpha_{m+1}} \ldots q_{\alpha_n}. \qquad (2)$$

Стн. (2) наз. фм-ой (схемой) Пуассона.

Если введем производящую фк-ю

$$f_n(x) = (q_1 + p_1x)(q_2 + p_2x)...(q_n + p_nx) = \prod_{i=1}^{n}\left(q_i + p_ix\right), \quad (3)$$

то $P_n(m)$ есть коэф. при x^m. Ф-му (3) можно записать в виде

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(q_i + p_ix\right) = \sum_{m=0}^{n}P_n\left(m\right)x^m , \quad (4)$$

где $P_n(m) = \dfrac{1}{m!}\,\dfrac{d^m f_n\left(x\right)}{dx^m}$.

зм1. Если требуется найти вер-ть $R_n(m)$ того, что сб. A при n незв-х опытах произойдет не менее m раз, то получим

$$R_n(m) = P_n(m) + P_n(m + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{\mu=m}^{n}P_n\left(\mu\right). \quad (5)$$

зм2. Вер-ть $P(m_1 \le \mu \le m_2)$ того, что сб. A при n незв-х опытах произойдет не менее чем m_1 раз и не более чем m_2 раз, выч-ся фм-ой

$$P(m_1 \le \mu \le m_2) = \sum_{\mu=m_1}^{m_2}P_n\left(\mu\right). \quad (6)$$

Ф-мы (5) и (6) могут применяться как по схеме Бернулли (1), так и по схеме Пуассона (2).

п1. Производится 5 выстрелов по одной мишени с вер-ю $p = 0{,}6$. Найти вер-ть попаданий 0, 1, 2, 3, 4, 5, т.е. $P_5(m)$, $0 \le m \le 5$.

Р. $P_5(0) = q^5 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^5$, $P_5(1) = C_5^1p^1q^4 = 5\cdot\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 = 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^4$,

$P_5(2) = 10\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ и т.д.

п2. Производится 4 выстрела по одной мишени с различных расстояний с вер-ми попадания ств-но $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$. Найти вер-ти $P_4(0)$, $P_4(1)$, $P_4(2)$, $P_4(3)$, $P_4(4)$.

Р. Составляем производящую фк-ю $f_4(x) = \prod_{i=1}^{4}\left(q_i + p_ix\right) = (0{,}9 + 0{,}1x)(0{,}8 + 0{,}2x)(0{,}7 + 0{,}3x)(0{,}6 + 0{,}4x) = 0{,}302 + 0{,}440x + 0{,}215x^2 + 0{,}040x^3 + 0{,}002x^4$. Тогда $P_4(0) = 0{,}302$; $P_4(1) = 0{,}440$; $P_4(2) = 0{,}215$; $P_4(3) = 0{,}040$; $P_4(4) = 0{,}002$.

п3. Производится 5 выстрелов по цели, вер-ть попадания в к-ую равна 0,2. Для разрушения целей дт-но трех попаданий. Найти вер-ть того, что цель будет разрушена.

Р. $R_5(3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2 + C_5^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8 + C_5^5\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0 = 0{,}0512 + 0{,}0064 + 0{,}0003 = 0{,}0579$.

2°. Наивероятнейшее число появлений событий. Изучим св-во $P_n(m)$ как фк-и от m при пст-ых n.

Наивероятнейшим числом появлений сб. A наз. число m_0 появлений сб. A, имеющее наибольшую (нб.) вер-ть $P_n(m_0)$.

Пусть $P_n(m)$ – нб-я, тогда $P_n(m) \geq P_n(m-1)$ и $P_n(m) \geq P_n(m+1)$, т.е. $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} \geq 1$, $\frac{P_n(m)}{P_n(m+1)} \geq 1$. Отсюда получим $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} =$ $= \frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q} \geq 1$ или $(n+1)p - mp \geq mq \Rightarrow (n+1)p \geq m(p+q) \Rightarrow np + p \geq m$ ①.

Аналогично имеем $\frac{P_n(m)}{P_n(m+1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}} = \frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{q}{p} \geq 1$ или $mq + q \geq$ $\geq np - mp \Rightarrow m(q+p) + q \geq np \Rightarrow m \geq np - q$ ②. Из ① и ② получим

$$np - q \leq m \leq np + p. \tag{7}$$

Причем если $np - q$ – целое число, то $P_n(m)$ достигает max в двух значениях: $m_0 = np - q$ и $m_0 = np + p$.

Т.о. фк-я $P_n(m)$ сначала возрастает до m_0, а затем убывает.

п4. Число коротких волокон в партии хлопка составляет в среднем 30% от всего кол-ва волокон. Опр-ть наивероятнейшее число коротких волокон из взятых наудачу 24 волокон.

Р. Задача уд-ет схеме повторных исп-й. Имеем $n = 24$, $p = 0{,}3$; $q = 1 - p = 0{,}7$. Отсюда $m_0 = [np + p] = [24\cdot 0{,}7 + 0{,}3] = [7{,}5] = 7$ ($[x]$ – целая часть числа x).

п5. Вер-ть нарушения точности в сборке прибора составляет 0,2. Опр-ть наиболее вероятное число точных приборов в партии из 9 штук.

Р. Дано: $n = 9$, $q = 0{,}2$, а вер-ть сборки точного прибора $p = 1 - q = 0{,}8$. Откуда $m_0 = [np + p] =[9\cdot 0{,}8 + 0{,}8] = [8] = 8$. Вел. m_0 получилась целой, значит, m_0 имеет два значения. Выч-им еще $m_0 = np - q = 9\cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 7$.

3°. Предельные теоремы. Распределение Пуассона. При больших m и n выч-ия $P_n(m) = P(\mu_n = m)$ и $P_n(m_1 \leq \mu \leq m_2)$ затруднены. Такие затруднения возникают и при малых p и q. Поэтому $P_n(m)$ и $P_n(m_1 \leq \mu \leq m_2)$ заменяют приближенно (прж.) предельными (асимптотическими) фк-ми.

т1 (Пуассона). Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda \in \left]0, \infty\right[$, то

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \tag{8}$$

при любом пст-ом m ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Д. Полагая $np = \lambda_n$, находим $P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \times$ $\times \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}$.

Отсюда при $n \to \infty$, $m = \text{const}$, $np = \lambda \in \left]0, \infty\right[$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda},\ \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)=1.$$

Тогда

$$P_n(m) = P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx P_n(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad (9)$$

где $\lambda = np$. Заметим, что т1 имеет место и при $m = 0$.

Ф-ма (9) наз. законом (распределением) Пуассона.

п6. Вер-ть попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вер-ть попадания в цель двумя и более пулями из 5000 выстрелов.

Р. Находим $\lambda = np = 5000\cdot 0{,}001 = 5$. Тогда $P(\mu_n \geq 2) = \sum_{m=2}^{5000} P_n(m) = 1 - P_n(0) -$

$- P_n(1) = 1 - e^{-5} - \frac{5}{1!}e^{-5} = 1 - 6e^{-5} = 0{,}9596$.

зм3. Если мало значение (зн.) q, то пуассоновским прж-ем можно воспользоваться для числа неудач. Причем замена фм-ы Бернулли при больших n прж-ой фм-ой Пуассона оправдана, если $npq \leq 9$. Если же пзв-ие npq велико, что для выч-ия $P_n(m)$ используют локальную теорему Муавра-Лапласа.

4°. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Введем сд-ие фк-и

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du \ \text{ и } \phi^*(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u)du, \qquad (10)$$

где $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Фк-я $\varphi(x)$ наз. фк-ей Гаусса. Ее зн-ия приведены в T_1 при $x \geq 0$. Для $x < 0$ используется та же табл., т.к. $\varphi(x)$ четна, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Фк-я $\phi(x)$ наз. фк-ей Лапласа. Ее зн-ия приведены в табл. T_1 и T_{11} для $x \geq 0$. Для $x < 0$ пользуются той же табл-ей, т.к. $\phi(x)$ нечетна, т.е. $\phi(-x) = -\phi(x)$. Причем в табл. приведены зн-ия интеграла лишь до $x = 5$, т.к. при $x > 5$ можно взять $\phi(x) = 0{,}5$.

т2 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Если $n \to \infty$, $p(0 < p < 1)$ пст-но, вел. $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ огр-на равномерно по m и n ($-\infty < a \leq x \leq b < \infty$), то

$$P(\mu_n = m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)(1 + \alpha_m(m)) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \qquad (11)$$

где $|\alpha_n| < \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ при $x_m \in [a, b]$, $C > 0$ – пст-ая.

Д. Учитывая из (10), что $m = np + x\sqrt{npq}$ и $n - m = nq - x\sqrt{npq}$, используя фм-у Стирлинга (см. (10) из 3°:1.2) и разложение в ряд, получим

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\ \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}\ e^{\theta_n},$$

где $e^{\theta_n} = e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \dfrac{C}{12n}$ (С > 0 – пст-я), т.е. $e^{\theta_n} \to 1$ при $n \to \infty$;

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \sqrt{\frac{1}{\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

при $n \to \infty$.

Остается показать, что $\dfrac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} \to e^{-\frac{x^2}{2}}$. Дсв-но, имеем

$$\ln A_n = \ln \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} = \ln\left(\frac{np}{m}\right)^m + \ln\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = -m\ln\frac{m}{np} - (n-m)\ln\frac{n-m}{nq} =$$

$$= -\left(np + x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \left(nq - x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -\left(np + x\sqrt{npq}\right) \times$$

$$\times \left[x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] - \left(nq - x\sqrt{npq}\right)\left[-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] =$$

$= -\dfrac{x^2}{2} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Отсюда имеем $A_n = \dfrac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} \to e^{-\frac{x^2}{2}}$ ■

Итак, получили фм-у

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (12)$$

Фм-а (12) дает хорошее прж. при $p = q = 1/2$. В этом случае остаточный член $|\alpha_n| < \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ можно заменить на $|\alpha_n| < \dfrac{C}{n}$. Ф-му (12) часто используют при $n > 100$ и $npq > 20$.

п7. Вер-ть изделию некоторого производства оказаться бракованным (бркн.) равна 0,005. Чему равна вер. того, что из 10000 наудачу взятых изделий бркн-ых окажется ровно 40.

Р. Найти $P_{10000}(40) = C_{10000}^{40}(0{,}005)^{40}(0{,}995)^{9960}$ трудно. Используем (12), т.к. $n = 10000 > 100$, $npq = 10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 49{,}75 > 20$. Находим $\sqrt{npq} = \sqrt{49{,}75} \approx 7{,}05$; $\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40-50}{7{,}05} \approx -1{,}42$. Тогда $P_n(m) = \dfrac{1}{7{,}05}\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(1{,}42)^2}{2}} = \dfrac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206$. Точное значение $P_n(m) = 0{,}0197$.

Для выч-я при больших n вер-ти того, что число успехов в n исп-ях Бернулли μ_n находится между m_1 и m_2, используется

т3 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Если $n \to \infty$, p $(0 < p < 1)$ пст-но, то

$$P_n(m_1, m_2) = P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \phi(b) - \phi(a), \qquad (13)$$

где $a = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $b = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Д. $P\left(a \le \dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = P_n(a, b) = \sum\limits_{a \le x_m \le b} P(\mu_n = m)$, где $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Отсюда, применяя локальную теорему т2, получим $P_n(a, b) = S_n + T_n$, где $S_n = \sum\limits_{x_m \in [a,b]} \varphi(x_m)\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, $T_n = \sum \alpha_n(x_m)\varphi(x_m)\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Т.к. $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \dfrac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, то $S_n = \sum\limits_{x_m \in [a,b]} \varphi(x_m)\Delta x_m$. Откуда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \varphi(x)dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, т.е. получим (13). Ибо $|T_n| \le \sum\limits_{x_m \in [a,b]} \varphi(x_m)\Delta x_m \; |\alpha_n(x_m)| \le \dfrac{C}{\sqrt{n}} S_n \to 0$ при $n \to \infty$■

п8. Вер-ть изделию оказаться бркн-м равна 0,005. Найти вер. того, что из 10000 наудачу взятых изделий бркн-х окажется не более 70 (см. п7).

Р. $P(\mu \le 70) = P\left(-\dfrac{50}{\sqrt{49{,}75}} \le \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) = \left(-7{,}09 \le \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le 2{,}84\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \phi(2{,}84) - \phi(-7{,}09) = \phi(2{,}84) + \phi(7{,}09) = 0{,}4975 + 0{,}5 = 0{,}9975.$$

Отметим, что фм-ы (12) и (13) можно обобщить для многомерного (ммр.) случая [1].

зм4. При малых npq вместо (13) можно применить фм-у

$$P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \phi\left(b + \frac{1}{2\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(a - \frac{1}{2\sqrt{npq}}\right) \qquad (14)$$

5°. Закон больших чисел. Интегральную (инт.) теорему Муавра-Лапласа можно применить для нахождения отклонения ε вер-ти P наступления сб. A при n незв-х испытаниях от частоты μ/n наступления этого сб-ия:

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\beta. \tag{15}$$

Из (15) следует

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1, \tag{16}$$

т.е. вер-ть неравенства (нерав.) $\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon$ стремится к единице (ед.) при $n\to\infty$.

Этот факт впервые обнаружен Я. Бернулли и носит название закона больших чисел или теоремы Бернулли. Именно через закон больших чисел (более подробно см. в 1°, 2° из 2.4) теория вер-и соприкасается с практикой.

Из теоремы Бернулли (или из (15)) можно получить типичные задачи, т.е. найти одну из p, n, ε, β по заданным трем:

1) Найти вер-ть β того, что частота μ/n наступления сб. A отклонится от вер-ти P не более чем на ε.

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

2) Найти наименьшее (нм.) число n испытаний, чтобы с вер-ю, не меньшей β, частота μ/n отклонялась от вер-ти P не больше чем на ε. Имеем нерав-во

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge\beta.$$

Его заменяем на $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ge\beta$, откуда находим n.

3) При заданной вер-ти β и числе исп-й n найти границу возможных изменений $\left|\frac{\mu}{n}-p\right|$, т.е. по p, n, β найти ε. Выражение

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\beta$$

заменяем на $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\beta$, откуда находим ε.

п9. Деталь нестандартна с вер-ю $p = 0{,}1$. Найти вер. того, что среди сл-но отобранных 400 деталей частота появления нестандартных деталей отклонится от вер. $p = 0{,}1$ по абсолютной (абс.) вел-е не более чем на 0,03.

Р. Дано: $n = 400$, $p = 0{,}1$ ($q = 0{,}9$), $\varepsilon = 0{,}03$. Найти: β – ? По (15) имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| < 0{,}03\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\phi(2) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

п10. Вер-ть того, что деталь нестандартна, равна $p = 0{,}1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вер-ю, равной 0,9544, можно было утверждать, что частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от вер-ти p по абс-ой вел-е не более чем на 0,03.

Р. Дано: $p = 0{,}1$ ($q = 0{,}9$), $\varepsilon = 0{,}03$, $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}03\right) = 0{,}9544$. Найти: n – ?

$$2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}9544 \Rightarrow \phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772 \Rightarrow \phi(2) = 0{,}4772 \Rightarrow 0{,}1\sqrt{n} = 2$$

$\Rightarrow n = 400.$

зм5. Аналогично п10 можно найти ε, если заданы p, n, $\beta = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

1.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1.1. ВЕРОЯТНОСТИ И ЧАСТОТЫ СОБЫТИЙ. КОМБИНАТОРИКА

Вопросы для самопроверки

1. Когда и как возникла теория вер-ей как предмет и как развивалась далее?

2. Что такое сб. Приведите примеры достоверных, невозможных, случайных сб-й.

3. Когда мн-во сб-й образует полную группу сб-й. Что такое элр. сб-ие, приведите пример, где элр. сб-ия образуют полную группу сб-й.

4. Какие сб-я наз. несовместимыми (совместимыми) и равновозможными?

5. Какие сб. наз. случаями (шансами)?

6. Приведите классическое опр. вер-ти.

7. Как возникает опр-ие частоты сб-й. Приведите примеры.

8. Приведите основные опр. соединений: перестановки, размещения, сочетания.

9. Какими основными св-ми обладают перестановки, размещения и сочетания?

Задание для кр. работы: по образцу рас-ых примеров п4-п9: 4^o решить задачи 1-20.

1. Сколькими способами можно расставить семь различных книг на полке, чтобы три опр. книги стояли рядом? О: 720.

2. Сколькими способами из четырех букв $\{A, B, C, D\}$ можно получить по две буквы? О: 12.

3. Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все десять цифр $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$? О: 4536. Ук: исключаем числа, у к-ых первая цифра нуль, т.е. A_9^3.

4. Сколькими способами из четырех букв $\{A, B, C, D\}$ можно записать буквосочетаний из трех эл-ов, чтобы они отличались друг от друга только самими эл-ми? О: 4.

5. Нх-мо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать? О: 210.

6. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных. О: 2100.

7. Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из к-ых должно быть не более пяти, а во второй – не более девяти человек? О: 1507. Ук: первая группа может состоять из 3, или 4, или 5 чел. А выбор первой группы однозначно опр-ет вторую.

9. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в сд-ем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только

положение первых трех и последних двух. О: 15120. Ук: для трех учитывается и порядок, а для двух – нет.

10. Имеется 8 красных и 5 черных шаров. Сколько можно образовать разноцветных пар, если все шары пронумерованы (номера с 1 по 8 – красные шары и с 9 по 13 – черные)? О: $8 \cdot 5 = 40$.

11. Для ведения собрания нужно избрать президиум в составе 3 человек из 30: председатель, секретарь и член президиума. Сколькими способами это можно сделать? О: 24360.

12. Собранию из 30 чел. надо выбрать 3-х на конференцию. Сколькими способами это можно сделать? О: 4060.

13. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных и 5 белых шашек? О: $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$.

14. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных, 4 белых и 3 красных фишки? О: $12!/5!4!3! = 27720$. Ук: Все фишки пронумеруем с 1 по 12, к-ые перестановочны по эл-ам $\overline{1} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = P_5$, $\overline{2} = \{1, 2, 3, 4\} = P_4$, $\overline{3} = \{1, 2, 3\} = P_3$, т.е. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком, тогда $A_{12} = 12!/\overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{3} = P_{12}/P_5P_4P_3$.

15. Чему равен коэффициент (коэф.) при $x^5y^4z^3$ в $(x + y + z)^{12}$, развернутом в виде многочлена? О: 27720. Ук: Считая x черным, y белым и z красным, приходим к задаче 14.

16. Решить уравнение (ур.) $C_n^5 = 2\,C_{n-1}^5$. О: $n = 10$.

17. Возможно ли рав-во $P_n = 36\,A_{n-1}^2$ и если да, то при каком n? О: $n = 6$.

18. Сколько сущ-ет шестизначных чисел, в запись к-ых входят четыре цифры? О: 15. Ук: см. з14.

19. Сколько сущ-ет размещений шести эл-ов 1, 2, 3, 4, 5, 6, у к-ых на втором месте находится 4, на четвертом 3? О: $A_6^3 = 120$.

20. Сколькими способами можно составить комиссию в составе 3 человек, выбирая их из 4 супружеских пар, если:

1) в комиссию могут входить любые 3 из 8 человек;

2) в комиссию не могут входить члены одной семьи?

О: 1) $C_8^3 = 56$; 2) $C_4^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Задание для кр. работы: по образцу п4-п11 из 4° решить з21-з40.

21. Из семи одинаковых билетов один выигрышный. Семь человек поочередно вытягивают по одному билету (не возвращая его). Зависит ли вер-ть выигрыша от места в очереди? Ук: Пронумеровать все билеты, начиная с выигрышного. Пусть выиграл человек $A_к$, стоявший в очереди на к-м месте. Тогда $P(A_к) = P_6/P_7 = 1/4$. Эта вер-ть не зв-т от места в очереди.

22. Бросили две игральные кости и подсчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее – получить в сумме 7 (сб. A) или 8 (сб. B). О: $6/36 = P(A) > P(B) = 5/36$.

23. В ящике 12 белых и 8 черных шаров. Какова вер-ть того, что наудачу вынутый шар будет белым и два вынутых шара разного цвета?

24. В ящике 12 белых и 8 черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вер., что оба они белые? О: $66/190 \approx 0{,}35$.

25. В ящике 12 белых и 8 черных шара. Наудачу вынимают два шара. Какова вер-ть того, что они разного цвета? О: $96/190 \approx 0{,}5$.

26. На пяти карточках написаны буквы: на двух карточках *Л*, на остальных трех *И*. Выкладываем наудачу эти карточки подряд. Какова вер-ть того, что при этом получится слово *ЛИЛИИ*. Ук: Пронумеруем буквы и получим карточки с буквами $Л_1$, $Л_2$, $И_1$, $И_2$, $И_3$. Пусть C – сб. «$Л_1ИЛ_2ИИ$» или «$Л_2ИЛ_1ИИ$», но *И* в своих трех местах располагаются в любом порядке, т.е. $3! = 6$, тогда $m = 2\cdot 3! = 12$, а $n = 5!$ О: $P(C) = 0{,}1$.

27. В ящике 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Найти вер-ть того, что вынуто 3 красных, 2 синих и 1 зеленый шар? О: $24/145 \approx 0{,}17$.

28. Бросили две монеты. Найти вер-ть того, что на одной выпал герб, а на другой – цифра. О: 1/2.

29. Имеется пять отрезков длиной 1, 3, 5, 7 и 9 см. Опр-ть вер-ть того, что из трех наудачу взятых отрезков (из этих пяти) можно построить треугольник. О: 3/10.

30. Куб, все стороны к-го окрашены, распилен на 1000 конгруэнтных кубиков, опр-ть вер-ть того, что наудачу выбранный кубик имеет две окрашенных грани. О: 0,056.

31. Найти вер-ть того, что в марте наудачу выбранного года окажется пять воскресений. О: 3/7.

32. На шести одинаковых карточках написаны шесть букв: *А*, *В*, *Л*, *М*, *О*, *С*. Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вер-ть того, что при этом получится слово *МОСКВА*? О: 1/720.

33. Слово *АГАВА* разрезали на буквы и выложили их наудачу в ряд. Какова вер-ть опять получить это же слово? О: 1/20.

34. Слово *МОЛНИЯ* разрезали на буквы, взяли наудачу четыре буквы и выложили их в ряд. Какова вер-ть того, что получилось слово *МИЛЯ*? О: 1/360.

35. В ящике лежит 31 деталь первого сорта и 6 деталей второго сорта. Наудачу вынимают три детали. Чему равна вер-ть того, что все три детали первого сорта? О: $\dfrac{31\cdot 30\cdot 29}{37\cdot 36\cdot 35} \approx 0{,}58$.

36. В ящике лежит 31 деталь первого сорта и 6 деталей второго сорта. Наудачу вынимают три детали. Найти вер-ть того, что хотя бы одна из деталей первого сорта. О: $775/777 \approx 0{,}9974$.

37. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наугад берут четыре карточки и выкладывают их в ряд. Найти вер-ть того, что получится четное число. О: 4/9.

38. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наугад выкладывают их в ряд. Какова вер-ть, что получится четное число? О: 4/9.

39. Замок открывается только при наборе опр-го числа – пятизначного номера, к-ый можно составить из семи цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Какова вер-ть того, что замок откроется при случайном наборе цифр? О: $1/7^5$. Ук: Если число a принимает два зн-я, н-р, $a = \{0, 1\}$, то двузначное число можно взять $aa = \{a_2\} = 2^2$ способами, $aaa = \{a_3\} = 2^3$ и т.д. Аналогично, если $a = \{1, 2, \ldots, 7\}$, то $\{a_5\} = 7^5$.

40. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вер-ть того, что все цифры различные. О: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/10^5 = 0{,}3024$.

41. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вер-ть того, что все цифры нечетные. О: $5^5/10^5 = 1/32 = 0{,}03125$.

42. В ящике лежат 13 зеленых, 10 красных и 7 синих шаров. Наудачу вынимают 8 шаров. Какова вер-ть того, что вынуты 3 зеленых, 2 красных и 3 синих шара? О: $C_{13}^3\, C_{10}^2\, C_7^3 \big/ C_{20}^8 \approx 0{,}077$.

1.2. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Вопросы для самопроверки

1. Какие операции вы знаете из алгебры сб-й A и B? Приведите примеры.
2. Перечислите основные св-ва операций над сб-ми.
3. Дайте понятие геом-ой вер-ти. С чем связано ее возникновение?
4. В чем состоит аксиоматическое опр. вер-ти?
5. Сформулируйте и д-те теорему сж-ия.
6. В чем состоит суть фм-ы Стирлинга и когда она применяется?
7. Дайте опр-ия незв-ти, зв-ти и условной вер-ти сб-й.
8. Сформулируйте и д-те теорему умн-ия.
9. Какие следствия можно получить из теоремы умн-ия?
10. Дт-но ли попарной незв-ти для незв-ти совокупности сб-й?
11. Объясните суть фм-л полной вероятности и Байеса. Когда они применяются?

Задание для кр. работы: используя св-ва с1-с12, решить з1-з20.

Докажите равенства (рав.):

1. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.
2. $A \cup (A \cap B) = A$.
3. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
4. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.
5. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
6. $(A \cup B) \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup B$.

При каких условиях справедливы сд-ие рав-ва?

7. $A \cup B = A \cap B$. О: $A = B$.
8. $(A \cup B) \setminus B = A$. О: $A \cap B = \varnothing$.
9. $A \cup \overline{A} = A$. О: $A = \Omega$.
10. $A \cap \overline{A} = A$. О: $A = \varnothing$.

Упростите сд-ие выражения:

11. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$. О: A.

12. $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$. О: $A \cup B \cup C$.

13. $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$. О: B.

14. Сб. A означает, что наудачу взятая деталь оказалась I-го сорта, B – II сорта, C – III сорта. Что представляют собой сд. сб-ия: а) $A \cup B$; б) $\overline{A \cup C}$; в) $A \cap C$; г) $(A \cap B) \cup C$? О: а) деталь не первого сорта; б) B; в) $\varnothing$; г) C.

15. На рис. 1-4 изображены электрические схемы. Выключатели изображены кружками, в к-ых указан номер выключателя. Записать через сб-ие A_i = = «Включен выключатель с номером i» для каждой схемы сд-ие сб-ия: A = «ток идет» и $\overline{A}$ = «ток не идет». О: Рис. 1: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$; рис. 2: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; рис. 3: $A = (A_1 \cap A_2) \cup A_3$, $\overline{A}$ = $= \left(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2\right) \cap \overline{A}_3$; рис. 4: $A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \left(\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right)$.

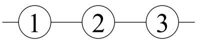


Рис. 1

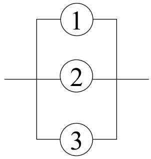


Рис. 2

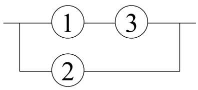


Рис. 3

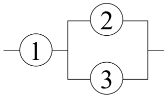


Рис. 4

16. Назовите противоположные сб-ия для сб-й:

A = «выпадение двух гербов при бросании двух монет».

B = «появление белого шара» при вынимании одного шара из урны, в к-ой лежат белые, черные и красные шары.

C = «три попадания при трех выстрелах».

D = «не более двух попаданий при пяти выстрелах».

E = «хотя бы одно попадание при пяти выстрелах».

F = «выигрыш первого игрока при игре в шахматы».

О: $\overline{A}$ – выпадение цифры, $\overline{B}$ – появление черного или красного шара, $\overline{C}$ – хотя бы один промах, $\overline{D}$ – не менее трех попаданий, $\overline{E}$ – пять промахов, $\overline{F}$ – выигрыш второго игрока или ничья.

17. В поле наблюдения (нбл.) микроскопа находятся четыре клетки. За время нбл-ия каждая из них может как разделиться, так и не разделиться. Расв-ся сб-ия:

A = «разделилась одна клетка»,

B = «разделилась хотя бы одна клетка»,

C = «разделилось не менее двух клеток»,

D = «разделились две клетки»,

E = «разделились три клетки»,

F = «разделились все четыре клетки».

В чем состоят сб-ия: 1) $A \cup B$, 2) $A \cap B$, 3) $B \cup C$, 4) $B \cap C$, 5) $D \cup E \cup F$, 6) $B \cap F$?

Верны ли равенства: 7) $B \cap F = C \cap F$, 8) $B \cap C = D$?

О: 1) $A \cup B = B$, 2) $A \cap B = A$, 3) $B \cup C = B$, 4) $B \cap C = C$, 5) $D \cup E \cup F = C$, 6) $B \cap F = F$, 7) да, 8) нет.

18. По мишени производится три выстрела. Расв-ся сб-ия A_i = «попадание при i-м выстреле», i = 1, 2, 3. Пользуясь действиями над событиями A_i и $\overline{A_i}$ записать события:

A = «все три попадания»,
B = «все три промаха»,
C = «хотя бы одно попадание»,
D = «хотя бы один промах»,
E = «не меньше двух попаданий»,
F = «не более одного попадания»,
K = «попадание в мишень не раньше 3-го выстрела».

О: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$, $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $D = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$, $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$, $F = \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right)$, $K = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

19. Бросают две монеты – медную и серебряную. Расв-ся сд-ие сб-ия:
A = «герб выпал на медной монете»,
B = «цифра выпала на медной монете»,
C = «герб выпал на серебряной монете»,
D = «цифра выпала на серебряной монете»,
E = «выпал хотя бы один герб»,
F = «выпала хотя бы одна цифра»,
K = «выпал один герб и одна цифра»,
L = «не выпало ни одного герба»,
M = «выпали два герба».

Каким сб-ям из приведенного списка равны сд. сб-ия: 1) $A \cup C$, 2) $A \cap C$, 3) $E \cap F$, 4) $K \cup E$, 5) $K \cap E$, 6) $B \cap D$, 7) $E \cup M$.

О: 1) E, 2) M, 3) K, 4) E, 5) K, 6) L, 7) E.

20. Какие из записанных рав-в справедливы (приведите на рис-ах ств. случаи), а какие – нет? а) $A \setminus B = A$, б) $A \setminus B = \varnothing$, в) $A \setminus B = B$. О: а) Верно при $A \cap B = \varnothing$, б) верно при $A \subset B$, в) только в случае $A = B = \varnothing$.

Задание для кр. работы: по образцу п1 из 2° решить з21-з40.

21. Двое договорились встретиться в опр-ом месте между 13-14 часами. Пришедший первым ждет другого в течение получаса, после чего уходит. Чему равна вер-ть их встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода незв-мы.

22. Противотанковые мины поставлены по прямой через 15 м. Танк шириной 3 м идет перпендикулярно (прп.) этой прямой. Какова вер-ть того, что он подорвется?

23. На окружности (окр.) радиуса R зафиксирована точка A. Какова вер-ть того, что наугад выбранная точка на окр-ти отстоит от точки А меньше чем на R?

24. В окр-ть наудачу вписывается треугольник (туг). Какова вер. того, что он остроугольный?

25. В окр-ть вписан квадрат (кв.). В круг наудачу бросается точка. Найти вер-ть того, что эта точка попадет в кв-т.

26. В окр. вписан правильный туг-к. В круг наудачу бросается точка. Найти вер. того, что эта точка попадет в туг-к.

27 В окр. наудачу вписывается туг-к. Найти вер. того, что он прямоугольный (пуг.).

28. В окр. наудачу вписывается туг-к. Найти вер. того, что он равнобедренный.

29. Как изменится вер-ть встреч в з21, если срок ожидания равен 40 мин?

30. В шар вписан куб. Точка бросается в шар. Найти вер. того, что точка попадет в куб.

31. В шар вписана правильная туг-ая пирамида. Точка наудачу бросается в шар. Какова вер-ть попадания точки в пирамиду?

32. У кв-го трехчлена $x^2 + px + q$ коэф-ты p и q выбраны наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Какова вер. того, что кв-ый трехчлен имеет дсв-ые корни?

33. Противотанковые мины поставлены по прямой через 10 м. Танк шириной 3 м идет прп-но этой прямой. Какова вер-ть того, что он не подорвется?

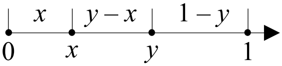
34. В шар наудачу вписывается параллелепипед. Найти вер. того, что он окажется кубом.

35. В кв-т со стороной 8 см наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вер. того, что круг не пересечет ни одной стороны кв-а.

36. В куб вписан шар. Точка бросается в куб. Найти вер. того, что точка попадет в шар.

37.В правильную туг-ю пирамиду вписан шар. В пирамиду бросается точка. Найти вер. того, что точка попадет в шар.

38. В шар вписан конус наибольшего (нб.) объема. В шар бросается точка. Найти вер. того, что точка попадет в конус. Ук: Конус нб-го объема с образующей l имеет высоту $h = l/\sqrt{3}$.

39. На отрезок длиной 1 бросаются наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вер. того, что из полученных отрезков можно построить туг-к? О: 0,25. Ук: Из 

имеем $x < (y - x) + (1 - y)$, $y - x < x + (1 - y)$, $1 - y < x + (y - x) \Rightarrow x < 0{,}5$, $y < x + 0{,}5$, $0{,}5 < y$, $x \le y$. Аналогично при $x > y$ получим $x > 0{,}5$, $y < 0{,}5$, $y > x - 0{,}5$, $x > y$. Откуда построим рис. 5.

40 (задача Бюффона). Плоскость (пл.) разграфлена параллельными (прл.) прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. Наудачу бросается игла длиной $2l$ ($l < a$). Найти вер. того, что игла пересечет какую-нибудь прямую. О: $P = 2l/a\pi$. Ук: На рис. 6 приведено положение иглы, где x – расстояние от центра иглы до ближайшей параллели, φ – угол, составленный иглой с этой параллелью (прл-ю). Всевозможные положения иглы опр-ся

точками пуг-ка со сторонами a и π. Для пересечения иглы с прл-ю нх-мо и дт-но, чтобы $x \le l\sin\varphi$. Тогда из рис. 7 получим $P = \dfrac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = 2l/a\pi$, где $mG = a\pi$, $mg = 2l$.

Отметим, что задача Бюффена явилась исходным пунктом для решения нек-ых проблем теории стрельбы, учитывающих размеры снаряда.

Полученная фм. была использована и для опытного опр-ия приближенного (прж.) значения $\pi = 2l/aP$.

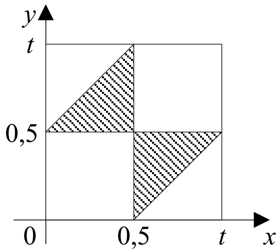


Рис. 5

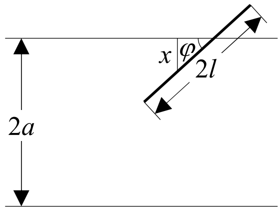


Рис. 6

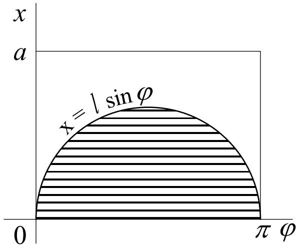


Рис. 7

О: **21**. $\frac{3}{4}$. **22**. $\frac{1}{5}$. **23**. $\frac{1}{3}$. **24**. $\frac{1}{4}$. **25**. $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}636$. **26**. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}41$. **27**. 0. **28**. 0. **29**. $\frac{8}{9}$. **30**. $\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}368$. **31**. $\frac{2}{3\sqrt{3}\pi} \approx 0{,}123$. **32**. $\frac{13}{24}$. **33**. $\frac{7}{10}$. **34**. 0. **35**. $\frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}$. **36**. $\frac{\pi}{6}$.

Задание для кр. работы: по образцу п2-п10: 3°, 4° решить з41-з60.

41. В ящике 12 белых, 7 черных и 11 синих шаров. Наудачу вынимается один шар. Найти вер. того, что вынутый шар не белый. О: $P(C) = P(A + B) = 3/5$.

42. Зачет по стрельбе курсант сдаст, если получит оценку не ниже 4. Какова вер-ть сдачи зачета, если известно, что курсант получит за стрельбу 5 с вер-ю 0,3 и 4 с вер-ю 0,6? О: 0,9. Ук: $P(A + B) = 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}9$.

43. Из коллектива бригады, к-ая состоит из 6 мужчин и 4 женщин, на профсоюзную конференцию выбирается два человека. Какова вер., что среди выбранных хотя бы одна женщина? О: $P(A) = P(B + C) = 2/3$. Ук: $P(A) = C_6^1\, C_4^1 / C_{10}^2 + C_6^0\, C_4^2 / C_{10}^2$.

44. Бросаются три игральные кости. Какова вер. того, что сумма выпавших очков меньше 17? О: $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 53/54$. Ук: $n = 6{\cdot}6{\cdot}6 = 216$, $m = m_1 + m_2 = 3 + 1 = 4$ (m_1 – выпадание 17: 5·6·6; m_2 – 18: 6·6·6). $P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{1}{54}$.

45. Наудачу берется число от 100 до 999. Найти вер. того, что хотя бы две его цифры совпадут. О: $P(A) = 0{,}28$. Ук: $n = 900$, для $\overline{A}$ («все цифры различны») $m = A_{10}^3 = 9{\cdot}9{\cdot}8$, т.к. первая цифра не 0, тогда $P\left(\overline{A}\right) = 99{,}8/900 = 0{,}72$.

46. Среди 11 изделий находятся 3 бркн. Наудачу вынимают три изделия. Найти вер. того, что среди них хотя бы одно бркн. О: $P(A)$ = 109/165. Ук: $P\left(\overline{A}\right) = C_8^3 \big/ C_{11}^3$ = 56/165.

47. В ящике лежит 8 белых и 12 красных шаров. Наудачу вынимают три шара. Найти вер. того, что хотя бы один из них белый. О: $1 - C_{12}^3 \big/ C_{20}^3 \approx 0{,}8$.

48. В условиях з47 вынуто 6 шаров. Найти вер. того, что среди них не более одного белого шара. О: $\left(C_{12}^6 + C_{12}^5 \cdot 8\right) \cdot C_{20}^6 \approx 0{,}187$.

49. В условиях з47 вынуто 5 шаров. Найти вер. того, что среди них не менее двух белых шаров. О: $1 - \left(C_{12}^5 + 8 \cdot C_{12}^4\right) \cdot C_{20}^5 \approx 0{,}693$.

50. В условиях з47 вынули два шара. Найти вер. того, что они одного цвета. О: $\left(C_{12}^2 + C_8^2\right) \cdot C_{20}^2 \approx 0{,}494$.

51, Вер. попадания первого стрелка равна 0,5, второго – 0,8. Найти вер. попадания при совместной стрельбе. О: 0,9.

52. В коробке 9 радиоламп, 3 из них были в употреблении. Мастер взял две радиолампы. Найти вер. того, что обе лампы были в употреблении. О: $P(AB) = P(A) \cdot P\left(B/A\right)$. = 1/12.

53. В гараж поступило 10 деталей из I завода, 14 – из II. Найти вер. того, что первые три водителя воспользуются деталями I завода, а четвертый – деталью II завода. О: $P(ABCD) = P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)$ = 65/759.

54. В трех залах театра идут три различных концерта. Вер. того, что на опр-ый час в кассе 1-го зала есть билет, равна 0,3, 2 зала – 0,2, 3 зала – 0,4. Найти вер. того, что на данный час можно купить билет хотя бы на один концерт. О: $P(A)$ = 0,664, где $A = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3$. Или $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2\right) P\left(\overline{A}_3\right)$.

55. Бросили монету и игральную кость. Найти вер. того, что на монете выпадет герб и на кости – число очков, кратное трем. О: $P(ГН) = P(Г)P(Н)$ = 1/6.

56. Четыре стрелка стреляют одновременно и незв-мо друг от друга с вер-ю 2/3 по объекту. Объект уничтожен, если в него попал хотя бы один стрелок. Найти вер. того, что объект будет уничтожен. О: $P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\right) = 1 - 1/81 \approx 0{,}9877$.

57. Найти вер. того, что партия из 100 изделий, среди к-ых 5 бркн-х, будет принято при исп-и наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается не более одного бркн. изделия из 50. О: $P = \left(C_{65}^{50} + C_5^1 C_{65}^{49}\right) C_{100}^{50} = 0{,}181$.

58. В ОТК обувной фабрики представлены на просмотр 100 пар обуви, из них 60 пар фасона «a» и 40 пар фасона «b». Найти вер. того, что взятые наудачу для просмотра две пары обуви окажутся разных фасонов. О: $P(C) = P(AB) + P(BA) = P(A)P(B/A) + P(B)P(A/B)$ = 16/33.

59. Общество состоит из 5 мужчин и 10 женщин. Найти вер. того, что при слн-й группировке их на 5 групп по три человека в каждой группе будет мужчина. О: $P = m / n = C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot P_5 : C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 10!5!(3!)^5 : 2^5 \cdot 15! = 81/1001$.

60. Двадцать человек, среди к-ых 10 мужчин и 10 женщин, слн-м образом группируются попарно. Найти вер. того, что каждая из 10 пар состоит из лиц разного пола. О: $P = P_n / P_{2n-1}$ = 10!/19!! = 0,0055.

61. На книжной полке в слн. порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Студент берет наудачу 3 учебника. Найти вер. того, что хотя бы один из взятых учебников в переплете. О: $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 -$ $- A_{10}^3 / A_{15}^3$ = 67/91.

62. В ящике 10 деталей, из к-ых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вер. того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена. О: 5/6.

63. Известны вер-ти сб-й A и AB. Найти вер. сб-ия $A\overline{B}$. О: $P\left(A\overline{B}\right) = P(A) - P(AB)$.

64. Д-ть, что из $P\left(B/\overline{A}\right) = P(B/A)$ следует незв-ть сб-й A и B.

65. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у к-го раньше появится герб. Найти вер-ть выигрыша для каждого из игроков. Р. $P_1 = \frac{1}{2} +$ $+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{2}{3}$, $P_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots = \frac{1}{3}$. Другое Р. $P_1 + P_2 = 1$, $P_2 =$ $= \frac{1}{2} P_1$, т.е. $P_1 = \frac{2}{3}$, $P_2 = \frac{1}{3}$.

66. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у к-го раньше появится герб. Опр-ть вер-ть выигрыша для каждого из игроков. О: $P_1 = 4/7$, $P_2 = 2/7$, $P_3 = 1/7$.

67. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вер-ть попадания для первого стрелка равна 0,2, второго – 0,3. Найти вер. того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй. О: $P_1 + P_2 = 1$, $0{,}2P_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot P_1$, $P = P_1 = 0{,}455$.

Задание для кр. работы: по образцу п11, п12 из 5º решить з68-з92.

68. Партия электрических лампочек на 20% изготовлены заводом I, на 30% – заводом II и на 50% – заводом III. Для завода I вер-ть выпуска бркн-й лампочки равна 0,01, II – 0,005 и III – 0,006. Найти вер. того, что взятая из партии наудачу лампочка окажется бркн-й. О: $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(BH_i) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \times$ $\times P(B/H_i) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}005 + 0{,}5 \cdot 0{,}006 = 0{,}0065$.

69. На трех станках различной марки изготовляется опр-я деталь. Производительность I станка за смену составляет 40 деталей, II – 35, III – 25. Установлено, что 2, 3 и 5% продукции этих станков ств-но имеют скрытые дефекты. В конце смены на контроль взята одна деталь. Какова вер., что она с дефектом. О: $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) P(A/H_i) = 0{,}031$.

70. Была проведена одна и та же кр. работа в трех прл-ых группах. В 1-й группе, где 30 учащихся, 8 работ выполнено на «отлично», во 2-й, где 28

учащихся, – 6 работ, в 3-й, где 27 уч., – 9 работ. Найти вер. того, что взятая из группы наудачу работа выполнена на «отлично». О: $P(A) = 14/70$.

71. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вер. того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету). О: $P(A) = 2/3$. Ук: H_1 – первоначально белых шаров нет, H_2 – 1 белый шар, H_3 – 2 белых шара.

72. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вер. того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету). О: $P(A) = \sum_{i=1}^{n+1} P(H_i)P(A/H_i) = (n+2)/2(n+1)$.

73. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вер. того, что взят белый шар. О: $P(B) = 0{,}5$.

74. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из I цеха, 30% – из II. При этом материал I цеха имеет 10% брака, а II – 20%. Найти вер. того, что одна наудачу взятая болванка не имеет дефектов. О: 0,87.

75. На сборку попадают детали, изготовленные тремя автоматами. Известно, что I автомат дает 0,3% брака, II – 0,2%, III – 0,4%. Найти вер. попадания на сборку бркн-ой детали, если с I автомата поступило 1000 деталей, со II – 2000 и с III – 2500. О: 0,0031.

76. Часы изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. I завод производит 40% продукции, II – 45%, III – 15%. На I заводе 80% продукции «отличного» качества, на II – 90%. Какова вер. того, что купленные часы «отличного» качества? О: 0,77.

77. Заготовки на сборку поступают из двух бункеров: 70% из I и 30% из II. При этом заготовки I бункера имеют плюсовые допуски в 10% сл-ев, а II – в 20%. Найти вер. того, что наудачу взятая деталь имеет плюсовой допуск. О: $P(A) = 0{,}13$.

78. Пластмассовые болванки на 50% изготовляются на I прессе с вер-ю 0,025 выпуска нестандартных болванок, на 30% II – 0,02 и на 20% III – 0,015. Найти вер. того, что наудачу взятая со склада болванка ств-ет стандарту. О: $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}9785$.

79. При условиях з78 найти вер. того, что ств-я стандарту болванка изготовлена на I прессе. О: $P(H_1/A) = P(H_1)\dfrac{P(A/H_1)}{P(A)} = P(H_1)\dfrac{P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i)} =$

$= 4975/9785$.

80. При условиях з79 найти $P(H_2/A)$. О: $P(H_2/A) = P(H_2)\dfrac{P(A/H_2)}{P(A)} =$

$= 2940/9785$.

81. При условиях з79 найти $P(H_3/A)$. О: 1970/9785.

82. Учитывая полученные результаты в з79-з81, проверить правильность их выч-й. О: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i/A) = 1$.

83. Готовые детали проверяются двумя контролерами. Вер-ть попадания детали I контролера равна 0,6, II – 0,4. вер-ть забраковки I контролером равна 0,06, II – 0,02. При проверке забракованных обнаружен годный. Найти вер. того, что эту деталь проверял I контролер. О: 9/11. Ук: $P(A) =$ $= P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(H_2/A) = 0{,}044$, $P(H_1/\overline{A}) = P(H_1)\, P(\overline{A}/H_1)/P(A) =$ $= \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}044} = \dfrac{9}{11}$.

84. Три стрелка одновременно выстрелили, и в мишени обнаружили две пули. Найти вер. того, что III стрелок поразил мишень, если вер-ть попадания в мишень I стрелка равна 0,6, II – 0,5, III – 0,4. О: 10/19. Ук: $P(A) =$

$$= \frac{1}{3}\left[P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3)\right] = \frac{0{,}38}{3}.\ P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)\cdot \frac{1}{2}}{P(A)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} : \frac{0{,}38}{3} = \frac{10}{19}.$$

85. Мимо бензоколонок проезжает 40% легковых и 60% грузовых машин. Легковая с вер-ю 0,2 подъезжает на заправку, грузовая – 0,1. К бензоколонке подъехала машина. Найти вер. того, что она грузовая. О: $P(H_2/A) =$ $= P(H_2)\, P(A/H_2)/P(A) = 3/7$.

86. Из 10 деталей 4 окрашены. Вер. того, что окрашенная деталь тяжелее нормы, равна 0,3, а для неокрашенной детали эта вер. равна 0,1. Взятая наудачу деталь оказалась тяжелее нормы. Найти вер. того, что она окрашена. О: 2/3.

87. В пирамиде установлено 10 винтовок, 4 из к-ых имеют оптический прицел. Вер-ть поражения мишени из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, из винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вер-нее: была взята винтовка с оптическим прицелом или без него? О: вер-нее, что винтовка без оптического прицела, т.к. $P(H_1/A) = 0{,}48/0{,}86 > 0{,}38/0{,}86 = P(H_2/A)$.

1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ, ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте частную задачу и выведите фм-у Бернулли.
2. Сформулируйте общую задачу и выведите фм-у Пуассона.
3. По какой фм-е опр-ся наивероятнейшее число m появлений сб. A?
4. В чем состоит суть распределения (закона) Пуассона и когда он применяется?

5. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.

6. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

7. В чем состоит суть закона больших чисел?

8. Какие практические задачи можно решить с помощью закона больших чисел?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п10 решить з1-з20.

1. Стрелок сделал 6 выстрелов в цель с вер-ю попадания $p = 0{,}4$ при каждом выстреле. Найти вер. того, что произойдет ровно два попадания в цель. О: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = 0{,}31$.

2. Опытом установлено, что в среднем 75% массовой продукции, выпускаемой нек-ой мастерской, принадлежит первому сорту. Найти вер. того, что из наудачу взятых изделий 3 изделия окажутся не первого сорта. О: $C_6^3\,(0{,}25)^3(0{,}75)^0 = 0{,}007$.

3. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вер-ю 0,8. Найти вер. того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4. О: $C_5^4\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\cdot\dfrac{1}{5} + \left(\dfrac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{2304}{3125} = 0{,}73728$.

4. Стрелок произвел по цели 4 выстрела с вер-ю $p = 0{,}4$ в каждом выстреле. Найти вер. хотя бы одного попадания в цель. О: $p_4\,(m \geq 1) = 1 - p_4(0) = 0{,}8704$.

5. В нек-ых районах летом в среднем 20% дней бывает дождливыми. Найти вер. того, что в течение одной летней недели число дождливых дней будет не менее одного и не более трех дней. О: $p_7\,(1 \leq m \leq 3) = p_7(1) + p_7(2) + p_7(3) = 0{,}757$.

6. При автоматической наводке орудия вер. попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах. О: $m_0 = 45$.

7. Данные проверки качества выпускаемых стандартных деталей показали, что в среднем брак составляет 7,5%. Опр-ть наиболее вер. число стандартных деталей. О: $m_0 = 36$ или 37.

8. Сколько следует произвести повторных незв. исп-й, чтобы наивероятнейшее число появлений нек-го сб. оказалось равным 21, если в отдельном исп-и $p = 0{,}75$. О: $n = 28$. Ук: $n \cdot 0{,}75 - 0{,}25 \leq 21 \leq n \cdot 0{,}75 + 0{,}75$.

9. На нек-ом предприятии доля брака составляет 0,15%. Найти вер. того, что в партии из 400 изделий окажется: 1) два изделия бракованных (бркн.); 2) не больше двух изделий бркн-х; 3) больше двух изделий бркн-х. О: 1) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx P_m(\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \dfrac{(0{,}6)^2}{2}e^{-0{,}6} = 0{,}0988$ из табл. T_3 по $\lambda = np$; 2) $p(m \leq 2) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) = 0{,}5488 + 0{,}3293 + 0{,}0988 = 0{,}9769$; 3) $p(m > 2) = 1 - p(m \leq 2) = 0{,}0231$.

10. Известно, что в принятой для сборки партии из 1000 деталей имеются 4 дефектных. Найти вер. того, что среди 50 наудачу взятых деталей нет дефектных. О: $P_{50}(0) = e^{-0,2} = 0,8185$.

11. Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семя I сорта составляет 95%. Найти вер. того, что из взятых наудачу для проверки 200 семян ровно 180 будут I сорта.

$$\text{О: } P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} = \frac{0,02}{3,08} = 0,0007.$$

12. Найти вер. того, что сб. A наступит ровно 70 раз в 243 исп-ях, если вер-ть появления этого сб. в каждом исп-и равна 0,25. О: $P_n(m) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq}$ $= \varphi(1,37)/6,75 = 0,1561/6,75 = 0,0231$.

13. Вер-ть рождения мальчика равна 0,51. Найти вер. того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков. О: $P_{100}(50) \approx 0,0783$.

14. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вер-ть появления герба ровно N раз. О: $p_{2N}(N) = 0,5642/\sqrt{N}$.

15. Вер-ть наступления сб. A в каждом отдельном исп-и равна 0,7. Найти вер. появления сб. A не менее 1000 и не более 1080 раз при 1500 исп-ях.

$$\text{О: } P_n(m_1,\ m_2) = P(m_1 \le \mu_n \le m_2) = P\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \phi(b) - \phi(a) = \phi(1,69) - \phi(-2,82) =$$

$= \phi(1,69) + \phi(2,82) = 0,4545 + 0,4876 = 0,9521$.

16. Вер-ть появления сб. A в каждом из 100 незв-х испытаний равна 0,8. Найти вер. того, что сб. A появится: 1) не менее 75 и не более 90 раз; 2) не менее 75 раз; 3) не более 74 раз. О: 1) $a = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{75 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = \dfrac{-5}{4} =$ $= -1,25$; $b = 10/4 = 2,5$; $P_{100}(75;\ 90) = \phi(2,5) - \phi(-1,25) = \phi(2,5) + \phi(1,25) =$ $= 0,4938 + 0,3944 = 0,8822$. 2) $P_{100}(75;\ 100) = \phi(5) - \phi(-1,25) = 0,5 + 0,3944 =$ $= 0,8944$. 3) $P_{100}(0;\ 74) = 1 - P_{100}(75;\ 100) = 0,1056$.

17. Известно, что 90% выпускаемых радиоламп яв-ся годными. Найти вер. того, что в партии из 500 радиоламп отк-ие частоты брака от установленного процента не превысит 0,05.

$$\text{О: } P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\phi\left(0,05\sqrt{\frac{500}{0,9\cdot 0,1}}\right) = 2\phi(3,74) = 2\cdot 0,4999 = 0,9998.$$

18. Вер-ть появления сб-я при каждом исп-и равна 0,5. Найти число исп-й n, при к-ом с вер-ю 0,7698 можно ожидать, что частота появления сб-я отк-ся от его вер-ти по абс. вел-е не более чем на 0,02. О: Из $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|<0{,}02\right) = 0{,}7698 = 2\phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) \Rightarrow \phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right) = 0{,}3849;$ $\phi(1{,}2) = 0{,}3849 \Rightarrow 0{,}04\sqrt{n} = 1{,}2 \Rightarrow n = 900.$

19. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вер. нерав-ва $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}01$ была не меньше, чем вер. противоположного нерав-ва, где m – число появлений одного и того же очка при n бросаниях игральной кости. О: Из $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ имеем $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right) = 1-2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Тогда из условия $2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \ge 1 - 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \Rightarrow \phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \ge 0{,}25,$

$\phi(0{,}6745) = 0{,}25.$ $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}01\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} \ge 0{,}6745 \Rightarrow n \ge 632.$

20. В урне содержатся белые и черные шары в отн. 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно число извлечений n, при к-ом с вер-ю 0,9722 можно ожидать, что абс. вел-а отклонения частоты появления белого шара от его вер-ти будет не более чем 0,01? О: $n = 378$.

21. Вер-ть появления сб-я в каждом из 400 незв-х испытаний равна 0,8. Найти $\varepsilon > 0$, чтобы с вер-ю 0,9876 абс. вел-а отклонения частоты появления сб-я от его вер-ти 0,8 не превысила ε. О: $\varepsilon = 0{,}05$.

22. ОТК проверяет на стандартность 900 деталей. Вер. стандартности детали равна 0,9. Найти с вер-ю 0,9544 границы, в к-ых будет заключено m стандартных деталей среди проверенных.

О: Из $2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}9544 \Rightarrow \phi(100\varepsilon) = 0{,}4772$ или $\phi(2) = 0{,}4772 \Rightarrow 100\cdot\varepsilon = 2$ или $\varepsilon = 0{,}02$. Тогда из $\left|\frac{m}{900}-0{,}9\right| \le 0{,}02 \Rightarrow 3 \le m \le 23.$

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

> Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.
>
> Н. Винер

ЛЕКЦИЯ 4

2.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Понятия случайной величины и ее законы распределения. Случайная (слн.) величина (вел.) яв-ся исходным понятием, как и мн-во.

Под слн. вел-ой понимается вел., к-ая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем неизвестно заранее – какое именно.

Слн. вел-ы бывают дискретного (дк.) и непрерывного (непр.) типа. Н-р, число появлений герба при трех бросаниях монеты – дк. слн. вел-а; абсцисса точки попадания при выстрелах или ошибки измерителя высоты – непр. слн. вел-ы.

Рас-им дк. слн. вел-у X с возможными значениями (зн.) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, к-ые образуют полную группу несовместных сб-й. Обз-им вер-ти этих сб-й буквами p_i, т.е. $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, …, $P(X = x_n) = p_n$. Они есть вер-ти полной группы несовместных сб-й, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (1)$$

Законом распределения (рсп.) слн-й вел-ы наз. всякое стн., устанавливающее связь между возможными зн-ми сл-й вел-ы и ств-ми им вер-ми.

Закон рсп-ия дк. слн. вел-ы X задается

1) в табличной форме

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2		p_n

. Такая табл. наз. рядом рсп-ия слн-й вел-ы X. Кратко ее обз-ют $\{x_i, p_i\}$;

2) в графической форме (рис. 1). Такая фигура наз. многоугольником (муг.) рсп-ия слн-й вел-ы X.

п1. Производится три выстрела по мишени с вер-ю попадания 0,4 при каждом выстреле. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд и муг-к рсп-ия.

Р. Пусть X – число выбитых очков: $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$. По схеме Бернулли находим $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$: $P_3(0) = (0{,}6)^3 = 0{,}216$, $P_3(1) = C_3^1\,0{,}4\cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$, $P_3(2) = C_3^2\,0{,}4^2\cdot 0{,}6 = 0{,}288$, $P_3(3) = 0{,}4^3 = 0{,}064$. Откуда получим ряд (табл. 1) и муг-к (рис. 2) рсп-ия. И стн. (1) выполняется $\sum p_i = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$.

Таблица 1

X	0	5	10	15
P	0,216	0,432	0,288	0,064

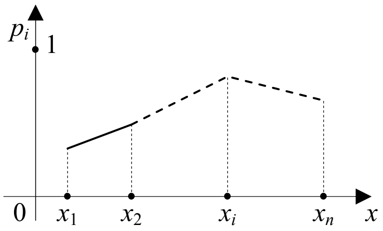


Рис. 1

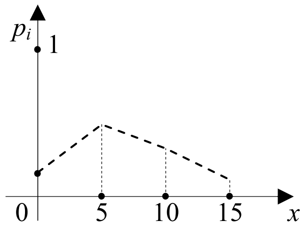


Рис. 2

2º. Функция распределения. Если слн. вел-а X непр-я, то ряд рсп-ия не применим, ибо вер-ть каждой отдельной слн. вел-ы равно нулю (почему так!), т.е. $P(X = x_i) = 0$. Поэтому для количественной (колн.) характеристики (хркс.) рсп-ия непр-ой слн. вел-ы воспользуемся не вер-ю сб-ия $X = x$, а вер-ю сб. $X < x$, где x – нек-ая текущая пер.

Вер-ть этого сб-я зависит от x. Эта фк. наз. фк-ей рсп-ия слн-ой вел-ы X и обз-ся

$$F(x) = P(X < x). \tag{2}$$

Фк-ю $F(x)$ иногда наз-ют интегральной (интн.) фк-ей рсп-ия или интн-м законом рсп-ия.

Фк. рсп-ия – самая универсальная хркс-ка слн-й вел-ы. Она сущ-ет для всех слн-х вел-н – как непр-х, так и дк-х. Так, зная ряд рсп-ия дк-ой слн. вел-ы, легко построить ее фк-ю рсп-ия:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P\left(X = x_i\right). \tag{3}$$

Фк-ия рсп-ия обладает сд-ми св-ми:

с1. $F(x)$ есть неубывающая (неуб.) фк., т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

с2. $F(-\infty) = 0$.

с3. $F(\infty) = 1$.

Отсюда следует, что график фк-и рсп-ия $F(x)$ представляет собой график неуб-ей фк-и (рис. 3) с обл-ю зн-й [0, 1], причем в отдельных точках фк-ия может иметь скачки (разрывы), как на рис. 4, 5.

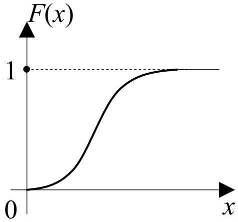


Рис. 3

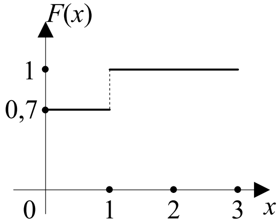


Рис. 4

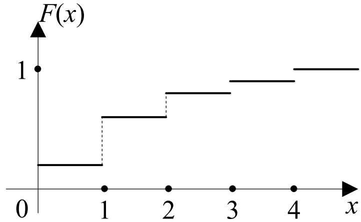


Рис. 5

п2. Производится один выстрел по мишени. Вер-ть попадания равна 0,3. Построить фк-ю рсп-ия числа попаданий.

Р. Ряд рсп-ия имеет вид

X	0	1
P	0,7	0,3

. Находим фк-и рсп-ия $F(x) =$

$= P(X < x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x \le 0, \\ 0{,}7 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } 1 < x < \infty. \end{cases}$ Отсюда строим график фк-и $F(x)$ на рис. 4.

п3. Производится 4 выстрела по мишени с вер-ю 0,3 при каждом выстреле. Построить фк-ю рсп-ия числа попаданий.

Р. Вычисляя $P_4(m) = C_4^m p^m q^{4-m}$ при $m = \overline{0{,}4}$, строим ряд рсп-ия:

X	0	1	2	3	4
P	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

Находим $F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, \ -\infty < x \le 0, \\ 0{,}2401, \ 0 < x \le 1, \\ 0{,}6517, \ 1 < x \le 2, \\ 0{,}9103, \ 2 < x \le 3, \\ 0{,}9919, \ 3 < x \le 4, \\ 1, \ 4 < x < \infty. \end{cases}$

График фк-и рсп-ия $F(x)$ см. на рис. 5.

3°. Плотность распределения. Пусть фк. рсп-ия $F(x)$ непр-ой слн. вел-ы X диф-ма. Выч-им вер-ть попадания этой слн. вел-ы на участок $]x, x + \Delta x[$:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Рас-им среднюю вер-ть $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$, приходящуюся на ед-у длины и находим ее предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Фк-ия

$$f(x) = F'(x) \tag{4}$$

наз. плотностью рсп-ия слн-й вел-ы в данной точке x.

Кривая, изб-щая плотность рсп-ия слн-й вел-ы X, наз. кривой рсп-ия (рис. 6).

Плотность рсп-ия, так же как и фк-ия рсп-ия, есть одна из форм закона рсп-ия. Но плотность рсп-ия не яв-ся универсальной, т.е. она сущ-т только для непр-ой слн. вел-ы. Роль аналогичного понятия для дк-ой слн. вел-ы играет ряд рсп-ия.

Из стн. (4) следует, что фк. рсп-ия $F(x)$ яв-ся первообразной фк-ей для плотности рсп-ия $f(x)$, и связаны они стн-ем

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha), \tag{5}$$

где (см. рис. 7)

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx . \tag{6}$$

Выражение (врж.) $f(x)dx$ наз. элементом (эл.) вер-ти (рис. 8), а $P(\alpha < X < \beta)$ есть вер-ть попадания X в промежуток $]\alpha, \beta[$ (рис. 9).

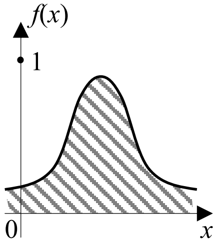


Рис. 6

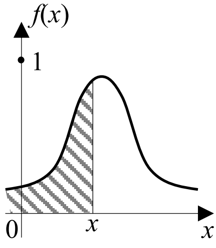


Рис. 7

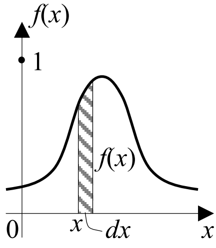


Рис. 8

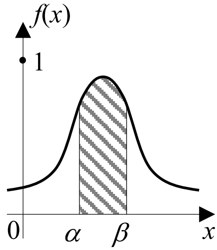


Рис. 9

Плотность рсп-ия обладает сд. св-ми:

с1. Плотность рсп-ия есть неуб. фк-ия, т.е. $f(x) \geq 0$. Это вытекает из того, что фк-ия рсп. $F(x)$ яв-ся неуб-ей фк-ей.

с2. $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1$, как и для $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ дк. сл-я.

п3. Фк-я рсп. непр. слн-й вел-ы X задана врж-ем $F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ ax^2, 0 < x \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$

Найти коэф. a, плотность рсп-я $f(x)$ и вер-ть $P(0{,}25 < X < 0{,}5)$.

Р. Т.к. $F(x)$ непр-на, то при $x = 1$ имеем $F(x) = ax^2 = 1 \Rightarrow a = 1$. Находим

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ 2x, 0 < x \leq 1, \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

По стн. (5) выч-им $P(0{,}25 < X < 0{,}5) = \int\limits_{0{,}25}^{0{,}5} 2xdx = 2 \cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{0{,}25}^{0{,}5} = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 =$

$= 0{,}1825$.

ЛЕКЦИЯ 5

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, МОДА, МЕДИАНА, МОМЕНТЫ И ДИСПЕРСИЯ

1°. Числовые характеристики случайной величины. В 2.1 мы рас-ли исчерпывающие характеристики (хркс.) слн-х вел-н, наз-ых законами рсп-ия: для дк-ой слн. вел-ы фк-ю рсп-ия $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i<x} P\left(X = x_i\right) = \sum p_i$, ряд рсп-ия p_i вел-ы x_i ($i = \overline{1,n}$), а графически – муг-к рсп-ия; для непр-ой слн. вел-ы фк-ю рсп-ия $F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, плотность рсп-ия $f(x)$ ($f(x) =$ $= F'(x)$) вел-ы $x \in X$, а графически – кривая рсп-ия.

Однако во многих вопросах практики нет надобности исчерпывающе характеризовать (хркз.) слн. вел-у, а дт-но указать нек-ые параметры, н-р, какое-то «среднее», вокруг к-го группируются значения (зн.) слн-й вел-ы (центр группирования рсп-ия) или какое-либо число (дисперсия), хркз-е степень разбросанности этих зн-й отс-но среднего (ср.), и т.д. Так, н-р, при изучении рсп-ия заработной платы интересуются прежде всего ср-й заработной платой и хркс-ой ее рассеивания – дисперсией (дсп.).

Такие хркс-ки, предназначенные выразить в сжатой форме наиболее сущ-ные особенности рсп-ия, наз. числовыми хркс-ми слн-й вел-ы. Числовые хркс-ки позволяют также прж-но выразить одно рсп-ие через другое.

2°. Математическое ожидание и его свойства. Рас-им дк. слн-ю вел-у $x_i \in X$ с вер-ми p_i ($i = \overline{1,n}$).

Мт-им ожиданием (ож.) наз. сумма пзв-й всех возможных зн-й слн-х вел-н на их вер-ти и обз-ся

$$M\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{1}$$

Для непр-ой слн. вел-ы заменяем x_i на x, p_i – на $f(x)$, сумму – на инт-ы:

$$M\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx \,. \tag{2}$$

Если вел. X принадлежит к вел-ам смешанного типа, то ее мт-ое ож-ие выражается (врж.) фм-ой

$$M\left[X\right] = \sum_{x_i \in X'} x_i p_i + \int\limits_{x \in X''} xf\left(x\right)dx \,, \tag{3}$$

где $X = X' \cup X''$.

Мт. ож-ие иногда обз-им так: $m_x = M\left[X\right]$.

Выясним вер-ный и физический смысл мт-го ож-ия.

Пусть проведено n испытаний (исп.), в к-ых слн. вел-а X приняла m_1 раз зн-ие x_1, m_2 раз зн-ие x_2, …, m_k раз зн. x_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Тогда сумма всех зн-й, принятых X, равна $\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$. Отсюда можно найти ср-е ариф. $\overline{X}$ всех зн-й, принятых слн. вел-ой:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{m_i}{n} \approx \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = M[X], \tag{4}$$

т.к. частота $\frac{m_i}{n}$ появления слн-й вел-ы x_i прж-но равно ее вер-ти p_i. Т.о. мт. ож-ие прж-но равно (тем точнее, чем больше n) ср. ариф-у нблм-ых зн-й слн-й вел-ы. В этом состоит ее вер-ный смысл.

Физический смысл мт-го ож-ия состоит в том, что оно врж-ет центр тяжести масс. Пусть массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда абсцисса центра тяжести масс равна

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M[X]. \tag{5}$$

Из опр-ия легко получить св-ва мт-го ож-я:

с1. Мт. ож-ие пст-ой вел-ы равно самой пст-ой, т.е.

$$M[C] = C.$$

Д. Рас-им пст-ю C как дк-ю слн. вел-у, к-ая имеет одно возможное зн. C и принимает его с вер-ю $p = 1$. Тогда $M[C] = C \cdot 1 = C$.

сл1. Если слн. вел. X задана законом рсп-ия $\{x_i, p_i\}$, то слн. вел. CX задается законом рсп-ия $\{Cx_i, p_i\}$.

с2. Пст-ый множитель можно выносить за знак мт-го ож-ия:

$$M[CX] = CM[X].$$

Д. Пусть слн. вел. X задана законом рсп-ия $\{x_i, p_i\}$, тогда, учитывая сл1, получим $M[CX] = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots x_np_n) = CM[X]$ ■

зм1. Рас-им вер-ти пзв-ия незв-х слн. вел-ин $XY = \{x_i y_j\}$ $(i, j = \overline{1, n})$. Их можно расв-ть как незв-ые слн. сб-ия, тогда пзв-ие $x_i y_j$ имеет вер-ть $p(x_i y_j) = p(x_i)p(y_j) = p_i p_j$.

с3. Мт. ож-ие пзв-ия двух незв-х слн. вел-н равно пзв-ю их мт. ож-й:

$$M[XY] = M[X]\, M[Y].$$

Д. Пусть незв-ые слн. вел-ы X и Y заданы своими законами рсп-ия $\{x_1, x_2; p_1, p_2\}$ и $\{y_1, y_2; q_1, q_2\}$. Учитывая зм1, напишем закон рсп-ия пзв-ия XY: $\{x_1 y_1, x_2 y_1, x_1 y_2, x_2 y_2; p_1 q_1, p_2 q_1, p_1 q_2, p_2 q_2\}$. Тогда получим $M[XY] = x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_2p_2q_2 = y_1q_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2q_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M[X]\, M[Y]$ ■

сл2. Мт. ож-ие пзв-ия конечного числа незв-х слн. вел-н равно пзв-ю их мт-х ож-й, т.е. $M[XY...Z] = M[X]\, M[Y] \ldots M[Z]$.

с4. Мт. ож-ие суммы двух слн. вел-н равно сумме их мт-х ож-й:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$

Д. Пусть слн. вел-ы X и Y заданы законами рсп-ия $\{x_1, x_2; p_1, p_2\}$ и $\{y_1, y_2; q_1, q_2\}$. Составим всевозможные значения вел-н $X + Y$: $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2$, их вер-ти обз-им через $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$. Тогда получим $M[X+Y] = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1q_1 + y_2q_2 = M[X] + M[Y]$, т.к. $p_{11} + p_{12} = p_1$, ибо сб-ие, состоящее в том, что X примет значение x_i (ее вер-ть равна p_1), влечет за собой сб-ие, к-ое состоит в том, что $X + Y$ примет значение $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$ (их вер-ть равна $p_{11} + p_{12}$), и обратно, т.е. $p_{11} + p_{12} = p_1$; аналогично док-ся рав-ва $p_{21} + p_{22} = p_2$, $p_{11} + p_{21} = q_1$ и $p_{12} + p_{22} = q_2$■

с3. Мт. ож-ие суммы конечного числа слн-х вел-н равно сумме мт-х ож-й слагаемых:

$$M[X+Y+\ldots+Z] = M[X] + M[Y] + \ldots + M[Z].$$

с5. Мт. ож-ие $M[X]$ числа появления сб-я A в n незв-х исп-ях равно пзв-ю числа исп-й на вер-ть p появления сб-я при каждом исп-и, т.е.

$$M[X] = np.$$

Д. Пусть слн. вел. X есть число наступлений сб-я A в n незв-х исп-ях. Поэтому X_1 – число появлений сб-я в первом исп-и, X_2 – во втором, …, X_n – в n-ом исп-и, тогда $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогда по с4 получим $M[X] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n]$. Т.к. $M[X_1] = M[X_2] = \ldots = M[X_n] = 1 \cdot p = p$, то $M[X] = np$■

п1. Незв-ые слн. вел-ы X и Y заданы законами рсп-ия: $\{5; 2; 4: 0{,}6; 0{,}1; 0{,}3\}$ и $\{7; 9: 0{,}8; 0{,}2\}$. Найти мт. ож-ие слн-й вел-ы XY.

Р. $M[X] = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4$; $M[Y] = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}2 = 7{,}4$. Тогда $M[XY] = 4{,}4 \cdot 7{,}4 = 32{,}56$.

п2. Производится 3 выстрела ств-но с вер-ми попадания $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$ и $p_3 = 0{,}6$. Найти мт. ож-ие общего числа попаданий.

Р. Число попаданий в первом выстреле есть слн. вел. X_1, к-ая принимает два зн-ия: 1 (попадание) с вер-ю $p_1 = 0{,}4$ и 0 (промах) с вер-ю $q_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, поэтому $M[X_1] = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$. Аналогично, $M[X_2] = 0{,}3$; $M[X_3] = 0{,}6$. Тогда $M[X] = M[X_1 + X_2 + X_3] = M[X_1] + M[X_2] + M[X_3] = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1{,}3$ (попаданий).

п3. Найти мт. ож-ие суммы числа очков, к-ые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Р. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – число очков на первой кости с вер-ю каждого из них $p = \frac{1}{6}$, аналогично Y – на второй кости. Тогда $M[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+6) \cdot 6}{2} = \frac{7}{2}$ и $M[X] = \frac{7}{2}$. Отсюда $M[X+Y] = M[X] + M[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$.

зм2. Аналогичные св-ва имеет мт. ож-ие для непр-ой слн. вел-ы.

3°. Мода и медиана случайной величины. Модой μ дк-ой слн. вел-ы X наз. ее наиболее вер-ое зн. p_i (рис. 1) или max плотности рсп-ия $f(x)$, если X непр-на (рис. 2).

Медианой μe слн-ой вел-ы X наз. такое ее зн. e, для к-го $P(X < e) = P(X > e) = \mu e$ (рис. 3).

В случае симметричности кривой рсп-ия отс-но мт-го ож-ия мода и медиана совпадают, т.е. $\mu = \mu e$.

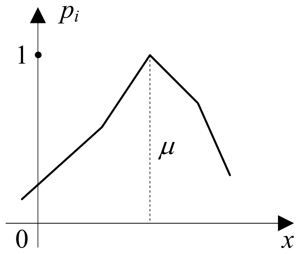


Рис. 1

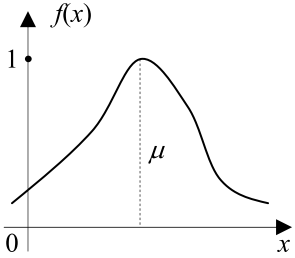


Рис. 2

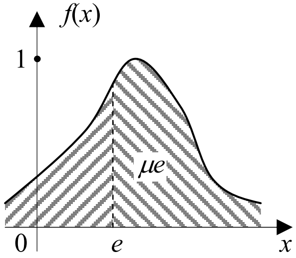


Рис. 3

4°. Моменты случайной величины. На практике часто применяют моменты двух видов: начальные (нач.) и центральные (цтр.).

Нач-ым моментом s-го порядка дк-ой слн. вел-ы X наз. сумма вида

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \,, \tag{6}$$

а для непр-х слн. вел-н

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx \,. \tag{7}$$

Мт. ож-ие есть первый нач. момент $\alpha_1[X] = M[X] = m_x$, а $\alpha_s[X] = M[X^s]$.

Слн. вел-а $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ наз. центрированной (цтрв.) слн. вел-ой.

Мт. ож-ие цтрв-ой слн. вел-ы равно нулю:

$$M[\overset{\circ}{X}] = M[X - m_x] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0.$$

Моменты цтрв-ой слн. вел-ы носят название цтр-ых моментов (они аналогичны моментам отс-но центра тяжести в механике).

Цтр-ым моментом порядка s слн-й вел-ы X наз. мт. ож-ие s-й степени (ст.) ств-ей цтрв-ой слн. вел-ы:

$$\mu_s[\overset{\circ}{X}] = M[\overset{\circ}{X}{}^s] = M\left[(X - m_x)^s\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i \,, \tag{8}$$

а для непр-ой слн. вел-ы

$$\mu_s[\overset{\circ}{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)dx \,. \tag{9}$$

Иногда врж-ия $\alpha_s[M]$ и $\mu_s[X]$ обз. через α_s и μ_s.

Выразим цтр-ые моменты через нач-ые $\left(\sum_{i=1}^{n} \Rightarrow \sum\right)$:

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu[\overset{\circ}{X}] = M[X - m_x] = \sum (x_i - m_x) p_i = \\ = \sum x_i p_i - m_x \sum p_i = m_x - m_x = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = \sum (x_i - m_x)^2 p_i = \sum x_i^2 p_i - 2m_x \sum x_i p_i + \\ + m_x^2 \sum p_i = \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2 - m_x^2. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 = M[\overset{\circ}{X}{}^3] = \sum (x_i - m_x)^3 p_i = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + \\ + 3m_x m_x^2 - m_x^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = M[\overset{\circ}{X}{}^4] = \sum (x_i - m_x)^4 p_i = \alpha_4 - 4\alpha_3 m_x + \\ + 6\alpha_2 m_x^2 - 4m_x m_x^3 + m_x^4 = \alpha_4 - 4\alpha_3 m_x + 6\alpha_2 m_x^2 - 3m_x^4. \end{aligned} \tag{13}$$

Кроме нач-ых и цтр-ых моментов на практике применяются и абсолютные (абс.) моменты (нач-ые и цтр-ые), опр-мые фм-ми:

$$\beta_s = M[\,|X|^s\,],\, X_s = M[\,|\overset{\circ}{X}|^s\,]. \tag{14}$$

Первый абс. цтр-ый момент

$$\gamma_1 = M[\,|\overset{\circ}{X}|\,] = M[\,|X - m_x|\,] \tag{15}$$

наз. ср. ариф-им отк-ем (иногда оно применяется как хркс-ка рассеивания).

5°. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение, асимметрия и эксцесс. Второй цтр. момент наз. дисперсией слн-й вел-ы x и обз-ся

$$\mu_2 = D[X] = M[(X - m_x)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i\,, \tag{16}$$

а для непр. слн-х вел-н

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx\,. \tag{17}$$

Дсп-ия есть хркс-ка рассеивания (разбросанности) зн-й слн-ой вел-ы X около ее мт-го ож-ия.

Вел-а $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ наз. ср. квадратическим отклонением (ср. кв. отк.).

зм3. Если рсп-ие симметрично отс-но мт-го ож-ия, то цтр-ые моменты нечетного порядка равны нулю, т.е. $\mu_s = 0$ при s нечетном и $\mu_s \neq 0$ при s четном.

Третий цтр-ый момент служит для хркс-ки асимметрии (или «скошенности») рсп-ия и обз-ся через A или $S_x = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (рис. 4), в част., если расп-ие симметрично отс-но мт-го ож-ия, то $S_x = 0$ в силу $\mu_3 = 0$.

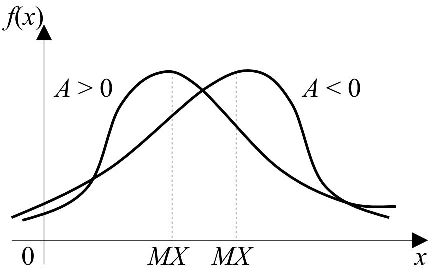


Рис. 4

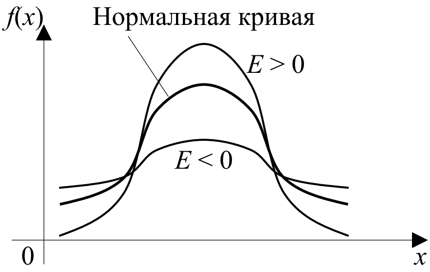


Рис. 5

Четвертый цтр-ый момент служит для хркс-ки «крутости» (островершинности или туповершинности) рсп-ия. Это св-во рсп-ия наз. эксцессом и обз-ся $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (рис. 5), в част., для нормального (см. 3°:2.3) рсп-ия $E_x = 0$.

Теперь рас-им св-ва дисперсии (дсп.):

с1. Дсп-ия пст-ой равна нулю, т.е. $D[C] = 0$.

Д. $D[C] = M\left[(C - M(C))^2\right] = M\left[(C-C)^2\right] = M[0] = 0$■

с2. Пст-ый множитель можно выносить за знак дсп-и, возводя его в квадрат (кв.), т.е. $D[CX] = C^2 D[X]$.

Д. $D[CX] = M\left[(CX - M[CX])^2\right] = M\left[(CX - CM[X])^2\right] = C^2 M\left[(X - M[X])^2\right] =$
$= C^2 D[X]$■

с3. Дсп-ия суммы двух незв-ых слн. вел-н равна сумме дсп-й этих вел-н, т.е. $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$.

Д. Учитывая (11), получим $D[X+Y] = M\left[(X+Y)^2\right] - (M[X+Y])^2 =$
$= M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - (M[X] + M[Y])^2 = M\left[X^2\right] + 2M[X]M[Y] + M\left[Y^2\right] -$
$- (M[X])^2 - 2M[X]M[Y] - (M[Y])^2 = \left\{M\left[X^2\right] - (M[X])^2\right\} + \left\{M\left[Y^2\right] - (M[Y])^2\right\} =$
$= D[X] + D[Y]$■

сл1. $D[X + Y + ... + Z] = D[X] + D[Y] + \ldots + D[Z]$, где $X, Y, \ldots, Z$ – незв. слн. вел-ы.

сл2. $D[C + X] = D[C] + D[X] = D[X]$.

сл3. $\sqrt{D[X]} = \sqrt{D[X_1] + ... + D[X_n]} \Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + ... + \sigma^2(X_n)}$, где $X_1, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы.

с4. Дсп-ия разности двух незв-х слн. вел-н равна сумме их дсп-й, т.е. $D[X - Y] = D[X] + D[Y]$.

Д. С учетом с2 и с3 получим $D[X - Y] = D[X] + D[-Y] = D[X] +$
$+ (-1)^2 D[Y] = D[X] + D[Y]$■

с5. Дсп-ия $D[X]$ числа появлений сб-ия A с вер-ю p (p = const) в n незв-х исп-ях равна npq, где $q = 1 - p$, т.е.

$$D[X] = npq.$$

Д. Полагаем $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где X_i – число наступлений сб-ия A в i-м исп-и, к-ые незв-ы. Тогда $D[X] = D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n]$. Но $D[X_1] = M[X_1^2] - (M[X_1])^2 = 1^2p + 0^2q - (1{\cdot}p + 0{\cdot}q)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$ и $D[X_1] = D[X_2] = \ldots = D[X_n]$, сд-но, $D[X] = npq$■

п4. Производится один выстрел по мишени с вер-ю p. Найти m_x, D_x, σ_x.

Р. $m_x = \sum x_i p_i = 0{\cdot}q + 1{\cdot}p = p$, $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0^2q + 1^2p - p^2 = p(1 - p) = pq$, $\sigma_x = \sqrt{pq}$.

ЛЕКЦИЯ 6

2.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОМЕРНОЕ, ПУАССОНА, НОРМАЛЬНОЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ

1°. Равномерное распределение. Говорят, что слн. вел. X в интервале $]\alpha, \beta[$ распределена (рсп.) равномерно, если все зн-ия $x_i \in X$ имеют одинаковую вер-ть (рис. 1), т.е.

$$f(x) = \begin{cases} C \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ 0 \text{ при } x < \alpha,\ x > \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Т.к. пщ., огр-ая кривой рсп-ия, равна ед-е, то $C(\beta - \alpha) = 1$. Откуда $C =$ $= \dfrac{1}{\beta - \alpha}$. Тогда (1) можно писать в виде

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \alpha < x < \beta, \\ 0, x < \alpha,\ x > \beta. \end{cases} \tag{2}$$

Находим фк-ю рсп-ия (рис. 2):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} x \Big|_{\alpha}^{x} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \text{ т.е.}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ 1 \text{ при } x > \beta. \end{cases} \tag{3}$$

Выч-им числовые хркс-ки:

$$m_x = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

причем $m_x = \mu e$, т.е. мт. ож-ие и медиана равны. Моды не имеет.

$$\mu_2 = D_x = \int_{\alpha}^{\beta} (x - m_x)^2 f(x)dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12},$$

откуда получим ср. кв. отк-ие

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}.$$

В силу симметричности рсп-ия его асимметрия равна нулю:

$$S_x = \frac{\mu^3}{\sigma_x^3} = 0.$$

Для опр-ия эксцесса находим четвертый цтр-ый момент:

$$\mu_4 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^4 dx = \frac{(\beta - \alpha)^4}{80}, \text{ откуда}$$

$$E_x = \frac{\mu^4}{\sigma_x^4} - 3 = -1{,}2.$$

Опр-им абс. моменты, в част., ср-е ариф. отк-ие

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|dx = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx = \frac{\beta-\alpha}{4}.$$

п1. Найти вер-ть попадания слн. вел-ы X, рсп-ой по закону равномерной плотности, на участок $]a,b[$.

Р. Из рис. 3 ясно, что $P(a < X < b) = (b-a)C = \dfrac{b-a}{\beta-\alpha}$.

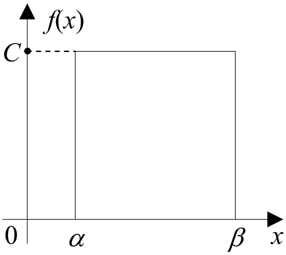


Рис. 1

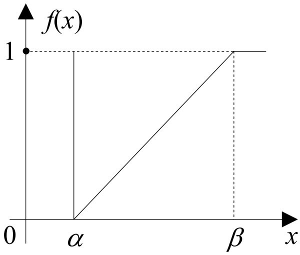


Рис. 2

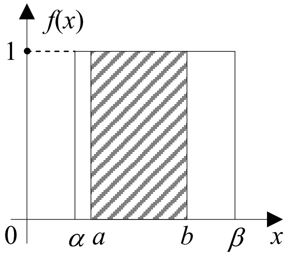


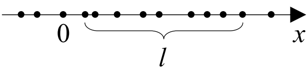
Рис. 3

2°. Распределение Пуассона. В 3°:1.3 фм-у Бернулли прж-но заменили фм-ой (рсп-ем) Пуассона.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \tag{4}$$

где $a = np$. К фм-е (4) приводят многие задачи практики.

п2. На оси OX слн-ым образом распределяются (рспт.) точки:



. Причем их рсп-ие уд-ет условиям:

а) вер-ть попадания того или иного числа точек на отрезок l зависит (зв.) от его длины, но не зв-т от его местоположения на оси, т.е. точки расположены с одинаковой ср. плотностью. Обз-им эту плотность (т.е. мт. ож-ие, приходящееся на ед. длины) через λ;

б) точки рспт-я по оси незв-мо друг от друга;

в) вер-ть попадания на малый участок двух и более точек беск. мала по сравнению с вер-ю попадания одной точки, т.е. невозможна совместимость двух и более точек.

Найти вер. p_m того, что на отрезок оси абсцисс длины l попадет ровно m точек.

Р. Находим $\lambda\Delta x$ – число точек попадания в Δx (т.к. λ – число точек, приходящихся на ед-у длины), т.е. вер-ть попадания в Δx ровно одной точки равна $\lambda\Delta x$. С другой стороны, $\Delta x = l/n$. Тогда вер-ть того, что отрезок $\Delta x = l/n$

окажется «занятым», равно $\lambda \Delta x = \dfrac{\lambda l}{n}$. А вер-ть того, что Δx окажется «пустым», равна $1 - \dfrac{\lambda l}{n}$. Т.к. попадание точек в n отрезков незв-мы, то их можно рас-ть как результаты n незв-х опытов. Найдем вер-ть $P_n(m)$ того, что среди n отрезков будет ровно m «занятых» (см. (9) из 3°:1.3):

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m \left(\dfrac{\lambda l}{n}\right)^m \left(1-\dfrac{\lambda l}{n}\right)^{n-m}$. Отсюда находим $p_m =$

$$= \lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\lambda l}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m}\cdot\frac{(\lambda l)^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{(\lambda l)^m}{m!}\cdot\frac{\left[\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda l}}\right]^{-\lambda l}}{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^m} = \frac{(\lambda e)^m}{m!}\,e^{-\lambda l},$$

где λl есть ср-е (мт. ож-ие) число точек, приходящихся на длину l, обз-им ее через $a = \lambda l$. Тогда получим рсп-ие Пуассона (рис. 4):

$$p_m = P_m(a) = \frac{a^m}{m!}\,e^{-a}. \tag{5}$$

Найдем основные хркс-ки и убедимся, что $m_x = a$.

$$m_x = \sum_{m=0}^{\infty} x p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m\,\frac{a^m}{m!}\,e^{-a} = ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a,$$

т.к. ряд $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{m-1} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^m}{m!} + \ldots = e^a$.

$$\alpha_2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m^2\,\frac{a^m}{m!}\,e^{-a} = a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{-a} =$$

$$= a\left[\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}\right] = a[a+1].$$

Тогда $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = a(a+1) - a^2 = a^2 + a - a^2 = a$.

п3. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час k вызовов. Найти вер. того, что за данную минуту она получит ровно m вызовов.

Р. Находим $a = \dfrac{k}{60}$. Тогда $p_m = \dfrac{\left(\frac{k}{60}\right)^m}{m!}\,e^{-\frac{k}{60}}$.

зм1. Если a – ср-е число сб-й за ед-у времени (вр.), то вер-ть появления m сб-й за вр. t опр-ся фм-ой Пуассона в виде

$$P_m(t) = \frac{(at)^m}{m!}\, e^{-at}. \tag{6}$$

п4. С накаленного катода вылетает в ср-м q электронов за ед-у вр-и. Найти вер. того, что за промежуток Δt с катода вылетит ровно m электронов.

Р. Имеем $a = q\Delta t$, тогда $p_m = \dfrac{(q\Delta t)^m}{m!}\, e^{-q\Delta t}$.

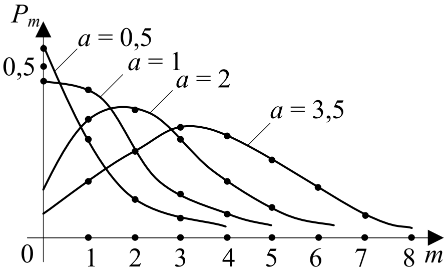


Рис. 4

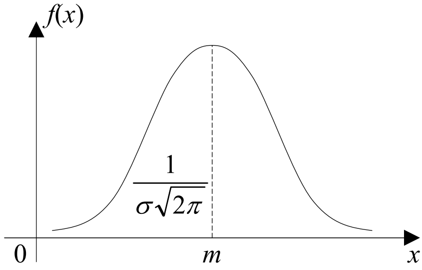


Рис. 5

3°. Нормальный закон распределения. Нормальный (норм.) закон (или закон Гаусса) яв-ся предельным законом, к-му прж-ся др-ие законы (см. 4°:1.3). Он хркз-ся плотностью рсп-ия вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{7}$$

Кривая рсп-ия по норм. закону имеет симметричный холмообразный вид (рис. 5). При $x = m$ имеем $\max f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При $x \to \pm\infty$ плотность рсп. $f(x) \to 0$.

Покажем, что m есть мт. ож-ие, σ – ср. кв. отк-ие.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{c} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ x = \sigma\sqrt{2}t + m \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\left(\sigma\sqrt{2}t + m\right)e^{-t^2}dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = -\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 0 + m = m,$$ т.к. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (см. 5º:4.1).

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ x-m = \sigma\sqrt{2}t \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right| = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = t,\ dv = 2te^{-t^2}dt \\ du = dt,\ v = -e^{-t^2} \end{array} \right| = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\ te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$= 0 + \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2$, т.е. $\sigma = \sqrt{D(X)}$ есть ср. кв. отк-ие.

При m различном кривая рсп-ия передвигается по оси X, а форма не меняется (рис. 6). При малом σ получаем острый клин, а при большом σ – тупой, т.к. пщ-дь под кривой одинакова (рис. 7).

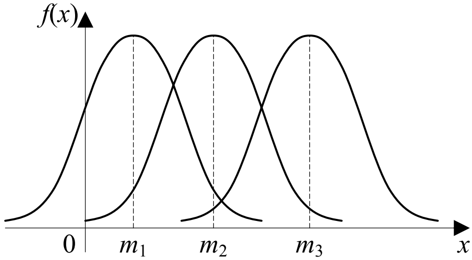


Рис. 6

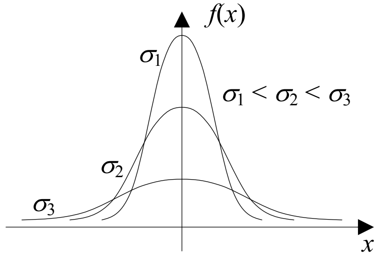


Рис. 7

Выч-им $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right| =$

$$= \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^s e^{-t^2} dt = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-1} te^{-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^{s-1},\ dv = te^{-t^2}dt \\ du = (s-1)t^{s-2},\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \left\{ -t^{s-1} \cdot \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{s-1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt \right\} = \frac{(s-1)\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt .$$

$\mu_{s-2} = \dfrac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt$. Тогда

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2\mu_{s-2} = (s-1)\sigma^2(s-3)\sigma^2\mu_{s-4} = (s-1)!!\,\sigma^s. \qquad (8)$$

В част., $\mu_0 = 1$ как мт. ож-ие нулевой ст-и. Из (8) видно, что моменты при s нечетном равны нулю. А при четном $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_6 = 15\sigma^6$. Отсюда находим скошенность $S_x = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$, эксцесс $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0$.

Найдем вер-ть попадания слн. вел-ы X, подчиненной норм. закону рсп-ия с параметрами m, σ на участок $]\alpha,\beta[$, т.е. выч-им:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix}\dfrac{x-m}{\sigma}=t;\ x=\alpha;\ t=\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\\ dx=\sigma dt;\ x=\beta;\ t=\dfrac{\beta-m}{\sigma}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$ – фк. Лапласа (см. 4°:1.3).

Фк-ия рсп-ия опр-ся по фм-ле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Фк. Лапласа $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ обладает св-ми:

с1. $\phi(0) = 0$.
с2. $\phi(\infty) = 0{,}5$.
с3. $\phi(-x) = -\phi(x)$, фк. нечетная.
Выразим фк-ю рсп-ия $F(x)$ через фк-ю Лапласа $\phi(x)$:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \phi(-\infty) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \phi(\infty) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

п5. Найти вер. попадания слн. вел-ы X норм-го рсп-ия на участок $]m-\delta, m+\delta[$.

Р. $$P(m-\delta < X < m+\delta) = P\left(|x-m| < \delta\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{m-\delta}^{m+\delta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix}\dfrac{x-m}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\delta}{\sigma}}^{\frac{\delta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta = 3\sigma$, то $2\phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right) = 2\phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$, т.е. вер. того, что слн. вел. X выйдет за участок $m \pm 3\sigma$, равно 0,0027. Это есть правило «трех сигма», к-ое часто используется на практике.

4°. Показательное распределение и функция надежности. Показательным (экспоненциальным) рсп-ем наз. рсп-ие с плотностью рсп-ия вида

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где λ – пст. плж-ая вел-а (см. рис. 8).

Из (9) можно найти фк-ю рсп-ия (рис. 9):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right] \Bigg|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{10}$$

Найдем вер-ть попадания показательно рсп-ой слн. вел-ы в интервал $]a, b[$ (рис. 10). Учитывая рав-во $f(x) = F'(x)$ (см. (4) из 3°:2.1), получим

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \tag{11}$$

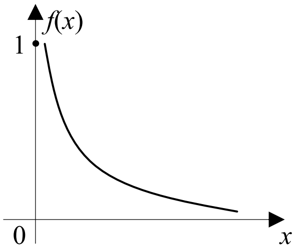


Рис. 8

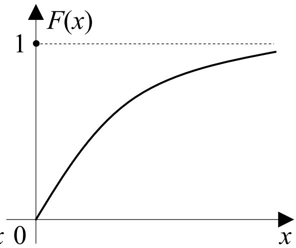


Рис. 9

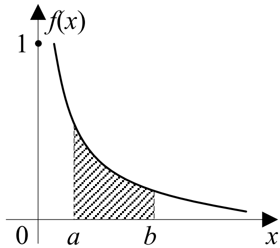


Рис. 10

п6. Непр-ая слн. вел. X рсп-на по показательному закону $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$

Найти вер. попадания X на участок $]0{,}3;\ 1[$.

Р. По (11) имеем: $P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0{,}3} - e^{-2\cdot 1} = 0{,}5488 - 0{,}1353 \approx 0{,}41$. Опр-им числовые хркс-ки. Инт-уя по частям, найдем

$$m_x = M(X) = \int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \tag{12}$$

Учитывая (4) из 4°:2.2, получим

$$\begin{aligned} D_x = D(X) &= \int_{0}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 = \\ &= \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда имеем

$$\sigma_{\text{x}} = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{14}$$

Сравнивая (12) и (14), заключаем, что $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

п7. Непр-ая слн. вел. X рсп-на по показательному закону расп. $f(x) =$ $= \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 5e^{-5x}, \ x \geq 0. \end{cases}$ Найти мт. ож-ие, ср.кв. отк-ие и дсп-ю X.

Р. Т.к. $\lambda = 5$, то $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$. $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{5^2} = 0{,}04$.

зм2. Пусть на практике изучается показательно рсп-ая слн. вел. X, причем параметр λ неизвестен. Если мт. ож-ие также неизвестно, то находим выборочную (вбрч.) среднюю (ср.) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда вместо λ берем ее прж. зн-е $\lambda^* = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

зм3. Пусть предполагается, что слн. вел. X рсп-на показательно. Чтобы проверить эту гипотезу, находим вбрч. ср-ю и вбрч-ое ср. кв. отк-ие. Если они близки друг к другу, то гипотеза подтверждается, иначе – отвергается.

Показательное рсп. широко применяется в приложениях, в част., в теории надежности. Рас-им ее подробнее.

Элементом (эл.) наз. нек-ое устройство, незв-мо от того, «простое» оно или «сложное».

Пусть эл-т начинает работать в момент вр-и $t_0 = 0$, а по истечении вр-и длительностью t происходит отказ. Тогда инт. фк-я (фк-я рсп.)

$$F(t) = P(T < t)$$

опр-ет вер-ть отказа за время длительностью t.

Откуда получим вер-ть (противоположного сб-я $T > t$) безотказной работы эл-та длительностью t.

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \tag{15}$$

к-ая наз. фк-ей надежности.

Часто длительность вр-и безотказной работы эл-та имеет показательное рсп., инт-ая фк. к-го $F(x) = 1 - e^{-\lambda t}$ (см. (10)). Тогда с учетом (15) получим фк-ю, наз-ую показательным законом надежности

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}, \tag{16}$$

где λ – интенсивность отказов.

п8. Время безотказной работы эл-та рсп-но по показательному закону $f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$ при $t \geq 0$ (t – время в часах). Найти вер. того, что эл-т проработает безотказно 100 часов.

Р. По условию пст-я интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. тогда по (16) имеем $R(10) = e^{-0{,}02\cdot 100} = e^{-2} = 0{,}13534 \approx 0{,}14$.

зм4. Показательный закон надежности весьма прост и удобен для решения практических задач, т.к. он обладает св-ом: вер-ть безотказной работы эл-та на интервале вр-и длительностью t не зв-т от вр-и предшествующей работы до начала расв-го интервала и зв-т только от длительности t (при заданной интенсивности отказов λ).

зм5. Рсп-ия (Пирсона, Стьюдента, Фишера), связанные с норм. рсп-ем, яв-ся основными рсп-ми в стс-ке, поэтому их рас-им в разделе 4.1 мт-ой стс-ки. Их целесообразно изложить здесь, если изучение мт-ой стс-ки не предусмотрено по программе после изучения теории вер-ей.

ЛЕКЦИЯ 7

2.4. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1°. О предельных теоремах. Предельные теоремы бывают двух видов:

1) для каждой слн. вел-ы нельзя предвидеть, какое она примет зн-ие в результате испытания (исп.). Но поведение суммы большого числа слн-ых вел-н почти утрачивает слн-ый характер (хрк.) и становится закономерным. Такая закономерность слн-ой вел-ы наз. «законом больших чисел». Н-р, при бросании монеты частота $P^* = m/n = P(\Gamma)$ появления герба стремится к $P = 1/2$ при $n \to \infty$, т.е. $|P - P^*| < \alpha$, где α – беск. малая вел.;

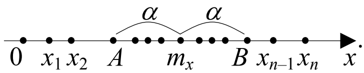
2) такую же устойчивость (закономерность) имеют и плотность, фк-я рсп-ия. Совокупность теорем этой группы получила наз-ие «центральной предельной теоремы». Н-р, при $n \to \infty$ плотность и фк-я рсп-ия фм-ы Бернулли стремится к плотности и фк-и рсп-ия норм. закона (см. т2 (локальная), т3 (интегральная) из 4°:1.3).

2°. Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева, Бернулли, Пуассона и Маркова. Предварительно док-ем сд-ю

л1 (неравенство Чебышева). Пусть имеется слн. вел. X с мт. ож-ем m_x и дсп-й D_x. Каково бы ни было плж. число α, вер-ть того, что вел. X отклонится (отк.) от своего мт. ож-я не меньше чем на α, огр-на сверху вел-ой $\dfrac{D_x}{\alpha}$, т.е.

$$P(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2}. \tag{1}$$

Д. Пусть вел. X имеет ряд рсп-ия $\{x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, т.е.



. Тогда $P(X \not\subset AB) = P(|X - m_x| \geq \alpha) = \sum\limits_{|x_i - m_x| \geq \alpha} p_i$.

Отсюда получим $D_x = M\left[(X - m_x)^2\right] = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - m_x|^2 p_i \geq$

$\geq \sum\limits_{|x_i - m_x| \geq \alpha}|x_i - m_x|^2 p_i \geq \sum\limits_{|x_i - m_x| \geq \alpha}\alpha^2 p_i = \alpha^2 \sum\limits_{|x_i - m_x| \geq \alpha} p_i = \alpha^2 P(|X - m_x| \geq \alpha) \Rightarrow \dfrac{D_x}{\alpha^2} \geq P(|X -$

$- m_x| \geq \alpha)$.

Если X непр-на, то $P(|X - m_x| > \alpha) = \int\limits_{|x - m_x| > \alpha} f(x)dx$. Здесь знак $\geq$ заменяем на $>$, т.к. для непр-ых вел-н вер-ть точного рав-ва равен нулю. Тогда $D_x =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|x - m_x|^2 f(x)dx \geq \int\limits_{|x - m_x| > \alpha}|x - m_x|^2 f(x)dx \geq \int\limits_{|x - m_x| > \alpha}\alpha^2 f(x)dx =$

$= \alpha^2 \int\limits_{|x - m_x| > \alpha} f(x)dx = \alpha^2 P(|X - m_x| > \alpha)$. Отсюда следует (1) ■

п1. Дана слн. вел. X с мт. ож-ем и дсп-ей σ^2. Оценить сверху вер-ть того, что вел. X отк-тся от своего мт. ож-ия не меньше чем на $3\sigma_x$ (см. п5 из 3°:2.3).

Р. Здесь $\alpha = 3\sigma_x$. Тогда $P(|X - m_x| > 3\sigma_x) \le \dfrac{D_x}{9\sigma_x^2} = \dfrac{1}{9}$ – грубая оценка, а точная оценка равна 0,0027, т.к. $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) = 0{,}9973$.

Теперь дадим понятие «**сходимость по вероятности**».

Говорят, что вел. X_n сходится (сх.) к вел-е a, если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ вер-ть нерав-ва $|X_n - a| < \varepsilon$ с увлечением n неограниченно (неогр.) приближается (прж.) к ед-це, т.е.

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) > 1 - \delta\ (P \approx 1 \text{ почти}), \tag{2}$$

где ε, δ – беск. малые вел.

Пусть X слн. вел-а с параметрами m_x, D_x. Производится n незв-х опытов с появлением зн-й $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X$, каждая из к-ых рсп-на по тому же закону, что и сама X, т.е. $M(X_i) = m_x$, $D(X_i) = D_x$. Найдем мт. ож-ие и дсп-ю ср. ариф-го $Y = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ этих вел-н

$$m_y = M(Y) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n m_x = m_x. \tag{3}$$

$$D_y = D(Y) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n D_x = \frac{D_x}{n} \tag{4}$$

т1 (Чебышева). При дт-но большом числе незв-х опытов ср. зн-ие нбл-ных зн-й слн. вел-ы сх-ся по вер-ти к ее мт. ож-ю:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \tag{5}$$

Д. Учитывая (1), (3) и (4), получим $P(|Y - m_y| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D_y}{\varepsilon^2} = \dfrac{D_x}{n\varepsilon^2}$. Как бы мало ни было ε, можно взять n таким большим, чтобы выполнялось нерав-во $\dfrac{D_x}{n\varepsilon^2} < \delta$, тогда $P(|Y - m_y| \ge \varepsilon) < \delta$, т.е. $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$ ■

сл1 (теорема Бернулли). Пусть производится n незв-х опытов, в каждом из к-ых сб. A появляется с вер-ю p. Тогда при $n \to \infty$ частота $p^* = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ появления сб. A сх-ся по вер-ти к его вер-ти p, т.е.

$$P(|p^* - p| < \varepsilon) > 1 - \delta. \tag{6}$$

Теорему Чебышева можно обобщить на более сложный случай, когда закон рсп-ия слн. вел-ы X от опыта к опыту изменяется.

т2 (Чебышева обобщенная). Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы с мт. ож-ми m_{x_1}, m_{x_2}, …, m_{x_n} и дсп-ми D_{x_1}, D_{x_2}, …, D_{x_n}, причем $D_{x_i} < L$, то при возрастании n ср. ариф-ое $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ нбл-ных зн-й вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сх-ся по вер-ти к ср. ариф-му $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ их мт. ож-й, т.е.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \tag{7}$$

Д. Рас-им вел-у $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, ее мт. ож-ие $m_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ и дсп-ю $D_y =$ $= D(Y) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}$. По л1 (нерав-во Чебыше-ва) имеем $P(|Y - m_y| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_y}{\varepsilon^2}$ или $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}}{n^2\varepsilon^2} <$ $< \frac{nL}{n^2\varepsilon^2} = \frac{L}{n\varepsilon^2} < \delta$. Переходя к противоположному сб-ю, получим

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta \blacksquare$$

Из т2 можно получить св-во устойчивости при пер-ых условиях опыта, к-ое сформулируем в виде

сл2 (теорема Пуассона). Если производится n незв-х опытов и вер-ть появления сб. A в i-ом опыте равна p_i, то при увеличении n частота сб-я A сх-ся по вер-ти к ср. ариф-му с вер-ей p_i, т.е.

$$P\left(\left|p^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta, \tag{8}$$

где $p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – частота появления сб. A.

Теорема Пуассона часто используется на практике, н-р, при стрельбе в воздухе.

Закон больших чисел можно обобщать и на случай зв-ых слн. вел-н в виде сд-ей

т3 (Маркова). Если имеются зв-ые слн. вел-ны $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $\frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \to 0$ при $n \to \infty$, то ср. ариф-ое $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ зн-й слн. вел-н $X_1, X_2,$ $\ldots, X_n$ сх-ся по вер-ти к ср. ариф-у $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ их мт. ож-й, т.е.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta. \qquad (9)$$

Д. Рас-им вел-у $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Очевидно, $D_y=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$. Применим к вел-е Y нерав-во Чебышева $P(|Y-m_y|\geq\varepsilon)\leq\frac{D_y}{\varepsilon^2}$. Т.к. $D_y=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\to 0$ при $n\to\infty$, то $P(|Y-m_y|\geq\varepsilon)<\delta$. Перейдем к противоположному сб-ю $P(|Y-m_y|<\varepsilon)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta$ ■

п2. Сколько слагаемых надо взять в т2 Чебышева, чтобы с надежностью 96% и точностью до 0,01 выполнялось прж-ое рав-во $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}$, считая, что $L=1$ ($D_{x_i}<L$).

Р. Здесь $\varepsilon=0{,}01$, $\delta=0{,}04$ и $L=1$, тогда из $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|\geq\varepsilon\right)<$

$<\frac{\sum_{i=1}^{n}D_{x_i}}{n^2\varepsilon^2}<\frac{nL}{n^2\varepsilon^2}=\frac{L}{n\varepsilon^2}<\delta$ получим $n\geq\frac{1}{0{,}04\cdot 0{,}0001}=250000$ (грубый подсчет, как уже отметили).

3º. Характеристические функции. Отметим, что все формы центральной предельной теоремы (ЦПТ) посвящены установлению условий, при к-ых возникает норм. закон рсп-ия. Он возникает во всех случаях, когда исслм-ая слн. вел. может быть представлена в виде суммы дт-но большого числа незв-ых (или слабо зв-ых) элр-х слагаемых, каждое из к-ых в отдельности сравнительно мало влияет на сумму.

Для док-ва наиболее общей формы ЦПТ Ляпунов создал метод характеристических (хркч.) фк-й.

Хркч-ой фк-ей слн. вел-ы X наз. фк-ия

$$g(t)=M[e^{itx}], \qquad (10)$$

где i – мнимая ед. Фк-я $g(t)$ представляет собой мт. ож-ие нек-ой комплексной слн. вел-ы $U=e^{itx}$, функционально (фнц.) связанной с X.

При решении многих задач удобнее пользоваться хркч-ой фк-ей, чем законами рсп-ия.

Зная закон рсп-ия, легко найти ее хркс-ю фк. Так для дк-ой слн. вел-ы $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ имеем

$$g(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{itx_k}p_k\ . \qquad (11)$$

А для непр-ой слн. вел-ы будем иметь

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_k} f(x)dx\,. \tag{12}$$

п3. Слн. вел. X есть число попаданий при одном выстреле с вер-ю p. Найти хркч-ую фк-ию слн. вел-ы X.

Р. $g(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{itx_k} p_k = e^{it\cdot 0}(1-p) + e^{it\cdot 1}p = q + e^{it}p.$

п4. Слн. вел. X имеет норм. рсп-ие $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $m = 0$, $\sigma = 1$. Найти ее хркч. фк-ию (использовать инт. Пуассона из 5°:4.1).

Р. $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{t^2}{2}} dx =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Итак, $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Фм-а (12) есть прб-ие Фурье, врж-е $g(t)$ через $f(x)$. В свою очередь, $f(x)$ можно (см. [5], [42]) выразить через $g(t)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t)dt\,. \tag{13}$$

Хркч-ие фк-и обладают сд. св-ми.

с1. Если слн. вел-ы X и Y связаны стн-ем $Y = aX$, где a – неслн. множитель, то их хркс-ие фк-и связаны стн-ем: $g_y(t) = g_x(at)$.

Д. $g_y(t) = M[e^{ity}] = M[e^{i(at)X}] = g_x(at)$.

с2. Хркч. фк-я суммы незв-ых слн. вел-н равна пзв-ю хркч-их фк-й слагаемых.

Д. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы с хркч. фк-ми $g_{x_1}(t),\ g_{x_2}(t), \ldots,\ g_{x_n}(t)$ и $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Д-ем, что $g_y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t)$. Дсв-но, $g_y(t) = M[e^{ity}] = M\left[e^{it\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] =$

$= M\left[\prod_{k} e^{itx_k}\right] = \prod_{i=1}^{n} M\left[e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t).$

п5. Имеются две незв-ые слн. вел-ы X и Y с плотностями рсп-ия $f_1(X)$ и $f_2(Y)$. Найти плотность рсп-ия вел-ы $Z = X + Y$.

Р. Находим хркч-ие фк-и $g_x(t)$ и $g_y(t)$ слн. вел-н X и Y, откуда получим $g_z(t) = g_x(t)g_y(t)$. Затем по (13) находим $f(Z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itZ} g_Z(t)dt$.

4°. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.

т4. Если X_1, X_2, …, X_n – незв. слн. вел-ы, имеющие один и тот же закон рсп-ия с мт. ож-ем m и дсп-й σ^2, то при неогр-ом увеличении n закон рсп-ия суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неогр-но прж-ся к норм.

Д. Его проведем для непр. слн. вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n$, для дк-х аналогично. По опр-ю

$$g_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \quad (14)$$

По с2 имеем $g_{y_n}(t) = [g_x(t)]^n$. Фк-ю $g_x(t)$ разложим в ряд Маклорена с тремя членами:

$$g_x(t) = g_x(0) + g_x'(0)\text{t} + \left[\frac{g_x''(0)}{2} + \alpha(t)\right]t^2,$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 0$. Из (14) найдем вел-ы $g_x(0)$, $g_x'(0)$, $g_x''(0)$.

$g_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Находим

$$g_x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x)dx = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f(x)dx. \quad (15)$$

Из (15) получим $g_x'(0) = i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = iM(X) = im$. С переносом начала крд-т можно полагать $m = 0$, тогда $g_x'(0) = 0$. Продиф-ем (15) еще раз: $g_x''(t) =$ $= -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} f(x)dx \Rightarrow g_x''(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = -D_x = -\sigma^2$. Итак,

$$g_x(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t)\right]t^2. \quad (16)$$

Нам надо д-ть, что $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ прж-ся к норм. рсп-ю. От вел-ы Y_n перейдем к нормированной (нормв.) слн. вел-е $Z_n = \dfrac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}}$, дсп-я к-ой равна ед-е при любом n. Y_n и Z_n связаны лин-о, тогда по с1 имеем $g_{z_n}(t) = g_{y_n}\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ или $g_{z_n}(t) = \left[g_x\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$ и с учетом (16) получим

$$g_{z_n}(t) = \left\{1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}^n \Rightarrow$$

$$\ln g_{z_n}(t) = n\ln\left\{1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}.$$ Обз-им

$$\left[\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2} = u, \tag{17}$$

где $u \to 0$ при $n \to \infty$. Разложим в ряд $\ln(1-u) = -\left\{u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+...\right\}$ и берем первый член, т.е. $\ln(1-u) \approx -u$. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{n}(-\mathrm{u}) = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma^2}\right\} = -\frac{t^2}{2} +$$

$$+\frac{t^2}{\sigma^2}\lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2}, \text{ т.к. } \lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0, \text{ ибо } \alpha(t)\to 0 \text{ при } t\to 0.$$

$$\text{Т.о., } \lim_{n\to\infty}\ln g_{z_n}(t) = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_{z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ или}$$

$$g_{z_n}(t) \approx e^{-\frac{t^2}{2}} = g(t). \tag{18}$$

Здесь $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ есть хркч. фк-ия норм. закона $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$ (см. п4).

Из $g_{z_n}(t) \to g(t)$ при $n \to \infty$ заключаем, что рсп-ия слн. вел-ы Z_n, сд-но, Y_n прж-ся к норм. закону рсп-ия, т.е. $f(Z_n), f(Y_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$ ■

зм1. ЦПТ справедлива и для слагаемых, рсп-ых неодинаково. Н-р, А.М. Ляпунов доказал т4 для условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\left[\sum_{k=1}^{n} D_k\right]^{3/2}} = 0, \tag{19}$$

где b_k – третий абс. центральный момент вел-ы X_k, т.е. $b_k = \beta_3[X_k] = M\left[\left|\overset{\circ}{X}_k\right|^3\right]$, D_k – дсп-я вел-ы X_k.

Наиболее общим (нх-ым и дт-ым) условием справедливости т4 яв-ся условие Линдеберга: при любом $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|>\tau B_n}(x-m_k)^2 f_k(x)dx = 0, \tag{20}$$

где m_k – мт. ож-ие X_k, $f_k(x)$ – плотность рсп-я X_k, $B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k}$.

5°. Практические применения центральной предельной теоремы. Опыт показывает, что когда число слагаемых около десяти, закон рсп-ия суммы обычно может быть заменен норм-ым.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы с мт. ож-ми $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и дсп-ми $D_1, D_2, \ldots, D_n$, а $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 10$.

Тогда, в силу т4, вер-ть того, что слн. вел. Y попадет на участок $]\alpha, \beta[$, врж-ся фм-ой

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y}\right), \tag{21}$$

где $m_y = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}$. $\Phi(x)$ – норм. фк. рсп-ия.

Стн. (21) верно, когда выполнено условие т4: равномерное малое влияние слагаемых на рассеивание суммы.

Если возьмем нормв-ю сумму $Z = \dfrac{Y^0}{\sigma_y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$, для к-ой $M[Z] = 0$, $D[Z] = \sigma_Z = 1$, то (21) имеет вид

$$P(\alpha < Z < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{22}$$

Отметим, что все приведенные рассуждения справедливы и для дк-ых слн. вел-н. Частным случаем т4 для дк-ых слн. вел-н яв-ся

т5 (Лапласа). Если производится n незв-х опытов, в каждом из к-ых сб. А появляется с вер-ю p, то верно стн-ие

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{23}$$

где Y – число появлений сб-ия A в n опытах, $q = 1 - p$ (см. (13) из 4°:1.3).

Д. Представим Y в виде $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i – число появлений сб. A в i-м опыте. По т4 суммы одинаково рсп-ых слагаемых при $n \to \infty$ прж-ся к норм. закону. Тогда при большом n справедлива фм. $Z = \dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$, где $m_y = \sum p_i = np$, $D_y = npq$. Подставив их, получим $Z = \dfrac{Y - np}{\sqrt{npq}}$. Тогда фм-а (22) принимает вид $P\left(\alpha < \dfrac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ ■

п6. В полосе укреплений противника сбрасывается 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии мт. ож-ие числа попаданий равно 2, а ср.кв. отк-ие числа попаданий равно 1,5. Найти прж-но вер-ть того, что при сбрасывании 100 серий в полосу попадет от 180 до 220 бомб.

Р. $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, X_i – число попаданий в i-й серии, $m_x = \sum_{i=1}^{100} m_i = 200$, $D = \sum_{i=1}^{n} D_i =$ $= \sum_{i=1}^{100} 1{,}5^2 = 225$. Тогда $P(180 < X < 220) = \Phi\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \Phi\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) =$ $= 0{,}82$, т.е. с вер-ю 0,82 можно утверждать, что общее число попаданий не выйдет за пределы $188 \div 220$.

п7. Пусть слн. вел-ы в ЦПТ имеют равные мт. ож-ия и дсп-и: $M(X_k) = m$ и $D(X_k) = \sigma^2$ при любом k. Найти вер. того, что ср. ариф-ое наступления сб. A отклонится от мт. ож-я не меньше чем на ε при $n \to \infty$.

Р. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \right.\right.$ $\left.\left. - m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right| < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - P\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) -$ $- \Phi\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Итак,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (24)$$

Сделаем теперь подсчет для п2, пользуясь более точной оценкой (2).

п8. Сколько слагаемых надо взять, чтобы с надежностью 96% и точностью $\varepsilon = 0{,}01$ для $\sigma = 1$ выполнялось прж-ое рав. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx m$?

Р. По (24) имеем $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0{,}04$, т.е. $\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) > 0{,}48$. По таблице находим $\Phi(2{,}06) = 0{,}480301$, тогда $\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}06$ $\Rightarrow n = \left(2{,}06 \cdot \frac{1}{0{,}01}\right)^2 \approx 40000$, т.е. n получилось в 6 раз меньше, чем в п2.

2.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

2.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое слн. вел-ны и на какие типы они делятся?
2. Что понимается под законом рсп-ия и в какой форме он задается?
3. Объясните на конкретном примере ряд рсп-ия и муг-к рсп-ия.
4. Что такое фк-ия рсп-ия и какими св-ми она обладает?
5. Что такое плотность рсп-ия и какими св-ми она обладает?
6. В чем состоит связь между фк-ей рсп-ия и плотностью рсп-ия?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п3 решить з1-з20.

1. Дк-ая слн. вел. X задана рядом (законом) рсп-ия:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить муг-к рсп-ия.

2. Дк-ая слн. вел. X задана законом рсп.: Построить муг-к рсп-ия.

а)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,3

б)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

3. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 1000 руб., четыре – по 500 руб., пять – по 400 руб. и десять – по 100 руб. Найти закон рсп-ия стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

О:

X	1000	500	400	100	0
P	0,001	0,004	0,005	0,010	0,980

4. Устройство состоит из трех незв-мо работающих эл-ов. Вер-ть отказа каждого эл. в одном опыте равна 0,1. Найти закон рсп-ия числа отказавших эл-ов в одном опыте.

О:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

5. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Написать биномиальный (бином.) закон рсп-ия дк-ой слн. вел-ы X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить муг-к полученного рсп-ия.

О:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

6. Написать бином-ый закон рсп-ия дк-ой слн. вел-ы X – числа появлений герба при двух бросаниях монеты.

О:

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

7. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать бином-ый закон рсп-ия дк-ой слн. вел-ы X – кол-ва выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

О:

X	0	1	2
P	9/16	6/16	1/16

8. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон рсп-ия числа стандартных деталей среди отобранных.

О:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

9. Дк. слн. вел-а X задана законом рсп.:

X	– 1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

Написать выражение (врж.) и построить фк-и рсп. вел. X.

О:

$X < x$	$x \le -1$	$-1 < x \le 0$	$0 < x \le 1$	$x > 1$
$F(x)$	0	1/4	3/4	1

10. Дк. слн. вел. X имеет закон рсп-ия

X	– 2	– 1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти врж-ие и построить график фк-и рсп-ия X. Найти вер. того, что X примет зн-ие, не превосходящее по абс. вел-е 1.

О: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ 0{,}1, & -2 < x \le -1, \\ 0{,}3, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}5, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}9, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ $P(-1 \le x \le 1) = P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 1) = F(1 + 0) - F(-1 - 0) = 0{,}9 - 0{,}1 = 0{,}8.$

11. На пути движения автомашин 4 светофора. Каждый из них с вер-ю 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить муг-к рсп-ия вер-ей числа светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки, т.е. $X = x_i$, $i = \overline{0,4}$ ($x_i = 0, 1, 2, 3, 4$).

О:

X	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

12. Плотность рсп-ия слн. вел-ы равна $f(x) = ax^2e^{-kx}$ ($k > 0$, $0 \le x < n$). Найти: 1) коэф. a; 2) фк-ю рсп-ия слн. вел-ы; 3) вер-ть попадания слн. вел-ы в интервал $\left]0, \frac{1}{k}\right[$. О: 1) из $\int\limits_0^\infty ax^2e^{-kx}dx = 1$ находим $a = k^3/2$; 2) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} < e^{-kx}$; 3) $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \le 0{,}086$.

13. Дана фк-ия рсп. слн-й вел-ы $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Найти плотность рсп-ия слн. вел-ы X. О: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

14. Дана фк-ия рсп. $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, \ x_0 \le x, \ \alpha > 0, \\ 0, \ x < x_0 \end{cases}$ годовых доходов лиц, облагаемых налогом. Найти размер годового дохода, к-ый для сл-но выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вер-ю 0,5. О: $2^{1/\alpha}x_0$.

15. В партии из восьми деталей пять стандартных. Наудачу взяли четыре детали. Построить ряд рсп-ия числа стандартных деталей среди отобранных.

О: Из $P(X=k) = C_5^k\, C_3^{4-k} / C_5^4 \Rightarrow$

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

16. Используя результаты решения з15, построить фк-ю рсп-ия слн-й вел-ы X и ее график (грф.).

О:

$F(x)$	0	1/14	1/2	13/14	1
$]a, b]$	$]-\infty, 1]$	$]1, 2]$	$]2, 3]$	$]3, 4]$	$]4, \infty[$

17. Фк-ия рсп. слн. вел-ы X задана врж-ем

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x < -\pi/4, \\ a\sin(x-\pi/4)+1/2,\ -\pi/4 \le x \le 3\pi/4, \\ 1,\ x \ge 3\pi/4. \end{cases}$$

Найти: 1) коэф. a; 2) вер-ть попадания зн-ия слн. вел-ы X в результате опыта в интервал $[\pi/4, 3\pi/4]$; 3) построить грф. фк-и $F(x)$. О: 1) $F(3\pi/4) = a\sin(\pi/2) + 1/2 = 1 \Rightarrow a = 1/2$; 2) $P(\pi/4 < X < 3\pi/4) = F(3\pi/4) - F(\pi/4) = (1/2)\sin(\pi/2) + 1/2 - (1/2)\sin 0 - 1/2 = 1/2$.

18. Используя условие з17, найти плотность рсп-ия и построить грф.

$$\text{О: } F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = -\pi/4, \\ (1/2)\cos(x-\pi/4) \text{ при } -\pi/4 \le x \le 3\pi/4, \\ 0 \text{ при } x > 3\pi/4. \end{cases}$$

19. Дана плотность рсп-ия слн. вел-ы $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ (x-3)^2/9 \text{ при } 0 \le x \le 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

Найти фк-ю рсп-ия $F(x)$ и построить грф-и фк-й $f(x)$ и $F(x)$. О: Из $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{(t-3)^2}{9}dt = \left.\frac{(t-3)^3}{27}\right|_0^x = \frac{(x-3)^3}{27} + 1$ и $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{3} \frac{(t-3)^2}{9}dt + \int_{3}^{x} 0dt = 1$ имеем $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ (x-3)^3/27 + 1 \text{ при } 0 \le x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

20. Д-ть, что если $F(x)$ – фк. рсп-ия, то при любом $h \ne 0$ фк-и

$$\varphi(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(x)dx,\ \psi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(x)dx$$

также яв-ся фк-ми рсп-ия.

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, МОДА, МЕДИАНА, МОМЕНТЫ И ДИСПЕРСИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Какие числовые хркс-ки слн-й вел-ы знаете?
2. Дайте опр-ие мт-го ож-ия и приведите его св-ва.
3. Что такое мода и медиана, покажите их на графике.

4. Приведите фм-ы нач-ых и цтр-ых моментов.
5. Выразите цтр-ые моменты через нач-ые.
6. Приведите фм-ы нач-ых и цтр-ых абс-ых моментов.
7. Что такое асимметрия и эксцесс слн. вел-ы, покажите их на графике.
8. Дайте опр-ие дсп-и и ср. кв. отк-ия.
9. Приведите св-ва дсп-и.

Задание для кр. работы: по образцу п1-п4 решить з1-з20.

1. Найти мт. ож-ие дк-ой слн. вел-ы, заданной законом рсп-ия:

а)

X	– 4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,1

О: а) $M[X] = 6$; б) 0,535.

2. Найти мт. ож-ие слн. вел. Z, если известны мт. ож-ие X и Y: 1) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; 2) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$. О: 1) 11, 2) 30.

3. Дк. слн. вел-а задана законом рсп-ия

X	4	5	x_3
P	0,5	0,3	P_3

Найти x_3 и P_3, зная, что $M(X) = 8$. О: $x_3 = 21$.

4. Дана слн. вел. $X = \{-1; 0; 1\}$. Найти $P = \{P_1, P_2, P_3\}$, ств-ие X, зная, что $M(X) = 0{,}1$, $M(X^2) = 0{,}9$. О: $P = \{0{,}4; 0{,}1; 0{,}5\}$.

5. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти мт. ож-ие дк-ой слн. вел-ы X – числа нестандартных деталей среди двух отобранных. О: $M(X) = 3/5$.

6. Дк. слн. вел. X задана рсп-ем

X	– 1,0	– 0,5	– 0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2
P	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,160	0,081	0,016

Найти: 1) мт. ож-ие и дсп-ю X; 2) вер-ть $P(-0{,}5 < X < 0{,}5)$. О: 1) $M(X) = 0{,}442$, $D(X) = 0{,}273$; 2) 0,738.

7. Дано рсп. дк-ой слн. вел.

X	2	4	5	6	8	9
P	0,2	0,25	0,3	0,1	0,1	0,05

Найти мт. ож-ие, дсп-ю, ср. кв. отк-ие. О: $M(X) = 4{,}75$, $D(X) = 6{,}15$, $\sigma = 2{,}48$.

8. Дано рсп. дк-ой слн. вел.

X	– 1	0	1
P	0,2	0,3	05

Найти $M(X^4)$, $D(X^4)$. О: $M(X^4) = 0{,}7$, $D(X^4) = 0{,}21$.

9. Незв-ые слн. вел-ы X и Y заданы сд. законами рсп-ия:

X	– 1	0	1
P_X	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
P_Y	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти закон рсп-ия слн-й вел-ы: 1) $Z = XY$; 2) $Z = X + Y$.

О: 1)

$Z = XY$	0	– 1	– 2	– 3	0	0	0	0	0	1	2	3
$P_Z = P_X P_Y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,04	0,09	0,12	0,05	0,10	0,15	0,20

$\Rightarrow$

$Z = XY$	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
P_Z	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

Аналогично находим $Z = X + Y$, н-р, $P(Z_3 = -1 + 2) = P(X = -1 \text{ и } Y = 2) = P(X = -1)\, P(Y = 2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$;

2)

$Z = X + Y$	– 1	0	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4
$P_Z = P_X P_Y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,20

$\Rightarrow$

$Z = X + Y$	– 1	0	1	2	3	4
P_Z	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,20

10. Кр-ый просмотр сложного прибора обнаруживает в ср-м на 50 приборов 10 дефектных. Составить закон рсп-ия слн. вел-ы X – числа точных из шести наудачу выбранных приборов. Найти мт. ож-ие и дсп-ю этой вел-ы. О: $M(X) = np = 6\cdot 4/5 = 4{,}8$. $D(X) = npq = 0{,}96$. Ук: из $P_6(m) = C_6^m p^m q^{6-m}$ (где $p = 4/5$, $q = 1/5$) составляем таблицу:

m	0	1	2	3	4	5	6
$P_6(m)$	0,0001	0,0015	0,0154	0,0819	0,2458	0,3932	0,2621

11. Найти мт. ож-ие дк-ой слн. вел. X – числа бросаний пяти игральных костей, в к-ых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно 20. О: $P = P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{3\cdot 6^4}$, $M(X) = np = 20\frac{5^4}{3\cdot 6^4} \approx 3$.

12. Бросают n игральных костей. Найти мт. ож-ие числа таких бросаний, в каждом из к-ых выпадет ровно m шестерок, если общее число бросаний равно N. О: $M(X) = NC_n^m(1/6)^m(5/6)^{n-m}$.

13. Бросают n игральных костей. Найти мт. ож-ие суммы числа очков, к-ые выпадут на всех гранях. О: $M(X) = 7n/2$. Ук: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$, $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n)$. $M[X_1] = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{7}{2}$.

14. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вер. того, что изделие стандартно, равно 0,9. В каждой партии содержится 5 изделий. Найти мт. ож-ие дк-ой слн. вел. X – числа партий, в каждой из к-ых окажется ровно 4 стандартных изделия, если проверке подлежит 5 партий. О: $M(X) = C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1 \approx 16$.

15. Слн. вел-ы X и Y незв-мы. Найти дсп-ю $Z = 3X + 2Y$, если известно, что $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$. О: $D(Z) = 69$.

16. Дк-ая слн. вел. X имеет только два равновер-ых зн-ия x_1 и x_2. Д-ть, что $D(X) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}$.

17. Дк. слн. вел-а имеет только два возможных зн-ия x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вер-ть того, что X примет зн-ие x_1, равна 0,6. найти закон рсп-ия X, если $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$. О: {1,2; 0,6; 0,4}.

Ук: $$\left.\begin{aligned} M(X) &= 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4;\\ D(X) &= 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2 = 0{,}24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 &= 1{,}4;\\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 &= 2{,}2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_2 > x_1;\\ &x_1 = 1{,}8,\ x_2 = 0{,}8 - \text{не берем.} \end{aligned}$$

18. Д-ть, что если x и Y – незв. слн. вел-ы, то $D(XY) = D(X)D(Y) + n^2D(X) + m^2D(Y)$, где $m = M(X)$, $n = M(Y)$. Ук: Учитывая, что $M(X^2) = D(X) + m^2$, $M(Y^2) = D(Y) + n^2$, имеем $D(XY) = M(X^2Y^2) - [M(X)M(Y)]^2 = M(X^2)M(Y^2) - m^2n^2 = [D(X) + m^2][D(Y) + n^2] - m^2n^2 = D(X)D(Y) + n^2D(X) + m^2D(Y)$.

19. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия:

X	1	3
P	0,4	0,6

. Найти нач. моменты первого, второго и третьего порядков. О: $\alpha_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2$; $\alpha_2 = M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}4 = 5{,}8$; $\alpha_3 = M(X^3) = 16{,}6$.

20. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия:

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

. Найти нач. моменты первого, второго и третьего порядков. О: $\alpha_1 = 3{,}9$; $\alpha_2 = 16{,}5$; $\alpha_3 = 74{,}1$.

Задание для кр. работы: на основе материала 1°-5° решить з21-з40.

21. Д-ть, что цтр. моменты связаны с нач-ми с помощью сд-х фм-л:

$$\mu_1 = \left[\overset{\circ}{X} \right] = M[X - \alpha_1] = \sum (x_i - \alpha) p_i = \sum x_i p_i - \alpha_1 \sum p_i =$$

$$= \alpha_1 - \alpha_1 = 0, \text{ где } \alpha_1 = M[X];$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3;$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.$$

22. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия:

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

. Найти цтр. моменты 1, 2, 3 и 4 порядков. О: $\alpha_1 = 3{,}1$; $\alpha_2 = 10{,}9$; $\alpha_3 = 40{,}9$; $\alpha_4 = 158{,}5$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1{,}29$, $\mu_3 = -0{,}888$, $\mu_4 = 2{,}7777$.

23. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Найти ее ср. зн-ие и ср. кв. отк-е. Ук: $\beta_s = M\left(|X|^s\right)$, $\gamma_s = M\left[\,|\overset{\circ}{X}|^s\,\right]$, $\overline{X} = M(X)$, $\gamma_1 = M\left[\,|\overset{\circ}{X}|\,\right] = \left|\overline{X - \overline{X}}\right|$. О: $\overline{X} = 1{,}9$; $\left|\overline{X - \overline{X}}\right| = 0{,}92$; $\sigma = \sqrt{D(X)} = 1{,}136$.

24. По данной табл. рсп-ия слн-й вел-ы опр-ть ее мт. ож-ие и ср. кв. отк-ие.

X	4	6	8	10	12
P	0,3	0,15	0,18	0,17	0,2

О: $M(X) = 7{,}64$; $\left|\overline{X - \overline{X}}\right| = 2{,}676$; $\sigma = 3{,}025$.

25. Слн. вел. X задана плотностью рсп. $f(x) = 2x$ в интервале]0, 1[, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти мт. ож-ие слн. вел. X. О: $M(X) = \int_a^b x f(x) dx = 2/3$.

26. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = x/2$ в интервале]0, 2[; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти мт. ож-ие слн. вел. X. О: $M(X) = 4/3$.

27. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = C(x^2 - 2x)$ в интервале]0, 1[; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр C и $M(X)$. Ук: $\int_a^b f(x) dx = 1$. О: $C = 3/4$, $M(X) = 11/16$.

28. Найти $M(X)$ слн. вел-ы X, заданной фк-ей рсп. $F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/4, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

Ук: $f(x) = F'(x)$. О: $M(X) = 2$.

29. Слн. вел. X задана плотностью рсп. $f(x)$ = $\frac{1}{2}\sin x$ в интервале $]0, \pi[$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти мт. ож-ие фк-и $Y = \varphi(x) = X^2$. Ук: $M[\varphi(x)] =$ $= \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$. О: $M[X^2] = \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{\pi^2 - 4}{2}$.

30. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = x + 0{,}5$ в интервале $]0, 1[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти мт. ож-ие фк-и $Y = X^3$. О: $M(X^3) = 13/40$.

31. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $]0, \pi/4[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти моду и медиану X. О: Слн. вел. X моду не имеет, т.к. фк-я $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $]0, \pi/4[$ не имеет max. $\mu_e = P(X < e) =$ $= P(X > e) = \frac{1}{2} = 2\int_0^{\mu_e} \cos 2x dx = \sin 2\mu_e \Rightarrow 2\mu_e = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \mu_e = \pi/12$.

32. Слн. вел. X в интервале $]2, 4[$ задана дифн. фк-ей $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти моду, мт. ож-ие и медиану слн. вел. X. О: из $f(x) = -\frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow$ при $x = 3$ получим $M[X] = 3$, $\mu = 3$, $\mu_e = 3$.

33. Слн. вел. X в интервале $]-1, 1[$ задана дифн. фк-ей $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти моду и медиану X. О: X моду не имеет, т.к. $f(x)$ не имеет max; $\mu_e = 0$, т.к. кривая симметрична отн-но прямой (пм.) $x = 0$.

34. Слн. вел. X в интервале $]0, \pi[$ задана дифн. фк-ей $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю X. Ук: Т.к. $M(X) = \pi/2$ (кривая рсп-ия симметрична отн. пм. $x = \pi/2$), то $D(X) = \int_0^\pi x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$.

35. Слн. вел. X в интервале $]0, 5[$ задана дифн. фк-ей $f(x) = \frac{2}{25}x$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю X. О: 25/18.

36. Найти дсп-ю слн. вел-ы X, заданной интн. фк-ей $F(X)$. О: $D(X) = 4/3$.

$$F(X) = \begin{cases} 0, x \le -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, -2 < x < 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

37. Слн. вел. X задана интн. фк-ей рсп. $F(X)$. Найти мт. ож-ие, дсп-ю и ср. кв. отк-ие. О: $M(X) = 3/2$, $D(X) = 3/4$, $\sigma(x) = \sqrt{3}/2$.

$$F(X) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, x \ge 1, \\ 0, x < 1. \end{cases}$$

38. Слн. вел. X в интервале $]0, \pi[$ задана дифн. фк-ей $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю фк-и $Y = \varphi(x) = X^2$, не находя предвари-

тельной дифн-й фк-и Y. О: $D[\varphi(x)] = \int\limits_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - [M(\varphi(x))]^2 =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^4 \sin x dx - \left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2 = \frac{\pi^4 - 16\pi^2 + 80}{4} \text{ (см. з29).}$$

39. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = \cos x$ в интервале $]0, \pi/2[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю фк-и $Y = \varphi(x) = X^2$. О: $D(X^2) = 20 - 2\pi^2$.

40. Слн. вел. X задана плотностью рсп. $f(x) = 0{,}5x$ в интервале $]0, 2[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти нач. и цтр. моменты 1, 2, 3, 4 порядков.

О: Из $\alpha_k = \int\limits_0^2 x^k f(x) dx$ получим $\alpha_1 = \int\limits_0^2 x(0{,}5x) dx = \frac{4}{3}$, $\alpha_2 = \int\limits_0^2 x^2(0{,}5x) dx = 2$,

$\alpha_3 = \int\limits_0^2 x^3(0{,}5x) dx = 3{,}2$, $\alpha_4 = \int\limits_0^2 x^4(0{,}5x) dx = \frac{16}{3}$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{9}$,

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = -\frac{8}{135}$, $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = \frac{16}{135}$.

41. Слн. вел. X задана задана дифн. фк-ей $f(x) = 2x$ в интервале $]0, 1[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти нач. и цтр. моменты 1, 2, 3, 4 порядков.

О: $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 2/5$, $\alpha_4 = 1/3$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1/18$, $\mu_3 = -1/135$, $\mu_4 = 1/135$.

2.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОМЕРНОЕ, ПУАССОНА, НОРМАЛЬНОЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ

Вопросы для самопроверки

1. Хркз-те равномерное рсп.: плотность рсп-ия и фк-я рсп-ия.
2. Чему равны числовые хркс-ки равномерного рсп-ия?
3. Приведите рсп-ие Пуассона и ее числовые хркс-ки.
4. Хркз-те норм. закон рсп-ия: плотность рсп-ия и фк-я рсп-ия.
5. Чему равны числовые хркс-ки норм. рсп-ия?
6. Приведите плотность рсп-ия и фк-ю рсп-ия показательного рсп.
7. Опр-те числовые хркс-ки показательного рсп-ия.
8. Приведите фк-и надежности и показательного закона надежности.

Задание для кр. работы: по образцу п1-п8 решить з1-з20.

1. Диф. фк-я равномерного рсп-ия в интервале $]a, b[$ имеет вид $f(x) = C$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти C. О: $C = \frac{1}{b-a}$.

2. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вер. того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А. Ук: Ошибку рас-им как слн. вел-у X, к-ая рсп-на равномерно, т.е. $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Легко сообразить, что

ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена между]0,02; 0,08[. Тогда из $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ получим $P(0{,}02 < X \le 0{,}08) = \int\limits_{0,02}^{0,03} 10dx = 0{,}6$.

3. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,02. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вер. того, что при отсчете будет сделана ошибка: 1) меньшая 0,04; 2) большая 0,05.

О: 1) $P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}20) = 0{,}4$; 2) $P(0{,}05 < X < 0{,}15) = 0{,}5$.

4. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вер. того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин. О: $P(2 < X < 5) = 0{,}6$.

5. Минутная стрелка электрических часов перемещается в конце каждой минуты. Найти вер. того, что в данное мгновение часы покажут время, к-ое отличается от истинного не более чем на 20 с. О: $P(0 < X < 1/3) + P(2/3 < X < 1) = 2/3$.

6. Закон равномерного рсп-ия задан фк-ей $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ в интервале $]a, b[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти фк-ю рсп-ия. О: $F(X) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$

7. Найти мт. ож-ие, дсп-ю и ср.кв. отк-ие слн-й вел-ы X, рсп-ой равномерно в интервале $]a, b[$. О: $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(x) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

8. Найти мт. ож-ие, дсп-ю и ср. кв. отк-ие слн-й вел-ы X, рсп-ой равномерно в интервале]2, 8[. О: $M(X) = 5$, $D(X) = 3$, $\sigma(x) = \sqrt{3}$.

9. Диаметр круга x измерен прж-но, причем $a \le x \le b$. Расв-ая диаметр как слн. вел-у X, рсп-ую равномерно в интервале $]a, b[$, найти мт. ож-ие и дсп-ю площади (пщ.) круга. О: Из пщ. круга $Y = \varphi(x) = \dfrac{\pi x^2}{4}$ находим $M[\varphi(x)] = \int\limits_a^b \varphi(x) f(x)dx = \dfrac{\pi}{4(b-a)}\int\limits_a^b x^2 dx = \dfrac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}$, $D[\varphi(x)] = \int\limits_a^b \varphi^2(x) f(x)dx - (M[\varphi(x)])^2 = \dfrac{\pi^2}{720}(b-a)^2(4b^2 + 7ab + 4a^2)$.

10. Ребро куба x измерено прж-но, причем $a \le x \le b$. Расв-ая ребро куба как слн. вел-у X, рсп-ую равномерно в интервале $]a, b[$, найти мт. ож-ие и дсп-ю объема куба.

О: $M(X^3) = \dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$, $D(X^3) = \dfrac{b^7 - a^7}{7(b-a)} - \left[\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$.

11. Слн. вел. X и Y незв-ы и рсп-ны равномерно: X – в интервале $]a, b[$, Y – в интервале $]c, d[$. Найти мт. ож-ие и дсп-ю слн. вел-ы $Z = XY$. О: $M(XY) =$

$= \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{c+d}{2}$. $D(XY) = M[(XY)^2] - [M(XY)]^2 = \dfrac{(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)}{9} -$
$- \dfrac{(a+b)^2(c+d)^2}{4}$.

12. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вер-ть того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вер. того, что тираж содержит ровно 5 бракованных (бркн.) книг. О: $a = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$, $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \dfrac{a^m e^{-a}}{m!} = \dfrac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0{,}03783$ (из табл.).

13. Устройство состоит из 1000 эл-ов, работающих незв-мо один от другого. Вер-ть отказа любого эл-а в течение времени T равна 0,002. Найти вер. того, что за время T откажут ровно 3 эл-а. О: $P_{1000}(3) = 0{,}18$.

14. Завод отправил на базу 500 изделий. Вер-ть повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вер. того, что в пути будет повреждено изделий: 1) ровно 3; 2) менее трех; 3) более трех; 4) хотя бы одно. О: $a = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$; 1) $P_{500}(3) = \dfrac{a^3 e^{-a}}{3!} = 0{,}0613$; 2) $P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \dfrac{e^{-1}}{2} = \dfrac{5}{2} e^{-1} = \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197$; 3) $P_{500}(m > 3) = 1 - [0{,}9197 + 0{,}0613] = 0{,}019$; 4) $P_{500}(m > 0) = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}36788 = 0{,}632$.

15. Устройство состоит из большого числа незв-мо работающих эл-ов с одинаковой (очень малой) вер-ю отказа каждого эл-а за время T. Найти ср. число отказавших за время T эл-ов, если вер-ть того, что за это время откажет хотя бы один эл., равна 0,98. Ук: См. кз14. $P_1 = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}98 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0{,}02 \Rightarrow \lambda = 3{,}9$, т.е. откажет за время T примерно 4 эл-а.

16. Ср. число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вер. того, что за 2 мин поступит: 1) 4 вызова; 2) менее 4-х вызовов; 3) не менее 4-х вызовов. Ук: Из $P_t(m) = \dfrac{(at)^m e^{-at}}{m!}$ при $a = 3$, $t = 2$, $m = 4$ получим: 1) $P_2(4) = \dfrac{6^4 e^{-6}}{4!} = \dfrac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135$; 2) $P_2(m < 4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = 0{,}0025 \cdot 61 = 0{,}1525$; 3) $P_2(m \geq 4) = 1 - P_2(m < 4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475$.

17. Ср. число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вер. того, что за 4 мин поступит: 1) 3 вызова; 2) менее 3-х вызовов; 3) не менее 3-х вызовов. О: 1) $P_4(3) = 0{,}256$; 2) $P_4(k < 3) = 0{,}0123$; 4) $P_4(k \geq 3) = 0{,}9877$.

18. Мт. ожидание норм. рсп-ой слн. вел-ы X равно $a = 3$ и ср. кв. отк-ие $\sigma = 2$. Написать плотность рсп-ия. О: Из $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

19. Написать дифн. фк-ю норм. рсп-ой слн. вел-ы X, зная, что $M(X) = 3$, $D(X) = 16$. О: $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$.

20. Найти дифн. фк-ю лин-ой фк-и $Y = 3X + 1$, если аргумент рсп-н норм-о, причем $M(X) = 2$, $\sigma(X) = 0{,}5$. Ук: Если $Y = AX + B$, то $M(Y) = Aa + B$, $\sigma(Y) = A\sigma(X)$. О: $M(Y) = 7$, $\sigma(Y) = 1{,}5$. $f(y) = \dfrac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-7)^2}{2(1{,}5)^2}}$.

2.4. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вопросы для самопроверки

1. Что вы знаете о предельных теоремах?
2. В чем состоит суть нерав-ва Чебышева?
3. Сформулируйте и докажите теорему Чебышева.
4. Сформулируйте теорему Бернулли.
5. Сформулируйте и док-те обобщенную теорему Чебышева.
6. В чем состоит суть теоремы Пуассона?
7. Сформулируйте и док-те теорему Маркова.
8. Дайте опр-ие хркч-ой фк-и и приведите ее св-ва.
9. В чем заключается связь хркч-ой фк-и и плотности рсп-ия?
10. Сформулируйте центральную предельную теорему (ЦПТ) для одинаково рсп-х слагаемых.
11. В чем суть ЦПТ-ы для слагаемых, рсп-х неодинаково?
12. Как применяется на практике ЦПТ?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п6 решить з1-з20.

1. Слн. вел. X имеет дсп-ю $D(X) = 0{,}004$. Найти вер. того, что слн. вел-а отличается от $M(X)$ более чем на 0,2, О: 0,1.

2. Для слн. вел-ы X известна дсп-я $D(X) = 0{,}009$ и нерав. $P(|X - m_x| \geq \varepsilon) < 0{,}1$. Найти число ε. О: $\varepsilon \geq 0{,}3$.

3. Для слн. вел-ы X известны $D(X) = 0{,}01$ и $P(|X - m_x| < \varepsilon) > 0{,}96$. Найти число ε. О: $\varepsilon \geq 0{,}05$.

4. С какой надежностью ср. ариф-ое измерений дает измеряемую вел-у, если сделано 500 измерений с точностью 0,1 и дсп-ии слн. вел. (результатов измерений) не превосходят 0,3? О: 94%.

5. С какой точностью ср. ариф-ое измерений дает измеряемую вел-у, если сделано 400 измерений, надежность результатов составляет 80% и дсп-и слн. вел. (результатов измерений) не превосходят 0,04? О: 0,24.

6. Сколько измерений надо сделать, чтобы их ср. ариф-ое дало измеряемую вел-у с точностью до 0,05 и надежностью 90%, если дсп-и слн. вел. (результатов измерений) не превосходят 0,2? О: 800.

7. Опр-ть, с какой надежностью ср. ариф-ое измерений дает измеряемую вел-у, если точность измерений 0,1, сделано 500 измерений и дсп-и слн. вел-н равны 0,3. О: 99,998%.

8. Опр-ть, с какой точностью ср. ариф-ое измерений дает измеряемую вел-у, если сделано 400 измерений, надежность результатов 80% и дсп-и слн. вел-н равны 0,04? О: 0,013.

9. Сколько измерений надо сделать, чтобы их ср. ариф-ое дало измеряемую вел-у с точностью до 0,05 и надежностью 90%, если дсп-и слн. вел-н равны 0,2? О: 216.

10. Проверить, что для посл-ти незв-х и одинаково рсп-х вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, имеющих абс-ые третьи центральные (цтр.) моменты (т.е. сущ-ет $M[|X_k - M(X_k)|^3]$), выполнено условие Ляпунова (рав-во (19) из 4°:2.4).

11. Пусть посл-ть незв-х слн. вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ уд-ет условию Ляпунова и такова, что $M(X_k) = m$ и $D(X_k) = 0,25$ для всех k. Сравните оценки, даваемые фм-ой (24) и нерав-ом (5) из 2.4 для числа n при: 1) $\varepsilon = 0,1$; 2) $\varepsilon = 0,05$; 3) $\varepsilon = 0,01$.

12. Пусть посл-ть незв-х слн. вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ уд-ет условию Ляпунова и такова, что $M(X_k) = m$ и $D(X_k) = 0,01$ для всех k. Сравните оценки, даваемые фм-ой (24) и нерав-ом (5) для числа n при: 1) $\varepsilon = 0,1$; 2) $\varepsilon = 0,05$; 3) $\varepsilon = 0,01$.

13. Слн. вел. X имеет норм. рсп-ие параметрами (m, σ). Оценить по нерав-у Чебышева $P[|X - m] \geq 2\sigma)$. Сравнить с точным зн-ем этой вер-ти.
О: 0,25 и 0,0456.

14. Закон рсп-ия слн-ой вел-ы X опр-ся фм-ми $P(X = 0) = 1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, $P(X = -\varepsilon) = P(X = \varepsilon) = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon^2}$. Сравните точное зн. вер-ти $P(|X| \geq \varepsilon)$ с оценкой, полученной по нерав-ву Чебышева. О: $P(|X| \geq \varepsilon) = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

15. Предполагается провести 10 измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ неизвестной вел-ы m. Считая $x_1, \ldots, x_{10}$ незв-ми норм. рсп-ми слн. вел-ми с $M(X_k) = m$, $D(X_k) = 0,01$, найти ε, если $P\left(\left|\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k - m\right| < \varepsilon\right) = 0,99$. Оценить ε, используя нерав-во Чебышева. Сравнить полученные результаты. О: $\varepsilon = 0,0813$; по нерав-ву Чебышева $\varepsilon \leq 1\big/\sqrt{10} = 0,3162$.

16. Применим ли закон больших чисел к посл-ти незв-х слн. вел-н $X_1, \ldots, X_k$, если $P(X_k = \sqrt{k}\,) = P(X_k = -\sqrt{k}\,) = \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$, $P(X_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}}$? О: да.

17. Складываются 10^4 чисел, каждое из к-ых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки от округления незв-ы и равномерно рсп-ны в интервале $\left]-\dfrac{1}{2}10^{-m}, \dfrac{1}{2}10^{m}\right[$, найти пределы, в к-ых с вер-ю, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка. О: $0,75 \cdot 10^{-m+2}$.

18. Пусть слн. вел. X_λ рсп-на по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda \to \infty} P\left(\dfrac{x_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right)$. О: $\phi(x)$. Ук: воспользуемся тем, что слн. вел. $X_{\lambda_n} = (\lambda_n = nh)$

при любом $h > 0$ представляется в виде $X_{\lambda_n} = X_h^{(1)} + X_h^{(2)} + \ldots + X_h^{(n)}$, где $X_h^{(k)}$ – незв. слн. вел-ы, расп-ые по закону Пуассона с параметром h.

19. Вер-ть появления сб. A в каждом исп-и равна 1/2. Пользуясь нерав-ом Чебышева, оценить вер-ть того, что число X попаданий сб. A будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 незв-х исп-й. О: 0,75. Ук: воспользоваться нерав-ом $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где $M(X) = np = 100 \cdot 1/2 = 50$, $D(X) = npq = 100 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 25$. Найдем $\varepsilon = \max|(\alpha, \beta) - M(X)| = 60 - 50 = 10$.

20. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вер-ть того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь нерав-ом Чебышева, оценить вер-ть того, что абс-ая вел. разности между числом включенных ламп и ср. числом (мт. ож-ем) включенных ламп за время T окажется: 1) меньше трех; 2) не меньше трех. О: 1) $P(|X - 16| < 3) \geq 0{,}36$; 2) $P(|X - 16| \geq 3) \leq 0{,}64$.

3. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

> Очень легко делать удивительные открытия, но трудно усовершенствовать их в такой степени, чтобы они получили ценность.
>
> Т. Эдисон

ЛЕКЦИЯ 8

3.1. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Понятие многомерной случайной величины. Функция и плотность распределения. До сих пор мы рас-ли одномерную (омр.) слн. вел-у X и законы ее рсп-ия. Однако в одном и том же пр-ве элр-ых сб-й может быть опр-на не одна, а несколько слн-ых вел-н. Такая ситуация возникает, когда объект хркз-ся несколькими слн. параметрами. Так, при верн-ом моделировании (мдв.) структуры расходов сл-но выбранной семьи на питание, покупку обуви, одежды, проезд на транспорте, на уд-ние духовных потребностей яв-ся слн. вел-ми [многомерными (ммр.)], опр-ми на одном пр-ве элр-ых сб-й.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – слн. вел-ы, опр-ые на мн-ве элр-ых сб-й Ω. Удобно расв-ть их как крд-ты n-мерного (мр.) слн-го вектора $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

На ммр-ые слн. вел-ы $Z = (X, Y, \ldots, U) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ распространяются почти без изменений основные опр-ия, относящиеся к омр-ым слн. вел-ам.

Рас-им сначала двумерную (дмр.) слн. вел-у $Z = (X, Y)$.

Вер-ть совместного выполнения двух нерав-в $X < x$, $Y < y$ наз. фк-ей рсп-ия системы двух слн. вел-н (X, Y) и обз-ся

$$F(x, y) = P[(X < x)\,(Y < y)] = P[(X < x) \cap (Y < y)]. \qquad (1)$$

Геом-ки $F(x, y)$ есть вер-ть попадания слн-ой точки (X, Y) в беск. квадрант с вершиной в точке (x, y), изб-ый на рис. 1.

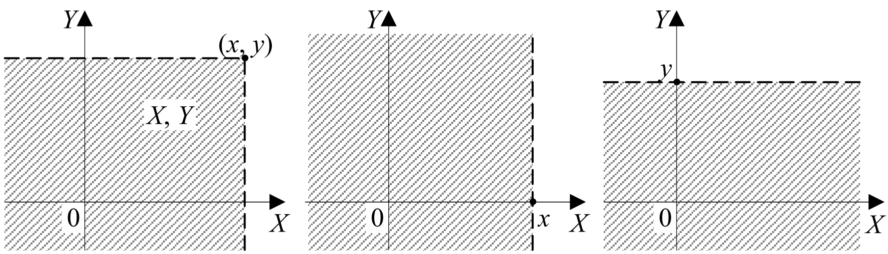


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Из опр-ия (1) получим сд-ие св-ва $F(x, y)$:

с1. $F_1(x) = F(x, \infty)$ (рис. 2); $F_2(y) = F(\infty, y)$ (рис. 3).

с2. $F(x, y)$ – неубывающая (неуб.) фк-ия своих аргументов, т.е. из $x_2 > x_1$ $\Rightarrow F(x_2, y) > F(x_1, y)$ и из $y_2 > y_1 \Rightarrow F(x, y_2) > F(x, y_1)$.

с3. Повсюду на $-\infty$ фк-я рсп-ия равна нулю, т.е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

с4. $F(\infty, \infty) = 1$, т.к. попадание точки (X, Y) в беск. квадрант есть сб. достоверное.

Теперь выч-им вер-ть $P[(X, Y) \subset D]$ попадания точки (X, Y) в заданную обл. D (рис. 4). Эта вер-ть выражается просто, если обл-ть есть прямоугольник (пуг.) $R = \{\alpha \le X < \beta, \gamma \le Y < \delta\}$ (рис. 5):

$$P[(X, Y) \subset R] = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \qquad (2)$$

Используя стн. (2) выч-им плотность рсп-ия системы слн. вел-ы (X, Y) (аналогично выч-ю плотности рсп-ия омр-ой слн-ой вел-ы $f(x)) = F'(x) = $ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\Big)$. Находим (см. рис. 6).

$$P[(X, Y) \subset R_\Delta] = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y). \quad (3)$$

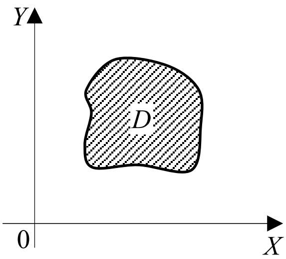


Рис. 4

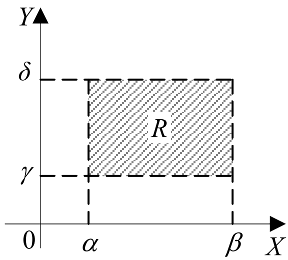


Рис. 5

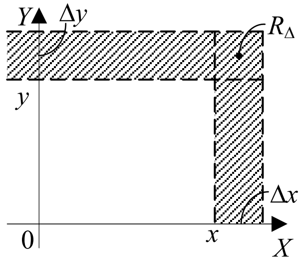


Рис. 6

Стн. (3), разделив на $\Delta x \Delta y$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, получим плотность рсп-ия системы

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x) - F(x, y+\Delta y) - [F(x+\Delta x, y) - F(x, y)]}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x, y)}{\Delta x}\right] =$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F'_x(x, y+\Delta y) - F'_x(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$ Итак,

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y). \qquad (4)$$

Механический смысл $f(x, y)$ состоит в том, что она представляет собой плотность рсп-ия массы в точке (x, y).

Геом-ки $f(x, y)$ есть нек-ая поверхность (пвх.) $z = f(x, y)$, к-ая наз. пвх-ю рсп-ия.

Если пересечь $f(x, y)$ пл-ю, параллельной (прл.) пл. xOy, то получим кривую, в каждой точке к-ой плотность рсп-ия пст-ая. Такие кривые наз. кривыми равной плотности. Часто бывает удобным задавать рсп-ие семейством кривых равномерной плотности.

Выражение (врж.) $f(x, y)dxdy$ наз. эл-ом вер-ти. Это есть вер-ть попадания точки (X, Y) на элр-ый участок $dxdy$, прилежащий к точке (x, y) (см. рис. 6). Эл-т вер-ти равен объему элр-го параллелепипеда, огр-го сверху пвх-ю $f(x, y)$ с основанием $dxdy$.

Отсюда можно получить вер-ть попадания слн-ой точки (X, Y) в произвольную обл. D:

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint_D f(x, y)dxdy\,. \tag{5}$$

Стн. (5) врж-ет объем тела, основанием к-го служит обл. D. В част., с пуг-ым основанием (рис. 5) имеем

$$P[(X, Y) \subset R] = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x, y)dxdy\,. \tag{6}$$

Учитывая, что фк-я рсп-ия $F(x, y)$ есть вер-ть попадания точки (X, Y) в беск. квадрант, получим

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy\,. \tag{7}$$

Откуда имеем

$$F(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1. \tag{8}$$

Это есть полный объем пвх-ю рсп-ия и пл-ю xOy.

п1. Система двух слн. вел-н (X, Y) подчинена закону рсп-ия с плотностью $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти фк-ю рсп-ия. Опр-ть вер-ть попадания слн-й точки (X, Y) в квадрант $R = \{0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1\}$.

Р. $F(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \dfrac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$P[(X, Y) \subset R] = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\,[\operatorname{arctg} x]_0^1\,[\operatorname{arctg} y]_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}\,.$$

2°. Законы распределения отдельных аргументов. Условные законы распределения. Зная закон рсп-ия $F(x, y)$ системы двух слн. вел-н, можно вывести законы рсп-ия отдельных аргументов:

$$F_1(x) = F(x, \infty);\ F_2(y) = F(\infty, y). \tag{9}$$

Учитывая (7), их можно выразить и через плотность рсп-ия

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy\,,\ F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy \tag{10}$$

Диф-уя (10) по x и y, получим плотности рсп-ия

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \tag{11}$$

Но обратно, из $F_1(x)$, $F_2(y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ нельзя найти $F(x, y)$, $f(x, y)$. Нх-мо еще узнать условный закон рсп-ия X, входящего в систему (X, Y).

Короче, зная закон рсп-ия одной из вел-н и условный закон рсп-ия другой, можно составить закон рсп-ия системы (причем условный закон рсп-ия можно задавать как фк-ей рсп-ия, так и плотностью):

$$f(x, y) = f_1(x)f(y/x) \text{ или } f(x, y) = f_2(y)f(x/y). \tag{12}$$

Из (12) можно получить врж-ия условных законов рсп-ия через безусловные

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy},\ f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}. \tag{13}$$

Если Y незв-мы от X, то $f(y/x) = f(y)$ (при $f(y/x) \neq f(y)$ они зв-мы). Незв-ть вел-н взаимна. Т.е. отсюда верно и второе рав-во $f(x/y) = f(x)$.

Т.о. нх-ым и дт-ым условием незв-ти слн. вел-н X и Y яв-ся

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \tag{14}$$

п2. Плотность рсп-ия системы (X, Y) имеет вид $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2\left(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1\right)}$. Опр-ть, зв-мы или незв-мы слн. вел-ы X и Y.

Р. Разлагая знаменатель на множители, имеем:

$f(x, y) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \cdot \dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$. По (11) находим $f_1(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi\left(1+y^2\right)} =$

$= \dfrac{1}{\pi^2\left(1+x^2\right)} \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Аналогично, $f_2(y) = \dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$. Тогда $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Значит, X и Y незв-мы.

Теперь рас-им дк-ые слн. вел-ы $Z = (X = x_i,\ Y = y_j)$. Закон рсп-ия можно задать набором вер-ей $p_{ij} = P\{X = x_i,\ Y = y_j\}$, где $\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$. Если вер-ти $\{p_{ij}\}$ заданы, то можно найти рсп-ия вер-ей X, Y в отдельности. Для этого обз-им $p_{i\cdot} = P\{X = x_i\}$, $p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\}$ и представим достоверное сб. в виде суммы несовместимых сб-й: $\Omega = \sum_j \left\{Y = y_j\right\}$. Тогда $p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = P\{(X = x_i) \cap \Omega\} =$

$= P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \sum_j \left(Y - y_j\right)\right\} = P\left\{\sum_j \left(X = x_i\right) \cap \left(Y - y_j\right)\right\} =$

$= \sum_j P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \left(Y - y_j\right)\right\} = \sum_j P_{ij}$. Аналогично имеем $p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} =$

$= \sum_i P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \left(Y - y_j\right)\right\} = \sum_i P_{ij}$. Итак,

$$p_{i\cdot} = \sum_j P_{ij} \quad \left(p_{\cdot j} = \sum_i P_{ij} \right) \text{ – вер. того, что } X = x_i \ (Y = y_j). \qquad (15)$$

п3. Качество продукции хркз-ся двумя слн. параметрами X и Y. Закон рсп-ия слн. вел-ы $Z = (X, Y)$ представлен в табл. 1. На пересечении i-й строки и j-го столбца табл. находятся вер-ти $p_{ij} = P\{X = x_i,\ Y = y_j\}$. Найти рсп-ие вер-ей (закон рсп-ия) слн-х вел-н X и Y.

Таблица 1

j		1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
i	x_i \ y_j	0	0,1	0,2	0,3	
1	5	0,2	0,1	0,05	0,05	0,4
2	6	0	0,15	0,15	0,1	0,4
3	7	0	0	0,1	0,1	0,2
$p_{\cdot j}$		0,2	0,25	0,3	0,25	$\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$

Р. Вер-ти $P\{X = x_i\} = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{4} P_{ij}$ находятся в последнем столбце табл. 1. Ряд рсп-ия слн. вел-ы X имеет вид: $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_{i\cdot} & 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{array}$. А вер-ти $P\{Y = y_j\} = $ $= p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{3} P_{ij}$ находятся в последней строке табл. 1 и ряд рсп-ия имеет вид: $\begin{array}{c|c|c|c|c} y_j & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ \hline p_{\cdot j} & 0,2 & 0,25 & 0,3 & 0,25 \end{array}$.

Для дк-ых слн. вел-н $Z = (X, Y)$ условные рсп-ия опр-ся рав-ми:

$$P_x\left(x_i/y_j\right) = P\left\{X = x_i/Y = y_j\right\} = \frac{P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \left(Y - y_j\right)\right\}}{P\left\{Y - y_j\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}. \quad (16)$$

$$P_y\left(y_j/x_i\right) = P\left\{Y = y_j/X = x_i\right\} = \frac{P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \left(Y - y_j\right)\right\}}{P\left\{X - x_i\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}. \quad (17)$$

При фиксированном значении y_j сумма вер-ей $P_x\left(x_i/y_j\right)$ по всем зн-ям x_i равна ед-е. Дсв-но, $\sum_i P_x\left(x_i/y_j\right) = \sum_i \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}} = \frac{\sum_i p_{ij}}{\sum_i p_{ij}} = 1$. Аналогично, $\sum_j P_y\left(y_j/x_i\right) = 1$.

п4. Найти условное рсп. слн. вел-ы X, заданной в п3, при условии, что слн. вел-а Y приняла зн-ие $y_2 = 0,1$.

Р. Выбрав зн-ия p_{i2} из столбца $j = 2$ табл. 1 и разделив их на 0,25 (см. (16)), получим условное рсп. X при условии, что $Y = 0,1$: $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 5 & 6 & 7 \\ \hline P_x\left(x_i/y_2\right) & 0,4 & 0,6 & 0 \end{array}$

3°. Числовые характеристики системы. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Начальным (начн.) моментом порядка k, s системы (X, Y) наз. мт. ожидание (ож.) произведения (прз.) X^k и Y^s

$$\alpha_{ks} = M[X^k, Y^s] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij} , \tag{18}$$

где $p_{ij} = P\{(X = x_i)(Y = y_j)\}$ – вер. того, что система примет зн-ия (x_i, y_j).

Аналогично опр-ся центральный (цтр.) момент

$$\mu_{ks} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^k,\ \overset{\circ}{Y}{}^s\right] = M[(X - m_x)^k(Y - m_y)^s] = \sum_i \sum_j (x - m_x)^k (y - m_y)^s p_{ij} , \tag{19}$$

где мт. ож-ия m_x, m_y опр-ся по фм-е (22).

Для непр-ых слн. вел-н (X, Y) с плотностью рсп-ия $f(x, y)$ имеем:

$$\alpha_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dxdy . \tag{20}$$

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dxdy . \tag{21}$$

Рас-им суммарные моменты $k + s$ первого и второго порядков

$$m_x = \alpha_{10} = M[X^1, Y^0] = M[X],\ m_y = \alpha_{01} = M[X^0, Y^1] = M[Y]. \tag{22}$$

Совокупность (свк.) мт-их ож-й представляет собой хркс-у системы, вокруг к-ой происходит рассеивание.

Находим вторые цтр. моменты – дисперсии (дсп.)

$$D_x = \mu_{20} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2,\ \overset{\circ}{Y}{}^0\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = D[X],$$

$$D_y = \mu_{02} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^0,\ \overset{\circ}{Y}{}^2\right] = M\left[\overset{\circ}{Y}{}^2\right] = D[Y], \tag{23}$$

к-ых хркз-ет рассеивание слн-й точки (X, Y) около ее мт-х ож-й m_x и m_y.

Особую роль играет второй смешанный цтр. момент, назм-й корреляционным (крцн.) моментом (иначе «моментом связи») слн. вел-н X и Y:

$$K_{xy} = \mu_{11} = M\left[\overset{\circ}{X},\ \overset{\circ}{Y}\right] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = \sum_i \sum_j (x - m_x)(y - m_y) p_{ij} . \tag{24}$$

А для непр-го случая (сл.) имеем

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy . \tag{25}$$

Крцн-й момент хркз-ет: 1) рассеивание вел. X и Y вокруг их мт. ож-й; 2) связь между слн. вел-ми X и Y: для незв-ых слн. вел-н крцн-й момент равен нулю. Дсв-но, если слн. вел-ы X и Y незв-мы, то $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Отсюда стн. (25) принимает вид $K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = 0$, т.к. $\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = m_x - m_x \cdot 1 = 0$, аналогично $\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = 0$.

Из $K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$ видно, что если одна из вел-н (X, Y) мало отличается от своего мт-го ож-ия (т.е. почти не слн-а), то K_{xy} будет мал, хотя X и Y будут связаны зв-ю. Поэтому для хркс-ки связи между слн. вел-ми X и Y в чистом виде переходят от момента K_{xy} к безразмерной хркс-е

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{26}$$

наз-мое коэф-ом корреляции (он не учитывает рассеивание).

Очевидно, что коэф. корреляций (крц.) обращается в нуль одновременно с крцн-ым моментом. Сд-но, для незв-ти слн. вел-н X и Y коэф. крц-и должен быть равен нулю.

Слн. вел-ы, для к-ых крцн-ый момент (значит, и коэф. крц-и) равен нулю, наз. некоррелированными («несвязными»).

Две незв-ые слн. вел-ы всегда некоррелированы (некрв.). Но от некрв-сти не вытекает незв-ть, т.е. некрв-сть – нх-ое, но не дт-ое условие для незв-ти.

Коэф. крц-и хркз-ет не всякую зв-ть, а только лин-ю, т.е. при возрастании (взр.) одной вел-ы другая имеет тенденцию взр-ть или убывать (уб.) по лин. закону. Если степень (ст.) зв-ти точно переходит к лин-й зв-ти: $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \pm 1$. Причем если $r_{xy} > 0$ ($a > 0$) – плж. крц-ия, то при взр-и X взр-т и Y; если $r_{xy} < 0$ ($a < 0$) – отц. крц-ия, то при взр-и X вел-а Y уб-ет.

Более подробно о крц-и см. в гл. 6.

4º. Нормальный закон распределения двумерной случайной величины. Линия регрессии. Он имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что плотность рсп-ия $f(x, y)$ зв-т от пяти параметров m_x, m_y, σ_x, σ_y, r ($r = r_{xy}$ – коэф. крц-и X, Y). Смысл их прежний. Для док-ва дт-но выч-ть $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Используя инт. Пуассона (5º:4.1), имеем $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \sqrt{1-r^2}\ \sigma_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-m_y}{\sqrt{1-r^2}\sigma_x} - \frac{r(x-m_x)}{\sqrt{1-r^2}\sigma_x}\right]^2} d\left(\frac{y-m_y}{\sqrt{1-r^2}\sigma_y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$ Аналогично получим

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\, e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}};\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{28}$$

п5. Пусть слн. вел. $Z = (X, Y)$ имеет нормальное (норм.) рсп. с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$. Найти плотность рсп-ия слн. вел. X и Y.

Р. По стн. (28) имеем: $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_2(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Нетрудно также д-ть, что $K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy = r\sigma_x\sigma_y$, т.е.

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \tag{28'}$$

При норм. законе рсп-ия понятия некрв-сть и незв-ть эквивалентны (экв.). Для этого полагаем $r = 0$ и запишем $f(x, y) = f_1(x)f_2(x)$.

При $r \neq 0$ вел-ы X, Y зв-мы. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} f(y/x) &= \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}(1-r^2)}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}-r\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2} \\ f(x/y) &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}(1-r^2)}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}-r\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Проанализируем один из них, н-р,

$$f(y/x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}(1-r^2)} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2}\left[(y-m_y)-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2}.$$

Это есть плотность рсп-ия с параметрами

$m_{y/x} = m_y + r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$ – цтр. рассеивание;

$\sigma_{y/x} = \sigma_y\sqrt{1-r^2}$ – ср. кв. отк-ие.

Вел. $m_{y/x}$ наз. условным мт. ож-ем вел-ы Y при данном x. Ее можно изб-ить на пл. xOy прямой (пм.) к-ая наз. линией регрессии (рег.) (подробнее см. в 6.3) Y на X

$$y = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) = m_{y/x}. \tag{30}$$

Аналогично, пм-я

$$x = m_x + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y) = m_{x/y} \tag{30'}$$

есть линия рег-и X на Y.

п6. Пусть слн. вел. $Z = (X, Y)$ имеет норм. рсп-е с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$. Найти условную плотность рсп-ия слн. вел-ы X при условии, что $Y = y_0$.

Р. Используя (29), получим $f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(1-r^2)}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-ry)^2}{1-r^2}}$ – плотность норм-го рсп-ия с параметрами $m = ry$, $\sigma = \sqrt{1-r^2}$.

5°. Законы распределения и числовые характеристики многомерной случайной величины. Для них легко обобщаются вышеприведенные фм. Так фк. рсп-ия имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[(X_1 < x_1)(X_2 < x_2)\ldots (X_n < x_n)]. \tag{32}$$

Отсюда получим плотность рсп-ия

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}. \tag{33}$$

Зная фк-ю рсп-ия $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно получить фк-и рсп-ия и плотность рсп-ия отдельных вел-н

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1) = F(x_1, \infty, ..., \infty) \\ &F_{12...k}(x_1, x_2, ..., x_k) = F(x_1, x_2, ..., x_k, \infty, ..., \infty) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_2 ... dx_n \\ &f_{12...k}(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_{k+1} ... dx_n \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$f(x_1 \ldots x_k / x_{k+1} \ldots x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ... x_n)}{f_{k+1,...,n}(x_{k+1}, ..., x_n)} \tag{36}$$

Если система $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незв-ма, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n). \tag{37}$$

Найдем вер-ть попадания точки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в обл. D:

$$P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset D] = \int \underset{D}{\ldots} \int f(x_1, x_2, ... x_n) dx_1 ... dx_n. \tag{38}$$

Пусть дана система $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Если неизвестен закон рсп-ия, то хркз-ем их

1) n мт. ож-ми: $m_1, m_2, \ldots, m_n$;

2) n дсп-ей: $D_1, D_2, \ldots, D_n$, где $D_i = K_{ii}$;

3) $n(n-1)$ крцн. моментами $K_{ij} = M\left[\overset{\circ}{X}_i, \overset{\circ}{X}_j\right]$ $(i \neq j)$, где $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i$, $= \overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j$.

K_{ij} хркз-ет попарную крц-ю всех вел-н, входящих в систему. Матрица

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & ... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & ... & k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{n1} & k_{n2} & ... & k_{nn} \end{pmatrix} \tag{39}$$

наз. крцн-ой матрицей системы n слн. вел-н $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Причем из опр-ия следует, что $K_{ij} = K_{ji}$, т.е. матрица (39) симметричная.

Если слн. вел-ы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ некрв-ы, то все $K_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, кроме диагонали. Тогда

$$||k_{ij}|| = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_n \end{pmatrix} \tag{40}$$

И здесь можно перейти к безразмерной (без учета рассеивания) хркс-ке, назм-й норм. крцн-ой матрицей:

$$||r_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix},$$

где $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, где $\sigma_i = \sqrt{D_i}$, $\sigma_j = \sqrt{D_j}$, причем $r_{ij} = r_{ji}$.

Более подробно о множественной корреляции см. в [1].

ЛЕКЦИЯ 9

3.2. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1°. Числовые характеристики функций случайных величин. Иногда бывает трудным или дорогостоящим при экспериментах (эксп.) опр-ть закон рсп-ия или числовые хркс-ки слн. вел-ы Y. Поэтому Y расв-ют как фк-ю, когда аргумент рсп-ен по известному закону (или задан по числовым хркс-ам).

Пусть слн. вел. Y есть фк-я нескольких слн. вел-н $X_1, \ldots, X_n$: $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$. Известен закон рсп-ия системы аргументов $(X_1, \ldots, X_n)$. Найти числовые хркс-ки (мт. ож-ие и дсп-ю) фк-и Y.

Если нам удалось найти каким-то способом закон (плотность) рсп-ия $g(y)$ вел-ы Y, то

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy\,,\ D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 g(y) dy\,. \tag{1}$$

Однако $g(y)$ бывает неизвестным, причем даже бывает неизвестным закон рсп-ия аргументов $(X_1, \ldots, X_n)$, а лишь известны нек-ые числовые хркс-ки этих аргументов.

Начнем с простого сл-я. Пусть $Y = \varphi(X)$ – фк-я одного аргумента. Слн. вел. X задана законом рсп-ия. Найти m_y и D_y.

Если X – дк. слн. вел-а с рядом рсп-ия $\{x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n\}$, то можно получить возможные зн-ия Y с вер-ми в виде табл-ы $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n); p_1, \ldots, p_n\}$. Но эта табл. не яв-ся еще рядом рсп-ия Y, надо располагать $\{\varphi(x_i)\}$ по возрастанию (взр.), и если нек-ые совпадают, то надо их объединить, тогда найдем

$$m_y = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i\,. \tag{2}$$

п1. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия

X	-1	-2	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон рсп-ия и мт. ож-ие слн. вел-ы $Y = X^2$.

Р. Найдем $y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1$, $y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4$, $y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1$, $y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4$. отсюда имеем $y_1 = y_3$, тогда $P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$. Аналогично $P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. Откуда получим закон рсп-ия Y:

Y	1	4
P	0,5	0,5

. $m_y = 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

Если X непр. слн. вел-а, то p_i заменяем на $f(x)dx$ и вместо (2) получим

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx\,. \tag{3}$$

Аналогичные фм-ы имеем для ммр-ых слн. вел-н

$$M[\varphi(X, Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}\,, \tag{4}$$

где $p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)]$ – вер. того, что система (X, Y) примет зн-ие (x_i, y_j). Для непр. сл-я получим

$$M[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy\ . \qquad (5)$$

где $f(x, y)$ – плотность рсп-ия системы (X, Y). Вообще

$$M[\varphi(X_1, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n\ . \qquad (6)$$

Легко найти аналогичные врж-я для моментов высших порядков:

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-m_\varphi]^2 f(x)dx\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^2 f(x)dx\ -\ m_\varphi^2, \qquad (7)$$

где $m_\varphi = M[\varphi(X)]$ – мт. ож-ие $Y = \varphi(X)$, $f(x)$ – плотность рсп. X.

$$D[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x,y)-m_\varphi]^2 f(x,y)dxdy\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x,y)]^2 f(x,y)dxdy\ -\ m_\varphi^2, \quad (8)$$

Теперь рас-им сл-й, когда у аргументов неизвестен закон рсп-ия, а известны только их числовые хркс-ки. Найти m_y и D_y. При таких сл-х Y бывает связанным с X лин-о, или же Y есть элр-я лин. фк-я от X, к-ую прж-но можно врж-ть через лин. фк-ю.

Вел-ы m_y и D_y опр-ся исходя из св-в числовых хркс-ик одномерной (омр.) и ммр-ой слн. вел-ы. Перечислим их.

с1. $M(C) = C$, $C = \text{const}$.

с2. $D(C) = M[(C - M(C))^2] = M[(C - C)^2] = 0$.

с3. $M[CX] = CM(X)$.

с4. $D(CX) = M[(CX - M(CX))^2] = C^2M[X - M(X)^2] = C^2D(X)$.

с5. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, $M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}M(X_i)$.

с6. $M\left(\sum a_iX_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n}a_iM(X_i) + b$.

с7. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}$. Дсв-но, переходя к центрированным (цтрв.) слн. вел-ам $\overset{\circ}{X}$, $\overset{\circ}{Y}$, $\overset{\circ}{Z}$ ($\overset{\circ}{Z} = \overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{Y}$), получим $D(X + Y) = D(Z) =$
$= M(\overset{\circ}{Z}{}^2) = M(\overset{\circ}{X}{}^2) + 2M(\overset{\circ}{X}\ \overset{\circ}{Y}) + M(\overset{\circ}{Y}{}^2) = D(X) + 2K_{xy} + D(Y)$ ■ И вообще,

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}D(X_i) + 2\sum_{i<j}K_{ij} \ \text{ или } \ D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\ .$$

Если слн. вел-ы $(X_1, \dots, X_n)$ некрв-ы, т.е. $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}D(X_i).$$

с8. $D\left(\sum a_iX_i + b\right) = \sum a_i^2D(X_i) + 2\sum_{i<j}a_ia_jK_{ij}$.

с9. $M(X, Y) = M(X)M(Y) + K_{xy}$. Дсв-но, обз-в через $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$, находим $K_{xy} = M(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M(XY) - m_xM(Y) - m_yM(X) +$
$+ m_xm_y = M(X, Y) - m_xm_y = M(X, Y) - M(X)M(Y)$. Отсюда следует с9.

Для обобщения на произвольное число сомножителей нх-мо требование: вел-ы некрв-ы и высшие порядки крц-и равны нулю, т.е. система назв-ма:

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M\left(X_i\right).$$

с10. $D(X, Y) = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X)$ для незв-х слн. вел-н X, Y. Дсв-но, если X, Y незв-мы, то $m_z = m_x m_y$ и $D(X, Y) = M[(XY - m_x m_y)^2] = M(X^2Y^2) - 2m_x m_y M(XY) + m_x^2 m_y^2 = M(X^2)M(Y^2) - m_x^2 m_y^2 = \left(D(X) - m_x^2\right)\left(D(Y) - m_y^2\right) - m_x^2 m_y^2 = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X)$ ■

Для цтрв-ых слн. вел-н $m_{\overset{\circ}{X}} = 0$, $m_{\overset{\circ}{Y}} = 0$. Тогда

$$D(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = D(\overset{\circ}{X})D(\overset{\circ}{Y}).$$

с11. $\mu_3(X + Y) = \mu_3(X) + \mu_3(Y)$. Дсв-но, $\mu_3(X + Y) = M[(X + Y - m_x - m_y)^3] = M\{[(X - m_x) + (Y - m_y)]^3\} = M[(X - m_x)^3] + 3M[(X - m_x)^2(Y - m_y)] + 3M[(X - m_x)(Y - m_y)^2] + M[(Y - m_y)^3] = \mu_3(X) + \mu_3(Y)$, т.к. $M(Y - m_y) = 0$, $M(X - m_x) = 0$ ■ Вообще

$$\mu_3\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_3\left(X_i\right).$$

Аналогично док-ся фм-ы

с12. $\mu_4(X + Y) = \mu_4(X) + \mu_4(Y) + 6D_xD_y$. Вообще

$$\mu_4\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_4\left(X_i\right) + 6\sum_{i<j} D_{x_i} D_{x_j}.$$

с13. Пусть даны две слн. некрв-ые векторы $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$. Рас-им их суммы $Z = X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = (Z_1, Z_2)$. Найти m_{Z_1}, m_{Z_2}, D_{Z_1}, D_{Z_2}, $K_{Z_1Z_2}$.

Используя с5, с7, получим $m_{Z_1} = m_{x_1} + m_{y_1}$, $m_{Z_2} = m_{x_2} + m_{y_2}$; $D_{Z_1} = D_{x_1} + D_{y_1}$, $D_{Z_2} = D_{x_2} + D_{y_2}$. Выч-им $K_{Z_1Z_2} = M(\overset{\circ}{Z}_1\overset{\circ}{Z}_2) = M[(\overset{\circ}{X}_1 + \overset{\circ}{Y}_1)(\overset{\circ}{X}_2 + \overset{\circ}{Y}_2)] = M(\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_1) + M(\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_1) + M(\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_2) + M(\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_2)$. Т.к. X, Y некрв-ы, то $M(\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_1) = 0$, $M(\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_2) = 0$, а $M(\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_1) = K_{x_1y_1}$, $M(\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_2) = K_{x_2y_2}$. Тогда

$$K_{Z_1Z_2} = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2}. \tag{9}$$

Стн. (9) можно обобщить: если даны две некрв-ые системы $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, то получим

$$K_{ij}^{z} = K_{ij}^{x} + K_{ij}^{y}. \tag{10}$$

Перечисленные св-ва позволяют решать и др. практические задачи.

п2. Д-ть, если слн. вел-ы X и Y связаны лин-о ($Y = aX + b$), то $r_{xy} = \begin{cases} 1, a > 0, \\ -1, a < 0. \end{cases}$

Д. $K_{xy} = M(\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)] = aM[(X - m_x)^2] = aD_x$. Найдем $D_y = D[aX + b] = a^2D_x$, тогда $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Отсюда

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{aD_x}{|a|\sigma_x^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, a > 0, \\ -1, a < 0 \end{cases} \blacksquare$$

2°. Линеаризация функций. Поскольку легко опр-ть числовые хркс-ки лин-х фк-й, поставим задачу линеаризовать фк-ю. Пусть $y = \varphi(x)$ – не лин. фк-я, но мало отличается от лин-ой на участке $]\alpha, \beta[$. Найти m_y, D_y.

Напишем ур-ие касательной (рис. 1) в точке $x = m_x$:

$$y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x)(X - m_x) \text{ или } y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x)\overset{\circ}{X}. \tag{11}$$

Отсюда, учитывая, что $\mu(\overset{\circ}{X}) = 0$, получим

$$m_y = \varphi(m_x),\ D_y = [\varphi'(m_x)]^2D_x. \tag{12}$$

Полученные фм-ы можно обобщить. Пусть $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и заданы m_{x_1}, …, m_{x_n}, а также $\|K_{ij}\|$. Найти m_y, D_y. Аналогично (11) имеем

$$Y = \varphi(m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{x_i}(m_{x_1}, \ldots, m_{x_n})(x_i - m_{x_i}) = \varphi(m) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\overset{\circ}{X}. \tag{13}$$

Тогда

$$m_y = \varphi(m),\ D_y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)^2 D_{x_i} + 2\sum_{i<j}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_j}K_{ij}. \tag{14}$$

Получим также

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_j}r_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}. \tag{15}$$

Если система некрв-а, т.е. $r_{ij} = 0$, то из (15) получим

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2. \tag{16}$$

Последние две ф-мы применяются при иссл-и ошибок разного вида приборов и механизмов, а также при анализе точности стрельбы.

Если границы $]\alpha, \beta[$ велики, то нх-мо уточнение результатов. Пусть $y = \varphi(x)$. Возьмем

$$y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x)\overset{\circ}{X} + \frac{1}{2}\varphi''(m_x)\overset{\circ}{X}{}^2, \tag{17}$$

Тогда

$$m_y = \varphi(m_x) + \frac{1}{2}\varphi''(m_x)M[\overset{\circ}{X}{}^2] = \varphi(m_x) + \frac{1}{2}\varphi''(m_x)D_x. \tag{18}$$

$$D_y = [\varphi'(m_x)]^2D_x + \frac{1}{4}[\varphi''(m_x)]D(\overset{\circ}{X}{}^2) + \varphi'(m_x)\varphi''(m_x)K(\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{X}{}^2),$$

но $$D(\overset{\circ}{X}{}^2) = M[\overset{\circ}{X}{}^4 - M(\overset{\circ}{X}{}^2)]^2 = \mu_4(X) - D^2,$$

$K(\overset{\circ}{X}\ \overset{\circ}{X}{}^2) = M[\overset{\circ}{X}(\overset{\circ}{X}{}^2 - M(\overset{\circ}{X}{}^2)] = \mu_3(X)$. Тогда получим

$$D_y = (\varphi'(m_x))^2 D_x + \frac{1}{4}(\varphi''(m_x))^2(\mu_4(X) - D_x^2) + \varphi'(m_x)\varphi''(m_x)\mu_3(X). \qquad (19)$$

Для слн. вел-ы, подчиненной (хотя и прж-но) норм. закону, имеем $\mu_3(X) = 0$, $\mu_4(X) = 3\sigma_x^4 = 3D_x^2$. Тогда (19) примет вид

$$D_y = (\varphi'(m_x))^2 D_x + \frac{1}{2}(\varphi''(m_x))^2 D_x^2. \qquad (20)$$

Аналогичные фм-ы можно записать и для общего сл. $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

$$Y = \varphi(m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\overset{\circ}{X}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}\overset{\circ}{X}{}_i^2 + \sum_{i<j}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i\partial x_j}\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j. \quad (21)$$

$$m_y = \varphi(m) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}D_{x_i} + \sum_{i<j}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i\partial x_j}K_{ij}. \qquad (22)$$

Если $X_1, \ldots, X_n$ некрв-ы, то из (22) получим

$$m_y = \varphi(m) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}D_{x_i}. \qquad (23)$$

Чтобы получить дсп-ю, предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ некрв-ы и незв-мы,

$$D_y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)^2 D_{x_i} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}\right)^2\left(\mu_4(X_i) - D_{x_i}^2\right) +$$

$$+ \sum_{i<j}\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i\partial x_j}D_{x_i}D_{x_j} + \sum\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}\right)\mu_3(X_i). \qquad (24)$$

Если вел-ы $X_1, \ldots, X_n$ рсп-ны по норм. закону, то получим

$$D_y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi(m)}{\partial x_i}\right)^2 D_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i^2}\right)^2 D_{x_i}^2 + \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\varphi(m)}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 D_{x_i}D_{x_j}. \qquad (25)$$

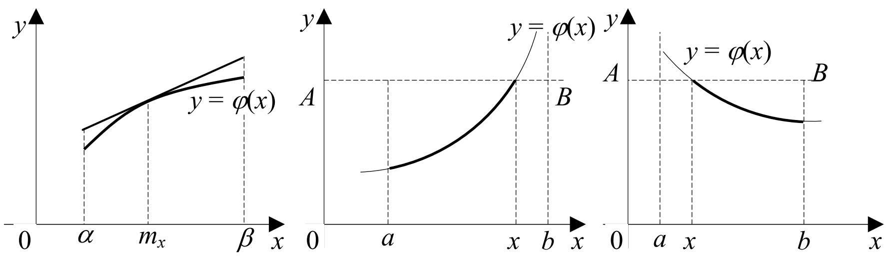


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

3°. Законы распределения функций случайных аргументов. Иногда надо знать не только числовые хркс-ки, но и рсп-ие. Пусть X – непр. слн. вел. с плотностью рсп-ия $f(x)$ и $y = \varphi(x)$. Найти $g(y)$ – плотность рсп-ия Y.

Способ решения задачи зв-т от поведения фк-и φ на участке $]a, b[$.

1) Пусть $y = \varphi(x)$ монотонна. Тогда если $y = \varphi(x)$ взр-я (рис. 2), то фк-я рсп-я равна

$$G(y) = P(Y > y) = P(a < X < x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^{\psi(y)} f(x)dx, \tag{26}$$

где обратная фк-я $x = \psi(y)$ найдена из $y = \varphi(x)$. Из (26) находим

$$g(y) = G'(y) = f[\psi(y)]\psi'(y). \tag{27}$$

Если $y = \varphi(x)$ уб-щая (рис. 3), то

$$G(y) = P(Y < y) = P(a < X < x) = \int_x^b f(x)dx = \int_{\psi(y)}^b f(x)dx = -\int_b^{\psi(y)} f(x)dx. \tag{28}$$

Из (28) находим

$$g(y) = \psi'(y) = -f[\psi(y)]\psi'(y). \tag{29}$$

Объединяя (27) и (29), получим

$$g(y) = f[\psi(y)]|\psi'(y)|. \tag{30}$$

п3. Пусть слн. вел. X подчинена норм. закону $f(x) = \dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ и $y = ax + b$, где a и b не слн. коэф-ы. Найти закон рсп-ия Y.

Р. Из $y = ax + b$ находим $x = \dfrac{y-b}{a}$. Тогда $\psi'(y) = \dfrac{1}{a}$ или $|\psi'(y)| = \dfrac{1}{|a|}$. По (30) имеем $g(y) = f[\psi(y)]|\psi'(y)| = \dfrac{1}{a\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}} = \dfrac{1}{|a|\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2|a|\sigma_x^2}}$.

Получили норм. закон рсп-ия с параметрами $m_y = am_x + b$, $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

2) Пусть фк-я $y = \varphi(x)$ не монотонна (рис. 4) на участке $]a, b[$. Тогда

$$G(y) = P(Y < y) = P[(X \subset \Delta_1(y)) + (X \subset \Delta_2(y)) + \ldots] = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f(x)dx, \tag{31}$$

где обратная фк. $x = \Delta_i(y)$ получена из $y = \varphi(x)$. Из (31) находим

$$g(y) = G'(y) = \sum_i f[\Delta_i(y)]\,|\Delta_i'(y)|. \tag{32}$$

4°. Закон распределения от многомерной случайной величины. Композиция распределения. Полученные выше результаты можно обобщить на ммр-ый сл-й. Пусть имеется дмр. слн-ая вел. (X, Y) с плотностью рсп-ия $f(x, y)$. Найти плотность рсп-ия $g(z)$ слн-й вел-ы $Z = \varphi(X, Y)$.

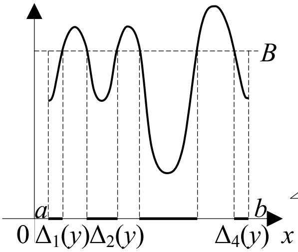
Фк-я $z = \varphi(x, y)$ изображается (изб.) как пвх-ть (рис. 5). Эту пвх-ть пересечем с пл. Q, параллельной (прл.) пл-ти xOy (на расстоянии z). В результате получим кривую K, спроектировав к-ую на пл. xOy, получим обл. D.

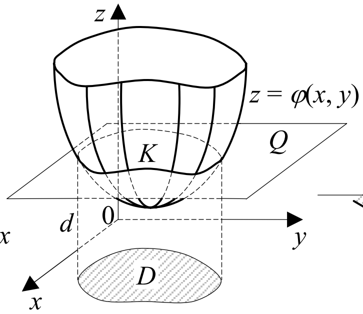
Отсюда можно найти фк-ю рсп-ия слн. вел-ы Z:

$$G(z) = P(Z < z) = P(\varphi(X, Y) < z) = P((X, Y) \subset D) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy\,, \qquad (33)$$

где D опр-ся из $Z = \varphi(X, Y)$. Из (33) находим плотность рсп-ия

$$g(z) = G'(z). \qquad (34)$$





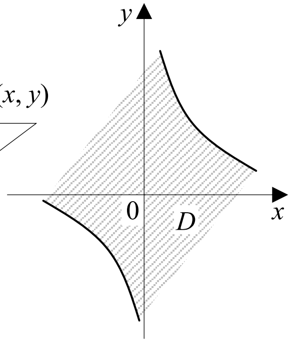


Рис. 4 Рис. 5 Рис. 6

На практике не обязательно строить пвх-ть $z = \varphi(x, y)$ и пересекать ее с пл-ю Q, дт-но лишь найти на пл. xOy кривую $z = \varphi(x, y)$ и опр-ть, по какую сторону этой кривой интв-ть по обл. D, для к-ой $Z < z$.

п4. Пусть система слн. вел-н (X, Y) имеет плотность рсп-ия $f(x, y)$ и $Z = XY$. Найти плотность рсп-ия Z.

Р. Зададимся нек-ым зн-ем z и на пл. xOy построим кривую $xy = z$ (рис. 6), откуда получим обл. D. Тогда $G(z) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x, y)dxdy\ +$

$+ \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)dxdy$. Отсюда, диф-уя по z, получим $g(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx\ +$

$+ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx$.

Рас-им частный сл. (композицию рсп-ия) фм-л (33) и (34). Пусть система (X, Y) имеет плотность рсп-ия $f(x, y)$. Рас-им их сумму $Z = X + Y$. Найти плотность рсп-ия $g(z)$.

Врж. (33) примет вид

$$G(z) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy\right\}dx\,. \qquad (35)$$

отсюда

$$g(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx\,. \qquad (36)$$

В силу симметричности задачи отс-но X и Y стн. (36) можно записать и в виде

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy \,. \tag{37}$$

Особое практическое зн. имеет сл-й, когда слн. вел-ы X и Y незв-мы. Тогда говорят о композиции законов рсп-ия.

Если слн. вел-ы X и Y незв-мы, то $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ и (36), (37) примут вид

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \,, \tag{38}$$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy \,, \tag{39}$$

Фм-ы (38), (39) удобны тогда, когда хотя бы один из законов $f_1(x)$, $f_2(y)$ заданы в обл. $]-\infty, \infty[$. Если же оба закона заданы на различных участках с различными ур-ми, то удобнее пользоваться фм-ми (35)-(37).

п5. Составить композицию норм-го закона $f_1(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ и закона равномерной плотности $f_2(y) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$ при $\alpha < y < \beta$.

Р. По (39) получим

$$g(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(z-y-m)^2}{2\sigma^2}}dy = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[y-(z-m)]^2}{2\sigma^2}}dy. \tag{40}$$

Подынт-ая фк. в (40) есть норм. закон с центром рассеивания $z-m$ и ср. кв. отк-ем σ. Тогда

$$g(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\Phi\left(\frac{\beta-(z-m)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-(z-m)}{\sigma}\right)\right].$$

5°. Функции от дискретных случайных величин, их распределения и числовые характеристики. Если слн. вел. X дискретна (дк.), то и фк-я от нее $y = \varphi(X)$ также дк-ая слн. вел-а.

п6. Слн. вел. X имеет ряд рсп-ия:

x_i	-1	1	2
p_i	0,5	0,4	0,1

. Найти ряд рсп-ия слн-х вел-н $Y = X^2$ и $Z = 10X + 2$.

Р. Ответ получим, составив сд. табл-у:

x_i	-1	1	2
$y_i = x_i^2$	1	1	4
p_i	0,5	0,4	0,1

. Рсп. для $Y = X^2$ можно писать и так:

y_i	1	4
p_i	0,9	0,1

,

z_i	-9	12	22
p_i	0,5	0,4	0,1

.

п7. Закон рсп-ия слн. вел-ы $U = (X, Y)$ приведен в табл. 1. Найти ряд рсп-ия слн. вел-ы $Z = X + Y$.

Р. Обз-им $P_k = P\{Z = z_k\}$, $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Ясно, что $p_k > 0$, если $z_k \in L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Выч-им, н-р, $p_4 = p(Z = 4)$. Слн. вел. $Z = 4$, когда слн. вектор U принимает одно из сд-их зн-й (1, 3), (2, 2), (3, 1). Тогда $p_4 = p_{22} + p_{31} = 0{,}05 + 0{,}15 + 0 = 0{,}2$. Аналогично выч-яем остальные p_k при $z_k \in L$. Результаты выч-й приведены в табл. 2.

Таблица 1

	j	1	2	3	4
i	x_i \ y_j	1	2	3	4
1	1	0,2	0,1	0,05	0,05
2	2	0	0,15	0,15	0,1
3	3	0	0	0,1	0,1

Таблица 2

z_k	2	3	4	5	6	7
p_k	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

3.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

3.1. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое многомерная (ммр.) слн. вел-а? Приведите примеры.
2. Как опр-ся фк. рсп-ия? Приведите ее св-ва и пример.
3. Как опр-ся плотность рсп-ия? В чем состоит ее механический и геом. смысл?
4. Как выч-ся вер-ть попадания точки (X, Y) в обл. D?
5. Приведите законы рсп-ия отдельных аргументов и условные законы их рсп-ия.
6. Приведите законы рсп-ия для дк-ых слн. вел-н.
7. Как выч-ся числовые хркс-ки системы слн. вел-н?
8. Приведите фм-ы мт-их ож-й и дсп-й системы слн. вел-н.
9. Что такое крцн-ый момент и коэф. крц-и.
10. Приведите норм. закон рсп-ия и ее коэф. крц-и, условные плотности рсп-ия.
11. Приведите фм-ы линии регрессии.
12. Приведите общие фм-ы законов рсп-ия и числовые хркс-ки ммр-й слн. вел-ы.

Задание для кр. работы: по образцу п1-п6 решить з1-з20.

1. Задано рсп-ие вер-ей дк. дмр-ой слн. вел-ы:

$y \backslash x$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы рсп-ия составляющих (сост.) X и Y.
О: суммируя вер-ти «по столбцам» и «по строкам», получим

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,30

Y	4	5
P	0,55	0,45

.

Проверка: 0,27 + 0,43 + 0,30 = 1; 0,55 + 0,45 = 1.

2. Задано рсп-ие вер-ей системы слн. вел-н:

$y \backslash x$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы рсп-ия слн. вел-н X и Y.

О:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	1,3	2,7
P	0,29	0,71

.

3. Задана интн. фк-я дмр-ой слн. вел. $F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \ x < 0, \ y < 0. \end{cases}$

Найти вер-ть попадания слн-ой точки (X, Y) в пуг-к, огр-ый пм-ми $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$.

О: из $P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$

получим $P = \left[\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} - \sin 0 \sin\dfrac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin 0 \sin\dfrac{\pi}{6}\right] = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}26.$

4. Найти вер-ть попадания слн-й точки (X, Y) в пуг-к, огр-ый пм-ми $x = 1$,

$x = 2, y = 3, y = 5$, если известна интн. фк-я $F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, \ x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, \ x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

О: $P = 3/128$.

5. Задана интн. фк-я дмр-ой слн. вел-ы $F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, \ x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, \ x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

Найти дифн. фк-ю системы и проверить полученный результат. О: из $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ = $= \ln 3 \cdot (3^{-x} - 3^{-x-y})$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}$ получим $f(x, y) = \begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}, \ x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, \ x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

Проверка: $\ln^2 3 \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} 3^{-x-y}\, dxdy = 1$.

6. Задана интн. фк. системы слн. вел-н (X, Y): $F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), \ x > 0, \ y > 0; \\ 0, \ x < 0, \ y < 0. \end{cases}$

Найти диф. фк-ю системы. О: $f(x, y) = \begin{cases} 8e^{-4x-2y}, \ x > 0, y > 0; \\ 0, \ x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

7. Задана дифн. фк-я системы слн. вел-н (X, Y): $f(x, y) = \dfrac{1}{(16 + x^2)(25 + y^2)}$.

Найти интн. фк-ю системы. О: из $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dxdy$ получим $F(x, y) =$ $= \left(\dfrac{1}{4\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{8}\right) \left(\dfrac{1}{5\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{5} + \dfrac{1}{10}\right)$.

8. Задана дифн. фк-я системы двух слн. вел-н $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \sin(x + y)$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$ и $f(x, y) = 0$ вне кв-а. Найти интн. фк-ю системы. О: $F(x, y) = \dfrac{1}{2}$ $[\sin x + \sin y - \sin(x + y)]$ в заданном кв-е и $F(x, y) = 0$ вне кв-а.

9. В круге $x^2 + y^2 = R^2$ дифн. фк-я $f(x, y) = C\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ и $f(x, y) = 0$ вне круга. Найти: 1) пст-ю C; 2) вер-ть попадания слн. точки (X, Y) в круг радиуса $r = 1$ с центром в начале крд-т, если $R = 2$. Р. Из $\iint\limits_D C\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy = 1$ $\Rightarrow C = 1 \Big/ \iint\limits_D C\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$. Перейдя к полярным крд-ам, получим $C =$ $= 1 \Big/ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} (R - \rho)\rho d\rho = 3/\pi R^3$, т.е. $C = \dfrac{3}{8\pi}$ при $R = 2$. Тогда $f(x, y) = \dfrac{3}{8\pi}\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Перейдя к полярным крд-ам, получим $P = \dfrac{3}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 (2-\rho)\rho d\rho = \dfrac{1}{2}$.

10. Задана дифн. фк-я $f(x, y) = C/(9 + x^2)(16 + y^2)$ системы двух слн. вел-н. Найти пст-ю C. О: $C = 2/\pi$.

11. В первом квадранте задана интн. фк-я системы двух слн. вел-н: $F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$ и $F(x, y) = 0$ вне первого квадранта. Найти: 1) дифн. фк-ю системы; 2) вер-ть попадания слн-ой точки (X, Y) в туг-к с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(2, 8)$. О: 1) $f(x, y) = \ln^2 2\cdot 2^{-x-y}$ в первом квадранте и $f(x, y) = 0$ вне квадранта; 2) $P = 5/3\cdot 2^{12}$.

12. Задана дк. дмр-я слн. вел-а:

y \ x	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0{,}8$	0,05	0,12	0,03

Найти: 1) безусловные законы рсп-ия сост-их; 2) условный закон рсп-ия сост-ей X при условии, что Y приняла зн-ие $y_1 = 0{,}4$; 3) условный закон рсп-ия Y при условии, что $X = x_2 = 5$. О: 1) сложив вер-ти «по столбцам» и «по строкам», найдем законы рсп-ия

X	2	5	8
P	0,20	0,42	0,38

и

Y	0,4	0,8
P	0,80	0,20

. 2) Найдем условные вер-ти возможных зн-й X при условии, что $Y = y_1 = 0{,}4$: $P(x_1/y_1) = \dfrac{P(x_1, y_1)}{P(y_1)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}80} = \dfrac{3}{16}$, $P(x_2/y_1) = \dfrac{P(x_2, y_1)}{P(y_1)} = \dfrac{0{,}30}{0{,}80} = \dfrac{3}{8}$, $P(x_3/y_1) = \dfrac{P(x_3, y_1)}{P(y_1)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}80} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow$

X	2	5	8
$P(X/Y_1)$	3/16	3/8	7/16

. Проверка: $3/16 + 3/8 + 7/16 = 1$.

3) Аналогично находим:

Y	0,4	0,8
$P(Y/X_2)$	5/7	2/7

.

13. Задана дк. дмр-я слн. вел-а (X, Y). Найти: 1) условный закон рсп-ия X при условии, что $Y = 10$; 2) условный закон рсп-ия Y при условии, что $X = 6$.

y \ x	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

О: 1)

Y	3	6
$P(X/10)$	5/7	2/7

;

2)

X	10	14	18
$P(Y/6)$	5/14	5/28	13/28

.

14. Задан дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}$. Найти: 1) диф-ые фк-и сост-их; 2) условные дифн. фк-и сост-их. О: 1) учитывая инт. Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, из $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}dy$ получим $f_1(x) = \dfrac{1}{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{10}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{5}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}y+\sqrt{\dfrac{2}{5}}x\right) = \sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}\, e^{-0{,}4x^2}$. Аналогично найдем дифн. фк-ю Y: $f_2(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^{-2y^2}$; 2) $f(x/y) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,5(x+y)^2}$, $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \dfrac{5}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,1(x+5y)^2}$.

15. Задана дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы (X, Y): $f(x, y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$. Найти: 1) пст-ю C; 2) дифн-ые фк-и сост-их; 3) условные дифн. фк-и сост-их. О: 1) $C = \sqrt{3}/\pi$; 2) $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-0,75x^2}$, $f_2(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-3y^2}$; 3) $f(x/y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2}$, $f(y/x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,25(x+4y)^2}$.

16. Дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы $f(x, y) = \cos x \cos y$ в кв-е $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$ и $f(x, y) = 0$ вне кв-а. Д-ть, что сост-ие X и Y незв-мы. Ук: убедиться, что $f(x/y) = f_1(x)$, $f(y/x) = f_2(y)$.

17. Непр. дмр-я слн. вел. (X, Y) равномерно рсп-на внутри прямоугольного туг-ка с вершинами $O(0, 0)$, $A(0, 8)$, $B(8, 0)$. Найти: 1) дифн. фк-ю системы; 2) дифн-ые и условные дифн. фк-и сост-их. О: 1) $f(x, y) = 1/32$; 2) $f_1(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32}x$ $(0 < x < 8)$, $f_2(y) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32}y$ $(0 < y < 8)$; $f(x/y) = \dfrac{1}{8-y}$ $(0 < y < 8)$, $f(y/x) = \dfrac{1}{8-x}$ $(0 < x < 8)$, вне указанных интервалов все фк-и равны нулю.

18. Задана дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы $f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

Найти: 1) мт. ож-ие сост-их X и Y; 2) дсп-и сост-их. О: 1) найдем $f_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = 4xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy = 2xe^{-x^2}$ $(x > 0)$. Аналогично $f_2(y) = 2ye^{-y^2}$ $(y > 0)$. Учитывая инт. Пуассона $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$ и инт-уя по частям, найдем $M(X) = \int_0^\infty xf_1(x)dx = \int_0^\infty x\left(2xe^{-x^2}\right)dx = \sqrt{\pi}/2$. Аналогично $M(Y) = \sqrt{\pi}/2$; 2) $D(X) = \int_0^\infty x^2 f_1(x)dx - [M(X)]^2 = \int_0^\infty x^2\left(2xe^{-x^2}\right)dx - \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$. Аналогично $D(Y) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

19. Задана дифн. фк-я системы (X, Y): $f(x, y) = \begin{cases} 36xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$.

Найти мт. ож-ия и дсп-и сост-их. О: $M(X) = M(Y) = \sqrt{3\pi}/6$; $D(X) = D(Y) = (4-\pi)/12$.

20. Задана дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы (X, Y): $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\sin(x + y)$ в кв-е $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$ и $f(x, y) = 0$ вне кв-а. Найти мт. ож-ия и дсп-и сост-их. О: $M(X) = M(Y) = \pi/4$; $D(X) = D(Y) = \left(\pi^2 + 8\pi - 32\right)/16$.

* * *

21. Задана дифн. фк-я непр. дмр-ой слн. вел-ы (X, Y): $f(x, y) = \dfrac{1}{4}\sin x \sin y$ в кв-е $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ и $f(x, y) = 0$ вне кв-а. Найти: 1) мт. ож-ия и дсп-и сост-их; 2) крцн-ый момент. О: 1) $M(X) = M(Y) = \pi/2$, $D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4$; 2) $\mu_{xy} = 0$.

22. Заданы дифн. фк-и незв-ых слн. вел-н (X, Y): $f_1(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ 5e^{-5x}, \ x > 0; \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} 0, \ y < 0; \\ 2e^{-2y}, \ y > 0. \end{cases}$ Найти: 1) дифн. фк-ю системы; 2) интн. фк-ю системы. Ук: если сост-ие системы незв-мы, то дифн-я и интн-я фк-и системы равны ств-но пзв-ю дифн-ых и интн-ых фк-й сост-их. О: 1) $f(x, y) =$ $= \begin{cases} 0, \ x < 0 \text{ или } y < 0, \\ 10e^{-(5x+2y)}, \ x > 0, \ y > 0; \end{cases}$ 2) $F(x, y) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \ y < 0, \\ \left(1 - e^{-5x}\right)\left(1 - e^{-2y}\right), \ x > 0 \text{ или } y > 0. \end{cases}$

23. Непр. дмр-я слн. вел. (X, Y) рсп-на равномерно в круге радиуса r с центром в начале крд-т. Д-ть, что X и Y зв-мы, но некрв-ны. Ук: сравнить безусловные и условные дифн. фк-и сост-их; убедиться, что крцн-ый момент равен нулю. О: $f_1(x) = \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2}$, $f\left(x/y\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}$; $f_2(y) = \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2}$, $f\left(y/x\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$.

24. Д-ть, что если X и Y связаны лин-ой зв-ю $Y = aX + b$, то абс. вел-а коэф-а крц-и равна ед-е. Р. По опр-ю, $r_{xy} = \mu_{xy}/\sigma_x\sigma_y$, где $\mu_{xy} = M\{[X - M(X)]\times$ $\times[Y - M(Y)]\}$. Найдем $M(Y) = M[aX + b] = aM(X) + b$, тогда $\mu_{xy} = aM[X - M(X)]^2 =$ $= aD(X) = a\sigma_x^2$. Учитывая, что $Y - M(Y) = (aX + b) - (aM(X) + b) = a[X -$ $- M(X)]$, найдем $D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2M[X - M(X)]^2 = a^2\sigma_x^2$. Отсюда $\sigma_y =$ $= |a|\sigma_x$, сл-но, $r_{xy} = \mu_{xy}/\sigma_x\sigma_y = \dfrac{a\sigma_x^2}{\sigma_x\left(|a|\sigma_x\right)} = \dfrac{a}{|a|}$. Если $a > 0$, то $r_{xy} = 1$; если $a < 0$, то $r_{xy} = -1$. Итак, $|r_{xy}| = 1$, что и требовалось д-ть.

3.2. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях целесообразно использовать фк-и от слн. вел-н?
2. Приведите фм-ы опр-ия числовых хркс-к фк-й слн-ых вел-н, когда известен закон рсп-ия системы аргументов.
3. Как опр-ся числовые хркс-ки фк-й слн-ых вел-н, когда неизвестен закон рсп-ия системы аргументов, а известны лишь их числовые хркс-ки?

4. Как осуществляется линеаризация фк-й и находятся их числовые хркс-ки?

5. Как опр-ся законы рсп-ия фк-й слн-ых аргументов?

6. Как опр-ся закон рсп-ия от ммр-ой слн-й вел-ы?

7. Как опр-ся рсп-ия и числовые хркс. фк-и дк-ых слн-й вел-н?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п7 решить з1-з20.

1. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия $\begin{array}{c|c|c|c} X & 1 & 3 & 5 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{array}$. Найти закон рсп-ия слн-й вел-ы $Y = 3X$. О: $\begin{array}{c|c|c|c} Y & 3 & 9 & 15 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{array}$.

2. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -1 & -2 & 1 & 2 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$. Найти закон рсп-ия слн-й вел-ы $Y = X^2 + 1$. О: $\begin{array}{c|c|c} Y & 2 & 5 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$.

3. Дк. слн. вел. X задана законом рсп-ия $\begin{array}{c|c|c|c} X & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{array}$. Найти закон рсп-ия слн-й вел-ы $Y = \sin X$. О: $\begin{array}{c|c|c} Y & \sqrt{2}/2 & 1 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$.

4. Задана дифн. фк-я $f(x)$ слн. вел-ы X в интервале $]a, b[$. Найти дифн. фк-ю слн. вел-ы $Y = 3X$. О: $g(y) = \dfrac{1}{3} f\left(\dfrac{Y}{3}\right)$, $3a < y < 3b$. Ук: т.к. $y = 3x$ взр-ет, то $g(y) = f[\varphi(y)]\varphi'(y)$, где $\varphi(y) = x = y/3$, тогда $\varphi' = (y/3)' = 1/3$.

5. Задана дифн. фк-я $f(x)$ слн. вел-ы X в интервале $]a, b[$. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы Y, если: 1) $Y = -3X$; 2) $Y = AX + B$. О: 1) $g(y) = \dfrac{1}{3} f\left(-\dfrac{Y}{3}\right)$, $-3b < y < 3a$; 2) $g(y) = \dfrac{1}{|A|} f\left(\dfrac{Y-B}{A}\right)$, $\begin{array}{l} Aa + B < y < Ab + B, \text{ если } A > 0, \\ Ab + B < y < Aa + B, \text{ если } A < 0. \end{array}$

6. Слн. вел. X рсп-на по закону Коши $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти дифн. фк-ю слн. вел. $Y = X^3 + 2$. О: $g(y) = \dfrac{1}{2\pi\left[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}\right]}$.

7. Задана дифн. фк-я $f(x)$ слн. вел-ы X в интервале $]-\infty, \infty[$. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы Y, если: 1) $Y = X^2$; 2) $Y = e^{-X^2}$; 3) $Y = |X|$; 4) $Y = \operatorname{arctg} X$; 5) $Y = \dfrac{1}{1+X^2}$. О: 1) $g(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right]$, $0 < y < \infty$; 2) $g(y) = $

$$= \frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}} \left[f\left(\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right) + f\left(-\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right) \right],$$ $0 < y < 1$; 3) $g(y) = f(y) + f(-y)$, $0 < y < \infty$;

4) $g(y) = \dfrac{1}{\cos^2 y} f(\mathrm{tg}y)$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$; 5) $g(y) = \dfrac{1}{2y^2\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}} \left[f\left(\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}\right) + \right.$

$\left. + f\left(-\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}\right)\right]$, $0 < y < \infty$.

8. По условию з7 найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы Y, если $Y = \cos X$. О: $g(y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{k=\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} [f(2\pi k + \arccos y) + f(2\pi k - \arccos y)]$, $-1 < y < 1$.

9. Слн. вел. X рсп-на в интервале $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел. $Y = \sin X$. О: $g(y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $-1 < y < 1$. Ук: $f(y) = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\pi}$, т.к. слн. вел. X рсп-на равномерно в интервале $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $x = \varphi(y) = \arcsin y$, $\varphi'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, тогда $g(y) = f[\varphi(y)]\varphi'(y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$. Проверка: $\int\limits_{-1}^{1} g(y)dy =$

$= \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{\pi}{2}\arcsin y\Big|_0^1 = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = 1.$

10. Слн. вел. X рсп-на равномерно в интервале $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы $Y = \sin X$. О: $g(y) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ в интервале $]0, 1[$ и $g(y) = 0$ вне этого интервала.

11. Задана дифн. фк-я $f(x) = \dfrac{1}{\pi}$ слн. вел. X в интервале $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы $Y = \sin X$. О: $g(y) =$ $= \dfrac{2}{\pi(1+y^2)}$, $-\infty < y < \infty$.

12. Задана дифн. фк-я $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < y < \infty$, норм. рсп-й слн. вел-ы X. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы $Y = X^2$. О: $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi Y}} e^{-Y^2/2}$, $0 < y < \infty$, вне этого интервала $g(y) = 0$. Ук: $g(y) = f[\varphi_1(y)]|\varphi'(y)| + f[\varphi_2(y)]|\varphi'(y)|$,

т.к. $y = x^2$ не монотонна в $-\infty < x < \infty$, поэтому $\varphi_1(y) = -\sqrt{y}$ в $]-\infty, 0[$ и $\varphi_2(y) = \sqrt{y}$ в $]0, \infty[$. $\varphi_1'(y) = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $\varphi_2'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ $\Rightarrow |\varphi_1'(y)| = |\varphi_2'(y)| = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

$f[\varphi_1(y)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y/2}$, $f[\varphi_2(y)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y/2}$, т.е. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi Y}} e^{-Y/2}$ в $0 < y < \infty$, т.к. $y = x^2$, причем $-\infty < x < \infty$, то $0 < y < \infty$ и $g(y) = 0$ вне этого интервала. Проверим, используя инт. Пуассона: $\int\limits_0^\infty g(y)dy = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} dy =$

$$= \begin{vmatrix} y/2 = t^2 \\ y = 2t^2 \\ dy = 4 + dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}t} e^{-t^2} \cdot 4tdt = \frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot 2} \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

13. Задана дифн. фк-я $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ норм. рсп-ой слн. вел. X. Найти дифн. фк-ю $g(y)$ слн. вел-ы $Y = \dfrac{1}{2}X^2$. О: $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}$ в $]0, \infty[$, вне его $g(y) = 0$.

14. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$ в интервале $]0, \pi[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти мт. ож-ие слн. вел-ы $Y = \psi(X) = X^2$, опр-ив предварительно дифн. фк-ю $g(y)$ вел-ы Y.

Р. Находим $g(y) = f[\varphi(y)]|\varphi'(y)|$, где $\varphi(y) = x = \sqrt{y}$, $\varphi'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. Тогда $g(y) = \dfrac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}$. Т.к. $y = x^2$, $0 < x < \pi$, то $0 \le Y \le \pi^2$, откуда $M(Y) = \int\limits_0^{\pi^2} yg(y)dy =$

$$= \frac{1}{y}\int\limits_0^{\pi^2} \frac{y\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy = \begin{vmatrix} y = t^2 \\ dy = 2tdt \\ y = 0, t = 0 \\ y = \pi^2, t = \pi \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi^2} t^2 \sin tdt.$$

Инт-уя дважды по частям, имеем $M(Y) = \dfrac{\pi^2 - 4}{2}$. Заметим, что гораздо быстрее ведет к цели фм-а $M(Y) = M(X^2) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin xdx = \dfrac{\pi^2 - 4}{2}$. Это же замечание относится и к з15.

15. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = \cos x$ в интервале $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти мт. ож-ие фк-и $Y = X^2$. О: $M(Y) = (\pi^2 - 8)/4$.

16. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ в интервале $(0, \pi)$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю фк-и $Y = X^2$, используя дифн. фк-ю $g(y)$. О: $D(Y) = D(X^2) = (\pi^4 - 16\pi^2 + 80)/4$. Ук: воспользоваться фм-ой $D(Y) = D(X^2) =$ $= \int_a^b y^2 g(y)dy - [M(Y)]^2$. Подставляя $g(y) = \sin\sqrt{y}/4\sqrt{y}$, $M(Y) = (\pi^2 - 4)/2$ (см. з14) и учитывая $0 < y < \pi^2$, получим $D(Y) = \int_0^{\pi^2} y\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}dy - \left[\frac{\pi^2 - 4}{2}\right]^2$. Инт-уя подстановкой $y = t^2$, а затем четырежды по частям, получим $\frac{1}{4}\int_0^{\pi^2} y\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}dy =$ $= \frac{\pi^4}{2} - 6\pi^2 + 2y$, откуда следует ответ.

17. Слн. вел. X задана дифн. фк-ей $f(x) = \cos x$ в интервале $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти дсп-ю фк-и $Y = X^2$. О: $D(Y) = \int_0^{\pi^2/4} y^2 g(y)dy - [M(Y)]^2 =$ $= 20 - 2\pi^2$ (см. з15).

18. Дк. незв. слн. вел-ы X и Y заданы рсп-ми:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

. Найти рсп-ие слн. вел-ы $Z = X + Y$. О:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

. Ук: в силу незв-ти X и Y имеем $P(Z = z_1 = 1 + 2 = 3) = 0{,}3\cdot0{,}6 = 0{,}18$, $P(Z = z_2 = 1 + 4 = 5) = 0{,}3\cdot0{,}4 =$ $= 0{,}12$, $P(Z = z_3 = 3 + 2 = 5) = 0{,}7\cdot0{,}6 = 0{,}42$, $P(Z = z_4 = 3 + 4 = 7) = 0{,}7\cdot0{,}4 =$ $= 0{,}28$. Сложив предварительно вер-ти несовместных сб-й $Z = z_2 = 5$, $Z = z_3 =$ $= 5$ $(0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54)$, получим рсп-ие $Z = X + Y$. Проверка: $0{,}18 + 0{,}54 + 0{,}28 = 1$.

19. Дк. слн. вел-ы X и Y заданы рсп-ми:

1)

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

,

Y	1	2
P	0,2	0,8

; 2)

X	4	10
P	0,7	0,3

,

Y	1	7
P	0,8	0,2

. Найти рсп-ие слн. вел-ы $Z = X + Y$. О: 1)

Z	11	12	13	14	17	18
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

;

2)

Z	5	11	17
P	0,56	0,38	0,06

.

20. Незв. слн. вел-ы X и Y заданы дифн. фк-ми: $f_1(x) = e^{-x}$ $(0 \le x < \infty)$, $f_2(y) =$ $= e^{-y/2}$ $(0 \le y < \infty)$. Найти дифн. фк-ю слн. вел-ы $Z = X + Y$. О: $f(z) = e^{-z/2}(1 - e^{-z/2})$ в $0 \le z < \infty$ и $f(z) = 0$ вне этого интервала. Ук: т.к. аргументы неотц-ны, то применима фм. $f(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z - x)dx = \int_0^z e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{-(z-x)/2}\right]dx = \frac{1}{2}e^{-z/2}\int_0^z e^{-x/2}dx =$ $= \frac{1}{2}e^{-z/2}(-2)e^{-z/2}\Big|_0^z = -e^{-z/2}(e^{-z/2} - 1) = e^{-z/2}(1 - e^{-z/2})$.

21. Незв. слн. вел-ы X и Y заданы дифн. фк-ми: $f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x/2}$ $(0 \le x < \infty)$, $f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-y/2}$ $(0 \le y < \infty)$. Найти дифн. фк-ю слн. вел-ы $Z = X + Y$. О: $f(z) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z/5}\left(1 - e^{-2z/15}\right) \text{ при } z \ge 0, \\ 0 \text{ при } z < 0. \end{cases}$$

22. Задано рсп-ие вер-ей дк. дмр-ой слн. вел-ы:

$y \backslash x$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы рсп-ия сост-их.

О:

X	3	10	12
P	0,97	0,43	0,30

Y	4	5
P	0,55	0,45

.

Ук: сложив вер-ти по столбцам, получим для X: $P(3) = 0{,}27$; $P(10) = 0{,}43$; $P(12) = 0{,}30$. Аналогично для Y по строкам.

23. Задано рсп-ие вер-ей дк. дмр-ой слн. вел-ы:

$y \backslash x$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы рсп-ия сост-их.

О:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	1,3	2,7
P	0,29	0,71

.

24. Найти вер-ть попадания слн. точки (X, Y) в пуг-к, огр-ый пм-ми: $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$, если известна интн. фк-я $F(X, Y) =$

$$= \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \\ 0, \; x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$ О: 3/128.

25. Задана интн. фк-я дмр-ой слн. вел-ы $F(X, Y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-4x}\right)\left(1 - e^{-2y}\right), \; x > 0, \; y > 0; \\ 0, \; x < 0, \; y < 0. \end{cases}$

Найти дифн. фк-ю системы. О: $f(x, y) = 8e^{-4x-2y}$ при $x > 0$, $y > 0$; $f(x, y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Только математика учит тому, как добывать истину из ее единственного источника – из действительности.

К.А. Тимирязев

ЛЕКЦИЯ 10

4.1. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ

1°. Основные задачи математической статистики. Мт. статистика (стс.) изучает методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений (нбл.) массовых слн-х явлений с целью выяснения существующих (сущ.) закономерностей и построить теоретико-вероятностную мд. изучаемого явления. Центральным понятием мт-ой стс-ки яв-ся выборка (вбр.).

Отсюда вытекают основные задачи мт-ой стс-ки:

1) выяснение, какие черты слн. вел-ы яв-ся сущ-ыми, а какие – не сущ-ыми (связанными с огр-ым кол-ом опытных данных);

2) проверка правдоподобия гипотез. Данная задача связана с предыдущей. Н-р, могут ставиться такие задачи: согласуются ли результаты опыта с гипотезой (гп.) о том, что данная слн. вел. подчинена закону $F(x)$; указывает ли нбл-ная в опыте тенденция к зависимости (звт.) между двумя слн. вел-ми на наличие объективной звт-и между ними или же она объясняется слн. причинами, связанными с недт-ым объемом нбл-й и т.д.;

3) задача опр-ия неизвестных параметров рсп-ия. Здесь возникает нх-ть опр-ия точности и надежности опр-ых параметров.

Кроме основных, мт. стс-ка решает и ряд практических задач, связанных с анализом и контролем (кр.) точности, последовательным (посл.) анализом, теорией информации (инф.), массового обслуживания (обс.), слн-ых процессов и т.д.

Основные задачи мт-ой стс-ки и связь мт-ой стс-ки с теорией вер-ти см. также во введении.

2°. Основные понятия выборочного метода. Пусть требуется изучить совокупность (свк.) однородных (одн.) объектов отс-но нек-го качественного (качн.) или кол-го признака, хркз-го эти объекты. Н-р, если имеется партия деталей, то качн-м признаком может служить стандартность (стдн.) детали, а кол-ым – контролируемый (крум.) размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование объектов отс-но признака, к-ым интересуются. На практике это не всегда возможно из-за большого кол-ва объекта или разрушения объекта в результате обследования (н-р, при проверке рыбной консервной банки). В таких сл-ях из свк-ти сл-но отбирают огр-ое число объектов и изучают их с целью вывода закономерности всей свк-ти.

Выборочной (вбрч.) свк-ю, или просто вбр-ой, наз. свк-ть сл-но отобранных объектов.

Генеральной (гнр.) свк-ю наз. свк-ть объектов, из к-ых производится вбр-а.

Объемом свк-ти (вбрч-ой или гнр-ой) наз. число объектов свк-ти. Н-р, если из 1000 деталей сл-но отобрано для обследования 100 деталей, то объем гнр-ой свк-ти $N = 1000$, а объем вбр-и $n = 100$.

Вбр-и подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной наз-ют вбр-у, при к-ой отобранный объект (перед отбором сд-го) возвращается в гнр-ую свк-ть.

Бесповторной наз-ют вбр-у, при к-ой отобранный объект в гнр-ю свк-ть не возвращается. На практике обычно пользуются бесповторным слн-ым отбором.

Если объем гнр-ой свк-ти дт-но велик, то различие между повторной и бесповторной вбр-ми стирается.

Чтобы правильно судить о гнр-ой свк-ти по данным вбр-и, предъявляется требование: вбр-а должна быть репрезентативной (представительной). В силу закона больших чисел можно утв-ть, что вбр-а будет репрезентативной, если все объекты вбр-и из гнр-ой свк-ти отобраны сл-но, т.е. все объекты имеют одинаковую вер-ть попасть в вбр-у.

На практике применяются два способа отбора:

1*. Отбор, не требующий расчленения гнр-ой свк-ти на части. Сюда относятся:

а) простой слн. повторный отбор. Его можно осуществить различными способами. Н-р, для извлечения n объектов из гнр-ой свк-ти объема N поступают так: выписывают номера $1 \div N$ на карточках, перемешивают, наугад вынимают одну карточку и объект, имеющий такой же номер, подвергают обследованию; затем карточка (объект) возвращается в пачку (в гнр. свк-ть) и процесс повторяется n раз;

б) простой слн-ый бесповторный отбор. Происходит как описано в а), но без возврата карточки в пачку.

При большом объеме гнр-ой свк-ти (их объекты все равно пронумерованы) пользуются слн-ой вбр-ой из готовых таблиц «случайных чисел». При появлении одинаковых чисел из табл-ы надо взять только одно из них.

2*. Отбор, при к-ом гнр-ая свк-ть разбивается на части. Сюда относятся:

а) типичный отбор. Объекты отбираются не из всей гнр-ой свк-ти, а из каждой ее «типической» части. Н-р, если детали изготавливают на нескольких станках, то отбор производят из продукции каждого станка в отдельности;

б) механический отбор. При этом гнр-ая свк-ть «механически» делится на столько групп, сколько объектов должно войти в вбр-у, и из каждой группы отбирается один объект;

в) серийный отбор. Здесь объекты отбирают из гнр-ой свк-ти не по одному, а «сериями», к-ые подвергаются сплошному обследованию.

На практике применяется и комбинированный отбор, при к-ом сочетаются указанные способы.

3°. Выборочные распределения. Полигон и гистограмма. Пусть из гнр-ой свк-сти X извлечена вбр-а, причем x_1 нбл-ось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …. x_k – n_k раз и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем вбр-и.

Наблюдаемые (нблм.) значения (зн.) x_i наз. вариантами (врт.), а посл-ть врт-ов, записанных в возрастающем (взр.) порядке, – вариационным (варцн.) рядом.

Числа нбл-й n_i наз-ют частотами, а их отн-ия к объему вбр-и $\frac{n_i}{n} = p_i^*$ – отс-ми частотами, где $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. Иногда p_i^* наз-ют плотностью.

Статистическим (стсч.) рсп-ем вбр-и наз. перечень врт-ов и ств-их им частот или отс-ых частот (табл. 1). Стсч-ю вбр-у можно построить на графике (грф.) Причем ломаная из $\{x_i, n_i\}$ наз. полигоном частот, а $\{x_i, p_i^*\}$ – полигоном отс-ых частот (рис. 1).

Стсч-ое рсп-ие можно задать также в виде посл-ти интервалов J_i и ств-их им частот (табл. 2). Причем число интервалов J_i должно быть не слишком большим (рсп-ие не выразительно) и слишком малым (описание грубо), практически 10÷20 считается нормальным. Обычно длины интервалов берут одинаковыми, а иногда разной длины: в наибольшей (нб.) плотности интервалы берут узкими, чем в области малой плотности.

Таблица 1

x_i	2	4	6
n_i	3	10	7
p_i^*	0,15	0,50	0,35

Таблица 2

J_i	– 4; – 3	– 3; – 2	– 2; – 1	– 1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
n_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Длину интервалов обз-им через h и вел-у n_i/h_i назовем плотностью частоты, а p_i^*/h_i – плотностью отс-ой частоты. Они приведены в табл. 3 при $h =$ $= 5 = \text{const}$. Их можно построить на грф-е. При этом ломаная из $\{J_i, n_i/h_i\}$ наз. гистограммой частот (рис. 2), а $\{J_i, p_i^*/h_i\}$ – гистограммой отс-ых частот.

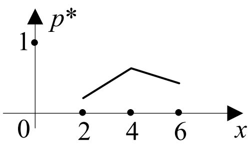


Рис. 1

Таблица 3

J_i, $h = 5$	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	4	6	16	36	24	10	4
p_i^*	0,04	0,06	0,16	0,36	0,24	0,10	0,04
n_i/h_i	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2,0	0,8
p_i^*/h_i	0,008	0,012	0,032	0,072	0,048	0,020	0,080

Эмпирической (статистической) фк-ей рсп-ия (или фк-ей рсп-ия вбр-и) наз-ют фк-ю $F^*(x)$, опр-щую для каждого зн-я x отс-ю частоту сб-ия $X < x$, т.е.

$$F^*(x) = P^*(X < x) = \frac{n_x}{n}, \tag{1}$$

где n_x – число врт-ов, меньшее x, n – объем вбр-и.

В отличие от $F^*(x)$, интн. фк-ию $F(x) = P(X < x)$ рсп-ия гнр-ой свк-ти наз-ют теоретической (теор.) фк-ей рсп-ия. Причем в силу сл1 (теорема Бернулли) из 1°:2.4 $F^*(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$. И $F^*(x)$ обладает теми же св-ми, как и $F(x)$ (см. 2°:2.1).

Очевидно, что $F^*(x_1) = 0$, $F^*(x_2) = p_1^*$, $F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*$, …, $F^*(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. Соединяя точки $\{x_i, F^*(x_i)\}$ плавной кривой (гистограммой), получим прж-ый грф-к эмпирической (эмп.) фк-и рсп-ия.

п1. Произведено 500 измерений. Результаты измерений сведены в стсч-й ряд (табл. 2). Построить грф. фк-и рсп-ия.

Р. Находим $F^*(-4) = 0$, $F^*(-3) = 0{,}012$, $F^*(-2) = 0{,}012 + 0{,}050 = 0{,}062$, $F^*(-1) = 0{,}062 + 0{,}144 = 0{,}206$, $F^*(0) = 0{,}472$, $F^*(1) = 0{,}712$, $F^*(2) = 0{,}888$, $F^*(3) = 0{,}980$, $F^*(4) = 1{,}000$. Грф. см. на рис. 3.

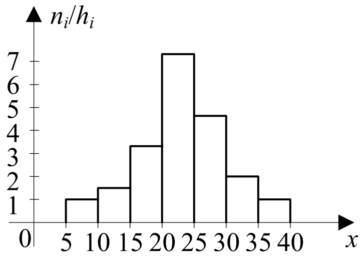


Рис. 2

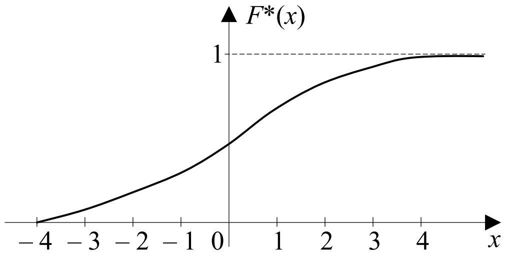


Рис. 3

4°. Выравнивание статистических рядов. Во всяком стсч-ом (вбрч-ом) рсп-и неизбежно присутствуют эл-ы слн-ти, связанные с огр-ем кол-ва нбл-й. Нам нх-мо подобрать теор-ю кривую рсп-ия, выражающую (врж.) лишь сущ-ые черты стсч-го материала, но не слн-ти, связанные с огр-ем кол-ва опытов. Такая задача наз. задачей выравнивания (сглаживания) стсч-их рядов.

Эта задача неопр-ая, и ее решение зависит от того, что условиться считать «наилучшим». Н-р, при сглаживании эмп-их зв-ей часто применяется метод наименьших (нм.) квадратов (кв.) (см. §9.3), где наилучшим прж-ем считается то, что сумма кв-ов отк-й обращается в min. При этом вопрос о том, в каком именно классе фк-й следует искать наилучшее прж-ие, решается уже не из мт-их соображений, а из соображений, связанных с физикой решаемой задачи, с учетом хрк-ра полученной эмп. кривой и степени (ст.) точности произведенных нбл-й.

Часто принципиальный хрк. фк-и, врж-ей исследуемую (исслм.) зв-ть, известен заранее из теории, из опыта требуется лишь получить нек-ые численные параметры, входящие в выражение (врж.) фк-и. Именно эти параметры подбираются с помощью метода нм-их кв-ов.

Эти рассуждения относятся и к задаче выравнивания стсч-их рядов. Н-р, предположим, что исслм-я слн. вел. X есть ошибка измерения, возникающая в результате суммирования (сумв.) воздействий мн-ва незв-ых элр-ых ошибок. Тогда из теор-их соображений можно считать, что X подчинена норм. закону

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

и задача выравнивания переходит в задачу о рациональном выборе параметров m и σ. При этом фк-я $f(x)$ должна обладать св-ми: $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Параметры m и σ подбираются так, чтобы они совпали с стсч-ми моментами m^* и σ^*. Если фк. $f(x)$ зв-т от трех параметров, то нх-мо, чтобы совпали три момента.

п2. Произведено 500 измерений с результатами ряда из табл. 4. Требуется выровнять это рсп-ие с помощью норм-го закона.

Таблица 4

$J_i = x$	$-4; -3$	$-3; -2$	$-2; -1$	$-1; 0$	$0; 1$	$1; 2$	$2; 3$	$3; 4$
n_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020
$f(x)$	0,004	0,025	0,090	0,199	0,274	0,234	0,124	0,041

Здесь $f(x)$ выч-ны в левых концах интервала; выч-им также $f(4) = 0{,}008$.

Р. Находим $m^* = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i\, p_i^* = -3{,}5\cdot 0{,}012 - 2{,}5\cdot 0{,}050 - 1{,}5\cdot 0{,}144 - 0{,}5\cdot 0{,}266$ $+ 0{,}5\cdot 0{,}240 + 1{,}5\cdot 0{,}176 + 2{,}5\cdot 0{,}092 +$ $+ 3{,}5\cdot 0{,}020 = 0{,}168$, $\alpha_2^* = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i^2\, p_i^* =$ $= 2{,}126$. Тогда $D^* = \alpha_2^* - m^{*2} = 2{,}126 -$ $- 0{,}028 = 2{,}098$. Выбираем $m = m^* =$ $= 0{,}168$, $\sigma^2 = D^* = 2{,}098$ или $\sigma = 1{,}448$. Отсюда $f(x) = \frac{1}{1{,}448\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-0{,}168)^2}{2\cdot 1{,}448^2}}$.

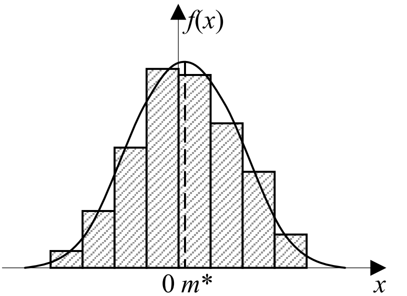


Рис. 4

На рис. 4 построена гистограмма и выравнивающая кривая.

Отметим, что более подробно о выч-ях стсч-их моментов и их оценках изложены в дальнейшем.

Кроме того, после выравнивания стсч-го рсп-ия с теор-ой кривой $f(x)$ может возникать вопрос: расхождение между ними вызвано слн-м обстоятельством, связанным с огр-ем числа опытов, или причина яв-ся сущ-ой, т.е. кривая плохо выравнивает стсч-ое рсп-е. Ответом служит «критерий согласия», рас-ный в 5°,7°:5.2.

5°. Интеграл Пуассона. Гамма-функция. Гамма-распределение. С помощью полярных крд-т выч-им так наз-ый инт. Пуассона:

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \,. \tag{3}$$

Т.к. опрн-ый инт. не зв-т от обз-ия пер-ой инт-ия, то вместо (3) можно взять

$$J = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \,. \tag{4}$$

Перемножая фм-ы (3) и (4) и расв-ая их как двойной инт., будем иметь

$$J^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \;=\; \int\int_s e^{-\left(x^2+y^2\right)} ds \,. \tag{5}$$

Переходя к полярным крд. ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $ds = rd\varphi dr$, рис. 5), получим

$$J^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-r^2} rd\varphi dr \;=\; \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr \;=\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]\Big|_0^{\infty} \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{\pi}{4}\,.$$

Отсюда, учитывая плж-ть числа J, находим

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{6}$$

В силу четности фк-и $y = e^{-x^2}$ имеем также

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \;=\; \sqrt{\pi} \;\text{ и }\; J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,. \tag{7}$$

Гамма-функция Γ опр-ся как инт-л

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}e^{-x} dx\,,\ \lambda > 0. \tag{8}$$

Инт-уя по частям, из (8) получим $\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}e^{-x} dx \;=$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^{\lambda-1},\ dv = e^{-x}dx \\ du = (\lambda-1)x^{\lambda-2}dx,\ v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -\,x^{\lambda-1}e^{-x}\Big|_0^{\infty} \;+ (\lambda-1)\int_0^{\infty} x^{\lambda-2}e^{-x}dx \;= (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1).$$

Откуда следует, что если λ – плж. целое число, то

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)! \text{ или } \Gamma(n+1) = n!\ (n = 0, 1, \ldots) \text{ при } \lambda = n+1. \tag{9}$$

Если $\lambda > 0$, но не яв-ся целым числом, то

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)\,\ldots\,\delta\Gamma(\delta), \tag{10}$$

где $0 < \delta < 1$. В част., $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Дсв-но, из (10) и (6) получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx \;=\; \int_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{x}\right)^2} d\sqrt{x} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Сравнивая фм-ы (9) и (10) из 3°:1.2, получим

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} = f(n), \qquad (11)$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{f(n)} = 1$, н-р, для 1!, 2!, 5! получим 0,9221; 1,919; 118,019 с отн. ошибками 8%, 4%, 2%. А для 10! = 3628800 отн. ошибка равна 0,8%.

Обобщением показательного рсп-ия (см. 4°:2.3) яв-ся гамма-рсп. с плотностью

$$P(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x} \text{ при } x > 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Параметры λ и α могут быть любыми плж. числами. Пст. C опр-ся из $\int\limits_0^\infty Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx = 1$. Учитывая (8) и полагая $\alpha x = z$ $\left(x = \dfrac{z}{\alpha},\ dx = \dfrac{dz}{\alpha}\right)$, имеем $\int\limits_0^\infty Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx = \int\limits_0^\infty C\dfrac{z^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda-1}}e^{-z}\dfrac{dz}{\alpha} = \dfrac{C}{\alpha^\lambda}\int\limits_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z}dz = \dfrac{C}{\alpha^\lambda}\Gamma(\lambda) = 1$, тогда $C = \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}$. Сд-но

$$P(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} \text{ при } x > 0. \end{cases} \qquad (13)$$

На рис. 6 показан вид кривых рсп-ия вер-ей при $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$ (при $\lambda = 1$ см. рис. 8 из 4°:2.3, где вместо α взято λ).

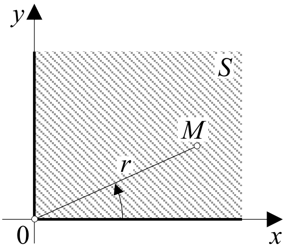


Рис. 5

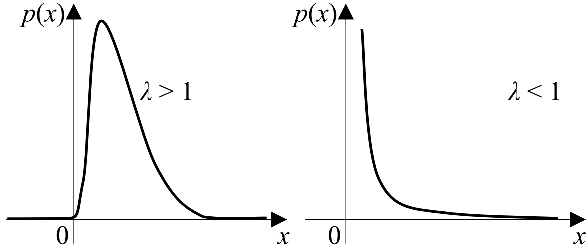


Рис. 6

6°. Распределения (Пирсона, Стьюдента, Фишера), связанные с нормальным распределением. Фк-я плотности норм-го рсп-ия $f(x)$ с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$ наз. плотностью стдн-ой норм-ой слн. вел-ы, а ее график – стдн. кривой Гаусса (рис. 7). Тогда плотность рсп-ия $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = N(0, 1)$, зн-ия к-ой приведены в табл. T_1. Отсюда получим фк-ю Лапласа $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ и ее зн-я приведены в табл. T_{11}. Кратко опишем рсп-ия, связанные с норм-ым, к-ые используются в мт-ой стс-ке:

1*. Распределение Пирсона (хи-квадрат). Пусть незв. слн. вел-ы X_1, X_2, …, X_k яв-ся стдн-ми норм-но рсп-ми вел-ми, т.е. $X_i \sim N(0, 1)$, $i = \overline{1, k}$. Рсп-ие слн-й вел-ы

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^{k} X_i \left(Z_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \right) \tag{14}$$

наз. рсп-ем хи-квадрат (или рсп-ем Пирсона) с k степенями (ст.) свободы. Число k яв-ся параметром $\chi^2(k)$ – рсп-ия, подобно параметрам m, σ норм-го рсп-ия. Грф-и фк-и $\chi^2(k)$ – кривые Пирсона – при k = 1, 2, 6 изображены на рис. 8. Рсп-ие χ^2 табулировано (табл. T_8). Дифн. фк-я этого рсп-ия имеет вид

$$f(x, k) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{15}$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-фк-я, причем $\Gamma(n + 1) = n!$ (см. (9)). Отсюда видно, что рсп-ие «хи-квадрат» опр-ся одним параметром – числом ст-ей свободы k. С увеличением числа ст-ей свободы рсп-ие «хи-квадрат» приближается к норм-му (при $k \ge 30$).

п3. Приведем пример, в к-ом возникает рсп-ие хи-квадрат. Пусть вбр-а X_k ств-ет норм. рсп-ю $N(m, \sigma^2)$. Рас-им вбрч. дсп-ю

$$d_x^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_x^*)^2,$$

где m_x^* – вбрч-ое ср. Тогда слн. вел-а $Y_n \triangleq n d_x^* / \sigma^2$ имеет рсп-ие $\chi^2(n - 1)$ и не зв-т от m_x^*.

Свойства рсп-ия хи-квадрат $\chi^2(k)$:

с1. Характеристическая (хркч.) фк-я слн. вел-ы Z_n имеет вид

$$g(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x, k) dx = (1 - 2ti)^{-\frac{n}{2}}.$$

с2. Слн. вел. $Z_k \sim \chi^2(k)$ имеет сд. моменты:

$$M[Z_k] = k, D[Z_k] = 2k.$$

с3. Сумма любого числа k незв-х слн. вел-н X_i, $i = \overline{1, k}$, имеющих рсп-ие хи-квадрат с n_i ст-ми свободы, имеет рсп-ие хи-квадрат с $n \triangleq \sum_{i=1}^{k} n_i$ ст-ми свободы.

с4. Рсп-ие хи-квадрат обладает св-ом асимптотической нормальности:

$$\frac{Z_k - k}{\sqrt{2k}} X_n \xrightarrow{F} X \text{ при } k \to \infty,$$

где слн. вел. X имеет рсп-ие $N(0, 1)$. Это означает, что при дт-но большом объеме k вбр-и можно прж-но считать $X_k \sim N(k, 2k)$. Фактически эта аппроксимация имеет место уже при $k \ge 30$.

2*. Распределение Стьюдента. Пусть Z – норм-ая слн. вел. с $M[Z] = 0$, $\sigma[Z] = 1$, а V – незв-я от Z вел-а, к-ая рсп-на по закону χ^2 с k ст-ми свободы. Тогда вел-а

$$T_k = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2}} \tag{16}$$

имеет рсп-ие, к-ое наз. T-распределением, или рсп-ем Стьюдента с k ст-ми свободы, что обз-ют как $T_k \sim S(k)$. С взр-ем числа ст-ей свободы рсп-ие Стьюдента быстро прж-ся к норм-му.

Свойства рсп-ия Стьюдента $S(k)$:

с1. Слн. вел-а T_k имеет плотность рсп-ия

$$f(t, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}. \tag{17}$$

Грф-и плотностей $f(t, k)$ (рис. 9 при $k = 1, 10$), назм-ые кривыми Стьюдента, симметричны при всех $k = 1, 2, \ldots$ отс-но оси ординат.

с2. Слн. вел. T_k имеет мт. ож-ие, равное $M[T_k] = 0$ для всех $k \geq 2$, и дсп-ю $D[T_k] = \frac{k}{k-2}$ при $k > 2$. При $k = 2$ дсп-я $D[T_k] = \infty$.

с3. При $k = 1$ рсп-ие Стьюдента наз. рсп-ем Коши, плотность к-го равна

$$f(t, 1) = \frac{1}{\pi\left(1 + t^2\right)}. \tag{18}$$

Мт. ож-ия и дсп-ии слн. вел-ы T_1, имеющей рсп-ие Коши, не сущ-ет, т.к. беск-ен предел $\lim J(a) = \infty$, где $J(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{t}{t^2+1}\,dt$

с4. Можно показать, что при $k \to \infty$ рсп-ие $S(k)$ асимптотически норм-но, т.е. $T_k \xrightarrow{F} Z$, где слн. вел. Z имеет рсп-ие $N(0, 1)$. При $k \geq 30$ рсп-ие Стьюдента $S(k)$ практически не отличается от $N(0, 1)$.

п4. Рас-им пример, в к-ом возникает рсп-ие Стъюдента. Пусть вбр-а Z_k ств-ет норм-му рсп. $N(m, \sigma^2)$. Пусть m_x* – вбр-ое ср., а d_x* – вбрч. дсп-ия. тогда слн. вел-а $T_k = \sqrt{k-1}\,\frac{m_x^* - m}{\sqrt{d_k^*}}$ имеет рсп-ие Стьюдента $S(k-1)$.

3*. Распределение Фишера. Пусть незв. слн. вел-ы U и V имеют рсп-ия хи-квадрат со ст-ми свободы k_1 и k_2, то слн. вел-а

$$X_{k_1,k_2} = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} = \frac{\frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{k_1} X_i^2}{\frac{1}{k_2}\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} X_j^2} \quad \left(F\left(k_1, k_2\right) = \frac{U/k_1}{V/k_2}\right) \tag{19}$$

имеет рсп-ие, к-ое наз-ют F-рсп-ем или Фишера со ст-ми свободы k_1 и k_2, что записывают как $X_{k_1,k_2} \sim F(k_1, k_2)$.

Свойства рсп-ия Фишера $F(k_1, k_2)$:

с1. Слн. вел. X_{k_1,k_2} имеет плотность

$$f(x, k_1, k_2) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(k_2 + k_1 x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Грф-и фк-и $f(x, k_1, k_2)$, наз-мые кривыми Фишера, асимметричны и при $k_1 > 2$ достигают мкс-ых зн-й в точках $x = \dfrac{(k_1-2)k_2}{(k_2+2)k_1}$, близких к ед-е при больших зн-ях k_1 и k_2. Грф. плотности $f(x, k_1, k_2)$ при $k_1 = 4$, $k_2 = 40$ изб-ен на рис. 10. Зн-ия f_γ слн. вел-ы $F(k_1, k_2)$, при к-ых вер-ть $\text{P}(F(k_1, k_2) < f_\gamma) = \gamma$ приведены в табл. T_{15}.

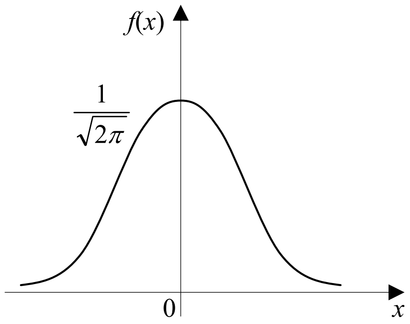


Рис. 7

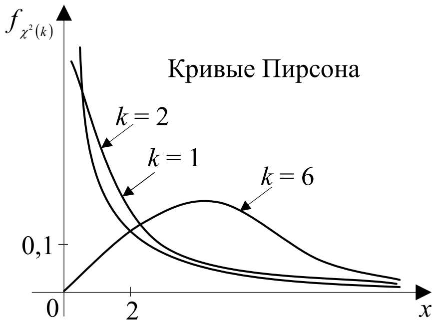


Рис. 8

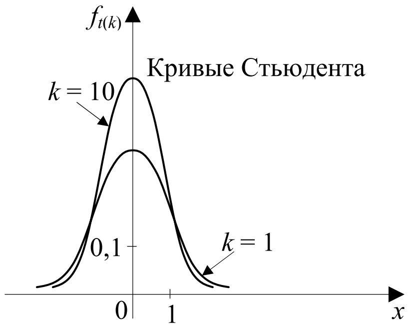


Рис. 9

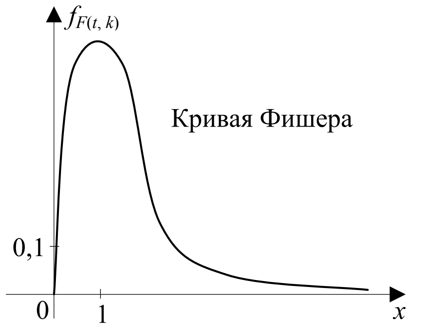


Рис. 10

с2. Слн. вел. X_{k_1,k_2} имеет сд-ие моменты:

$$M\left[X_{k_1,k_2}\right] = \frac{k_2}{k_2 - 2} \text{ при } k_2 > 2,\ D\left[X_{k_1,k_2}\right] = \frac{2k_2^2\left(k_1 + k_2 - 2\right)}{k_1\left(k_2 - 2\right)^2\left(k_2 - 4\right)} \text{ при } k_2 > 4.$$

п5. Пусть $Z_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – вбр-а объема n, порожденная слн. вел-ой X с норм-ым рсп-ем $N(m_x, \sigma^2)$, а $W_m = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ – вбр-а объема m, порожденная слн. вел-ой Y с норм-ым рсп-ем $N(m_y, \sigma^2)$ и слн. вел-ы Z_n и W_m незв-мы. Тогда слн. вел. $X_{n,\,m}$, образованная отн-ем «исправленных» вбрч-ых дсп-ий слн. вел-н X и Y, т.е.

$$X_{n,\,m} = \frac{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - m_x{*}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(Y_j - m_y{*}\right)^2}$$

имеет рсп-ие $F(n-1, m-1)$.

ЛЕКЦИЯ 11

4.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Основные понятия. Точечные оценки параметров распределения. Пусть требуется изучить количественный (колн.) признак X генеральной (гнр.) свк-ти. Допустим, что из теоретических (теор.) соображений удалось установить, какое именно рсп-ие имеет признак. Тогда возникает задача оценки параметров, к-ми опр-ся это рсп-ие. Н-р, если изучаемый признак рсп-ен в гнр-ой свк-ти нормально (норм.), то нх-мо оценить приближенно (прж.) мт. ож-ие $\tilde{m}_x = M(\tilde{a})$ и ср.кв. отк. $\tilde{\sigma}_x = \sqrt{M[(x-\tilde{m}_x)^2]}$. Если признак имеет рсп-ие Пуассона, то нх-мо оценить параметр λ.

При этом найденный параметр будет содержать эл-т слн-ти, т.к. в силу огр-ти опытов он не будет устойчивым. Такое прж. слн. значение (зн.) $\tilde{a}$ (точного параметра a) наз. точечной оценкой параметра. Эта ошибка в среднем (ср.) тем больше, чем меньше число опытов. Задача состоит в том, чтобы эта ошибка была минимальной (мнм.).

Поставим общую задачу: имеется слн. вел. X, закон рсп-ия к-ой содержит параметр a. Требуется найти подходящую оценку для параметра a по результатам n незв-х опытов: $\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = X$, где каждая X_i рсп-на по тому же закону, как X.

Оценку обз-им через $\tilde{a}$. Она сл-на и есть фк-я $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, т.е. закон рсп-ия $\tilde{a}$ зв-т: 1) от закона рсп-ия X (от параметра a); 2) от числа опытов n.

Чтобы оценка $\tilde{a}$ была «доброкачественной» оценкой, она должна уд-ть сд-им условиям (св-ам):

1) состоятельности, т.е. $\tilde{a} \to a$ при $n \to \infty$;

2) несмещенности, т.е. $M(\tilde{a}) = a$. Это означает, чтобы мы не делали систематическую ошибку в сторону завышения или занижения;

3) эффективности (эфс.), т.е. чтобы $\tilde{a}$ обладала по сравнению с др-ми наименьшей (нм.) дсп-ей $D(\tilde{a}) = \min$.

2°. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсии. Пусть имеется слн. вел. X с неизвестными параметрами m и D и пусть над X произведено n незв-х опытов и получено результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найти состоятельную и несмещенную оценки для параметров m и D.

В качестве (кач.) оценки для мт-го ож-ия естественно взять ср. ариф-ое m^* для нбл-ных зн-й, т.е.

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (1)$$

Оценка $\tilde{m}$ яв-ся состоятельной, ибо $m^* \to m$ при $n \to \infty$. Она яв-ся также и несмещенной, т.к. $M(\tilde{m}) = M\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n}\sum M(x_i) = \frac{1}{n}\sum m = \frac{1}{n}nm = m.$

Дсп-ия этой оценки равна

$$D(\tilde{m}) = D\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum x_i\right) = \frac{nD}{n^2} = \frac{1}{n}D. \tag{2}$$

Эфс-ть оценки параметров зв-т от вида закона рсп-ия X. Можно д-ть, что если X рсп-на по норм. закону, то дсп-ия $D(\tilde{m})$ будет мнм-мо возможной, т.е. оценка $\tilde{m}$ яв-ся эфн-ой.

Перейдем к оценке дсп-и D. На первый взгляд, наиболее естественной оценкой представляется дсп-ия

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2 . \tag{3}$$

Оценка D^* состоятельная, т.к. $D^* = \frac{1}{n}\sum(x_i - \tilde{m})^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \tilde{m}^2 \to D =$ $= \alpha_2(x) - m^2$ при $n \to \infty$.

Проверим, яв-ся ли оценка D^* несмещенной.

$$D^* = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \tilde{m}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum x_i\right)^2 =$$

$= \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{n-1}{n^2}\sum x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} x_i x_j$. Найдем $M(D^*) = \frac{n-1}{n^2}\sum M(x_i^2) - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} M(x_i x_j)$. Причем D^* не зв-т от начала крд-т. Выберем его в точке m, тогда $M(x_i^2) = M(\overset{\circ}{x}{}_i^2) = D$. отсюда $\sum M(x_i^2) = nD$. Вел-ы $x_1, \ldots, x_n$ незв-ы, поэтому $\sum_{i<j} M(x_i x_j) = 0$. Тогда окончательно получим

$$M(D^*) = \frac{n-1}{n}D, \tag{4}$$

т.е. D^* не яв-ся несмещенной оценкой для D. Пользуясь D^*, мы совершаем систематическую ошибку в меньшую сторону. Чтобы ликвидировать это смещение, D^* умн-им на $\frac{n}{n-1}$ и получим $\frac{n}{n-1}D^* = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum(x_i - \tilde{m})^2 =$ $= \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \tilde{m})^2$. Такую «исправленную» стсч. дсп-ю выберем в кач-е оценки для D

$$\tilde{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2 .$$

Т.к. $\frac{n}{n-1}D^* = \tilde{D}$, $\frac{n}{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$ и D^* состоятельно, то $\tilde{D}$ тоже состоятельно.

Оценка $\widetilde{D}$ для дсп-и не яв-ся эфн-ой. Однако в случае норм-го рсп-ия она яв-ся «асимптотически эффективной», т.е. при увеличении n отн-ие ее дсп-и к мнм-но возможной неограниченно (неогр.) прж-ся к ед-е.

Итак, для опр-ия неизвестных параметров m и D при n незв-ых опытах будем пользоваться прж-ми оценками:

$$\widetilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{5}$$

$$\widetilde{D} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \widetilde{m}\right)^2 \text{ или } \widetilde{D} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widetilde{m}^2\right)\frac{n}{n-1}\,. \tag{6}$$

При больших зн-ях n обе оценки – смещенная D^* и несмещенная $\widetilde{D}$ различаются очень мало и введение поправочного множителя теряет смысл.

3°. Другие статистические моменты. При большом кол-ве опытов исх-ый материал разобьем на интервалы J_i ($i \geq 2$) и введем сд-ие понятия.

Начальным (начн.) вбрч. моментом порядка s наз-ся ср. ариф-ое s-х ст-ей нблм-ых зн-й слн-ой вел-ы и обз-ся

$$\hat{v}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^s n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum x_i^s n_i}{n}\,,\ n = \sum_{i=1}^{k} n_i\,, \tag{7}$$

в част., $\hat{v}_1 = \sum x_i n_i \big/ n = \bar{x}$.

Центральным (цтр.) вбрч. моментом порядка s наз. ср. ариф-ое s-х ст-ей отк-й нблм-х зн-й слн-ой вел-ы от их ср. ариф-го и обз-ся

$$\overset{*}{\mu}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^s n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^s n_i}{n}\,, \tag{8}$$

Верны те же св-ва, что были введены в 4°:2.2, и связь $\overset{*}{\mu}_s$ и $\hat{v}_s$:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{*}{\mu}_1 = 0,\\
&\overset{*}{\mu}_2 = \hat{v}_2 - \hat{v}_1^2,\\
&\overset{*}{\mu}_3 = \hat{v}_3 - 3\hat{v}_2\hat{v}_1 + 2\hat{v}_1^3,\\
&\overset{*}{\mu}_4 = \hat{v}_4 - 4\hat{v}_3\hat{v}_1 + 6\hat{v}_2\hat{v}_1^2 - 3\hat{v}_1^4\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Причем третий цтр-ый момент служит для хркс-ки асимметрии (т.е. «скошенности») рсп-ия и обз-ся через

$$S_x = \overset{*}{\mu}_3 \,/\, \overset{*}{\sigma}{}^3. \tag{10}$$

Четвертый цтр-ый момент служит для хркс-ки «крутости» (островершинности или туповершинности рсп-ия). Это св-во наз. эксцессом и обз-ся E_x, в част., для норм-го рсп. $E_x = 0$ (графики S_x и E_x см. в 5°:2.2):

$$E_x = \overset{*}{\mu}_4 \,/\, \overset{*}{\sigma}{}^4 - 3. \tag{11}$$

Стсч-ие моменты обладают сд-ми св-ми:

с1. Если все нблм-ые зн-ия слн-й вел-ы увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то цтр-ый вбрч-ый момент s-го порядка не изменится.

с2. Если все нблм-ые зн-ия слн-й вел-ы умножить (умн.) на одно и то же число C, то нач-ый и цтр-ый вбрч. моменты s-го порядка изменятся в C^s раз.

Если воспользоваться указанным св-ми, то выч-ия вбрч-ых моментов можно значительно упростить, что и показано в 6°.

зм1. Для интервала J_i при $i = 1$ вместо (7) и (8) ств-но получим

$$\hat{\nu}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s \, , \; \overset{*}{\mu}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^s . \tag{12}$$

4°. Генеральная, выборочная, групповая и общая средние. Пусть изучается дк. гнр-ая свк-ть отс-но количественного (колн.) признака X.

Если все зн-ия $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака гнр-ой свк-ти объема N различны, то ср-я

$$\overline{x}_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{13}$$

наз. генеральной средней.

Если же зн-ия признака $x_1, x_2, \ldots, x_K$ имеют ств-но частоты $N_1, N_2, \ldots, N_K$, причем $\sum_{i=1}^{K} N_i = N$, то

$$\overline{x}_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} x_i N_i \, . \tag{14}$$

Аналогично (анч.) опр-ся вбрч-ая ср-я

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \tag{15}$$

или

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} x_i n_i \, , \tag{16}$$

где $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$ – сумма частот $\{n_i\}$ зн-й $\{x_i\}$. Причем вбрч-ая ср. есть слн. вел-а, к-ая меняется от вбр-и к вбр-е.

Убедимся, что $\overline{x}_в$ есть несмещенная оценка, т.е $M\left(\overline{x}_в\right) = \overline{x}_Г$. Дсв-но, $M\left(\overline{x}_в\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(x_i\right) = \frac{1}{n}\cdot na = a$. С другой стороны, $M(X) = \overline{x}_Г = a$. Тогда $M\left(\overline{x}_в\right) = \overline{x}_Г$.

Отсюда же вытекает, что оценка $\overline{x}_в$ состоятельная, т.к. $\overline{x}_в \to a$ при $n \to \infty$, сд-но, $\overline{x}_в \to \overline{x}_Г$ (ибо $\overline{x}_Г = a$).

Пусть зн-ия $\{x_i\}$ признака X свк-ти (гнр-ой или вбрч-ой) разбиты на группы. Найдем ср. ариф-ю каждой группы, к-ую назовем групповой ср-ей и обз-им $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, …. $\overline{x}_k$.

Зная групповые ср. и объемы групп, можно найти общую ср. $\overline{x}$, к-ая равна ср-ей ариф-ой групповых ср-их, взвешенной по объемам групп, т.е.

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i^1 \overline{x}_1 + \sum n_i^2 \overline{x}_2 + \ldots + \sum n_i^k \overline{x}_k}{\sum n_i^1 + \sum n_i^2 + \ldots + \sum n_i^k}, \tag{17}$$

где n_i^j – частоты зн-й x_i группы j.

п1. Найти общую ср-ю свк-ти из двух групп:

Группа	Первая		Вторая	
Значение признака	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Объем	10 + 15 = 25		20 + 30 = 50	

Р. Найдем групповые ср-ие $\overline{x}_1 = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 6}{25} = 4$, $\overline{x}_2 = \frac{20\cdot 1 + 30\cdot 5}{50} = 3{,}4$.

По (17) найдем общую ср-ю $\overline{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3{,}4}{25+50} = 3{,}6$.

5°. Генеральная, выборочная, групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии. Если все зн. $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака гнр-ой свк-ти объема N различны, то дсп-ия

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}_Г\right). \tag{18}$$

наз. генеральной дисперсией.

Если же зн-я признака $x_1, x_2, \ldots, x_K$ имеют ств-но частоты $N_1, N_2, \ldots, N_K$, причем $\sum_{i=1}^{K} N_i = N$, то

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} N_i\left(x_i - \overline{x}_Г\right)^2 . \tag{19}$$

Анч-но опр-ся вбрч. дсп-ия

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 \tag{20}$$

или

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i}^{K} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 . \tag{21}$$

Гнр-ое (вбрч-ое) ср. кв. отк-ие опр-ся

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г} \quad \left(\sigma_в = \sqrt{D_в}\right). \tag{22}$$

Выч-ие дсп-и (гнр-ой или вбрч-ой) можно упростить на основе

т1. Дсп-ия равна ср-му кв-ов зн-й признака минус кв-т общей ср-ей, т.е.

$$D = \overline{x^2} - \left[\overline{x}\right]^2, \tag{23}$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i x_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i x_i^2$.

Д. $D = \frac{1}{n}\sum n_i(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum n_i\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+[\bar{x}]^2\right) = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 -$

$-2\,\bar{x}\cdot\frac{1}{n}\sum n_i x_i + [\bar{x}]^2\cdot\frac{1}{n}\sum n_i = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - 2\,\bar{x}\;\bar{x} + [\bar{x}]^2\cdot\frac{1}{n}\cdot n = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2$ ■

п2. Найти дсп-ю по рсп-ю $\{x_i;\, n_i\} = \{1, 2, 3, 4; 20, 15, 10, 5\}$.

Р. Находим общую ср-ю $\bar{x} = \frac{20\cdot1+15\cdot2+10\cdot3+5\cdot4}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2$. Найдем ср-ю кв-ов зн-й признака $\overline{x^2} = \frac{20\cdot1^2+15\cdot2^2+10\cdot3^2+5\cdot4^2}{50} = \frac{250}{50} = 5$. Тогда $D = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 5 - 2^2 = 1$.

Пусть теперь зн-я $\{x_i\}$ признака X свк-ти (гнр-ой или вбрч-ой) разбита на K групп и пусть $\{\bar{x}_j\}$ – групповые ср-ие. Тогда групповую дсп-ю найдем по фм-е:

$$D_{j\,\text{гр}} = \frac{\sum n_i(x_i-\bar{x}_j)^2}{N_j}, \tag{24}$$

где n_i – частота зн-я x_i, j – номер группы, $N_j = \sum n_i$ – объем группы j.

п3. Найти групповые дсп-и свк-ти из двух групп:

$Г_1 = \{x_i;\, n_i\} = \{2, 4, 5; 1, 7, 2\}$, $Г_2 = \{x_i;\, n_i\} = \{3, 8; 2, 3\}$.

Р. Находим $N_1 = \sum n_i = 10$, $N_2 = \sum n_i = 5$. Найдем групповые ср-ие $\bar{x}_1 = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1\cdot2+7\cdot4+2\cdot5}{10} = 4$, $\bar{x}_2 = \frac{2\cdot3+3\cdot8}{5} = 6$. Тогда получим дсп-и

$$D_{1\,\text{гр}} = \frac{\sum n_i(x_i-\bar{x}_1)^2}{N_1} = \frac{1(2-4)^2+7(4-4)^2+2(5-4)^2}{10} = 0{,}6;$$

$$D_{2\,\text{гр}} = \frac{2(3-6)^2+3(8-6)^2}{5} = 6.$$

Внутригрупповой дсп-ей наз-ют ср-ю ариф-ю групповых дсп-й, взвешенную по объемам групп:

$$D_{\text{внгр}} = \frac{\sum N_j D_{j\,\text{гр}}}{n}, \tag{25}$$

где $n = \sum_{j=1}^{K} N_j$ – объем всей группы.

п4. Найти внутригрупповую дсп-ю по данным п3.

Р. $D_{\text{внгр}} = \frac{N_1 D_{1\text{гр}} + N_2 D_{2\text{гр}}}{n} = \frac{10\cdot0{,}6+5\cdot6}{10+5} = \frac{12}{5}$.

Межгрупповой дсп-ей наз-ют дсп-ию групповых ср-ых $\bar{x}_j$ отс-но общей ср-ей $\bar{x}$:

$$D_{\text{межгр}} = \frac{\sum N_j\left(\overline{x}_j - \overline{x}\right)^2}{n}. \tag{26}$$

п5. Найти межгрупповую ср-ю по данным п3.

Р. Находим общую ср-ю $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \dfrac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 8}{10+5} = \dfrac{14}{3}$.

Используя вычн-ые $\overline{x}_1 = 4$, $\overline{x}_2 = 6$ из п6, находим:

$$D_{\text{межгр}} = \frac{N_1\left(\overline{x}_1 - \overline{x}\right)^2 + N_2\left(\overline{x}_2 - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{10\left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + 5\left(6 - \frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{8}{9}.$$

Общей дсп-ей наз-ют дсп-ию зн-й признака всей свк-ти отс-но общей ср-ей:

$$D_{\text{общ}} = \frac{\sum n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}. \tag{27}$$

Причем справедлива

т2. $D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}$.

Д-во можно получить раскрытием (27) и приведением к виду (25), (26).

п6. Найти общую дсп-ю по данным п3.

Р. Учитывая $\overline{x} = \dfrac{14}{3}$, находим $D_{\text{общ}}$:

$$D_{\text{общ}} = \frac{1\left(2 - \frac{14}{3}\right)^2 + 7\left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + 2\left(5 - \frac{14}{3}\right)^2 + 2\left(7 - \frac{14}{3}\right)^2 + 3\left(8 - \frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{148}{45}.$$

Проверим т2: $D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{8}{9} = \dfrac{148}{45}$.

зм2. Как в 2°, мы и здесь должны ввести несмещенную (исправленную) дсп-ю для $D_в$:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n-1}. \tag{28}$$

На практике исправленной дсп-ей пользуются при $n < 30$. А при больших n разница между фм-ми (21) и (28) почти не будет.

6°. Упрощенный способ вычисления статистических характеристик выборки. Пример. Выч-ие ср. ариф-го, дсп-и и вбрч-ых моментов по приведенным выше фм-ам приводит к громоздким выч-ям, если числовые зн-ия вариантов и ств-ие им частоты велики. Использование св-в с1, с2 из 3° указанных хркс-к позволяет значительно упростить их выч-е.

Если все частоты вариантов (врт.) имеют общее кратное q, то частоты следует разделить на q, т.е. умн-ть на $1/q$. Для вновь полученного ряда зн-ия упомянутых хркс-к не изменится. После этой операции (если в этом была нх-ть) целесообразно все зн-ия врт-ов прб-ть по фм-е

$$\overset{*}{x}_i = \frac{x_i - c}{h}. \tag{29}$$

Для получения свк-ти прб-ых врт-ов выч-ют ср. ариф-ое $\overset{*}{x}$ и цтр-ые моменты $\overset{*}{\mu}_s$. Истинные зн-ия $\bar{x}$ и $\hat{\mu}_s$ находятся затем по фм-м

$$\bar{x} = \overset{*}{x}\, h + c, \tag{30}$$

$$\hat{\mu}_s = h^s \overset{*}{\mu}_s. \tag{31}$$

Стн-ия (30) и (31) предлагается д-ть самостоятельно.

Пст-ые h и c выбирают произвольно. Однако их надо подбирать так, чтобы было можно мкс-но упростить выч-ия. Обычно в кач-е c выбирают врт., к-ый имеет нб-ю частоту или занимает ср. положение в ряду данных, при этом стремятся, чтобы разности $x_i - c$ были возможно «проще». В кач-е h можно взять нб-й делитель разностей $x_i - c$ или такое число, к-ое позволило бы избавиться от дробей.

Приведем демонстрационный пример, чтобы показать, как используются вышеприведенные ф-мы на практике.

п7. При измерении диаметра валиков после шлифовки получены сд. результаты:

6,75; 6,77; 6,77; 6,73; 6,76; 6,74; 6,70; 6,75; 6,71; 6,72; 6,77; 6,79; 6,71; 6,78;
6,73; 6,70; 6,73; 6,77; 6,75; 6,74; 6,71; 6,70; 6,78; 6,76; 6,81; 6,69; 6,80; 6,80;
6,77; 6,68; 6,74; 6,70; 6,70; 6,74; 6,77; 6,83; 6,76; 6,76; 6,82; 6,77; 6,71; 6,74;
6,77; 6,75; 6,74; 6,75; 6,77; 6,72; 6,74; 6,80; 6,75; 6,80; 6,72; 6,78; 6,70; 6,75;
6,78; 6,78; 6,76; 6,77; 6,74; 6,74; 6,77; 6,73; 6,74; 6,77; 6,74; 6,75; 6,74; 6,76;
6,76; 6,74; 6,74; 6,74; 6,74; 6,76; 6,74; 6,72; 6,80; 6,76; 6,78; 6,73; 6,70; 6,76;
6,76; 6,77; 6,75; 6,78; 6,72; 6,76; 6,78; 6,68; 6,75; 6,73; 6,82; 6,73; 6,80; 6,81;
6,71; 6,82; 6,77; 6,80; 6,80; 6,70; 6,70; 6,82; 6,72; 6,69; 6,73; 6,76; 6,74; 6,77;
6,72; 6,76; 6,78; 6,78; 6,73; 6,76; 6,80; 6,76; 6,72; 6,76; 6,76; 6,70; 6,73; 6,75;
6,77; 6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,73; 6,77; 6,74; 6,78; 6,69; 6,74; 6,71; 6,76; 6,76;
6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,74; 6,77; 6,75; 6,80; 6,74; 6,76; 6,77; 6,77; 6,81; 6,75;
6,78; 6,73; 6,76; 6,76; 6,76; 6,77; 6,76; 6,80; 6,77; 6,74; 6,77; 6,72; 6,75; 6,76;
6,77; 6,81; 6,76; 6,76; 6,76; 6,80; 6,74; 6,80; 6,74; 6,73; 6,75; 6,77; 6,74; 6,76;
6,77; 6,77; 6,75; 6,76; 6,74; 6,82; 6,76; 6,73; 6,74; 6,75; 6,76; 6,72; 6,78; 6,72.
6,76; 6,77; 6,75; 6,78;

Найти: 1) шкалу интервалов и сгруппировать результаты нбл-й;

2) вбрч-ю фк. рсп-ия $\hat{F}(x)$ и начертить ее график;

3) вбрч-ю фк. плотности $\hat{f}(x)$ и начертить ее график;

4) ср. ариф-ое $\bar{x}$ и вбрч. дсп-ю $\hat{D}(X)$;

5) ср.кв. отк-ие $\hat{\sigma}_x$, асимметрию S_x и эксцесс E_x.

Р. До непосредственного использования фм-л (29)-(31) осуществим предварительную обработку исх-ых данных, начиная с

1) для построения интервального ряда нх-мо опр-ть вел-у частичных интервалов. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в ств-и с этим сгруппировать результаты нбл-й. Длину частичного интервала h следует выбрать так, чтобы построенный ряд не был громозд-

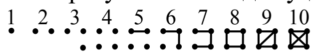
ким и в то же время позволял выявить характерные (хрк.) черты изменения зн-й слн. вел-ы, т.е. хрк. черты изучаемого явления.

Для этого найдем размах варьирования $R = x_{нб} - x_{нм} = 6{,}83 - 6{,}68 = 0{,}15$. Теперь следует выбрать число интервалов v. Для того, чтобы вариационный (варц.) ряд не был слишком громоздким, обычно число интервалов берут от 7 до 11. Положим предварительно $v = 7$, тогда длина частичного интервала $h = R/v = 0{,}15/7 \approx 0{,}0214$. Однако в данном случае более удобно взять $h = 0{,}02$. Для более точного опр-ия h используют фм-у Стерджеса

$$h = (x_{нб} - x_{нм})/(1 + 3{,}322 \lg n). \qquad (32)$$

Если окажется, что h – дробное число, то за длину частичного интервала следует брать либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь. Имеем $h = 0{,}15/(1 + 3{,}322 \lg 200) \approx 0{,}0174 \approx 0{,}02$.

За начало первого интервала рекомендуется брать вел-у $x_{нач} = x_{нм} - 0{,}5h$. В данном случае $x_{нач} = 6{,}68 - 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 6{,}67$. Конец последнего интервала ($x_{кон}$) должен уд-ть условию $x_{кон} - h \le x_{нб} < x_{кон}$. Для этого случая имеем $x_{кон} = x_{нб} + h = 6{,}83 + 0{,}02 = 6{,}85$.

Теперь, расв-ая результаты нбл-й, опр-ем, сколько зн-ий признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают зн-ия слн. вел-ы, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы, т.е. $x_i \in \left[x_i^{нм}, x_i^{нб}\right[$. Это можно делать так. Границы полученной посл-ти интервалов записываем в столбец (табл. 1), а затем, расв-ая данные в том порядке, в к-ом они получены, проставляем справа от ств-го интервала точки или черточки методом «конвертиков». В результате каждому десятку будет ств-ть фигура, похожая на конверт: 

.

Таблица 1

№ п/п	Диаметр валика после шлифовки (интервалы), мм	Рабочее поле	Частота n_i	Частость $\hat{p}_i$
1	6,67-6,69		2	0,010
2	6,69-6,71		15	0,075
3	6,71-6,73		17	0,085
4	6,73-6,75		44	0,220
5	6,75-6,77		52	0,260
6	6,77-6,79		44	0,220
7	6,79-6,81		14	0,070
8	6,81-6,83		11	0,055
9	6,83-6,85		1	0,005
Σ			200	1

В табл. 1 частота n_i показывает, во скольких нбл-ях слн. вел-а приняла зн-я, принадлежащие тому или иному интервалу, причем нижний конец интервал входит в него, а верхний – нет. Н-р, для 4-го интервала [6,73; 6,75[имеем $n_4 = 44$. Такие частоты обычно наз-ют интервальными, а их отн-ие к общему числу нбл-й – интервальными частостями и обз-ют $\beta_i = \overset{*}{p}_i$.

При выч-и интервальных частостей округление результатов следует проводить т.о., чтобы общая сумма частостей была равна 1.

Иногда интервальный варц. ряд для простоты исследований (иссл.) условно заменяют дискретным (дк.). В этом случае срединное зн. i-го интервала принимают за врт. x_i, а ств-ю интервальную частоту n_i – за частоту этого интервала;

2) напомним (см. 3°:4.1), что вбрч-ой фк-ей рсп-ия (или фк-ей рсп-ия вбр-и) наз. фк. $\hat{F}(x)$, задающую для каждого x отс-ю частоту сб-ия $X < x$, т.е.

$$\hat{F}(x) = \hat{P}(X < x) = \frac{n_x}{n}, \tag{33}$$

где n_x – число врт-ов, меньших x, n – объем вбр-и.

В отличие от вбрч-ой фк-и $\hat{F}(x)$, интн-ю фк-ю $F(x)$ гнр-ой свк-ти наз-ют теор-ой фк-ей рсп-ия. Главное отличие фк-й $F(x)$ и $\hat{F}(x)$ состоит в том, что теор-ая фк. рсп-ия $F(x)$ опр-ет вер-ть сб-ия $X < x$, а вбрч-ая фк. – отс. частоту этого сб-ия. На основе теоремы Бернулли (см. 2°:2.4) при больших n фк-ю $\hat{F}(x)$ можно использовать в кач-е прж-го зн-ия неизвестной фк-и $F(x)$.

По опр-ю $\hat{F}(x)$ из табл. 1 находим $\hat{F}(x) = 0$ при $x \in [-\infty; 6{,}67[$, $F(x) = 0{,}01$ при $x \in [0{,}67; 0{,}69[$, $\hat{F}(x) = 0{,}085$ при $x \in [0{,}69; 6{,}675[$ и т.д. $\hat{F}(x) = 0{,}995$ при $x \in [6{,}83; 6{,}85[$, $F(x) = 1$ при $x \in [6{,}85; \infty[$. Эти результаты запишем в табл. 2.

Таблица 2

x	6,67	6,69	6,71	6,73	6,75	6,77	6,79	6,81	6,83	6,85
$\hat{F}(x)$	0	0,010	0,085	0,170	0,390	0,650	0,870	0,940	0,995	1

По данным табл. 2 строим график фк-и $\hat{F}(x)$ (рис. 1).

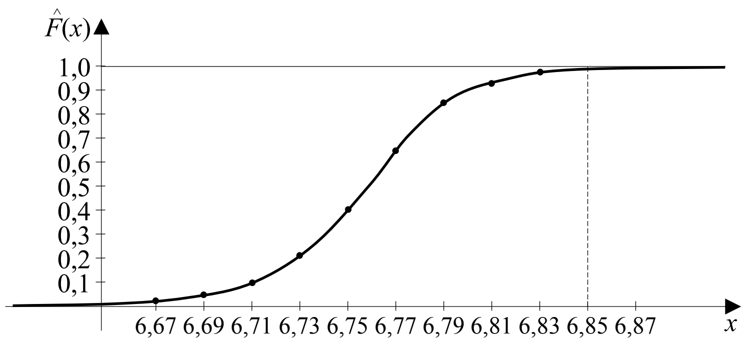


Рис. 1

3) Как мы знаем, плотность рсп-ия опр-ся (см. 3°:2.1) по фм-е

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{F}(x + \Delta x) - \hat{F}(x)}{\Delta x} \approx F'(x) \text{ при } \Delta x \to 0, \tag{34}$$

где $\hat{F}(x + \Delta x) - \hat{F}(x)$ – частость попадания нблм-ых зн-й слн. вел-ы X в интервал $[x, x + \Delta x[$. Тогда полагая, что $\beta_i = \overset{*}{p}_i$ – частость попадания нблм-ых зн-й слн. вел-ы в интервал $[a_i, a_i + h[$ и учитывая (34), получим

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a_1, \\ \hat{p}_i \big/ h \text{ при } a_i \le h < a_{i+1},\ i = \overline{1, v}, \\ 0 \text{ при } x \ge a_{v+1}, \end{cases}$$

где a_{v+1} – конец последнего v-го интервала. В табл. 3 приведены зн-ия фк-и $\hat{f}(x)$ с учетом данных табл. 2.

Таблица 3

i	Диаметр валика после шлифовок (интервалы, мм)	Частость $\hat{p}_i$	$\hat{f}(x)$
1	6,67-6,69	0,010	0,50
2	6,69-6,71	0,075	3,75
3	6,71-6,73	0,085	4,25
4	6,73-6,75	0,220	11,0
5	6,75-6,77	0,260	13,0
6	6,77-6,79	0,220	11,0
7	6,79-6,81	0,070	3,50
8	6,81-6,83	0,055	2,75
9	6,83-6,85	0,005	0,25

На рис. 2 изб-на гистограмма частостей $\beta_i = \overset{*}{p}_i$ с учетом данных табл. 3. Для графического (грфч.) изб-ия интервального варц. ряда можно использовать полигон, если этот ряд прб-ть в дк-ый. В этом случае интервалы заменяют их срединными зн-ми и ставят им в ств-ие интервальные частоты (частости). Для полученного дк-го ряда строят полигон (см. рис. 2, пунктирная линия).

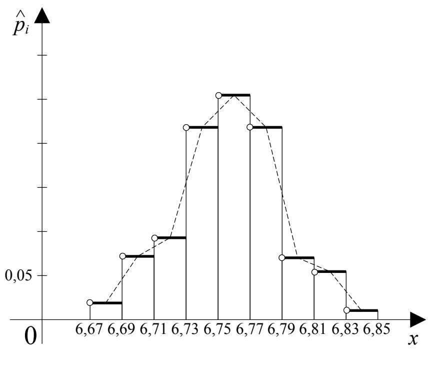


Рис. 2

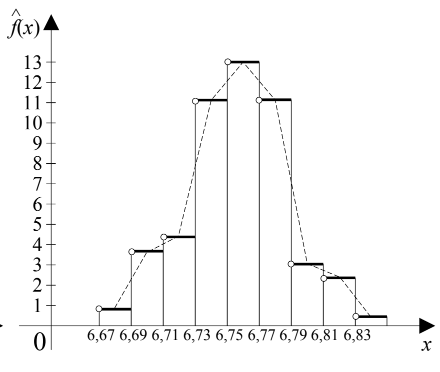


Рис. 3

Фк-я плотности $\hat{f}(x)$, зн-я к-ой приведены в табл. 3, грф-ки изб-на на рис. 3. Полученная гистограмма внешне мало отличается от гистограммы, изб-ой на рис. 2. Полигон, представленный на рис. 3 (пунктирная линия), дает первоначальное представление о дифн-ой фк-и рсп-ия.

4) Выч-им ср. ариф-ое $\overline{x}$ обычным способом по фм-е

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{K} x_i \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{K} x_i \, \hat{p}_i. \tag{35}$$

Зн-я $\hat{p}_i = \beta_i$, взяв из табл. 3, выч-им $\overline{x}$ = 6,68·0,010 + 6,70·0,075 + 6,72·0,085 + + 6,74·0,220 + 6,76·0,260 + 6,78·0,220 + 6,80·0,070 + 6,82·0,055 + 6,84·0,005 = 6,7578.

Если использовать негруппированные нач. данные и фм-у $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$, то получим: $\overline{x}$ = (6,75 + 6,77 + 6,77 + 6,73 + … + 6,77 + 0,75 + 0,78)/200 = = 6,754. Т.о., точное зн-е 6,754 отличается от взвешенного зн-ия 6,7578 на вел-у 0,0038.

Выч-им вбрч. дсп-ю по фм-е

$$\hat{D}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{x})^2 \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{K} (x_i - \overline{x})^2 \, \hat{p}_i \tag{36}$$

и учитывая, что взвешенное ср. ариф-ое равно 6,7578, находим

$$\hat{D}(X) = (6{,}68 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}010 + (6{,}70 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}075 + (6{,}72 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}085 +$$
$$+ (6{,}74 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}220 + (6{,}76 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}260 + (6{,}78 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}220 +$$
$$+ (6{,}80 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}070 + (6{,}82 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}055 + (6{,}84 - 6{,}7578)^2 \cdot 0{,}005 =$$
$$= 0{,}0098316 \approx 0{,}001.$$

5) Теперь, используя фм-ы (29)-(31) и исх. данные из табл. 1, найдем $\overline{x}$, $\hat{\sigma}_x^2$, S_x и E_x, прб-уя данный интервальный ряд в дк-ый. Для этого найдем середину каждого интервала и заполним столбец (сл.) 2 табл. 4, где будем располагать промежуточные результаты выч-й.

Из табл. 4 видно, что нб-ю частоту (равную 52) имеет 5-й интервал. Тогда в кач-е C возьмем середину этого интервала, т.е. C = 6,76. Заполним теперь 4-й сл-ц табл-ы. Данные, записанные в этом сл-це, разделим на h = 0,02, что позволяет получить целые числа. Затем заполняем остальные сл-цы табл. 4.

Таблица 4

Диаметр валика, мм	Середина интервала x_i	Частота m_i	$x_i - c$	$\overset{*}{x}_i = \frac{x_i - c}{h}$	$\overset{*}{x}_i m_i$	$\overset{*}{x}{}_i^2 m_i$	$\overset{*}{x}{}_i^3 m_i$	$\overset{*}{x}{}_i^4 m_i$
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
6,67-6,69	6,68	2	– 0,08	– 4	– 8	32	– 128	512
6,69-6,71	6,70	15	– 0,06	– 3	– 45	135	– 405	1215
6,71-6,73	6,72	17	– 0,04	– 2	– 34	68	– 136	272
6,73-6,75	6,74	44	– 0,02	– 1	– 44	44	– 44	44
6,75-6,77	6,76	52	0,00	0	0	0	0	0
6,77-6,79	6,78	44	0,02	1	44	44	44	44
6,79-6,81	6,80	14	0,04	2	28	56	112	224
6,81-6,83	6,82	11	0,06	3	33	99	297	291
6,83-6,85	6,84	1	0,08	4	4	16	64	256
Σ		**200**			**– 22**	**494**	**– 196**	**2858**

По опр-ю нач-ых моментов, из данных табл. 4 получим:

$\overset{*}{v}_1 = \sum \overset{*}{x}_i m_i \Big/ \sum m_i = -22/200 = -0{,}11$; $\overset{*}{v}_2 = \sum \overset{*}{x}{}_i^2 m_i \Big/ \sum m_i = 494/200 = 2{,}47$;

$\overset{*}{v}_3 = \sum \overset{*}{x}{}_i^3 m_i \Big/ \sum m_i = -196/200 = -0{,}98$; $\overset{*}{v}_4 = \sum \overset{*}{x}{}_i^4 m_i \Big/ \sum m_i = 2858/200 = 14{,}29$.

Используя фм-ы (9), получим сд. зн-ия цтр-ых моментов:

$$\overset{*}{\mu}_2 = \overset{*}{v}_2 - \overset{*}{v}{}_1^2 = 2{,}47 - 0{,}0121 = 2{,}4579,$$

$$\overset{*}{\mu}_3 = \overset{*}{v}_3 - 3\,\overset{*}{v}_2\,\overset{*}{v}_1 + 2\,\overset{*}{v}{}_1^3 = -0{,}98 + 0{,}8151 - 0{,}002662 = -0{,}167562,$$

$$\overset{*}{\mu}_4 = \overset{*}{v}_4 - 4\,\overset{*}{v}_3\,\overset{*}{v}_1 + 6\,\overset{*}{v}_2\,\overset{*}{v}{}_1^2 - 3\,\overset{*}{v}{}_1^4 = 14{,}29 - 0{,}4312 + 0{,}179322 - 0{,}00043923 = \\ = 14{,}037683.$$

На основании фм-ы (31) получим сд. зн-ия цтр-ых моментов для исх-го варц-го ряда:

$$\hat{\mu}_2 = 2{,}4579\cdot(0{,}02)^2 = 0{,}00098316 \approx 0{,}001,$$

$$\hat{\mu}_3 = -0{,}167562\cdot(0{,}02)^3 = -1{,}340498\cdot10^{-6},$$

$$\hat{\mu}_4 = 14{,}037683\cdot(0{,}02)^4 = 2{,}2460292\cdot10^{-6} \approx 2{,}246\cdot10^{-6}.$$

Т.к. $\overset{*}{x} = \overset{*}{v}_1$, то $\overset{*}{x} = -0{,}11$. Тогда по (30) получим

$$\bar{x} = -0{,}11\cdot0{,}02 + 6{,}76 = 6{,}7578 \text{ (мм)}.$$

Заметим, что для $\bar{x}$ и $\hat{\mu}_2$ получили такие же результаты, как и в 4) более простым способом, а для выч-ия $\hat{\mu}_3$ и $\hat{\mu}_4$ упрощенный способ становится еще более выгодным.

Т.к. $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\mu}_2$, то $\hat{\sigma}_x^2 = 0{,}00098316 \approx 0{,}001$ (мм^2). Ср.кв. отк. $\hat{\sigma}_x = \sqrt{0{,}00098316} \approx 0{,}0314$. По фм-ам (10) и (11) получим зн-ие коэф-тов асимметрии и эксцесса:

$$S_x = \hat{\mu}_3 \big/ \hat{\sigma}_x^3 = -0{,}0435;\ E_x = \hat{\mu}_4 \big/ \hat{\sigma}_x^4 - 3 = -0{,}676.$$

7°. Основные свойства выборочного математического ожидания и дисперсии. Связь функции распределения и плотности распределения. Все св-ва мт-их ож-й и дсп-й слн-ых вел-н и их законы рсп-ия (см. 2.1 и 2.2) имеют место и для вбрч-ой свк-ти. Поэтому приведем эти св-ва. Обз-им через $M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ – мт. ож-ие для дк. и непр. случая. Мт. ож-ие иногда обз-ют $m_x = M[X]$ или $\bar{x} = M[X]$.

с1. $M[C] = C$.

с2. $M[CX] = CM[X]$.

с3. $M[XY] = M[X]M[Y]$, где X и Y – незв. слн. вел-ы.

с4. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$.

с5. $M[X] = np$, где n – число незв-ых испытаний (исп.), p – вер. появления сб-ия X_i, $\sum_{i=1}^{n} X_i = X$.

$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i$, $\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx$ – нач. моменты s-го порядка для дк. и непр. сл-я. Мт. ож-ие есть первый нач. момент $\alpha_1[X] = M[X] = m_x$, а $\alpha_s[X] = M[X^s]$. $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ – центрированная (цтрв.) слн. вел. Причем имеем

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M[X - m_x] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0.$$

$\mu_s\left[\overset{\circ}{X}\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i$, $\mu_s\left[\overset{\circ}{X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^s f(x)dx$ – центральный (цтр.) момент. Второй цтр-ый момент есть дсп-я слн-й вел-ы X.

$$\mu_2\left[\overset{\circ}{X}\right] = M[(X - m_x)^2] = D[X] = \sum (x_i - m_x)^2 p_i \text{ или } D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx,$$

а $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ – ср. кв. отк-ие. Приведем св-ва дсп-и.

с6. $D[C] = 0$.

с7. $D[CX] = C^2 D[X]$.

с8. $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$, где X и Y – незв. слн. вел-ы. Отсюда с учетом с6 и с7 получим $D[C + X] = D[X]$, $D[X - Y] = D[X] + D[Y]$.

с9. $D[X] = npq$, где n – число появл. сб. X_i с вер-ю p в n незв. исп-ях, $q = 1 - p$.

Далее отметим, что фк-я рсп-ия и плотность рсп-ия связаны стн-ем

$$f(x) = F'(x). \tag{37}$$

п8. Фк-я рсп-ия непр. слн. вел-ы задана врж-ем $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ x^2, \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ x > 0. \end{cases}$

Найти плотность рсп-ия и вер-ть $P(0{,}25 < X < 0{,}5)$.

Р. Находим $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 2x, \ 0 < x \le 1, \\ 0, \ x > 0. \end{cases}$ По стн-ю (37) выч-им $P(0{,}25 < X < 0{,}5) = \int_{0,25}^{0,5} 2x dx = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,25}^{0,5} = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1825$.

ЛЕКЦИЯ 12

4.3. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ И НАДЕЖНОСТЬ. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

1°. Точность оценки и надежность. Дадим нек-ые понятия. Точечной наз-ют оценку, к-ая опр-ся одним числом. Все оценки, рас-ые в 4.2, – точечные. Но при малом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной (инрн.) наз-ют оценку, к-ая опр-ся двумя числами – концами интервала (инр.).

Пусть найденная по данным вбр-и статистическая (стсч.) характеристика (хркс.) $\tilde{a}$ служит оценкой неизвестного параметра a. Мы будем говорить, что оценка $\tilde{a}$ уд-ет нерав-у $|a - \tilde{a}| < \delta$ с вер-ю γ, если

$$P(|a - \tilde{a}| < \delta) = \gamma \text{ или } P(\tilde{a} - \delta < a < \tilde{a} + \delta) = \gamma. \qquad (1)$$

Стн. (1) надо понимать так: вер-ть того, что инр. $]\tilde{a} - \delta, \tilde{a} + \delta[$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр a, равна γ.

Причем $]\tilde{a} - \delta, \tilde{a} + \delta[$ наз. доверительным инр-ом, а γ – надежностью (доверительной вер-ю).

2º. Доверительные интервалы оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Пусть колн-й признак X гнр-ой свк-ти рсп-ен норм-но. И пусть требуется оценить неизвестное мт. ож-ие a по вбрч. средней (ср.) $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ (их рас-им как слн. вел-ы $\bar{X}$ и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – одинаково рсп-ые), т.е. найти доверительные инр-ы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Если слн. вел. X рсп-на норм-о, то $\bar{X}$ также рсп-на норм-о. Причем $M(\bar{X}) = a$, $D(\bar{X}) = D\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \dfrac{D(X_1) + \ldots + D(X_n)}{n^2} = \dfrac{nD}{n^2} = \dfrac{D}{n}$.

Тогда $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Из п5 в 3°:2.3 знаем, что $P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$. Заменив X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t),$$

где $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Откуда, найдя $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right|<t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma.$$

Отсюда, обз-ив вбрч. ср-ю через $\overline{x}$, имеем

$$P\left(\overline{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma. \tag{2}$$

Смысл стн. (2) таков: с надежностью γ можно утв-ть, что доверительный инр-л $\left]\overline{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$ покрывает неизвестный параметр a с точностью $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

п1. Слн. вел. X рсп-на норм-о с известным ср. кв. отк-ем $\delta = 3$. Найти доверительные инр-ы для оценки неизвестного мт. ож-ия a по вбр-ым ср-им $\overline{x}$, если объем вбр-и $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Р. По табл. T_2 из $2\Phi(t) = 0{,}95$ или $\Phi(t) = 0{,}475$ находим $t = 1{,}96$. Найдем точность оценки $\delta = \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$. Откуда получим доверительные инр-ы $]\overline{x} - 0{,}98,\ \overline{x} + 0{,}98[$. Н-р, при $\overline{x} = 4{,}1$ имеем $3{,}12 < a < 5{,}08$ с надежностью $\gamma = 0{,}95$, т.е. $P(3{,}12 < a < 5{,}08) = 0{,}95$.

зм1. Если δ и γ заданы, то мнм-ый объем вбр-и находим по фм-е $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

3°. Доверительные интервалы оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном $\boldsymbol{\sigma}$. Здесь используем сд. вел-у (ее возможные зн-ия обз-им через t)

$$T=\frac{\overline{x}-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \tag{3}$$

к-ая имеет рсп-ие Стъюдента с $k = n - 1$ степенями (ст.) свободы (см. 6°:4.1), где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ – вбрч-ая ср., $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2 n_i}$ – исправленное ср. кв. отк-ие, n – объем вбр-и.

Слн. вел. (3) имеет сд. дифн-ую фк. рсп-ия (см. (17) из 6°:4.1)

$$S(t,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Поскольку $S(t, n)$ – четная фк. (см. рис. 9 из 6°:4.1) от t, то вер-ть осуществления нерав-ва $\left|\frac{\overline{x}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma$ опр-ся стн-ем

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,n)dt=\gamma.$$

или

$$P\left(\bar{x}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma. \qquad (4)$$

Т.о., пользуясь рсп-ем Стъюдента, нашли доверительный инр-л $\left]\bar{x}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right[$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. Из T_5 по заданным n и γ можно найти t_γ.

п2. Колн-ый признак X гнр-ой свк-ти рсп-ен норм-о. По вбр-е объема $n = 16$ найдены вбрч-ая ср. $\bar{x} = 20{,}2$ и «исправленное» ср. кв. отк-ие $S = 0{,}8$. Оценить неизвестное мт. ож-ие при помощи доверительного инр-а с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Р. По $\gamma = 0{,}95$ и $n = 16$ из табл. T_5 находим $t_\gamma = 2{,}12$. Тогда $\bar{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} =$

$= 20{,}2 - 2{,}12\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}776$; $\bar{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} = 20{,}2 + 2{,}12\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}624$.

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном инр-е $19{,}776 < a < 20{,}624$.

4°. Оценка истинного значения измеряемой величины. Результаты пункта 3° можно использовать для оценки истинного зн-ия измеряемой вел-ы, т.к. эти измерения незв-ы, равноточны и их можно расв-ть как слн. вел-ы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, к-ые имеют одно и то же мт. ож-ие a и рсп-ны норм-о (такое допущение подтверждается опытом). Поскольку σ неизвестно, используем фм-ы (3) и (4).

п3. По данным девяти незв-ых равноточных (измерение производится на одном и том же приборе) измерений физической вел-ы найдены ср. ариф-ое измерений $\bar{x} = 12{,}319$ и «исправленное» ср. кв. отк-ие $S = 5{,}0$. Требуется оценить истинное зн-ие a измеряемой вел-ы с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Р. По $\gamma = 0{,}95$ и $n = 9$ из T_5 находим $t_\gamma = 2{,}26$. Выч-им $t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}26\cdot\frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}777$.

Тогда $\bar{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} = 42{,}319 - 3{,}777 = 38{,}542$; $\bar{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} = 42{,}319 + 3{,}777 = 46{,}096$.

Т.о., с надежностью 0,95 истинное зн. измеряемой вел-ы заключено в доверительном инр-е $38{,}542 < a < 46{,}096$.

5°. Доверительные интервалы оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения. Пусть колн-ый признак X гнр-ой свк-ти рсп-ен норм-о. Найти оценку неизвестного ср.кв. отк-ия σ по вбрч-му ср. кв.

отк-ию S с надежностью γ, т.е. потребуем выполнение стн-ия $P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$ или $P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$.

Чтобы пользоваться готовой табл-й, нерав-во $s - \delta < \sigma < s + \delta$ прб-ем к виду $s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$, отсюда, полагая $\frac{\delta}{s} = q$, получим

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q). \tag{5}$$

Для нахождения q рас-им слн. вел-у «хи» (см. 6°:4.1)

$$\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1} \text{ (n – объем вбр-и)}, \tag{6}$$

дифн. фк-я к-ой имеет вид

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{q^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Тогда вер-ть нерав-ва

$$\chi_1 < \chi < \chi_2 \tag{8}$$

равна заданной вер-ти γ, т.е.

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n) d\chi = \gamma. \tag{9}$$

Теперь нерав-во (5) приведем к виду (8) и для нее получим (9): полагая $q < 1$, из (5) находим $\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)}$, умн-ив на $s\sqrt{n-1}$, получим $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$, или $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$. Отсюда имеем

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(\chi, n) d\chi = \gamma. \tag{10}$$

Из ур-ия (10) по заданным n и γ находим $q = q(\gamma, n)$ из T_6. Выч-ив по вбр-е S и найдя по T_6 параметр q, получим искомый доверительный инр-л (5), покрывающий σ с надежностью γ.

Если же $q > 1$, то нерав-во (5) примет вид (учитывая, что $\sigma > 0$)

$$0 < \sigma < s(1 + q). \tag{11}$$

Откуда находим $\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \infty \Rightarrow \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \infty$. Тогда имеем

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\infty} R(\chi, n) d\chi = \gamma. \tag{12}$$

По n и γ находим $q = q(\gamma, n)$ из той же табл. T_6.

п4. Колн-ый признак X гнр-ой свк-ти рсп-ен норм-о. По вбр-е объема $n = 25$ найдено «исправленное» ср. кв. отк-ие $S = 0,8$. Найти доверительный инр-л, покрывающий гнр-ое ср. кв. отк-ие σ с надежностью 0,95.

Р. Из T_6 по $\gamma = 0,95$ и $n = 25 - 1 = 24$ найдем $q = 0,32$. Откуда получим доверительный интервал $0,8(1 - 0,32) < \sigma < 0,8(1 + 0,32)$ или $0,544 < \sigma < 1,056$.

п5. Как в п4, X рсп-ен норм-о. Известны $n = 10$, $S = 0,16$. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с надежностью $\gamma = 0,999$.

Р. Из T_6 по $\gamma = 0,999$ и $n = 10 - 1 = 9$ находим $q = 1,8$ $(q > 1)$. Тогда по (11) имеем $0 < \sigma < 0,16(1 + 1,8)$ или $0 < \sigma < 0,448$.

6°. Оценка точности измерений. В теории ошибок точность измерений (точность прибора) хркз-ся при помощи ср.кв. отк-ия σ слн-ых ошибок измерений, для оценки к-ой используется «исправленное» ср. кв. отк-ие S. Выводы пункта 5° применимы и здесь, поскольку результаты измерений незв-мы, имеют одно и то же мт. ож-ие (истинное зн-ие измеряемой вел-ы) и одинаковую дсп-ю (в случае равноточных измерений, т.е. прибор один и тот же).

п6. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» ср. кв. отк-ие $S = 0,12$. Найти точность измерений с надежностью 0,99.

Р. Из T_6 по $\gamma = 0,99$ и $n = 15$ находим $q = 0,73$. Тогда доверительный интервал равен $0,12(1 - 0,73) < \sigma < 0,12(1 + 0,73)$ или $0,03 < \sigma < 0,21$.

7°. Другие характеристики вариационного ряда. Кроме вбрч-ой ср. $\bar{x}$ и вбрч-ой дсп-и $D_в$ (S^2 – исправленная) применяются и др. хркс-ки врцн-го ряда. Приведем главные из них.

Модой M_o наз-ют варианту, к-ая имеет нб-ю частоту. Н-р, для ряда $\{x_i, n_i\} = \{1, 4, 7, 9; 5, 1, 20, 6\}$ имеем $M_o = 7$.

Медианой m_e наз-ют врт-у, к-ая делит врцн-ый ряд на две части, равные по числу врт. Если число врт. нечетно, т.е. $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$, а при четном $n = 2k$, то $m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Н-р, для ряда $\{x_i\} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ $m_e = 5$; для ряда $\{x_i\} = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $m_e = \dfrac{5+6}{2} = 5,5$.

Размахом варьирования R наз-ют разность между нб-ей и нм-ей врт-ми $R = x_{нб} - x_{нм}$. Н-р, для ряда $\{x_i\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 10\}$ имеем $R = 10 - 1 = 9$. Размах яв-ся простейшей хркс-ой рассеивания врцн-го ряда.

Средним абсолютным (абс.) отк-ем Θ наз-ют ср. ариф-ое абс-ых отк-й:

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \bar{x}_в|}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n \right).$$

Н-р, для ряда $\begin{Bmatrix} x_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,3,6,16 \\ 4,10,5,1 \end{Bmatrix}$ имеем $\bar{x}_в = \dfrac{4\cdot 1 + 10\cdot 3 + 5\cdot 6 + 1\cdot 16}{4+10+5+1} = \dfrac{80}{20} = 4,$

тогда $\Theta = \dfrac{4|1-4| + 10|3-4| + 5|6-4| + 1|16-4|}{20} = 2{,}2.$

Ср. абс-ое отк. служит для хркс-ки рассеяния врцн-го ряда.

Коэф-ом врц-и V наз-ют выраженное в процентах отн-ие вбрч-го ср.кв. отк-ия к вбрч-ой ср-ей:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в}\cdot 100\%.$$

Коэф-т врц-и служит для сравнения вел-н рассеяния двух врцн-ых рядов: тот из рядов имеет большее рассеяние, у к-го коэф-т врц-и больше.

зм2. Все св-ва вбрч-ых моментов и законов рсп-ия совпадают со св-ми моментов и законов рсп-ия слн-х вел-н, рас-ых в разделе I – теории вер-ей. Поэтому в 4.0 мы включили нек-ые кр. задачи, к-ые можно использовать и в разделе I.

4.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

4.1. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ

Вопросы для самопроверки

1. Приведите основные задачи мт-ой стс-ки.
2. В чем состоит суть выборочного (вбрч.) метода?
3. Дайте опр-ия вбрч-ой и гнр-ой свк-ти, повторной и бесповторной вбр-и.
4. Объясните вбрч-ые рсп-ия, полигоны и гистограммы.
5. Как выравнивается стсч-ие ряды?
6. В чем состоит суть интеграла Пуассон и чему он равен?
7. Как опр-ся гамма фк-я и гамма рсп-ие?
8. В чем состоит суть рсп-ия Пирсона (хи-квадрат)?
9. В чем состоит суть рсп-ия Стъюдента?
10. В чем состоит суть рсп-ия Фишера?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п2 решить з1-з20.

1. Выборка (вбр.) задана в виде частот: $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 2 & 5 & 7 \\ \hline n_{i\cdot} & 1 & 3 & 6 \end{array}$. Найти рсп-ие отс-ых частот. Ук: найдем объем вбр-и $n = 1 + 3 + 6 = 10$ и отс-ые частоты: $P_1^* = 1/10 = 0{,}1$; $P_2^* = 3/10 = 0{,}3$; $P_3^* = 6/10 = 0{,}6$. О: $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 2 & 5 & 7 \\ \hline p_{i\cdot} & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{array}$.

2. Вбр. задана в виде частот: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 4 & 7 & 8 & 12 \\ \hline n_{i\cdot} & 5 & 2 & 3 & 10 \end{array}$. Найти рсп-ие отс-ых частот. О: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 4 & 7 & 8 & 12 \\ \hline p_{i\cdot} & 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}50 \end{array}$.

3. Найти эмпирическую (эмп.) фк. по данному рсп-ию вбр-и: $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 1 & 4 & 6 \\ \hline n_{i\cdot} & 10 & 15 & 25 \end{array}$. Начертить график (грф.) полученного результата. Ук: найдем $n = 10 + 15 + 25 = 50$ – объем вбр-и. Нм. варианта равна единице, сд-но, $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$. Зн-ие $x < 4$, а именно $x_1 = 1$, нбл-сь 10 раз, тогда $F^*(x) = 10/50 = 0{,}2$ при $1 < x \le 4$ и т.д. О: $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}2 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 1 \text{ при } x > 6 \end{cases}$ (рис. 1).

4. Найти эмп. фк-ю по данному рсп-ю вбр-и: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 2 & 5 & 7 & 8 \\ \hline n_{i\cdot} & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}$. Ук: см. з3.

$$О: F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}1 \text{ при } 2 < x \le 5, \\ 0{,}4 \text{ при } 5 < x \le 7, \\ 0{,}6 \text{ при } 7 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$$

5. Найти эмп. фк-ю по данному рсп-ю вбр-и:

x_i	4	7	8
$n_{i\cdot}$	5	2	3

$$\text{О: } F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 4, \\ 0{,}4 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 07 \text{ при } 7 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$$

6. Построить полигон частот по данному рсп. вбр-и:

x_i	1	4	5	7
$n_{i\cdot}$	20	10	14	6

Ук: отложим на оси Ox варианты x_i, на оси Oy – n_i, соединив точки (x_i, n_i) отрезками прямых, получим полигон частот (рис. 2).

7. Построить полигон частот вбр-и

x_i	2	3	5	6
$n_{i\cdot}$	10	15	5	20

8. Построить полигон частот вбр-и

x_i	15	20	25	30	10
$n_{i\cdot}$	10	15	30	20	25

9. Построить полигон отс-ых частот по данному рсп. вбр-и. Ук: отложим на оси Ox варианты x_i, оси Oy – n_i. Соединив точки (x_i, w_i) отрезками пм-х, получим искомый полигон отс-ых частот (рис. 3).

x_i	2	4	5	7	10
$w_{i\cdot}$	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

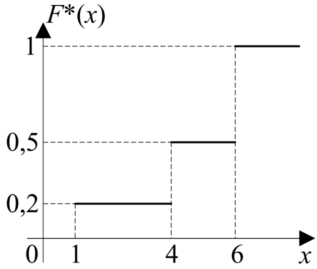


Рис. 1

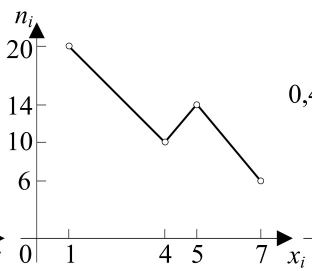


Рис. 2

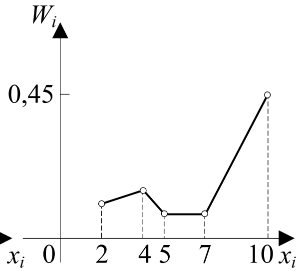


Рис. 3

10. Построить полигон отс-ых частот по данному рсп. вбр-и.

x_i	1	4	5	8	9
$w_{i\cdot}$	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

11. Построить гистограмму частот по данному рсп. вбр-и объема n = 100:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Ук: построим на оси Ox заданные интервалы h = 4, на оси Oy отложим отрезки, равные ств-им плотностям частоты n_i/h, н-р, для интервала (1, 5) n_i/h = = 10/4 = 2,5; анч-но строят остальные отрезки. Гистограмма изб. на рис. 4.

12. Построить гистограмму частот по данному рсп. вбр-и:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

Ук: предварительно найти n_i/h и заполнить последний столбец табл.

13. Построить гистограмму по данному рсп. вбр-и:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

Ук: найти предварительно n_i/h и заполнить последний столбец табл.

14. Построить гистограмму отс-ых частот по данному рсп. вбр-и:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50
		$n = \Sigma n_i = 100$

Ук: найдем отс. частоты $w_1 = 20/100 = 0{,}2$; $w_2 = 0{,}2$; $w_3 = 0{,}5$ и плотности отс-ых частот при $h = 2$: $w_1/h = 0{,}2/2 = 0{,}1$; $w_2/h = 0{,}15$; $w_3/h = 0{,}25$. Гистограмма изб. на рис. 5.

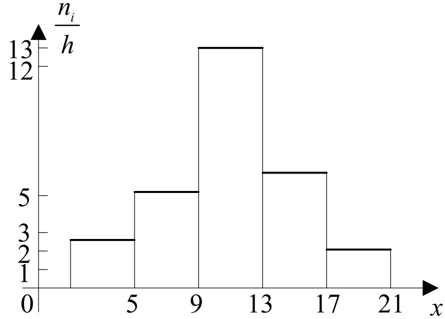


Рис. 4

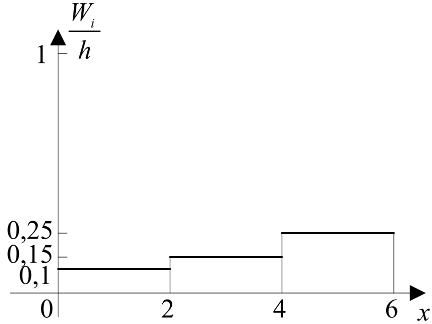


Рис. 5

15. Построить гистограмму отс-ых частот по данному рсп. вбр-и:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n = \Sigma n_i = 20$

Ук: найти сначала отс. частоты и ств-щие плотности отс-ой частоты для каждого инр-а.

16. Построить гистограмму отс-ых частот по данному рсп. вбр-и:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
		$n = \Sigma n_i = 25$

Ук: предварительно найти отс. частоты и ств-щие плотности отс-ой частоты.

17. Записать в виде врцн-го и стсч-го рядов вбр-у 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Опр-ть размах вбр-и. Ук: найти $n = 15$ объем вбр-и. Упорядочив эл-ты вбр-и по вел-е, получим врцн-ый ряд 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10. Размах вбр-и $w = 10 - 2 = 8$. Стсч-й ряд имеет вид $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_i & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 10 \\ \hline n_i & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}$.

Проверка: $\Sigma n_i = 15$.

Для каждой из приведенных ниже вбр-к опр-ть размах, а также построить врцн-ый и стсч-й ряды (см. з17).

18. 3, 8, 1, 3, 6, 5, 2, 2, 7.

19. 11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11, 12, 13, 16, 9, 8, 14, 5, 11, 3.

20. 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18.

4.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Приведите точечные оценки параметров рсп-ия.
2. Какие условия нх-мы, чтобы оценка была «доброкачественная»?
3. Приведите оценки мт. ож-ия и дсп-и, а также др. стсч-ие моменты.
4. Как врж-ся гнр-я, вбр-я, групповая и общая ср-ие?
5. Как врж-ся гнр-я, вбр-я, групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дсп-и?
6. Как связана общая дсп. с внутригрупповой и межгрупповой дсп-ми?

7. В чем состоит суть упрощенного способа для выч. стсч-их хркс. вбр-и?

8. Приведите основные св. мт. ож-ия и дсп-и.

Задание для кр. работы: по образцу п1-п7 решить з1-з20.

1. На телефонной станции проводились нбл-ия над числом X неправильных соединений в минуту. Нбл-ия в течение часа дали сд-ие результаты $\{x_i\}$: 3, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 4, 0, 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1, 4, 3, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 3, 2, 7, 2, 0, 0, 1, 3, 3, 1, 2, 4, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 5. Найти:

1) шкалу интервалов и сгруппировать результаты нбл-й (см. п7);

2) вбрч-ю фк. рсп-ия $\hat{F}(x)$ и начертить ее график (см. рис. 7);

3) вбрч-ю фк. плотности $\hat{f}(x)$ и построить ее график (см. рис. 6);

4) ср. ариф-ое $\bar{x}$ и вбрч-ю дсп-ю $\hat{D}(x)$ (см. п7);

5) ср. кв. отк-ие $\hat{\sigma}(x)$, асимметрию S_x и эксцесс E_x.

О: после ранжирования нбл-й $\{x_i\}$ получим

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	1	2	3	4	5	7
m_i	8	17	16	10	6	2	1
$\hat{P}_i$	$\frac{8}{60}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{1}{60}$

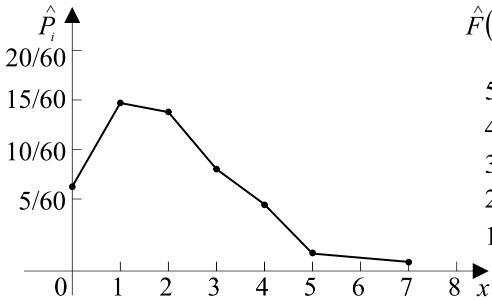


Рис. 6

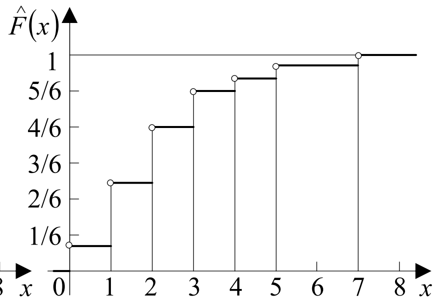


Рис. 7

2. Предлагается бросать монету, при этом произвести нбл-ие $\{y_i\}$ – выпадение герба «Γ» – 1 и не герба «$\bar{\Gamma}$» – 2, т.е. если выпал Г, то $y_i = 1$, если $\bar{\Gamma}$, то $y_i = 2$ ($i = \overline{1,60}$). В з1 вместо $\{x_i\}$ взять $\{x_i\} + \{y_i\}$ и решить задачу, как з1.

3-10. Сформулировать исх. данные, как в з2, и решить, как з1.

11. Предлагается бросать игральную кость, производя нбл-ие $\{y_i\}$ – выпадение очков, т.е. y_i = 1/2/3/4/5/6 (/ – знак «или»), ($i = \overline{1,60}$). В з1 вместо $\{x_i\}$ взять $\{x_i\} + \{y_i\}$ и решить задачу, как з1.

12-20. Сформулировать исх. данные, как в з11, и решить, как з1.

В з21-з40 две незв. дк. слн. вел-ы X и Y заданы своими законными рсп-ми. Найти мт. ож-ие и дсп-ю для слн. вел-ы $Z = 3X - 2Y$.

21. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -6 & 8 & 9 & 10 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -8 & 2 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$

22. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -2 & -1 & 0 & 3 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -3 & 2 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$

23. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -5 & -4 & -2 & -3 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -8 & -1 \\ \hline P & 0{,}7 & 0{,}3 \end{array}$

24. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -6 & -3 & 2 & 1 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -2 & 8 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

25. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -4 & -2 & -1 & 3 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -3 & -1 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$

26. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 3 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

27. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -7 & -5 & -2 & 3 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -3 & 4 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}$

28. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -2 & 1 \\ \hline P & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}$

29. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -8 & -6 & -1 & 5 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 3 & 7 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

30. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -2 & 1 & 3 & 8 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 7 & 10 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}$

31. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -7 & 0 & 2 & 6 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -3 & 2 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$

32. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -4 & -1 & 3 & 8 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 4 \\ \hline P & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}$

33. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -5 & -2 & 3 & 7 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 5 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

34. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -3 & -1 & 0 & 2 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & -3 & 2 \\ \hline P & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$

35. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -8 & -6 & -1 & 3 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 2 & 8 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$

36. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -2 & -1 & 3 & 8 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 5 \\ \hline P & 0{,}7 & 0{,}3 \end{array}$

37. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -3 & 0 & 2 & 7 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$

38. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -5 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 2 & 3 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$

39. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -3 & 2 & 4 & 6 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 3 & 7 \\ \hline P & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}$

40. $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -3 & -7 & 1 & 2 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 2 & 4 \\ \hline P & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$

Решение типового примера. Заданы законы рсп-ия двух незв. слн. вел-н X и Y: вбр-и: $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 4 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$. Найти мт. ож-ие и дсп-ю для слн. вел-н $Z = 2X - 7Y$.

Р. Найдем $M[X] = -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3$; $M[Y] = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}8 = 3{,}4$. Напишем законы рсп-ия слн-х вел-н X^2 и Y^2: $\begin{array}{c|c|c|c|c} X^2 & 25 & 4 & 9 & 16 \\ \hline P & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c} Y^2 & 1 & 4 \\ \hline P & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$. Вычислим мт. ож-ие $M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3$; $M(Y^2) = 1\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}8 = 13{,}0$. Отсюда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21$; $D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 13{,}0 - 3{,}4^2 = 1{,}44$. Тогда $M(Z) = M(2X - 7Y) = 2M(X) - 7M(Y) = 2(-0{,}3) - 7\cdot 3{,}4 = -24{,}4$; $D(Z) = D(2X - 7Y) = 4D(X) + 49D(Y) = 4\cdot 15{,}21 + 49\cdot 1{,}44 = 131{,}4$.

В задачах 41-60 слн. вел-а X задана фк-ей рсп-ия $F(x)$. Найти: а) вер-ть попадания слн. вел-ы X в инр-л $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$; б) плотность рсп-ия вер-ей слн. вел. X; в) мт. ож-ие слн. вел-ы X.

41. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)^2, -1<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

42. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x,\ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

43. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -2,\\ \frac{1}{9}(x+2)^2,\ -2<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

44. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x,\ 0<x<1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

45. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x,\ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

46. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2,\ -2<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$

47. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -1,\\ \frac{1}{9}(x+1)^2,\ -1<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$

48. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x,\ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

49. $F(x)=\begin{cases}0, x\le \frac{1}{5},\\ \left(x-\frac{1}{5}\right)^2,\ \frac{1}{5}<x\le \frac{6}{5},\\ 1, x>\frac{6}{5}.\end{cases}$

50. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x,\ 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$

51. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{3}x^2+3x,\ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

52. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{27}x^2+\frac{2}{9}x,\ 0<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$

53. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -2,\\ \frac{1}{49}(x+2)^2,\ -2<x\le 5,\\ 1, x>5.\end{cases}$

54. $F(x)=\begin{cases}0, x\le \frac{1}{4},\\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2,\ \frac{1}{4}<x\le \frac{5}{4},\\ 1, x>\frac{5}{4}.\end{cases}$

55. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -1,\\ \frac{1}{16}(x+1)^2, \ -1<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$ 56. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x, \ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

57. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -\frac{1}{2},\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2, -\frac{1}{2}<x\le \frac{1}{2},\\ 1, x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ 58. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x, \ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

59. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x, \ 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$ 60. $F(x)=\begin{cases}0, x\le -1,\\ \frac{1}{25}(x+1)^2, \ -1<x\le 4,\\ 1, x>4.\end{cases}$

Решение типового примера. Слн. вел. X задана фк. рсп. $F(x)$:

$F(x)=\begin{cases}0, x\le -3,\\ \frac{1}{9}(x+3)^2, \ -3<x\le 0,\\ 1, x>0.\end{cases}$ Найти: а) вер-ть попадания слн. вел-ы X в инр-л $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$; б) плотность рсп-ия слн. вел. X; в) мт. ож-ие слн. вел-ы X.

Р. а) вер-ть того, что слн. вел. X примет зн-е, заключенное в инр-е $\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right[$, равна приращению фк-и рсп-ия на этом инр-е: $P\left(-\frac{1}{2}<\text{X}<-\frac{1}{4}\right)=$

$$= F\left(-\frac{1}{4}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}+3\right)^2-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2=\frac{7}{48};$$

б) найдем плотность рсп-ия $F'(x)=f(x)=\begin{cases}0, x\le -3,\\ \frac{2}{9}(x+3), \ -3<x\le 0,\\ 0, x>0;\end{cases}$

в) мт. ож-ие слн. вел-ы X находим по фм-е

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-3}^{0}x\frac{2}{9}(x+3)dx=\frac{2}{9}\int_{-3}^{0}\left(x^2+3x\right)dx=\frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0}=-1.$$

4.3. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ И НАДЕЖНОСТЬ. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается интервальная (инрн.) оценка от точечной?
2. Приведите доверительный инр-л для оценки мт. ож-ия a при известном σ.
3. Приведите довер. инр-л для оценки мт. ож-ия a при неизвестном σ.
4. Как оценивается истинное зн. измеряемой вел-ы?
5. Приведите довер. инр-л оценки ср.кв. отк-ия σ норм. рсп-ия.
6. Как оценивается точность измерений с данной надежностью?
7. Какие еще хркс-ки врц-го ряда известны?

Задание для кр. работы: на основе п1-п6 решить сд-ие задачи.

В з1-з20 предполагается, что слн. отк-ия контролируемого (крум.) размера детали, изготовленной станком-автоматом, от проектного размера подчиняются норм. закону рсп-ия со ср. кв. отк-ем σ (мм) и мт. ож-ие $a = 0$. Деталь, изготовленная станком-автоматом, считается годной, если отк-ие крум-го размера от проектного по абс-ой вел-е не превышает m (мм). Сколько процентов годных деталей изготовляет станок?

1. $\delta = 20, \sigma = 10$. 2. $\delta = 50, \sigma = 30$. 3. $\delta = 6, \sigma = 3$. 4. $\delta = 35, \sigma = 17$.
5. $\delta = 15, \sigma = 7$. 6. $\delta = 40, \sigma = 22$. 7. $\delta = 18, \sigma = 10$. 8. $\delta = 6, \sigma = 35$.
9. $\delta = 8, \sigma = 5$. 10. $\delta = 45, \sigma = 20$. 11. $\delta = 17, \sigma = 10$. 12. $\delta = 28, \sigma = 16$.
13. $\delta = 12, \sigma = 8$. 14. $\delta = 32, \sigma = 18$. 15. $\delta = 40, \sigma = 18$. 16. $\delta = 44, \sigma = 20$.
17. $\delta = 25, \sigma = 12$. 18. $\delta = 50, \sigma = 28$. 19. $\delta = 30, \sigma = 18$. 20. $\delta = 38, \sigma = 16$.

Решение типового примера. Станок-автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отк-ие X размера его диаметра от проектного по абс-ой вел-е меньше $\delta = 0{,}9$ мм. Считая, что слн. вел. X рсп-на норм-о с мт. отк-ем $a = 0$ и со ср. кв. отк-ем $\sigma = 0{,}5$ мм. Найти, сколько процентов годных шариков изготовляет станок-автомат.

Р. Воспользуемся фм-ой $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$, где $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, $2\Phi(x)$ – фк-я Лапласа (см. табл. T_2).

По условию задачи $a = 0$, $\sigma = 0{,}5$, $\delta = 0{,}9$, поэтому $P(|X| < 0{,}9) = 2\Phi(1{,}8) = 2 \cdot 0{,}4641 = 0{,}9282$.

Т.о., станок-автомат изготавливает 92,8% годных шариков.

В з21-з40 известно, что проведено n равноточных измерений нек-ой физической вел-ы и найдено ср. ариф-ое результатов измерений $\bar{x}$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным ср. кв. отк-ем ошибок измерений. Считая результаты измерений норм-о рсп-ой слн. вел-ой, найти с надежностью γ доверительный интервал для оценки истинного зн-ия измеряемой физической вел-ы.

21. $\bar{x} = 40{,}2$; $\sigma = 2{,}3$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 16$. 22. $\bar{x} = 83{,}1$; $\sigma = 3{,}2$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 24$.

23. $\bar{x}$ = 45,7; σ = 3,7; γ = 0,93; n = 9. 24. $\bar{x}$ = 48,9; σ = 4,1; γ = 0,85; n = 15.
25. $\bar{x}$ = 20,3; σ = 1,8; γ = 0,95; n = 18. 26. $\bar{x}$ = 73,2; σ = 5,7; γ = 0,92; n = 25.
27. $\bar{x}$ = 88,3; σ = 6,1; γ = 0,95; n = 30. 28. $\bar{x}$ = 68,1; σ = 5,1; γ = 0,90; n = 17.
29. $\bar{x}$ = 72,8; σ = 4,7; γ = 0,92; n = 14. 30. $\bar{x}$ = 83,7; σ = 6,2; γ = 0,90; n = 12.
31. $\bar{x}$ = 47,2; σ = 3,4; γ = 0,95; n = 28. 32. $\bar{x}$ = 53,1; σ = 4,2; γ = 0,85; n = 8.
33. $\bar{x}$ = 37,8; σ = 6,7; γ = 0,80; n = 30. 34. $\bar{x}$ = 41,7; σ = 3,4; γ = 0,95; n = 12.
35. $\bar{x}$ = 87,4; σ = 7,1; γ = 0,90; n = 14. 36. $\bar{x}$ = 91,2; σ = 6,8; γ = 0,85; n = 17.
37. $\bar{x}$ = 48,5; σ = 4,2; γ = 0,95; n = 18. 38. $\bar{x}$ = 71,5; σ = 5,3; γ = 0,90; n = 14.
39. $\bar{x}$ = 82,5; σ = 3,4; γ = 0,90; n = 20. 40. $\bar{x}$ = 34,2; σ = 2,8; γ = 0,95; n = 22.

41 (типовой пример). Пусть в результате 25 измерений ср. ариф-ое результатов измерений $\bar{x}$ оказалось равным 42,5 м со ср. кв. отк-ем σ = 2,1. Считая результаты измерений норм-о рсп-ой слн. вел-ой, найти с надежностью γ = 0,95 доверительный инр. для оценки истинного зн-ия измеряемой физической вел-ы.

Р. Для оценки мт. ож-ия a норм-о рсп-ой слн. вел-ы по вбрч-ой ср-ей $\bar{x}$ при известном σ служит доверительный инр. $\bar{x} - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, где t – такое зн. аргумента фк-и Лапласа $\Phi(t)$, при к-ом $\Phi(t) = \dfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}95 = 0{,}475$. Отсюда по Т$_2$ находим t = 1,96, тогда $42{,}5 - \dfrac{1{,}96\cdot 2{,}1}{5} < a < 42{,}5 + \dfrac{1{,}96\cdot 2{,}1}{5}$ или $41{,}7 < a < 43{,}3$.

В з42-з61 задана вбр. зн-й норм-го рсп-ия признака X (даны зн-я признака x_i и ств-ие им частоты n_i). Найти: 1) вбрч-ю ср. $\bar{x}$ и исправленное ср. кв. отк-ие s; 2) доверительный инр-л, покрывающий неизвестное мт. ож-ие a признака X; 3) доверительный инр-л, покрывающий неизвестное ср. кв. отк-ие σ признака X (надежность оценки во всех врт-ах считать равной γ = 0,95).

42.

x_i:	– 3	1	2	4	5	7
n_i:	1	2	2	3	2	4

43.

x_i:	– 5	– 2	3	4	6	7
n_i:	2	3	1	3	4	5

44.

x_i:	– 3	– 2	1	2	4	6
n_i:	3	2	2	4	5	1

45.

x_i:	– 5	– 4	2	4	7	8
n_i:	1	2	4	5	4	3

46.

x_i:	– 6	– 4	– 3	2	3	5
n_i:	2	4	6	1	3	5

47.

x_i:	– 2	– 1	1	3	5	6
n_i:	1	2	4	6	3	1

48.

x_i:	– 7	– 6	– 4	2	3	5
n_i:	1	3	5	3	4	2

49.

x_i:	– 3	– 2	1	4	5	7
n_i:	2	4	6	1	3	3

50.

x_i:	– 5	– 2	– 1	2	4	6
n_i:	1	4	6	5	1	3

51.

x_i:	– 6	– 2	– 1	3	5	7
n_i:	1	2	4	4	5	1

52.

x_i:	– 3	1	4	5	7	8
n_i:	4	2	3	5	1	1

53.

x_i:	– 3	– 2	1	3	4	7
n_i:	1	4	4	3	5	1

54.

x_i:	– 3	– 1	3	4	5	6
n_i:	2	4	5	4	3	2

55.

x_i:	– 5	– 4	1	3	6	2
n_i:	2	3	3	4	3	1

56.

x_i:	2	4	5	7	8	9
n_i:	1	4	3	3	4	1

57.

x_i:	– 2	– 1	1	3	5	6
n_i:	2	2	3	1	4	5

58.

x_i:	– 1	2	3	5	7	9
n_i:	2	3	5	5	1	1

59.

x_i:	– 5	– 4	6	7	8	9
n_i:	3	3	1	4	2	2

60.

x_i:	– 4	– 2	– 1	3	5	6
n_i:	1	5	5	4	3	1

61.

x_i:	– 2	– 1	2	4	5	6
n_i:	1	5	5	1	3	3

62 (типовой пример). Задана вбр. зн-й признака X, имеющего норм. рсп-ие:

x_i:	– 2	1	2	3	4	5
n_i:	2	1	2	2	2	1

. Требуется: 1) найти вбрч-ю ср. $\bar{x}$ и исправленное ср. кв. отк-ие s; 2) указать доверительный инр-л, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное мт. ож-ие a признака X; 3) указать доверительный инр-л, покрывающий с надежностью 0,95 ср. кв. отк-ие σ признака X.

Р. 1) выч-им объем вбр-и: $n = \sum n_i = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10$. Тогда $\bar{x} =$

$$= \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{10}(-2{\cdot}2 + 1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 4{\cdot}2 + 5{\cdot}1) = 2;\ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i =$$

$$= \frac{1}{9}[(-2-2)^2{\cdot}2 + (1-2)^2{\cdot}1 + (2-2)^2{\cdot}2 + (3-2)^2{\cdot}2 + (4-2)^2{\cdot}2 + (5-2)^2{\cdot}1] = 5{,}76;$$

$s = 2{,}4$;

2) искомый доверительный инр-л для мт. ож-ия a имеет вид $\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} <$

$< a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$, где t_γ находим по табл. T_5. При $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ имеем $t_\gamma =$

$= 2{,}23$. Тогда $\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 - 2{,}23\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 0{,}3$; $\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 + 2{,}23\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 3{,}7$.

Т.о., получили $0{,}3 < a < 3{,}7$;

3) доверительный инр-л для гнр-го ср. кв. отк-ия σ имеет вид $s(1 - q) < \sigma <$ $< s(1 + q)$, если $q < 1$ и $0 < \sigma < s(1 + q)$, если $q \geq 1$. Ств. зн-ия q указаны в T_6. По заданным $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10 - 1 = 9$ находим $q = 0{,}65 < 1$. Тогда $2{,}4(1 -$ $- 0{,}65) < \sigma < 2{,}4(1 + 0{,}65)$ или $0{,}84 < \sigma < 3{,}96$.

5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

…С полным устранением гипотезы, т.е. направляющей мысли, наука превратилась бы в нагромождение голых фактов.

К.А. Тимирязев

ЛЕКЦИЯ 13

5.1. О СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗАХ. ГИПОТЕЗЫ О ВЕРОЯТНОСТИ И РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

1°. Постановка задачи. Основные понятия. Часто закон рсп-ия генеральной (гнр.) совокупности (свк.) $F_\xi(x)$ бывает неизвестным и возникает нх-ть его опр-ия по эмпирическим (эмп.) данным, т.е. через эмп-ю фк-ю рсп-ия $F_n(x)$.

В таких сл-х, исходя из нек-х соображений, выдвигают предположение (гипотезу) о виде фк-и рсп-ия $F(x)$, т.е. $F_\xi(x) = F(x)$.

Если нет оснований делать такое предположение, то полагают, что фк-я рсп-ия $F_\xi(x)$ принадлежит к нек-у классу фк-й, зв-щих от параметров a_1, a_2, …, a_τ ($\tau \geq 1$), т.е. $F_\xi(x) = F(x, a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$. Здесь фк-я $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$ известна, а параметры a_1, a_2, …, a_τ неизвестны. Поэтому если есть основания предположить, что неизвестный параметр a равен опр-у значению a_0, то выдвигают гипотезу (гп.): $a = a_0$.

Возможны и др. гп-ы: о рав-ве параметров двух или нескольких рсп-й, о незвт-и вбр-к и т.д.

Статистической (стсч.) наз-ют гп-у о виде неизвестного рсп-ия, или о параметрах известных рсп-й. Все остальные – не стсч-ие. Н-р, гп-за «В 2015 г. не будет войны» не яв-ся стсч-ой. Мы рас-им только стсч-ие гп-ы и в дальнейшем будем называть их просто гп-ми.

Причем выдвинутую гп. H_0 наз-ем нулевой (основной). Гп-у H_1, противоречащую H_0, наз-ем конкурирующей (альтернативной). Н-р, если нулевая гп. состоит в предположении, что мт. ож-ие a норм-го рсп-ия равно 10, то альтернативная гп-а может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это запишем так: H_0: $a = 10$, H_1: $a \neq 10$.

Простой наз-ют гп-у, содержащую только одно предположение. Н-р, если λ – параметр показательного рсп-ия, то гп-а H_0: $\lambda = 5$ – простая. Гп. H_0: мт. ож-ие норм. рсп-ия $a = 3$ (σ известно) – простая.

Сложной наз-ют гп-у, к-ая состоит из конечного или беск-го числа простых гп-з. Н-р, сложная гп. H: $\lambda > 5$ состоит из бесчисленного мн-ва простых гп-з вида H_i: $\lambda = b_i$, где b_i – любое число, большее 5. Гп-а H_0: мт. ож-ие норм. рсп-ия $a = 3$ (σ неизвестно) – сложная.

Выдвинутая гп. может быть правильной или неправильной, поэтому возникают ее проверки. При этом могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается гп-а H_0 (принимается альтернативная гп. H_1), когда гп-а H_0 верна.

Вер-ть совершить ошибку первого рода обз-им через α и назовем уровнем значимости. Обычно полагают α равным 0,05; 0,01; 0,005; 0,001. Если, н-р, принят уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, то это означает, что в пяти случаях из ста мы рискуем допустить ошибку первого рода. Уровень значимости α – вер-ть ошибки первого рода запишем условной вер-ю:

$$\alpha = P(H_1/H_0), \tag{1}$$

где $P(H_1/H_0)$ – вер-ть того, что будет принята гп. H_1, если на самом деле в гнр-ой свк-ти верна гп. H_0. Чем меньше α, тем меньше вер-ть отклонить верную гп-у.

Вер-ть ошибки второго рода обз-ют через β, т.е.

$$\beta = P(H_0/H_1), \tag{2}$$

где $P(H_0/H_1)$ – вер. того, что будет принята гп. H_0, если на самом деле верна гп. H_1. В 2° (см. 11) покажем, что, зная α, можно найти вер. β.

Правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1) гп. H_0 принимается, причем и в дсв-сти она верна, т.е. $P(H_0/H_0) = 1 - \alpha$;

2) гп. H_0 отвергается, причем и в дсв-сти она неверна, т.е. $P(H_1/H_1) = 1 - \beta$.

Расв-ые случаи наглядно иллюстрирует сд-ая табл.

Гипотеза H_0	Отвергается	Принимается
верна	ошибка 1-го рода	правильное решение
неверна	правильное решение	ошибка 2-го рода

Все выдвинутые гп. нх-мо проверить по эмп-им данным, т.е. по вбр-е. Иначе нх-мы критерии (кт.), к-ые позволяли бы судить, согласуются ли нблм-ые зн-ия с выдвинутой гп-ой.

Н-р, пусть заданы фк. $F_\xi(x) = F(x)$ и пусть $F_n(x)$ – эмп. фк-я рсп-ия вбр-и. Опр-им нек-ую неотц. меру K отк-ия эмп-ой фк-и рсп-ия $F_n(x)$ от предполагаемой теор-ой фк-и рсп-ия $F(x)$: $K = K(F_n, F)$, причем K – слн. вел-а (в силу слн-ти $F_n(x)$) наз. стсч-им кт-ем (или кт-ем согласия, кт-ем значимости, или решающим правилом) и используется для проверки нулевой гп-ы. Слн. вел-у K можно опр-ть различными способами в ств-и с к-ми получаются различные кт-и для проверки интересующей нас гп-ы. Так, если полагать

$$K(F_n, F) = \operatorname*{Sup}_x |F_n(x) - F(x)|,$$

то получим кт-й Колмогорова. А если

$$K(F_n, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_n(x) - F(x)\right]^{2k} dF(x),$$

то получим (при $k = 1$) кт-й ω^2 Мизеса. Есть и др. кт-и (см. подробности в [30, 35, 47, 53, 57]).

В общем случае кт-й K зв-т от вбр-и, т.е. $K = K(x_1, \ldots, x_n)$, для к-ой предполагается известным условное рсп. $F(K/H_0)$ отс-но гп-ы H_0.

Предположим, что выдвинутая гп. верна, т.е. H_0: $F_\xi(x) = F(x)$. Тогда рсп-ие слн. вел-ы K может быть найдено по заданным α – уровню значимости и K_0 – предела значимости, связанным между собой с вер-ю

$$P(K > K_0) = \alpha. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что если $K > K_0$, то гп-а H_0 отвергнута опытом, ибо произошло невозможное сб-ие. Если же $K < K_0$, то считают, что гп-а H_0 не противоречит опытным данным и может быть принята.

Точка K_0 наз. критической (крт.) точкой, где K_0 – плж. число.

Если K_0 отц. число, то (3) принимает вид

$$P(K < K_0) = \alpha. \qquad (4)$$

Объединив (3) и (4), получим

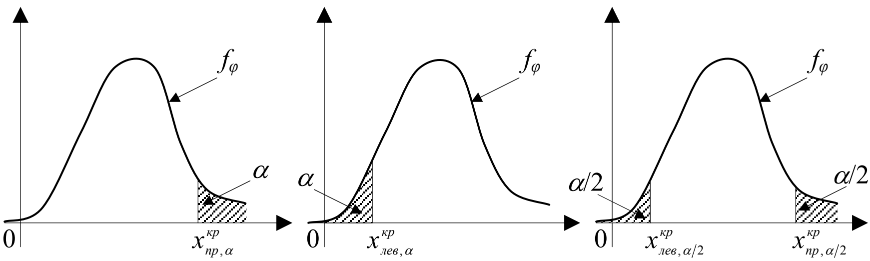
$$P(K < K_1, K_2 < K) = P(K < K_1) + P(K > K_2) = \alpha, \qquad (5)$$

где $K_1 < K_2$. Если крт-ие точки K_1 и K_2 симметричны отс-но нуля, то $K < -K_0$, $K > K_0$, откуда $|K| > K_0$ и (5) принимает вид $P(|K| > K_0) = \alpha$. В этом случае справедливо также стн-ие $P(K < -K_0) = P(K > K_0)$. Отсюда, учитывая (3), имеем

$$P(K > K_0) = \alpha/2, \qquad (6)$$

где K может быть как плж-ым, так и отц-ым.

Крт-ой обл-ю $\mathcal{K}$ наз-ют свк-ть зн-й кт-ия K, при к-ых нулевую гп-у H_0 отвергают. Причем для (3) $K > K_0$ наз. правосторонним (прс.) критической обл-ю (рис. 1, а; где $K_0 = x^{кр}_{пр,\alpha}$), для (4) $K < K_0$ – левосторонней (лвс.) (рис. 1, б; где $K_0 = x^{кр}_{лв,\alpha}$) и для (5) $K < K_1$, $K_2 < K$ ($K_1 < K_2$) наз. двусторонней (двс.) крт-ой обл-ю (рис. 1, в; где $K_0 = x^{кр}_{пр,\alpha/2}$, $x^{кр}_{лв,\alpha/2}$).



а) б) в)

Рис. 1

Обл-ю принятия гп-ы (обл-ю допустимых зн-й) наз-ют свк-ть зн-й кт-ев, при к-ых гп-у H_0 принимают. Обз-им ее через $\overline{\mathcal{K}}$.

Основной принцип проверки стсч-их гп-з можно сформулировать так: если нблм. зн-ие кт-ия принадлежит крт-ой обл-и, т.е. $K \in \mathcal{K}$, то гп-у H_0 отвергают, если нблм. зн-ие кт-ия принадлежит обл-и принятия гп-ы, т.е. $K \in \overline{\mathcal{K}}$ (иначе $K \notin \mathcal{K}$), то гп-у H_0 принимают.

При таких обз-ях стн-ия (4), (5) с учетом (1) можно записать так:

$$P_{H_0}(x \in \mathcal{K}) = P_0(x \in \mathcal{K}) = \alpha, \qquad (7)$$

где α – ошибка первого рода, т.е. вер-ть отвергнуть гп-у H_0, когда она верна (здесь K обз-ли через x).

2º. О выборе критической области. Мощность критерия. Ошибку второго рода β – вер-ть отвергнуть гп-у H_1 (т.е. принять гп-у H_0, когда верна H_1) с учетом (2) можно представить так:

$$P_{H_1}(x \in \overline{\mathcal{K}}) = P_1(x \in \overline{\mathcal{K}}) = \beta. \tag{8}$$

Вер-ть

$$P_1(x \in \mathcal{K}) = 1 - \beta \tag{9}$$

наз. мощностью кт-ия.

При заданной ошибке первого рода α крт-ю обл. $\mathcal{K}$ следует строить так, чтобы мощность кт-ия $1 - \beta$ была мкс-ой. Это обеспечит мнм-ю ошибку второго рода β. Рас-им иллюстрационный

п1. Пусть в слн. вбр-е $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ вел-ы x_i рсп-ны норм-о с параметрами (a, σ^2). Параметр σ^2 известен, а для a имеются две гп-ы H_0: $a = a_0$, H_1: $a = a_1$ $(a_0 < a_1)$. Несмещенной и состоятельной оценкой мт. ож-ия яв-ся $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Выбирать надо ту гп-у, к параметру a к-ой ближе $\overline{x}$.

Р. При любой из гп-з (H_0 или H_1) $\overline{x}$ имеет норм. рсп-ие с $D(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Но $M(\overline{x})$ зв-т от гп-ы. Сд-но, рсп-ия $\overline{x}$ при H_0 и H_1 различны, ств-ие их вер-сти обз-им через P_0 и P_1.

Выберем нек-ое число k_0, $a_0 < k_0 < a_1$. Кт-й можно сформулировать так: если $\overline{x} > k_0$, то принимается H_1, а если $\overline{x} < k_0$, то принимается H_0. Тогда ошибка первого рода имеет вид $\alpha = P_0(\overline{x} > k_0) = P_0\left(\frac{\overline{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} > (k_0 - a_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = P_0\left(\frac{\overline{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, т.к. $(\overline{x} - a_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ имеет норм. рсп-ие и $(k_0 - a_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = u_\alpha$. Откуда получим

$$k_0 = a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha. \tag{10}$$

Ошибка 2-го рода β уд-ет стн-ю

$$\beta = P_1(\overline{x} < k_0) = P_1\left(\frac{\overline{x} - a_1}{\sigma/\sqrt{n}} < (k_0 - a_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = P_1\left(\frac{\overline{x} - a_1}{\sigma/\sqrt{n}} > (k_0 - a_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \beta.$$

Поэтому $(k_0 - a_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = u_{1-\beta} = -u_\beta$ или $k_0 = a_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\beta$. Подставив сюда (10), получим

$$u_\alpha + u_\beta = \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\,. \tag{11}$$

Из (11) легко найти n при заданных α и β. Если n задано, то (11) используется для вбр-и α и β, к-ые выбираются на основе нежелательности ошибок 1-го или 2-го рода (если α и n фиксированы, то β опр-ся однозначно). Иногда степень «нежелательности» можно выразить довольно точно. Н-р, пусть при проверке бракованное (брн.) изделие может быть пропущено с вер-ю α и хорошее изделие принято за брн-ое с вер-ю β. Если брн. изделие продано, то за его гарантийный ремонт надо платить P руб. Если хорошее забраковано, то теряется его стоимость Q руб. Пусть в проверяемой партии из N изделий примерно M брн-ых. Тогда средние потери при контроле (кр.) этой партии равны

$$Z = (M\alpha)P + (N - M)\beta Q. \tag{12}$$

Для выбора находим $\min Z$ при условии (11).

п2 (выбор модели). Подбрасывается две монеты. Пусть m – число выпадений двух монет одинаковой стороной. Рас-им две модели, обз-ив их гп-ми: H_1, состоящую из сб-й $\Omega = \{ГГ, РР, ГР\}$, где $Г$ – герб, $Р$ – решетка, но не различается, в каких монетах произошло выпадение $ГР$; H_0: $\Omega = \{ГГ, РР, ГР, РГ\}$, где $ГР$ различаются. Выбрать модель, объективно отражающую реальность.

Р. Т.к. $\frac{m}{n}$ при гп-е H_i (i = 0,1) имеет бином-ое рсп., то $M\left(\frac{m}{n}\right) = a_i$, $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\sigma_i^2}{n}$, где $a_1 = \frac{2}{3}$, $\sigma_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (см. с5 из 5°:2.2); $a_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_0^2 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{m}{n} > K_0$, то будем принимать H_1, в противном случае H_0.

Если бином-ое рсп. заменить норм-ым, то для выч-ия K_0 фм-а (10) сохраняется с $\sigma = \sigma_0$, а вместо (11) получим

$$\sigma_0 u_\alpha + \sigma_1 u_\beta = (a_1 - a_0)\sqrt{n}\,. \tag{13}$$

При $\alpha = \beta = 0{,}05$ (из T_2 по $0{,}1 u_\alpha = (a_1 - a_0)\sqrt{n}$ для $\alpha = 0{,}1$) имеем $\alpha = 1 - \Phi(u) = 1 - 0{,}90 = 0{,}1$, $u_\alpha = u_\beta = 1{,}65$. Тогда из (13) получим

$$n \ge \frac{(\sigma_0 u_\alpha + \sigma_1 u_\beta)^2}{(a_1 - a_0)^2} \approx \left(\frac{1{,}65\left(1/2 + \sqrt{2}/3\right)}{2/3 - 1/2}\right)^2 \approx 79{,}2 \approx 80.$$

По фм-е (10) имеем

$$K_0 = 0{,}5 + 1{,}65\frac{1}{2\sqrt{80}} \approx 0{,}61.$$

Т.о., гп. H_1 принимается, если $\frac{m}{n} > 0{,}61$, в противном случае принимается H_0.

Теперь покажем, как найти наиболее мощный кт-й. Пусть по вбр. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ нужно различить две простые гп. H_0 и H_1, согласно к-ым вбр-а имеет ств-но плотности рсп-ия $P_0(u)$, $P_1(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Рас-им крт-ие мн-ва вида

$$S_c = \{u = (u_1, \ldots, u_n): P_1(u) \geq CP_0(u)\} \ (C = K_0). \tag{14}$$

Огр-мся случаем, когда для любого α сущ-ет C, такая, что $P_{H_0}(S_c) = \alpha$.

т1 (Неймана-Пирсона). Среди всех кт-ев, различающих гп-ы H_0 и H_1 с заданной ошибкой 1-го рода α наиболее мощным яв-ся кт-й, опрм-ый критическим (крт.) мн-ом (14).

Д. Пусть S – крт-ое мн-во произвольного кт-ия с $P_{H_0}(S) = \alpha$. Тогда $P_{H_0}(S_c \backslash S_c S) = \alpha - P_{H_0}(S_c S) = P_{H_0}(S \backslash SS_c)$. Отсюда с учетом (14) получим $P_{H_1}(S_c \backslash S_c S) =$

$$= \int\limits_{S_c \backslash SS_c} P_1(u)du \geq C \int\limits_{S_c \backslash SS_c} P_0(u)du = CP_{H_0}(S_c \backslash S_c S) = CP_{H_0}(S \backslash SS_c) = C \int\limits_{S \backslash SS_c} P_0(u)du \geq$$

$\geq \int\limits_{S \backslash SS_c} P_1(u)du = P_{H_1}(S \backslash SS_c)$, т.к. $P_1(u) < CP_0(u)$ на мн-ве $S \backslash SS_c$. Прибавляя к обеим частям последнего нерав-ва $P_{H_1}(SS_c)$, получим $P_{H_1}(S) \geq P_{H_1}(S_c)$ ■

зм1. По т1 легко проверить, что кт-й в п1 яв-ся наиболее мощным. Т.к. совместная плотность рсп-ия вбр-и согласно гп-е H_i ($i = 0,1$) равна $P_i(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(u_k - a_i)^2}$, то нерав-во (14) равносильно нерав-ву $\sum_{k=1}^{n}(u_k - a_0)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(u_k - a_1)^2 + C_1$ или нерав-у

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k > C, \tag{15}$$

где C_1, C – нек-ые пст-ые. Попадание вбр-и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в крт-ое мн-во, опр-мое (15), очевидно, равносильно наступлению сб-я $\{\bar{x} > C\}$, т.е. кт-й п1 яв-ся наиболее мощным.

3°. Гипотезы вероятности. Для проверки отсутствия систематической ошибки измерений при проверке настройки станка на ср-ю точку поля допуска и т.д. мы приходим к гп-е ств-ия вер-ти P к частости нбл-ия $\frac{m}{n}$, т.е. $P \approx \frac{m}{n}$.

п3. Пусть при незв-х $n = 280$ опытах сб. A наступило $m = 151$ раз, причем гипотетическая вер-ть равна $P = 1/2$. Можно ли считать частоту $m = 151$ дт-но близкой к теор-ой норме np = 280·1/2 = 140, отвечающей гп-е $P = 1/2$.

Р. Находим σ = $\sqrt{npq} = \sqrt{280 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 8{,}37$. Считая рсп-ие норм-ым при $\alpha = 0{,}05$, по T_2 находим $u_\alpha = 0{,}96$ и опр-ем инр-л из стн-ия:

$$P(|Z| > 1{,}96) = P(|X - np > 1{,}96\sigma| = 0{,}05. \tag{16}$$

Отсюда $np \pm 1{,}96\sigma = 140 \pm 1{,}96 \cdot 8{,}37 = 140 \pm 16{,}41$. Т.к. отк-ие 151 – 140 = 11 не превышает 16,41, то она находится в обл-и допустимых зн-й, значит, нет оснований считать гп-у $P = 1/2$ противоречащей нбл-ям.

4°. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события. Пусть по дт-но большому числу n незв-х испытаний (исп.), в каждом из к-ых вер-ть p появления сб-я пст-на, но неизвестна, найдена отс. частот m/n. При заданном уровне значимости α требуется проверить нулевую гп-у, состоящую в том, что неизвестная вер-ть p равна гипотетической вер-ти p_0. Здесь возможны три случая в зв-ти от гп-ы H_1.

1*. H_0: $p = p_0$ при конкурирующей гп-е H_1: $p \neq p_0$.

Выч-им нблм-ое зн-ие кт-я $U_{нбл} = (m/n - R)\sqrt{n}\Big/\sqrt{p_0 q_0}$, где $q_0 = 1 - p_0$. Т.к. H_1 имеет вид $p \neq p_0$, то и крт-ая обл. – двс-я. По Т$_{11}$ найдем крт-ю точку $u_{кр}$ из рав-ва $\Phi(u_{кр}) = (1 - \alpha)/2$.

Если $|U_{нбл}| < u_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гп-у.

Если $|U_{нбл}| > u_{кр}$ – нулевую гп-у отвергают.

2*. H_0: $p = p_0$ при конкурирующей гп-е H_1: $p > p_0$.

В этом случае находим крт-ю точку прс-ей крт-ой обл-ти из рав-ва $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2$.

Если $U_{нбл} < u_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гп-у.

Если $U_{нбл} > u_{кр}$ – нулевую гп-у отвергают.

3*. H_0: $p = p_0$ при конкурирующей гп-е H_1: $p < p_0$.

Для этого случая сначала находим «вспомогательную» крт-ю точку $u_{кр}$ по правилу 2*, а затем полагаем границу лвс-ей крт-ой обл-и $u_{кр} = - u_{кр}$.

Если $U_{нбл} < - u_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гп-у.

Если $U_{нбл} > - u_{кр}$ – нулевую гп-у отвергают.

зм2. Приведенные фм-ы дают уд-ые результаты при выполнении нерав-ва $np_0q_0 > 9$.

п4. По 100 незв-ым исп-ям найдена отс. частота $m/n = 0{,}14$. При уровне значимости 0,05 требуется проверить нулевую гп-у H_0: $p = p_0 = 0{,}20$ при конкурирующей гп-е H_1: $p \neq 0{,}20$.

Р. Учитывая, что $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$. Найдем нблм-ое зн-ие кт-я:

$$U_{нбл} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0{,}14 - 0{,}20)\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}20 \cdot 0{,}80}} = -1{,}5.$$

По условию конкурирующая гп-а имеет вид $p \neq p_0$, поэтому крт-ая обл. – двс-я. Найдем крт-ю точку $U_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}05)/2 = 0{,}475$. По Т$_{11}$ фк-и Лапласа находим $U_{кр} = 1{,}96$.

Т.к. $|U_{нбл}| < u_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у. Др-ми словами, нблм-ая частота 0,14 незначимо отличается от гипотетической вер. 0,20.

п5. Решить п4 при конкурирующей гп-е H_1: $p < p_0$.

Р. По условию H_1 имеет вид $p < p_0$. поэтому крт-ая обл. – лвс-я. Найдем сначала «вспомогательную» точку – границу прс-ей крт-ой обл-и из рав-ва $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2{\cdot}0{,}05)/2 = 0{,}45$. По Т$_{11}$ находим $U_{кр} = 1{,}65$. Тогда граница лвс-ей крт-ой обл-и $U_{кр} = - 1{,}65$.

Т.к. $U_{нбл} > u_{кр}$ ($-1{,}5 > -1{,}65$) – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

п6. Партия изделий принимается, если вер-ть того, что изделие окажется бркн-ым, не превышает 0,02. Среди сл-но отобранных 480 деталей оказалось 12 дефектных. Можно ли принять партию?

Р. Нулевая гп-а H_0: $p = p_0 = 0{,}02$. Примем в кач-ве конкурирующей гп-ы H_1: $p > 0{,}02$ и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Найдем отс. частоту брака $m/n = 12/480 = 0{,}025$ и нблм-ое зн-ие кт-ия $U_{нбл} = (m/n - p_0)\sqrt{n}\Big/\sqrt{p_0 q_0} = (0{,}025 - 0{,}02)\sqrt{480} = 0{,}78$.

По условию конкурирующая гп-а имеет вид $p > p_0$, поэтому крт-ая обл. – пвс-я. Найдем крт-ю точку $u_{кр}$ по правилу 2* из рав-ва $\Phi(u_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2 =$ $= (1 - 2\cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45$. По T_{11} находим $u_{кр} = 1{,}65$.

Т.к. $U_{нбл} < u_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гп-у H_0 о том, что вер-ть брака в партии не превышает 0,02. Т.о., партию можно принять.

5°. Проверка гипотезы о равенстве двух центров распределения. Пусть имеются две вбр-и с объемами n_1 и n_2 из гнр-х свк-ей X и Y. Требуется проверить гп-у о рав-ве средних (ср.) H: $a_x = a_y$.

Если σ_x^2, σ_y^2 известны, то можно полагать, что разность $\bar{y} - \bar{x}$ подчинена норм. закону $N(Z,\ a_y - a_x,\ \sigma_{(\bar{y}-\bar{x})})$, где $\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})} = \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_2}}$. В кач-е кт-ия рас-им вел-у $Z = \dfrac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})}}$ – норм-ую разность ($\bar{y} - \bar{x}$). Тогда по $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$ находим u_α по норм. закону из стн-ия

$$P(|Z| > U_\alpha) = \alpha.$$

Если наряду с нулевой гп-ой рас-еть альтернативную H_1: $a_y - a_x > 0$ (или $a_y - a_x < 0$), то при том же α крт-ая обл. опр-ся нерав-ом $Z = U_{2\alpha}$, т.к. по св-ву норм-го закона имеем:

$$P(Z > U_{2\alpha}) = \frac{1}{2}\,(|Z| > U_{2\alpha}) = \alpha. \qquad (17)$$

п7. Имеются данные об исп-ях на разрыв образцов от двух вбр-к 50 бунтов (мотков) проволоки из продукции двух заводов: $\bar{x} = 120{,}8$ кг/мм^2 (завод А), $\bar{y} = 128{,}2$ кг/мм^2 (завод В). При этом на основе предшествовавших нбл-й можно считать, что $\sigma_x = 8{,}0$ кг/мм^2 и $\sigma_y = 9{,}4$ кг/мм^2. Опр-ть, имеется ли реальное различие в механических кач-ах изготавливаемой заводами А и В проволоки.

Р. Найдем $\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} = \sqrt{\dfrac{8^2}{50} + \dfrac{9{,}4^2}{50}} = 1{,}75$ кг/мм^2. Выбирая $\alpha = 0{,}05$, из T_2 находим $Z = 1{,}96$. Поэтому расхождение между ср-ми, превосходящее по абс. вел-е $Z\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} = 1{,}96\cdot 1{,}75 = 3{,}43$ кг/мм^2, следует считать сущ-ым, т.е. отк-ие $\bar{y} - \bar{x} = 128{,}2 - 120{,}8 = 7{,}4$ кг/мм^2 попадает в крт-ю обл., иначе расхождение в кач-е продукции А и В сущ-но.

зм3. Если же при норм-ом рсп-и X и Y нам известны $\bar{x}$ и $\bar{y}$, а σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, то, предполагая $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, для проверки гп-ы H_0: $\bar{x} = \bar{y}$ используем рсп-ие Стьюдента.

ЛЕКЦИЯ 14

5.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ДИСПЕРСИЯХ И ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Гипотезы о равенстве дисперсий. На практике сравнение дисперсий (дсп.) возникает при сравнении точности приборов, инструментов, самих методов измерений и т.д. Предпочтителен (прч.) тот прибор (или метод), к-ый имеет наименьшую (нм.) дсп-ю, т.е. нм-е расстояние разбросов.

Пусть генеральные (гнр.) свк-ти X и Y рсп-ны норм-но. По незв-ым выборкам (вбр.) с объемами n_1 и n_2 из них найдены исправленные выборочные (вбрч.) дсп-и $S_x^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \overline{x}_b\right)^2$, $S_y^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}\left(y_i - \overline{y}_b\right)^2$. При заданном уровне значимости α проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$, т.е. H_0: $M\left(S_x^2\right) = M\left(S_y^2\right)$. Т.о. возникает задача: исправленные дсп-и различаются сущ-но (H_0 отвергнута) и несущ-но (H_0 принята).

В кач-ве критерия (кт.) проверки нулевой гп-ы о рав-ве гнр-ых дсп-й примем отн-ие большой исправленной дсп-и к меньшей, т.е. слн. вел-у

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2}, \tag{1}$$

к-ая имеет рсп-ие Фишера (см. 6°: 4.1) со степенями (ст.) свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 – объем вбр-и большой дсп-и, n_2 – объем вбр-и малой дсп-и. Причем рсп-ие Фишера зв-т только от чисел ст-ей свободы и не зв-т от др-х параметров.

Критическая (крт.) обл. строится в зв-сти от вида альтернативной гп-ы:

1*. Нулевая гп. H_0: $D(X) = D(Y)$. Альтернативная (конкурирующая) гп. H_1: $D(X) > D(Y)$. В этом случае строят правостороннюю (прс.) крт-ю обл. так, чтобы вер-ть попадания F в эту обл. в предположении справедливости нулевой гп-ы (т.е. H_0 отвергается) была равна уровню значимости α:

$$P[F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha. \tag{2}$$

Крт-ю точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ находим по T_2 и тогда прс-я крт-ая обл. опр-ся нерав-ом

$$F > F_{кр},$$

а обл-ть принятия нулевой гп-ы H_0 – нерав-ом

$$F < F_{кр}.$$

п1. По двум незв-ым вбр-ам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей X и Y, найдены исправленные вбрч. дсп-и $S_x^2 = 11{,}41$ и $S_y^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ при альтернативной гп-е H_1: $D(X) > D(Y)$.

Р. Находим $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2} = \dfrac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$. Т.к. альтернативная гп. имеет вид $D(X) > D(Y)$, то крт-ая обл. – прс-я. По $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 =$

$= 15 - 1 = 14$ из T_9 находим $F_{кр}(0{,}05;\ 11;\ 14) = 2{,}57$. Т.к. $1{,}75 = F < F_{кр} = 2{,}75$, то нет оснований отвергнуть нулевую гп-у H_0 о рав-ве гнр-ых дсп-й.

2*. Пусть H_0: $D(X) = D(Y)$, а H_1: $D(X) \neq D(Y)$. В этом случае строим двустороннюю (двс.) крт-ю обл-ть, исходя из стн-й

$$P(F < F_1) = \alpha/2,\ P(F > F_2) = \alpha/2. \tag{3}$$

Тогда, если $F < F_1$ и $F > F_2$, то H_0 отвергается.

Если $F_1 < F < F_2$, то нулевая гп-а H_0 принимается.

Правую крт-ю точку F_2 можно найти из T_9 при $\alpha/2$. А левую крт-ю точку F_1 не надо находить, т.к. $P(F < F_1) = P(F > F_2)$, т.е. дт-но найти $F_2 = F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2)$.

п2. По двум незв-ым вбр-м объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 185$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей X и Y, найдены исправленные вбрч-ые дсп-и $S_x^2 = 1{,}23$ и $S_y^2 = 0{,}41$. При $\alpha = 0{,}1$ проверить H_0: $D(X) = D(Y)$ при H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Р. Находим $F = \dfrac{1{,}23}{0{,}41} = 3$. Т.к. H_1 имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, то крт-ая обл. – двс-я, поэтому при $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ и $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$ из T_9 имеем $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 17) = 2{,}50$.

Т.к. $F > F_{кр}$, нулевую гп-у H_0 о рав-ве гнр-ых дсп-й отвергаем, т.е. вбрч-ые дсп-и различаются сущ-но. Н-р, если бы расв-мые дсп-и хркз-ли точность двух методов измерений, то следует предпочесть тот метод, к-ый имеет меньшую дсп-ю, т.е. $S_y^2 = 0{,}41$.

2°. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности. Пусть гнр-ая свк-ть X рсп-на норм-но и гнр. гипотетическая (предполагаемая) дсп-ия равна σ_0^2. На практике σ_0^2 устанавливается на основании предшествующего опыта, или теор-ки.

Пусть также из гнр-ой свк-ти извлечена вбр. объема n и по ней найдена исправленная вбрч. дсп-ия S^2 с $k = n - 1$ ст-ми свободы. Требуется по S^2 при заданному α проверить нулевую гп-у о рав-ве гнр-ой дсп-и σ^2 с гипотетическим зн-ем σ_0^2, т.е. H_0: $M(S^2) = \sigma_0^2$ или $\sigma^2 = \sigma_0^2$, иначе нх-мо установить, сущ-но или не сущ-но различаются S^2 и σ_0^2.

На практике такая гп. проверяется, если нужно установить точность приборов, станков, методов иссл-ия и устойчивость технологических (техл.) процессов. Н-р, если известна допустимая хркс-ка рассеяния контролируемого (крум.) размера деталей, изготавливаемых станком-автоматом, равная σ_0^2, а найденная по вбр-е исправленная дсп. S^2 сущ-но больше σ_0^2, то станок требует подналадки.

В кач-е кт-ия проверки нулевой гп-ы возьмем слн. вел-у с рсп-ем χ^2, т.е.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}. \tag{4}$$

Крт-ая обл. строится в зв-ти от вида гп-ы H_1:

1*. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, а H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. В этом случае строим прс-ю крт-ю обл., исходя из стн-ия

$$P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)] = \alpha. \qquad (5)$$

По (5) крт-ю точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ находим из T_8. Тогда прс-я крт-ая обл. опр-ся (H_0 отвергается) по

$$\chi^2 > \chi^2_{кр},$$

а обл. принятия нулевой гп-ы H_0 нерав-ом

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}.$$

п3. Из норм. гнр. свк-ти извлечена вбр-а объема n = 13 и по ней найдена исправленная вбрч. дсп-я S^2 = 14,6. Проверить нулевую гп-у H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ при H_1: $\sigma^2 > 12$ и $\alpha = 0{,}01$.

Р. Находим $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{12\cdot 14{,}6}{12} = 14{,}6$. Т.к. конкурирующая гп. H_1 имеет вид $\sigma^2 > 12$, то крт-ая обл. прс-я.

По T_{10} при $\alpha = 0{,}01$, $k = n - 1 = 12$ находим крт-ю точку $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 12) =$ $= 26{,}2$. Т.к. $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нулевая гп-а H_0 принимается.

2*. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, а H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. В этом случае строим двс-ю крт-ю обл., исходя из стн-ий

$$P[\chi^2 < \chi_1^2(\alpha/2, k)] = \alpha/2, P[\chi^2 > \chi_2^2(\alpha/2, k)] = \alpha/2. \qquad (6)$$

Правую крт-ю точку χ_2^2 находим из T_8. Для нахождения левой крт-ой точки χ_1^2 заметим, что сб-я $\chi^2 < \chi_1^2$ и $\chi^2 > \chi_1^2$ противоположны, значит, сумма их вер-ей равна ед-е: $P(\chi^2 < \chi_1^2) + P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1$. Отсюда

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - P(\chi^2 < \chi_1^2) = 1 - \alpha/2,$$

т.е. левую крт. точку можно искать, как правую, из T_8.

Если $\chi^2 < \chi_1^2$, $\chi^2 > \chi_2^2$, то гп-а H_0 отвергается.

Если $\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2$, то гп-а H_0 принимается.

п4. Из норм. гнр-ой свк-ти извлечена вбр-а объема n = 13 и по ней найдена исправленная вбрч. дсп-я S^2 = 10,3. При α = 0,02 проверить нулевую гп-у H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ при конкурирующей гп-е H_1: $\sigma^2 \neq 12$.

Р. Выч-им $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{12\cdot 10{,}3}{12} = 10{,}3$. По T_8 и T_{10} находим $\chi_2^2(\alpha/2, k) =$ $= \chi_2^2(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$ и $\chi_1^2(1 - \alpha/2, 12) = \chi_1^2(0{,}99;\ 12) = 3{,}6$. Т.к. $\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2$ ($3{,}6 < 10{,}3 < 26{,}2$), то H_0 принимается, т.е. вбрч-ая дсп-я (10,3) несущ-но отличается от гипотетической гнр-ой дсп-и (12).

3°. Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны и неизвестны. Пусть при больших объемах ($n > 30$, $m > 30$) по незв-ым вбр-ам найдены ств-ие вбрч-ые ср. $\bar{x}$ и $\bar{y}$. И пусть гнр-ые дсп-и

$D(X)$ и $D(Y)$ известны. При заданном уровне значимости α требуется проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ о рав-ве мт-их ож-й (гнр-ых ср-их) двух норм. гнр-ых свк-ей с известными дсп-ми (в случае больших вбр-к) при различных случаях конкурирующей гп-ы H_1:

1*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гп-е H_1: $M(X) \neq M(Y)$. Выч-им нблм-ое зн-ие кт-ия $Z_{нбл.} = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n}+\dfrac{D(Y)}{n}}}$ и по T_{11} находим крт-ю точку $Z_{кр}$ из рав-ва $\Phi(Z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Если $|Z_{нбл.}| < Z_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $|Z_{нбл.}| > Z_{кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

2*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при H_1: $M(X) > M(Y)$. Находим крт-ю точку $Z_{кр}$ по T_{11} из рав-ва $\Phi(Z_{кр}) = (1 - 2\alpha)/2$.

Если $Z_{нбл.} < Z_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $Z_{нбл.} > Z_{кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

3*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при H_1: $M(X) < M(Y)$. Находим «вспомогательную точку» $Z_{кр}$ по правилу 2* и проверяем:

если $Z_{нбл.} > -Z_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у;

если $Z_{нбл.} < -Z_{кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

п5. По двум незв. вбр-ам, объем к-ых $n = 40$ и $m = 50$, извлеченным из норм. гнр-ых свк-ей, найдены вбрч. ср-ие $\bar{x} = 130$ и $\bar{y} = 140$. Гнр-ые дсп-и известны: $D(X) = 80$, $D(Y) = 100$. При уровне значимости 0,01 требуется проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гп-е H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Р. Найдем $Z_{нбл.} = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n}+\dfrac{D(Y)}{n}}} = \dfrac{130-140}{\sqrt{\dfrac{80}{40}+\dfrac{100}{50}}} = -5$.

По условию H_1 имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому крт-ая обл. – двс-я. Из рав-ва $\Phi(Z_{кр}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}01)/2 = 0{,}495$ по T_{11} находим $Z_{кр} = 2{,}58$.

Т.к. $|Z_{нбл.}| > Z_{кр}$ – нулевую гп-у отвергаем. Вбрч-ые ср. различаются значимо.

Пусть теперь при неизвестных дсп-ях при малых объемах ($n < 30$, $m < 30$) по незв-ым вбр-ам найдены ств-ие вбрч-ые ср. $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и исправленные вбрч-ые дсп-и S_x^2 и S_y^2. Гнр-ые дсп-и хотя и неизвестны, но предполагаются одинаковыми.

При заданном уровне значимости α требуется проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ о рав-ве мт-их ож-й (гнр-ых ср-их) двух норм. гнр-ых свк-ей с неизвестными дсп-ми (в случае малых вбр-к) при различных случаях конкурирующей гп-ы H_1:

1*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при H_1: $M(X) \neq M(Y)$. Выч-ем нблм-ое зн-ие кт-ия $T_{нбл.} = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$ и по табл. крт-их точек рсп-ия

Стьюдента T_{14} по заданному уровню значимости α и числу ст-ей свободы $k = n + m - 2$ находим крт-ю точку $t_{двс.кр}(\alpha, k)$.

Если $|T_{нбл.}| < t_{двс.кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $|T_{нбл.}| > t_{двс.кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

2*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при H_1: $M(X) > M(Y)$. Находим крт-ю точку $t_{двс.кр}(\alpha, k)$ из T_{14} (в нижней строке табл.) по уровню значимости α и числу ст-ей свободы $k = n + m - 2$.

Если $T_{нбл.} < t_{двс.кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $T_{нбл.} > t_{двс.кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

3*. H_0: $M(X) = M(Y)$ при H_1: $M(X) < M(Y)$. Находим сначала крт-ю точку $t_{двс.кр}(\alpha, k)$ по правилу 2* и полагаем $t_{лвс.кр} = - t_{прс.кр}$.

Если $T_{нбл.} > - t_{прс.кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $T_{нбл.} < - t_{прс.кр}$ – нулевую гп-у отвергаем.

п6. По двум незв. малым вбр-ам, объемы к-ых $n = 12$ и $m = 18$, извлеченным из норм. гнр-ых свк-ей X и Y, найдены вбрч. ср-ие $\bar{x} = 31{,}2$ и $\bar{y} = 29{,}2$ и исправленные дсп-и $S_x^2 = 0{,}84$ и $S_y^2 = 0{,}40$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ требуется проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гп-е H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Р. Исправленные дсп-и различны, поэтому проверим предварительно гп-у о рав-ве дсп-й, используя кт-й Фишера-Снедекора (см. 1°). Найдем отн-ие большой дсп-и к меньшей: $F_{нбл.} = S_б^2 / S_м^2 = 0{,}84/0{,}40 = 2{,}1$. Дсп. S_x^2 значительно больше дсп-и S_y^2, поэтому в кач-е конкурирующей примем гп-у H_1: $D(X) > D(Y)$. В этом случае крт-ая обл. – прс-я. Из T_{15} по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам ст-ей свободы $k_1 = n - 1 = 12 - 1 = 11$ и $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$ находим крт-ю точку $F_{кр}(0{,}05; 11; 17) = 2{,}41$.

Т.к. $F_{нбл.} < F_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве гнр-ых дсп-й. Предположение о рав-ве гнр-ых дсп-й выполняется, поэтому сравним ср-ие.

Выч-им нблм-ое зн-ие кт-я Стьюдента.

$$T_{нбл.} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n + m - 2)}{n + m}} =$$

$$= \frac{31{,}2 - 29{,}2}{\sqrt{11 \cdot 0{,}84 + 17 \cdot 0{,}40}} \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot 18 \cdot 28}{30}} = 7{,}8.$$

По условию H_1 имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому крт-ая обл. – двс-я. По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу ст-ей свободы $k = n + m - 2 = 12 + 18 - 2 = 28$ находим из T_{14} крт-ю точку $t_{лвс.кр}(0{,}05; 28) = 2{,}05$.

Т.к. $T_{нбл.} > t_{лвс.кр}$, то нулевую гп-у о рав-ве ср-их отвергаем. Вбрч-ие ср-ие различаются значимо.

4°. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена. Пусть гнр-ые свк-ти $X_1, X_2, \ldots, X_l$ рсп-ны норм-но. Из этих свк-ей извлечены l

незв-ых вбр-к одинакового объема n и по ним найдены исправленные вбрч. дсп-и S_1^2, S_2^2, …, S_l^2, все с одинаковым числом ст-ей свободы $k = n - 1$.

При уровне значимости α требуется проверить нулевую гп-у об однородности (однс.) дсп-й, т.е. гп-у о рав-ве между собой гнр-ых дсп-й:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

В кач-е кт-ия проверки нулевой гп-ы примем кт-й Кочрена отн-ие мкс-ой исправленной дсп-и к сумме всех исправленных дсп-й:

$$G = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2}.$$

Рсп-ие этой слн. вел-ы зв-т только от числа ст-ей свободы $k = n - 1$ и кол-ва вбр-к l (см. T_{13}). Для проверки нулевой гп-ы строят прс-ю крт-ю обл.

Для проверки гп-ы об однс-ти дсп-й норм-но рсп-ых свк-тей при заданном уровне значимости α нх-мо выч-ть нблм-ое зн-ие кт-ия $G_{нбл.} = S_{\max}^2 / \left(S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2\right)$ и по табл. крт-их точек рсп-ия Кочрена из T_{13} найдем крт-ю точку $G_{кр} = (\alpha, k, l)$.

Если $G_{нбл.} < G_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

Если $G_{нбл.} > G_{кр}$ – нулевую гп-у отвергают.

Заметим, что при условии однс-и дсп-й в кач-е оценки гнр-ой дсп-и принимают ср. ариф-ю исправленных дсп-й.

п7. По четырем незв-ым вбр-ам одинакового объема $n = 17$, извлеченным из норм. гнр-ых свк-ей, найдены исправленные вбрч. дсп-и: 0,21; 0,25; 0,34; 0,40. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у об однс-и дсп-й (крт-ая обл. – прс-я); б) оценить гнр-ую дсп-ию.

Р. а) найдем нблм-ое зн-ие кт-ия Кочрена – отн-ие мкс-ой исправленной дсп-и к сумме всех дсп-й: $G_{нбл.} = 0{,}40/(0{,}21 + 0{,}25 + 0{,}34 + 0{,}40) = 1/3$.

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, числу ст-ей свободы $k = n - 1 = 17 - 1 = 16$ и числу вбр-к $l = 4$ из T_{13} найдем крт-ю точку $G_{кр}(0{,}05; 16; 4) = 0{,}4366$.

Т.к. $G_{нбл.} < G_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гп-у. Др. словами, исправленные вбрч. дсп-и различаются незначимо, т.е. дсп-и однородны; б) поскольку однс-ть дсп-й установлена, в кач-е оценки гнр-ой дсп-и примем ср. ариф-ю исправленных дсп-й: $D_Г^* = (0{,}21 + 0{,}25 + 0{,}34 + 0{,}40)/4 = 0{,}3$.

5°. Проверка гипотез о законе распределения. Критерий согласия Пирсона χ^2. Пусть закон рсп-ия слн. вел-ы неизвестен. Но есть основания предположить, что он имеет опр-ый вид, т.е. $F_\xi(x) = F(x)$. Проверить справедливость этого предположения (гипотезы) по эмпирической (эмп.) фк-и рсп-ия $F_n(x)$ вбр-и. Такая проверка, как и проверка гп-з о параметрах рсп-ия, осуществляется при помощи специально подобранной слн-й вел-ы $Z = (F_n, F)$ – кт-я согласия.

Слн. вел-а Z может быть выбрана различными способами, н-р, $Z = \sum_{i=1}^{n} \left(P_i^* - P_i\right)^2$, $Z = \max|F_n(x) - F(x)|$ и т.д. В результате получим различные кт-и. Рас-им «критерий χ^2 Пирсона».

Пусть произведено n опытов, они сведены в r разрядов и оформлены в виде стсч-го ряда

J_i	x_1, x_2	x_2, x_3	…	x_r, x_{r+1}
P_i^*	P_1^*	P_2^*	…	P_r^*
$n P_i^* = n_i^*$	n_1^*	n_2^*	…	n_r^*

Требуется проверить, согласуются ли экспериментальные (эксп.) данные с гп-ой о том, что вел-а X имеет закон рсп-ия $F(x)$.

Зная теор-й закон рсп-ия $F(x)$, можно найти теор-ие вер-ти P_i попадания слн. вел-ы в каждый из интервалов (инр.) $[x_i, x_{i+1}[$.

Выберем $Z = \sum_{i=1}^{r} C_i\left(P_i^* - P_i\right)^2$. Здесь C_i – вес разрядов (инр-ов) вводится потому, что в общем случае отк-ия, относящиеся к различным разрядам, нельзя считать равномерными по значимости. Н-р, $|P_i^* - P_i|$ может быть мало значимым, если P_i велика, и очень заметным, если P_i мала. Поэтому, очевидно, C_i надо брать обратно пропорциональным (прц.) P_i, т.е. $C_i = n/P_i$.

Пирсон показал, что при $C_i = n/P_i$ и $n \to \infty$ слн. вел-а Z обладает св-ом: Z не зв-т от $F(x)$ и от числа опытов n, а зв-т только от числа k, и этот закон при увеличении n прж-ся рсп-ию χ^2.

Рсп-ие χ^2 зв-т от ст-ей свободы $k = r - s$, где s – число незв-х условий (связей), наложенных на P_i^*, н-р, $\sum P_i^* = 1$, $m_x^* = \sum x_i P_i^* = m_x$, $D_x^* = \sum\left(x_i - m_x^*\right)^2 P_i^* = D_x$ и т.д. Так, если гнр-я свк-ть рсп-на по закону Пуассона, зв-го от одного параметра, то $s = 2$, а при норм-ом рсп-и $s = 3$. Тогда

$$Z = \chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(P_i^* - P_i\right)^2}{P_i} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\left(nP_i^* - nP_i\right)^2}{nP_i} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\left(n_i^* - n_i\right)^2}{n_i}. \tag{7}$$

Крт-ю точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ при заданном уровне значимости α опр-ем из T_8 по стн-ю

$$P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)] = \alpha. \tag{8}$$

Отсюда прс-я крт-ая обл. (H_0 отвергается) опр-ся нерав-ом

$$\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k),$$

а обл. принятия нулевой гп-ы – нерав-ом

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, k).$$

зм1. Объем вбр-и должен быть не менее 50, а каждый инр-л должен содержать не менее 5-8 вариант (врт.); малочисленные врт-ы следует объединить в одну, суммируя частоты.

зм2. Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, в особенности если согласование теоретических (теор.) и эмпирических (эмп.) частот «слишком хорошее», следует проявлять осторожность. Н-р, можно повторить опыт, увеличить число нбл-й, воспользоваться др. кт-ми, построить график рсп-ия, выч-ть асимметрию и эксцесс.

зм3. В целях контроля выч-ий фм-у (7) приводим к виду $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i^{*2}}{n_i} - n$,

учитывая, что $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{r} n_i^* = n$.

п5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гп-у о норм. рсп-и гнр-ой свк-ти, если известны (см. табл. 1) частоты n_i^* – эмп-ие и n_i – теор-ие.

Р. По табл. 1 выч-им χ^2.

Контроль: $\chi^2 = 7{,}19$ и $\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i^{*2}}{n_i} - n = 373{,}19 - 366 = 7{,}19$. Выч-но правильно. Находим $k = r - s = 8 - 3 = 5$. Из T_{10} имеем $\chi^2_{кр}(0{,}05;\, 5) = 11{,}1$. Т.к. $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ $(7{,}19 < 11{,}1)$, то нулевая гп. H_0 принимается, т.е. расхождение эмп-х и теор-х частот несущ-но. Сд-но, данные нбл-й согласуются с гп-ой о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти.

Таблица 1

i	n_i^*	n_i	$n_i^* - n_i$	$(n_i^* - n_i)^2$	$(n_i^* - n_i)^2/n_i$	n_i^{*2}	n_i^{*2}/n_i
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	– 1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	– 4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	– 8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	– 7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2 = 7{,}19$		373,19

6°. Вычисление теоретических частот нормального распределения и сравнение их с эмпирическими частотами. Укажем один способ нахождения теор-х частот n_i, если гнр-я свк-ть рсп-на норм-но.

Весь инр-л нблм-ых зн-ий X (вбр-и объема n) делим на r инр-ов $[x_i, x_{i+1}[$ одинаковой длины с n_i частотами в каждом инр-е, взяв в кач-е вариант (врт.) ср. ариф-ое концов врт-а: $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$.

Выч-им, н-р, методом прз-й, вбрч. ср-ю $\bar{x}^*$ и вбрч-ое ср. кв. отк-ие σ^*.

Нормируя слн. вел-у X по $z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$ и $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$, из интервала $[x_i, x_{i+1}[$ переходим к инр-у $[z_i, z_{i+1}[$.

По фк-и Лапласа находим $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$, тогда теор-ие частоты $n'_i = np_i$ (n_i – сумма частот, к-ые попали в i-й инр-л).

Затем сравниваем эмп. и теор. частоты по кт-ю Пирсона $\chi^2_{нбл.} = \sum \frac{n_i - n'_i}{n'_i}$, опр-ив по заданному уровню значимости α и числу ст-ей свободы $k = s - 3$ из T_{18}, крт-ю прс-ей крт-ой обл-и $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Если $\chi^2_{нбл.} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гп-у о норм. рсп-и гнр-ой свк-ти.

Если $\chi^2_{нбл.} > \chi^2_{кр}$ – гп-у отвергают.

п6. Используя кт-й Пирсона при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гп-а о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X с эмп-им рсп-ем вбр-и объема $n = 100$ ср. сд-ми данными:

i	1	2	3	4	5	6	7
$[x_i, x_{i+1}[$	[3, 8[	[8, 13[	[13, 18[	[18, 23[	[23, 28[	[28, 33[	[33, 38[
x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Р. Приняв в кач-е врт-ы x_i^* ср. ариф-ое концов инр-а $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$, перейдем от заданного интервального (инрн.) рсп-ия к рсп-ю равноотстоящих врт.: x_i^*; n_i.

Найдем вбрч-ю ср. и вбрч-ое ср. кв. отк-ие: $x^* = 20{,}7$, $\sigma^* = 7{,}28$.

Составим расчетную табл. 3 и найдем инр-ы $[z_i, z_{i+1}[$. Причем левый конец первого инр-а примем равным $-\infty$, а правый конец последнего инр-а ∞.

Таблица 3

i	Границы интервала		$x_i - x^*$	$x_{i+1} - x^*$	Границы интервала	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$
1	3	8	–	– 12,7	$-\infty$	– 1,74
2	8	13	– 12,7	– 7,7	– 1,74	– 1,06
3	13	18	– 7,7	– 2,7	– 1,06	– 0,37
4	18	23	– 2,7	2,3	– 0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	–	1,69	∞

Найдем теор-ие вер-ти и теор. частоты $n'_i = np_i = 100P_i$ из табл. 4.

Таблица 4

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	–	– 1,74	– 0,5000	– 0,4591	0,0409	4,09
2	– 1,74	– 1,06	– 0,4591	– 0,3554	0,1037	10,37
3	– 1,06	– 0,37	– 0,3554	– 0,1443	0,2111	21,11
4	– 0,37	0,32	– 0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
Σ					1	100

Сравним эмп. и теор. частоты, используя кт-й Пирсона. Для этого составим расчетную табл. 5. Столбцы 7 и 8 служат для контроля по фм-е $\chi^2_{нбл.}$ = $= \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n$. Контроль: $\sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 113{,}22 - 100 = 13{,}22 = \chi^2_{нбл.}$.

По T_{18} крт-их точек рсп-ия χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу ст-ей свободы $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ (s – число инр-ов) находим крт-ю точку прс-ей крт-ой обл-и $\chi^2_{кр}(0{,}05;\,4) = 9{,}5$.

Таблица 5

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	– 6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	– 5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	– 3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
Σ	100	100			$\chi^2_{нбл.} = 13{,}22$		113,22

Т.к. $\chi^2_{нбл.} > \chi^2_{кр}$, то отвергаем гп-у о норм. рсп-и гнр-ой свк-ти X; др. словами, эмп. и теор. частоты различаются значимо. Это означает, что даны нбл-й не согласуются с гп-ой о норм. рсп-и гнр-ой свк-ти.

7°. Критерий согласия Колмогорова λ. Пусть $F(x)$ – теор. рсп-ие гнр-ой свк-ти, а $F_n(x)$ – эмп. рсп-ие при вбр-е объема n. Рас-им гп-у H_0: $F_n(x) = F(x)$. Введем слн. вел-у

$$D = \max|F_n(x) = F(x)|. \tag{9}$$

Колмогоров доказал, что какова бы ни была фк-я рсп-ия $F(x)$ непр-ой слн. вел-ы X при $n \to \infty$, вер-ть нерав-ва $D/\sqrt{n} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}, \tag{10}$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(D/\sqrt{n} \geq \lambda\right) = P(\lambda)$. Их зн-ия находим из T_{12}.

Если вер-ть $P(\lambda)$ (при $\lambda = D/\sqrt{n}$) мала, то H_0 опровергается; если $P(\lambda)$ велика, то H_0 принимается.

п7. В табл. 6 заданы эмп. и теор. частоты m_i^* и m_i (M_i^* и M_i – накопленные эмп. и теор. частоты) слн. вел-ы X. Проверить гп-у H_0: $F_n(x) = F(x)$ по кт. Колмогорова.

Таблица 6

x	m^*	m	M^*	M	$M^* - M$
3,0	2	1	2	1	1
3,5	7	3	9	4	5
4,0	6	9	15	13	2
4,5	13	12	28	25	3
5,0	16	15	44	40	4
5,5	16	18	60	58	2
6,0	16	17	76	75	1
6,5	14	14	90	89	1
7,0	11	9	101	98	3
7,5	4	6	105	104	1
8,0	3	2	108	106	2
8,5	1	1	109	107	2
9,0	1	0,2	110	107	3

Р. Из табл. 6 имеем $D = 5$, $n = 110$. Тогда $\lambda = 5\big/\sqrt{110} \approx 0{,}5$. Из $Т_{12}$ находим $P(\lambda) = P(0{,}5) = 0{,}9639$ ($P(\lambda) = 1 - k(\lambda) = 1 - 0{,}036055$). Эта большая вер-ть указывает на то, что расхождение между нблм-ым и теор-им рсп-ем не сущ-но, т.е. H_0 принимается.

ЛЕКЦИЯ 15

5.3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

1°. Сравнение нескольких средних. Однофакторный дисперсионный анализ. Пусть гнр-ые свк-ти X_1, X_2, …, X_n рсп-ны норм-но и имеют одинаковую, хотя и неизвестную, дсп-ю. А мт. ож-ия также неизвестны, но могут быть различными. Требуется при заданном уровне значимости α по вбрч-ым ср. проверить нулевую гп. H_0: $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n)$ о рав-ве всех мт-их ож-й, т.е. установить, сущ-но или несущ-но различаются вбрч-ые ср.

Казалось бы, для сравнения нескольких ср-их ($n > 2$) можно сравнить их попарно. Однако с взр-ем числа ср-х взр-ет и нб-е различие между ними. Поэтому для сравнения нескольких ср-х пользуются другим методом, основанным на сравнении дсп-й. Этот метод назван дисперсионным (дспн.) анализом.

На практике дспн-й анализ применяют для выяснения, оказывает ли сущ-ое влияние нек-ый качественный (качн.) фактор (фкт.) A, к-ый имеет n уровней A_1, …, A_n на изучаемую вел-у X. Н-р, если требуется выяснить, какой вид удобрений нб-е эффективен (эф.) для получения нб-го урожая, то фкт. A – удобрение, а его уровни – виды удобрений.

Основная идея дспн-го анализа состоит в сравнении «факторной (фктн.) дисперсии», порождаемой воздействием фкт-а и «остаточной дисперсии», обусловленной слн-ми причинами. Если различие между этими дсп-ми значимо (сущ-но), то фкт. оказывает сущ-ое влияние на X; в этом случае ср-ие нблм-ых зн-й на каждом уровне (групповые ср.) будут различаться также значимо.

Если установлено, что фкт. сущ-но влияет на X и требуется выяснить, какой из уровней оказывает нб-е воздействие, то дпн-но производят попарное сравнение ср-их.

Дспн-ый анализ применяется также, чтобы установить однородность (одн.) нескольких свк-ей (дсп-и этих свк-ей одинаковы по предположению; если дспн-ый анализ покажет, что и мт-ие ож. одинаковы, то свк-ти в этим смысле одн-ны). Одн-ые свк-ти можно объединить в одну и получить о ней дпн-ю информацию (инф.) и сделать надежные выводы.

В более сложных случаях исследуют (иссл.) воздействие нескольких фкт-ов на нескольких постоянных (пст.) или слн-ых уровнях и выясняют влияние отдельных уровней и их комбинаций. В этом случае мы имеем дело с многофакторным (мфктн.) дспн-ым анализом.

2º. Общая, факторная и остаточная суммы квадратов отклонений. Пусть на количественный (колн.) норм-но рсп-ый признак X воздействует фкт. A, к-ый имеет n пст-ых уровней. Будем предполагать, что число нбл-й на каждом уровне одинаково и равно m. И пусть нбл-ось mn зн-й x_{ij} признака X, где i – номер опыта ($i = \overline{1,m}$), j – номер уровня фкт-а ($j = \overline{1,n}$). В табл. 1 представлены результаты нбл-й.

Таблица 1

Номер испытания	Уровни фактора A			
	A_1	A_2	…	A_n
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}
Групповая средняя	$\overline{x}_{\cdot 1}$	$\overline{x}_{\cdot 2}$	…	$\overline{x}_{\cdot n}$

Из табл. 1 находим общую и групповую ср-ие

$$\overline{x} = \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \ \overline{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad (j = \overline{1,n}), \tag{1}$$

а также общую сумму кв-ов отк-й нблм-ых зн-й от общей ср-ей $\overline{x}$:

$$Q_{общ} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2, \tag{2}$$

фктн. сумму кв-ов отк-й групповых ср-их от общей ср-ей

$$Q_{фкт} = m\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right)^2, \tag{3}$$

к-ая хркз-ет рассеяние между группами. Находим также остаточную (ост.) сумму кв-ов отк-ий нблм-ых зн-й группы от своей групповой ср-ей

$$Q_{ост} = \sum_{i=1}^{m}\left(x_{i1} - \overline{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(x_{i2} - \overline{x}_{\cdot 2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m}\left(x_{in} - \overline{x}_{\cdot n}\right)^2, \tag{4}$$

к-ая хркз-ет рассеяние «внутри группы».

Покажем, что

$$Q_{общ} = Q_{фкт} + Q_{ост}. \tag{5}$$

Д. Из (1) получим $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m\,\overline{x}_{\cdot j}$. Тогда $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_{\cdot j}$. Отсюда имеем

$$Q_{общ} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j} + \overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}\right)\left(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right) = m\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}\right)^2 + 0 = Q_{фкт} + Q_{ост}, \text{ т.к. } \sum_{i=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}\right) = m\,\overline{x}_{\cdot j} - m\,\overline{x}_{\cdot j} = 0.$$

Из (5) опр-ем

$$Q_{ост} = Q_{общ} - Q_{фкт}. \tag{6}$$

Фм-ы (2) и (3) с помощью элр-ых прб-й можно писать в виде

$$Q_{общ} = \sum_{j=1}^{n} P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right]^2}{mn}, \tag{7}$$

$$Q_{фкт} = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_j^2}{m} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right]^2}{mn}, \qquad (8)$$

где $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2$, $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

зм1. Тогда вместо (7) и (8) получим

$$Q_{общ} = \sum_{j=1}^{n} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn}, \qquad (9)$$

$$Q_{фкт} = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j^2}{m} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn}, \qquad (10)$$

где $Q_j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}^2$, $T_j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}$.

зм2. Если число исп-й на уровне A_j равно m_j ($j = \overline{1,n}$), то общую сумму кв-ов отк-й выч-ют как и в случае одинакового числа исп-й во всех уровнях. А фктн-ю сумму кв-ов отк-й находят по фм-е:

$$Q_{фкт} = \frac{T_1^2}{m_1} + \frac{T_2^2}{m_2} + \ldots + \frac{T_n^2}{m_n} + \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{N}, \qquad (10')$$

где $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ – общее число исп-й.

Покажем наглядно (см. п1), что $Q_{фкт}$ отражает влияние фкт-а, а $Q_{ост}$ – влияние слн-ых причин.

п1. Двумя приборами (j = 1, 2) произведены 2 измерения (i = 1, 2) физической вел-ны, истинный размер к-ой равен x. Расв-я в кач-е фкт-а систематическую ошибку C, а в кач-е его уровней C_1 (C_2) первого (второго) прибора, показать, что $Q_{фкт}$ опр-ся систематическими, а $Q_{ост}$ – слн-ми ошибками измерений.

Р. Пусть α_1, α_2 (β_1, β_2) – слн. ошибки первого и второго измерения первым (вторым) прибором. Тогда нблм-ые зн-ия результатов измерений равны:

$$x_{11} = x + C_1 + \alpha_1,\ x_{12} = x + C_2 + \beta_1,$$
$$x_{21} = x + C_1 + \alpha_2,\ x_{22} = x + C_2 + \beta_2.$$

Ср. зн-ия измерений первым и вторым прибором равны

$$\bar{x}_{\cdot 1} = x + C_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x + C_1 + \alpha,$$

$$\bar{x}_{\cdot 2} = x + C_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = x + C_2 + \beta.$$

Отсюда находим общую ср-ю

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{\cdot 1} + \bar{x}_{\cdot 2}}{2} = x + \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Тогда фктн. сумма

$$S_{фкт} = \left(\bar{x}_{\cdot 1} - \bar{x}\right)^2 + \left(\bar{x}_{\cdot 2} - \bar{x}\right)^2 = \frac{\left(C_1 - C_2\right)^2}{2} + (C_1 - C_2)(\alpha - \beta) + \frac{\left(\alpha - \beta\right)^2}{2} \quad (11)$$

опр-ся, главным образом, первым слагаемым (поскольку слн. ошибки измерений малы) и дсв-но отражает влияние фкт-а C. Отсюда сумма

$$\begin{aligned} Q_{ост} &= \left(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \left(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \left(\bar{x}_{12} - \bar{x}_{\cdot 2}\right)^2 + \left(\bar{x}_{22} - \bar{x}_{\cdot 2}\right)^2 = \\ &= [(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2] + [(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2] \end{aligned} \quad (11')$$

опр-ся слн-ми ошибками измерений и дсв-но отражает влияние слн-ых вел-н.

3°. Общая, факторная и остаточная дисперсии. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа. Разделив суммы кв-ов отк-ий на ств-е число ст-ей свободы, получим общую, фктн-ю и ост-ю дсп-и:

$$S^2_{общ} = \frac{Q_{общ}}{nm - 1}, \; S^2_{фкт} = \frac{Q_{фкт}}{n - 1}, \; S^2_{ост} = \frac{Q_{ост}}{n(m - 1)}, \quad (12)$$

где n – число уровней фкт-а, m – число нбл-й на каждом уровне.

Если нулевая гп. о рав-ве ср-х справедлива, то все эти дсп-и яв-ся несмещенными оценками гнр-ой дсп-и. Н-р, учитывая, что объем вбр-и $N = nm$ заключает, что $S^2_{общ} = \frac{Q_{общ}}{nm - 1} = \frac{Q_{общ}}{N - 1}$ – исправленная вбрч. дсп-я, к-ая известна, яв-ся несмещенной оценкой гнр-ой дсп-и.

Вернемся к задаче, поставленной в 1°: проверить при заданном уровне значимости α нулевую гп-у H_0: $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n)$ о рав-ве нескольких ($n > 2$) ср-х норм-ых свк-ей с неизвестными, но одинаковыми дсп-ми. Покажем, что решение этой задачи сводится к сравнению фктн-ой и ост-ой дсп-й $\left(H_0' : \; S^2_{фкт} = S^2_{ост}\right)$ по кт-ю Фишера-Снедекора, т.е. находим слн. вел-у $F = \frac{S^2_{фкт}}{S^2_{общ}}$ и из приложения табл. T_{15} по стн-ю

$$P[F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha(k_1 = n - 1, k = n(m - 1)) \quad (13)$$

опр-ем $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F > F_{кр}$, то H_0', сд-но, и H_0 отвергаются; если $F < F_{кр}$, – они принимаются.

Если гп. H_0 ложна, то с взр-ем расхождения между групповыми ср-ми будет увеличиваться и фктн. дсп-я, т.е. получим $F > F_{кр}$ и H_0' будет отвергнута.

Анч-но док-ся справедливость обратных утв-й: из правильности (ложности) гп-ы о дсп-ях следует правильность (ложность) гп-ы о ср-х.

Итак, для того, чтобы проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х норм-ых свк-й с одинаковыми дсп-ми, дт-но проверить по кт-ю F нулевую гп-у о рав-е фктн-ой и ост-ой дсп-й. В этом состоит метод дспн-го анализа.

зм3. Если $S^2_{фкт} < S^2_{ост}$, то уже отсюда следует справедливость гп-ы о рав-е групповых ср-х и нет надобности прибегать к кт-ю F.

п2. Произведено по 4 исп-ия (см. табл. 2) на каждом из трех уровней A_j ($j = \overline{1,3}$). Методом дспн-го анализа при уровне значимости α = 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми.

Таблица 2

i	A_1	A_2	A_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
$\bar{x}_{\cdot j}$	54	55	47

Таблица 3

i	A_1		A_2		A_3		
	y_{i1}	y^2_{i1}	y_{i2}	y^2_{i2}	y_{i3}	y^2_{i3}	
1	– 1	1	0	0	– 10	100	
2	0	0	2	4	– 8	64	
3	4	16	4	16	– 2	4	
4	5	25	6	36	0	0	
$Q_j = \Sigma\, y^2_{ij}$		42		56		168	$\Sigma Q_j = 266$
T_j	8		12		– 20		$\Sigma T_j = 0$
T^2_j	64		144		400		$\Sigma\, T^2_j = 608$

Р. Полагая C = 52, находим $y_{ij} = x_{ij} - 52$ (см. табл. 3). По фм-ам (9), (10) выч-ем $Q_{общ} = \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j - \dfrac{\left(\sum T_j\right)^2}{nm} = 266 - 0 = 266$, $Q_{фкт} = \dfrac{\sum T^2_j}{m} - \dfrac{\left(\sum T_j\right)^2}{mn} = $ $= \dfrac{608}{4} - 0 = 152$. Тогда $Q_{ост} = Q_{общ} - Q_{фкт} = 266 - 152 = 114$.

По фм-е (12) найдем фктн-ю и ост-ю дсп-и: $S^2_{фкт} = \dfrac{Q_{фкт}}{n-1} = \dfrac{150}{3-1} = 76$; $S^2_{ост} = \dfrac{Q_{ост}}{n(m-1)} = \dfrac{114}{3\cdot 3} = 12{,}67$. Отсюда $F = \dfrac{S^2_{фкт}}{S^2_{общ}} = \dfrac{76}{12{,}67} = 6$.

Из Т$_{15}$ находим $F_{кр}(\alpha,\ k_1,\ k_2)] = F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$. Т.к. $F > F_{кр}$ (6 > 4,26), то нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х отвергаем, т.е. групповые ср. различаются значимо (сущ-но).

зм4. Если нблм-ые зн-ия x_{ij} – десятичные дроби с одним знаком после запятой, то полагаем $y_{ij} = 10x_{ij} - C$, где C – примерно ср. зн-ие чисел $10x_{ij}$. В результате получим небольшие целые числа. Хотя при этом фктн-ая и ост-ая дсп-и увеличиваются в 10^2 раз, но их отн-ие не изменится. Анч-но поступают, если после запятой имеется k знаков: $y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$.

4°. Двухфакторный дисперсионный анализ. В многофакторном (мфктн.) дспн. анализе (при двух и более фкт-ов) процедура остается принципиально такой же, как и при однофакторном (офктн.) анализе, но выкладки усложняются. Н-р, пусть двумя микроскопами производятся измерения частоты поверхности (пвх.) различными операторами. Требуется оценить, обуславливается ли рассеивание ср-х зн-й измерений различием между приборами или различием между операторами, производящими измерения.

Основная идея дспн-го анализа в данном случае заключается в разложении суммы кв-ов отк-й общего ср. на компоненты, отвечающие предполагаемым фкт-ам изменчивости.

Пусть имеются два фкт-а $A = \{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_r\}$ и $B = \{B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_v\}$, т.е. весь материал разбивается на rv групп. Для простоты огр-мся случаем, когда в каждой группе имеется лишь одно нбл-ие, так что общее число нбл-й $N = rv$. Через x_{ij} обз-им нбл-ие, попавшее в группу A_i по признаку A и в группу B_j по признаку (фкт-у) B (см. табл. 4).

Таблица 4

A \ B		j				$\bar{x}_{i\cdot}$
		B_1	B_2	…	B_v	
i	A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1v}	$\bar{x}_{1\cdot}$
	A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2v}	$\bar{x}_{2\cdot}$
	…	…	…	…	…	…
	A_r	x_{r1}	x_{r2}	…	x_{rv}	$\bar{x}_{r\cdot}$
$\bar{x}_{\cdot j}$		$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	…	$\bar{x}_{\cdot v}$	$\bar{x}_{\cdot\cdot}$

Обз-им через

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}, \tag{14}$$

$$\bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{ij}, \tag{15}$$

$$\bar{x}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{rv}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}. \tag{16}$$

Основному тождеству (5) офктн-го анализа здесь отвечает тождество

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left[x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot\cdot} + \left(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right) + \left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right)\right]^2 = \\ &= v\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right) + r\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left[x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot\cdot}\right]^2 = Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Врж-ия Q_1 и Q_2 наз. суммами кв-ов разностей между «строками» и между «столбцами» табл. 4. А Q_3 наз. ост-ой суммой кв-ов и хркз-ет влияние неучтенных фкт-ов.

Будем предполагать, что вел-ы x_{ij} норм-о рсп-ы по закону $N(x, v, \sigma)$, где σ^2 – общий, но неизвестный параметр дсп-и. И будем использовать данные табл. 4 для проверки гп-ы о рав-е центров v_{ij}. При этой гп-е вел-ы

$$Q/\sigma^2,\ Q_1/\sigma^2,\ Q_2/\sigma^2 \text{ и } Q_3/\sigma^2$$

рсп-ны по закону χ^2 с $(rv - 1)$, $(r - 1)$, $(v - 1)$ и $(r - 1)(v - 1)$ ст-ми свободы ств-но, а поэтому Q, Q_1, Q_2, Q_3 могут быть использованы для оценки σ^2. Эта оценка может быть проведена с помощью несмещенных хркс-ик (эмп-их дсп-й):

$$S^2=\frac{Q}{rv-1}=\frac{1}{rv-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij}-\overline{x}_{\cdot\cdot}\right)^2, \tag{18}$$

$$S_1^2=\frac{Q_1}{r-1}=\frac{v}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{x}_{i\cdot}-\overline{x}_{\cdot\cdot}\right)^2, \tag{19}$$

$$S_2^2=\frac{Q_2}{v-1}=\frac{r}{v-1}\sum_{j=1}^{v}\left(\overline{x}_{\cdot j}-\overline{x}_{\cdot\cdot}\right)^2, \tag{20}$$

$$S_3^2=\frac{Q_3}{(r-1)(v-1)}=\frac{1}{(r-1)(v-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij}-\overline{x}_{i\cdot}-\overline{x}_{\cdot j}+\overline{x}_{\cdot\cdot}\right)^2. \tag{21}$$

Для проверки ст-и значимости расхождений, обнаруженных в ср-их по строкам и по столбцам выч-ся кт-и:

$$F_A=\frac{\frac{1}{r-1}Q_1}{\frac{1}{(r-1)(v-1)}Q_3}=\frac{S_1^2}{S_3^2}, \tag{22}$$

$$F_B=\frac{\frac{1}{v-1}Q_2}{\frac{1}{(r-1)(v-1)}Q_3}=\frac{S_2^2}{S_3^2}. \tag{23}$$

Вел-ы F_A и F_B используем как и в офктн-ом анализе.

5º. Некоторые упрощения для практических расчетов. Пример. Полезны фм-ы:

$$Q_1=\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{v}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv}, \tag{24}$$

$$Q_2=\sum_{i=1}^{v}\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}x_{ij}\right)^2}{r}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv}, \tag{25}$$

$$Q_3=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}^2-\frac{\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{v}-\frac{\sum_{j=1}^{v}\left(\sum_{i=1}^{r}x_{ij}\right)^2}{r}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv}. \tag{26}$$

п3. Рас-им данные (см. табл. 5) об отк-ях диаметров шариков в микронах от общего «ложного нуля», полученных на подшипниковом заводе десятью наладчиками, каждый из к-ых обслуживал по пять доводочных станков. Требуется сравнить влияние на рассеивание диаметров шариков точности станков и квалификации наладчиков.

Таблица 5

Станки i	j – наладчики																				$\sum_j x$	$\left(\sum_j x\right)^2$	$\sum_j x^2$
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10				
	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2			
1	3	9	7	49	3	9	6	36	6	36	7	49	6	36	3	9	8	64	3	9	52	2704	306
2	6	36	5	25	7	49	4	16	9	81	4	16	3	9	2	4	7	49	8	64	55	3025	349
3	8	64	6	36	3	9	2	4	7	49	8	64	6	36	9	81	3	9	8	64	60	3600	416
4	4	16	7	49	7	49	8	64	6	36	4	16	5	25	8	64	4	16	7	49	60	3600	384
5	6	36	2	4	6	36	6	36	8	64	9	81	7	49	6	36	8	64	1	1	59	3481	407
$\sum_i x$	27		27		26		26		36		32		27		28		30		27		286		
$\left(\sum_i x_i\right)^2$	729		729		676		676		1296		1024		729		784		900		729			16410 / 8272	
$\sum_i x^2$		161		163		152		156		266		226		155		194		202		187			1862

Р. Используя (24)-(26) и результаты табл., находим

$$Q_1 = \frac{16410}{10} - \frac{286^2}{5\cdot 10} = 1641{,}0 - 1635{,}9 = 5{,}1 \text{ мк}^2,$$

$$Q_2 = 8272/5 - 1635{,}9 = 1654{,}4 - 1635{,}9 = 18{,}5 \text{ мк}^2,$$

$$Q_3 = 1862 - 1641{,}0 - 1654{,}4 + 1635{,}9 = 202{,}5 \text{ мк}^2,$$

$$Q = 1862 - 1635{,}9 = 226{,}1 \text{ мк}^2.$$

Отсюда имеем

$S_c^2 = 5{,}1/4 = 1{,}28$ – дсп-ия между станками,

$S_н^2 = 18{,}5/9 = 2{,}06$ – дсп. между наладчиками,

$S_о^2 = 202{,}5/36 = 5{,}62$ – дсп. остаточная,

$S^2 = 226{,}1/49 = 4{,}61$ – дсп. общая.

Нулевую гп-у проверим при помощи F кт-ия:

для ср-го кв-та между станками имеем $F_c = 5{,}62/1{,}28 = 4{,}39$

и для ср-го кв-та между наладчиками – $F_н = 5{,}62/2{,}06 = 2{,}73$.

Из T_{15} по стн-ю $P(F_c > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)) = \alpha$ находим

$F_{кр}(0{,}05;\, 36;\, 4) = 5{,}72$ и $F_{кр}(0{,}01;\, 36;\, 4) = 13{,}78$, а для $F_н$

$F_{кр}(0{,}05;\, 36;\, 9) = 2{,}86$ и $F_{кр}(0{,}01;\, 36;\, 9) = 4{,}59$.

Т.к. $F_c < F_{кр}$ и $F_н < F_{кр}$, то влияние станков и наладчиков на рассеивание яв-ся несущ-ми (незначимыми). Теперь в кач-е оценки дсп-и следует взять общий ср-й кв-т, т.е. $\sigma^2 = 4{,}61$ мк^2. Тогда поле рассеивания диаметров шариков можно при надежности в 99,73% принять равным $2\cdot 3\sigma = 2\cdot 3\cdot 2{,}15 \approx 12{,}9$ мк.

6°. Двухфакторный дисперсионный анализ с неравным числом наблюдений в ячейке и взаимодействием между факторами. Выше рас-ли частный случай дспн-го анализа при классификации по двум признакам: в ячейке одно нбл-ие взаимодействия между фкт-ми отсутствует. В общем случае в ячейке может быть несколько нбл-й (как равное кол-во, так и неравное), между фкт-ми может иметь место взаимодействие.

Для общего случая двухфакторного (дфктн.) анализа одно нбл-ие можно представить в виде

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_i + g_j + v_{ij} + e_{ij},$$

где μ – общее ср., γ_i – эффект (эф.), обусловленный влиянием i-го уровня фкт-а A; g_j – эф., обусловленный влиянием j-го уровня фкт-а B; v_{ij} – эф. взаимодействия фкт-ов A и B; e_{ij} – вариация (врц.) внутри ячейки.

Основное тожд. дфктн-го дспн-го анализа с одинаковым кол-ом нбл-й в ячейке (n) имеет вид (по аналогии с (17))

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}\right)^2 = nv\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}\right) + nr\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{x}\right)^2 +$$
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}\right)^2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (27)$$

Здесь $Q_1 + Q_2$ имеют то же зн-ие, что и в фм-е (17); Q_3 – сумма кв-ов, оценивающая взаимодействие фкт-ов A и B; Q_4 – сумма кв-ов, оценивающая врц-ю внутри ячейки. Матрицу нбл-й можно представить в табл. 6.

Таблица 6

$A \backslash B$	B_1	B_2	…	B_v	$\bar{x}_{i\cdot\cdot}$
A_1	$\bar{x}_{11\cdot}$	$\bar{x}_{12\cdot}$		$\bar{x}_{1v\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot\cdot}$
	$x_{111}, \ldots, x_{11n}$	$x_{121}, \ldots, x_{12n}$		$x_{1v1}, \ldots, x_{1vn}$	
A_2	$\bar{x}_{21\cdot}$	$\bar{x}_{22\cdot}$		$\bar{x}_{2v\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot\cdot}$
	$x_{211}, \ldots, x_{11n}$	$x_{221}, \ldots, x_{12n}$		$x_{2v1}, \ldots, x_{1vn}$	
…			$\bar{x}_{ij\cdot}$		$\bar{x}_{i\cdot\cdot}$
			$x_{ij1}, \ldots, x_{ijn}$		
A_r	$\bar{x}_{r1\cdot}$	$\bar{x}_{r2\cdot}$	…	$\bar{x}_{rv\cdot}$	$\bar{x}_{r\cdot\cdot}$
	$x_{r11}, \ldots, x_{r1n}$	$x_{r21}, \ldots, x_{r2n}$	…	$x_{rv1}, \ldots, x_{rvn}$	
$\bar{x}_{\cdot j\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot 2\cdot}$	…	$\bar{x}_{\cdot v\cdot}$	$\bar{x}$

Здесь $x_{111}, x_{112}, \ldots, x_{rvn}$ – нблв-еся зн-ия исслм-го признака:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}_{ij\cdot} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \ \text{– ср. зн-ие в ячейке;}\\
\bar{x}_{i\cdot\cdot} &= \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v} \bar{x}_{ij\cdot} \ \text{– ср. зн-ие по строке;}\\
\bar{x}_{\cdot j\cdot} &= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{ij\cdot} \ \text{– ср. зн-ие по столбцу;}\\
\bar{x} &= \frac{1}{rv}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} x_{ij\cdot} \ \text{– общее ср.,}
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

где r – число уровней фкт-а A; v – число уровней фкт-а B.

Порядок проведения дспн-го анализа в этом случае такой же, как и выше: сначала выч-ют суммы кв-ов, оценки дсп-й, затем отн-ие дсп-й F сравнивают с $F_{кр}$, т.е. (из (27) получим (29))

$$\left.\begin{aligned}
&Q_1 = nv\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}\right)^2 \ \text{– сумма кв-ов по строкам фкт-а } A,\\
&Q_2 = nr\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{x}\right)^2 \ \text{– сумма кв-ов по столбцам фкт-а } B,\\
&Q_3 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{x}\right)^2 \ \text{– взаимодействие дсп-й},\\
&Q_4 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}\right)^2 \ \text{– ост. сумма кв-ов слн. фкт-ов},\\
&Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}\right)^2 \ \text{– полная сумма кв-ов.}
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Здесь появление новой суммы Q_4 обусловлено наличием нескольких нбл-й в ячейке. В предыдущей схеме (см. (17)) эта сумма отсутствовала, т.к. при одном нбл-и в ячейке разность (x_{ijk} – $\bar{x}_{ij\cdot}$) равна нулю. Несколько меняется и структура суммы Q_3 (вместо x_{ijk} берется $\bar{x}_{ij\cdot}$).

Из (29) получим несмещенные эмп-ие дсп-и:

$$\left.\begin{aligned}
&S_1^2 = \frac{Q_1}{r-1} = \frac{vn}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}\right)^2,\\
&S_2^2 = \frac{Q_2}{v-1} = \frac{rn}{v-1}\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{x}\right)^2,\\
&S_3^2 = \frac{Q_3}{(r-1)(v-1)} = \frac{n}{(r-1)(v-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{x}\right)^2,\\
&S_4^2 = \frac{Q_4}{rv(n-1)} = \frac{1}{rv(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}\right)^2,\\
&S^2 = \frac{Q}{rvn-1} = \frac{1}{rvn-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Теперь по (30) выч-им сд-ие отн-ия дсп-й

$$F_A = S_1^2/S_4^2,\ F_B = S_2^2/S_4^2,\ F_{AB} = S_3^2/S_4^2 \qquad (31)$$

и их сравниваем с крт-ми точками табл. T_{15} с учетом заданного уровня значимости и ств-го числа ст-ей свободы.

п4. Рас-им в текстильной промышленности данные (см. табл. 6а) о вел-е разрывной нагрузки (кач-а пряжи) в звт-и от наладки машины и партии сырья, полученные тремя уровнями наладки машины фкт-а *A* и двумя партиями сырья фкт-а *B*. При каждом уровне наладки машины иссл-но по 5 образцов из каждой партии сырья для опр-ия разрывной нагрузки. Требуется выяснить (при α = 0,05), значимо ли влияют наладка машины и партии сырья на вел-у разрывной нагрузки.

Таблица 6а

A \ B	B_1					$\bar{x}_{i1\cdot}$	B_2					$\bar{x}_{i2\cdot}$	$\bar{x}_{i\cdot\cdot}$
A_1	190	260	170	170	170	192	190	150	210	150	150	170	181,0
A_2	150	250	220	140	180	188	230	190	200	190	200	202	195,0
A_3	190	185	135	195	195	180	150	170	150	170	180	164	172,0
$\bar{x}_{\cdot j\cdot}$	176,7	231,7	175	168,3	181,7	186,7	190	170	186,7	170	176,7	178,7	182,7

Р. По фм-ам (29) и учитывая результаты табл. 6а, находим

$$Q_1 = vn\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}\right)^2 = 2\cdot 5[(181 - 182{,}7)^2 + (195 - 182{,}7)^2 + (172 - 182{,}7)^2] = 2686{,}7.$$

Анч-но $Q_2 = 480$; $Q_3 = 1860$; $Q_4 = 22360$; $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 27386{,}7$. По (30) выч-им $S_1^2 = \dfrac{Q_1}{r-1} = 2686{,}7/2 = 1343{,}3$; $S_2^2 = \dfrac{Q_2}{v-1} = 480/1 = 480$; $S_3^2 = \dfrac{Q_3}{(r-1)(v-1)} = 1860/2 = 930$; $S_4^2 = \dfrac{Q_4}{rv(n-1)} = 22360/24 = 931{,}7$; $S^2 = \dfrac{Q}{rvn-1} = 27386{,}7/29 = 944{,}4$. Находим $F_A = S_1^2/S_4^2 = 1343{,}3/931{,}7 = 1{,}44$; $F_B = S_2^2/S_4^2 = 480/941{,}7 = 0{,}52$. Из T_{15} опр-им крт-ю точку $F_{A,кр}(\alpha, k_4, k_1) = F_{A,кр}(0{,}05;\ 24;\ 1) = 4{,}26$; $F_{B,кр}(\alpha, k_4, k_2) = F_{B,кр}(0{,}05;\ 24;\ 2) = 3{,}40$. Т.к. $F_A < F_{A,кр}$ и $F_B < F_{B,кр}$ – нулевая гп-а о рав-ве ср-х не отвергается, т.е. влияние фкт-а A (уровня наладки машины) и фкт-а B (партии сырья) на вел-у разрывной нагрузки незначимо.

Теперь рас-им дспн-й анализ с неравным числом нбл-й в ячейке, а нек-ые ячейки вообще могут быть пустыми. Предположим, н-р, что на текстильной фабрике нх-мо опр-ть влияние кач-а сырья в партиях (фкт. A) и состояния машин (фкт. B) на механические св-ва пряжи, а именно на удлинение (результирующий признак x). Взято три партии пряжи (три уровня фкт-а A) и пять машин (пять уровней фкт-а B), причем в каждую ячейку решено записать по пять нбл-й. Т.е. планируемая матрица нбл-й должна иметь вид табл. 7.

Таблица 7

A \ B	1	2	3	4	5
I	$x_{111}, x_{112}, \ldots, x_{115}$	$x_{121}, x_{122}, \ldots, x_{125}$	$x_{131}, x_{132}, \ldots, x_{135}$	$x_{141}, x_{142}, \ldots, x_{145}$	$x_{151}, x_{152}, \ldots, x_{155}$
II	$x_{211}, x_{212}, \ldots, x_{215}$	$x_{221}, x_{222}, \ldots, x_{225}$	$x_{231}, x_{232}, \ldots, x_{235}$	$x_{241}, x_{242}, \ldots, x_{245}$	$x_{251}, x_{252}, \ldots, x_{255}$
III	$x_{311}, x_{312}, \ldots, x_{315}$	$x_{321}, x_{322}, \ldots, x_{325}$	$x_{331}, x_{332}, \ldots, x_{335}$	$x_{341}, x_{342}, \ldots, x_{345}$	$x_{351}, x_{352}, \ldots, x_{355}$

Однако оказалось, что вторая машина испортилась при обработке первой партии сырья, а третья машина на некоторое время была остановлена для профилактического осмотра. В результате ячейка с индексом (1, 2) осталась пустой, а для заполнения ячейки (1, 3) имеются лишь три нбл-ия. Аналогичные ситуации возникли при обработке второй и третьей партий сырья, поэтому в результате эксп-та получили матрицу нбл-й (табл. 8).

Таблица 8

A \ B	1	2	3	4	5
I	$x_{111}, x_{112}, \ldots, x_{115}$	0	$x_{131}, x_{132}, x_{133}$	$x_{141}, x_{142}, \ldots, x_{145}$	$x_{151}, x_{152}, \ldots, x_{155}$
II	$x_{211}, x_{212}, \ldots, x_{215}$	$x_{221}, x_{222}, \ldots, x_{225}$	$x_{231}, x_{232}, \ldots, x_{235}$	$x_{241}, x_{242}, x_{243}$	0
III	$x_{311}, x_{312}, \ldots, x_{315}$	$x_{321}, x_{322}, \ldots, x_{325}$	$x_{331}, x_{332}, x_{333}$	x_{341}, x_{342}	x_{351}, x_{352}

Для того чтобы при обработке матрицы нбл-й можно было воспользоваться уже известными схемами, нх-мо вычеркнуть столбцы, в к-ых встречаются пустые ячейки и ячейки с числом нбл-й, меньшим пяти. В этом случае может получиться матрица, не позволяющая решить поставленную задачу (опр-ть влияние фкт-а *B* на результирующий признак *x*), как показано в табл. 9. Для этого случая разработана особая методика*.

Таблица 9

A \ B	1
I	$x_{111}, x_{112}, x_{113}, x_{114}, x_{115}$
II	$x_{211}, x_{212}, x_{213}, x_{214}, x_{215}$
III	$x_{311}, x_{312}, x_{313}, x_{314}, x_{315}$

Здесь рас-им случай, когда табл. 9 позволяет использовать известные схемы. Представим каждое нбл. x_{ijk} в виде

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_i + g_j + v_{ij} + e_{ij},$$

где $i = \overline{1, r}$ (r – кол-во строк), $j = \overline{1, v}$ (v – кол. столбцов), $k = \overline{1, n}$ (n – кол. нбл-й в ячейке), μ – ср-я всего комплекса; γ_i – эф-т, обусловленный действием фкт-а *A*, g_j – эф., обусловленный действием фкт-а *B*, v_{ij} – эф., обусловленный взаимодействием *i*-го уровня фкт-а *A* с *j*-м уровнем фкт-а *B*, e_{ijk} – врц-я результатов внутри отдельной ячейки, с помощью к-ой учитываются все неконтролируемые (некрум.), т.е. слн. фкт-ы.

На составляющие (сост.) нбл-ия x_{ijk} накладывают огр-ия. Так, предполагают, что мн-во $\{e_{ijk}\}$ подчиняется норм. закону рсп-ия с мт-им ож-ем, равным нулю, и дсп-ей σ^2. Ср-ие эф-ы фкт-ов *A*, *B* и их взаимодействие также предполагают равными нулю, т.е.

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\gamma_i = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v}g_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}v_{ij} = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v}v_{ij} = 0.$$

Если в матрице нбл-й есть пустые ячейки, то анализ начинают с проверки отсутствия эф-та взаимодействия. Обычно эту гп-у обз-ют H_{AB}. Если гп-а H_{AB} отвергается, т.е. взаимодействие значимо, то считают док-ным влияние и фкт-а *A*, и фкт-а *B* на результирующий признак *x*. Если же гп-а H_{AB} принимается, т.е. взаимодействие незначимо, то переходят к проверке влияния на результирующий признак *x* каждого из фкт-ов *A* и *B* по схеме однофакторного (офктн.) дспн-го анализа.

Перейдем к проверке гп-ы H_{AB}, общая идея к-ой сводится к сд-му:

1. Сначала выч-ют сумму кв-ов отк-й каждого нбл-ия ячейки от своего ср-го. Полученные результаты по всем непустым ячейкам складывают. Эта

* Дружинин Н.К. Математическая статистика в экономике. – М., 1971.

сумма (обз-им ее через Q_e) хркз-ет врц-ю нбл-й, к-я вызвана слн. фкт-ми. Дсв-но, $M(e_{ijk}) = 0$, поэтому ср-ю $\bar{x}_{ij\cdot}$ ячейки (ij) можно представить в виде $\bar{x}_{ij\cdot} = \mu + \gamma_i + g_j + v_{ij}$, сд-но, $x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot} = (\mu + \gamma_i + g_j + v_{ij} + e_{ij}) - (\mu + \gamma_i + g_j + v_{ij}) = e_{ijk}$. Итак,

$$Q_e = \sum_{(ij)\in D} \sum_{k=1}^{n} \left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}\right)^2, \tag{32}$$

где D – мн. непустых ячеек. Статистика (стс.) Q_e имеет $k = N - p$ ст-ей свободы, где N – общее кол. нбл-й; p – кол. непустых ячеек.

2. Если взаимодействие фкт-ов незначимо, то ср-ю $\bar{x}_{ij\cdot}$ ячейки можно представить в сд-ем виде: $\bar{x}_{ij\cdot} = \mu + \gamma_i + g_j$. Тогда

$$x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot} = (\mu + \gamma_i + g_j + v_{ij} + e_{ij}) - (\mu + \gamma_i + g_j) = v_{ij} + e_{ijk}.$$

Сумма кв-ов отк-ий каждого нбл-ия ячейки от своего ср-го

$$Q_{AB+e} = \sum_{(ij)\in D} \sum_{k=1}^{n} \left(v_{ij} + e_{ijk}\right)^2 = \sum_{(ij)\in D} \sum_{k=1}^{n} \left(x_{ijk} - \mu - \gamma_i - g_j\right)^2 \tag{33}$$

содержит сумму эф-ов взаимодействия и врц-ю нбл-й, вызванную действием некрум-ых фкт-ов. Если из Q_{AB+e} вычесть Q_e, то получим эф-т, хркз-й взаимодействие исс-ых фкт-ов. Эта разность имеет $p - r - v + 1$ ст-ей свободы.

3. Если гп. H_{AB} верна, т.е. взаимодействие фкт-ов незначимо, то отн.

$$\frac{\left(Q_{AB+e} - Q_e\right)/\left(p - r - v + 1\right)}{Q_e/\left(N - p\right)} = F$$

имеет F рсп-ие с $p - r - v + 1 = k_1$ и $N - p = k_2$ ст-ми свободы.

Затем из T_{15} находят крт-ю точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F < F_{кр}$, то нет оснований отвергать гп-у H_{AB}. Если $F > F_{кр}$, то гп-у H_{AB} отвергают, т.е. взаимодействие фкт-ов значимо.

4. Для того, чтобы выч-ть Q_{AB+e}, нх-мо найти оценки μ, γ_i, g_j при гп-е H_{AB}. С этой целью используем метод нм-их кв-ов, т.е. мнмз-ую стс-у $\sum_{(ij)\in D} \sum_{k=1}^{n} \left(x_{ijk} - \mu - \gamma_i - g_j\right)^2$ по каждому параметру, приравнивая к нулю частные производные этих параметров:

$$\frac{\partial Q_{AB+e}}{\partial \mu} = 0,\ \frac{\partial Q_{AB+e}}{\partial \gamma_i} = 0,\ \frac{\partial Q_{AB+e}}{\partial g_j} = 0,\ (i = \overline{1, r}, j = \overline{1, v}). \tag{34}$$

Пусть G_i – кол. эл-ов в i-ой строке, H_j – кол. эл-ов в j-ом столбце, k_{ij} – кол. эл-ов i-ой строки и j-го столбца. Тогда систему (34) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &N\mu + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i G_i + \sum_{j=1}^{v} g_j H_j = \sum_{(ij)\in D} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, \\ &G_i\mu + G_i\gamma_i + \sum_{j=1}^{v} k_{ij} g_j = \sum_{j=1}^{v} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, (*) \\ &H_j + \sum_{i=1}^{r} k_{ij}\gamma_i + H_j g_j = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}. (**) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Система (35) содержит $r + v + 1$ ур-ие с $r + v + 1$ неизвестными (μ, γ_1, …, γ_r, g_1, …, g_v). Однако среди ур-й этой системы лишь $r + v - 1$ лин-но незв-мы, т.к. сумма ур-й и (*), и (**) равны первому ур-ю. Из этого следует, что решение системы не яв-ся единственным (едс.). Учитывая, что $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\gamma_i = 0$ и $\frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v}g_j = 0$, и исключая из системы (35) любые два ур-ия (н-р, первое и последнее), получаем

$$\left.\begin{aligned} &G_i\mu + G_i\gamma_i + \sum_{j=1}^{v}k_{ij}g_j = \sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\,,\\ &H_j + \sum_{i=1}^{r}k_{ij}\gamma_i + H_jg_j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\,,\\ &\sum_{i=1}^{r}\gamma_i = 0,\ \sum_{j=1}^{v}g_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Система (36) имеет едс. решение. Решая систему, опр-ем μ, γ_i, g_j, а затем выч-ем Q_{AB+e}.

В заключение остановимся на кт-и допустимого кол-ва пустых ячеек. Кол-во пустых ячеек считается допустимым, если числа ст-ей свободы $k_1 = p - r - v + 1$ и $k_2 = N - p$ отличны от нуля и при этом система (36) имеет едс. решение. При невыполнении хотя бы одного из этих условий задача оценки влияния действующих фкт-ов не может быть решена.

п5. Выяснить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ влияние партии сырья (с двумя уровнями фкт-а A) и наладки машины (с тремя уровнями фкт-а B) на данные о вел-е разрывной нагрузки (кач-а пряжи) с неравным числом нбл-й в ячейке (см. табл. 10).

Таблица 10

A \ B	B_1				B_2					B_3				Σ, $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$	
	x_{i1k}		Σ, $\bar{x}_{i1\cdot}$, кол.		x_{i2k}			Σ, $\bar{x}_{i2\cdot}$, кол.		x_{i3k}		Σ, $\bar{x}_{i3\cdot}$, кол.		кол.	
A_1	0,5	0,6	1,1	0,55						0,4	0,3	0,7	0,35	1,8	0,45
			2									2		4	
A_2	0,6	0,6	1,2	0,6	0,2	0,6	0,4	1,2	0,4	0,6	0,5	1,1	0,55	3,5	0,5
			2					3				2		7	
Σ, $\bar{x}_{\cdot j\cdot}$	–		2,3	0,575	–			1,2	0,4	–		1,8	0,45	5,3	0,482
кол.			4					3				4		11	

Р. В. табл. 10 для удобства выч-й приведены также суммы Σ, ср-е $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$, $\bar{x}_{\cdot j\cdot}$ и кол-во эл-ов в ячейке. Система (35) с учетом табл. 10 имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &(i_1)\ 11\mu + 4\gamma_1 + 7\gamma_2 + 4g_1 + 3g_2 + 4g_3 = 5{,}3,\\ &(i_2)\ \ 4\mu + 4\gamma_1 + \qquad + 2g_1 + \qquad + 2g_3 = 1{,}8,\\ &(i_3)\ \ 7\mu + \qquad + 7\gamma_2 + 2g_1 + 3g_2 + 2g_3 = 3{,}5,\\ &(i_4)\ \ 4\mu + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 4g_1 \qquad\qquad = 2{,}3,\\ &(i_5)\ \ 3\mu + \qquad + 3\gamma_2 + \qquad + 3g_2 \qquad = 1{,}2,\\ &(i_6)\ \ 4\mu + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \qquad\qquad + 4g_3 = 1{,}8. \end{aligned}\right\} \tag{35'}$$

Заметим, что сумма ур-й (i_2) и (i_3) есть ур-ие (i_1); сумма ур-й (i_4), (i_5) и (i_6) также есть ур-е (i_1). Поэтому, отбросив кр-ия (i_1) и (i_6) системы (35′), т.е. преобразуя данную систему, получим

$$\left.\begin{aligned}
&4\mu + 4\gamma_1 + \quad + 2g_1 + \quad + 2g_3 = 1{,}8,\\
&7\mu + \quad + 7\gamma_2 + 2g_1 + 3g_2 + 2g_3 = 3{,}5,\\
&4\mu + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 4g_1 \quad = 2{,}3,\\
&3\mu + \quad + 3\gamma_2 + \quad + 3g_2 \quad = 1{,}2,\\
&\gamma_1 + \gamma_2 \quad = 0,\\
&g_1 + g_2 + g_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (36')$$

Систему (36′) решим методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\\ \mathrm{IV}\\ \mathrm{V}\\ \mathrm{VI} \end{array}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
4&4&0&2&0&2&1{,}8\\
7&0&7&2&3&2&3{,}5\\
4&2&2&4&0&0&2{,}3\\
3&0&3&0&3&0&1{,}2\\
0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
2&2&0&0&-1&0&0{,}9\\
7&0&7&0&1&0&3{,}5\\
4&0&0&4&0&0&2{,}3\\
1&0&1&0&1&0&0{,}4\\
0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&0&0&0&0&0&0{,}454\\
0&0&0&0&1&0&-0{,}117\\
0&0&0&1&0&0&0{,}121\\
1&-1&0&0&0&0&0{,}517\\
0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0{,}117
\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1&0&0&0&0&0&0{,}454\\
0&0&0&0&1&0&-0{,}117\\
0&0&0&1&0&0&0{,}121\\
0&1&0&0&0&0&-0{,}63\\
0&0&1&0&0&0&0{,}63\\
0&0&0&0&0&1&-0{,}004
\end{array}\right)$$

Матрицу системы прб-ем в сд-ем порядке: 1) I : 2 – VI ≐ I (где ≐ – знак засылки), II – VI·2 ≐ II, III – V·2 ≐ III, IV : 3 ≐ IV; 2) (II – IV·7) : (– 6) ≐ II, IV – – II ≐ IV, VI – II ≐ VI, IV – V ≐ IV, (I + II – IV·2) : 4 ≐ I; III : 4 – I ≐ III; 3) (IV – I) × (– 1) ≐ IV, V – IV ≐ V, VI – III ≐ VI. Итак, получили решение $\mu = 0{,}454$, $\gamma_1 = -0{,}63$, $\gamma_2 = 0{,}63$, $g_1 = 0{,}121$, $g_2 = -0{,}117$, $g_3 = -0{,}004$.

Преобразуя стн. (33), выч-им

$$Q_{AB+e} = \sum_i\sum_j\sum_k x_{ijk}^2 - \mu\sum_i\sum_j\sum_k x_{ijk} - \sum_i \gamma_i \sum_j\sum_k x_{ijk} - \sum_j g_j \sum_i\sum_k x_{ijk};$$

$$\sum_i\sum_j\sum_k x_{ijk}^2 = 2{,}75;\ \sum_i\sum_j\sum_k x_{ijk} = 5{,}3;\ \mu\sum_i\sum_j\sum_k x_{ijk} = 2{,}4062;$$

$$\sum_i \gamma_i \sum_j\sum_k x_{ijk} = 0{,}1069;\ \sum_j g_j \sum_i\sum_k x_{ijk} = 0{,}1307;\ Q_{AB+e} \approx 0{,}106.$$

Далее, используя (32), находим $Q_e = 0{,}095$ и выч-им $k_1 = p - r - v + 1 = = 5 - 2 - 3 + 1 = 1$, $k_2 = N - p = 11 - 5 = 6$. Отсюда опр-им

$$F = \frac{(Q_{AB+e} - Q_e)/(p - r - v + 1)}{Q_e/(N - p)} = \frac{(1{,}106 - 0{,}095)/1}{0{,}095/6} = 0{,}7.$$

Из T_{15} находим крт. точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2) = F_{кр}(0,05; 1; 6) = 5,99$. Т.к. $F < F_{кр}$, то нет оснований отвергать гп-у H_{AB}, т.е. взаимодействие исслм-ых фкт-ов незначимо, поэтому надо перейти к анализу каждого из фкт-ов A и B в отдельности по общим схемам дспн-го анализа или свести к виду табл. 9 и иссл-ть аналогично п4:

A \ B	B_1		B_2	
A_1	0,5	0,6	0,4	0,3
A_2	0,6	0,6	0,6	0,5

Решение этого примера предоставляется читателю.

зм5. Совершенно аналогично расв-ся случай действия трех и более фкт-ов (мфктн-ый дспн. анализ). Однако здесь появляется новое осложнение: если имеется k фкт-ов, причем i-й фкт. действует на l_i уровнях, то для того, чтобы произвести хотя бы по одному нбл-ю со всевозможными комбинациями уровней действия фкт-ов, нх-мо в общей сложности $l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_k$ нбл-й. В частности (част.), при четырех фкт-ах ($k = 4$) и пяти уровнях ($l_i = 5$) действия каждого из них нх-мо $N = l_i^k = 5^4 = 625$ нбл-й. Ясно, что на практике такое кол. нбл-й обычно нереально. Поэтому следует так спланировать эксп-т (при опр-ой комбинации уровней их действия), чтобы, с одной стороны, число нбл-й было разумным, с другой стороны, мы бы получили дт-но аргументированные стсч-ие выводы. Возможные методы решения этой задачи рас-им в сд-ем параграфе.

ЛЕКЦИЯ 16

5.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

1°. Основные понятия и задачи. Латинские квадраты. Разные специалисты под «планированием эксперимента» понимают различные проблемы, как бы в широком и узком смыслах. В широком смысле планирование (плн.) эксперимента (эксп.) будем понимать мт-ю обработку эксп-ых данных с применением того или иного выч-го метода, к-ую будем излагать в третьем разделе книги. В узком смысле плн-ие эксп-та будем понимать как части дспн-го анализа, к-ый рас-им в данной лекции.

Оценку влияния одного или двух фкт-ов на исслм-ую вел-у рас-ли в 5.3. Так, н-р, при иссл-и влияния двух фкт-ов (см. табл. 4 из 4°: 5.3) кол-во опытов полного факторного (фктн.) эксп-та составляет rv, где r – число уровней первого фкт-а, v – второго. При $r = v = 2$ кол-во опытов равно $2·2 = 2^2 = 4$. Если число уровней каждого из фкт-ов одинаково, то кол-во опытов, к-ые надо провести по схемам полного фктн-го эксп-та при иссл-и k фкт-ов, можно выч-ть по фм-е $N = v^k$, где v – число уровней каждого из фкт-ов. На практике бывает нх-мо иссл-ть влияние на расв-мую вел-у, н-р, десятки фкт-ов, каждый из к-ых имеет четыре уровня. В этом случае $N = 4^{10} = 1048576$ опытов.

Вследствие такого большого кол-ва опытов в подобных задачах использовать методы дспн-го анализа, рас-ные в 5.3, практически невозможно. Такого рода задачи явились одной из основных причин возникновения теории плн-ия эксп-ов, к-ая позволяет ответить на вопрос, сколько и какие опыты следует включить в эксп-т.

Приведем общую постановку задачи. Пусть имеется l фкт-ов, причем i-й фкт. может действовать на любом из n_i уровней, а выбор уровня действия фкт-а находится целиком в руках экспт-ра. Действие всех фкт-ов на уровнях $j_1, j_2, \ldots, j_l$ приводит к тому, что результат нбл-ия яв-ся норм-но рсп-ной слн. вел-ой с неизвестным ср-им $m_{j_1 j_2 \ldots j_l}$ и неизвестной дсп-ей σ^2, не звщ-ей от уровней действия фкт-ов. Всюду далее будем предполагать, что фкт-ы действуют линейно (часто говорят «незв-мо»), т.е.

$$m_{j_1 j_2 \ldots j_l} = m_{j_1}^{(1)} + m_{j_2}^{(2)} + \ldots + m_{j_l}^{(l)}.$$

Требуется так спланировать эксп-т, т.е. указать все возможные комбинации $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ уровней действия фкт-ов, для к-ых нужно произвести нбл-ия, чтобы, с одной стороны, кол-во нбл-й не было бы большим, а, с другой стороны, результаты эксп-та дт-но хорошо проверяли бы гп-ы об отсутствии действия каждого фкт-а, т.е. гп-ы $H_0^{(i)}: m_1^{(i)} = m_2^{(i)} = \ldots = m_{n_i}^{(i)}$.

Естественно, планом эксп-та будем называть сам перечень всех наборов $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ уровней действия фкт-ов, для к-ых нх-мо произвести нбл-ия. При этом будем предполагать, что для каждого набора $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$, входящего в план эксп-та, производится только одно нбл-ие X_{j1}. Отметим, что план эксп-та, состоящий из всех возможных комбинаций $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ уровней действия фкт-ов и рас-ный в 5.3 наз-ют (полным) фктн-ым планом. Однако, как уже говорилось, фктн-ый план требует слишком большого кол-ва нбл-й.

Разумным представляется потребовать от плана, чтобы результаты эксп-та можно было бы дт-но просто обработать. С этим уже столкнулись в пункте 6º: 5.3, когда в дфктн-ю модель пришлось ввести условие одинакового числа нбл-й при каждом наборе уровней действия обоих фкт-ов.

Рас-им ортогональность (орт.) планов или сбалансированность блоков, к-ые не только упрощают расчеты, но и приводят к незв-ти стс-к, служащих для проверки отсутствия действия отдельных фкт-ов, что в свою очередь избавляет от неприятной ситуации, когда принятие или отк-ие гп-ы об отсутствии действия одного фкт-а зависит от анч-го решения отс-но остальных фкт-ов. Кроме того, такие планы обладают нек-ми специальными св-ми опт-сти.

Сущ-ют различные способы построения планов эксп-та. Для примера рас-им один из них. Пусть число уровней действия фкт-ов одинаково для всех фкт-ов, т.е. $n_1 = n_l = n$. Потребуем, чтобы для любых фкт-ов i_1 и i_2 и уровней их действия j_{i_1} и j_{i_2} в план эксп-та входил, по крайней мере, один набор, содержащий пару j_{i_1} и j_{i_2}. С другой стороны, для мнмз-и числа нбл-й резонно ограничиться (огр.) только планами, в к-ых каждая пара $\left(j_{i_1}\ ,\ j_{i_2}\right)$ уровней действия фкт-ов i_1 и i_2 встречается не более одного раза. Из этих двух требований следует, что каждая пара $\left(j_{i_1}\ ,\ j_{i_2}\right)$ уровней действия фкт-ов i_1 и i_2 должна входить в план эксп-та ровно один раз. Такие планы назовем орт-ми. Ясно, что любой орт-ый план содержит ровно n^2 нбл-й и его можно представить в виде кв-ой табл. 1, в к-ой $j_i^{(k_1k_2)}$ ($i = \overline{3,l}$) – числа от 1 до n. Этот план заключается в сд-ем. В первом нбл-и первый (A) и второй (B) фкт-ы действуют на уровне 1, третий – на уровне $j_3^{(11)}$, …, l-й – на уровне $j_l^{(n1)}$, …, в n^2-м нбл-и первый и второй фкт-ы действуют на уровне n, третий – на уровне $j_3^{(nn)}$, …, l-й – на уровне $j_l^{(nn)}$. В силу требования орт-сти плана в каждой строке и каждом столбце табл. 1 на любом месте каждое из чисел 1, …, n должно встречаться ровно один раз; для любых чисел k_1 и k_2 от 1 до n и фкт-ов i_1 и i_2 от 3 до l ровно один раз должны встречаться клетки, в к-ых на i_1-м месте стоит k_1, а на i_2-м месте – k_2. Пример орт-го плана при числе действующих фкт-ов $l = 6$ и числе уровней $n = 5$ приведен в табл. 2 (в этой и во всех дальнейших табл-х для сокращения записи первый столбец и первая строка опущены).

Рас-им конкретные зн-ия числа фкт-ов l.

При $l = 2$ орт-ый план представляет собой факторный план (н-р, из чисел A, B, C, D, приведенных в табл. 4), рас-ный в 4º: 5.3, в к-ом мы должны произвести по одному нбл-ю с каждой комбинацией (j_1, j_2) уровней действия первого и второго фкт-ов.

При $l = 3$ любой орт-ый план задается так назм-ым **латинским квадратом** n-го порядка, т.е. кв-ой таблицей размера $n \times n$, в к-ой вписаны числа от 1 до n т.о., чтобы в каждой строке и каждом столбце любое из этих чисел встречалось ровно один раз. Пример латинского квадрата, полученного циклическим сдвигом первой строки на единицу, приведен в табл. 3.

Критерий (кт.) для проверки отсутствия действия фкт-ов строится сд-им образом. Пусть в результате эксп-та по предложенному плану получили нбл-ия

$$X_{11}, \ldots, X_{n1}$$
$$\ldots$$
$$X_{1n}, \ldots, X_{nn}$$

Обз-им

$$m^* = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\,,\ Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - m^*\right)^2 .$$

Стс-ка Q представляет собой сумму кв-ов отк-й нбл-й от общего вбрч-го ср-го m^*. Используя св-во латинского кв-а, ее можно писать в виде

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - m^*_{i(1)} - m^*_{i(2)} - m^*_{k(3)} + 2m^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} n\left(m^*_{i(1)} - m^*\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} n\left(m^*_{j(2)} - m^*\right)^2 +$$
$$+ \sum n\left(m^*_{k(3)} - m^*\right)^2 = (n^2 - 3n + 2)\, Q^*_{(123)} + (n-1)\, Q^*_{(1)} + (n-1)\, Q^*_{(2)} + (n-1)\, Q^*_{(3)}\,,$$

где $m^*_{i(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$, $m^*_{j(2)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$, $m^*_{k(3)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$.

Стс-ки $m^*_{i(1)}$ и $m^*_{j(2)}$ яв-ся вбрч-ми ср-ми при условии действия первого и второго фкт-а на уровне i или j. Такой же смысл имеет и стс-ка $m^*_{k(3)}$, поэтому при опр-и $m^*_{k(3)}$ суммирование (сумв.) должно производиться только по тем нбл-ям, в к-ых третий фкт. действовал бы на k уровне или, в терминах латинского кв-та, по тем клеткам, в к-ых стоит цифра k. Заметим при этом, что в силу лин-сти действия фкт-ов стс-ки $Q^*_{(123)}$, $Q^*_{(1)}$, $Q^*_{(2)}$ и $Q^*_{(3)}$ незв-мы, а $Q^*_{(123)}$ яв-ся несмещенной оценкой дсп-и σ^2 с точностью до множителя $(n^2 - 3n + 2)/\sigma^2$, имеющей рсп-ие χ^2 с $n^2 - 3n + 2$ ст-ми свободы. Теперь, если отсутствует влияние первого фкт-а, то стс-ка $Q^*_{(1)}$ с точностью до множителя $(n - 1)/\sigma^2$ также рсп-на по закону χ^2 с $n - 1$ ст-ми свободы, и значит, для проверки гп-ы об отсутствии влияния первого фкт-а можно принять кт-й Фишера, предписывающий принять эту гп-у, если $F_{(1)} = Q^*_{(1)}\big/Q^*_{(123)} < F_{кр}$ ($F_{кр}$ опр-ся из Т_{15} по $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$, где $\alpha = 0{,}05$ или $0{,}01$ и $k_1 = n^2 - 3n + 2$, $k_2 = n - 1$). Анч-но, по стс-кам $F_{(2)} = Q^*_{(2)}\big/Q^*_{(123)}$ и $F_{(3)} = Q^*_{(3)}\big/Q^*_{(123)}$ проверяются гп-ы об отсутствии действия второго и третьего фкт-ов.

Пусть теперь $l = 4$. Назовем два латинских кв-а орт-ми, если при наложении их друг на друга каждый набор (ij) встретится ровно один раз. Пример наложения двух латинских кв-ов пятого порядка приведен в табл. 5. Т.о., задача построения орт-го плана сводится к задаче нахождения двух орт-ых латинских кв-ов. Однако орт-ые латинские кв. сущ-ют не для всех n, н-р, не сущ-ют для $n = 6$ (задачи Эйлера о 36 офицерах). Если же орт-ые латинские кв. сущ-ют, то орт-ый план яв-ся их наложением. Сама процедура проверки гп-з об отсутствии действия фкт-ов остается такой же, что и в случае $l = 3$ и опирается на представление стс-ки Q в виде

$$Q = (n^2 - 4n + 3)\, Q^*_{(1234)} + (n-1)\, Q^*_{(1)} + (n-1)\, Q^*_{(2)} + (n-1)\, Q^*_{(3)} + (n-1)\, Q^*_{(4)}\,.$$

Таблица 1

Уровни фактора B	Уровни фактора A		
	1	…	n
1	$j_3^{(11)}, \dots, j_l^{(11)}$	…	$j_3^{(n1)}, \dots, j_l^{(n1)}$
…	…	…	…
n	$j_3^{(1n)}, \dots, j_l^{(1n)}$	…	$j_3^{(nn)}, \dots, j_l^{(nn)}$

Таблица 2

1111	2222	3333	4444	5555
2345	3451	4512	5123	1234
3524	4135	5241	1352	2413
4253	5314	1425	2531	3124
5432	1543	2154	3215	4321

Таблица 3

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Таблица 4

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Таблица 5

11	22	33	44	55
23	34	45	51	12
35	41	52	13	24
42	53	14	25	31
54	15	21	32	43

Не трудно теперь понять, что возможность построения орт-го плана эксп-та при $l > 4$ сводится к возможности построения $l - 2$ орт-х латинских кв-ов. Оказывается, в любом случае нельзя построить более $n - 1$ орт-х латинских кв-ов. Система, содержащая мкс-ое для заданного n число орт-ых латинских кв-ов, наз-ся полной. Ясно, что любая система из $n - 1$ орт-ых латинских кв-ов яв-ся полной.

Покажем, как построить полную систему в случае простого n. Первая строка всех $n - 1$ латинских кв-ов состоит из записанных подряд чисел $1, \dots, n$. Вторая строка первого латинского кв-а получается циклическим сдвигом первой строки на единицу, третья – циклическим сдвигом второй строки на единицу влево и т.д. Вторая строка второго латинского кв-а получается циклическим сдвигом первой строки влево на два, третья – циклическим сдвигом второй строки влево на два и т.д. Полная система из четырех латинских кв-ов пятого порядка приведена в табл. 6.

Таблица 6

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Отметим, что табл. 2 получена наложением четырех латинских кв-ов табл. 6.

зм1. Рас-ный выше метод построения орт-ых латинских кв-ов можно описать и в терминах корней n-й степени из 1. Пусть $z_1 = \sqrt[n]{1}$ – какой-либо (отличный от 1) корень n-й степени из 1. Положим $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$, …, $z_n = z_1^n = 1$. Отождествим число i с z_i. Тогда первая строка любого кв-а отождествима с $z_1, z_2, \dots, z_n$. Каждая последующая строка первого латинского кв-та получается из предыдущей умн-ем на z_1, второго – умн-ем на z_2 и т.д. Т.о., сущ-ет тесная связь приведенной процедуры с корнями n-й степени из 1, к-ые в свою очередь яв-ся одним из основополагающих понятий теории Галуа. Оказывается, использование теории Галуа позволяет построить полную систему из $n-1$ латинских кв-ов и в том случае, когда $n = p^l$, где p – простое число. Кроме того, с ее помощью можно построить k орт-ых латинских кв-ов в общем случае $n = p_1^{l_1} \ \dots \ p_q^{l_q}$, причем k представляет собой мнм-ое из чисел $p_i^{l_i} - 1$. С ств-ей процедурой можно ознакомиться в [21, 23].

Вернемся к случаю, когда фкт-ы могут действовать на разных числах уровней n_i. Рас-им дфактн-ю модель. Если настаивать на том условии, чтобы каждый уровень i_1 первого фкт-а обязательно хотя бы в одном нбл-и подействовал с любым уровнем i_2 второго фкт-а, то мнм-ый план эксп-та представляет собой фктн-ый план, содержащий n_1n_2 нбл-й. Однако можно уменьшить число нбл-ий, если отказаться от этого требования и заменить его на более слабое условие: уровни действия i_1 и i_2 первого и второго фкт-ов встречаются не более одного раза. Потребуем также, чтобы каждый уровень действия первого фкт-а встречался во всех эксп-тах l_1 раз, а второго – l_2 раз. Естественно, числа n_1, n_2, l_1 и l_2 должны быть связаны стн-ем $n_1l_1 = n_2l_2 = n$, где n – общее число нбл-й. План такого эксп-та можно записать в виде табл. 7, эл-ты к-ой представляют собой числа 1, …, n_2, расставленные т.о., чтобы в каждом столбце любое из них встречалось не более одного раза, а во всей таблице – ровно l_2 раз.

Блоки. Отметим, что столбцы таблицы, представляющие собой те уровни, на к-ых в планируемом эксп-те должен подействовать второй фкт. при условии, что на ств-щем уровне действует первый фкт., носят название блоков.

Потребовав также, чтобы каждая пара i_1, i_2, встречающаяся хотя бы в одном блоке, встречалась бы во всех блоках ровно k раз, получаем неполный сбалансированный блок. Нетрудно подсчитать, что для неполного сбалансированного блока $l_2(l_1-1) = k(n_1-1)$. Если $n_1 = n_2$, то неполный сбалансированный блок наз-ся симметричным неполным сбалансированным блоком. В табл. 8 приведен пример симметричного неполного сбалансированного блока для $n_1 = n_2 = 15$, $l_1 = l_2 = 7$, $k = 3$.

Таблица 7

Номера наблюдений	Уровень действия первого фактора		
	1	…	n_1
$1 \div n_1$	$i_2^{(11)}$	…	$i_2^{(n_1 1)}$
…	…	…	…
$(l_1-1)n_1 + 1 \div n_1l_1$	$i_2^{(1l_1)}$	…	$i_2^{(n_1l_1)}$

Таблица 8

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	5
2	2	2	3	3	8	7	6	6	7	8	4	5	5	6
5	5	5	6	6	11	4	11	11	12	3	10	11	12	7
3	7	10	4	9	9	8	4	7	3	4	5	7	6	8
8	9	15	13	12	10	11	9	10	8	9	11	9	8	9
6	12	13	10	14	12	15	13	12	13	10	12	13	13	10
11	4	14	7	15	13	14	15	14	15	14	15	14	14	15

При построении неполных сбалансированных блоков также используется теория Галуа. Описание самого метода их построения и процедуры применения плана для проверки гп-з об отсутствии действия фкт-ов можно найти в [21, 23].

Здесь рас-ли возможность применения задач плн-ия эксп-та к дспн-у анализу. Однако в последнее время эти задачи находят широкое применение в множественном (мнн.) и многомерном (ммр.) регрессионном (регн.) анализе для получения наилучших в нек-ом классе оценок параметров регрессии (рег.) и для проверки гп-з о значимости отличия этих параметров от нуля. Обычно планы эксп-ов выбирают т.о., чтобы оценки или стс-ки кт-ев были незв-ми, что приводит к нх-сти расв-ть орт-ые планы или их обобщения. Хрк-ой особенностью применения методов плн-ия эксп-та к регн-му анализу яв-ся также тот факт, что нб-ую информацию (инф.) несут нбл-ия, в к-ых аргументы рег-и принимают крайние (мнм-ое и мкс-ое) зн-ия. Поэтому в задачах регн-го анализа очень часто все фкт-ы действуют только на двух уровнях, к-ые для симметрии обз-ся – 1 и + 1, что, однако, не сильно упрощает сами планы из-за большего числа действующих фкт-ов.

Действие фкт-ов на двух уровнях – 1 и + 1, используется и в самом плн-и эксп-та, к рас-ю к-го перейдем в сд-ем пункте.

2º. Общая идея планирования эксперимента. Полный факторный эксперимент. Плн-ие эксп-та начинают с выбора объекта иссл-ия, к-ый изучается с опр-ой целью (ради отыскания опт-ых условий протекания химических, физических, металлургических и др-х процессов). Цель иссл-ия наз-ют целевой функцией (фк.), или кт-ем оптимизации (оптз.), или параметром оптз-и. Способы воздействия на объект иссл-ия, как и в дспн-ом анализе, наз-ют факторами (фкт.).

Для того, чтобы прогнозировать зн-ия целевой фк-и, нх-мо параметр оптз-и связать с фкт-ми нек-ой функциональной (фнц.) зависимостью (зв.). Эту зв-ть, имеющую вид $Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, наз-ют поверхностью (пвх.), или фк-ей отклика, или моделью (мд.) объекта иссл-ия.

Компенсацией за меньшее кол-во опытов по сравнению с полным факторным (фктн.) эксп-ом служат огр-ия, принимаемые иссл-лем априори, т.е. до проведения опыта. В кач-е огр-й принимают сущв-ие единственного (едн.) оптимума и представление фк-и отклика в виде полинома заданного порядка, параметры к-го оценивают по опытным данным с помощью регн-го анализа. Если же в дсв-сти мд. не уд-ет наложенным огр-ям, то оптимум фк-и отклика можно и не найти.

Рас-им теперь, как принятые допущения способствуют уменьшению кол-ва опытов. Пусть, н-р, известно зн-ие параметра оптз-и в нескольких соседних точках. В силу непрерывности (непр.) фк-и отклика можно прогнозировать зн-ия параметра оптз-и в окрестностях (окрс.) соседних точек. Сд-но, можно обнаружить точки, для к-ых ожидается увеличение (или уменьшение, если отыскивается минимум) параметра оптз-и. В силу едн-сти оптимума сд-й эксп-т целесообразно поставить в точках, в к-ых обнаружено эффективное (эфн.) изменение параметра оптз-и, пренебрегая всеми остальными. В результате такого пошагового продвижения может быть достигнут оптимум параметра оптз-и.

Направление нб-ей скорости возрастания фк-и отклика наз-ют направлением градиента. Если нет особых указаний о виде целевой фк-и, то в начале эксп-та всегда используют линейную (лин.) мд., т.к. она опр-ся мнм-но возможным числом коэф-ов при данном числе фкт-ов. Двигаясь по градиенту, строят лин-ые мд. до тех пор, пока они дают эфн-ое изменение параметра оптз-и. Если улучшение параметра оптз-и с помощью лин-ой мд-и больше не нбл-ся, то обнаружена область (обл.), близкая к оптимуму, или «почти стационарная». В этом случае либо иссл-ие прекращают, либо иссл-ют полиномы более высоких ст-ей.

После выбора объекта иссл-ия, формулировки целевой фк-и и описания фкт-ов перед экспериментатором (экспт.) встает вопрос: при каких сочетаниях фкт-ов проводить первые опыты? При выборе экспл-ой обл-и нх-мо использовать априорную информацию (инф.) об исслм-ом процессе. В кач-е отправной обычно выбирают точку, ств-щую наилучшим сочетаниям фкт-ов, т.е. такую, при к-ой зн-ие целевой фк-и мкс-но (мнм-но) по сравнению с др. известными сочетаниями фкт-ов.

Точку начала эксп-та наз-ют нулевым или основным уровнем. Если априорная инф-ия отсутствует, то выбор нулевого уровня отсутствует, тогда выбор нулевого уровня произволен, однако координаты (крд.) точки начала опыта должны лежать внутри обл-и опр-ия фкт-ов, на нек-ом расстоянии от границы.

Далее переходят к выбору интервалов (инр.) варьирования по каждому из фкт-ов. Под интервалом варьирования понимают число, прибавляя к-ое к нулевому уровню, получают верхний, а вычитая – нижний уровни фкт-а. На первом этапе плн-ия эксп-та (при получении лин-ой мд-и) фкт-ы всегда варьируют лишь на двух уровнях. Инр-л варьирования не может быть меньше ошибки, с к-ой экспт-ор фиксирует уровень фкт-а, иначе верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, нижний и верхний инр-лы должны, как и нулевой уровень, лежать внутри обл-и опр-ия фкт-ов. Выбор нулевого уровня и инр-ов варьирования – задача трудная, т.к. она связана неформализованным этапом плн-ия эксп-та.

Пусть x_{j0} – нулевой уровень, h_j – инт. варьирования, x_j – зн-ие фкт-а, j – номер фкт-а. Для простоты записи и обработки экспериментальных (экспл.) данных перейдем к новой безразмерной системе крд-т с началом (нач.) в центре исслм-ой обл-и. В новой системе крд-т зн-ие j-го фкт-а обз-им X_j, к-ое связано с x_j фм-ой:

$$X_j = (x_j - x_{j0})/h_j. \tag{1}$$

Используя фм-у (1), можно показать, что в новой системе крд-т x_{j0} принимает зн-ие 0, верхний уровень $x_{j0} + h_j = x_{jв}$ – зн-ие + 1, а нижний уровень $x_{j0} - h_j = x_{jн}$ – зн-ие – 1.

п1. Пусть процесс опр-ся двумя фкт-ми. Основной уровень и инр-ы варьирования приведены в табл. 9. В результате опыта получена точка A с крд-ми $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Нх-мо выч-ть по каждому из фкт-ов верхний и нижний уровень, кодированные зн-ия (т.е. в новой системе крд-т) основного и нижнего уровней, а также точки A.

Таблица 9

Уровень и h_j	x_1	x_2
Основной уровень	1,2	3
Интервал варьирования	1	2

Р. Выбор нулевого уровня и инр-ла варьирования однозначно опр-ет верхний и нижний уровни фкт-а. Имеем: верхний уровень $x_{10} + h_1 = 1{,}2 + 1 = 2{,}2$; $x_{20} + h_2 = 3 + 2 = 5$; нижний уровень $x_{10} - h_1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$; $x_{20} - h_2 = 3 - 2 = 1$. Выч-им кодированные зн-ия: основного уровня $X_{10} = (x_1 - x_{10})/h_1 = (1{,}2 - 1{,}2)/1 = 0$; $X_{20} = (x_2 - x_{20})h_2 = (3 - 3)/2 = 0$; верхнего уровня $X_{1в} = (x_{1в} - x_{10})/1 = (2{,}2 - 1{,}2)/1 = + 1$; $X_{2в} = (x_{2в} - x_{20})/2 = (5 - 3)/2 = + 1$; нижнего уровня $X_{1н} = (x_{1н} - x_{10})/1 = (0{,}2 - 1{,}2)/1 = - 1$; $X_{2н} = (x_{2н} - x_{10})/2 = (1 - 3)/2 = - 1$.

Точки A: $X_1 = (x_1 - x_{10})/h_1 = (2 - 1{,}2)/1 = 0{,}8$; $X_2 = (x_2 - x_{20})h_2 = (4 - 3)/2 = 0{,}5$.

Эксп-т, в к-ом реализуются все возможные сочетания уровней фкт-ов, наз-ют полным фкт-ым эксп-ом. Методы обработки инф-и полного фктн-го эксп-та иссл-ют в дспн-ом анализе.

Если число фкт-ов равно k, то при варьировании фкт-ов на двух уровнях кол-во опытов можно выч-ть по фм-е

$$N = 2^k. \tag{2}$$

Составим матрицу плн-ия эксп-та при $k = 2$ для полного фктн-го эксп-та 2^2 (табл. 10). В матрице плн-ия указывают все возможные сочетания нижних и верхних уровней по каждому из фкт-ов мд-и. В последнем столбце записывают зн-ия $\{y_i\}$ выходного параметра, ств-щие опр-ым сочетаниям фкт-ов. Заметим, что иногда в матрице плн-ия ед-цы опускают. Тогда табл. 10 принимает вид табл. 11.

Таблица 10

№ опыта	x_1	x_2	Y
1	– 1	– 1	y_1
2	+ 1	– 1	y_2
3	– 1	+ 1	y_3
4	+ 1	+ 1	y_4

Таблица 11

№ опыта	x_1	x_2	Y
1	–	–	y_1
2	+	–	y_2
3	–	+	y_3
4	+	+	y_4

Очевидно, что для двух фкт-ов все возможные комбинации уровней легко найти перебором, однако с ростом фкт-ов возникает нх-сть в другом методе построения матриц плн-ия. Рас-им один из них.

Пусть требуется переходить от эксп-та 2^2 к эксп-ту 2^3. Запишем матрицу 2^2 дважды. В столбце X_3 четыре раза запишем знак плюс, а затем ниже – четыре раза – минус (табл. 12). Этим способом можно получить матрицу любой размерности.

Теперь рас-им общие св-ва матрицы плн-ия, к-ые позволяют быстро и просто выч-ть целевую фк-ю.

1. Симметричность отс-но нулевого уровня, т.е. алг-ая сумма эл-ов столбца каждого фкт-а, равна нулю.

2. Сумма кв-ов эл-ов столбца каждого из фкт-ов равна числу опытов (св-во нормировки).

3. Произведение (пзв.) любых двух различных вектор-столбцов фкт-ов равно нулю. При этом каждый столбец в матрице плн-ия расв-ся как вектор-столбец, а строка – как вектор-строка (св-во орт-сти).

4. Дсп-и предсказанных зн-ий параметра оптз-и одинаковы на равных расстояниях от нулевого уровня (св-во ротатабельности матрицы плн-ия).

После того, как по выбранной матрице плн-ия эксп-т проведен, обычно переходят к оценке параметров целевой фк-и. Если, н-р, иссл-но два фкт-а, то фк-я отклика может иметь вид

$$X = b_0 + b_1x_1 + b_2X_2. \tag{3}$$

При условии, что фкт-ы варьируют на двух уровнях, по матрице табл. 13 получают числовые зн-ия b_0, b_1, b_2.

Эту матрицу наз-ют расширенной инфн-ой матрицей, т.к. по сравнению с матрицей табл. 10 в нее введен столбец X_0, состоящий из одних ед-ц и получивший наз-ние фиктивного столбца. В 6°: 5.3 сказано, что при проведении полного фктн-го эксп-та можно количественно (кол-но) оценить не только силу влияния фкт-ов на параметр оптз-и, но и эф-ы взаимодействия, к-ые часто влияют на целевую фк-ю (так, н-р, добавление одних веществ может стимулировать влияние др-х на объект иссл-ия). Сд-но, при анализе двух фкт-ов полный фктн-ый эксп-т позволяет кол-но оценить параметры сд-ей мд-и: $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$, причем для получения зн-й b_0, b_1, b_2, b_{12} нх-мо пользоваться расширенной инфн-ой матрицей в виде табл. 14.

Таблица 12

№ опыта	X_1	X_2	X_3	Y
1	– 1	– 1	+ 1	y_1
2	+ 1	– 1	+ 1	y_2
3	– 1	+ 1	+ 1	y_3
4	+ 1	+ 1	+ 1	y_4
5	– 1	– 1	– 1	y_5
6	+ 1	– 1	– 1	y_6
7	– 1	+ 1	– 1	y_7
8	+ 1	+ 1	– 1	y_8

Таблица 13

№ опыта	X_0	X_1	X_2	Y
1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	– 1	+ 1	– 1	y_2
3	– 1	– 1	+ 1	y_3
4	+ 1	– 1	– 1	y_4

Таблица 14

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1	1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	1	– 1	+ 1	– 1	y_2
3	1	– 1	– 1	+ 1	y_3
4	1	+ 1	– 1	– 1	y_4

Эл-ты столбца X_1X_2 получают, построчно перемножая ств-щие эл-ты столбцов X_1 и X_2. Матрица, состоящая из столбцов X_1, X_2 и X_1X_2, взятых из табл. 14, сохраняет все св-ва матрицы эксп-та.

В начале иссл-ия почти всегда используют лин-ю модель, при этом кол-во опытов полного фктн-го эксп-та находят по фм-е (2). Числовые стн-ия между кол-ом фкт-ов, кол-ом параметров лин-ой модели и числом опытов полного фктн-го эксп-та приведены в табл. 15.

Таблица 15

Количество факторов	Количество параметров линейной модели	Число опытов полного факторного эксперимента	Разность между числом опытов и количеством параметров
2	3	4	1
3	4	8	4
4	5	16	11
5	6	32	26
6	7	64	57
7	8	128	120
8	9	256	247
9	10	512	502
10	11	1024	1013
11	12	2048	2026
12	13	4096	4083
13	14	8192	8178
14	15	16384	16369
15	16	32768	32752

Как видно из табл. 15, разность между числом опытов и кол-ом параметров лин-ой мд-и с увеличением числа фкт-ов становится непомерно большой. В сд-ем пункте рас-им прием, позволяющий иссл-ть лин-ю мд., используя меньшее кол-во опытов по сравнению с числом полного фктн-го эскп-та.

3°. Дробный факторный эксперимент. Поставим задачу: пусть для описания объекта иссл-ия требуется рассчитать коэф-ты b_0, b_1, b_2, b_3 ур-ия

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3. \qquad (4)$$

Для опр-ия числовых зн-й четырех параметров следует иметь четыре ур-ия, неизвестными в к-ых яв-ся параметры расв-ой фк-и, поэтому надо провести по меньшей мере четыре опыта. Эти ур-ия можно записать так:

$$\begin{array}{ll} \text{1-й опыт} & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = b_0 + b_1x_{11} + b_2x_{21} + b_3x_{31}, \\ y_2 = b_0 + b_1x_{12} + b_2x_{22} + b_3x_{32}, \\ y_3 = b_0 + b_1x_{13} + b_2x_{23} + b_3x_{33}, \\ y_4 = b_0 + b_1x_{14} + b_2x_{24} + b_3x_{34}, \end{array} \right. \\ \text{2-й} - // - & \\ \text{3-й} - // - & \\ \text{4-й} - // - & \end{array}$$

где y_i – зн-ие параметра оптз-и в i-м опыте, x_{ji} – зн-ие j-го фактора в i-м опыте, $j = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,4}$.

Опыты проводим по матрице плн-ия, отвечающей св-ам, рас-ным в 2°. Из табл. 15 (первая строка) видно, что сущ-ет матрица эксп-та, отвечающая таким св-ам и имеющая четыре опыта. Эта матрица дфктн-го эксп-та записана в табл. 14. Если предположить, что эффекты взаимодействия отсутствуют, то вектор-столбец X_1X_2 можно использовать для нового вектора X_3. Матрица плн-ия для этого случая записана в табл. 16.

Таблица 16

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3 (X_1X_2)	Y
1	1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	1	– 1	+ 1	– 1	y_2
3	1	– 1	– 1	+ 1	y_3
4	1	+ 1	– 1	– 1	y_4

Итак, при иссл-и трех фкт-ов по планам полного фктн-го эксп-та нх-мо провести восемь различных опытов. Накладывая огр-ие об отсутствии взаимодействия, можно оценить параметры мд-и (4) с помощью четырех опытов (по плану табл. 16).

Если анализируется лин-ая мд. с четырьмя фкт-ми $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4$, то мнм-ое число опытов, опр-мое кол-ом оцениваемых параметров (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4), равно пяти. В столбце 3 табл. 15 число 5 отсутствует, однако имеется число 8. Матрицу плн-ия полного фктн-го эксп-та с восемью опытами можно использовать для расчета мд-и с четырьмя фкт-ми. В этом случае надо проводить уже не 16 опытов, а восемь. Сд-но, чтобы сократить число опытов, нужно новому фкт-у присвоить вектор-столбец, принадлежащий взаимодействию, к-ым можно пренебречь. Тогда зн-ие этого фкт-а в условиях опытов опр-ся знаками этого столбца.

Рас-им матрицу полного фктн-го эксп-та для трех фкт-ов, или 2^3 (табл. 17).

Таблица 17

№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	y_1
2	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	y_2
3	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	y_3
4	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	y_4
5	– 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	y_5
6	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	y_6
7	– 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	y_7
8	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	– 1	y_8

Проанализируем структуру табл. 17. Первые три столбца ее совпадают с столбцами табл. 12. Эл-ты остальных столбцов найдены ств-щим перемножением первых трех столбцов. Заметим, что при образовании матрицы плн-ия (табл. 12) план 2^2 повторялся дважды, поэтому его наз-ют **полурепликой** полного фктн-го эксп-та 2^3 и обз-ют 2^{3-1} (4 опыта). Полуреплика содержит половину опытов полного фктн-го эксп-та.

Мкс-ое кол. фкт-ов, к-ое может быть иссл-но с помощью матрицы табл. 17, равно семи (X_1, X_2, X_3, $X_4 = X_1X_2$, $X_5 = X_1X_3$, $X_6 = X_2X_3$, $X_7 = X_1X_2X_3$). В этом случае четыре фкт-а (X_4, X_5, X_6, X_7) приравнены к эффектам взаимодействия.

Если табл. 17 используют для анализа семи фкт-ов, то ее обз-ют 2^{7-4} (8 опытов) и наз-ют 1/16 – репликой полного фктн-го эксп-та 2^7. План с предельным числом фкт-ов для данной матрицы плн-ия эксп-та и лин-ой мд-и наз-ся **насыщенным**.

На практике редко пользуются даже полурепликой 2^{5-1} (16 опытов), не говоря уже о 2^{6-1} (32 опыта), 2^{7-1} (64 опыта) и т.д. Поэтому с ростом числа фкт-ов возрастает (взр.) и **дробность** применяемых реплик. Вопрос о том, какими эф-ми взаимодействия можно пренебречь и к какому это приведет риску, должен быть решен до постановки эксп-та по дробным репликам.

4°. Основные этапы проведения и обработки результатов эксперимента. Примеры. Все сведения, нх-ые для постановки эксп-та, заносят в специальную табл. 18. Причем для каждого сочетания фкт-ов проводится не один, а несколько опытов. Такие опыты наз-ют параллельными (прл.). На практике обычно дт-но двух прл-ых опытов. Нх-сть в проведении прл-ых опытов возникает в том случае, когда иссл-ль хочет проверить гп-у об адекватности мд-и исслм-го процесса. Эту гп-у можно проверить, если известна дсп. воспроизводимости, рассчитываемая по данным прл-ых опытов (табл. 19).

Таблица 18

Наименование	x_1	x_2	…	x_k
Нулевой уровень x_{j0}	x_{10}	x_{20}	…	x_{k0}
Интервал варьир. h_j	h_1	h_2	…	h_k
Верх. уровень (+ 1)	$x_{1в}$	$x_{2в}$	…	$x_{kв}$
Нижн. уровень (– 1)	$x_{1н}$	$x_{2н}$	…	$x_{kн}$

Таблица 19

№ опыта	X_1	X_2	…	X_k	Паралл. опыты				$\overline{Y}_i$
					Y_1	Y_2	…	Y_m	
1	+ 1	+ 1	…	+ 1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1m}	$\bar{y}_1$
2	+ 1	– 1	…	+ 1	y_{21}	y_{22}	…	y_{2m}	$\bar{y}_2$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	– 1	– 1	…	+ 1	y_{n1}	y_{n2}	…	y_{nm}	$\bar{y}_n$

Полностью исключить действие внешних фкт-ов невозможно, поэтому прл-ые опыты не дают полностью совпадающих результатов. Погрешность (погр.) опыта можно оценить по фм-е

$$\overset{*}{S}{}_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2, \; i = \overline{1,n},$$

где $\overset{*}{S}{}_i^2$ – дсп-ия воспроизводимости i- го опыта.

При анализе опытных данных следует использовать кт-и мт-ой стс-ки. Н-р, резко выделяющиеся зн-ия можно отбрасывать по t-критерию Стьюдента, проверять однородность (одн.) дсп-й $\overset{*}{S}{}_i^2$ по F-кт. Фишера, производя попарные сравнения. Если дсп-и $\overset{*}{S}{}_i^2$ одн-ны, то опр-ем дсп-ю параметра оптз-и по фм-е

$$\overset{*}{S}{}^2(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{S}{}_i^2 . \tag{5}$$

Прежде чем приступить к постановке опытов, надо выработать посл-ть их проведения. В проведении запланированных опытов рекомендуется слн-ая посл-ть, т.е. нх-ма схема рандомизации опытов во времени (вр.), чтобы избавиться от нек-ых систематических ошибок. При рандомизации условий эксп-та вер-ть такой опасности уменьшается. Так, н-р, при рас-и 8 опытов их можно взять в сд-ем слн-ом порядке (слн-ми числами) 8, 2, 1, 6, 4, 5, 3, 7, а не в фиксированном от 1 до 8.

После тщательного проведения эксп-та, отбрасывания зн-ий, полученных ошибочно, и проверки одн-сти дсп-й воспроизводимости переходят к расчету параметров расв-мой модели и ее анализу. Причем в начале эксп-та следует расв-ть лишь лин-ые мд. на двух уровнях вида (3). В этом случае, проводя эксп-т по плану табл. 13 и с учетом табл. 14, опр-ем b_0, b_1, b_2, используя метод наименьших (нм.) кв-ов (см. 9.3):

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\Sigma X_1 + b_2\Sigma X_2 = \Sigma Y, \\ b_0\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1^2 + b_2\Sigma X_2 = \Sigma X_1 Y, \\ b_0\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1X_2 + b_2\Sigma X_2^2 = \Sigma X_2 Y. \end{cases}$$

Подставив в эту систему конкретные зн-ия столбцов X_1, X_1, X_2 табл. 13, имеем ($n = 4$):

$$\Sigma X_1 = \Sigma X_2 = 0 \text{ (св-во симметричности)},$$

$$\Sigma X_1^2 = \Sigma X_2^2 = 4 \text{ (св-во нормировки)},$$

$$\Sigma X_1X_2 = \Sigma X_2X_1 = 0 \text{ (св-во орт-сти)}.$$

Сд-но, систему норм-ых ур-й можно записать в виде

$$\begin{cases} 4b_0 \qquad\qquad = \Sigma Y, \\ \qquad 4b_1 \qquad = \Sigma X_1 Y, \\ \qquad\qquad 4b_2 = \Sigma X_2 Y, \end{cases}$$

откуда $b_0 = \Sigma Y / 4$, $b_1 = \Sigma X_1 Y / 4$, $b_2 = \Sigma X_2 Y / 4$.

Если теперь рас-ть лин-ю модель с k фкт-ми, то, рассуждая аналогично, получим фм-у для выч-ия коэф-ов b_j в общем виде:

$$b_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i X_{ij}, \; j = \overline{0,k}\,. \tag{6}$$

п2. Иссл-ся процесс разделения смеси растворами кислоты. Параметр оптз-и Y – содержание опр-го эл-та в выходном растворе, %. Фкт-ы: x_1 – концентрация входного раствора, x_2 – концентрация кислоты.

Задача иссл-ия – получение такого сочетания фкт-ов, при к-ом зн-ие выходного параметра равно 99-100%. Априорные иссл-ия дали возможность построить обл-и опр-ия для каждого из фкт-ов, выбирать нулевой уровень и интервалы варьирования: $0{,}5 < x_1 < 3{,}3 < x_2 < 9$. Исходная (исх.) инф-ия в табл. 20.

Р. Матрица плн-ия эксп-та и результаты прл-ых опытов (дсп-и воспроизводимости одн-ны) записаны в табл. 21.

Таблица 20

Наименование	x_1	x_2
Нулевой уровень x_{j0}	1,5	7
Интервал варьир. h_j	0,5	1
Верх. уровень (+ 1)	2,0	8
Нижн. уровень (– 1)	1,0	6

Таблица 21

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$\overline{y}_i$
1	+ 1	– 1	– 1	95
2	+ 1	+ 1	– 1	90
3	+ 1	– 1	+ 1	85
4	+ 1	+ 1	+ 1	82

Выч-им параметры ур-ия связи: $b_0 = \frac{1}{n}\sum \overline{y}_i$ = (95 + 90 + 85 + 82)/4 = 88; $b_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i X_{i1}$ = (– 95 + 90 – 85 + 82)/4 = – 2,0; $b_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i X_{i2}$ = (– 95 – 90 + + 85 + 82) = – 4,5. Отсюда получим $Y_m = 88 - 2{,}0X_1 - 4{,}5X_2$ – ур-ие рег-и.

Теперь решим вопрос о возможности описать полученной моделью изучаемый процесс. Модель, пригодную для описания, наз-ют **адекватной**.

Адекватность мд-и проверяют по F-кт. Фишера $F = \overset{*}{S}{}^2_{ад}/\overset{*}{S}{}^2(y)$, где $\overset{*}{S}{}^2(y)$ – дсп-ия параметра оптз-и, или ср. дсп-ия воспроизводимости (см. (5)); $\overset{*}{S}{}^2_{ад}$ – дсп-ия адекватности, к-ая выч-ся по фм-е

$$\overset{*}{S}{}^2_{ад} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_i - Y_{iT}\right)^2, \tag{7}$$

где τ – разность между числом различных опытов и числом параметров ур-ия регрессии, Y_{iT} – зн-ие параметра оптз-и, рассчитанные по ур-ю рег-и.

п3. Выч-ть $\overset{*}{S}{}^2_{ад}$ и проверить гп-у адекватности для n^2, если $\overset{*}{S}{}^2(y) = 0{,}625$, $\alpha = 0{,}05$ и прл-сть опытов равна 2.

Р. Т.к. $Y_T = 88 - 2{,}0X_1 - 4{,}5X_2$, то $Y_{1T} = 88 - 2{,}0(-1) - 4{,}5(-1) = 94{,}5$; $Y_{2T} = 88 - 2{,}0(+1) - 4{,}5(-1) = 90{,}5$; $Y_{3T} = 88 - 2{,}0(-1) - 4{,}5(+1) = 85{,}5$; $Y_{4T} = 88 - 2{,}0(+1) - 4{,}5(+1) = 81{,}5$; $\tau = 4 - 3 = 1$ (прл-сть опытов не учитывается). Далее имеем: $\overset{*}{S}{}^2_{ад} = (95 - 94{,}5)^2 + (90 - 90{,}5)^2 + (85 - 85{,}5)^2 + (82 - 81{,}5)^2 = 1$; $F = \overset{*}{S}{}^2_{ад}/\overset{*}{S}{}^2(y) = 1/0{,}625 = 1{,}57$. Из T_{15} при $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = \tau = 1$, $k_2 = n(m-1) = 4\cdot 1 = 4$ находим $F_{кр}(0{,}05;\ 1;\ 4) = 7{,}71$. Т.к. $F < F_{кр}(1{,}57 < 7{,}71)$, то модель можно считать адекватной.

Теперь нх-мо проверить значимость отдельных коэф-ов. При использовании полного фктн-го эксп-та и дробных реплик погр-сти в опр-и каждого из коэф-ов равны (следствие св-в плн-ия из 2°):

$$\overset{*}{S}{}^2_{bj} = \frac{1}{n}\overset{*}{S}{}^2(y),\ j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $\overset{*}{S}{}^2(y)$ – ср. дсп-ия воспроизводимости, n – число различных опытов.

Значимость коэф-ов обычно проверяют по t-кт. Стъюдента, для чего выч-ют стс-ку $t = \left|b_j\right|/\overset{*}{S}{}^2_{bj}$, к-ую затем сравнивают с $t_{крт}$ (при $\alpha = 0{,}05$, $n = 4$ в данном случае), взятым из T_{14}.

п4. Проверить значимость коэф-ов ур-ия $Y = 88 - 2X_1 - 4{,}5X_2$, если $p = 0{,}95$ (т.е. $\alpha = 0{,}05$), $\overset{*}{S}{}^2(y) = 0{,}625$; кол-во ст-ей свободы $S^2(y)$ равно $k = 4$.

Р. Т.к. $\overset{*}{S}{}^2(y) = 0{,}625$, то $\overset{*}{S}{}^2_{bj} = 0{,}625/4$, откуда $\overset{*}{S}_{bj} = \sqrt{0{,}625/4} = 0{,}25/2 = 1/8$. Тогда $t_1 = 88{:}1/8 = 88\cdot 8 = 704$, $t_2 = 2{:}1/8 = 16$, $t_3 = 9/2{:}1/8 = (9\cdot 8)/2 = 36$. Из T_{14} находим $t_{крт}(\alpha,\ k) = t_{крт}(0{,}05;\ 4) = 2{,}78$. Т.к. t_1, t_2, $t_3 > t_{крт}$, то коэф-ты ур-ия $Y = 88 - 2X_1 - 4{,}5X_2$ значимы.

Далее нх-мо опр-ть доверительные интервалы для каждого из коэф-ов ур-ия. Для этого используют фм-ы

$$b_j - t_{\text{крт}}\overset{*}{S}(y)\big/\sqrt{n} \ \le \beta_j \le b_j + t_{\text{крт}}\overset{*}{S}(y)\big/\sqrt{n}\ . \qquad (9)$$

п5. Построить доверительный интервал для каждого коэф-та ур-ия $Y = 88 - 2X_1 - 4{,}5X_2$, сохранив условия п4.

Р. Имеем $t_{\text{крт}}$ = 2,78, n = 4, $\overset{*}{S}{}^2(y)$ = 0,625. Выч-им $t_{\text{крт}}\overset{*}{S}(y)\big/\sqrt{n}$ = $= 2{,}78\sqrt{0{,}625}\big/\sqrt{4} \ \approx 0{,}35$ из (9). Тогда $88 - 0{,}35 \le \beta_1 \le 88 + 0{,}35 \Rightarrow 87{,}65 \le \beta_1 \le$ $\le 88{,}35$; $1{,}65 \le \beta_2 \le 2{,}35$; $4{,}15 \le \beta_3 \le 4{,}85$.

Приведенные расчеты дают возможность экспт-ру принять решение о дальнейших иссл-ях.

Перевод модели на язык экспт-ра наз-ют интерпретацией (интп.) модели. Задача инпт-и весьма сложна, однако общие рекомендации сводятся к сд-му. Сначала устанавливают, в какой мере каждый из фкт-ов влияет на параметр оптз-и. Вел-на коэф-та регрессии – колн. мера этого влияния. О хрк-ре влияния фкт-ов говорят знаки коэф-ов. При знаке плюс с увеличением зн-ия фкт-а растет вел-на параметра оптз-и, при знаке минус увеличение зн-ия фкт-а приводит к уменьшению параметра оптз-и. Если зн-ие параметра оптз-и мксз-ся, то увеличение зн-й всех фкт-ов, коэф-ты к-ых имеют знак плюс, благоприятно, а знак минус – неблагоприятно. Если же зн-ие параметра оптз-и мнмз-ся, то следует расв-ть стн-ия, противоположные вышеизложенным.

п6. Инпт-ть результаты задачи, решаемой в п2-п5.

Р. Выше установлено, что мд. $Y_T = 88 - 2X_1 - 4{,}5X_2$ адекватно описывает исслм-ый процесс в пределах варьирования фкт-ов. Фкт. X_2 (концентрация кислоты) оказывает большее влияние на Y (содержание эл-та в выходном растворе, %), чем X_1 (концентрация входного раствора), т.к. $|4{,}5| > |2{,}0|$. Коэф-ты в ур-и рег-и у обоих параметров имеют знак минус, поэтому уменьшение зн-й фкт-ов X_1 и X_2 ведет к увеличению параметра оптз-и, а в расв-ой задаче параметр Y мксз-ся.

Ур-ие для натуральных (нтр.) пер-ых можно получить, используя фм-у (1). Коэф-ты рег-и изменятся. При этом пропадает возможность инпт-и влияния фкт-в по вел-не и знакам коэф-ов рег-и, т.к. вектор-столбцы нтр-ых зн-й пер-ых в матрице плн-ия уже не орт-ны, коэф-ты опр-ют зв-мо друг от друга.

п7.В задаче, исслм-ой в п2-п6, перейти к нтр. пер-ым.

Р. Имеем: $Y_T = 88 - 2X_1 - 4{,}5X_2$, $X_1 = (x_1 - 1{,}5)/0{,}5$, $X_2 = (x_2 - 7)/1$, тогда Y_T $= 88 - 2(x_1 - 1{,}5)/0{,}5 - 4{,}5(x_2 - 7)/1 \Rightarrow Y_T = 125 - 4x_1 - 4{,}5x_2$.

После инпц-и полученных результатов переходят к принятию решений о дальнейших иссл-ях. Кол-во различных ситуаций много. Остановимся на наиболее часто встречающихся.

Если лин-я мд. адекватна и коэф-ты рег-и значимы, то можно либо закончить иссл-ие при близости оптимума, либо их продолжать. В задаче, расв-мой в п1-п6, нб-е зн-е параметра оптз-и 95% получено в опытах № 1, в этом случае иссл-ие нх-мо продолжать, получив сочетание фкт-ов, при к-ых содержание эл-та в выходном растворе 99-100%. Если лин-я мд. адекватна, а часть коэф-ов ур-ия рег-и незначима, то можно либо изменить интервалы варьирования фкт-ов, либо отсеять незначимые фкт-ы, произвести прл-ые опыты, а если обл. оптимума близка, закончить иссл-ия.

Если лин-я мд. неадекватна, тогда изменяют интервалы варьирования, выбирают др. точку в кач-е нулевого уровня либо используют нелин-ю мд.

Если обл-ть оптимума близка, то можно закончить иссл-ие.

Сущ-ет много различных методов продолжения эксп-та до установления опт-ой обл-ти. Н-р, метод Гаусса-Зейделя, идея к-го состоит в том, что все фкт-ы фиксируют, кроме одного, по к-му (по оси) происходит продвижение, затем двигаются к оптимуму по оси другого фкт-а и т.д. На практике широко используется метод крутого восхождения (предложенный Г.Е. Боксом и К.В. Уилсоном), где выбор последующей точки эксп-та опр-ся направлением градиента. Для дальнейшего изучения § 5.4 рекомендуем [18, 21-23], см. также КС (план эксперимента, планирование эксперимента).

5.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

5.1. О СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗАХ. ГИПОТЕЗЫ О ВЕРОЯТНОСТЯХ И РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи возникают при проверке гипотез? Приведите основные понятия гипотез (гп.).
2. Как выбирают критическую область? Что такое мощность критерия?
3. В чем состоит суть гп-ы вероятности (вер.)?
4. Как сравнить нблм-ую отс. частоту с гипотетической вер-ю появления сб-я?
5. Как проверяется гп-а о равенстве двух центров рсп-ия?

5.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ДИСПЕРСИЯХ И ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит суть гп-ы о равенстве дсп-ий?
2. Сравните исправленную вбр-ую дсп. с гипотетической гнр. дсп-ей норм-ой свк-ти.
4. Как сравнить две ср-ие гнр-ые свк-ти при неизвестных дсп-ях?
5. Как сравнить дсп-и норм. гнр-ых свк-ей по кт-ю Кочрена?
6. Как проверяется гп-а о законе рсп-ия по кт-ю согласия Пирсона χ^2?
7. Как выч-ть теор. частоты норм-го рсп. и сравнить их эмп. частоты?
8. В чем состоит суть кт-я согласия Колмогорова λ?

Типовые задачи для самостоятельной работы

тз1. По результатам n = 9 замеров деталей установлено, что ср. время (вр.) изготовления $\bar{x}$ = 48 с. Предполагая, что вр. изготовления – норм-но рсп-ая слн. вел-а X с дсп-ей $\sigma^2 = 9c^2$, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ решить: а) можно ли принять 50 с в кач-е нормативного вр-и (мт-го ож-ия a) изготовления детали; б) можно ли принять за норматив 49 с.

Р. а) По условию, нулевая гп-а H_0: a_0 = 50 с. Т.к. в результате вбр-ых нбл-й получено $\bar{x}$ = 48 с, то в кач-е альтернативной гп-ы возьмем H_1: a_1 = 48 с, т.е. критическая (крт.) обл. будет левосторонней (лвс.). Тогда из T_2 получим $\alpha = 0{,}05 \to 1 - 2\alpha = 0{,}9 \to k_0 = 1{,}65 \to x^{кр}_{лв,\alpha} = -1{,}65$. Выч-им кт-й k = $= \left(\bar{x} - a_0\right)\big/\sigma\big/\sqrt{n}$ = (48 – 50)3/3 = – 2. Т.к. $k \in K$ ($-2 \in\,]-\infty; -1{,}65[$), то гп-у H_0: a_0 = 50 с отвергаем и принимаем гп-у H_1: a_1 = 48 с, т.е. мы не можем принять 50 с в кач-е нормативного вр-и.

б) H_0: a = 49 с, H_1: $a = 48 < 49$ с, т.е. крт-ая обл. лвс-я, при этом $a_0 = 49$, $a_1 = 48$. Т.к. $k = \left(\bar{x} - a_0\right)\big/\sqrt{n}\big/\sigma$ = (48 – 49)3/3 = – 1 и $k \,\overline{\in}\,]-\infty; -1{,}65[$, то гп-у H_0: a = 49 с принимаем, т.е. за норматив вр-и изготовления детали берем 49 с. При этом допускаем ошибку 2-го рода $\beta = P_{H_1}(H_0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(u = 1{,}65 - \dfrac{49-48}{3/\sqrt{9}}\right) =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi(u = 0{,}65) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}0{,}4843 = 0{,}7422.$

тз2. По вбр-е объема $n = 16$, извлеченной из норм. гнр-ой свк-ти, найдены вбр-ая ср. $\bar{x} = 118{,}2$ и «исправленное» ср. кв. отк-ие $S = 3{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у H_0: $a = a_0 = 120$ при конкурирующей гп-е H_1: $a \neq 120$.

Р. Найдем нблм. зн-ие кт-я $T_{нбл} = \dfrac{(\bar{x} - g)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(118{,}2 - 120)\sqrt{16}}{3{,}6} = -2.$

Т.к. $a \neq a_0 = 120$, то крт-ая обл. – двусторонняя (двс.). Из T_5 рсп-я Стьюдента по $\alpha = 0{,}05$ $(1 - \alpha = 0{,}95)$ и по числу ст-ей свободы $k = n - 1 = 15$ находим крт. точку $t_{двс.кр}(0{,}05;\ 15) = 2{,}13$. Т.к. $|T_{нбл}| < t_{двс.кр}$, то H_0 принимается, т.е. вбр-ая ср. $\bar{x} = 118{,}2$ незначимо отличается от гипотетической гнр. ср-ей $a_0 = 120$.

тз3. Проектный контролируемый (крум.) размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, $a = a_0 = 35$ мм. Измерения 20 сл-но отобранных изделий дали сд. результаты:

Крум-ый размер	x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
Частота (число изделий)	n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у H_0: $a = a_0 = 35$ при конкурирующей гп-е H_1: $a \neq 35$.

Р. Найдем $\bar{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{n} = \dfrac{2 \cdot 34{,}8 + 3 \cdot 34{,}9 + 4 \cdot 35{,}0 + 6 \cdot 35{,}1 + 5 \cdot 35{,}3}{20} =$
$= 35{,}07.$

Найдем исправленную дсп-ю S_u^2. Для упрощения расчета перейдем к условным вариантам $u_i = 10x_i - 351$. В итоге получим рсп-ие:

u_i	– 3	– 2	– 1	0	2
n_i	2	3	4	6	5

Тогда $S_u^2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2/n}{n-1} = \dfrac{44 - (-6)^2/20}{19} = 2{,}221$. Отсюда получим исправленную дсп-ю исходных вариант (врт.) $S_x^2 = 2{,}221/10^2 = 0{,}022$. Тогда ср. кв. отк-ие $S_x = \sqrt{0{,}022} = 0{,}15$. Найдем нблм. зн-ие кт-я $T_{нбл} =$
$= \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{S} = \dfrac{(35{,}7 - 35{,}0)\sqrt{20}}{0{,}15} = 2{,}15$. По условию H_1: $a \neq a_0$, поэтому крт-ая обл. – двс-я. Из T_5 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (с учетом $1 - \alpha = 0{,}95$) и по числу ст-ей свободы $k = n - 1 = 19$ находим крт. точку $t_{двс.кр}(0{,}05;\ 19) = 2{,}09$.

Т.к. $|T_{нбл}| > t_{двс.кр}$, то нулевую гп-у отвергаем, т.е. станок не обеспечивает проектного размера и требует подналадки.

тз4. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены 6 деталей и получены сд. результаты измерений (в сотых долях мм):

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 8$, $x_6 = 10$,
$y_1 = 10$, $y_2 = 3$, $y_3 = 6$, $y_4 = 1$, $y_5 = 7$, $y_6 = 4$,
$d_1 = -8$, $d_2 = 0$, $d_3 = -1$, $d_4 = 5$, $d_5 = 1$, $d_6 = 6$.

При уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений в предположении, что они рсп-ны норм-но.

Р. Найдем вбр-ую ср. $\bar{d} = \sum d_i / n = 3/6 = 0{,}5$. Выч-им «исправленное» ср. кв. отк-ие S_d, учитывая, что $\sum d_i^2 = 126$, $\sum d_i = 3$:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \left(\sum d_i\right)^2 / n}{n-1}} = \sqrt{\frac{126 - 3^2/6}{6-1}} = \sqrt{24{,}9}\,.$$

Найдем нблм. зн-ие кт-я $T_{нбл} = \bar{d}\sqrt{n}/S_d = 0{,}5\sqrt{6}/\sqrt{24{,}9} = 0{,}25$. Из T_5 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (с учетом $1 - \alpha = 0{,}95$) и по числу ст-ей свободы $k = n - 1 = 5$ находим крт. точку $t_{двс.кр}(0{,}05;\ 5) = 2{,}57$.

Т.к. $T_{нбл} < t_{двс.кр}$, H_0 принимается, т.е. ср. результаты измерений различаются незначимо.

тз5. По двум незв-ым вбр-ам, объемы к-ых $n_1 = 11$ и $n_2 = 14$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей X и Y, найдены исправленные вбр. дсп-и $S_x^2 = 0{,}76$ и $S_y^2 = 0{,}38$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ о рав-ве гнр-ых дсп-й при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) > D(Y)$.

Р. Найдем $F_{нбл} = S_б^2 / S_м^2 = 0{,}76/0{,}38 = 2$. По условию H_1 имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому крт-я обл. – прс-я.

Из T_{15} по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам ст-ей свободы $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ находим крт. точку $F_{кр}(0{,}05;\ 10;\ 13) = 2{,}67$.

Т.к. $F_{нбл} < F_{кр}$ $(2 < 2{,}67)$, нет оснований отвергнуть гп-у H_0 о рав-ве гнр-ых дсп-й, т.е. вбр. исправленные дсп-и различаются незначимо.

тз6. По двум незв-ым вбр-ам, объем к-ых $n_1 = 10$ и $n_2 = 14$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей X и Y, найдены исправленные вбр. дсп-и $S_x^2 = 0{,}84$ и $S_y^2 = 2{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ о рав-ве гнр-ых дсп-й при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Р. Найдем $F_{нбл} = S_б^2 / S_м^2 = 2{,}52/0{,}84 = 3$. По условию H_1 имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому крт-я обл. – двс-я. Тогда из T_{15} по уровню значимости $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ и числам ст-ей свободы $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 14 - 1 = 13$ находим крт. точку $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 13) = 2{,}71$.

Т.к. $F_{нбл} > F_{кр}$, нулевую гп-у о рав-ве гнр-ых дсп-й отвергаем.

тз7. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической вел-ы. Получены сд. результаты:

$x_1 = 9{,}6$; $x_2 = 10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4 = 10{,}2$; $x_5 = 10{,}6$

$y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 = 10{,}3$;

Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$? Предполагается, что результаты измерений рсп-ны норм-но и вбр-ки незв-ы.

Р. О точности методов будем судить по вел-ам дсп-й. Т.о., нулевая гп. H_0: $D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Найдем вбрч. дсп-и. Для упрощения выч-й перейдем к условным врт-м:

$$\left.\begin{array}{l} u_i = 10x_i - 100 \\ v_i = 10x_y - 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} u_i & -4 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ \hline v_i & 4 & -3 & 0 & 3 & \end{array}$$

Найдем исправленные вбрч. дсп-и:

$$S_u^2 = \frac{\sum u_i^2 - \left[\sum n_i\right]^2 / n_1}{n_1 - 1} = \frac{(16+4+4+36) - 2^2/5}{5-1} = 14{,}8;$$

$$S_v^2 = \frac{\sum v_i^2 - \left[\sum v_i\right]^2 / n_2}{n_2 - 1} = \frac{(16+9+9) - 4^2/4}{4-1} = 10.$$

Каждая из дсп-й увеличилась в 10^2 раз, но их отн-ие не изменилось. Тогда $F_{нбл} = S_б^2 / S_м^2 = S_x^2 / S_y^2 = S_u^2 / S_v^2 = 14{,}8/10 = 1{,}48$.

По условию H_1 имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому крт-я обл. – двс-я. Тогда из T_{15} по уровню значимости $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ и числам ст-ей свободы $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = n_2 - 1 = 4 - 1 = 3$ находим крт. точку $F_{кр}(0{,}05;\ 4;\ 3) = 9{,}12$.

Т.к. $F_{нбл} < F_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гп-у H_0 о рав-ве гнр-ых дсп-й, т.е. исправленные дсп-и различаются незначимо и, сд-но, оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений.

тз8. Из норм-ой гнр. свк-ти извлечена вбр. объема $n = 21$ и по ней найдена исправленная дсп. $S^2 = 16{,}2$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ требуется проверить нулевую гп-у H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, приняв в кач-е конкурирующей гп-ы H_1: $\sigma_0^2 > 15$.

Р. Найдем нблм. зн-ие кт-ия $\chi^2_{нбл} = (n-1)\, s^2/\sigma_0^2 = (21-1)16{,}2/15 = 21{,}6$. По условию H_1 имеет вид $\sigma_0^2 > 15$, поэтому крт-я обл. – прс-я. Из T_{10} по $\alpha = 0{,}01$ и $k = n - 1 = 21 - 1 = 20$ находим крт. точку $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 20) = 37{,}6$.

Т.к. $\chi^2_{нбл} < \chi^2_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве гнр-ой дсп-и гипотетическому зн-ю $\sigma_0^2 = 15$, т.е. различие между исправленной дсп-ей (16,2) и гипотетической гнр. дсп-ей (15) незначимо.

тз9. Точность работы станка-автомата проверяется по дсп-и крум-го размера изделий, к-ая не должна превышать $\sigma_0^2 = 0{,}1$. Взята проба из сл-но отобранных изделий, причем получены сд. результаты измерений:

Крум-ый размер изделий пробы	x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота	n_i	2	6	9	7	1

При уровне значимости α = 0,05 требуется проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Р. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}1$. Примем в кач-е конкурирующей гп-ы H_1: $\sigma_0^2 \neq 0{,}1$.

Найдем исправленную вбрч. дсп-ю. Для упрощения выч-ия перейдем к условным врт-ам $u_i = 10x_i - 39$, учитывая, что ср. равна примерно 3,9. Тогда рсп-ие частот принимает вид:

u_i	– 9	– 4	– 1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Найдем вспомогательную дсп-ю условных вариант

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 / n}{n-1} =$$

$$= \frac{(2\cdot 81 + 6\cdot 16 + 9\cdot 1 + 7\cdot 25 + 1\cdot 36) - (-18 - 24 - 9 + 35 + 6)^2/25}{25-1} = 19{,}91.$$

Найдем искомую исправленную дсп-ю $S_x^2 = S_u^2/10^2 = 0{,}2$. Найдем нблм. зн-ие кт-ия $\chi^2_{нбл} = (n-1)\,S_x^2/\sigma_0^2 = (25-1)0{,}2/0{,}1 = 48$. Конкурирующая гп. имеет вид $\sigma^2 = \sigma_0^2$, поэтому крт-я обл. – двс-я. Из T_{18} найдем крт-ие точки: левую $\chi^2_{кр}(1 - \alpha/2,\ k) = \chi^2_{кр}(0{,}975;\ 24) = 12{,}4$ и правую $\chi^2_{кр}(\alpha/2,\ k) =$ $= \chi^2_{кр}(0{,}025;\ 24) = 39{,}4$.

Имеем $\chi^2_{нбл} > \chi^2_{прс.кр}$, сд-но, нулевую гп-у отвергаем, т.е. станок не обеспечивает нх-ю точность и требует подналадки.

тз10. Партия изделий принимается, если дсп-ия крум-го размера значимо превышает 0,2. Исправленная вбрч. дсп-ия, найденная по вбр-ке объема n = 121, оказалась равной $S_x^2 = 0{,}3$. Можно ли принять партию при уровне значимости 0,01?

Р. Нулевая гп. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}2$ при H_1: $\sigma^2 > 0{,}2$. Найдем нблм. зн-ие кт-ия $\chi^2_{нбл} = (n-1)\,S_x^2/\sigma_0^2 = 120\cdot 0{,}3/0{,}2 = 180$. Конкурирующая гп. имеет вид $\sigma^2 > 0{,}2$, сд-но, крт-я обл. прс-я. Поскольку в T_{18} не содержится числа ст-ей свободы k = 120, найдем крт. точку прж-но из рав-ва Уилсона-Гильферти:

$$\chi^2_{кр}(\alpha, k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3.$$

Найдем предварительно (учитывая, что по условию α = 0,01) $Z_\alpha = Z_{0,01}$ из рав-а

$$\Phi(Z_{0,01}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2\cdot 0{,}01)/2 = 0{,}49.$$

По T_{11}, используя лин. инп-ию, находим $Z_{0,01} = 2{,}326$. Подставив k = 120, Z_α = 2,326 в фм-у Уилсона-Гильферти, получим $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 120) =$ $= 158{,}85$ (в более полных табл-х это зн. равно 158,95). Т.к. $\chi^2_{нбл} > \chi^2_{кр}$, нулевую гп-у отвергаем. Партию принять нельзя.

тз11. Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, извлечены малые вбр-и с объемами $n = 10$ и $m = 12$. Получены сд-ие результаты:

u_i	3,4	3,5	3,7	3,9
n_i	2	3	4	1

y_i	3,2	3,4	3,6
m_i	2	2	8

При уровне значимости 0,02 требуется проверить гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ о рав-ве ср-их размеров изделий при конкурирующей гп-е H_1: $M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что слн. вел-ы X и Y рсп-ны норм-но.

Р. Находим вбрч. ср-ие $\bar{x} = \sum n_i x_i \big/ n = (2\cdot3{,}4 + 3\cdot3{,}5 + 4\cdot3{,}7 + 1\cdot3{,}9)/10 =$ $= 3{,}6$ и $\bar{y} = \sum m_i y_i \big/ m = (2\cdot3{,}2 + 2\cdot3{,}4 + 8\cdot3{,}6)/12 = 3{,}5$.

Для упрощения выч-й исправленных дсп-й перейдем к условным врт.:

$$\left.\begin{array}{l} u_i = 10x_i - 36 \\ v_i = 10y_i - 35 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

u_i	– 2	– 1	1	3
v_i	2	3	4	1

y_i	– 3	– 1	1
m_i	2	2	8

Отсюда найдем

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 \big/ n}{n-1} =$$

$$= \frac{(2\cdot4 + 3\cdot1 + 4\cdot1 + 1\cdot9) - (2(-2) + 3(-1) + 4\cdot1 + 1\cdot3)^2 / 10}{9} = 2{,}67;$$

$$S_v^2 = \frac{\sum m_i v_i^2 - \left[\sum m_i v_i\right]^2 \big/ m}{m-1} = \frac{(2\cdot9 + 2\cdot1 + 8\cdot1) - (2(-3) + 2(-1) + 8\cdot1)^2 / 12}{11} = 2{,}54.$$

Сд-но, $S_x^2 = S_u^2 \big/ 10^2 = 2{,}67/100 = 0{,}0267$; $S_v^2 = S_v^2 \big/ 10^2 = 2{,}54/100 = 0{,}0254$.

Т.о., исправленные дсп-и различны, а расв-мый кт-й предполагает, что гнр-ые одинаковы, поэтому надо сравнить дсп-и, используя кт-й Фишера-Снедекора. Сделаем это, приняв в кач-е конкурирующей гп-у H_1: $D(X) \neq D(Y)$ (см. 1°: 5.2).

Найдем $F_{нбл} = S_б^2 \big/ S_м^2 = 0{,}0267/0{,}0254 = 1{,}05$. Из T_{15} находим $F_{кр}(0{,}01;\ 9;\ 11) = 4{,}63$. Т.к. $F_{нбл} < F_{кр}$, дсп-и различаются незначимо и сд-но можно считать, что допущение о рав-ве гнр-ых дсп-й выполняется.

Сравним ср-ие, для чего выч-им нблм. зн-ие кт-ия Стъюдента.

$$T_{нбл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}} = \frac{3{,}6 - 3{,}5}{\sqrt{9\cdot0{,}0267 + 11\cdot0{,}0254}} \times$$

$\times \sqrt{\dfrac{10\cdot12\cdot20}{22}} = 0{,}72$. По условию H_1 имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому крт-я обл. – двс-я. По уровню значимости $\alpha = 0{,}02$ и числу ст-ей свободы $k = n + m - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ находим из T_{14} крт. точку $t_{двс.кр}(0{,}02;\ 20) = 2{,}53$.

Т.к. $T_{нбл} < t_{двс.кр}$, нет оснований отвергнуть гп-у о рав-ве ср-их. Т.о., ср-ие размеры изделий сущ-но не различаются.

тз12. Д-ть, что нблм-ое зн. кт-я Кочрена не изменится, если все исправленные дсп-и умножить на одно и то же пст. число.

тз13. По пяти нзв-ым вбр-ам одинакового объема $n = 37$, извлеченным и норм. гнр-ых свк-ей, найдены «исправленные» ср. кв. отк-ия: 0,00021; 0,00035; 0,00038; 0,00062; 0,00084.

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у об однс-и дсп-й. Ук: Умножить предварительно ср. кв. отк-ия на 10^5. О: $k = 36$; $l = 5$; $G_{нбл} = 0{,}4271$; $G_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 5) = 0{,}366$. Гп-а об однс-и дсп-й отвергается.

тз14. Четыре фасовочных автомата настроены на отвешивание одного и того же веса. На каждом автомате отвесили по 10 проб, а затем эти же пробы взвесили на точных весах и нашли по полученным отк-ям исправленные дсп-и: 0,012; 0,021; 0,025; 0,032. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания? Предполагается, что отк-ия зарегистрированного веса от требуемого рсп-ны норм-но. О: $k = 9$; $l = 4$; $G_{нбл} = 0{,}3550$; $G_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 4) = 0{,}5017$. Автоматы обеспечивают одинаковую точность взвешивания.

тз15. Проверяется устойчивость (отсутствие разладки) работы станка по вел-е крум-го размера изделий. С этой целью каждые 30 мин отбирали пробу из 20 изделий; всего взяли 15 проб. В итоге измерения отобранных изделий были выч-ны исправленные дсп-и (их зн-ия см. в табл. 1).

Таблица 1

Номер пробы	Исправленная дисперсия	Номер пробы	Исправленная дисперсия	Номер пробы	Исправленная дисперсия
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,094	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,094	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что станок работает устойчиво (разладка не произошла)? О: $k = 19$; $l = 15$; $G_{нбл} = 0{,}089$; $G_{кр}(0{,}05;\ 19;\ 15) = 0{,}1386$. Станок работает устойчиво.

тз16. Используя кт-й Пирсона при $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гп-а о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X с эмп-им рсп-ем вбр-и объема $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Р. Найдем вбрч-ую ср. $\bar{x}_в = \sum n_i x_i \big/ n = 2526/200 = 12{,}63$ и вбрч-ое ср.кв. отк-ие $\sigma_в = \sqrt{\sum n_i x_i^2 \big/ n - \bar{x}_в^2} = \sqrt{36312/200 - (12{,}63)^2} = \sqrt{181{,}56 - 159{,}569} = \sqrt{22{,}0431} = 4{,}695$. Выч-им теор. частоты при $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_в = 4{,}695$ по фм-е

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4{,}695}\varphi(u_i) = 85{,}2\varphi(u_i).$$

Составим расчетную табл. 2 (зн-ия фк-и $\varphi(u)$ см. в T_1).

Таблица 2

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 85{,}2\cdot\varphi(u_i)$
1	5	– 1,62	0,1074	9,1
2	7	– 1,20	0,1942	16,5
3	9	– 0,77	0,2966	25,3
4	11	– 0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

Теперь сравним эмп-ие и теор-ие частоты: а) составим расчетную табл. 3, из к-ой найдем нблм. зн-ие кт-ия $\chi^2_{нбл} = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i'$.

Таблица 3

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	15	9,1	– 5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	3,6
3	25	25,3	– 0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	– 2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	– 7,9	62,41	1,9
6	21	29,8	– 8,8	77,44	2,3
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,0
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
Σ	200				$\chi^2_{нбл} = 20{,}0$

Из табл. 3 находим $\chi^2_{нбл} = 20{,}0$.

б) По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу ст-ей свободы $k = s - 1 - r = 9 - 1 - 2 = 6$ (где r – число параметров) из Т$_{18}$ находим крт. точку прс-ей крт-ой обл-и $\chi^2_{кр}(0{,}05;\, 6) = 12{,}6$.

Т.к. $\chi^2_{нбл} > \chi^2_{кр}$, гп-у о норм. рсп-и гнр-ой свк-ти отвергаем, т.е. эмп-ие и теор-ие частоты различаются значимо.

тз17. Используя кт-й Пирсона, при уровне значимости 0,01 установить, сл-но или значимо расхождение между эмп-ми частотами n_i и теор-ми частотами n_i', к-ые выч-ны, исходя из гп-ы о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n_i'	6	18	36	76	39	18	7

Р. Найдем нблм. зн-ие кт-ия Пирсона $\chi^2_{нбл} = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i' = 3{,}068$ из табл. 4.

Таблица 4

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	– 2	4	0,224
3	40	36	4	16	0,448
4	72	76	– 4	16	0,208
5	36	39	– 3	9	0,234
6	18	18	–	–	–
7	10	7	3	9	1,287
Σ	n = 200				$\chi^2_{нбл}$ = 3,068

По уровню значимости α = 0,01 и числу ст-ей свободы $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ находим крт. точку прс-ей обл-и $\chi^2_{кр}$ (0,01; 4) = 13,3.

Т.к. $\chi^2_{нбл} < \chi^2_{кр}$, нет оснований отвергнуть гп-у о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти. Др. словами, расхождение между эмп-ми и теор-ми частотами незначимо (сл-но).

Задание для кр. работы: по образцу примеров в 5.1, 5.2 и тз решить з1-з23.

1. Из норм. гнр-ой свк-ти с известным ср. кв. отк-ем σ = 5,2 извлечена вбр-ка объема n = 100 и по ней найдена вбр-ая ср. $\bar{x}$ = 27,66. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у H_0: $a = a_0 = 26$ при конкурирующей гп-е H_1: $a \neq 26$. О: $u_{нбл} = u_{кр}$ (3 > 1,96), где $u_{нбл} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma$, – нулевую гп-у отвергаем; крт-ая обл. – двс-я, поэтому $\Phi(u_{кр}) = (1 - \alpha)/2 = 0{,}475$.

2. Из норм. гнр-ой свк-ти с известным ср.кв. отк-ем σ = 40 извлечена вбр-ка объема n = 64 и по ней найдена вбр-ая ср. $\bar{x}$ = 136,5. При α = 0,01 проверить нулевую гп-у H_0: $a = a_0 = 130$ при конкурирующей гп-е H_1: $a \neq 130$. О: $u_{нбл}$ = 1,625; $u_{кр}$ = 2,58. H_0 принимается.

3. Хронометраж затрат вр-и на сборку узла машины n = 20 слесарей показал, что ср. вр. сборки $\bar{x}$ = 77 мин, а «исправленные» ср. кв. отк-ие S^2 = 4 мин. В предположении о норм-сти рсп-ия решить вопрос о том, можно ли на уровне значимости α = 0,01 считать 80 мин нормативом (мт. ож-ем) трудоемкости. Ук: см. тз2. О: $T_{нбл} = (77 - 80)\sqrt{20}/2 = -6{,}708$. $t_{двс.кр}(0{,}01;\ 19) = 2{,}861$. Т.к. $|T_{нбл}| > t_{двс.кр}$, то гп-а H_0: a = 80 мин отвергается.

4. На двух аналитических весах в одном и том же порядке взвешены 10 проб химического вещества и получены сд. результаты взвешиваний (в мг):

x_i	20	30	28	50	20	40	32	36	42	28
y_i	28	31	26	52	24	36	33	35	45	40

При уровне значимости 0,01 установить, значимо или незначимо различаются результаты взвешиваний в предположении, что они рсп-ны норм-но.

О: $\bar{d} = -0{,}9$; $\sum d_i^2 = 65$; $S_d = 2{,}69$; $T_{нбл} = -1{,}06$; $t_{двс.кр}(0{,}01;\ 9) = 3{,}25$. Результаты взвешиваний различаются незначимо. Ук: см. тз4.

5. Физическая (физич.) подготовка 9 спортсменов была проверена при поступлении в спортивную школу $\{x_i\}$, а затем после недели тренировок $\{y_i\}$. Итого проверки в баллах оказались сд-ми:

x_i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	33	83	62

Требуется при уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо улучшилась физич. подготовка спортсменов в предположении, что число баллов рсп-но норм-но. О: $\overline{d} = -39/9$; $\sum d_i^2 = 973$; $S_d = 7{,}94$; $T_{нбл} = -1{,}64$; $t_{двс.кр}(0{,}05;\ 8) = 2{,}31$. Нет оснований полагать, что физическая подготовка улучшилась. Ук: см. тз4.

6. Химическая лаборатория произвела в одном и том же порядке анализ 8 проб двумя методами. Получены сд. результаты (в первой строке указано содержание нек-го вещества в процентах в каждой пробе, опр-ое первым методом; во второй строке – вторым методом):

x_i	15	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24

Требуется при уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются ср. результаты анализов в предположении, что они рсп-ны норм-но. О: $\overline{d} = -2$; $\sum d_i^2 = 66$; $S_d = \sqrt{34/7}$; $T_{нбл} = -2{,}57$; $t_{двс.кр}(0{,}05;\ 7) = 2{,}36$. Т.к. $|T_{нбл}| > t_{двс.кр}$, то гп-а H_0 отвергается, т.е. результаты анализов различаются значимо. Ук: см. тз4.

7. Партия изделий принимается, если вер-ть того, что изделие окажется бракованным (бркн.), не превышает 0,03. Среди сл-но отобранных 400 изделий оказалось 18 бркн-ых. Можно ли принять партию? Ук: принять H_0: $P = P_0 = 0{,}03$, а в кач-е конкурирующей H_1: $P > 0{,}03$; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и см. п6 из 4°: 5.1. О: $u_{нбл} = 1{,}76$, $u_{кр} = 1{,}645$. Нулевая гп-а отвергается, т.е. партию принять нельзя.

8. Завод рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вер-ть того, что орг-ия, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,08. Завод разослал 1000 каталогов новой улучшенной формы и получил 100 заказов. Можно ли сказать, что новая форма рекламы оказалась значимо эффективнее (эфн.) первой? Ук: принять H_0: $P = P_0 = 0{,}08$, а в кач-е конкурирующей H_1: $P > 0{,}08$; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, см. также п6 из 4°: 5.1. О: $u_{нбл} = 2{,}32$, $u_{кр} = 1{,}645$. Нулевая гп-а отвергается, т.е. новая форма рекламы значимо эфн-е прежней.

9. В результате длительных нбл-й установлено, что вер-ть полного выздоровления больного, принимавшего лекарство A, равно 0,8. Новое лекарство B назначено 800 больным, причем 660 из них полностью выздоровели. Можно ли считать новое лекарство значимо эф-е лекарства A при пятипроцентном уровне значимости? Ук: принять H_0: $p = 0{,}8$, H_1: $p \neq 0{,}8$; $\alpha = 0{,}05$ и см. п4 из 4°: 5.1. О: $u_{нбл} = 1{,}77$; $u_{кр} = 1{,}96$. Нулевая гп-а принимается, т.е. нет оснований считать новое лекарство значимо эфн-е прежнего.

10. По двум незв-ым вбр-ам, объемы к-ых $n_1 = 9$ и $n_2 = 16$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей X и Y, найдены исправленные вбр. дсп-и $S_x^2 = 34{,}02$ и

S_y^2 = 12,15. При уровне значимости α = 0,01 проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ о рав-ве исправленных дсп-й при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) > D(Y)$. О: $F_{нбл}$ = 2,8; $F_{кр}$(0,01; 8; 15) = 2,64. H_0 отвергается. Ук: см. тз5.

11. По двум незв-ым вбр-ам, объемы к-ых n_1 = 9 и n_2 = 6, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей, найдены вбр-ые дсп-и $D_в(X)$ = 14,4 и $D_в(Y)$ = 20,5. При уровне значимости α = 0,1 проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ о рав-ве гнр-ых дсп-й при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) \neq D(Y)$. Ук: сначала найти исправленные дсп-и: $S_x^2 = \dfrac{n_1}{n_1 - 1} D_в(X)$, $S_y^2 = \dfrac{n_2}{n_2 - 1} D_в(Y)$ и см. тз6. О: $F_{нбл}$ = 1,52; $F_{кр}$(0,05; 5; 8) = 3,69. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у H_0 о рав-ве гнр-ых дсп-й.

12. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две пробы (вбр-и), объемы к-ых n_1 = 10 и n_2 = 8. В результате измерения крум-го размера отобранных изделий получены сд-ие результаты:

x_i	1,08	1,1	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
y_i	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38		

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью [H_0: $D(X) = D(Y)$], если принят уровень значимости α = 0,1 и в кач-е конкурирующей гп-ы H_1: $D(X) \neq D(Y)$? (см. тз7). Ук: для упрощения выч-й перейти к условным врт-м: $u_i = 100x_i - 124$, $v_i = 100y_i - 126$. О: S_u^2 = 188,67; S_v^2 = 124,84; $F_{нбл}$ = 1,51; $F_{кр}$(0,05; 9; 7) = 3,63. Т.о. нет оснований считать точность станков различной.

13. Из норм-ой гнр. свк-ти извлечена вбр. объема n = 17, по ней найдена исправленная вбр-ая дсп. S^2 = 0,24. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ = 0,18, приняв в качестве конкурирующей гп-ы H_1: σ_0^2 > 0,18. Ук: см. тз8. О: $\chi^2_{нбл}$ = 21,33; $\chi^2_{кр}$ (0,05; 16) = 26,3. Нет оснований отвергнуть H_0.

14. Из норм-ой гнр. свк-ти извлечена вбр. объема n = 31:

Варианты	x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
Частоты	n_i	1	3	7	10	6	3	1

При уровне значимости α = 0,05 требуется проверить нулевую гп-у H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ = 0,18, приняв в качестве конкурирующей гп-ы H_1: σ_0^2 > 0,18. Ук: принять уловные врт. $u_i = 10x_i - 11$ и выч-ть $S_u^2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 / n}{n-1}$, а затем $S_x^2 = S_u^2 / 10^2$ и см. тз8. О: S_x^2 = 0,27; $\chi^2_{нбл}$ = 45,0; $\chi^2_{кр}$ (0,05; 31) = 43,8. Нулевая гп-а отвергается. Исправленная вбр-ая дсп-ия значимо отличается от гипотетической.

15. В результате длительного хронометража вр-и сборки узла различными сборщиками установлено, что дсп-ия этого вр-и σ_0^2 = 2 мин^2. Результаты 20 нбл-й за работой новичка таковы:

Вр. сборки одного узла в минутах	x_i	56	58	60	62	64
Частоты	n_i	1	4	10	3	2

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ можно ли считать, что новичок работает ритмично (в том смысле, что дсп-ия затрачиваемого им вр-и не отличается от дсп-и вр-и остальных сборщиков)? Ук: нулевая гп-а H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$; конкурирующая гп-а H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 2$. Принять $u_i = x_i - 60$ и выч-ть S_u^2; см. тз9. О: $S_u^2 = S_x^2 = 4$; $\chi^2_{лвс.кр}(0{,}975;\ 19) = 8{,}91$; $\chi^2_{прс.кр}(0{,}025;\ 19) = 32{,}9$; $\chi^2_{нбл} = 38$. Нулевая гп-а отвергается; новичок работает неритмично.

16. Решить тз10, приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. О: $z_{0,05} = 1{,}645$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 120) = 146{,}16$. Партия бракуется (брк.).

17. По вбр-е объема $n = 30$ найден ср-й вес $\bar{x} = 130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по вбр-е объема $m = 40$ найден ср-й вес $\bar{y} = 125$ г изделий, изготовленных на втором станке. Гнр-ые дсп-и известны: $D(X) = 60$ г^2, $D(Y) = 80$ г^2. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гп-е $M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что слн-ые вел-ы X и Y рсп-ы норм-но и вбр-и незв-ы. Ук: см. п5 из 3°: 5.2.

О: $Z_{нбл} = 2{,}5$; $Z_{кр} = 1{,}96$. Нулевая гп-а отвергается. Ср-й вес изделий различается значимо.

17а. По двум незв-ым малым вбр-ам, объемы к-ых $n = 10$ и $m = 8$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей, найдены вбр-ые ср. $\bar{x} = 142{,}3$ и $\bar{y} = 145{,}3$ и исправленные дсп-и $S_x^2 = 2{,}7$ и $S_y^2 = 3{,}2$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гп-е $M(X) \neq M(Y)$.

Ук: предварительно проверить рав-во дсп-й по кт-ю Фишера-Снедекора и см. п6 из 3°:5.2. О: $F_{нбл} = 1{,}23$; $F_{кр}(0{,}01;\ 7;\ 9) = 5{,}62$. Нет оснований отвергнуть гп-у о рав-ве дсп-й. Имеем $|T_{нбл}| = 3{,}7$; $t_{двс.кр}(0{,}01;\ 16) = 2{,}92$. Нулевая гп-а о рав-ве ср-их отвергается.

18. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ требуется проверить нулевую гп-у H_0: $M(X) = M(Y)$ о рав-ве гнр-ых ср-их норм-ых свк-ей X и Y при конкурирующей гп-е H_1: $M(X) > M(Y)$ по малым незв-ым вбр-ам, объемы к-ых $n = 10$ и $m = 16$. Получены сд-ие результаты:

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5
n_i	1	2	4	2	1

y_i	12,2	12,3	13,0
m_i	6	8	2

Ук: предварительно проверить нулевую гп-у H_0: $D(X) = D(Y)$ о рав-ве гнр-ых дсп-й при конкурирующей гп-е H_1: $D(X) > D(Y)$ и см. тз11.

О: $\bar{x} = 12{,}8$; $\bar{y} = 12{,}35$; $S_x^2 = 0{,}11$ и $S_y^2 = 0{,}07$; $F_{нбл} = 1{,}57$; $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 15) = 2{,}59$. $T_{нбл} = 1{,}71$; $t_{прс.кр}(0{,}05;\ 24) = 1{,}71$. Нет оснований принять или отвергнуть гп-у о рав-ве ср-их. Опыт следует повторить, увеличив объем вбр-к.

19. По шести незв-ым вбр-ам одинакового объема $n = 37$, извлеченным из норм-ых гнр. свк-ей, найдены исправленные вбр. дсп-и: 2,34; 2,66; 3,65; 3,86; 4,54. Требуется проверить нулевую гп-у об однс-и дсп-й: а) при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$; б) при $\alpha = 0{,}05$. Ук: см. п7 из 4°: 5.2. О: $k = 36$; $l = 6$; $G_{нбл} = 0{,}2270$; а) $G_{кр}(0{,}01;\ 36;\ 6) = 0{,}2858$; б) $G_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 6) = 0{,}2612$. В обоих случаях нет оснований отвергнуть гп-у об однс-и дсп-й.

20. Каждая из трех лабораторий произвела анализ 10 проб сплава для опр-ия процентного содержания углерода, причем исправленные вбр. дсп-и оказались равными 0,045; 0,062; 0,093.

Требуется при уровне значимости α = 0,01 проверить гп-у об однс-и дсп-й. Предполагается, что процентное содержание углерода в сплаве рсп-но норм-но. О: $k = 9$; $l = 3$; $G_{нбл} = 0{,}465$; $G_{кр}(0{,}01;\ 9;\ 3) = 0{,}6912$. Нет оснований отвергнуть гп-у об однс-и дсп-й.

21. Используя кт-й Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 проверить, согласуется ли гп-а о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X с эмп-им рсп-ем вбр-и объема n = 200:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Ук: см. тз16. О: $k = 8$; $\chi^2_{нбл} = 7{,}71$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 8) = 15{,}5$. Нет оснований отвергнуть гп-у о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти.

22. Используя кт-й Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 установить, сл-но или значимо расхождение между эмп-ми частотами n_i и n_i', к-ые выч-ны, исходя из гп-ы о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X (см. тз17):

а)

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

в)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

г)

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	15	8	8	6

О: а) сл-но; $k = 2$, $\chi^2_{нбл} = 2{,}47$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2) = 6{,}0$; б) сл-но; $k = 6$, $\chi^2_{нбл} = 1{,}52$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$; в) значимо; $k = 4$, $\chi^2_{нбл} = 13{,}93$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$; г) сл-но; $k = 6$, $\chi^2_{нбл} = 0{,}83$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$.

23. Используя кт-й Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 проверить, согласуется ли гп-а о норм-ом рсп-и гнр-ой свк-ти X с заданным эмп. рсп-ем:

а)

Номер интервала	Граница интервала		Частота	Номер интервала	Граница интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	– 20	– 10	20	5	20	30	40
2	– 10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	01	20	89				
							n = 300

б)

Номер интервала	Граница интервала		Частота	Номер интервала	Граница интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				
							$n = 100$

в)

Номер интервала	Граница интервала		Частота	Номер интервала	Граница интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	8	5	46	56	15
2	16	26	7	6	56	66	8
3	26	36	16	7	66	76	6
4	36	46	35	8	76	86	7
							$n = 100$

г)

Номер интервала	Граница интервала		Частота	Номер интервала	Граница интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				
							$n = 120$

Ук: см. п6 из 5°: 5.2. О: а) Согласуется; $x^* = 10{,}4$; $\sigma^* = 13{,}67$; $k = 4$; $\chi^2_{нбл} = 5{,}4$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$. б) Ук: объединить малочисленные частоты первых двух и последних двух интервалов, а также сами интервалы. О: согласуется; $x^* = 12{,}04$; $\sigma^* = 4{,}261$; $k = 6$; $\chi^2_{нбл} = 1{,}3$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$. в) Не согласуется; $x^* = 27{,}54$; $\sigma^* = 10{,}44$; $k = 5$; $\chi^2_{нбл} = 14$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$. г) Согласуется; $x^* = 27{,}54$; $\sigma^* = 10{,}44$; $k = 4$; $\chi^2_{нбл} = 5{,}4$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$.

5.3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит суть дспн-го анализа и где он применяется?

2. Что такое общая, факт., ост-ая суммы кв-ов отк-й и как они связаны между собой?

3. Как выражается (врж.) общая, факт., ост-ая дсп-и?

4. Как осуществляется сравнение нескольких ср-х методом дспн-го анализа?

5. Охркз-те двухфакторный (дфктн.) дспн-й анализ. В чем состоит его основная идея?

6. Как выч-ся эмп-ие дсп-и и как они используются для проверки ст-й значимости, обнаруженных в ср-ем по строкам и по столбцам?

7. Приведите фм-ы упрощения для практических расчетов.

8. Как производится иссл-е в дфктн-ом дспн. анализе с неравным числом нбл-й в ячейке?

5.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Вопросы для самопроверки

1. Как понимается плн-ие эксп-та и с чем связано его возникновение?
2. Приведите общую постановку плн-ия эксп-та.
3. Какие планы наз-ся ортогональными (орт.)?
4. Как получают орт. планы наложением друг на друга?
5. Как можно уменьшить число нбл-й, когда фкт-ы действуют на разных числах уровней.
6. В чем состоит общая идея плн-ия эксп-та?
7. По какой фм-е переходят к верхнему (+ 1) и нижнему (– 1) уровням? Приведите пример.
8. Какими св-ми обладают матрицы плн-ия эксп-та?
9. Приведите простейший вид фк-и отклика, с к-го начинают иссл-ие объекта.
10. В чем состоит суть дробного фктн-го эксп-та?
11. Как анализируется модель четырьмя фкт-ми?
12. Приведите основные этапы проведения и обработки результатов эксп-та на конкретном примере.

тз1. Произведено по 4 исп-ия на каждом из трех уровней фкт-а A. Методом дспн-го анализа при уровне значимости α = 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл. 5.

Таблица 5

№ исп. i	Уровни фкт. A		
	A_1	A_2	A_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\bar{x}_{\cdot j}$	35	25	27

Таблица 6

i	A_1		A_2		A_3		Σ
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	9	81	– 9	81	– 8	64	
2	7	49	– 5	25	– 7	49	
3	6	36	– 3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$Q_j = \sum y_{ij}^2$		170		116		142	$\sum Q_j = 428$
$T_j = \sum y_{ij}$	24		– 16		– 8		$\sum T_j = 0$
T_j^2	576		256		64		$\sum T_j^2 = 896$

Р. Для упрощения выч-й вводим пер-ю $y_{ij} = x_{ij} - $ с (где с = $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_{ij} = 29$)

и составим расчетную табл. 6. Найдем общую и фктн-ю суммы кв-ов отк-й, учитывая, что число уровней фкт-а $n = 3$, число исп-й на каждом уровне $m = 4$:

$$Q_{общ} = \sum_{j=1}^{n} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn} = 428 - 0 = 428,$$

$$Q_{фкт} = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j^2}{m} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn} = \frac{896}{4} - 0 = 224.$$

Найдем остаточную (ост.) сумму кв-ов отк-й:

$$Q_{ост} = Q_{общ} - Q_{фкт} = 428 - 224 = 204.$$

Выч-им фктн-ю и ост-ю дсп-и:

$$S^2_{фкт} = \frac{Q_{фкт}}{n-1} = \frac{224}{2} = 112,$$

$$S^2_{ост} = \frac{Q_{ост}}{n(m-1)} = \frac{204}{9} = 22{,}67.$$

Сравним фктн-ю и ост-ю дсп-и с помощью кт-ия Фишера-Снедекора. Для этого сначала найдем нблм. зн-ие кт-ия

$$F_{нбл} = \frac{S^2_{фкт}}{S^2_{ост}} = \frac{112}{22{,}67} = 7{,}94.$$

Затем из T_{15} находим крт-ю точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2) = F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$.

Т.к. $F_{нбл} > F_{кр}$, нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х отвергаем, т.е. групповые ср. «в целом» различаются значимо (сущ-но).

тз2. Произведено 13 исп-й, из них 4 – на первом уровне A_1 фкт-а, 4 – A_2, 3 – A_3 и 2 – A_4. Методом дспн-го анализа при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл. 7.

Таблица 7

i	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1,38	4,41	1,32	1,31
2	1,38	1,42	1,33	1,33
3	1,42	1,44	1,34	–
4	1,42	1,45	–	–
$\bar{x}_{\cdot j}$	1,40	1,43	1,33	1,32

Таблица 8

i	A_1		A_2		A_3		A_4		Σ
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	
1	0	0	3	9	– 6	36	– 7	49	
2	0	0	4	16	– 5	25	– 5	25	
3	4	16	6	36	– 4	16	–	–	
4	4	16	7	49	–	–	–	–	
$Q_j = \sum y_{ij}^2$		32		110		77		74	$\sum Q_j = 293$
$T_j = \sum y_{ij}$	8		20		– 15		– 12		$\sum T_j = -9$
T_j^2	64		400		225		144		

Р. Используя зм4 из 3°: 5.3, перейдем к целым числам $y_{ij} = x_{ij} - 138$ и составим расчетную табл. 8. Используя столбец Σ и нижнюю строку табл. 8, найдем

$$Q_{общ} = \sum Q_j - \frac{\left[\sum T_j\right]^2}{N} = 293 - \frac{(-9)^2}{13} = 293 - 6{,}23 = 286{,}77,$$

$$Q_{фкт} = \frac{T_1^2}{m_1} + \frac{T_2^2}{m_2} + \frac{T_3^2}{m_3} + \frac{T_4^2}{m_4} - \frac{\left[\sum T_j\right]^2}{N} = \frac{64}{4} + \frac{400}{4} + \frac{225}{3} + \frac{144}{2} - 6{,}23 =$$
$$= 256{,}77 \text{ (см. зм2 из 2°: 5.3).}$$

Найдем ост-ю сумму кв-ов отк-й: $Q_{ост} = Q_{общ} - Q_{фкт} = 286{,}77 - 256{,}77 = 30.$

Выч-им факт-ю и ост-ю дсп-и: $S^2_{фкт} = \dfrac{Q_{фкт}}{n-1} = \dfrac{256{,}77}{4-1} = 85{,}59$; $S^2_{ост} = \dfrac{Q_{ост}}{N-n} = \dfrac{30}{13-4} = 3{,}33$. Найдем $F_{нбл} = \dfrac{S^2_{фкт}}{S^2_{ост}} = \dfrac{85{,}59}{3{,}33} = 25{,}7$ и $F_{кр}(0{,}05;\,3;\,9) = 3{,}86$ из T_{15}. Т.к. $F_{нбл} > F_{кр}$, нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х отвергаем. Др. словами, групповые ср. различаются значимо (сущ-но).

тз3. Для опр-ия процентного содержания вредных примесей в минерале были взяты образцы одинаковой массы из трех различных месторождений (A_1, A_2, A_3): 3 образца из A_1, 2 из A_2 и 4 из A_3. Результаты химического анализа (процент содержания вредных примесей) приведены в табл. 9. Считая процентное содержание примесей в каждом образце рсп-м по норм. закону с одинаковой дсп-ей, проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гп-у H_0 о том, что ср. содержание примесей во всех трех месторождениях одинаково.

Таблица 9

	1	2	3	4
A_1	8,35	5,40	7,16	
A_2	4,52	6,24		
A_3	8,91	7,47	9,08	9,94

Р. Выч-им внутригрупповые вбрч-ые ср. и общее вбрч-ое ср.

$m_1^* = \dfrac{1}{3}(8{,}35 + 5{,}40 + 7{,}16) = 6{,}97$, $m_2^* = \dfrac{1}{2}(4{,}52 + 6{,}24) = 5{,}38$, $m_3^* = \dfrac{1}{4}\times$ $\times(8{,}91 + 7{,}47 + 9{,}08 + 9{,}94) = 8{,}85$ и $m_4^* = \dfrac{1}{9}(8{,}35 + 5{,}40 + \ldots + 9{,}94) = 7{,}45$.

Найдем внутригрупповую вбрч. дсп-ю $s_0^{2*} = \dfrac{1}{2+1+3}[((8{,}35 - 6{,}97)^2 + (5{,}40 - 6{,}97)^2 + (7{,}16 - 6{,}97)^2) + ((4{,}52 - 5{,}38)^2 + (6{,}24 - 5{,}38)^2) + ((8{,}91 - 8{,}85)^2 + (7{,}47 - 8{,}85)^2 + (9{,}08 - 8{,}85)^2)] = 1{,}50$ и межгрупповую вбрч. дсп-ю $s_1^{2*} = \dfrac{1}{3-1}[3(6{,}97 - 7{,}45)^2 + 2(5{,}38 - 7{,}45)^2 + 4(8{,}85 - 7{,}45)^2] = 8{,}54$. Отсюда находим $F_{нбл} = \dfrac{S_1^{2*}}{S_0^{2*}} = \dfrac{8{,}54}{1{,}50} = 5{,}69$. Параметры F-рсп. равны $3 - 1 = 2$ и $(3 - 1) + (2 - 1) + (4 - 1) = 6$. По табл. T_9 с параметрами 2 и 6 находим крт. точку $F_{кр}(\alpha_1, k_1, k_2) = F_{кр}(0{,}05;\,2;\,6) = 5{,}14$. Т.к. $F_{нбл} > F_{кр}$ (5,69 > 5,14), то есть серьезные основания отвергнуть гп-у о рав-ве ср-го содержания примесей в минералах всех трех месторождений.

Задание для кр. работы: по образцу примеров в 5.3 и тз решить з1-з20.

1. Проведено по 5 испытаний (исп.) на каждом из четырех уровней фкт-а A. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х $\bar{x}_{\cdot j}$. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в сд-ей табл-е:

i	A_1	A_2	A_3	A_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	59	65
$\bar{x}_{\cdot j}$	51,6	62,6	61,0	57,0

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 58$.
О: $Q_{общ} = 1850{,}55$; $Q_{фкт} = 360{,}15$; $Q_{ост} = 1490{,}40$; $S^2_{фкт} = 120$; $S^2_{ост} = 93$; $F_{нбл} = 1{,}29$; $F_{кр}(0{,}05;\ 3;\ 16) = 3{,}24$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

2. Проведено по 8 исп-й на каждом из шести уровней фкт-а. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл-е:

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	128	115	93	87	84	80
5	133	119	94	86	90	81
6	141	122	101	87	96	82
7	147	128	102	106	101	86
8	148	146	105	127	111	99
$\bar{x}_{\cdot j}$	128	116	93	93	89	81

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 100$.
О: $Q_{общ} = 21567{,}48$; $Q_{фкт} = 11945{,}60$; $Q_{ост} = 9622$; $S^2_{фкт} = 2389$; $S^2_{ост} = 229$; $F_{нбл} = 10{,}43$; $F_{кр}(0{,}01;\ 5;\ 42) = 2{,}44$. Нулевая гп-а о рав-ве групповых ср-х отвергается.

3. Проведено по 4 исп-я на каждом из трех уровней. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3
1	25	30	21
2	32	24	22
3	31	26	34
4	30	20	31
$\bar{x}_{\cdot j}$	32	25	27

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 28$.
О: $Q_{общ} = 296$; $Q_{фкт} = 104$; $Q_{ост} = 192$; $S^2_{фкт} = 52$; $S^2_{ост} = 21{,}3$; $F_{нбл} = 2{,}44$; $F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

4. Проведено по 7 исп-й на каждом из четырех уровней фкт-а. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в сд-ей табл.:

i	A_1	A_2	A_3	A_4
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
$\bar{x}_{\cdot j}$	60,9	65,9	64,3	62,9

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 63$.
О: $Q_{общ} = 1539$; $Q_{фкт} = 95$; $Q_{ост} = 1414$; $S^2_{фкт} = 31{,}67$; $S^2_{ост} = 60{,}17$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

5. Проведено по 4 исп-я на каждом из трех уровней фкт-а A. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
$\bar{x}_{\cdot j}$	28	25	29

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 27$.
О: $Q_{общ} = 334$; $Q_{фкт} = 32$;
$Q_{ост} = 302$; $S^2_{фкт} = 16$; $S^2_{ост} = 33{,}56$.
Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

6. Проведено 14 исп-й, из них 5 на первом уровне A_1 фкт-а A, 3 – A_2, 2 – A_3, 3 – A_4, 1 – A_5. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	7,3	5,4	6,4	7,9	7,1
2	7,6	7,1	8,1	9,5	
3	8,3	7,4		9,6	
4	8,3				
5	8,4				
$\bar{x}_{\cdot j}$	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

Ук: принять $y_{ij} = 10x_{ij} - 78$.
О: $Q_{общ} = 1570{,}43$; $Q_{фкт} = 932{,}66$;
$Q_{ост} = 637{,}77$; $S^2_{фкт} = 233{,}16$;
$S^2_{ост} = 70{,}86$; $F_{нбл} = 3{,}29$;
$F_{кр}(0{,}01;\ 4;\ 9) = 3{,}63$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

7. Проведено 13 исп-й, из них 4 на уровне A_1, 6 – A_2, 3 – A_3. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х, предполагая, что вбр. извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
$\bar{x}_{\cdot j}$	46	83	89

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 73$.
О: $Q_{общ} = 6444$; $Q_{фкт} = 4284$;
$Q_{ост} = 2160$; $S^2_{фкт} = 2142$;
$S^2_{ост} = 216$; $F_{нбл} = 9{,}92$;
$F_{кр}(0{,}01;\ 2;\ 10) = 7{,}56$.
Нулевая гп-а о рав-ве групповых ср-х отвергается. Групповые ср. различаются значимо.

8. Проведено 14 исп-й, из них 7 на первом уровне A_1, 3 – A_2, 4 – A_3. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр. извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3
1	30,56	43,44	31,36
2	32,66	47,51	36,20
3	34,78	53,80	36,38
4	35,50		42,20
5	36,63		
6	40,20		
	42,28		
$\bar{x}_{\cdot j}$	36,09	48,25	36,54

Ук: принять $y_{ij} = 100x_{ij} - 3900$ (см. зм4 из 3°: 5.3).
О: $Q_{общ} = 5463442$; $Q_{фкт} = 3399389$;
$Q_{ост} = 2064053$; $S^2_{фкт} = 1699694$;
$S^2_{ост} = 187641$; $F_{нбл} = 9{,}06$;
$F_{кр}(0{,}01;\ 2;\ 11) = 7{,}21$.
Нулевая гп-а отвергается. Групповые ср. различаются значимо.

9. Проведено 26 исп-й, из них 7 на первом уровне A_1, 5 – A_2, 8 – A_3, 6 – A_4. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить гп-у о рав-ве групповых ср-х. Предполагается, что вбр. извлечены из норм-х гнр-ых свк-ей с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

i	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1600	1580	1400	1510
2	1610	1640	1550	1520
3	1650	1640	1600	1530
4	1680	1700	1620	1570
5	1700	1750	1640	1600
6	1700		1660	1680
7	1800		1740	
8			1820	
$\bar{x}_{\cdot j}$	1677	1662	1638	1568

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 1630$.
О: $Q_{общ} = 192788$; $Q_{фкт} = 45507$; $Q_{ост} = 147281$; $S^2_{фкт} = 15169$; $S^2_{ост} = 6695$; $F_{нбл} = 2{,}27$; $F_{кр}(0{,}05;\ 3;\ 22) = 3{,}05$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

10. Пусть имеется два вида станков (фкт. A – влияние настройки станков) и три вида сырья (фкт. B – влияние кач-а сырья), т.е. $r = 2$, $v = 3$, $N = rv = 6$. Методом дфктн-го дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х по строкам и столбцам. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-ей с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й и ср. зн-ия по уровням фкт-ов приведены в табл.:

A \ B	B_1	B_2	B_3	$\bar{x}_{i\cdot}$
A_1	1	2	3	2
A_2	5	6	10	7
$\bar{x}_{\cdot j}$	3	4	6,5	4,5

Ук: см. п3 из 5°: 5.3.
О: $\bar{x} = 4{,}5$; $Q_1 = 37{,}5$; $Q_2 = 13$; $Q_3 = 3$; $Q = 53{,}5$;
$S_1^2 = 34{,}5/1 = 37{,}5$; $S_2^2 = 13/2 = 6{,}5$; $S_3^2 = 3/1\cdot 2 = 1{,}5$;
$F_A = S_1^2/S_3^2 = 37{,}5/1{,}5 = 25$; $F_B = S_2^2/S_3^2 = 6{,}5/1{,}5 = 4{,}3$; $F_{кр(A)}(0{,}05;\ 2;\ 1) = 18{,}51$; $F_{кр(B)}(0{,}05;\ 2;\ 1) = 19{,}0$. Т.к. $F_A > F_{кр(A)}$, то нулевая гп-а о рав-ве ср-х по строкам отвергается, т.е. влияние фкт. A на исслм-ый признак значимо; $F_B < F_{кр(B)}$, то нулевая гп-а о рав-ве ср-х по столбцам принимается, т.е. влияние фкт. B на исслм-ый признак незначимо.

11. Пусть имеется два вида сырья (фкт. A – влияние кач-а сырья) и два вида станков (фкт. B – влияние настройки станков), т.е. $r = 2$, $v = 2$, $N = rv = 6$. Методом дфктн-го дспн-го анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х по строкам и столбцам. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-ей с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й по уровням фкт-ов приведены в табл.

A \ B	B_1		B_2	
A_1	0,5	0,6	0,4	0,3
A_2	0,6	0,6	0,6	0,5

Ук: см. п4 из 6°: 5.3.

Далее рас-им эксп-т типа 2^k, когда иссл-ся k фкт-ов, каждый на двух уровнях. Здесь используем алгоритм Йетса. При этом теор-й материал будем приводить по ходу решения задач или до решения, как сейчас.

Рас-им простой эксп-т с двумя фкт-ми A и B, каждый на двух уровнях. Прописными буквами будем обз-ть эффекты (эф.), а строчными – комбинации условий (комбинации уровней фкт-ов). Так, A обз-ет эф. фкт-а A, a – верхний уровень фкт-а A, образующий совместно с уровнем др-го фкт-а нек-ую комбинацию условий. Произвольно опр-м два уровня каждого фкт-а как «нижний» и «верхний». Они дсв-но могут быть нижними и верхними на нек-ой шкале, либо это различие может быть произвольным. Для эксп-та 2^2 имеем (табл. 9а) сд-ие комбинации уровней фкт-ов: (1), *a*, *b*, *ab*, т.е. если оба фкт-а находятся на нижнем уровне, то используется символ (1), если на верхнем – *ab*. Для удобства обз-им нижний и верхний уровни фкт. *A* ств-но через A_0 и A_1 (анч-но и для других фкт-ов). Индексы 0 и 1 предпочтительны (прч.) и используются при рас-и др-х планов. Теперь понятно, что символы *ab*, *b* и т.д. обз-ют нбл-ие (или сумму нбл-й) при ств-ей комбинации уровней фкт-ов.

Таблица 9а

	A_0	A_1
B_0	(1)	*a*
B_1	*b*	*ab*

Для эксп-а типа 2^2 ср. эф. фкт-а *A* оценивается так:

$$A\colon \{(ab-b)+[a-(1)]\}/2.$$

Это ср-я разность между верхним и нижним уровнями фкт-а *A* (взятая при верхнем, а затем при нижнем уровне фкт-а *B*). Иногда коэф. 1/2 опускается и оценивается полный эф. фкт-а *A*. Анч-но ср. эф. фкт-а *B* равен

$$B\colon \{(ab-a)+[b-(1)]\}/2.$$

Если опр-ть взаимодействие *AB* как ср-ю разность, т.е. как эф. фкт-а *A* при верхнем уровне фкт. *B* минус эф. фкт-а *A* при нижнем уровне фкт. *B*, то будем иметь оценку:

$$AB\colon \{(ab-b)-[a-(1)]\}/2.$$

Данные фм. можно получить сд. образом (коэф. опускаются, и расв-ся полные эф-ы):

$$\begin{aligned} A&\colon (a-1)(b-1)=ab-b+a-(1),\\ B&\colon (a+1)(b-1)=ab-a+b-(1),\\ AB&\colon (a-1)(b-1)=ab-a-b+(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Левая часть этих выражений (врж.) развертывается формально с помощью обычных алг-их правил, а в окончательном врж-и 1 заменяется на (1). Чтобы опр-ть, нужно ли складывать или вычитать результат для опр-ой комбинации условий, образуем произведение (пзв.), записывая после каждой буквы – 1, если данный фкт. включается в эф-т, и + 1. если этот фкт. в эф-т не входит.

Рас-им в кач-ве примера эксп-т типа 2^3 с фкт-ми *A*, *B* и *C*. Врж-ия для полных эф-ов и взаимодействий имеют вид:

$$\begin{aligned} A&\colon (a-1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac-bc+a-b-c-(1),\\ B&\colon (a+1)(b-1)(c+1)=abc+ab-ac+bc-a+b-c-(1),\\ C&\colon (a+1)(b+1)(c-1)=abc-ab+ac+bc-a-b+c-(1),\\ AB&\colon (a-1)(b-1)(c+1)=abc+ab-ac-bc-a-b+c+(1),\\ AC&\colon (a-1)(b+1)(c-1)=abc-ab+ac-bc-a+b-c+(1),\\ BC&\colon (a+1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac+bc+a-b-c+(1),\\ ABC&\colon (a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-(1). \end{aligned} \tag{2}$$

12. В Национальном бюро стандартов провели эксп-т по оценке прочности стали. Расв-ись три фкт-а: *A* – содержание углерода, *B* – температура закалки (уровнями фкт. *B* яв-ся 400°F (B_0) и 600°F (B_1)), *C* – способ охлаждения. Обз-им уровни *A* и *C* как A_0, A_1 и C_0, C_1. Полученные результаты представляют собой результаты исп-й восьми стальных образцов на прочность. Предел прочности на растяжение 10^3 фунт/кв. дюйм (1 фунт/ кв. дюйм = 6,89475 кПа) приведены в табл. 10. Найти полные эф. основных фкт-ов и взаимодействий.

Таблица 10

	A_0		A_1	
	B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	169	145	167	135
C_1	173	143	165	134

Таблица 11

	A_0		A_1	
	B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	(1)	b	a	ab
C_1	c	bc	ac	abc

Р. Рас-им сначала комбинации эксп-та типа 2^3 (табл. 11). По фм-е (2) находим полные эф. осн. фкт-ов и взаимодействий. Н-р,

$$AB\colon (a-1)(b-1)(c+1) = abc + ab - ac - bc - a - b + c + (1) =$$
$$= 134 + 135 - 165 - 143 - 167 - 145 + 173 + 169 = -9.$$
$$A\colon (a-1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac - bc + a - b - c - (1) =$$
$$= 134 + 135 + 165 - 143 + 167 - 145 - 173 - 169 = -29 \text{ и т.д.}$$

Теперь можно представить ср-й эф-т каждого основного фкт-а и взаимодействия (табл. 12). Для этого надо взять кв-т общего эф-а, разделенный на число комбинаций условий, исслм-ых в эксп-е. Н-р, для A и $AB = A \times AB$ имеем $(-29)^2/8 = 105{,}125$ и $(-9)^2/8 = 10{,}125$ и т.д. В табл. 12 (результаты дспн-го анализа для эксп-та 2^2) произвольно полагаем, что все взаимодействия равны нулю, и используем четыре ств-щие суммы кв-ов для оценки остаточной дсп-и.

Таблица 12

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат	Отношение средних квадратов	Средний эффект
A	105,125	1	105,125	18,7*	– 7,25
B	1711,125	1	1711,125	304,2***	– 29,25
C	0,125	1	0,125	0,02	– 0,25
$A \times B$	10,125 } 22,500	1 } 4	5,625		
$A \times C$	3,125	1			
$B \times C$	3,125	1			
$A \times B \times C$	6,125	1			
Сумма	1838,875	7			

Отн-ие ср-их кв-ов и ср-й эф-т выч-ы так: 105,125/5,625 = 18,7, 1711,125/5,625 = 304,2, 0,125/5,625 = 0,02 и – 29/4 = – 7,25 и т.д.

Из табл. T_9 и T_{15} находим крт-ие зн-ия $F(1,4; 0{,}95) = 7{,}71$ и $F(1,4; 0{,}99) = 21{,}20$.

Мтч-ая мд., используемая в данном примере, имеет вид:

$$X_{tij} = \xi + \alpha_t + \beta_i + \gamma_j + Z_{tij} \text{ при } \sum_t \alpha_t = \sum_i \beta_t = \sum_j \gamma_j = 0.$$

Данный пример решить с условиями: c_0: 171, 147, 169, 137;
c_1: 173, 143, 165, 134.

13. Предыдущую з12 решить алгоритмом Йетса.

Р. Сначала рас-им метод представления полных эф-ов каждого фкт-а, позволяющий получить довольно быстрый способ оценивания любого отдельного эф-а и показать ортогональность (орт.) каждого из этих эф-ов. Для выч-ия эф-ов каждого фкт-а составим табл. 13, содержащую знаки плюс и минус, с к-ми берется результат для каждого уровня основного фкт-а. Н-р, в столбце 1 стоят только знаки плюс. Это означает, что общая сумма равна сумме всех результатов. Для фкт-а A плюс встречается в тех строках, где комбинация уровней содержит букву a (т.е. расв-ся верхний уровень этого фкт-а), а минус – в тех строках, где *a* отсутствует. Анч-но опр-ся знаки фкт-ов *B* и *C*. Знаки остальных эф-ов находятся путем перемножения столбцов с известными знаками. Н-р, знаки для взаимодействия *AB* опр-ся построчным перемножением знаков для фкт-ов *A* и *B*. Для взаимодействия *ABC* знаки находим перемножением знаков для фкт-ов *AB* и *C*. Т.о. в табл. 13 в сжатом виде представлены стн-ия (2).

Таблица 13

Комбинации условий	Основные факторы и их взаимодействия							
	1	*A*	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*
(1)	+	–	–	+	–	+	+	–
a	+	+	–	–	–	–	+	+
b	+	–	+	–	–	+	–	+
ab	+	+	+	+	–	–	–	–
c	+	–	–	+	+	–	–	+
ac	+	+	–	–	+	+	–	–
bc	+	–	+	–	+	–	+	–
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Отметим, что табл. 13 обладает сд. св-ми: 1) за исключением столбца 1, число плюсов и минусов одинаково в каждом столбце; 2) сумма пзв-й знаков любых двух столбцов равна нулю, т.е. пзв-ие имеет одинаковое число знаков плюс и минус; 3) пзв-ие любых двух столбцов дает столбец, уже имеющийся в таблице. Н-р, $A \times B = AB$, $AB \times B = A$, $ABC \times AB = C$ и т.д. Все эти св-ва вытекают из орт-сти столбцов. Причем пзв-ия получены по модулю 2, т.е. $AB \times B = AB^2 = A$, $ABC \times AB = A^2B^2C = C$, $ABC \times C = ABC^2 = AB$ и т.д., т.е показатель степени (ст.) может быть равен 0 или 1. Если показатель ст-и больше 1, то он уменьшается на число, кратное 2, пока не станет равным 0 или 1.

Теперь приведем алгоритм, разработанный Франком Йетсом, предлагающий механический способ получения полных эф-ов каждого фкт-а и их взаимодействий в эксп-е 2^k. Данные табл. 14 взяты из з12. В столбце (1) приведены результаты для комбинации условий, записанных в предыдущем столбце (сл.). Такой порядок следования комбинаций сохраняется всегда. Четвертый фкт. *D* добавляется впоследствии в виде комбинаций *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd* и т.д. Сл. (2) получают путем попарного сж-ия и попарного вычитания ст-а (1). Н-р, 336 = = 167 + 169, …, 277 = 134 + 143 и – 2 = 167 – 169, …, – 9 = 134 – 143.

Таблица 14

Комбинации условий	(1) Результат	(2)	(3)	(4)	Эффект	(5) Средний эффект (4)/4	(6) Сумма квадратов $(4)^2/8$
(1)	169	336	616	1231	(1)		
a	167	280	615	– 29	*A*	– 7,25	105,125
b	145	338	– 12	– 117	*B*	– 29,25	1711,125
ab	135	277	– 17	– 9	*AB*	– 2,25	10,125
c	173	– 2	– 56	– 1	*C*	– 0,25	0,125
ac	165	– 10	– 61	– 5	*AC*	– 1,25	3,125
bc	143	– 8	– 8	– 5	*BC*	– 1,25	3,125
abc	134	– 9	– 1	7	*ABC*	1,75	6,125
Сумма	1231						1838,875

Данные сл-а (3) находятся из сл-а (2) точно так же, как данные (2) из (1). Таким же способом находим сл. (4) из сл. (3). Этот процесс выполняется три раза. Для эксп-а типа 2^k сущ-ет k этапов такого рода. Сл. (4) содержит полный эф-т фкт-а или взаимодействия, обз-ие к-го строчными буквами записано в начале строки. Чтобы получить ср-й эф-т, полные эф-ы разделим на 4 и запишем в сл. (5). В сл. (6) приведена сумма кв-ов для каждого фкт-а эксп-а, к-ые можно расв-ть так же, как лин. сравнение (в данном примере их семь) с одной ст-ю свободы, используя ур-ие

$$SS(\Lambda) = \left(\sum a_i X_i\right)^2 \Big/ n\sum a_i^2 \ ,$$

где a_i – коэф. лин-го сравнения, равные + 1 или – 1. Для каждой суммы кв-ов делитель равен $n2^k$.

Итак, з12 решили гораздо проще алгоритмом Йетса.

Решить алгоритм Йетса задачу с условиями: c_0: 169, 145, 167, 135;
c_1: 175, 146, 169, 136.

14. Проводился фктн-й эксп-т на опытной установке для очистки продукта посредством процесса перегонки. Расв-сь пять фкт-ов, каждый на двух уровнях: концентрация вещества (A), скорость дистилляции (B), объем раствора (C), скорость перемешивания (D), отн-ие кол-ва растворителя к кол-у воды (Е). Опр-ась ост-ая кислотность вещества после однократной перегонки для каждой из 32 = 2^5 комбинации условий эксп-та. Результаты (в кодированном виде) приведены в табл. 15. Задачу решить алгоритмом Йетса.

Таблица 15

		A_0				A_1			
		D_0		D_1		D_0		D_1	
		E_0	E_1	E_0	E_1	E_0	E_1	E_0	E_1
B_0	C_0	9	3	11	8	10	9	13	7
	C_1	3	5	7	7	5	6	10	7
B_1	C_0	8	4	9	8	6	6	16	6
	C_1	6	4	7	5	10	10	13	6

Р. Данные табл. 15 анализировались с помощью алгоритма Йетса, как показано в табл. 16. В сл. (7) дан ср-й эф-т каждого фкт-а и взаимодействия. Наконец, в табл. 17 представлены суммы кв-ов [сл. (80 с табл. 16]. Расв-ая суммы кв-ов, можно опр-ть, какие фкт-ы оказывают нб-е влияние. Если формально можно принять, что взаимодействия четырех и пяти фкт-ов равны нулю, то, складывая суммы кв-ов, выч-ные для шести эф-ов, обз-ных знаком + в табл. 16, можно получить ост-ю сумму кв-ов. Тогда совместная оценка σ^2 равна 2,708 в кодированных ед-ах. Крт-ие зн-ия F записаны в нижней части табл. 17, взятые из табл. T_9, T_{15}.

Три основных эф-а (A), (D) и (E) яв-ся высокозначимыми, однако имеются недт-ые свидетельства значимости взаимодействий CE и DE. Неожиданным результатом яв-ся значимость взаимодействия трех фкт-ов ADE. Если ее нельзя объяснить с инженерной или физической точки зрения, то нх-мы дпнт-ые иссл-ия.

Заметим, что фкт. B не оказался значимым ни как основной эф-т, ни как составная часть взаимодействия. Но это не значит, что скорость перемешивания не яв-ся важным фкт-ом. Если будет плн-ться новый эксп-т, то нужно либо брать едн-й уровень фкт-а *B*, либо иссл-ть уровни этого фкт-а, лежащие в др. интервале.

Таблица 16

Комбинации условий	(1) Результат	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	Эффект	(7) Средний эффект (6)/16	(8) Сумма квадратов $(6)^2/32$
(1)	9	19	33	57	143	244	1		40,500
a	10	14	24	86	101	36	*A*	2,250	0,500
b	8	8	49	47	23	4	*B*	0,250	2,000
ab	6	16	37	54	13	8	*AB*	0,500	15,125
c	3	24	22	5	7	– 22	*C*	– 1,375	3,125
ac	5	25	25	18	– 3	10	*AC*	0,625	10,125
bc	6	17	29	15	7	18	*BC*	1,125	6,125
abc	10	20	25	– 2	1	14	*ABC*	0,875	40,500
d	11	12	– 1	3	– 21	36	*D*	2,250	0,500
ad	13	10	6	4	– 1	– 4	*AD*	– 0,250	0,500
bd	9	11	9	1	7	– 4	*BD*	– 0,250	2,000
abd	16	14	9	– 4	3	8	*ABD*	0,500	3,125
cd	7	15	8	– 1	15	– 1	*CD*	– 0,625	0,125
acd	10	14	7	8	3	– 2	*ACD*	– 0,125	10,125
bcd	7	14	– 3	1	3	– 18	*BCD*	– 1,125	6,125+
abcd	13	11	1	0	11	– 14	*ABCD*	– 0,875	55,125
e	3	1	– 5	– 9	29	– 42	*E*	– 2,625	3,125
ae	9	– 2	8	– 12	7	– 10	*AE*	– 0,625	3,125
be	4	2	1	3	13	– 1	*BE*	– 0,625	1,125
abe	6	4	3	– 4	– 17	– 6	*ABE*	– 0,375	12,500
ce	5	2	– 2	7	1	20	*CE*	1,250	0,500
ace	6	7	3	0	– 5	– 4	*ACE*	– 0,250	4,500
bce	4	3	– 1	– 1	9	– 12	*BCE*	– 0,750	2,000+
abce	10	6	– 3	4	– 1	8	*ABCE*	0,500	15,125
de	8	6	– 3	13	– 3	– 22	*DE*	– 1,375	28,125
ade	7	2	2	2	– 7	– 30	*ADE*	– 1,875	1,125
bde	8	1	5	5	– 7	– 6	*BDE*	– 0,375	3,125+
abde	6	6	3	– 2	5	– 10	*ABDE*	– 0,625	0,500
cde	7	– 1	– 4	5	– 11	– 4	*CDE*	– 0,250	4,500+
acde	7	– 2	5	– 2	– 7	12	*ACDE*	0,750	0,500+
bcde	5	0	– 1	9	– 7	4	*BCDE*	0,250	0+
abcde	6	1	1	2	– 7	0	*ABCDE*	0	
Сумма	244								

В з14 рас-ли однократно производимый эксп-т. Теперь рас-им экспт. типа 2^4 с двумя репликами. Так сл. (2) в табл. 19 содержит суммы по двум репликам для каждой комбинации условий. Остальная часть табл-ы выч-на как в табл. 16, за исключением делителей в сл-ах (7) и (8) и ост-го ср-го кв-та с 16 ст-ми свободы.

Таблица 17

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат	Отношение средних квадратов
A	40,500	1	40,500	14,96**
B	0,500	1	0,500	–
C	15,125	1	15,125	5,58
D	40,500	1	40,500	14,96**
E	55,125	1	55,125	20,36**
AB	2,000	1		
AC	3,125	1		
AD	0,500	1		
AE	3,125	1		
BC	10,125	1		
BD	0,500	1		
BE	3,125	1		
CD	3,125	1		
CE	12,500	1	12,500	4,62
DE	15,125	1	15,125	5,58
ABC	6,125	1		
ABD	2,000	1		
ABE	1,125	1		
ACD	0,125	1		
ACE	0,500	1		
ADE	28,125	1	28,125	10,4*
BCD	10,125	1		
BCE	4,500	1		
BDE	1,125	1		
CDE	0,500	1		
Взаимодействия четырех и пяти факторов	16,250	6	2,708	
Сумма	275,500	31		
Доверительные пределы для F: $F_{1;6;90} = 3{,}78$, $F_{1;6;0{,}95} = 5{,}99$, $F_{1;6;0{,}99} = 13{,}75$				

15. Разработка процесса ферментизации обычно начинается с лабораторного иссл-ия физиологических требований к ств-им микроорганизмам. В результате иссл-я обнаружено, что полезное вещество выделяется нек-ым видом плесени, выращиваемой в среде жидкой культуры. Известно, что образование этого вещества зв-т от уровней содержания двух компонентов культуры, если уд-ся нек-ые требования к температуре, насыщению кислородом, водородному показателю pH и возрасту культуры. Требуется увеличить выход продукции.

Предполагается, что четыре из этих шести фкт-ов взаимосвязаны. Для проверки данного предположения проводился фктн-й эксп-т типа 2^4. Иссл-ись два компонента питательной среды (X_1, X_2) и два фкт-а окружающей среды (X_4, X_5). Для каждой комбинации условий были приготовлены повторные культуры (пер. X_3 используется для дальнейшего иссл-ия сначала с X_1 и X_2, а затем с X_4 и X_5). В табл. 18 представлены данные в кодированном виде. Эффекты (эф.) выражаются в отс-ых ед-ах. Для каждой из 16 комбинаций условий берутся две реплики.

Р. Данные были проанализированы с помощью алгоритма Йетса, как показано в табл. 19. Комбинации условий обз-ся в сл. (1) как x_1, x_2, x_1x_2, … В сл. (2) представлена сумма для повторного эксп-та.

На основные эф-ы фкт-ов X_1 и X_2 приходится большая часть различий между препаратами. Вполне возможно довольно большое отц. взаимодействие. Дсв-но, нх-мые питательные св-ва среды для плесени можно обеспечить за счет любого компонента. При этом фкт-ы X_4 и X_5 оказывают небольшое влияние, но их эф-т проявляется в основном через взаимодействие с фкт-ом X_2 и в меньшей ст-и с фкт-ом X_1. Ясно, что ни один из этих четырех фкт-ов не яв-ся незв-ым в смысле чисто аддитивного воздействия на выход продукта.

Таблица 18

	x_1	– 1		+ 1	
x_4	x_5 x_2	– 1	+ 1	– 1	+ 1
– 1	– 1	32,7	90,4	70,6	115,0
		19,3	89,8	84,5	108,6
	+ 1	20,2	94,1	76,1	133,6
		29,9	96,5	73,3	131,6
+ 1	– 1	50,0	72,6	104,2	81,3
		52,1	76,9	103,4	88,2
	+ 1	50,5	91,8	78,6	108,3
		49,1	86,9	74,1	108,3

Таблица 19

Комбинации	Общий выход продукта					(6)/16 Средний эффект	(6)×32 Средний квадрат
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	52,0	207,1	610,9	1239,6	2542,5		
x_1	155,1	403,8	628,7	1302,9	236,9	33,56	9008,2***
x_2	180,2	309,7	655,3	272,0	605,3	37,83	11449,6***
x_1x_2	233,6	319,0	647,6	264,9	– 185,1	– 11,57	1070,7***
x_4	102,1	199,5	146,5	206,0	10,1	0,63	3,2
x_1x_4	207,6	455,8	125,5	399,3	– 103,9	– 6,49	337,4***
x_2x_4	149,5	252,3	173,9	– 145,2	– 300,7	– 18,79	2825,6***
$x_1x_2x_4$	169,5	395,3	91,0	– 39,9	– 16,3	– 1,02	8,3
x_5	50,1	103,1	196,7	17,8	63,3	3,96	125,2*
x_1x_5	149,4	43,4	9,3	– 7,7	– 7,1	– 0,44	1,6
x_2x_5	190,6	105,5	256,3	– 21,0	193,3	12,08	1167,7***
$x_1x_2x_5$	265,2	20,0	143,0	– 82,9	105,3	6,58	346,5***
x_4x_5	99,6	99,3	– 59,7	– 187,4	– 25,5	– 1,59	20,3
$x_1x_4x_5$	152,7	74,6	– 85,5	– 113,3	61,9	– 3,87	119,7*
$x_2x_4x_5$	178,7	53,1	– 24,7	– 25,8	74,1	4,63	171,6**
$x_1x_2x_4x_5$	216,6	37,9	– 15,2	+ 9,5	35,3	2,21	38,9
Остаток							(321,6/16) = 20,1
Полная сумма квадратов = 27016,1							
Пределы значимости для F: $F_{1;16;0,95} = 4,49$, $F_{1;16;0,99} = 8,53$, $F_{1;16;0,999} = 16,12$							

16. Часто целесообразно иссл-ть эф-ы эксп-та типа 2^k без формального построения табл-ы дспн-го анализа. Кроме того, иногда бывает неясно, какие

эф-ы следует объединить в остаточной сумме кв-ов, т.е. какие взаимодействия яв-ся нулевыми в планируемых эксп-ах. Дэниел предложил подход, позволяющий получить ответы на поставленные вопросы с помощью графиков (грф.) полунормального (полунорм.) рсп-ия. Здесь эф-ы ранжируются в порядке взр-ия и наносятся на вер-ную бумагу полунорм-го рсп-ия, на к-ой вертикальная шкала изменена по сравнению с ств-ей шкалой вер-ной бумаги для норм-го рсп-ия сд-им образом: $P' = 2P - 100$, где P – фк-ия норм-го рсп-ия, а P' – фк. рсп-ия, используемая на вер-ной бумаге для полунорм-го рсп-ия слн-ой вел-ы $U' = |U|$, где слн. вел-а U имеет нормированное (норв.) норм. рсп-ие. Общая фм. перехода к новой вертикальной шкале имеет вид $P' = (i - 1/2)/n$, $i = \overline{1, n}$. Такой грф. расв-ся далее на рис. 1.

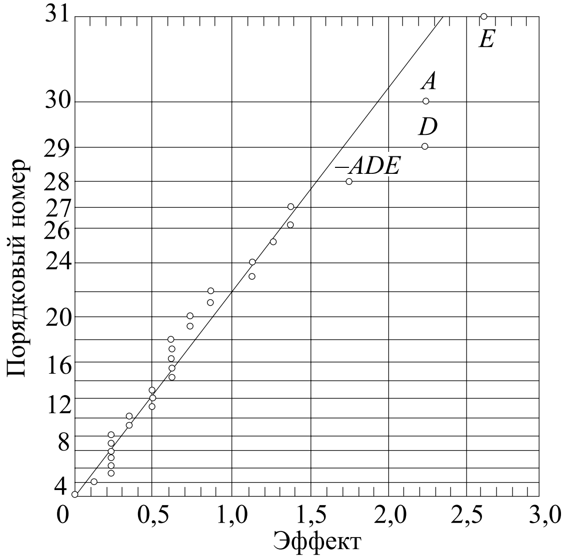


Рис. 1

Таблица 20

n	τ	Ранг для U_α	d	
			$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}20$
15	2,09	11	0,94	0,26
31	2,42	22	0,94	0,33
68	0,69	44	0,66	0,23
127	2,88	88	0,66	0,25

Если, кроме того, желательно показать на грф-е доверительные пределы, то сначала нужно норв-ть данные. Это делается с использованием в кач-е аппроксимации σ зн-ие U_α по n нбл-ям (эф-ам), к-ое ближе всего к вел-е $(0{,}683n + 0{,}5)$. Зн-ия d приведены в табл. 20 для различных $n = 2^k - 1$. Для опр-ия положения ср-ей линии используются пст-ые из табл. 20. Положения этих линий опр-ся так: центральная линия проходит через точки (0, 0) и (τ, n); границы интервала значимости проходят через точку $(\tau + d, n)$ и точку пересечения центральной и горизонтальной линий с ординатой, равной рангу U_α, т.е. через точку [1, ранг (U_α)], как на рис. 2.

Для иллюстрации метода приводится сд. задача.

Ср. эф-ы в з14 (записанные в сл. (7) табл. 16) ранжированы в порядке взр-ия абс-ой вел-ы, как показано в табл. 20а. Эти данные представлены графически (грфч.) на рис. 1, где на оси ординат отложены порядковые номера (или ранг), а по оси абсцисс – зн-ия эф-ов. Заметим, что эф-ы E, A, D и ADE

проявляются дт-но сильно, как в табл. 17. Это свидетельствует о том, что эти эф-ы выше, чем можно ожидать по четырем нб-им зн-ям, взятым из 31 взаимно незв-ой слн. вел-ы, с полунорм. рсп-ем. О пределах значимости можно судить по фактическим зн-ям оценок отдельных эф-ов (или их кв-ов). Построить ее грф-к рсп-ия.

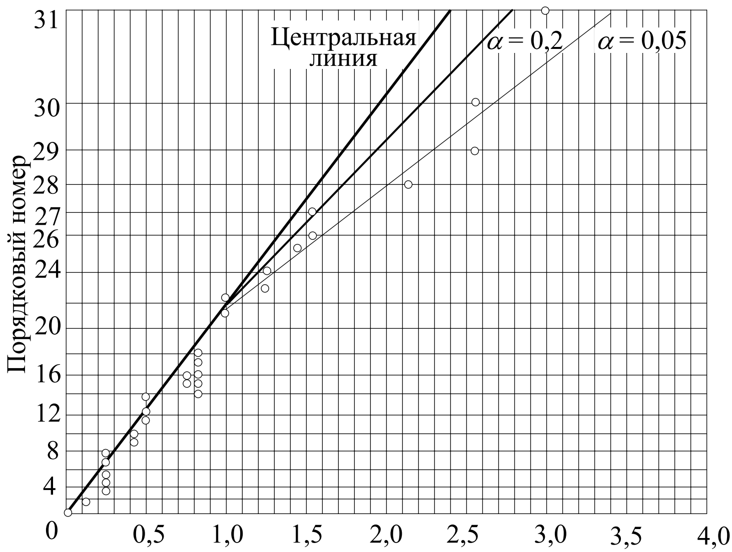


Рис. 2

Таблица 20а

Ранг	Средний эффект	$\frac{\lvert\text{Средний эффект}\rvert}{\lvert U_{22}\rvert}$	Ранг	Средний эффект	$\frac{\lvert\text{Средний эффект}\rvert}{\lvert U_{22}\rvert}$
1	0	0	16	0,625	0,714
2	0,125	0,143	17	0,625	0,714
3	0,250	0,286	18	0,625	0,714
4	0,250	0,286	19	0,750	0,875
5	0,250	0,286	20	0,750	0,875
6	0,250	0,286	21	0,875	1,000
7	0,250	0,286	22	0,875	1,000
8	0,250	0,286	23	1,125	1,286
9	0,375	0,429	24	1,125	1,286
10	0,375	0,429	25	1,250	1,429
11	0,500	0,571	26	1,375	1,571
12	0,500	0,571	27	1,375	1,751
13	0,500	0,571	28	1,875	2,143
14	0,625	0,714	29	2,250	2,571
15	0,625	0,714	30	2,250	2,571
			31	2,625	3,000

Р. Чтобы построить грф. норв-го норм. рсп-ия при $n = 31$, разделим сначала каждое зн. на оценку σ, т.е. $U_\alpha = U_{22} = 0{,}875$. Грф-к норв-ых нбл-й представлен на рис. 2. Построены линии для пределов значимости $\alpha = 0{,}2$ и $\alpha = 0{,}05$, а также центральная линия. Эти линии проходят через сд-ие точки:

Центральная линия	(0; 0)	и	(2,42; 31)
$\alpha = 0{,}2$	(1; 22)	и	(2,75; 31)
$\alpha = 0{,}05$	(1; 22)	и	(3,36; 31)

Заметим, что на грф-е два нб-их зн-ия не выходят за пределы линии для $\alpha = 0{,}05$, а сд-ие два нб-их зн-ия выходят за ее пределы. Однако отсюда нельзя делать вывод, что первые два нбл-ия не яв-ся значимыми.

17. При плн-и эксп-а часть приходится пользоваться понятием смешивания эф-ов. Допустим, н-р, что сущ-ет два метода (1 и 2) опр-ия отражательной способности окрашенных кр-ых пластин. Нас интересуют два различных состава краски (A и B). Если эксп-т спланирован т.о., что A анализируется методом 1, а состав B – методом 2, то любое нблм. Различие может быть вызвано либо составом краски, либо методом, либо тем и др-им. Различия в составе краски и методе иссл-ия смешиваются. Какой именно фкт-р вызывает то или иное нблм. различие, установить невозможно.

Фкт. может смешиваться с блоками. Если эксп-т спланирован, как показано на рис. 3, а, то фкт. C смешивается блоками. Эф-т фкт-а C имеет вид

$$C: [c - (1)] + (ac - a) + (bc - b) + (abc - ab),$$

к-ый равен разности сумм для блока (бл.) 1 и бл. 2. На рис. 3, б фкт. AB смешивается с бл-ми. Эф-т взаимодействия AB имеет вид

$$AB: (a - 1)(b - 1)(c + 1) = abc + ab + c + (1) - a - b - ac - bc;$$

он также равен разности сумм для бл-ов. На рис. 3*в* взаимодействие ABC смешивается с бл-ми.

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Блок 1} & \text{Блок 2} & \text{Блок 3} & \text{Блок 4} & \text{Блок 5} & \text{Блок 6} \\
\begin{bmatrix} (1) \\ a \\ b \\ ab \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \cdot c \\ ac \\ bc \\ abc \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} (1) \\ ab \\ c \\ abc \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} a \\ b \\ ac \\ bc \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} (1) \\ ab \\ ac \\ bc \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ abc \end{bmatrix}
\end{array}$$

а *б* *в*

Рис. 3

Блок, содержащий комбинации условий (1), наз. основным. Из него может быть получен др. блок. Блоки составляются по правилу: все комбинации условий, входящие в основной блок, содержит четное или нулевое число букв, общих со смешиваемым взаимодействием. Так, на рис. 3, в комбинации условий (1) не имеет общих букв с взаимодействием ABC; ab и ABC имеют две общие буквы, так же как ac и bc. Больше таких комбинаций условий нет. Т.о., основной блок содержит сд-ие комбинации условий: (1), ab, ac и bc. Для построения др-го блока берем комбинацию условий, не входящую в основной блок, н-р, a, к-ая находится в бл. 2. Все остальные комбинации условий можно получить умн-ем по модулю 2: $a \times (1) = a$, $a \times ab = a^2b = b$, $a \times ac = a^2c = c$, $a \times bc = abc$. Теперь сформулируем задачу.

Проверяются тактико-технические хркс-ки нового нарезного артиллерийского орудия. Разработка достигла такого этапа, когда конструкция орудия уже известна. Однако еще иссл-ся нек-ые ее хркс-ки: вес порохового заряда A (в фунтах), вес снаряда B (в фунтах) и размер пороховых трубок (C), к-ый опр-ет геом. форму заряда, D – орудие.

Два орудия выбраны слн. образом для проверки сущв-ия заметной дсп-и вследствие различий в хркс-ах орудий. Иссл-ть скорость снаряда. За один день можно провести только 8 исп-й. Каждый день рас-им как блок. Т.о., имеем эксп-т типа 2^4 с двумя блоками по 2^3 комбинации условий в каждом блоке.

Чтобы внешние фкт. не вносили систематической ошибки в результаты, для каждого дня плн-лся сбалансированный порядок стрельбы, представленный в табл. 21, где числа показывают очередность (подчеркнутые числа обз-ют исп-ия, проведенные во второй день).

Таблица 21

Вес заряда		A_0		A_1	
Вес снаряда		B_0	B_1	B_0	B_1
Размер пороховой трубки	Орудие				
C_0	D_0	1	$\underline{9}$	$\underline{10}$	2
	D_1	$\underline{13}$	5	6	$\underline{14}$
C_1	D_0	$\underline{11}$	3	4	$\underline{12}$
	D_1	7	$\underline{15}$	$\underline{16}$	8

Произвольно принимается решение о смешивании взаимодействия высокого порядка, а именно $ABCD$, с эф-ом дня. На рис. 4 показаны два блока. Вместо порядка стрельбы, представленного в табл. 21, можно выбрать слн-ю посл-ть для каждого дня. Выбор данного порядка был сделан в попытке устранить по возможности влияние очередности стрельбы. Полученные данные приведены в табл. 22. Зн-ия скорости записаны в кодированном виде. В табл. 23 использован алгоритм Йетса для получения эф-ов различных фкт-ов и их взаимодействий.

День 1		День 2	
(1)	ad	a	d
ab	bd	b	abd
ac	cd	c	acd
bc	$abcd$	abc	bcd

Рис. 4

Таблица 22

Вес заряда		A_0		A_1	
Вес снаряда		B_0	B_1	B_0	B_1
Размер пороховой трубки	Орудие				
C_0	D_0	97	68	151	150
	D_1	75	53	145	141
C_1	D_0	39	15	100	66
	D_1	26	– 16	97	54

В сл. (6) табл. 23 записан ср-й эф-т каждого фкт-а и взаимодействия для скорости. В табл. 25 эти результаты (для основных фкт-ов) даны с 95% и 99% доверительными инр-ми. При увеличении веса порохового заряда скорость снаряда увеличивается, а при увеличении его веса и размера пороховой трубки уменьшается в инр-ле исслм-ых зн-й. В сл. (7) табл. 23 приведены суммы кв-ов для каждого фкт-а и взаимодействия. Сумма кв-ов для дней смешивается с взаимодействием $ABCD$, к-ое принимается равным нулю.

Таблица 23

Комбинации условий	(1) скорость	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(6) (5)/8	(7) $(5)^2/16$
(1)	97	248	466	686	1261	I		
a	151	218	220	575	547	*A*	68,375	18700,5625
b	68	139	414	248	– 199	*B*	– 24,875	2475,0625
ab	150	81	161	299	35	*AB*	4,375	76,5625
c	39	220	136	– 88	– 499	*C*	– 62,375	15562,5625
ac	100	194	112	– 111	– 41	*AC*	– 5,125	105,0625
bc	15	123	158	18	– 87	*BC*	– 10,875	473,0625
abc	66	38	141	17	– 57	*ABC*	– 7,125	203,0625+
d	75	54	– 30	– 246	– 111	*D*	– 13,875	770,0628
ad	145	82	– 58	– 253	51	*AD*	6,375	162,5625
bd	53	61	– 26	– 24	– 23	*BD*	– 2,875	33,0625
abd	141	51	– 85	– 17	– 1	*ABD*	– 0,125	0,0625+
cd	26	70	28	– 28	– 7	*CD*	– 0,875	3,0625
acd	97	88	– 10	– 59	+ 7	*ACD*	0,875	3,0625+
bcd	– 16	71	18	– 38	– 31	*BCD*	– 3,875	60,0625+
abcd	54	70	– 1	– 19	+ 19	*Days*	2,375	(22,5625)
Сумма	1261							

Результаты дспн-го анализа даны в табл. 24. Эф-ты веса заряда *A*, размеры пороховой трубы *C*, веса порохового заряда *B*, а также эф-т орудия *O* яв-ся высоко значимыми. Только одно взаимодействие (*BC*) яв-ся значимым. Кроме того, если можно принять, что взаимодействия трех фкт-ов (обз-ные крестиками в табл. 23) равны нулю и их сумма кв-ов фактически яв-ся остаточной суммой кв-ов, то можно применять формальный критерий (кт.). Тогда оценка остаточной дсп-и равна 66,56 с четырьмя ст. свободы, а ср. кв. отк-ие составляет 8,16.

Таблица 24

<table>
<tr><th>Источник изменчивости</th><th colspan="2">Сумма квадратов</th><th colspan="2">Число степеней свободы</th><th>Средний квадрат</th><th>Отношение средних квадратов</th></tr>
<tr><td>Вес порохового заряда (A)</td><td colspan="2">18700,56</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>280,96***</td></tr>
<tr><td>Вес снаряда (B)</td><td colspan="2">2475,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>37,19**</td></tr>
<tr><td>Размер пороховой трубки (C)</td><td colspan="2">15562,56</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>233,81***</td></tr>
<tr><td>Орудие (D)</td><td colspan="2">770,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>11,57*</td></tr>
<tr><td>Дни (этот фактор смешивается с взаимодействием ABCD)</td><td colspan="2">22,56</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>0,34</td></tr>
<tr><td>AB</td><td colspan="2">76,56</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>1,15</td></tr>
<tr><td>AC</td><td colspan="2">105,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>1,58</td></tr>
<tr><td>AD</td><td colspan="2">162,56</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>2,44</td></tr>
<tr><td>BC</td><td colspan="2">473,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>7,11</td></tr>
<tr><td>BD</td><td colspan="2">33,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>CD</td><td colspan="2">3,06</td><td colspan="2">1</td><td></td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>ABC</td><td rowspan="4">266,24</td><td>206,06</td><td>1</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">66,56</td><td></td></tr>
<tr><td>ABD</td><td>0,06</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>ACD</td><td>3,06</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>BCD</td><td>60,06</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td colspan="2">38650,40[1)]</td><td colspan="2">15</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Крт-ие зн-ия $F(1; 4; 0{,}95) = 7{,}71$ и $F(1; 4; 0{,}99) = 21{,}20$ (см. T_9 и T_{15})

Ожидаемое влияние изменения уровня фкт-а (переход от верхнего уровня к нижнему) и доверительные инр-лы в табл. 25 даны с ошибкой округления, т.к. $\sigma^2 = 66{,}56$ вводится с точностью только до двух десятич. знаков.

Таблица 25

	Средний эффект	95%-ные доверительные пределы		99%-ные доверительные пределы	
Вес заряда	68,375	57,05	79,70	49,59	87,16
Вес снаряда	– 24,875	– 36,220	– 13,55	– 43,66	– 6,19
Размер пороховой трубки	– 62,375	– 73,70	– 51,05	– 81,16	– 43,59

Как уже было отмечено, фкт-ы A, B и C яв-ся высоко значимыми, а фкт. D значим при 5%-ном уровне. Взаимодействие BC значимо на уровне более 5%, поэтому его нельзя полностью игнорировать.

Рас-им эф-т фкт-а D. Если орудия выбраны слн. образом и незв-мо друг от друга, то измеряется дсп-ия между орудиями. Для этого используют отн-ие 770,06 к 66,56. Однако основной интерес (если расв-ся изменчивость между орудиями) представляет фактическая вел. этой дсп-и σ_w^2. Несмещенная оценка для σ_w^2 равна

$$\hat{\sigma}_w^2 = (770{,}06 - 66{,}56)/8 = 87{,}94.$$

Т.е. оценка дсп-и скорости снаряда равна 154,5 (= 66,56 + 87,94). Это означает, что для каждого результата исп-й оценка ср. кв. отк-ия составляет 12,43 ≈ 12,4. В табл. 25 представлены мт. ож-ия разностей между нижним и верхним уровнями фкт-ов A, B и C, а также 95% и 99% доверительные пределы этой разности. Отметим, что ср-е для уровня A_1 (или A_0) равно общему ср. плюс (или минус) половины этого ср-го эф-та фкт-а A. Сд-но,

среднее для уровня A_1 = 78,8125 + 1/2 68,375 = 113,0000;
среднее для уровня A_0 = 78,125 – 1/2 68,375 = 44,6250;
средний эффект фактора A = 68,375.

зм1. В примерах смешивания эф-ов с помощью табл. 26 (к-ая представляет собой расширенный вариант табл. 13, приведенной в з13) можно образовать два (или четыре) блока. Так, в з17 с помощью сл-ца $ABCD$ из табл. 26 можно наз-ть комбинации условий, имеющие такой же знак, что и (1) в основном блоке. Остальные комбинации условий входят в др. блок. Если три взаимодействия смешиваются с блоками, то эта операция выполняется по этапам. Табл. 26 врж-ет эф-ы основных фкт-ов и взаимодействий в фктн-ых эксп-ах типа 2^2, 2^3, 2^4 и 2^5.

зм2. Два блока эксп-та типа 2^4 можно построить с помощью обз-й 0, 1 по ур-ям

$$\begin{aligned} k_A x_1 + k_B x_2 + k_C x_3 + k_D x_4 &= 0 \bmod 2, \\ k_A x_1 + k_B x_2 + k_C x_3 + k_D x_4 &= 1 \bmod 2, \end{aligned} \tag{1}$$

где k_A, k_B, k_C и k_D равны 0 или 1 в звс-ти от того, входят ли буквы A, B, C и D ств-но в смешиваемое взаимодействие. Если смешиваемым взаимодействием яв-ся $ABCD$, то ур-ия

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \bmod 2, \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \bmod 2, \tag{2'}$$

образуют ств-но первый (основной) и второй блоки. Выбираем комбинации условий, зн-ия к-ых (0 или 1 для каждого фкт-а по порядку) при подстановке в ур-ия дают рав-во. Н-р, 1100 ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$) уд-ет ур-ю (20, 0100 ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$) уд-ет ур-ю (2′). Первая комбинация условий находится в основном блоке, а вторая не входит в него. Оба блока показаны в табл. 27. Можно провести сравнение с рис. 4. Заметим, что комбинации условий второго блока из табл. 27 можно получить путем прибавления (по mod 2) 1000 к каждой комбинации условий основного блока.

Таблица 26

Комбинации условий	2^2				2^3				2^4								2^5															
	I	*A*	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	*D*	*AD*	*BD*	*ABD*	*CD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*	*E*	*AE*	*BE*	*ABE*	*CE*	*ACE*	*BCE*	*ABCE*	*DE*	*ADE*	*BDE*	*ABDE*	*CDE*	*ACDE*	*BCDE*	*ABCDE*
(1)	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–
a	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+
b	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+
ab	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–
c	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+
ac	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–	+	+	–	–
bc	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–	+	–	+	–
abc	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+
d	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+
ad	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–
bd	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–
abd	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+
cd	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–
acd	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+
bcd	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
e	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+
ae	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–
be	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–
abe	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+
ce	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–
ace	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+
bce	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+
abce	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–
de	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–
ade	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+
bde	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+
abde	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–
cde	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
acde	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–
bcde	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
abcde	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Таблица 27

Блок 1		Блок 2	
0000	1001	1000	0001
1100	0101	0100	1101
1010	0011	0010	1011
0110	1111	1110	0111

18. Рас-им плн-ие эксп-ов типа 3^k. Три уровня каждого фкт-а обз-ся через 0, 1 и 2 (аналогично зм2 из з17). Умн-ие и сж-ие проводятся по mod 3. Комбинации условий для эксп-та 3^k представлены в табл. 28. Первая цифра показывает уровень фкт-а *A*, вторая – уровень фкт. *B*, а третья – уровень фкт. *C*.

Таблица 28

	A_0			A_1			A_2		
	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2
C_0	000	010	020	100	110	120	200	210	220
C_1	001	011	021	101	111	121	201	211	221
C_2	002	012	022	102	112	122	202	212	222

На случай анализа эксп-ов типа 3^k алгоритм Йетса обобщается: каждый фкт. расв-ся как колн-ый, опр-ся лин-ый и квч-ый эф-ы и их взаимодействия и, наконец, после перегруппировки находятся полные эф-ы и лин. контрасты. Пусть сформулирована

Задача. Рас-им эксп-т типа 3^2, в к-ом фкт. A яв-ся колн-ым, а фкт. B – качн-ым. Был составлен план эксп-а для опр-ия степени коробления медных пластин. Использовались три зн-ия температуры (темп.) (A_0, A_1, A_2): 50, 75 и 100°С. Эксп-ы проводились в трех различных лабораториях (лаб.) (B_0, B_1, B_2). Для иллюстрации рас-им только эти 9 комбинаций условий. Полученные данные представлены в табл. 29. Требуется опр-ть, имеются ли значимые различия между лаб-ми или темп-ми и сущ-ет ли лин-ый или квч-ый эф-т вследствие темп-ы.

Кодируем эти результаты, вычитая 15 из каждого зн-ия (они приведены в табл. 30).

Таблица 29

Лаборатория	Температура, °С		
	50	75	100
1	24	17	16
2	27	18	12
3	18	25	20

Таблица 30

Лаборатория	Температура, °С		
	50	75	100
1	9	2	1
2	12	3	– 3
3	3	10	5

В табл. 31 приведены результаты обработки данных из табл. 30 с использованием модифицированного алгоритма Йетса. В сл. (1) записаны комбинации условий, а в сл. (2) даны фактические нбл-ия. Комбинации вводятся посл-но, каждый уровень поочередно сочетается с каждой предыдущей комбинации уровней. Первоначально используется уровень 0. Первые три эл-а сл. (3) представляют собой сумму трех групп, содержащих по три нбл-ия, записанные в сл. (2); сд-ие три эл-а равны разностям между третьим и первым нблм-ми зн-ми в этих группах, содержащих по три нбл-ия оценки лин-ой составляющей (сост.); последние три эл-а представляют собой суммы первого и третьего нблм-х зн-й за вычетом удвоенного второго зн-ия (оценки квч-ой сост-ей). Н-р, в сл. (3) 1-м, 4-м и 7-м зн-ми яв-ся $12 = 9 + 4 – 1$, $– 8 = 1 – 9$ и $6 = 9 + 1 – 2·2$. Данные сл. (4) получены из эл-ов сл. (3), как и эл-ы сл. (3) из эл-ов сл. (2). В сл. (5) записаны обз-ия эф-ов. Чтобы получить суммы кв-ов для каждого из этих эф-ов (все они с одной ст-ю свободы), нх-мо использовать ств-й делитель. Поскольку все эти эф-ты – лин. фк-и кв-та эл-ов сл. (4), их нх-мо делить на сумму кв-ов, отс-хся к ним. Фм-а для выч-ия делителя имеет вид $2^p 2^q n$, где p – число фкт-ов в расв-ом взаимодействии; q – число фкт-ов, исслм-х во всем эксп-е, минус число лин-ых членов в этом взаимодействии, а n – число реплик. Н-р, A_L (лин-ый эф-т фкт. A) имеет делитель $2^1 \times 3^1 \times 1$, а делитель для $A_Q B_Q$ равен $2^2 \times 3^2 \times 1$. Делители можно выч-ть также сд-им образом:

(Сумма кв-ов для коэф-ов эф-а A) × (Сумма кв. для коэф. эф. B) × (Число реплик)

Если множитель 1 отсутствует, то его эф-т следует расв-ть как сумму, причем сумма кв-ов коэф-ов равна числу уровней фкт-а. Этот метод яв-ся более общим и может использоваться при любом числе фкт-ов и их уровней. Делитель табл. 31 выч-ны именно таким способом.

Таблица 31

				Эффект	Делитель	Сумма квадратов
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
00	9	12	42			
10	2	12	– 21	A_L	2×3×1	73,5
20	1	18	– 3	A_Q	6×3×1	0,5
01	12	– 8	6	B_L	3×2×1	6,0
11	3	– 15	10	A_LB_L	2×2×1	25,0
21	– 3	2	– 18	A_QB_L	6×2×1	27,0
02	3	6	6	B_Q	3×6×1	2,0
12	10	3	24	A_LB_Q	2×6×1	48,0
22	5	– 12	– 12	A_QB_Q	6×6×1	4,0

В табл. 31 сл. (7) содержит все нх-ые суммы кв-ов, если A и B – колн-ые фкт-ы. Поскольку колн-ым яв-ся только фкт. A, важное зн. имеют эф-ты, приведенные в табл. 32. Полагая, что взаимодействие между фкт-ми A и B – отсутствует, ср-й кв-т взаимодействий, равный (73,0 + 31,0)/4 = 0,26, можно использовать как остаточный ср-й кв-т с четырьмя ст-ми свободы. Ни один из эф-ов в табл. 32 не яв-ся значимым, но при увеличении числа нбл-й оказывается возможным обнаружить значимость лин-го эф-а A. Расв-я эти данные с точки зрения физического смысла, можно ожидать почти лин-ю зв-ть степени коробления от темп-ы и подобрать для этих данных ур-ие лин-ой, а не квч-ой регрессии.

Таблица 32

Результаты дисперсионного анализа кодированных данных
о степени коробления медных пластин

Источник изменчивости		Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Температура (фактор A)	Линейный эффект	73,5	1	73,5
	Квадратичный эффект	0,5	1	0,5
Лаборатория $B = (B_L + B_Q)$		8,0	2	4,0
$A_LB = A_LB_L + A_LB_Q$		73,0	2	36,5
$A_QB = A_QB_L + A_QB_Q$		31,0	2	15,5

Смешивание эф-ов в эксп. типа 3^k и их дробные реплики см. в [18].

19. Приведенные ниже данные представляют собой выход нек-го продукта в зв-сти от скорости перемешивания A (с уровнями фкт-а 200 и 400 об/мин), концентрации B (2 и 4%) и температуры C (30 и 50°С). Проверить, связаны ли реальные различия с изменениями уровней фкт-ов. Какие еще выводы можно сделать на основании этих данных? (Используйте алгоритм Йетса).

Выход продукта, %

Скорость перемешивания	200 об/мин		400 об/мин	
Концентрация	2%	4%	2%	4%
Температура				
30°С	83,9	87,2	78,4	86,3
50°С	90,1	92,6	88,7	86,2

О: Пусть нижний уровень каждого фкт-а ств-ет меньшему числовому зн-ю. После кодирования данных путем вычитания 85 получены табл. Йетса и табл. дсп-го анализа.

Таблица Йетса

(1)	– 1,1	…	13,4
a	– 6,6	…	– 14,2
b	2,2	…	11,2
ab	1,3	…	– 0,4
c	5,1	…	21,8
ac	3,7	…	– 1,4
bc	7,6	…	– 11,2
abc	1,2	…	– 9,6

Таблица дисперсионного анализа

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов (= средний квадрат)
A	1	25,2
B	1	15,7
C	1	59,4
$A \times B$	1	0,02
$A \times C$	1	0,25
$B \times C$	1	15,7
$A \times B \times C$	1	11,5

Данные показывают, что сущ-ют реальные различия, связанные с изменением темп-ы (ср. выход продукта при 30°С составляет 83,9%, а при 50°С – 89,4%). Небольшой объем эксп-а затрудняет достоверный выбор остаточной суммы кв-ов. Если используются взаимодействия ($A \times B$) и ($A \times C$) (ср-й кв-т равен 0,13 с двумя ст. свободы), то все остальные пять ср-х кв-ов яв-ся значимыми. Однако при анализе должен допускаться выбор двух нм-их ср. кв-ов.

20. Сд. данные представляют собой зн-ия внутреннего диаметра детали, измеренные как отк-ия в тысячных долях дюйма от эталонного зн-ия, равного 1,634 дюйма (41,5 мм). Фкт-ми яв-ся дни, операторы и станки. Для каждой комбинации уровней этих трех фкт-ов берутся две реплики. С помощью алгоритма Йетса опр-ть, влияют ли какие-либо фкт-ы на ср. зн-ие внутреннего диаметра.

Операторы	*A*			*B*			*C*		
Станки	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Понедельник	3	1	4	2	1	2	2	2	3
	2	3	3	0	3	3	4	3	5
Среда	4	7	8	6	5	7	4	6	3
	6	5	7	4	3	6	6	3	5
Пятница	6	3	10	10	9	4	7	8	7
	8	6	12	8	3	11	5	7	6

О:

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат	Отношение средних квадратов
Дни (D)	197,81	2	98,90	31,20***
Операторы (O)	4,92	2	2,46	0,78
Станки (M)	22,70	2	11,35	3,58*
$D \times O$	11,75	4	2,94	0,93
$D \times M$	3,97	4	0,99	0,31
$O \times M$	17,86	4	4,46	1,41
$D \times O \times M$	30,47	8	3,81	1,20
Остаток	85,50	27	3,17	
Сумма	374,98	53		

21. Выход нежелательного побочного продукта измерялся для двух различных катализаторов при двух уровнях давления. Эксп-т проводился в двух лаб-ях, в каждой из к-ых были взяты по три реплики. Полученные данные выражены в процентах. С помощью алт-ма Йетса и результатов дспн-го анализа проверить эти фкт-ы на выход побочного продукта.

Катализатор	I		II	
Лаборатория	*A*	*B*	*A*	*B*
Верхний уровень давления	53	27	40	45
	43	45	32	12
	45	57	29	69
Нижний уровень давления	42	32	61	54
	95	27	24	60
	60	98	11	26

О:

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Катализатор	1	1080,0	1080,0
Лаборатория	1	12,0	12,0
Уровень давления	1	360,4	360,4
(Катализатор) × (Лаборатория)	1	610,0	610,0
(Катализатор) × (Уровень давления)	1	234,4	234,4
(Лаборатория) × (Уровень давления)	1	3,4	3,4
(Катализатор) × (Лаборатория) × (Уровень давления)	1	92,0	92,0
Остаток	16	8812,6	550,8
Сумма	23	11205,0	

В отличие от з19 здесь имеется четко опр-ый ост-ый ср. кв-т. Ни один эф-т не яв-ся значимо большим по сравнению с остатком (хотя два эф-а явно малые). Было бы интересно сравнить дсп-и между репликами для различных комбинаций уровней фкт-ов.

22. Иссл-ся три фкт-а для опр-ия их влияния на глубину реакции: тип катализатора (*A*), концентрация катализатора (*B*) и темп-ра реакции (*C*). С помощью алт-ма Йетса оценить эф-т каждого фкт-а и взаимодействия. Для каждой комбинации условий берутся две реплики.

Концентрация	Катализатор 1		Катализатор 2	
	0,1%	0,5%	0,1%	0,5%
Температура реакции 120°C	84	85	61	67
	75	92	60	74
160°C	88	86	63	86
	82	90	59	94

О:

	1	2	3	4	Эффект		1	2	3	4	Эффект
(1)	159	280	598	1246	*I*	*c*	170	– 38	38	50	*C*
a	121	318	648	– 118	*A*	*ac*	122	– 36	64	30	*AC*
b	177	292	– 74	102	*B*	*bc*	176	– 48	2	26	*BC*
ab	141	356	– 44	54	*AB*	*abc*	180	4	52	50	*ABC*

6. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Порядок, в котором расположены элементы, имеет гораздо больше значения, чем сами элементы.

А. Пуанкаре

ЛЕКЦИЯ 17

6.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

1°. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Функция регрессии. Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость (звт.) слн-й (или детерминированной) вел-ы Y от одной X или нескольких (X_1, …, X_n) вел-н. Сначала изучим зв-ть Y от X.

Две слн. вел-ы могут быть связаны функциональной (фнц.) звт-ю, статистической (стсч.) зв-ю или быть независимыми (незв.).

Зв-ть Y от X наз. фнц-ой, если каждому значению (зн.) вел-ы X ств-ет единственное (едн.) зн-ие вел-ы Y. Отметим, что если X – детерминированная вел-а (т.е. принимающая вполне опр-ые зн-ия), то и фнц-но зв-щая от нее вел-а Y тоже яв-ся детерминированной; если же X – слн. вел-а, то и Y также слн. вел-а. Фнц-ую зв-ть Y от X наз-ют просто функцией (фк.) и обз-ют $y = f(x) \in Y, x \in X$.

На практике фнц-ая зв-ть реализуется очень редко, т.к. обе вел-ы или одна из них подвержены еще действию слн-х фкт-ов. причем среди них могут быть общие. Н-р, если Y зв-т от слн. фкт-ов z_1, z_2, v_1, v_2, а X – от слн-х фкт-ов z_1, z_2, u_1, u_2, то для них z_1, z_2 яв-ся общими фкт-ми. В этом случае возникает стсч-ая зв-ть.

Стсч-ой наз-ют зв-ть, при к-ой изменение одной из вел-н влечет изменение распределения (рсп.) другой. В частности (част.), стсч-ая зв-ть проявляется в том, что при изменении одной из вел-н изменяется среднее (ср.) зн-ие другой; в этом случае стсч-ю зв-ть наз-ют корреляционной (крцн.).

п1. Рас-им слн. вел-ы Y и X. Пусть Y – урожай зерна, X – кол. удобрений. С одинаковых по пщ-ди земли участках при равных кол-ах внесенных удобрений снимают различный урожай (т.к. действуют слн. фкт-ы: осадки, темп-ра воздуха и др.), т.е. Y не яв-ся фк-ей от X. Но, как показывает опыт, ср. урожай яв-ся фк-ей от кол-ва удобрений, т.е. Y связан с X крцн-ой звт-ю. Заметим, что крцн-ю зв-ть и линии рег-и мы уже рас-ли в 3°, 4°: 3.1.

2°. Условные средние. Линии регрессии. Основные задачи корреляции. Введем понятие условной ср-ей и уточним опр-ие крцн-ой звт-и.

Пусть изучается связь между слн. вел-ми Y и X. И пусть каждому зн-ю $x \in X$ ств-ет несколько зн-й $y = \{y_1, …, y_k\} \in Y$.

Условным ср. $\bar{y}_x$ ($\bar{y}_x = M(Y|X = x)$) наз-ют ср. ариф-ое зн-й y, ств-их зн-ю $X = x$, т.е. $\bar{y}_x = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i$. Н-р, пусть (см. п1) на каждый из трех одинаковых участков земли внесли по 2 ед. удобрений и сняли ств-но 5, 6 и 10 ед. зерна. Тогда ср-й урожай зерна равен $\bar{y}_x = \dfrac{1}{3}(5 + 6 + 10) = 7$ ед. при $X = x = 2$.

Крц-ой звт-ю Y от X наз-ют фнц-ю зв-ть условной ср. $\overline{Y}_x$ от x:

$$\overline{Y}_x = f(x). \qquad (1)$$

Ур-ие (1) наз. ур-ем регрессии (рег.) Y на X, фк-ия $f(x)$ – рег-ей Y на X, и ее график – линией рег-и Y на X.

п1а. Задана двумерная (дмр.) слн. пер-ая с плотностью вер-ти

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y \text{ при } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \text{ для всех остальных зн-й.} \end{cases}$$

Найти фк-ю рег-и слн. вел-ой Y для случая, когда X принимает зн-ие x.

Р. Для опр-ия фк-и рег-и нужно знать условную плотность вер-ти пер-ой Y при $X = x$. Имеем

$$f(Y|X = x) = \frac{f(x,y)}{\int_0^1 f(x,y)dy} = \frac{x+2y}{\int_0^1 f(x+2y)dy} = \frac{x+2y}{x+1}.$$

Тогда фк-я рег-и $M(Y|X = x) = \overline{y}_x = \int_0^1 yf(Y \mid X = x)dy = \int_0^1 y\frac{x+2y}{x+1}dy =$

$$= \frac{0{,}5x + 2/3}{x+1} = f(x).$$

Анч-но опр-ся условная ср. $\overline{x}_y$ и крцн-ая зв-ть X от Y.

Условным ср-м $\overline{x}_y$ наз-ся ср. ариф-ое зн-й X, ств-их $Y = y$.

Крцн-ой звт-ю X от Y наз-ют фнц-ю зв-ть условной ср-ей $\overline{x}_y$ от y:

$$\overline{x}_y = \varphi(y). \qquad (2)$$

Ур-ие (2) наз-ют ур-ем рег-и X на Y, фк-ия $\varphi(y)$ – рег-ей X на Y, а ее график – линией рег-и X на Y.

Первая задача теории крц-и состоит в установлении вида фк-и рег-и (линейная (лин.), квадратическая (квч.), показательная и т.д.). Если обе фк-и рег-и $f(x)$ и $\varphi(y)$ лин-ны, то крц-ю наз-ют лин-ой; в противном случае – нелинейной (нелин.).

Вторая задача – оценить тесноту (силу) крцн-ой связи. Теснота крцн-ой звт-ти оценивается по вел-не рассеяния зн-й Y вокруг условного ср. $\overline{y}_x$. Большое рассеяние свидетельствует о слабой звт-и Y от X (рис. 1), либо об отсутствии звт-и (рис. 2). При малом рассеянии Y и X связаны сильной звт-ю (рис. 3).

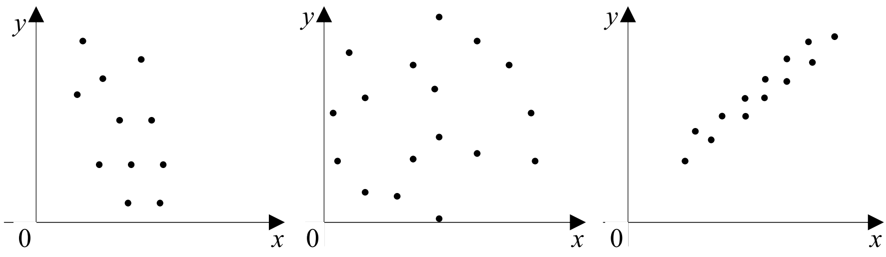


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Предпосылки крцн-го анализа: 1) пер-ые вел-ы должны быть слн-ми; 2) слн. вел-ы должны иметь совместное норм. рсп-ие.

3°. Нахождение параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии. Пусть признаки (слн. пер-ые) X и Y связаны лин-ой крцн-ой звт-ю. В этом случае обе линии рег-и будут прямыми (пм.). И пусть для отыскания вбрч-ых ур-й пм-х проведено n незв-ых исп-й и получено n пар чисел: (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Для опр-сти будем искать вбрч. ур-ие пм-й линии рег-и Y на X. Рас-им два случая.

1. Различные зн-ия x признака X и ств-щие им зн-ия y признака Y нбл-ись по одному разу, т.е. нет нх-ти их группировать. Также нет надобности использовать понятие условной ср-й, поэтому искомое ур. $\bar{y}_x = kx + b$ можно писать так:

$$Y = \rho_{yx}x + b, \tag{3}$$

где $k = \rho_{yx}$ наз. вбрч-ым коэф-ом рег-и Y на X.

Поставим задачу: подбирать параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) как можно ближе лежали к пм-й (3), т.е. чтобы сумма кв-ов отк-й была мнм-ой (метод нм-их кв-ов см. в 9.3). Для удобства временно вместо ρ_{yx} возьмем ρ.

Из $F(\rho, b) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i - y_i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\rho x_i + b - y_i\right)^2$ находим

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\rho x_i + b - y_i\right)x_i = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\rho x_i + b - y_i\right) = 0.$$

Выполнив элр-ые прб-ия, отсюда получим систему двух лин-ых ур-й отс-но ρ и b (вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$ будем писать Σ).

$$\left.\begin{aligned}&\rho\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i;\\ &\rho\Sigma x_i + b\cdot n = \Sigma y_i\end{aligned}\right\}\text{ или }\quad \left.\begin{aligned}&\rho\Sigma x^2 + b\Sigma x = \Sigma xy;\\ &\rho\Sigma x + b\cdot n = \Sigma y.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решив систему (4), найдем искомые параметры

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \rho_{xy};\\ b &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

подставив к-ые в (3), получим конкретное ур. рег-и Y на X.

п2. Найти вбрч. ур-ие пм-й линии рег-и Y на X по данным (x_i, y_i) при $n = 5$ нбл-й (табл. 1).

Р. Составим расчетные колонки в табл. 1 и по (5) находим

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 23{,}975 - 15\cdot 8{,}15}{5\cdot 57{,}5 - 15^2} = -\,0{,}038,$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{57{,}5\cdot 8{,}15 - 15\cdot 23{,}975}{62{,}5} = 1{,}744.$$

Таблица 1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$Y_i = \rho x_i + b$	$Y_i - y_i$
1	1,00	1,25	1,00	1,250	1,226	– 0,024
2	1,50	1,40	2,25	2,100	1,327	– 0,073
3	3,00	1,50	9,00	4,500	1,630	0,130
4	4,50	1,75	20,25	4,875	1,933	0,083
5	5,00	2,25	25,00	11,250	2,034	– 0,216
Σ	15,00	8,15	57,5	23,975		

Отсюда получим искомое ур-ие рег-и $Y = -0{,}038x + 1{,}744$. Чтобы проверить, насколько оно согласуется с нблм. зн-ми Y_i, находим отк-ия $Y_i - y_i$. Как видно из табл. 1, не все отк-ия дт-но малы. Это объясняется малым числом нбл-й.

2. Пусть одно и то же зн-ие x признака X нбл-ось n_x раз, одно и то же зн-ие y – n_y раз, одна и та же пара чисел (x, y) – n_{xy} раз. В этом случае данные нбл-й группируют, т.е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}, записывая их в табл-у, наз-ую корреляционной (см. табл. 2 на числовом примере).

Таблица 2

Y \ X	10	20	30	40	n_y
0,4	5	–	7	14	26
0,6	–	2	6	4	12
0,8	3	19	–	–	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

В первой строке (ср.) табл. 2 указаны нблм. зн-ия $x = (10, 20, 30, 40)$, а в первом столбце (сл.) $y = (0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8)$. На пересечении ср-к и сл-ов вписаны частоты n_{xy}, н-р, пара чисел $(0{,}4;\ 10)$ нбл-ась 5 раз, а $(0{,}4;\ 20)$ ни разу. Причем $\Sigma n_x = \Sigma n_y = 60$.

Здесь мы должны использовать систему (4) так, чтобы она отражала данные крц-ой табл-ы. Для этого рас-им тождества

$$\Sigma x = n\,\bar{x}\text{, полученное из } \bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x;$$

$$\Sigma y = n\,\bar{y} \text{ из } \bar{y} = \frac{1}{n}\Sigma y;$$

$$\Sigma x^2 = n\,\overline{x^2} \text{ из } \overline{x^2} = \frac{1}{n}\Sigma x^2;$$

$$\Sigma xy = \Sigma n_{xy}xy \text{ (учтено, что пара } (x, y) \text{ нбл-ась } n_{xy} \text{ раз).}$$

Подставив их в (4) и сократив обе части второго ур-ия на n, получим

$$\left.\begin{aligned} &\left(n\overline{x^2}\right)\rho_{yx} + \left(n\bar{x}\right)b = \Sigma n_{xy}xy, \\ &\bar{x}\,\rho_{yx} + b = \bar{y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решив систему (6), найдем параметры ρ_{yx}, b и искомое ур-ие

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b. \tag{7}$$

Однако более целесообразно написать ур-ие рег-и в ином виде: из второго ур-ия стн-ия (6) находим

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}, \tag{8}$$

подставляем в (7), получим

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}). \tag{9}$$

С другой стороны, подставив (8) в первое ур-ие (6) и учитывая, что $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sigma_x^2$ (см. 5°: 2.2), получим

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n\sigma_x^2}$$ или, умн-ив на σ_x / σ_y, имеем

$$\rho_{yx}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}. \tag{10}$$

Правая часть стн-ия (10) наз. выборочным (вбрч.) коэф-ом крц-и и обз-ся

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}. \tag{11}$$

Теперь стн. (10) можно писать в виде

$$\rho_{yx} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_B. \tag{12}$$

Из (9) найдем ρ_{yx} и, подставив в (11), получим

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_B(x - \bar{x}). \tag{13}$$

Анч-но найдем вбрч-ое ур. пм-й линии рег-и X на Y вида

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}), \tag{14}$$

где $r_B\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}$.

зм1. Ур-ия пм-х рег-и могут быть написаны в более симметричной форме:

$$\frac{\bar{y}_x - \bar{y}}{\sigma_y} = r_B\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}, \tag{13'}$$

$$\frac{\bar{x}_y - \bar{x}}{\sigma_x} = r_B\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}. \tag{14'}$$

4°. Свойства и вычисление выборочного коэффициента корреляции. Вбрч-ый коэф. крц-и, опрм-ый рав-ом (11), имеет самостоятельное зн-ие. Приведем его св-ва, из к-ых следует, что он служит для оценки тесноты лин-ой крцн. звт-и. Напомним (см. 3°: 3.1), что особую роль играет мт. ож-ие пзв-ия центрированных (црв.) слн-ых вел-н, к-ое обз-ся

$$K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \tag{15}$$

Хркс-ка K_{xy} наз. крцн-ым моментом (или моментом связи) слн. вел-н X, Y, к-ая для дискретных (дк.) вел-н выражается (врж.) фм-ой

$$K_{xy} = \Sigma\Sigma(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}, \tag{16}$$

а для непр-ых – фм-ой

$$K_{xy} = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy . \tag{17}$$

Если слн. вел-ы X, Y незв-мы, то $K_{xy} = 0$. Дсв-но, тогда имеем $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ и по (17) получим $K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x) f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y) f_2(y)dy = M\left[\overset{\circ}{X}\right] \times M\left[\overset{\circ}{Y}\right] = 0$, ибо $M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M[(X - m_x)] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0$. Сд-но, для незв-ых слн. вел-н $K_{xy} = 0$.

Т.о., если крцн. момент двух слн. вел-н отличен от нуля, то это есть признак наличия звт-и между ними.

Из фм-ы (15) видно, что крцн-ый момент хркз-ет не только зв-ть вел-н, но и их рассеяние. Дсв-но, если, н-р, одна из вел-н (X, Y) весьма мало отк-ся от своего мт-го ож-я (почти не сл-на), то крцн-ый момент будет мал, какой бы тесной звт-ю ни были связаны вел-ы (X, Y). Поэтому для хркс-ки связи между вел-ми (X, Y) переходят к безразмерной хркс-ке

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = r_B, \tag{18}$$

где σ_x, σ_y – ср. кв-ие отк-ия вел-н X, Y. Хркс-ка r_{xy} наз. коэф-ом крц-и вел-н X, Y. Из $K_{xy} = 0$ следует $r_{xy} = 0$, сд-но, для незв-ых слн. вел-н X, Y и $r_{xy} = 0$.

Слн. вел-ы, для к-ых $K_{xy} = 0$ (сд-но, и $r_{xy} = 0$), наз. некоррелированными (некрв.). Выясним, следует ли из некрв-сти незв-ть слн. вел-н. Оказывается, нет. Приведем пример таких слн. вел-н, к-ые яв-ся некрв-ми, но зв-ми.

п3. Рас-им систему слн. вел-н (X, Y), рсп-ную с равномерной плотностью внутри круга C радиуса r с центром в начале крд. (рис. 1).

Плотность рсп-ия врж-ся фм-ой

$$f(x, y) = \begin{cases} C \text{ при } x^2 + y^2 \le r^2; \\ 0 \text{ при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Из условия $\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = \iint_{(C)} Cdxdy = 1$ находим $C = 1/\pi r^2$.

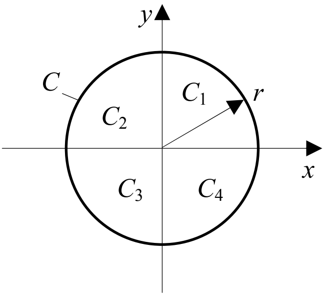


Рис. 1

Нетрудно убедиться, что в данном примере вел-ы яв-ся зв-ми. Дсв-но, если $X = 0$, то Y может с равной вер-ю принимать все зн-ия от $-r$ до $+r$, если $X = r$, то $Y = 0$, т.е. зн-ия Y зависят от зн-ий X.

Посмотрим, яв-ся ли эти вел-ы крв-ми. Выч-им крцн-ый момент. С учетом симметрии секторов C_1, C_2, C_3, C_4 круга (рис. 1) имеем $m_x = m_y = 0$, а в секторах C_1 и C_3 подынтегральная функция $z = xy$ плж-на, в секторах C_2 и C_4 – отц-на. Тогда получим

$$K_{xy} = \iint_{(C)} xyf(x, y)dxdy = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{(C)} xydxdy = 0,$$

вел-ы (X, Y) не крв-ы, т.е. из некрв-ти слн. вел-н не всегда следует их незв-ть.

Коэф. крц-и r_{xy} хркз-ет только лин-ю зв-ть и обладает сд. св-ми.

с1. Если слн. вел-ы X и Y связаны лин-ой фнц-ой зв-ю $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \pm 1$, смотря по знаку коэф-та a.

Д. Имеем $K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)] = aM[(X - m_x)^2] = aD_x$; для опр-ия σ_y найдем $D_y = D[aX + b] = a^2D_x$, откуда $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Подставляя в фм-у (18), получим $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \dfrac{aD_x}{|a|\sigma_x^2} = \dfrac{a}{|a|} = \pm 1$.

Верно и обратное утв-ие: если $|r_{xy}| = 1$, то нблм-ые зн-ия признаков X и Y связаны лин. фнц-ой звт-ю, т.е. $Y = aX + b$.

С взр-ем $|r_{xy}| = 1$ лин. крцн-ая зв-ть становится более тесной и при $|r_{xy}| = 1$ переходит в фнц-ю зв-ть.

с2. Для любых слн. вел-н $|r_{xy}| \le 1$.

Д. Рас-им слн. вел-у $Z = \sigma_x X \pm \sigma_y Y$ (σ_x, σ_y – ср. кв-ие отк-ия X, Y). Находим $D_z = \sigma_y^2 D_x + \sigma_x^2 D_y \pm 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 \pm 2\sigma_x\sigma_y K_{xy}$. Т.к. дсп-я любой слн. вел-ы не может быть отц-на, то $2\sigma_x^2\sigma_y^2 \pm 2\sigma_x\sigma_y K_{xy} \ge 0$ или $\sigma_x\sigma_y \pm K_{xy} \ge 0$, откуда $|K_{xy}| \le \sigma_x\sigma_y$, а сд-но $|r_{xy}| \le 1$.

с3. Если вбрч-ый коэф. крц-и равен нулю и вбрч-ые линии рег-и – прямые (пм.), то X и Y не связаны лин. крцн-ой звт-ю.

Д. При $r_{xy} = 0$ по (13) ур-ие вбрч-ой пм. рег-и Y на X имеет вид $\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy}(x - \bar{x})$, откуда $\bar{y}_x - \bar{y} = 0$ или $\bar{y}_x = \bar{y}$. Аналогично по (14) получим $\bar{x}_y = \bar{x}$. Т.о. при $r_{xy} = 0$ условные ср. сохраняют пст. зн-ие при изменении ств-их аргументов, т.е. X и Y не связаны лин. крцн-ой звт-ю. Очевидно, в расв-ом случае пм-е рег-и прл-ны ств-им крд-ым осям.

зм1. Если $r_{xy} = 0$, то признаки X и Y могут быть связаны нелин-ой крцн-ой или даже фнц-ой звт-ю (см. п3).

Из с1-с3 вытекает смысл r_B: вбрч-ый коэф. крц-и хркз-ет тесноту лин-ой связи между колн-ми признаками в вбр-е; чем ближе $|r_B|$ к 1, тем связь сильнее; чем ближе $|r_B|$ к 0, тем связь слабее.

Если вбр-а имеет дт-но большой объем и хорошо представляет гнр-ю свк-ть (репрезентативна), то заключение о тесноте лин-ой зв-ти между признаками, полученное по данным вбр-и, в известной степени может быть распространено и на гнр-ю свк-ть. Н-р, для оценки коэф-та крц-и r_2 норм-но рсп-ой гнр-ой свк-ти (при $n \ge 50$) можно пользоваться фм-ой

$$r_B - 3\frac{1 - r_в^2}{\sqrt{n}} \le r_B + 3\frac{1 + r_в^2}{\sqrt{n}}. \qquad (19)$$

зм2. Знак вбрч-го коэф. крц-и совпадает со знаком вбрч-ых коэв-ов рег-и, что следует (см. стн. (12), (14)) из фм-л:

$$\rho_{yx} = r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x},\ \rho_{xy} = r_B\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \qquad (20)$$

зм3. Вбрч-ый коэф. крц-и равен ср. геом-му вбрч-ых коэф-ов рег-и, т.е.

$$r_B = \pm\sqrt{\rho_{xy}\cdot\rho_{yx}}\ . \qquad (21)$$

Стн. (21) следует из (20).

Теперь вернемся к вбрч. ур-ю (13) прямой рег-и Y на X

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \qquad (22)$$

а вбрч-ое ур-ие пм. линии рег-и X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_B\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}), \qquad (23)$$

причем по (11) имеем

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Если данные нбл-й над признаками X и Y заданы в виде крцн-ой табл-ы с равноотстоящими вариантами (врт.), то целесообразно перейти к условным врт-м

$$u_i = \frac{x - c_1}{h_1},\ v_j = \frac{y - c_2}{h_2}\ (x = x_i,\ y = y_j),$$

где c_1 – «ложный нуль» врт. X (новое начало отсчета), в кач-е к-го принимается врт., расположенный в середине вариационного (врцн.) ряда, т.е. имеющий нб-ю частоту; h_1 – шаг, т.е. разность между двумя соседними врт-ми X; c_2 – «ложный нуль» врт. Y; h_2 – шаг врт. Y.

В этом случае вбрч-ый коэф. крц-и имеет вид

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

причем слагаемое $\Sigma n_{uv}uv$ удобно вычислять, используя расчетную табл. 5.

Вел-ы $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v могут быть найдены либо методом пзв-й (при большом числе данных), либо непосредственно по фм-ам:

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\Sigma n_u u,\ \overline{v} = \frac{1}{n}\Sigma n_v v,\ \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \overline{u}^2}\ ,\ \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \overline{v}^2}\ .$$

Зная эти вел-ы, можно опр-ть входящие в ур-ия (22), (23) вел-ы по фм-ам:

$$\overline{x} = \overline{u}\,h_1 + c_1,\ \overline{y} = \overline{v}\,h_2 + c_2,\ \sigma_x = \sigma_u h_1,\ \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Для оценки силы лин. крцн-ой связи служит вбрч-ый коэф. крц-и r_B; чем ближе $|r_B|$ к ед-е, тем связь сильнее; чем ближе $|r_B|$ к нулю, тем связь слабее.

п4. Найти вбрч. ур-ие пм-й линии рег-и Y на X по данным, приведенным в крцн-ой табл. 3.

Р. Составим крцн-ю табл. 4 при $h_1 = 5$, $h_2 = 10$ в условных врт-ах, выбрав в кач-е ложных нулей $c_1 = 30$, $c_2 = 36$, к-ые расположены в середине ств-го варц. ряда. Найдем $\overline{u} = \frac{1}{n}\Sigma n_u u = \frac{1}{100}[4\cdot(-2) + 14\cdot(-1) + 46\cdot 0 + 16\cdot 1 + 20\cdot 2] =$ $= 0{,}34$; $\overline{v} = \frac{1}{n}\Sigma n_v v = \frac{1}{100}[10\cdot(-2) + 18\cdot(-1) + 44\cdot 0 + 22\cdot 1 + 6\cdot 2] = -0{,}04$.

Таблица 3

y \ x	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	–	–	–	10
26	–	8	10	–	–	18
36	–	–	$\boxed{32}$	3	9	44
46	–	–	4	12	6	22
56	–	–	–	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Таблица 4

v \ u	– 2	– 1	0	1	2	n_v
– 2	4	6	–	–	–	10
– 1	–	8	10	–	–	18
0	–	–	32	3	9	44
1	–	–	4	12	6	22
2	–	–	–	1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	$n = 100$

Выч-им $\overline{u^2} = \dfrac{1}{n}\Sigma n_u u^2 = \dfrac{1}{100}[4\cdot 4 + 14\cdot 1 + 16\cdot 1 + 20\cdot 4] = 1{,}26$; $\overline{v^2} = \dfrac{1}{n}\Sigma n_v v^2 =$ $= \dfrac{1}{100}[10\cdot 4 + 18\cdot 1 + 22\cdot 1 + 6\cdot 4] = 1{,}04$.

Найдем $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = \sqrt{1{,}26 - 0{,}34^2} = 1{,}07$; $\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \bar{v}^2} = \sqrt{1{,}04 - 0{,}04^2} =$ $= 1{,}02$.

Найдем $\Sigma n_{uv}uv$, для чего составим расчетную табл. 5.

Таблица 5

v \ u	– 2	– 1	0	1	2	$U = \Sigma n_{uv}\cdot u$	$v\cdot U$
–2	– 8 – 8 4	– 6 – 12 6				– 14	28
– 1	–	– 8 – 8 8	0 – 10 10			– 8	8
0	–	–	0 0 32	3	18	21	0
1	–	–	0 4 4	12 12 12	12 6 6	24	24
2	–	–	–	1 2 1	10 10 5	11	22
$V = \Sigma n_{uv}\cdot v$	– 8	– 20	– 6	14	16		$\Sigma v\cdot U = 82$
$u\cdot V$	16	20	0	14	32	$\Sigma u\cdot V = 82$	↑ ← Контроль

Суммируя числа последнего сл-а табл. 5, находим $\Sigma v\cdot U = \Sigma n_{uv}\cdot uv = 82$.

Для контроля (кр.) выч-й находим сумму чисел последней строки $\Sigma u\cdot V =$ $= \Sigma n_{uv}\cdot uv = 82$. Совпадение сумм свидетельствует о правильности выч-й.

Приведем пояснения к составлению табл. 5.

Пзв-ие частоты n_{uv} на врт-у u, т.е. $n_{uv}u$, записывают в правом верхнем углу клетки, содержащей зн-ие частоты. Н-р, для первой строки имеем $4(-2) =$ $= -8$; $6(-1) = -6$. Эти числа складывают и сумму помещают в клетку этой же строки «сл-а U», н-р, $U = -8 + (-6) = -14$, к-ую умн-ют на v и записывают в эту же строку «сл-а $v\cdot U$»: $vU = (-2)(-14) = 28$. Так делают для всех строк. Сложив все числа «сл-а vU», получают сумму ΣvU, к-ая равна сумме $\Sigma n_{uv}uv$, т.е. $\Sigma vU = \Sigma n_{uv}uv = 82$.

Для кр-ля анч-ые выч-ия производят по сл-ам: пзв-ия $n_{uv}\cdot v$ записывают в левый нижний угол слетки, содержащей зн-ие частоты; все числа, помещенные в левых нижних углах одного сл-а, складывают и их сумму помещают в «строку V»; наконец, умн-ют каждую врт-у на V и результат записывают в клетках последней строки. Сложив все числа последней строки, делаем проверку: $\Sigma uV = \Sigma n_{uv}uv = 82$.

Теперь можем найти искомый вбрч-ый коэф. крц-и:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02} = 0{,}76.$$

Найдем $\bar{x}$ и $\bar{y}$, учитывая, что $h_1 = 25 - 20 = 5$, $h_2 = 26 - 16 = 10$ и $c_1 = 30$, $c_2 = 36$: $\bar{x} = \bar{u}\,h_1 + c_1 = 0{,}34\cdot 5 + 30 = 31{,}70$; $\bar{y} = \bar{v}\,h_2 + c_2 = (-0{,}04)\cdot 10 + 36 = 35{,}60$. Найдем $\sigma_x = h_1\sigma_u = 5\cdot 1{,}07 = 5{,}35$; $\sigma_y = h_2\sigma_v = 10\cdot 1{,}02 = 10{,}2$.

Подставив найденные вел-ы в стн. (22), получим искомое ур-ие пм-й линии рег-и Y на X: $\bar{y}_x - 35{,}60 = 0{,}76\dfrac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}70)$ или $\bar{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36$.

Анч-но из стн. (23) найдем искомое ур-ие пм. линии рег-и X на Y: $\bar{x}_y - 31{,}70 = 0{,}70\dfrac{5{,}35}{10{,}2}(y - 35{,}60)$ или $\bar{x}_y = 0{,}399y + 17{,}5$.

5°. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. На практике коэф. крц-и ρ_{xy} обычно неизвестен. По результатам вбр-и может быть найдена его точечная оценка – вбрч-ый коэф. крц-и r_B. Рав-во нулю вбрч-го коэф-та крц-и еще не свидетельствует о рав-ве нулю самого коэф. крц-и, а сд-но, о некрв-сти слн-х вел-н X и Y. Чтобы выяснить, находятся ли слн. вел-ны в крцн-ой звт-и, нужно проверить значимость вбрч-го коэф-та крц-и, т.е. установить, дт-на ли его вел-а для обоснованного вывода о наличии крцн-ой связи.

Пусть двумерная (дмр.) гнр. свк-ть (X, Y) рсп-на норм-но. Из этой свк-ти извлечена вбр-а объема n и по ней найден вбрч-ый коэф. крц-и $r_B \neq 0$. Требуется проверить нулевую гп-у H_0: $r_Г = 0$ о рав-ве нулю гнр-го коэф-а крц-и.

Если нулевая гп. принимается, то это означает, что X и Y – некрв-ны; в противоположном случае – крв-ны.

Для того, чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гп-у о рав-ве нулю гнр-го коэф-а крц-и норм. дмр-ой слн. вел-ы при конкурирующей гп-е H_1: $r_Г \neq 0$, надо выч-ть нблм. зн-ие критерия (кт.)

$$T_{нбл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

и по табл. T_{14} критических (крт.) точек рсп-ия Стъюдента по заданному уровню значимости α и числу ст-и свободы $k = n - 2$ найти крт. точку $t_{крт}(\alpha, k)$ двусторонней (двс.) крт-ой обл-ти.

Если $|T_{нбл}| > t_{крт}$ – нулевую гп-у отвергают.

Если $|T_{нбл}| < t_{крт}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гп-у.

п5. По вбр-е объема $n = 100$, извлеченной из дмр-ой норм. свк-ти (X, Y), найден вбрч-ый коэф. крц-и $r_B = 0{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве нулю гнр-го коэф-а крц-и при конкурирующей гп-е H_1: $r_Г \neq 0$.

Р. Находим нблм-ое (эмп-ое) зн-ие кт-ия

$$T_{нбл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}} = \frac{0{,}2\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0{,}2^2}} = 2{,}02.$$

По условию конкурирующая гп. имеет вид $r_Г \neq 0$, поэтому крт-ая обл. – двс-ая. По табл. T_{14} находим крт. точку $t_{крт}(\alpha, k) = t_{крт}(0{,}05; 98) = 1{,}665$.

Т.к. $T_{нбл} > T_{крт}$, отвергаем нулевую гп-у о рав-ве нулю гнр-го коэф-а крц-и, т.е. коэф-т крц-и значимо отличается от нуля, сд-но, X и Y крвн-ы.

6°. Криволинейная корреляция. Корреляционное отношение. Если график (грф.) рег-и изб-ся кривой линией, то крц-ю наз-ют криволинейной. Н-р, в случае параболической крц-и второго порядка вбрч. ур-ие рег-и Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c. \qquad (24)$$

Используя инп-ю по способу нм-их кв-ов (см. 9.3) неизвестные параметры a, b и c находим из системы ур-й:

$$\left.\begin{aligned} &a\Sigma x_i^4 + b\Sigma x_i^3 + c\Sigma x_i^2 = \Sigma x_i^2 y_i, \\ &a\Sigma x_i^3 + b\Sigma x_i^2 + c\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i, \\ &a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i + cn = \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Анч-но находят вбрч. ур-ие рег-и X на Y

$$\overline{x}_y = a_1y_2 + b_1y + c_1. \qquad (26)$$

Для оценки силы крц-и Y на X служит вбрч. крцн. отн-ие

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{межгр}}{\sigma_{общ}} \text{ или (в др. обз-ях) } \eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}. \qquad (27)$$

Здесь $\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D_{межгр}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum n_x\left(\overline{y}_x - \overline{y}\right)^2\right]}$, $\sigma_y = \sqrt{D_{общ}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum n_y\left(y - \overline{y}\right)^2\right]}$, где n – объем вбр-и (сумма частот), n_x – частота зн-я x признака X, n_y – частота зн-я y признака Y, $\overline{y}_x$ – условная ср. признака Y, $\overline{y}$ – общая ср. признака Y.

Анч-но опр-ся вбрч. крцн-ое отн-ие X на Y

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x}. \qquad (27')$$

п6. Найти вбрч. ур-ие рег-и $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ по данным, приведенным в крцн-ой табл. 6. Оценить силу крцн-ой связи по вбрч-му крцн. стн-ю, приведенному в табл. 6.

Таблица 6

Y \ X	2	3	5	n_y
25	20	–	–	20
45	–	30	1	31
110	–	1	48	49
n_x	20	31	49	$n = 100$

Р. Составим расчетную табл. 7.

Таблица 7

x	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$	$n_x \overline{y}_x x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	4380	4380	13141
5	49	108,67	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
Σ	100		378	1584	7122	33456	10205	32004	148262

Подставив числа из последней строки табл. 7 в (25), получим систему ур-й отс-но неизвестных коэф-ов a, b и c:

$$\left.\begin{array}{l} 33456a + 7122b + 1584c = 148262, \\ 7122a + 1584b + 378c = 32004, \\ 1584a + 378b + 100c = 7285. \end{array}\right\}$$

Решив эту систему (н-р, методом Гаусса), найдем: $a = 2{,}94$; $b = 7{,}27$; $c = -1{,}25$. Подставив найденные коэф-ы в ур-ие рег-и $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$, получим

$$\overline{y}_x = 2{,}94x^2 + 7{,}27x - 1{,}25.$$

Для выч-ия вбрч-го крцн-го отн-ия η_{xy} предварительно найдем общую ср. $\overline{y}$, общее ср. кв-ое отк-ие σ_y и межгрупповое ср. кв-ое отк-ие $\sigma_{\overline{y}_x}$:

$$\overline{y} = \frac{1}{100}(20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 100) = 72{,}85 \rightarrow (\Sigma y_i = 7285);$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_y\left(y - \overline{y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}\left[20(25 - 72{,}85)^2 + 31(45{,}0 - 72{,}85)^2 + 49(110{,}0 - 72{,}85)^2\right]} = 37{,}07;$$

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_x\left(\overline{y}_x - \overline{y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}\left[20(25 - 72{,}85)^2 + 31(47{,}1 - 72{,}85)^2 + 49(108{,}67 - 72{,}85)^2\right]} = 33{,}06.$$

Найдем искомое вбрч. крцн-ое отн-ие:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x} = \frac{33{,}06}{37{,}07} = 0{,}89.$$

ЛЕКЦИЯ 18

6.2. МНОГОМЕРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ. РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

1°. Числовые характеристики многомерных случайных величин. Закон рсп-ия системы (заданный фк-ей рсп-ия или плотностью рсп-ия) яв-ся полной, исчерпывающей характеристикой (хркс.) системы нескольких (многомерных) слн-ых вел-н. Однако очень часто такая исчерпывающая хркс-ка не может быть применена. Иногда ограниченность (огр.) эксп-го материала не дает возможность построить закон рсп-ия системы. В др. случаях иссл-ие вопроса с помощью сравнительно громоздкого аппарата законов рсп-ия не оправдывает себя в связи с невысокими требованиями к точности результата. Наконец, в ряде задач примерный тип закона рсп-ия (норм-й закон) известен заранее и требуется только найти его хркс-ки.

Во всех таких случаях вместо законов рсп-ия применяют неполное, прж-ое описание системы слн-х вел-н с помощью мнм-го кол-ва числовых хркс-к.

Мнм-ое число хркс-к, с помощью к-ых может быть охарактеризована система n слн-х вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сводится к сд-му:

1) n мт-их ож-ий $m_1, m_2, \ldots, m_n$, характеризующих (хркз.) ср. зн-ия вел-н;

2) n дсп-й $D_1, D_2, \ldots, D_n$, хркз-их их рассеивание;

3) $n(n-1)$ крцн-ых моментов $K_{ij} = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j\right]$ ($i \neq j$, где $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i$, $\overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j$), хркз-их попарную крц-ю всех вел-н, входящих в систему.

Заметим, что дсп-ия D_i каждой из слн-х вел-н X_i есть частный случай крцн-го момента той же вел-ы X_i:

$$D_i = K_{ii} = M\left[\overset{\circ}{X}{}_i^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i\right].$$

Все крцн-ые моменты и дсп-и удобно располагать в виде так наз-мой крцн-ой матрицы:

$$\begin{pmatrix} K_{11} K_{12} \ldots K_{1n} \\ K_{21} K_{22} \ldots K_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ K_{n1} K_{n2} \ldots K_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или } (K_{ij});\ i, j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что не все эл-ты крцн-ой табл-ы различны. Из опр-ия крцн-го момента ясно, что $K_{ij} = K_{ji}$, т.е. эл-ты крцн-ой матрицы, расположенные симметрично отс-но главной диагонали, равны. В связи с этим крцн-ю матрицу пишут и в виде туг-ой матрицы:

$$\begin{pmatrix} K_{11} K_{12} \ldots K_{1n} \\ \quad K_{22} \ldots K_{2n} \\ \qquad \ldots \ \ldots \\ \qquad\qquad K_{nn} \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали крцн-ой матрицы расположены дсп-и слн-х вел-н $X_1, \ldots, X_n$. В случае, когда слн. вел-ы $X_1, \ldots, X_n$ не крв-ны, все эл-ты крцн-ой матрицы, кроме диагональной, равны нулю:

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & D_3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & D_n \end{pmatrix}.$$

Такая матрица наз. диагональной.

В целях наглядности суждения именно о крв-сти слн-х вел-н безотносительно к их рассеиванию часто вместо крцн-ой матрицы (K_{ij}) пользуются нормированной (норв.) крц-ой матрицей (r_{ij}), составленных из коэф-ов крц-и $r_{ij} = K_{ij} / \sigma_i \sigma_j$, где $\sigma_i = \sqrt{D_i}$, $\sigma_j = \sqrt{D_j}$.

Все диагональные эл. этой матрицы, естественно, равны ед-е. Норв-ая крцн-ая матрица имеет вид:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2°. Особенности многомерного корреляционного анализа. Частный коэффициент корреляции. Если при изучении взаимосвязи пер-ых по двумерной (дмр.) модели (мд.) ограничивались (огр.) рас-ем парных коэф-ов крц-и, то для многомерной (ммр.) мд-и этого недт-но. Здесь многообразие связей между пер-ми находит отражение в частных и множественных (мнн.) коэф-ах крц-и.

Пусть имеется ммр-ая норм. свк-ть с m признаками $X_1, \dots, X_j, \dots, X_m$. В этом случае взаимозависимость между признаками можно описать крцн-ой матрицей, составленной из парных коэф-ов крц-и

$$(r_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & & \dots & \rho_{2m} \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho_{j1} & \rho_{j2} & \dots & \rho_{jk} & \dots & \rho_{jm} \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \dots & \rho_{mk} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где ρ_{jk} – парные коэф. крц-и (причем $\rho_{jk} = \rho_{kj}$), m – порядок матрицы.

Оценкой парного коэф-та крц-и яв-ся вбрч-ый парный коэф. крц-и, опрм-ый по фм-ле (при n исп-ях)

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)\left(x_{ik} - \bar{x}_k\right)}{n S_{x_j} S_{x_k}} \quad (j, k = \overline{1, m}), \tag{1}$$

где j, k – порядковые номера признаков.

Как и в дмр-ом случае, для оценки коэф-та крц-и нх-мо оценить мт-ие ож-ия и дсп-и. В ммр-ом крцн. анализе имеем m мт-их ож-й, m дсп-й и $m(m - 1)/2$ парных коэф-ов крц-и. Т.о., нужно произвести оценку $2m + m(m - 1)/2$ параметров.

В случае ммр-ой крц-и звт-и между признаками более многообразны и сложны, чем в дмр-ом случае. Одной крцн. матрицей нельзя полностью описать звт-и между признаками. Введем понятие частного коэф-та крц-и l-го порядка.

Пусть исходная (исх.) свк-ть состоит из m признаков. Можно изучить звт-и между двумя из них при фиксированном (фксн.) зн-и l признаков из $m-2$ оставшихся. Рас-им, н-р, систему из 5 признаков, изучим зв-ти между X_1 и X_2 при фксн-ом X_3. В этом случае имеем частный коэф. крц-и первого порядка, т.к. фиксируем (фкс.) только один признак.

Частный коэф. крц-и первого порядка для признаков X_1 и X_2 при фксн-ом зн-и X_3 врж-ся через парные коэф. крц-и и имеет вид

$$\rho_{12.3} = \left(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}\right) \Big/ \sqrt{\left(1-\rho_{13}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}. \tag{2}$$

Частный коэф. крц-и, так же как и парный, изменяется от – 1 до + 1. В общем виде, когда система состоит из m признаков, частный коэф. крц-и l-го порядка может быть найден из крцн-ой матрицы. Если $l = m-2$, то расв-ая матрица порядка m, при $l < m-2$ – подматрица порядка $l+2$, составленная из эл-ов матрицы Q_m, к-ые отвечают индексам коэф-та частной крц-и. Н-р, крцн-ая матрица системы из пяти признаков имеет вид

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \rho_{45} \\ \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & 1 \end{pmatrix}.$$

Для опр-ия частного коэф-та крц-и второго порядка, н-р, $\rho_{12.45}$, следует использовать подматрицу четвертого порядка, вычеркнув из исх-ой матрицы Q_5 третью строку и третий столбец, т.к. признак X_3 не расв-ют.

В общем случае фм-у частного коэф-та крц-и l-го порядка ($l = m-2$) можно записать в виде

$$\rho_{jk\cdot 1,2,\ldots,m} = Q_{jk} \Big/ \left(Q_{jj}Q_{kk}\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где Q_{jk} – алг-ие дополнения к эл-у ρ_{jk} крцн-ой матрицы Q_m, а Q_{jj} и Q_{kk} – алг. дополнения к эл-ам ρ_{jj} и ρ_{kk} крцн-ой матрицы Q_m.

Очевидно, что врж-ия (2) яв-ся частным случаем врж-я (3), в чем легко убедиться, рас-ев крцн-ю матрицу Q_3.

Оценкой частного коэф-та крц-и l-го порядка яв-ся вбрч-ый частный коэф. крц-и l-го порядка. Он выч-ся на основе крцн-ой матрицы, составленной из вбрч-ых парных коэф-ов крц-и:

$$q_m = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & r_{jk} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ф-ма вбрч-го частного коэф-та крц-и имеет вид

$$\rho_{jk\cdot 1,2,\ldots,m} = q_{jk} \Big/ \left(q_{jj}q_{kk}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где q_{jk}, q_{jj}, q_{kk} – алг. дополнения (дпн.) к эл-ам r_{jk}, r_{jj}, r_{kk} матрицы (4).

Частный коэф. крц-и l-го порядка вычисленной (вычн.) на основе n нбл-й над признаками, имеет такое же рсп-ие, что и парный коэф. крц-и, вычн-й по $n - l$ нбл-ям. Поэтому значимость частных коэф-ов крц-и оценивают так же, как и в 5°: 6.1.

п1. Дана матрица вбрч-ых парных коэф-ов крц-и размерности $m = 4$ ($n = 50$)

$$q_4 = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}85 & -0{,}62 & -0{,}21 \\ -0{,}85 & 1 & 0{,}53 & 0{,}34 \\ -0{,}62 & 0{,}53 & 1 & 0{,}46 \\ -0{,}21 & 0{,}34 & 0{,}46 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выч-ть оценки частных коэф-ов крц-и первого и второго порядков при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Р. Для выч-ия $r_{12\cdot3}$ воспользуемся фм-ой (2), заменив зн-ия параметров их оценками: $r_{12\cdot3} = \left[-0{,}85 - (-0{,}62 \cdot 0{,}53)\right] \Big/ \sqrt{\left(1-(-0{,}62)^2\right)\left(1-0{,}53^2\right)} = -0{,}78$.

Оценим значимость вычн-го коэф-та крц-и. Проверим нулевую гп-у H_0: $\rho_{12\cdot3} = 0$. Здесь и далее конкурирующая гп. имеет вид H_1: $r_Г \neq 0$, поэтому крт-я обл. – двс-я. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, число ст-й свободы $k = (n - l) - 2 =$ $= 47$. Выч-им стс-ку $t = r\sqrt{(n-2)/(1-r^2)} = -0{,}78\sqrt{48/(1-0{,}78^2)} = -8{,}636$. По табл. T_{14} находим крт. зн-ие $t_{крт}(0{,}05;\ 47) = 2{,}01$; имеем $|-8{,}636| > 2{,}01$. Гп-у о рав-ве нулю коэф-та крц-и следует отвергнуть. Можно говорить о наличии крцн-ой связи между X_1 и X_2 при фкс-ом зн-и X_3.

Выч-им $r_{23\cdot1} = (r_{23} - r_{21}r_{31}) \Big/ \sqrt{\left(1-r_{21}^2\right)\left(1-r_{31}^2\right)} = \dfrac{0{,}53-(-0{,}85)(-0{,}62)}{\sqrt{\left(1-0{,}85^2\right)\left(1-0{,}62^2\right)}} = 0{,}007$.

Оценим значимость коэф-та крц-и. Имеем: H_0: $\rho_{23\cdot1} = 0$, $k = (n - l) - 2 = 47$, $\alpha = 0{,}05$; $t = 0{,}007\sqrt{(50-2)(1-0{,}007^2)} = 0{,}048$. По T_{14} находим $t_{крт}(0{,}05;\ 47) = 2{,}01$. Т.к. $|0{,}048| < 2{,}01$, то нет оснований отвергать нулевую гп-у. Вел-а $r_{23\cdot1}$ показывает, что при фксн-ом зн-и признака X_1 крц-я между X_2 и X_3 отсутствует.

Для нахождения $r_{12\cdot34}$ воспользуемся фм-ой (5), к-ая в нашем случае имеет вид $r_{12\cdot34} = q_{12} \Big/ \sqrt{q_{11} \cdot q_{22}}$.

Выч-им алг. дпн-ия к эл-ам r_{12}, r_{11}, r_{22} матрицы q_4. Для эл-та r_{12} алг-им дпн-ем яв-ся опр-ль

$$q_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}85 & 0{,}53 & 0{,}34 \\ -0{,}62 & 1 & 0{,}46 \\ -0{,}21 & 0{,}46 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда находим $q_{12} = 0{,}42$. Анч-но, $q_{11} = 0{,}56$, $q_{22} = 0{,}48$, откуда $r_{12\cdot34} =$ $= 0{,}42 \Big/ \sqrt{0{,}56 \cdot 0{,}48} = 0{,}81$.

Оценим значимость вычн-го коэф-та крц-и. H_0: $\rho_{12\cdot34} = 0$, $k = (n - l) - 2 = 47$, $\alpha = 0{,}05$; $t = r\sqrt{(n-2)(1-r^2)} = 0{,}81\sqrt{(50-2)(1-0{,}81^2)} = 9{,}57$. По табл. T_{14} находим $t_{крт}(0{,}05;\ 47) = 2{,}01$. Т.к. $|9{,}57| > 2{,}01$, то нулевую гп-у отвергаем, т.е. можно говорить о наличии крцн-ой связи между признаками X_1 и X_2 при фксн-ом зн-и признаков X_3 и X_4.

3°. Множественный коэффициент корреляции. Часто представляет интерес оценка связи одного из признаков со всеми остальными. Такую оценку можно сделать с помощью множественного (совокупного) коэф-та крц-и

$$\rho_{j\cdot 1,2,\ldots,m} = \sqrt{1-|Q_m|/Q_{jj}}\ , \tag{6}$$

где $|Q_m|$ – опр-ль крцн-ой матрицы Q_m, Q_{jj} – алг. дпн-е к эл-у ρ_{jj}.

Квадрат коэф-та множественной (мнн.) крц-и $\rho^2_{j\cdot 1,2,\ldots,m}$ наз. мнн-ым коэф-ом **детерминации**. Коэф-ы мнн-ой крц-и и детерминации – вел. плж-ые, принимающие зн-ия в интервале $0 < \rho_{j\cdot 1,2,\ldots,m} < 1$. Оценками этих коэф-ов яв-ся вбрч. мнн-ые коэф-ты крц-и и детерминации, к-ые обз-ют ств-но $R_{j\cdot 1,2,\ldots,m}$ и $R^2_{j\cdot 1,2,\ldots,m}$. Фм-а для выч-ия вбрч-го мнн-го коэф-та крц-и имеет вид

$$R_{j\cdot 1,2,\ldots,m} = \sqrt{1-|q_m|/q_{jj}}\ , \tag{7}$$

где $|q_m|$ – опр-ль крцн-ой матрицы, q_{jj} – алг. дпн-ие к эл-у r_{jj}.

Ммр-ый крц. анализ позволяет получить оценку фк-и (ур-ия) рег-и. Коэф-ы в ур-и рег-и можно найти непосредственно через вбрч. парные коэф-ты крц-и или воспользоваться методом ммр-ой рег-и (см. 6°: 6.3).

Значимость мнн-го коэф-та крц-и и детерминации проверяют с помощью F-критерия (кт.) Фишера. Проверяется нулевая гп. H_0: $\rho^2 = 0$. Для этого выч-ют стс-у $F = \dfrac{R^2(n-l-2)}{l(1-R^2)}$, имеющую F-рсп. с $k_1 = n - l - 2$ и $k_2 = l$ ст-ми свободы. По табл. T_{15} находим $F_{крт}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F > F_{крт}$, нулевая гп. отвергается, т.е. коэф-т считают значимым. Если $F < F_{крт}$, то нет оснований отвергать нулевую гп-у.

п2. Выч-ть оценки мнн-ых коэф-ов крц-и и детерминации первого признака со всеми остальными, используя данные п1.

Р. Оценку мнн-го коэф-та крц-и найдем по фм-е $R_{1\cdot 234} = \sqrt{1-|q_4|/q_{11}}$. Выч-ив опр-ль крцн-й матрицы, найдем $|q_4| = 0{,}11$. Алг. дпн-ие к эл-у r_{11} выч-но в п1 и равно $q_{11} = 0{,}56$. Тогда $R_{1\cdot 234} = 0{,}89$, $R^2_{1\cdot 234} = 0{,}80$.

Оценим значимость вычн-го коэф-та крц-и. H_0: $R^2_{1\cdot 234} = 0$, $k_1 = n - l - 2 = 50 - 4 - 2 = 44$, $k_2 = 4$, $F = \dfrac{R^2(n-l-2)}{l(1-R^2)} = \dfrac{0{,}80\cdot 44}{4\cdot 0{,}20} = 44$. По T_{15} находим $F_{крт}(0{,}05;\ 44;\ 4) = 2{,}59$. Т.к. $F > F_{крт}$, то нулевая гп. отвергается, т.е. коэф-т признака X_1 яв-ся значимым при фксн-ом зн-и признаков X_2, X_3, X_4.

4°. Ранговая корреляция. В нек-ых случаях (при анализе сложных систем) встречаются признаки, не поддающиеся колн-ой оценке (назовем такие признаки объектами). Н-р, пусть требуется оценить стн-ие между мт-ми и музыкальными способностями группы учащихся. «Уровень способностей» яв-ся пер-ой вел-ой в том смысле, что он варьирует от одного индивидуума к другому. Его можно измерить, если выставлять каждому индивидууму отметки. Однако этот способ лишен объективности, т.к. разные экзаменаторы могут выставить одному и тому же учащемуся разные отметки. Элемент субъективизма можно исключить, если учащиеся будут ранжированы. Расположим учащихся по порядку в ств-и со степенью способностей и присвоим каждому из них порядковый номер, к-ый назовем рангом. Крц-ия между рангами более точно отражает стн-ие между способностями учащихся, чем крц-ия между отметками.

Тесноту связи между рангами измеряют так же, как и между признаками. Рас-им уже известную фм. коэф-та крц-и

$$r = \frac{\sum_{x,y}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{nS_xS_y}.$$

Пусть $(x - \bar{x}) = x'$, $(y - \bar{y}) = y'$. Тогда, учитывая, что $S_x = \sqrt{\sum_x (x-\bar{x})^2 / n}$,

$S_y = \sqrt{\sum_y (y-\bar{y})^2 / n}$, можно записать

$$r = \left(\sum_{x,y} x'y'\right) \Big/ \sqrt{\sum_x x'^2 \sum_y y'^2}. \qquad (8)$$

В звт-и от того, что принять за меру различия между вел-ми x', y', можно получить различны коэф-ты связи между рангами. Обычно используют коэф-т крц-и рангов Кэнделла (τ) и коэф-т крц-и рангов Спирмэна (ρ).

Введем сд. меру различия между объектами: $x' = +1$, если $i < j$, и $x' = -1$, если $i > j$. Ств-но $y' = +1$, если $i < j$, и $y' = -1$, если $i > j$. Поясним сказанное на примере. Пусть имеются две посл-ти:

X	2	4	5	1	3
Y	1	5	3	4	2

Рас-им отдельно каждую из них. В посл-ти X паре (2, 4) припишем зн-ие + 1, т.к. $i < j$ (2 < 4), второй паре (2, 5) также припишем зн-ие + 1, третьей паре (2, 1) припишем зн-ие – 1, поскольку $i > j$, и т.д. Посл-но перебираем все пары, причем каждая пара должна быть учтена один раз. Так, если учтена пара (2, 1), то не следует учитывать пару (1, 2). Аналогичные действия проделаем с посл-ю Y, причем порядок перебора пар должен в точности повторять порядок перебора пар в посл-ти X. Результаты этих действий представим в виде табл. 1.

Таблица 1

X	x'	Y	y'	$x'y'$
2,4	+ 1	1,5	+ 1	+ 1
2,5	+ 1	1,3	+ 1	+ 1
2,1	– 1	1,4	+ 1	– 1
2,3	+ 1	1,2	+ 1	+ 1
4,5	+ 1	5,3	– 1	– 1
4,1	– 1	5,4	– 1	+ 1
4,3	– 1	5,2	– 1	+ 1
5,1	– 1	3,4	+ 1	– 1
5,3	– 1	3,2	– 1	+ 1
1,3	+ 1	4,2	– 1	– 1
Σ				+ 2

Рас-им фм-у (8). В нашем случае $\Sigma x'^2 = \Sigma y'^2$ и равна кол-у пар, участвовавших в переборе. Каждая пара встречается только один раз, поэтому их общее кол-во равно числу сочетаний из n по 2, т.е. $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, сд-но, $\Sigma x'^2 = \Sigma y'^2 = C_n^2$. Обз-ая $\Sigma x'y' = s$, получим фм-у коэф-та крц-и рангов Кэнделла:

$$\tau = \frac{s}{0{,}5n(n-1)} = \frac{2s}{n(n-1)}. \qquad (9)$$

Теперь рас-им другую меру различия между объектами. Если обз-ить через $\overline{X}$ ср-й ранг посл-ти X, через $\overline{Y}$ – ср. ранг посл-ти Y, то $x' = X - \overline{X}$, $y' = Y - \overline{Y}$. Поскольку ранги посл-ти X и Y есть число нтр-го ряда, то их сумма равна $\dfrac{n(n+1)}{2} = \Sigma x = \Sigma y$, а ср-й ранг $\overline{X} = \overline{Y} = \dfrac{n+1}{2}$. Сумма кв-ов чисел нтр-го ряда равна $n(n + 1)(2n + 1)/6 = \Sigma X^2$. Тогда $\Sigma x'^2 = \sum\left(X - \dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \Sigma X^2 - (n + 1)\Sigma X + \dfrac{n(n+1)^2}{4} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)^2}{2} + \dfrac{n(n+1)^2}{4} = n(n + 1)\left[\dfrac{2n+1}{6} - \dfrac{n+1}{4}\right] = n(n + 1)\dfrac{n-1}{12} = \dfrac{n^3-n}{12}$. Итак, $\Sigma x'^2 = \Sigma y'^2 = \dfrac{n^3-n}{12}$.

Обз-им через вел-у $d = X - Y$ и опр-им через нее $\Sigma x'y'$. Имеем $\Sigma d^2 = \Sigma(X - Y)^2 = \Sigma(x' - y')^2 = \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 - 2\Sigma x'y' = \dfrac{n^3-n}{6} - 2\Sigma x'y'$. Тогда $\Sigma x'y' = \dfrac{n^3-n}{12} - \dfrac{\sum d^2}{2} = \dfrac{n^3-n}{12}\left[1 - \dfrac{6\sum d^2}{n^3-n}\right]$. Отсюда получим коэф-т крц-и рангов Спирмэна

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n^3-n}. \qquad (10)$$

У коэф-ов τ и ρ разные масштабы, они отличаются шкалами измерений. Поэтому на практике нельзя ожидать, что они совпадут. Чаще всего, если зн-ия обоих коэф-ов не слишком близки к 1, ρ по абс-ой вел-е примерно на 50% превышает τ. Причем выведены нерав-ва, связывающие ρ и τ. Н-р, при больших n можно пользоваться сд-им прж-ым стн-ем: $-1 \le 3\tau - 2\rho \le 1$, или $\dfrac{\tau^2}{2} + \tau - \dfrac{1}{2} < \rho < \dfrac{3\tau}{2} + \dfrac{1}{2}$. Коэф. ρ легче рассчитать, однако с теор-ой точки зрения больший интерес представляет коэф. τ.

При выч-и коэф-та крц-и рангов Кэнделла для подсчета s можно использовать сд-й прием: одну из посл-ей упорядочивают (уп.) так, чтобы ее эл-ты были числами нтр-го ряда; ств-но изменяют и др-ю посл-ть. Тогда сумму $\Sigma x'y'$ можно подсчитывать лишь по посл-ти Y, т.к. все x' равны + 1.

п3. Установить, имеется ли крцн-ая связь между интенсивностью окраски пряжи в 10 партиях сырья, предназначенного для текстильной промышленности, и его влажностью. Выч-ть коэф-ы крц-и ρ и τ. Эксперт расположил партии сырья в сд-ем порядке (табл. 2).

Таблица 2

Интенсивность окраски X	3	8	5	4	2	10	1	7	9	6
Влажность Y	1	9	10	2	4	7	3	5	8	6
d	2	– 1	– 5	2	– 2	3	– 2	2	1	0
d^2	4	1	25	4	4	9	4	4	1	0

Р. Выч-им по фм-е (10) коэф-т крц-и рангов Спирмэна ρ. Для этого подсчитаем d и d^2 в исх-ой табл. 2. Откуда имеем $\Sigma d^2 = 56$ и по (10) получим $\rho =$
$= 1 - \dfrac{6 \cdot 56}{1000 - 10} = 0{,}66$.

Теперь выч-им по фм-е (9) коэф-т крц-и рангов Кэнделла τ. Для этого уп-им посл-ть X и ств-но прб-ем посл-ть Y. Имеем:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	3	4	1	2	10	6	5	9	8	7

Теперь $\Sigma x'y' = s$ можно найти лишь по посл-ти Y, т.к. все x' имеют зн-ия + 1, поскольку все $i < j$. Для подсчета s составим табл. 3.

Таблица 3

3, y_i	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 5
4, y_i		– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 4
1, y_i			+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 7
2, y_i				+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 6
10, y_i					– 1	– 1	– 1	– 1	– 1	– 5
6, y_i						– 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 2
5, y_i							+ 1	+ 1	+ 1	+ 3
9, y_i								– 1	– 1	– 2
8, 7									– 1	– 1
										+ 19

Из табл. 3 получим $s = \Sigma x'y' = + 19$, тогда $\tau = 2{\cdot}19/10{\cdot}9 = 0{,}42$.

Расхождение в оценке тесноты связи между двумя коэф-ми ρ и τ довольно значительное (этот пример показывает, насколько проще выч-ять коэф. Спирмэна ρ).

Установлено, что рсп-ие ρ и τ при $n \to \infty$ прж-ся к норм-у, поэтому довольно просто оценить значимость этих коэф-ов (см. 5°: 6.1).

Если нельзя установить ранговое различие нескольких объектов, то говорят, что такие объекты яв-ся связанными. В этом случае объектам приписывается ср-й ранг. Н-р, если связанными яв-ся объекты 4 и 5, то им приписывается ранг 4,5; если связанными яв-ся объекты 1, 2, 3, 4 и 5, то их ср-й ранг (1 + 2 + 3 + 4 + 5)/5 = 3. Сумма рангов связанных объектов должна быть равна сумме рангов при ранжировании без связей. Фм-ы коэф-ов крц-и для ρ и τ в этом случае также можно вывести из фм-ы обобщенного коэф-та крц-и, только знаменатель врж-ия (9) тогда не равен $n(n - 1)/2$. Если t посл-ых членов связаны, то все оценки, относящиеся к любой вбрч-ой из них паре, равны нулю; число таких пар $t(t-1)$. Сд-но, $\Sigma x'^2 = \left[n(n-1) - \sum_t t(t-1)\right] \Big/ 2$.

Ств-но для другой посл-ти $\Sigma y'^2 = \left[n(n-1) - \sum_u u(u-1)\right] \Big/ 2$, где t и u – числа связанных пар в посл-тях.

Обз-ая $T = \sum_t t(t-1) \Big/ 2$, $U = \sum_u u(u-1) \Big/ 2$, получим

$$\tau = \frac{s}{\sqrt{n(n-1)/2 - T}\sqrt{n(n-1)/2 - U}}. \qquad (11)$$

Анч-но находим врж-ие ρ. Только в этом случае $T = \sum_t \left(t^3 - t\right) \Big/ 12$, $U = \sum_u \left(u^3 - u\right) \Big/ 12$, где t и u – числа связанных пар в посл-тях, а

$$\rho = \frac{\left(n^3 - n\right)/6 - (T + U) - \sum d^2}{\sqrt{\left(n^3 - n\right)/6 - 2T}\sqrt{\left(n^3 - n\right)/6 - 2U}}. \qquad (12)$$

п4. На соревнованиях по фигурному катанию судьи сд-им образом расположили участников соревнований:

Участники	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	
I судья	1,5	1,5	3	4	6	6	6	8	9,5	9,5	
II судья	1	2	4	4	4	6	7	8	9	10	
d	0,5	– 0,5	– 1	0	2	0	– 1	0	0,5	– 0,5	
d^2	0,25	0,25	1	0	4	0	1	0	0,25	0,25	$\Sigma d^2 = 7$

Установить, насколько объективны оценки судей, т.е. насколько тесна связь между оценками. Выч-ть коэф-ы ранговой крц-и ρ и τ.

Р. Сначала выч-им коэф. ρ. Для этого нх-мо найти T и U. Первый судья поделил первое место между участниками *А* и *Б*. Их объединенный ранг $(1 + 2)/2 = 1{,}5$. Участники *Д*, *Е*, *Ж* поделили 5, 6 и 7 места. Их объединенный ранг равен $6 = (5 + 6 + 7)/3$ и т.д. При выч-и T имеем: *А* и *Б* – два объединенных ранга, *Д*, *Е*, *Ж* – три объединенных ранга, *И*, *К* – два объединенных ранга. Т.о., $T = [(2^3 - 2) + (3^3 - 3) + (2^3 - 2)]/12 = 3$, $U = (3^3 - 3)/12 = 2$. В исх-ой же табл. выч-им и сумму кв-ов d, т.е. $\Sigma d^2 = 7$. По (12) получим

$$\rho = \frac{(1000 - 10)/6 - (3 + 2) - 7}{\sqrt{[(1000 - 10)/6 - 2\cdot 3]\,[(1000 - 10)/6 - 2\cdot 2]}} = 0{,}956.$$

Для выч-ия коэф-та крц-и рангов τ нх-мо найти $s = \Sigma x'y'$. Если $i = j$, то $x' = 0$ (или $y' = 0$). Составим табл. 4 для подсчета $\Sigma x'y'$.

Находим $s = \Sigma x'y' = 8 + 8 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2 = 37$, $T = \Sigma t(t - 1)/2 = (2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1)/2 = 5$, $U = \Sigma u(u - 1)/2 = (3\cdot 2)/2 = 3$. Отсюда получим

$$\tau = s \Big/ \sqrt{[n(n-1)/2 - T]\,[n(n-1)/2 - U]} = 37 \Big/ \sqrt{(45 - 5)(45 - 3)} = 0{,}902.$$

Итак, оценки, данные судьями участникам соревнований, в дт-ой мере объективны. Это подтверждают вел-ы обоих коэф-ов крц-и.

Таблица 4

Участники	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*
I судья	1,5	1,5	3	4	6	6	6	8	9,5	9,5
II судья	1	2	4	4	4	6	7	8	9	10
I	0	+ 1 + 1	+ 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 0	+ 1 + 1 + 1 + 1 0 0	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 0	
II	+ 1	+ 1 + 1	+ 1 + 1 0	+ 1 + 1 0 0	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	
$x'y' = П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	$x'y'П$	
	010 111 111 111 111 111 111 111 111 Σ8	111 111 111 111 111 111 111 111 Σ8	100 100 111 111 111 111 111 Σ5	100 111 111 111 111 111 Σ5	010 010 111 111 111 Σ3	010 111 111 111 Σ3	111 111 111 Σ3	111 111 Σ2	010 Σ0	

Если имеется несколько посл-ей, то возникает нх-ть опр-ть общую меру согласованности между ними. Такой мерой яв-ся коэф-т **конкордации**.

Пусть m – число посл-ей, n – кол. рангов в каждой посл-ти. Тогда коэф-т конкордации имеет вид

$$W = \frac{12\sum d^2}{m^2\left(n^3 - n\right)}, \tag{13}$$

где d – фактически встречающееся отк-ие от ср-го зн-ия суммы рангов одного объекта.

п5. Судьи расставили 6 участников соревнований по фигурному катанию сд-им образом.

Участники	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	
Судья I	5	4	1	6	3	2	
Судья II	4	6	2	3	5	1	
Судья III	3	4	2	6	5	1	
Сумма разрыва	12	14	5	15	13	4	Σ63

Установить, насколько согласованы действия судей.

Р. Для выч-ия коэф-ов конкордации нх-мо найти d. Для этого выч-им сумму рангов, выставленную тремя судьями по всем объектам, разделив ее на число объектов, т.е. 63/6 = 10,5, или же можно воспользоваться фм-ой $m(n + 1)/2 = (3·7)/2 = 10,5$; d получаем как разность между суммой рангов и ср-ей суммой рангов. Имеем

d	1,5	3,5	– 5,5	4,5	2,5	– 6,5	
d^2	2,25	12,25	30,25	20,25	6,25	42,25	$\Sigma d^2 = 113,5$

Вычислим $W = 12\Sigma d^2/m^2(n^3 - n) = 12·113,5/9(216 - 6) = 0,72$.

Вел-а коэф-та крц-и говорит о том, что действия судей хорошо согласованы.

Коэф-т крц-и рангов может быть использован для быстрой оценки взаимосвязи между признаками, не имеющими норм-го рсп-ия, и полезен в тех случаях, когда признаки поддаются ранжированию, но не могут быть точно измерены.

ЛЕКЦИЯ 19

6.3 РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

1°. Основные понятия и задачи регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов. Основная задача регрессионного (регн.) анализа – изучение зв-ти между результативным признаком Y и наблюдавшимся (нблв.) признаком X и оценка фк-и регрессии (рег-и).

Предпосылками регн-го анализа яв-ся:

1) Y – незв. слн-ые вел-ы, имеющие пст-ую дсп-ю;

2) X – вел-ы нблм-го признака (вел-ы не слн-ые);

3) условное мт. ож-ие $M(Y|X = x)$ можно представить в виде

$$M(Y|X = x) = \overline{y}_x = \varphi(x) = \beta_0 + \beta_1(x). \qquad (1)$$

Выражение (врж.) (1), как уже упоминалось в 2°: 6.1, наз. фк-ей рег-и Y на X. Оценке в этом врж-и подлежат параметры β_0 и β_1, наз-мые коэф-ми рег-и, а также $\sigma^2_{ост}$ – остаточная (ост.) дсп-я.

Ост-ой дсп-ей наз. та часть рассеивания результативного признака, к-ую нельзя объяснить действием нблм-го признака. Ост. дсп-я может служить для оценки точности подбора фк-и рег-и, полноты набора признаков, включенных в анализ. Оценки параметров фк-и рег-и находят, используя метод наименьших (нм.) квадратов.

В данном параграфе рас-им лин. регн-ый анализ. Лин-ым он наз. потому, что изучает лишь те виды звт-ей $\varphi(x)$, к-ые лин-ы по оцениваемым параметрам, хотя могут быть нелин-ы по пер-ым X. Н-р, $\varphi_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x$, $\varphi_2(x) = \beta_0 + \beta_1/x$, $\varphi_3(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ лин-ы отс-но параметров β_0, β_1, β_2. Иногда $\varphi_1(x)$ наз. лин-ой, а $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ нелин-ой рег-ей отс-но пер-ой X. Вид зв-ти $\varphi(x)$ выбирают, исходя из визуальной оценки особенностей расположения точек на поле крц-и, опыта предыдущих иссл-й и соображений профессионального хрк-ра на основе знаний физической сущности процесса.

Важное место в лин. регн-ом анализе занимает так наз-мая «нормальная рег-ия», когда незв-ые слн. вел-ы Y, имеющие пст-ую дсп-ю, рсп-ны по норм. закону, вел-ы нблм-го признака X не слн-ые, условное мт. ож. $M(Y|X = x)$ можно представить в виде (1). В этом случае оценки коэф-ов рег-и – несмещенные с мнм-ой дсп-ей и норм-ым законом рсп-ия. Из этого положения следует, что при «норм-ой рег-и» имеется возможность оценить значимость оценок коэф-ов рег-и, а также построить доверительный интервал для коэф-ов рег-и условного мт. ож-ия $M(Y|X = x)$.

Теперь покажем, как практически подбирать методом нм-их кв-ов (см. 9.3) коэф-ты для фк-й простейших видов типа:

1) лин. фк-ия вида $y = ax + b$;

2) квадратичная (квч.) фк-ия вида $y = ax^2 + bx + c$;

3) гипербола вида $y = \dfrac{a}{x} + b$;

4) показательная фк. вида $y = b \cdot a^x$.

Пусть задана табл. зн-й пер-ых и ств-ие точки вблизи прямой линии

$$x_1,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_n,$$
$$y_1,\ \dots,\ y_i,\ \dots,\ y_n.$$

В этом случае нужно подбирать коэф-ты фк-и $y = ax + b$ так, чтобы сумма S кв-ов отк-й выч-ных зн-й $ax_i + b$ от нблм-ых зн-й y_i принимала нм. зн-ие, т.е. найдем min фк-и $S = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$, полагая $\sum\limits_{i=1}^{n} = \Sigma$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2\Sigma(ax_i + b - y_i)x_i = 0;\\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2\Sigma(ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i &= \Sigma x_i\, y_i,\\ a\Sigma x_i + b\cdot n &= \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решив систему (2) правилом Крамера или методом Гаусса, найдем a^* и b^* и получим искомую фм. $y = a^*x + b^*$.

Анч-но для фк-й $y = ax^2 + bx + c$ и $y = \dfrac{a}{x} + b$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2\Sigma(ax_i^2 + bx + c - y_i)x_i^2 = 0;\\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2\Sigma(ax_i^2 + bx_i - y_i)\cdot x_i = 0;\\ \frac{\partial S}{\partial c} &= 2\Sigma(ax_i^2 + bx_i - y_i)\cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} a\Sigma x_i^4 + b\Sigma x_i^3 + c\Sigma x_i^2 &= \Sigma x_i^2\, y_i;\\ a\Sigma x_i^3 + b\Sigma x_i^2 + c\Sigma x_i &= \Sigma x_i\, y_i;\\ a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i + c\cdot n &= \Sigma x_i\, y_i. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2\Sigma\left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)\frac{1}{x_i} = 0;\\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2\Sigma\left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)\cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} a\Sigma\frac{1}{x_i^2} + b\Sigma\frac{1}{x_i} &= \Sigma\frac{y_i}{x_i};\\ a\Sigma\frac{1}{x_i} + b\cdot n &= \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для опр-ия параметров фк-и $y = b\cdot a^x$ предварительно ее логарифмируем (лгр.): $\lg y = x\lg a + \lg b$ и находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lg a} &= 2\Sigma(x_i\lg a + \lg b - \lg y_i)\cdot x_i = 0;\\ \frac{\partial S}{\partial \lg b} &= 2\Sigma(x_i\lg a + \lg b - \lg y_i)\cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lg a\Sigma x_i^2 + \lg b\Sigma x_i &= \Sigma x_i\lg y_i;\\ \lg a\Sigma x_i + n\lg b &= \Sigma\lg y_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решив систему (5), находим $\lg a^* = \alpha$, $\lg b^* = \beta$, откуда опр-им $a^* = 10^{\alpha}$, $b^* = 10^{\beta}$. Тогда получим искомую фк-ю $y = b^*\cdot a^{*x}$.

2°. Линейная регрессия. Рас-им простейший случай регн-го анализа – модель вида (1) и, обз-ив β_0, β_1 через b, a, для фк. $y = ax + b$ по (2), получим систему

$$\left.\begin{aligned} a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i &= \Sigma x_i y_i,\\ a\Sigma x_i + b\cdot n &= \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Оценки, полученные методом нм-их кв-ов, обладают мнм-ой дсп-ей в классе лин-ых оценок. Решая систему (6) отс-но a и b, найдем оценки параметров β_1 и β_0:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2}, \tag{7}$$

$$b = \frac{1}{n}\Sigma y_i - a\cdot\frac{1}{n}\Sigma x_i = \bar{y} - a\,\bar{x}. \tag{8}$$

Оценка для ост-ой дсп-и $\sigma^2_{ост}$ имеет вид

$$S^2_{ост} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - y_i)^2, \tag{9}$$

где n – кол. нбл-й.

Если n велико, то для упрощения расчетов нблв-еся данные принято группировать, т.е. строить крц-ю табл. Пример построения такой табл-ы приведен в 3°: 6.1. При выводе фм-л по сгруппированным данным суммы Σx_i, Σy_i, $\Sigma x_i y_i$, Σx_i^2, Σy_i^2 заменяют на $\Sigma x m_x$, $\Sigma y m_y$, $\Sigma xy m_{xy}$, $\Sigma x^2 m_x$, $\Sigma y^2 m_y$ (где m_x, m_y, m_{xy} – частоты повторений ств-их зн-й пер-ых). Тогда вместо (7), (8) получим

$$a = \frac{n\sum x_y m_{xy} - \left(\sum x m_{xi}\sum y m_y\right)/\sum m_{xy}}{\sum x^2 m_x - \left(\sum x m_x\right)^2/\sum m_{xy}}, \tag{7′}$$

$$b = \sum y m_y/\sum m_y - a\sum x m_x/\sum m_x, \tag{8′}$$

$$S^2_{ост} = \frac{1}{n-2}\Sigma[y_i - y(x)]^2 m_x. \tag{9′}$$

п1. Пусть требуется изучить (см. тз1 из 6.0) зв-ть между объемом выполненных работ (y) и накладными расходами (x). Для этого имеем вбр-у из гнр-ой свк-ти, состоящую из 150 пар пер-ых (x_i, y_i). По данным, приведенным в табл. 1, выч-ть оценки параметров ур-ия рег-и и ост-ой дсп-и. Предполагается, что связь врж-ся фм-ой (1).

Р. Подставляя данные табл. 1 в фм-ы (7′) и (8′), получим:

$$a = \frac{37175 - 735\cdot 7110/150}{4053{,}5 - 735^2/150} = 5{,}167;\ b = 7110/150 - 5{,}167\cdot 735/150 = 22{,}082.$$

Ур-ие рег-и имеет вид $\bar{y}(x) = 5{,}167x + 22{,}082$. По данным табл. 1 находим: $\bar{y} = 7110/150 = 47{,}4$; $\bar{x} = 735/150 = 4{,}9$.

Промежуточные результаты выч-й оценки ост-ой дсп-и приведены в табл. 2, первый столбец к-ой опр-ся из табл. 1: $y_1 = \frac{1}{7}(15\cdot4 + 25\cdot1 + 35\cdot2) =$ $= 22{,}14$, $y_2 = \frac{1}{17}(15\cdot5 + 25\cdot3 + 35\cdot3 + 45\cdot5 + 55\cdot1) = 31{,}47$ и т.д. Второй столбец опр-ся из $y(x) = 5{,}167x + 22{,}082$: $y(x_1) = 5{,}167\cdot1{,}5 + 22{,}082 = 29{,}832$, $y(x_2) =$ $= 5{,}167\cdot2{,}5 + 22{,}082 = 35{,}00$ и т.д. Восьмой столбец: $(x_1 - \bar{x})^2 = (1{,}5 - 4{,}9)^2\cdot7 =$ $= 80{,}92$; $(2{,}5 - 4{,}9)^2\cdot17 = 97{,}92$ и т.д.

Таблица 1

x / y	1-2 1,5	2-3 2,5	3-4 3,5	4-5 4,5	5-6 5,5	6-7 6,5	7-8 7,5	8-9 8,5	m_y	ym_y	y^2m_y	Σyxm_{xy}
10-20 15	4	5							9	135	2025	277,5
20-30 25	1	3	1						5	125	3125	312,5
30-40 35	2	3	6	5	3	1			20	700	24500	2695,0
40-50 45		5	9	19	8	7	2	1	51	2295	103275	10912,5
50-60 55		1	2	7	16	9	4	2	41	2255	124025	12897,5
60-70 65			1	5	6	4	2	2	20	1300	84500	7605,0
70-80 75							1	3	4	300	22500	2475,0
m_x	7	17	19	36	33	21	9	8	150	7110	363950	37175,0
xm_x	10,5	42,5	66,5	162,0	181,5	136,5	67,5	68,0	735,0			
x^2m_x	15,75	106,25	232,75	729,0	998,25	887,25	506,25	578,0	4053,5			

Таблица 2

y_i	$y(x_i)$	m_x	$y_i - y(x_i)$	$[y_i - y(x_i)]^2m_x$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2m_x$	$(x_i - \bar{x})^2m_x$
22,14	29,832	7	– 7,69	414,952	– 25,26	4466,473	80,92
31,47	35,00	17	– 3,53	211,835	– 15,93	4314,003	97,82
42,89	40,166	19	2,72	140,982	– 4,51	386,462	37,24
48,33	45,336	36	3,00	322,704	0,93	31,136	5,78
52,57	50,500	33	2,07	141,402	5,17	882,054	11,88
52,62	55,668	21	– 3,05	195,196	5,12	550,502	53,76
57,22	60,834	9	– 3,61	117,548	9,82	867,892	60,84
63,75	66,002	8	– 2,25	40,454	15,35	1884,980	103,78
Σ		150		1585,073		13383,502	452,02

Из табл. 2 по фм-е (9′) оценим ост. дсп-ю:

$$S^2_{ост} = \frac{1}{n-2}\Sigma[y_i - y(x)]^2 m_x = 1585{,}073/148 = 10{,}711 \Rightarrow S_{ост} = 3{,}28.$$

3°. Нелинейная регрессия. Рас-им случай, когда зв-ть нелин-на по x (рис. 1).

$$M(Y|X = x) = \varphi(x) = \beta_1/x + \beta_0. \quad (10)$$

Оценкой врж-ия яв-ся ур-ие рег-и

$$\bar{y}(x) = a/x + b,$$

где a и b – оценки коэф-ов рег-и β_1 и β_0.

Для этого случая используем фм-у (4)

$$\left.\begin{aligned} &a\Sigma\frac{1}{x_i^2} + b\Sigma\frac{1}{x_i} = \Sigma\frac{y_i}{x_i};\\ &a\Sigma\frac{1}{x_i} + b\cdot n = \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Для сгруппированных данных, как в 2°, получим

$$\left.\begin{aligned} &a\Sigma\frac{1}{x^2}m_x + b\Sigma\frac{1}{x}m_x = \Sigma\frac{y}{x}m_y;\\ &a\Sigma\frac{1}{x}m_x + b\cdot n = \Sigma y m_y. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

п2. Пусть требуется установить зв-ть между объемом сбыта товаров x (млн. руб.) и отс-ым уровнем издержек обращения y (в %). Для этого имеем вбр-у из гнр-ой свк-ти, состоящую из 50 пар пер-ых (x_i, y_i). По данным, приведенным в табл. 3, выч-ть коэф-ты в ур-и рег-и. Связь между пер-ми имеет вид (10).

Таблица 3

y \ x	4-6 5	6-8 7	8-10 9	10-12 11	12-14 13	14-16 15	16-18 17	18-20 19	m_y	ym_y	y^2m_y	$\frac{1}{x}ym_{xy}$
3,4-3,8 3,6							2	3	5	18	64,8	0,9918
3,8-4,2 4,0				1	1	3	2	1	8	32	128	2,1524
4,2-4,6 4,4			1	4	2	2			9	39,6	174,24	3,3523
4,6-5,0 4,8		3	1	3	3				10	48	230	5,0074
5,0-5,4 5,2		3	2						5	26	135,2	3,3842
5,4-5,8 5,6	2	2	1						5	28	156,8	4,4621
5,8-6,2 6,0	3		1						4	24	144	4,2666
6,2-6,6 6,4	3	1							4	25,6	163,84	4,7546
m_x	8	9	6	8	6	5	4	4	50	241,2	1197,28	28,3714
$\frac{1}{x}m_x$	1,600	1,2857	0,6667	0,7273	0,4615	0,3333	0,2353	0,2105	5,5203			
$\frac{1}{x^2}m_x$	0,320	1,1837	0,0741	0,0661	0,0355	0,0222	0,0138	0,0111	0,7265			
$\bar{y}_i(x) = \frac{\sum ym_{xy}}{m_x}$	6,05	5,29	5,20	4,50	4,53	4,16	3,80	3,70				

Р. В табл. 3 приведены все нх-ые суммы для составления норм-ых ур-й (12). Причем последний столбец табл. 3 выч-ем так: $y_1 m_{xy_1}/x$ = 3,6(2/17 + + 3/19) = 0,9918 и т.д. Ср. зн-ия $\bar{y}_i(x)$ приведены в последней строке табл. 3 и нанесены на поле крц-и (рис. 1). $\bar{y}_i(x)$ выч-ся так: $\bar{y}_i(x) = \frac{1}{m_x}\sum y_1 m_{xy_1} =$ $= \frac{1}{8}(5{,}6\cdot 2 + 6\cdot 3 + 6{,}4\cdot 3) = 6{,}05$ и т.д. Решив ур-ия (12), можно выч-ть зн-ия $y(x_i)$ и построить линию рег-и. Из табл. 3 получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned} 0{,}7265a + 5{,}5203b &= 28{,}3714,\\ 5{,}5203a + 50b &= 241{,}2, \end{aligned}\right\}$$

откуда $a = 14{,}881$, $b = 3{,}181$. Ур-ие рег-и (10) теперь принимает вид

$$\bar{y}(x) = 14{,}881/x + 3{,}181. \qquad (10')$$

Промежуточные результаты выч-й оценки ост-ой дсп-и приведены в табл. 4, первый столбец к-ой взят из табл. 3, второй – выч-н по фм-е (10′). Ср. зн-ие $\bar{y} = \Sigma ym_y/n = 241{,}2/50 = 4{,}82$ выч-но по табл. 3. А по данным табл. 4 выч-им ост. дсп-ю:

$$S^2_{ост} = \frac{1}{n-2}\Sigma[y_i - y(x_i)]^2 m = \frac{1{,}7145}{48} = 0{,}358.$$

Таблица 4

y_i	$y(x_i)$	m	x	$y_i - y(x_i)$	$[y_i - y(x_i)]^2 m$	$(y_i - \bar{y})^2 m$
6,05	6,16	8	5	– 0,11	0,0968	12,1032
5,29	5,31	9	7	– 0,02	0,0036	1,9881
5,20	4,83	6	9	+ 0,37	0,8214	0,8664
4,50	4,53	8	11	– 0,03	0,0072	0,8192
4,53	4,32	6	13	+ 0,21	0,2646	0,5046
4,16	4,17	5	15	– 0,01	0,0005	2,1780
3,80	4,05	4	17	– 0,25	0,2500	4,1616
3,70	3,96	4	19	– 0,26	0,2704	5,0176
Σ					1,7145	27,6387

Полученная линия рег-и нанесена на рис. 1. Как следует из рисунка, форма связи (гипербола) выбрана правильно. Полученная линия рег-и яв-ся хорошей аппроксимацией эмп-их данных.

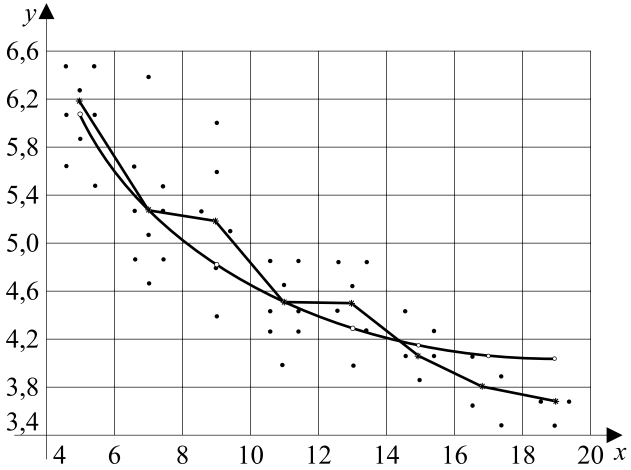


Рис. 1

В общем случае нелин-ой зв-ти между пер-ми Y и X связь может выражаться многочленом (мчл.) k-й ст-и от x:

$$M(Y|X = x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1}x^{x-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Коэф-ты рег-и опр-ют по методу нм-их кв-ов. Система норм-ых ур-й имеет вид (при $i = \overline{1, n}$):

$$\left.\begin{array}{l} b_k\Sigma x_i^{2k} + b_{k-1}\Sigma x_i^{2k-1} + \ldots + b_2\Sigma x_i^{k+2} + b_1\Sigma x_i^{k+1} + b_0\Sigma x_i^{k} = \Sigma y_i x_i^{k}, \\ b_k\Sigma x_i^{2k-1} + b_{k-1}\Sigma x_i^{2k-2} + \ldots + b_2\Sigma x_i^{k+1} + b_1\Sigma x_i^{k} + b_0\Sigma x_i^{k-1} = \Sigma y_i x_i^{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_k\Sigma x_i^{k+1} + b_{k-1}\Sigma x_i^{k} + \ldots + b_2\Sigma x_i^{3} + b_1\Sigma x_i^{2} + b_0\Sigma x_i = \Sigma y_i x_i, \\ b_k\Sigma x_i^{k} + b_{k-1}\Sigma x_i^{k-1} + \ldots + b_2\Sigma x_i^{2} + b_1\Sigma x_i + b_0 \cdot n = \Sigma y_i. \end{array}\right\} \quad (13)$$

В част-ти, при $k = 2$ для фк-и $y = ax^2 + bx + c$ получим:

$$\left.\begin{aligned} a\Sigma x_i^4 + b\Sigma x_i^3 + c\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i x_i^2; \\ a\Sigma x_i^3 + b\Sigma x_i^2 + c\Sigma x_i = \Sigma y_i x_i; \\ a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i + c\cdot n = \Sigma y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

4°. Оценка значимости коэффициентов регрессии. Интервальная оценка коэффициентов регрессии и условного математического ожидания. Для проверки значимости коэф-ов рег-и нх-мо установить, дт-но ли вел-а оценки для стсч-ки обоснованного вывода о том, что коэф-т рег-и отличен от нуля. В этом случае выч-мая для проверки нулевой гп-ы H_0: $\beta_1 = 0$ стс-ка

$$t = |a/S_a| \qquad (14)$$

имеет рсп-ие Стъюдента (см. T_{14}) с $k = n - 2$ ст-ми свободы (a – оценки коэф-та рег-и, S_a – оценка ср.кв. отк-ия коэф-та рег-и). По уровню значимости α и числу ст-ей свободы k находят из T_{14} крт-ое зн-ие $t_{крт}(\alpha, k)$, уд-щее условию $P(|\,t\,| > t_{крт}) \geq \alpha$. Если $|\,t\,| \geq t_{крт}$, то нулевую гп-у о рав-ве нулю коэф-та рег-и отвергают, коэф-т считают значимым. При $|\,t\,| < t_{крт}$ нет оснований отвергать нулевую гп-у.

Оценки ср.кв. отк-ия коэф-ов рег-и выч-ют по фм-ам:

$$S_a = \frac{S_{ост}}{S_x\sqrt{n-2}},\ S_b = \frac{S_{ост}}{\sqrt{n-2}}, \qquad (15)$$

где $S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$, $S_{ост}^2$ – оценка ост. дсп-и, выч-мая по (9).

Доверительный инр-л для значимых коэф-ов строят из условия

$$P(-\,t_{крт} < (\beta_1 - a)/S_a < t_{крт}) = 1 - \alpha,$$

где α – уровень значимости, находим

$$a - t_{крт}S_a < \beta_1 < a + t_{крт}S_a. \qquad (16)$$

п3. Проверить значимость коэф-ов рег-и, выч-ных в п1, считая, что предпосылки «норм-ой рег-и» соблюдены. Если оценки значимы, то построить доверительные инр-лы для параметров β_1 и β_0.

Р. Оценку ост-ой дсп-и выч-им по фм-е (9′) (нх-ые суммы кв-ов приведены в табл. 2): $S_{ост}^2 = \frac{1}{n-2}\Sigma[y_i - y(x)]^2 m_x = 1585{,}073/148 = 10{,}711$, $S_{ост} = 3{,}28$.

Далее находим из табл. 2 $S_x = \sqrt{452/150} = 1{,}77$ и выч-им $S_a = 3{,}28/1{,}77\sqrt{148} =$ $= 0{,}15$ и $S_b = 3{,}28/\sqrt{148} = 0{,}27$. По фм-е (14) находим стс-ку (из ур. рег-и $y(x) =$ $= 5{,}17x + 22{,}1$ п1) $t_a = 5{,}17/0{,}15 = 34{,}46$, $t_b = 22{,}1/0{,}27 = 81{,}85$. Из T_{14} для $\alpha = 0{,}05$, $k = 148$ находим $t_{крт} = 1{,}97$. Итак, $34{,}46 > 1{,}97$; $81{,}85 > 1{,}97$. Сд-но, нулевую гп-у о рав-ве нулю коэф-та рег-и следует отвергнуть, т.е. коэф-ты рег-и значимы.

Опр-им доверительные инр-лы для коэф-ов рег-и по фм-е (16):

$$5{,}17 - 1{,}97\cdot 0{,}15 < \beta_1 < 5{,}17 + 1{,}97\cdot 0{,}15 \Rightarrow 4{,}87 < \beta_1 < 5{,}47,$$

$$22{,}082 - 1{,}97\cdot 0{,}27 < \beta_0 < 22{,}082 + 1{,}97\cdot 0{,}27 \Rightarrow 21{,}55 < \beta_0 < 22{,}61.$$

С вер-ю $P = 1 - \alpha = 0{,}95$ параметры не выйдут за выч-ные границы.

Теперь рас-им инрн-ую оценку для условного мт. ож-ия. Линия рег-и хркз-ет изменение условного мт. ож-ия результативного признака от вариации (врц.) остальных признаков. Точечной оценкой условного мт. ож-ия $M(Y|X = x)$ яв-ся условное ср. $\bar{y}(x)$. Кроме точечной оценки, для $M(Y|X = x)$ можно построить доверительный инр. в точке $x = x_0$.

Известно, что $(\bar{y}(x) - M(Y|X = x))/S_{y(x)}$ имеет рсп-ие Стъюдента с $k = n - 2$ ст-ми свободы. Найдя оценку ср.кв. отк-ия для условного ср-го, можно построить доверительный инр. для условного мт. ож-ия $M(Y|X = x)$ в точке $x = x_0$.

Оценку дсп-и условного ср. выч-ют по фм-е

$$S^2_{y(x)} = S^2_{ост} \cdot \left[1/n + (x_0 - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right],$$

или для инрн. ряда

$$S^2_{y(x)} = S^2_{ост} \cdot \left[1/n + (x_0 - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{x} (x - \bar{x})^2 m_x \right], \tag{17}$$

Доверительный инр. находят из условия ($t_{\alpha,k} = t_{крт}(\alpha, k)$):

$$P\left(-t_{\alpha,k} < \frac{\bar{y}(x) - M(Y \mid X = x)}{S_{\bar{y}(x)}} < t_{\alpha,k} \right) = \alpha,$$

где α – уровень значимости. Отсюда

$$\bar{y}(x) - t_{\alpha,k} S_{\bar{y}(x)} < M(Y|X = x) < \bar{y}(x) + t_{\alpha,k} S_{\bar{y}(x)}. \tag{18}$$

Доверительный инр. для условного мт. ож-ия можно изб-ть грфч-ки (рис. 2). Из рис. 2 видно, что в точке $x_0 = \bar{x}$ границы инр-ла наиболее близки друг другу. Расположение границ доверительного инр. показывает, что прогнозы по ур-ю рег-и хороши только тогда, когда зн-ие x не выходит за пределы вбр-и, по к-ой выч-но ур-е рег-и; иными словами, экстраполяция по ур-ю рег-и может привести к значительным погр-ям.

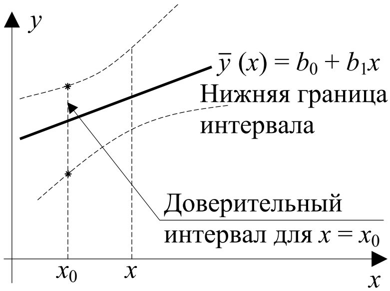


Рис. 2

п4. Рассчитать доверительные инр-лы условного мт. ож-ия в точках $x_0 = 1{,}5$ и $x_0 = 4{,}5$, используя данные п1.

Р. Сначала выч-им $\bar{y}(x_0)$, используя ур-е рег-и, полученное в п1. промежуточные выч-ия представим в виде табл. 5, используя данные табл. 1, 2.

Таблица 5

x_0	$\bar{y}(x)$	$S_{\bar{y}(x_0)}$	$t_{\alpha,k} S_{\bar{y}(x)}$	$t_н$	$t_в$
1,5	29,83	0,59	1,15	28,68	30,98
4,5	45,34	0,27	0,53	44,81	45,87

Находим $S^2_{\bar{y}(1,5)} = 10{,}711[1/150 + (1{,}5 - 4{,}9)^2/452] = 0{,}35 \Rightarrow S_{y(1,5)} = 0{,}59$.

Анч-но выч-им $S^2_{y(4,5)} = 1{,}96$ и, используя (18), опр-им $t_н$, $t_в$:

$$29{,}83 - 1{,}15 < M(Y|X = 1{,}5) < 29{,}83 + 1{,}15 \Rightarrow t_н = 28{,}68,\ t_в = 30{,}98,$$

$$45{,}34 - 0{,}53 < M(Y|X = 4{,}5) < 45{,}34 + 0{,}53 \Rightarrow t_н = 44{,}81,\ t_в = 45{,}87.$$

Т.о., на краях границ ширина инр-ла больше (30,98 – 28,68 = 2,3), чем в середине, т.е. в точке, близкой к $\bar{x} = 4{,}9$ (45,87 – 44,81 = 1,06).

5°. Проверка значимости уравнения регрессии. Оценить значимость ур-я рег-и – значит установить, ств-ет ли мт-ая модель, врж-щая зв-ть между Y и X, эксл-ым данным. Для оценки значимости проверяют гп-у H_0: $\beta_1 = 0$. Если она отвергается, то считают, что между Y и X нет связи (или связь нелин-я). Для проверки нулевой гп-ы используют основные положения дсп-го анализа о разбиении суммы кв-ов на слагаемые по фм-е (5) из 2°: 5.3. Общая сумма кв-ов отк-й результативного признака $Q = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$ разлагается на Q_1 (сумму, хркз-щую влияние неучтенных фкт-ов). Очевидно, чем меньше влияние неучтенных фкт-ов, тем лучше мт. модель ств-ет эксл-ым данным, т.к. врц-ия Y в основном объясняется влиянием признака X.

Для проверки нулевой гп-ы выч-ют стс-ку $F = (Q_1/Q_{ост})\cdot(k_2/k_1)$, к-ая имеет рсп-ие Фишера-Снедекора с $k_1 = 1$, $k_2 = n - 2$ ст-ми свободы (n – число нбл-й). Затем из T_{15} находят $F_{крт}(\alpha, k_1, k_2)$, уд-щее условию $P(F > F_{крт}) \geq \alpha$. Если $F > F_{крт}$, нулевую гп-у отвергают, ур-е считают значимым. Если $F < F_{крт}$, то нет оснований отвергать нулевую гп-у.

п5. Оценить значимость ур-ия рег-и, вычн-го в п1.

Р. Для проверки нулевой гп-ы H_0: $\beta_1 = 0$ выч-им стс-ку: $F = (Q_1/Q_{ост})\times$ $\times(k_2/k_1)$ при $n = 150$, $k_1 = 1$, $k_2 = 148$. Из табл. 2 имеем: $Q = 13383{,}5$; $Q_{ост} = 1585{,}07$; $Q_1 = Q - Q_{ост} = 11798{,}43$; стс-ка $F = (11798$, то $43\cdot148)/1585{,}07 = 1102{,}7$. Из T_{15} находим $F_{крт}(0{,}05;\ 1;\ 148) = 3{,}84$. Т.к. $F > F_{крт}$, то нулевую гп-у отвергаем, линия рег-и значима, мт. модель хорошо согласуется с экспл-ми данными.

6°. Многомерный регрессионный анализ. Если изменения результативного признака опр-ся действием свк-ти др. признаков, то имеет место многомерный (ммр.) (т.е. множественный (мнн.)) рег-ный анализ. Пусть результативный признак Y, а незв-ые признаки $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Для ммр-го случая предпосылки регн-го анализа можно сформулировать так: Y – незв-ые слн. вел-ы со средним $M(Y|X = x_1, \ldots, x_m)$ и пст-ой дсп-ей $\sigma^2_{ост}$; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – лин-о незв-ые n-мр. векторы, т.е. $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, …, $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$. Все положения, изложенные в 1°, справедливы и для ммр-го случая. Рас-им модель вида

$$M(Y|X = x_1, x_2, \ldots, x_m) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m. \tag{19}$$

Оценке подлежат параметры $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ и ост. дсп-я. Заменив параметры их оценками, запишем ур-е рег-и

$$\bar{y}(x) = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m. \tag{20}$$

Коэф-ы врж-ия (20) находим методом нм-их кв-ов. Исх. данными для выч-ия коэф-ов $b_0, b_1, \ldots, b_m$ яв-ся вбр-ка из ммр-ой свк-ти, представляемая обычно в виде матрицы X и вектора Y:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}\, x_{21} \ldots x_{j1} \ldots x_{m1} \\ x_{12}\, x_{22} \ldots x_{j2} \ldots x_{m2} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad x_{ji} \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{1n}\, x_{2n} \ldots x_{jn} \ldots x_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_i \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{20'}$$

Как и в дмр-ом случае, составляем систему норм-ых ур-й (полагая $\sum_{i=1}^{n} = \Sigma$)

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\Sigma x_{1i} + \ldots + b_m\Sigma x_{mi} = \Sigma y_i, \\ b_0\Sigma x_{1i} + b_1\Sigma x_{1i}x_{1i} + \ldots + b_m\Sigma x_{1i}x_{mi} = \Sigma x_{1i}y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0\Sigma x_{mi} + b_1\Sigma x_{1i}x_{mi} + \ldots + b_m\Sigma x_{mi}x_{mi} = \Sigma x_{mi}y_i, \end{cases} \tag{21}$$

к-ую можно решить любым способом, н-р, способом обратной матрицы. Предварительно прб-ем систему ур-й. Выразим из первого ур-ия зн-ие b_0 через остальные параметры.

$$b_0 = \frac{1}{n}\Sigma y_i - \frac{1}{n}b_1\Sigma x_{1i} - \ldots - \frac{1}{n}b_m\Sigma x_{mi} = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - \ldots - b_m\bar{x}_m. \tag{22}$$

Подставим в остальные ур-ия системы вместо b_0 полученное врж-ие:

$$\begin{cases} b_1\left(\sum x_{1i}^2 - n(\bar{x}_1)^2\right) + b_2\left(\sum x_{1i}x_{2i} - n\bar{x}_1\bar{x}_2\right) + \ldots + b_m\left(\sum x_{1i}x_{mi} - n\bar{x}_1\bar{x}_m\right) = \sum x_{1i}y_i - n\bar{x}_1\bar{y}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1\left(\sum x_{1i}x_{mi} - n\bar{x}_1\bar{x}_m\right) + b_2\left(\sum x_{2i}x_{mi} - n\bar{x}_2\bar{x}_m\right) + \ldots + b_m\left(\sum x_{mi}^2 - n\bar{x}_m\bar{x}_m\right) = \sum x_{mi}y_i - n\bar{x}_m\bar{y}. \end{cases}$$

Пусть C – матрица коэф-ов при неизвестных параметрах $b_0, b_1, \ldots, b_m$; C^{-1} – обратная матрица к C, c_{ij} – эл-т, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы C^{-1}, $A_{yj} = \Sigma x_{ji}y_i - n\,\bar{x}_j\bar{y}$, $= \overline{1,m}$. Тогда окончательно получим:

$$b_j = \sum C_{ij}^{-1}A_{yi},\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - \ldots - b_m\bar{x}_m. \tag{23}$$

Оценкой ост-ой дсп-и $\sigma_{ост}^2$ яв-ся

$$S_{ост}^2 = \left(\sum\left[y_i - y(x_i)\right]^2\right)/(n-m-1),$$

где y_i – измеренное зн-ие результативного признака, $y(x_i)$ – зн-ие результативного признака, выч-ное по ур-ю рег-и.

Если вбр-а получена из норм-о рсп-ой свк-ти, то анч-но изложенному в 4° можно проверить значимость коэф-ов рег-и, только в данном случае стс-ку $t = \left|b_j / S_{b_j}\right|$ выч-ют для каждого j-го коэф-та рег-и ($j = \overline{0,m}$).

$$S_{b_0} = S_{ост}\sqrt{\frac{1}{n} + \sum_m x_j x_k c_{ij}^{-1}},\ S_{b_j} = S_{ост}\sqrt{c_{jj}^{-1}}\ \ (i = \overline{1,n}), \tag{24}$$

где c_{ij}^{-1} – эл-т обратной матрицы, стоящие на пересечении i-ой строки и j-го столбца; c_{jj}^{-1} – диагональный эл. обратной матрицы.

При заданном уровне значимости α и числе ст-ей свободы $k = n - m - 1$ по T_{14} находим $t_{крт}(\alpha, k)$. Если $t > t_{крт}$, то нулевую гп-у о рав-ве нулю коэф-та рег-и отвергают. Оценку коэф-та считают значимой. Такую проверку делают для каждого коэф-та рег-и. Если $t < t_{крт}$, то нет оснований отвергать нулевую гп-у. Оценку коэф-та рег-и считают незначимой.

Для значимых коэф-ов рег-и целесообразно построить доверительные инр-ы по фм-е (16). Для оценки значимости ур-ия рег-и следует проверить нулевую гп-у о том, что все коэф-ты рег-и (кроме свободного члена) равны нулю: H_0: $\beta^* = 0$ (β^* – вектор коэф-ов рег-и). Нулевую гп-у проверяют, как и в 5°, с помощью стс-ки $F = (Q_1/Q_{ост})\cdot(k_2/k_1)$, где Q_1 – сумма кв-ов, хркз-щая влияние признаков X, $Q_{ост}$ – ост. сумма кв-ов, хркз-щая влияние неучтенных фкт-ов; $k_2 = n - m - 1$, $k_1 = m$. Для уровня значимости α и числа ст-ей свободы k_1 и k_2 по T_{15} находят $F_{крт}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F > F_{крт}$, то нулевую гп-у об одновременном рав-ве нулю коэф-ов рег-и отвергают. Ур-е рег-и считают значимым. При $F < F_{крт}$ нет оснований отвергать нулевую гп-у. Ур-е рег-и считают незначимым.

п6. Рассчитать ур-ие рег-и. Зв-ть между результативным признаком Y и признаками X_1 и X_2 имеет вид $M(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Оценить значимость ур-ия рег-и. Исх. данные приведены в табл. 6.

Р. В табл. 6 приведены и результаты выч-й, нх-мые для составления системы норм-ых ур-й. Здесь нх-мо оценить параметры β_0, β_1, β_2 и ост. дсп-ю $\sigma^2_{ост}$. Составим систему норм-ых ур-й:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i} + b_2\sum\limits_{i=1}^{20} x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{20} y_i\,, \\ b_0\sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i} + b_1\sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i}^2 + b_2\sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i}x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i}y_i\,, \\ b_0\sum\limits_{i=1}^{20} x_{2i} + b_1\sum\limits_{i=1}^{20} x_{1i}x_{2i} + b_2\sum\limits_{i=1}^{20} x_{2i}^2 = \sum\limits_{i=1}^{20} x_{2i}y_i \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 20b_0 + 837{,}5b_1 + 511{,}1b_2 = 1459{,}2, \\ 837{,}2b_0 + 36555{,}62b_1 + 21964{,}13b_2 = 59745{,}26, \\ 511{,}1b_0 + 21964{,}13b_1 + 13830{,}77b_2 = 36602{,}03. \end{cases}$$

Из первого ур-ия системы выразим $b_0 = 72{,}96 - 4186b_1 - 25{,}55b_2$.

Разделим все члены 2-го и 3-го ур-ия системы на коэф-ты при первых членах и подставим полученное выше врж-ие для b_0 в эти ур-ия:

$$\begin{cases} 1{,}8041b_1 + 0{,}6802b_2 = -1{,}5969, \\ 1{,}1142b_1 + 1{,}5057b_2 = -1{,}3458. \end{cases}$$

Найдем b_1 и b_2 методом обратной матрицы. Имеем матрицу коэф-ов и вектор Y:

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}8041 & 0{,}6802 \\ 1{,}1142 & 1{,}5057 \end{bmatrix},\ Y = \begin{vmatrix} -1{,}5969 \\ -1{,}3458 \end{vmatrix}.\ \text{Находим}\ C^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}7687 & -0{,}5688 \\ -0{,}3472 & 0{,}9211 \end{vmatrix}.$$

Тогда по фм-е (23) получим:

$$b_1 = 0{,}7687\cdot(-1{,}5969) + 0{,}3472\cdot(-1{,}3458) = 0{,}7603,$$
$$b_2 = (-0{,}5688)(-1{,}5969) + 0{,}9211(-1{,}3458) = 0{,}3313,$$
$$b_0 = 72{,}96 - (41{,}86\cdot 0{,}7603) + 25{,}555\cdot 0{,}3313 = 113{,}2457.$$

Ур-ие рег-и имеет вид

$$\bar{y}\,(x) = 113{,}2457 - 0{,}7603x_1 - 0{,}3313x_2.$$

Теперь оценим ост. дсп-ю. Предварительно выч-им по ур-ю рег-и для каждой пары зн-ий x_{11} и x_{12} вел-у $y(x_i)$. Все выч-ия сведены в табл. 7. Имеем:

$S^2_{ост} = \sum\limits_{i=1}^{20}\sum\limits_{i=1}^{20}[y_i - y(x_i)]^2 \big/ (n - m - 1) = 375{,}211/17 = 22{,}07 \Rightarrow S_{ост} = 4{,}7$.

Таблица 6

y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
85,5	25,5	17,3	2180,25	1479,15	441,15	650,25	229,29
81,7	34,1	19,8	2785,97	1617,66	665,18	1162,81	392,04
71,7	37,3	30,1	2674,41	2158,17	1122,73	1391,29	906,01
62,7	44,7	31,9	2802,69	2000,13	1425,93	1998,09	1017,61
66,4	44,6	38,3	2961,44	2543,12	1708,18	1989,16	1466,89
70,6	41,0	26,5	2894,60	1870,90	1086,50	1681,00	702,25
65,0	49,5	36,2	3217,50	2353,0	1791,90	2450,25	1310,44
72,8	45,1	21,0	3283,28	1528,80	947,10	2034,01	441,00
67,6	56,5	29,5	3819,40	1994,20	1666,75	3192,25	870,25
90,0	35,4	29,4	3186,00	2241,00	881,46	1253,16	620,01
60,2	54,9	25,0	3304,98	1505,00	1372,50	3014,01	625,00
74,8	32,8	28,0	2453,44	2094,40	918,40	1075,84	784,00
62,4	55,5	33,9	3518,70	2149,26	1881,45	3080,25	1149,21
74,2	41,5	16,1	3079,30	1194,62	668,15	1722,25	259,21
71,6	41,5	21,0	2971,40	1503,60	871,50	1722,25	441,00
60,0	52,7	28,7	3162,00	1722,00	1512,49	2777,49	823,69
81,1	37,9	20,3	3073,69	1646,33	769,37	1436,41	412,09
71,5	43,9	19,9	3138,85	1422,85	873,61	1927,21	396,01
77,2	35,0	22,6	2702,00	1744,72	791,00	1225,00	510,76
91,2	27,8	20,1	2535,36	1833,12	558,78	772,84	404,01
Σ1459,2	837,2	511,1	59745,26	36602,03	21964,13	36555,62	13830,77

Таблица 7

y_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	$[y_i - y(x_i)]^2$	$(y_i - y)^2$
85,50	88,13	– 2,63	6,917	157,452
81,70	80,77	0,93	0,872	76,213
71,70	74,92	– 3,22	10,368	1,583
62,70	68,69	– 5,99	35,880	105,468
66,40	66,65	– 0,25	0,062	43,034
70,60	73,30	– 2,70	7,290	5,570
65,00	63,62	1,38	1,885	63,521
72,80	72,00	0,80	0,640	0,026
67,60	60,53	7,07	49,985	28,837
90,00	78,09	11,91	141,848	290,021
60,20	63,23	– 3,03	9,181	162,818
74,80	79,03	– 4,23	17,893	3,386
63,40	59,82	3,57	12,766	91,585
74,20	76,37	– 2,17	4,709	1,513
71,60	74,75	– 3,15	9,922	1,877
60,00	63,67	– 3,67	13,469	167,962
81,10	77,71	3,39	11,485	66,260
71,50	73,29	– 1,79	3,204	2,161
77,20	79,16	– 1,96	3,841	17,893
91,20	85,45	5,75	32,994	332,689
Σ			375,211	1619,478

Оценим значимость ур-ия рег-и. Для этог проверим нулевую гп-у H_0: $\beta^* = 0$. Выч-им стс-ку $F = (Q_1/Q_{ост})\cdot(k_2/k_1)$. Из табл. 7 имеем: $Q_{ост} = 375,211$, $Q =$

$= 1619{,}478$; отсюда $Q_1 = Q - Q_{ост} = 1244{,}267$. Число ст-ей свободы: $k_2 = n - m - 1 =$ $= 17$, $k_1 = m = 2$. Далее находим $F = (1244{,}267 \cdot 17)/(375{,}211 \cdot 2) = 28{,}2$. По T_{15} для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ находим крт-ое зн-ие $F_{крт}(0{,}05;\ 2;\ 17) = 3{,}59$. Т.к. $F > F_{крт}$ $(28{,}2 > 3{,}59)$, то нулевую гп-у отвергаем. Ур-е рег-и считаем значимым.

7°. Факторный анализ. В последнее время все более широкое распространение находит один из новых разделов ммр-го стсч. анализа – факторный анализ (ФА). Первоначально этот метод разрабатывался для объяснения многообразия корреляций (крц.) между исх-ми параметрами. Дсв-но, результатом корреляционного (крцн.) анализа яв-ся матрица коэф-ов крц-й. При малом числе параметров можно произвести визуальный анализ этой матрицы. А с ростом числа параметров (10 и более) визуальный анализ не дает плж-ых результатов. Выяснилось, что все многообразие крцн-ых связей можно объяснить действием нескольких обобщенных фкт-ов, яв-хся фк-ми исслм-ых параметров; сами обобщенные фкт. при этом могут быть и неизвестными, однако их можно выразить через исслм-ые параметры.

Один из основоположников фктн-го анализа Л. Терстоун приводит такой пример: несколько сотен мальчиков выполняют 20 разнообразных гимнастических (гимн.) упражнений (упж.). Каждое упж. оценивают баллами. Можно рассчитать матрицу крц-й между 20 упж-ми. Эта большая матрица размером 20×20. Изучая такую матрицу, трудно уловить закономерность связи между упж-ми. Нельзя ли объяснить скрытую в табл-е закономерность действием каких-либо обобщенных фкт-ов, к-ые в результате эксп-та непосредственно не оценивались? Оказалось, что обо всех коэф-ах крц-и можно судить по трем обобщенным фкт-м, к-ые и опр-ют успех выполнения всех 20 гимн-их упж-й: чувство равновесия, усилие правого плеча, быстрота движения тела. Т.о., выделенные обобщенные фкт. можно использовать как критерии (кт.) при классификации мальчиков по способностям к отдельным группам гимн-их упж-й.

ФА позволяет группировать объекты со сходными сочетаниями признаков и группировать признаки общим хрк-ом изменения от объекта к объекту. Методы ФА находят применение в психологи и экн-ке, социологии и экнч-ой географии. Фкт., выраженные через исх. параметры, как правило, легко инпр-вать как нек-ые внутренние хркс-ки объектов.

ФА может быть использован и как самостоятельный метод иссл-ия, и вместе с др. методами ммр-го анализа, н-р, в сочетании с рег-ным анализом. В этом случае для набора зв-ых пер-ых находят обобщенные фкт., к-ые потом входят в рег-ный анализ в кач-е пер-ых. Такой подход позволяет сократить число пер-ых в регн-м анализе, устранить крв-сть пер-ых, уменьшить влияние ошибок и в случае орт-сти выделенных фкт-ов значительно упростить оценку значимости пер-ых.

Информацию для ФА пишут в виде двумерной (дмр.) табл-ы чисел размерностью $m \times n$ (анч-но (20′)), строки к-ой ств-ют объектам нбл-й ($i = \overline{1,n}$), столбцы – признакам ($j = \overline{1,m}$). Признаки, хркз-щие объем нбл-ия, как правило, имеют различную размерность. Чтобы устранить влияние размерности и обеспечить сопоставимость признаков, матрицу исх. данных обычно нормируют (нор.), вводя единый масштаб. Самым распространенным видом нор-вки яв-ся стандартизация (стдз.), когда от пер-ых x_{ji} переходят к пер-ым $z_{ji} = (x_{ji} - x)/s_j$. В дальнейшем, говоря о матрице исх. пер-ых, всегда будем иметь в виду стдз-ную матрицу.

Основная модель ФА имеет вид

$$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + \ldots + a_{jp}F_p + d_jU_j \ (j = \overline{1,m}). \qquad (25)$$

где z_j – слн. вел-а j-го признака; $F_1, \ldots, F_p$ – общие фкт. (слн. вел-ны, имеющие норм-ый закон рсп-ия); U_j – характерный (хрк.) фкт.; $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jp}$ – фктн. нагрузки, характеризующие (хркз.) существенность (сущн.) влияния каждого фкт-а (параметры модели, подлежащие опр-ю); d_j – нагрузка хрк-го фкт-а.

Модель (25) предполагает, что каждый из j признаков, входящих в исслм-й набор и заданных в стдз-ной форме, может быть представлен в виде лин-ой комбинации небольшого числа общих фкт-ов $F_1, \ldots, F_p$ $(p < m)$ и хрк-го фкт-а U_j.

Для j-го признака и i-го объекта модель (25) можно записать в виде

$$z_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}F_{ki} + d_jU_{ji} \ (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}), \qquad (26)$$

где F_{ki} – зн-ие k-го фкт-а для i-го объекта.

Дсп-ю признака S_j можно разложить на две сост-ие:

$$S_j^2 = 1 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \ldots + a_{jk}^2 + \ldots + a_{jp}^2 + d_j^2 = h_j^2 + d_j^2, \qquad (27)$$

где a_{jk}^2 – доля дсп-и признака z_j, приходящаяся на k-ый фкт., h_j^2 – дсп-ия общих фкт-ов (общность), d_j^2 – дсп. хрк-го фкт. (хрк-сть). Все пер. стдз-ны, поэтому дсп-ия j-го признака $S_j^2 = 1$. Если общие и хрк-ые фкт. не коррелируют между собой, то дсп-ия j-го фкт. представима в виде (27).

Полный вклад k-го фкт. в суммарную дсп. признаков

$$V_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^2 \ (k = \overline{1,p}).$$

Вклад общих фкт-в в суммарную дсп-ию $V = \sum_{k=1}^{p} V_k$.

Используя фм-у (25) запишем врж-ия для каждого из параметров:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \ldots + a_{1p}F_p + d_1U_1, \\ z_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \ldots + a_{2p}F_p + d_2U_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = a_{m1}F_1 + a_{m2}F_2 + \ldots + a_{mp}F_p + d_mU_m. \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Коэф-ты системы (28) – фктн. нагрузки – можно представить в виде матрицы, каждая строка к-ой ств-ет параметру, а столбец – фактору.

ФА позволяет получить не только матрицу отб-й, но и коэф-ты крц-и между параметрами и фкт-ми, что яв-ся важной хркс-ой кач-ва фкт-ой модели. Табл. таких коэф-ов наз. фкт-ой структурой или просто структурой.

Коэф-ты отб-ия можно выразить через вбрч-ые крц-и. На этом основаны методы выч-ия фктн-го отб-ия.

Рас-им связь между эл-ми структуры и коэф-ми отб-ия. Для этого, учитывая (25) и опр-ие вбрч-го коэф-та крц-и, умножим ур-ия системы (28) на ств-щие фкт., произведем сумв-ие по всем n нбл-ям и, разделив на n, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} r_{z_jF_1} &= a_{j1} + a_{j2}\, r_{F_1F_2} + \ldots + a_{jp}\, r_{F_1F_p}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{z_jF_k} &= a_{j1}\, r_{F_kF_1} + a_{j2}\, r_{F_kF_2} + \ldots + a_{jp}\, r_{F_kF_p}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{z_jF_p} &= a_{j1}\, r_{F_pF_1} + a_{j2}\, r_{F_pF_2} + \ldots + a_{jp}, \\ r_{z_jU} &= d_i. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $r_{z_jF_k}$ – вбрч-ый коэф. крц-и между j-м параметром и k-м фкт-ом; $r_{F_kF_p}$ – коэф. крц-и между k-м и p-м фкт-ми.

Если предположить, что общие фкт. между собой не крв-ны, то ур-ия (29) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} r_{z_jF_k} &= a_{jk}, \\ r_{z_jU} &= d_i, \end{aligned}\right\} \tag{29′}$$

т.е. коэф-ты отб-ия равны эл-ам структуры.

Введем понятие ост-го коэф-та крц-и и ост-ой крцн-ой матрицы. Исх-ой инф-ей для построения фктн-ой модели (25) служит матрица вбрч-ых парных коэф-ов крц-и. Используя построенную фктн-ю модель, можно снова выч-ть коэф-ты крц-и между признаками и сравнить их с исх-ми коэф-ми крц-и. Разница между ними и есть ост-ый коэф. крц-и.

В случае незв-ти фкт-ов имеют место совсем простые врж-ия для выч-мых коэф-ов крц-и между параметрами: для их выч-ия дт-но взять сумму пзв-й коэф-ов отб-ия, ств-щих нблв-щимся признакам:

$$r'_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \ldots + a_{jp}a_{kp}\ (j \neq k; j, k = \overline{1, p}\,), \tag{30}$$

где r'_{jk} – выч-ый по отб-ию коэф-т крц-и между j-м и k-м признаками. Ост-ый коэф. крц-и

$$\bar{r}_{jk} = r_{jk} - r'_{jk}\,.$$

матрица ост-ых коэф-ов крц-и наз. ост-ой матрицей или матрицей остатков

$$\overline{R} = R - R',$$

где $\overline{R}$ – матрица остатков, R – матрица вбрч-ых парных коэф-ов крц-и, или полная матрица, R' – матрица выч-ных по отб-ю коэф-ов крц-и.

Результаты ФА удобно представлять в виде табл. 8. Здесь суммы кв-ов нагрузок по строкам – общности параметров, а суммы кв-ов по столбцам – вклады фкт-ов в суммарную дсп. параметров. Имеет место стн-ие

$$\sum_{k=1}^{p} V_k = \sum_{j=1}^{m} h_j^2 = \sum_{ik} a_{jk}^2 = V.$$

Матрицу фктн-ых нагрузок можно получить различными способами. Более распространенным яв-ся метод главных фкт-ов, к-ый основан на принципе посл-ых прж-й и позволяет достичь любой точности. Сущ-ют хорошие алт-мы и прг-мы, реализующие все вычт-ые процедуры с помощью ЭВМ.

Таблица 8

	Факторные нагрузки	Общности
A	$a_{11}a_{21}\dots a_{k1}\dots a_{p1}$	h_1^2
	. . . .	…
	$a_{1m}a_{2m}\dots a_{km}\dots a_{pm}$	h_m^2
Вклады факторов	$V_1\ V_2\ \dots\ V_k\ \dots\ V_p$	V

Введем понятие редуцированной крцн-ой матрицы или просто редуцированной матрицы. Редуцированной наз. матрица вбрч-ых коэф-ов крц-и $\widetilde{R}$, у к-ой на главной диагонали стоят зн-ия общностей h_k^2 ($k = \overline{1, p}$):

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} h_1^2 & r_{21} & r_{31} & \dots & r_{m1} \\ r_{12} & h_2^2 & r_{32} & \dots & r_{m2} \\ . & . & . & . & . \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & \dots & h_m^2 \end{bmatrix}.$$

Редуцированная и полная матрицы связаны стн-ем:

$$\widetilde{R} = R - D,$$

где D – матрица характерностей.

Общности, как правило, неизвестны, и нахождение их в ФА представляет серьезную проблему. В начале опр-ют (хотя бы прж-но) число общих фкт-ов, свк-ть к-ых может с дт-ой точностью аппроксимировать все взаимосвязи вбрч-ой крцн-ой матрицы. Причем число общих фкт-в (общностей) равно рангу редуцированной матрицы, а при известном ранге можно по вбрч-ой крцн-ой матрице найти оценки общностей. Числа общих фкт-в можно опр-ть априори, исходя из физической природы эксп-та. Затем рассчитывают матрицу (методом главных фкт-в) фктн-х нагрузок, к-ая обладает важным св-ом: сумма пзв-й каждой пары ее столбцов равна нулю, т.е. фкт-ы попарно орт-ны.

Сама процедура нахождения фктн-х нагрузок, т.е. матрицы A, состоит из нескольких шагов: на первом шаге ищут коэф-ты фктн-х нагрузок при первом фкт-е так, чтобы сумма вкладов данного фкт-а в суммарную (сумр.) общность была мкс-ой:

$$V_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{p1}^2 \tag{31}$$

при условии

$$r_{j\varepsilon} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}a_{\varepsilon k} \quad (j,\ \varepsilon = \overline{1, m}), \tag{32}$$

где $r_{j\varepsilon} = r_{\varepsilon j}$, r_{jj} – общность h_j^2 параметра z_i.

Затем находим матрицу коэф-ов крц-и с учетом только первого фкт-а R_1' $= a_1a_1'$. Имея эту матрицу, получаем первую матрицу остатков: $R_1 = \widetilde{R} - R'$.

На втором шаге опр-ем коэф-ты нагрузок при втором фкт-е так, чтобы сумма вкладов второго фкт-а в остаточную (ост.) общность была мкс-ой. Сумма кв-ов нагрузок при втором фкт-е имеет вид:

$$V_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{p2}^2, \tag{33}$$

max V_2 находим при условии

$$\bar{r}'_{j\varepsilon} = \sum_{k=1}^{p} a'_{jk} a'_{\varepsilon k} \quad (j,\ \varepsilon = \overline{1, m}), \tag{34}$$

где $\bar{r}'_{j\varepsilon}$ – коэф. крц-и из первой матрицы остатков, $a'_{jk} a'_{\varepsilon k}$ – фктн. нагрузки с учетом второго фкт-а. Затем опр-ем матрицу коэф-ов крц-й с учетом второго фкт-а и выч-ем вторую матрицу остатков $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 - R'_2$.

ФА учитывает сумр-ю общность. Исх. сумр-ая общность $H = \sum_{j=1}^{m} h_j^2$. Итерационный процесс выделения фкт-ов заканчивают, когда учтенная выделенными фкт-ми сумр. общность отличается от исх. сумр-ой общности меньше чем на ε (ε – наперед заданное малое число).

Адекватность фктн-ой модели оценивается по матрице остатков: если вел-ы ее коэф-ов малы, то модель считают адекватной.

Такова посл-ть шагов нахождения фктн-ых нагрузок. Для поиска мкс-ма фк-и (31) при условии (32) можно использовать метод множителей Лагранжа, к-ый приводит к системе m ур-й отс-но неизвестных a_{ji}.

Разновидностью метода главных фкт-в яв-ся метод главных компонент или компонентный анализ, к-ый реализует модель вида

$$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + \ldots + a_{jm}F_m, \tag{35}$$

где m – кол. параметров (признаков). По сравнению с мд-ю (25) ФА здесь отсутствует хркн-ый фактор. В случае компонентного анализа исх-ой яв-ся матрица коэф-ов крц-и, где на главной диагонали стоят ед-цы. Результатом компонентного анализа, как и фкт-ом, яв-ся матрица фктн-ых нагрузок. Поиск фктн-го решения – это ортн-ое прб-ие матрицы исх-ых пер-ых, в результате к-го каждый параметр может быть представлен лин-ой комбинацией найденных m фкт-ов, к-ые наз. главными компонентами. Главные компоненты легко врж-ся через нблн-ые параметры.

Если нх-мо дальнейшее иссл., то из m компонент оставляют опр. кол-во. Сущ-ют различные критерии (кт.) для оценки числа оставляемых компонент. Чаще всего используют сд-й простой кт-й: оставляют столько компонент, чтобы сумр. дсп-ия, учитываемая ими, составляла заранее установленное число процентов. Первая из компонент должна учитывать мкс. суммарной дсп-и параметров; вторая – не крв-вать с первой и учитывать мкс. оставшейся дсп-и и так до тех пор, пока вся дсп-я не будет учтена. Сумма учтенных всеми компонентами дсп-й равна сумме дсп-й исх-х параметров. Мт-й аппарат компонентного фкт-а полностью совпадает с аппаратом метода главных фкт-ов. Отличие только в исх-ой матрице крц-й.

Компонента (т.е. фкт.) через исх. пер-ые врж-ся так:

$$F_{ik} = (a_{j1}z_{j1} + a_{j2}z_{j2} + \ldots + a_{jm}z_{jm})/\lambda_k \ (i = \overline{1, n}\,,\ j = \overline{1, m}\,,\ k = \overline{1, p}\,). \tag{36}$$

где a_{jm} – эл-ты фктн-го решения, z_{jm} – исх. пер-ые, λ_k – k-е собственное зн-ие, p – кол. оставленных главных компонент.

Для иллюстрации возможностей ФА покажем, как, используя метод главных компонент, можно сократить размерность пр-ва незв-ых пер-ых, перейдя от взаимно крв-ых параметров к незв. фкт-ам, число к-ых $p < m$.

п7. Пусть иссл-ся зв-ть себестоимости покрышек для автомобилей от технико-экономических (экн.) параметров. Найдем вид этой зв-ти.

Взяты сд-ие параметры: x_1 – масса покрышки, x_2 – наружный диаметр, x_3 – ширина профиля, x_4 – статический радиус, x_5 – максимально допустимая нагрузка, x_6 – норма слойности, x_7 – объем выпуска, x_8 – гарантийная наработка. Имеется 60 объектов.

Р. Матрица технико-экн. параметров предварительно стдз-ся. Вектор себестоимости обз-им Y. Требуемую зв-ть можно получить непосредственно, найдя ур-ие рег-и Y на X. Однако анализ крцн-ой матрицы (табл. 9) показывает сильную взаимную крн-сть между параметрами. ФА позволяет перейти от взаимозв-ых параметров к незв. фкт-ам, число к-ых $p < m$.

Таблица 9

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8
1	0,9806	0,9819	0,9543	0,9456	0,8703	– 0,3843	– 0,1502
	1	0,9936	0,9771	0,9414	0,8677	– 0,4130	– 0,1460
		1	0,9566	0,9620	0,9000	– 0,4344	– 0,1130
			1	0,8840	0,7921	– 0,3711	– 0,2147
				1	0,9712	– 0,4452	– 0,0864
					1	– 0,5133	– 0,0223
						1	– 0,0437
							1

По матрице крц-й выч-ны собственные векторы и собственные зн-ия и в итоге найдена матрица фктн-ых нагрузок (табл. 10). Подсчитан также процент суммарной дсп-и, учитываемой каждой компонентой. Первые четыре компоненты учитывают более 99% суммарной дсп-и параметров, поэтому в дальнейшем следует расв-ть только их. Т.о., всю вариацию (врц.) параметров можно объяснить действием четырех обобщенных фкт-ов, к-ые не были измерены и включены в исх. инф-ю.

Таблица 10

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	Дисперсия	Дисперсия, %
z_1	0,9714	– 0,1293	0,1068	– 0,0841	– 0,1287	0,0238	0,0626	– 0,0013	6,56	72,01
z_2	0,9766	– 0,1295	0,0790	– 0,1345	0,0196	0,0315	– 0,0461	– 0,0278	1,34	14,89
z_3	0,9876	– 0,0840	0,0653	– 0,0730	– 0,0048	0,0612	– 0,056	0,0083	0,77	8,60
z_4	0,9338	– 0,2200	0,0907	– 0,2382	0,0938	– 0,0624	0,0428	0,0083	0,25	2,74
z_5	0,9827	– 0,0118	0,0449	0,1693	– 0,0066	– 0,0202	– 0,0224	0,0482	0,03	0,36
z_6	0,9435	0,0821	– 0,0517	0,2999	0,0714	0,0538	0,0465	– 0,0165	0,02	0,27
z_7	– 0,5068	– 0,2018	0,8344	0,0780	0,0110	0,0062	0,0008	– 0,0013	0,01	0,17
z_8	– 0,0556	0,9717	0,1625	– 0,1524	0,0220	0,0458	0,0159	0,0125	0,04	0,05
										$\Sigma = 99,98$

Компоненты дт-но просто интерпретируются (инпр.). Рас-им матрицу фктн-ых нагрузок (табл. 10). Первый столбец ств-ет первой компоненте, где вклады почти всех параметров в компоненту дт-но высоки и примерно одинаков. Параметры – это технические (техн.) хркс-ки изделия, сд-но, первую компоненту можно считать обобщенным фкт-ом техн-их хркс-ик изделия. Во второй компоненте на втором столбце нб-й вклад дает компонента x_8 –

объем выпуска. Сд-но, вторую компоненту можно считать обобщенным производственным (прз.) фкт-ом. Третью компоненту можно инпр-ть как обобщенный фкт. эксплуатационных хркс-ик. Четвертая компонента – более узкая хркс-ка техн-их параметров изделия, т.е. геом-их хркс. покрышки.

Теперь по фм-е (25) для каждого объекта выч-им зн-ия всех четырех компонент. В результате получим новую матрицу F размерностью $p \times n$. Найдем зв-ть между Y и обобщенными фкт-ми F. Для этого применим обычный рег-ный анализ. Ур-ие имеет вид

$$Y = 94{,}22 + 34{,}66F_1 + 0{,}74F_2 + 0{,}76F_3 - 2{,}46F_4. \tag{37}$$

Отметим, что все пер-ые были приведены к одному масштабу, поэтому коэф-ы рег-и позволяют оценить истинный вклад каждого фкт-а в себестоимость. Так из ур-ия (37) следует, что мкс-ый вклад вносит первый обобщенный фкт. техн-их хркс-ик изделия. Вклад остальных фкт-ов гораздо меньше.

Для ур. (37) выч-ны совокупный коэф-т крц-и R = 0,974 и стс-ка F = $= S^2 / S^2_{ост}$ = 17,93 для оценки по кт-ю Фишера. По T_{15} приложений для $\alpha = 0{,}05$ и $k_1 = 4$, $k_2 = 60 - 4 - 1 = 55$ находим $F_{крт}(0{,}05;\ 4;\ 55) = 2{,}52$. Стс-ка $F > F_{крт}$, значит, аппроксимация ур-ем (37) рег-и хорошая. Это подтверждает и $R = 0{,}974$.

Особо следует остановиться на интерпретации (инпц.) результатов, т.е. на смысловой стороне ФА. Собственно ФА состоит из двух этапов: аппроксимация крцн-ой матрицы и инпц-и результатов. Аппроксимировать крцн. матрицу и выделить сильно кр-ющие группы параметров дт-но просто: из крцн-ой матрицы одним из методов ФА непосредственно получают матрицу нагрузок – фктн-ое решение, к-ое наз-ют прямым фктн-ым решением. Однако часто это решение не уд-ет многих исслт-ей. Они хотят инпр-ть фкт-р как скрытый, но сущ-ный параметр, поведение к-го опр-ет поведение нек-ой своей группы нблм-ых параметров, в то время как поведение др-х параметров опр-ся поведением др-х факторов. Для этого у каждого параметра должна быть нб-ая по модулю фктн. нагрузка с одним фкт-ом. Прямое решение следует прб-ть, что равносильно повороту осей фкт-ов. Такие прб-ия наз-ют вращениями и в итоге получают косвенное фктн. решение, к-ое и яв-ся результатом ФА.

6.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

6.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

Вопросы для самопроверки

1. Как вы понимаете фнц-ю, стсч-ю и крцн-ю зв-ти слн. вел-н? Приведите пример.
2. Дайте опр-ия условной ср-ей и линии рег-и. Приведите пример.
3. Приведите основные задачи крц-и.
4. Сформулируйте задачу нахождения параметров вбрч-го ур-ия прямой линии рег-и и приведите их фм-ы.
5. Как найти параметры ур-я $\overline{y}_x = \rho_{xy}x + b$ линии рег-и, если зн-ие x признака X нбл-ись n_x раз, y – n_y раз, пара чисел (x, y) – n_{xy} раз?
6. Приведите фм-у выч-ия вбрч-го коэф-та крц-и r_B.
7. Какими свойствами обладает вбрч-й коэф. крц-и?
8. В чем разница между понятиями некрв-сти и незв-ти слн-ых вел-н?
9. Как выч-ют вбрч-й коэф. крц-и, используя «ложный нуль»?
10. Приведите гп-у о значимости вбрч-го коэф-та крц-и.
11. В чем состоит суть криволинейной крц-и? Приведите ств-ие фм-ы.

6.2. МНОГОМЕРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ. РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите мнм-ое кол. числовых хркс-ик ммр-ых слн. вел-н.
2. В чем состоят особенности ммр-го крц. анализа и частного коэф-та крц-и?
3. Как опр-ся множественный коэф-т крц-и?
4. В чем состоит суть ранговой крц-и?
5. Как опр-ся коэф-ты крц-и рангов по Кэнделлу (τ) и Спирмэну (ρ)?

6.3. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается основная задача регрессионного (регн.) анализа?
2. Линейная (лин.) регрессия (рег.). Оценка для остаточной дсп-и $S^2_{ост}$.
3. Нелин-я рег-ия. Общий случай нелин-ой рег-и.
4. Оценка значимости коэф-та рег-и. Инрн. оценка коэф-ов рег-и и мт. ож-я.
5. Проверка значимости ур-ия рег-и.
6. В чем состоит суть ммр-го рег. анализа?
7. В чем состоит идея факторного анализа (ФА)? Приведите пример.

Типовые задачи для самостоятельной работы.

тз1. Пусть изучается зв-ть между объемом выполненных работ (Y) и накладными расходами (X). Имеем вбр-у из гнр-ой свк-ти, состоящую из 150 пар пер-ых (x_i; y_i). По данным, приведенным в табл. 1, выч-ть оценки параметров двумерной (дмр.) модели и записать ур-ие рег-и.

Р. $\overline{x} = \dfrac{\sum x m_x}{\sum m_x} = \dfrac{1}{150}(1{,}5\cdot 7 + 2{,}5\cdot 17 + 3{,}5\cdot 19 + 4{,}5\cdot 36 + 6{,}5\cdot 21 + 7{,}5\cdot 5 + 8{,}5\cdot 8) = 735/150 = 4{,}9.$

$$\overline{y} = \frac{\sum y m_y}{\sum m_y} = \frac{1}{150}(15\cdot 9 + 25\cdot 5 + 35\cdot 20 + 45\cdot 51 + 55\cdot 41\cdot + 65\cdot 20 + 75\cdot 4) = 7110/150 = 47{,}4.$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 m_x}{\sum m_x} - \left(\frac{\sum x m_x}{\sum m_x}\right)^2 = \frac{4053{,}5}{150} - \left(\frac{735}{150}\right)^2 = 3{,}028;\ S_x = \sqrt{3{,}028} = 1{,}74.$$

$$S_y^2 = \frac{\sum y^2 m_y}{\sum m_y} - \left(\frac{\sum y m_y}{\sum m_y}\right)^2 = \frac{363950}{150} - \left(\frac{7110}{150}\right)^2 = 179{,}56;\ S_y = \sqrt{179{,}56} = 13{,}4.$$

Таблица 1

Объем выполненных работ Y, млн. руб. \ Накладные расходы X, млн. руб.	1-2 1,5	2-3 2,5	3-4 3,5	4-5 4,5	5-6 5,5	6-7 6,5	7-8 7,5	8-9 8,5	m_Y
10-20 15	4	5							9
20-30 25	1	3	1						5
30-40 35	2	3	6	5	3	1			20
40-50 45		5	9	19	8	7	2	1	51
50-60 55		1	2	7	16	9	4	2	41
60-70 65			1	5	6	4	2	2	20
70-80 75							1	3	4
m_X	7	17	19	36	33	21	9	8	150

Для выч-ия коэф-та крц-и сначала найдем $\Sigma n_{xy}XY$ по табл. 2. Откуда

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{37175 - 150\cdot 4{,}9\cdot 47{,}4}{150\cdot 1{,}74\cdot 13{,}4} = \frac{2336}{3497{,}4} = 0{,}67, \text{ где } \sigma_x = s_x,\ \sigma_y = s_y.$$

Таблица 2

Y \ X	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	$X = \Sigma n_{xy}x$	yX
15	6 → 4 60	12,5 → 5 75							18,5	277,5
25	1,5 1 25	7,5 3 75	3,5 1 25						12,5	312,5
35	3 2 70	7,5 3 105	21 6 210	22,5 5 175	16,5 3 105	6,5 1 35			77	2695
45	↓ –	12,5 5 225	31,5 9 405	85,5 19 855	44 8 360	45,5 7 315	15 2 90	8,5 1 45	242,5	10912,5
55	–	2,5 1 55	7 2 110	31,5 7 385	88 16 880	58,5 9 495	30 4 220	17 2 110	234,5	12897,5
65	–	–	3,5 1 65	22,5 5 325	33 6 390	26 4 260	15 2 130	17 2 130	114	7605
75	–	–	–	–	–	–	7,5 1 75	25,5 3 225	33	2475
$Y = \Sigma n_{xy}y$	155	535	815	1740	1735	1105	515	510		$\Sigma yX =$ $= 37175$
xY	232,5	1337,5	2852,5	7830	9542,5	7182,5	3862,5	4535	$\Sigma xY =$ $= 37175$	

Теперь найдем ур-ие рег-и

$$\overline{y}_x = \overline{y} + r_B \frac{s_y}{s_x}\left(x - \overline{x}\right) = 47{,}4 + 0{,}67 \cdot \frac{3{,}4}{1{,}74}(x - 4{,}9) = 47{,}4 + 5{,}16(x - 4{,}9) = 5{,}16x + 22{,}12.$$

$$\overline{x}_y = \overline{x} + r_B \frac{s_x}{s_y}\left(y - \overline{y}\right) = 4{,}9 + 0{,}67 \cdot \frac{1{,}74}{13{,}4}(y - 47{,}4) = 4{,}9 + 0{,}09(y - 47{,}4) = 0{,}09y + 0{,}63.$$

Полученные ур. рег-и показывают, как в ср-ем изменяется Y (или X) в зв-ти от изменения аргумента X (или Y). Задавая зн-ия X (или Y), можно рассчитывать ожидаемое зн-ие Y (или X).

Получение табл. 2 из табл. 1 не вызывает затруднения (см. табл. 5 из 4°: 6.1). Причем сумв-ие по всем строкам (столбцам) показано стрелками первой(го) строки (столбца).

тз2. По вбр-е объема $n = 100$, извлеченной из дмр-ой норм. гнр-ой свк-ти (X, Y), составлена крц-ая табл. 3.

Требуется: а) найти вбрч-ый коэф. крц-и; б) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп-у о рав-ве нулю гнр-го коэф. крц-и при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_Г \neq 0$.

Р. а) Взяв ложные нули $c_1 = 24$, $c_2 = 55$ и шаги $h_1 = 15 - 10 = 5$, $h_2 = 45 - 35 = 10$, перейдем к условным вариантам (врт.) (табл. 4)

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} = \frac{x_i - 25}{5}, \quad v_i = \frac{y_i - c_2}{h_2} = \frac{y_i - 55}{10}.$$

Частоты переписывают из крц-ой табл. 3 первоначальных врт. и в итоге получают крц-ю табл. 4.

Таблица 3

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_Y
35	5	1	–	–	–		6
45	–	6	2	–	–	–	8
55	–	–	5	40	5	–	50
65	–	–	2	8	7	–	17
75	–	–	–	4	7	8	19
n_X	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Таблица 4

v \ u	–3	–2	–1	0	1	2	n_v
–2	5	1	–	–	–	–	6
–1	–	6	2	–	–	–	8
0	–	–	5	40	5	–	50
1	–	–	2	8	7	–	17
2	–	–	–	4	7	8	19
n_u	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Используя данные табл. 4, находим

$$\overline{u} = \frac{\sum u m_u}{\sum m_u} = \frac{1}{100} \cdot [(-3)\cdot 5 + (-2)\cdot 7 + (-1)\cdot 9 + 1\cdot 19 + 2\cdot 8] = -0{,}03$$

$$\overline{v} = \frac{\sum v m_v}{\sum m_v} = \frac{1}{100} \cdot [(-2)\cdot 6 + (-1)\cdot 8 + 1\cdot 17 + 2\cdot 19] = 0{,}35;$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum u^2 m_u}{\sum m_u} - \left(\frac{\sum u m_u}{\sum m_u}\right)^2 = \frac{133}{100} - 0{,}001 = 1{,}33, \quad \sigma_u = \sqrt{1{,}33} = 1{,}153;$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sum v^2 m_v}{\sum m_v} - \left(\frac{\sum v m_v}{\sum m_v}\right)^2 = \frac{125}{100} - 0{,}123 = 1{,}127, \quad \sigma_v = \sqrt{1{,}127} = 1{,}062.$$

Пользуясь расчетной табл. 2, найдем $\Sigma m_{uv}uv = 99$ и вычислим

$$r_B = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{99 - 100\cdot(-0{,}03)\cdot 0{,}35}{100\cdot 1{,}153\cdot 1{,}062} = 0{,}817.$$

б) Проверим нулевую гп-у (H_0: $r_Г = 0$) о рав-ве нулю гнр-го коэф. крц-и. Вычислим нблм. значение кт-ия

$$\tau_{нбл} = \frac{r_B \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B^2}} = \frac{0{,}817\sqrt{100-2}}{\sqrt{1 - 0{,}817^2}} = 14{,}03.$$

По условию, конкурирующая гп. имеет вид $r_Г \neq 0$, поэтому критическая (крт.) обл. – двс-я. По $Т_{14}$ при $\alpha = 0{,}05$ и $k = n - 2 = 98$ находим $t_{крт}(0{,}05; 98) = 1{,}665$.

Т.к. $\tau_{нбл} > t_{крт}$, то нулевую гипотезу о рав-ве нулю гнр-го коэф. крц-и отвергаем, т.е. коэф-т крц-и значимо отличается от нуля, сд-но X и Y крн-ы.

тз3. По данным табл. 5 оценить параметры ур-ия рег-и. Пер-ые связаны между собой зв-ю $M(Y|X = X) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$.

Р. Система норм. ур-ий оценочного врж. $\overline{y} = b_2x^2 + b_1x + b_0$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &b_2\Sigma x_i^4 + b_1\Sigma x_i^3 + b_0\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i x_i^2;\\ &b_2\Sigma x_i^3 + b_1\Sigma x_i^2 + b_0\Sigma x_i = \Sigma y_i x_i;\\ &b_2\Sigma x_i^2 + b_1\Sigma x_i + b_0\cdot n = \Sigma y_i. \end{aligned}\right\}$$

Из табл. 5 получаем:

$$\left.\begin{aligned} &4025b_2 + 1175b_1 + 365b_0 = 1237;\\ &1175b_2 + 365b_1 + 125b_0 = 405;\\ &365b_2 + 125b_1 + 50b_0 = 151. \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} &11{,}03b_2 + 3{,}22b_1 + b_0 = 3{,}39;\\ &9{,}4b_2 + 2{,}92b_1 + b_0 = 3{,}24;\\ &7{,}3b_2 + 2{,}5b_1 + b_0 = 3{,}02. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему ур-ий, получим $b_2 = -0{,}055$, $b_1 = 0{,}799$, $b_0 = 1{,}424$. Ур-ие рег-и:

$$\overline{y}(x) = -0{,}055x^2 + 0{,}799x + 1{,}424.$$

Таблица 5

y \ x	1	2	3	4	m_y	ym_y	yxm_{xy}	yx^2m_{xy}
5				1	1	5	20	80
4		3	6	6	15	60	192	648
3	3	8	6	3	20	60	147	411
2	5	4	3		12	24	44	96
1	2				2	3	2	2
m_x	10	15	15	10	50	151	405	1237
xm_x	10	30	45	40	125			
x^2m_x	10	60	135	160	365			
x^3m_x	10	120	405	640	1175			
x^4m_x	10	240	1215	2560	4025			

Оценим ост. дсп-ю. Все выч-ия сведены в табл. 5а. Ост. дсп-ия:

$$S^2_{ост} = \frac{\Sigma[y_i - y(x_i)]^2 m_x}{n-m-1} = \frac{0{,}575}{47} = 0{,}0122.$$

Таблица 5а

y_i	$y(x_i)$	m	x	$[y_i - y(x_i)]^2m$	$(y_i - \overline{y})$	$(y_i - \overline{y})^2m$
2,100	2,168	10	1	0,046	– 0,92	8,464
2,933	2,802	15	2	0,256	– 0,087	0,1125
3,200	3,326	15	3	0,237	+ 0,180	0,486
3,800	3,740	10	4	0,036	+ 0,780	6,084
Σ				0,575		15,1465

тз4. По данным крцн-ой табл. 6 выч-ть вбрч-ый коэф. крц-и и найти вбрч. ур-ие прямой рег-и Y на X.

Р. Перейдем к условным врт. $u = \dfrac{x-c_1}{h_1} = \dfrac{x-40}{10}$ (в кач-е ложного нуля c_1 взята врт-а $x = 40$, имеющая нб. частоту; шаг $h_1 = 20 - 10 = 10$), анч-но находим $v = \dfrac{y-c_2}{h_2} = \dfrac{y-35}{10}$. Составим крцн-ю табл. 6а в условных врт-х. Найдем

$$\overline{u} = \frac{\sum um_u}{\sum m_u} = \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-2) + 63\cdot(-1) + 20\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} = \frac{-85}{200} = -0{,}425,$$

$$\overline{v} = \frac{\sum vm_v}{\sum m_v} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = \frac{18}{200} = 0{,}09.$$

Выч-им вспомогательную вел-у $\overline{u^2} = \dfrac{5\cdot 9+27\cdot 4+63\cdot 1+29\cdot 1+9\cdot 4}{200}$ = 1,405. Откуда получим σ_u $= \sqrt{\overline{u^2}-\bar{u}^2} = \sqrt{1{,}405-0{,}425^2} = 1{,}106$.

Анч-но находим $\sigma_v = 1{,}209$.

Таблица 6

$y \backslash x$	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	–	–	–	–	12
25	–	20	23	–	–	–	43
35	–	–	30	47	2	–	79
45	–	–	10	11	20	6	47
55	–	–	–	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Таблица 6а

$v \backslash u$	– 3	– 2	– 1	0	1	2	n_v
– 2	5	7	–	–	–	–	12
– 1	–	20	23	–	–	–	43
0	–	–	30	47	2	–	79
1	–	–	10	11	20	6	47
2	–	–	–	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Находим $\Sigma n_{uv}uv$ методом четырех полей, для чего составляем расчетную табл. 6б. В правых верхних углах клеток табл. 6б записаны пзв-ия ств-их врт-ов, н-р, $u_1v_1 = (-3)(-2) = 6$, $u_2v_1 = (-2)(-2) = 4$ и т.д.

Сложив числа итоговых клеток, получим $\Sigma n_{uv}uv = 121 - 10 + 58 = 169$.

Найдем искомый коэф. крц-и:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{169-200\cdot(-0{,}425)\cdot 0{,}09}{200\cdot 1{,}106\cdot 1{,}209} = 0{,}603.$$

Таблица 6б

$v \backslash u$	– 3	– 2	– 1	0	1	2	*I*	II
– 2	6 5	4 7	–		–	–	58	–
– 1	–	2 20	1 23		–	–	63	–
0							III	IV
1	–	–	– 1 10		1 20	2 6	– 10	32
2	–	–	–		2 7	4 3	–	26
I	30	68	23	II	–	–	121	–
III	–	–	– 10	IV	34	24	– 10	58

Теперь найдем ур-ие рег-и Y на X, используя фм-ы:

$$\sigma_x = h_1\sigma_u,\ \sigma_y = h_2\sigma_v,\ \bar{x} = \bar{u}\,h_1 + c_1,\ \bar{y} = \bar{v}\,h_2 + c_2.$$

Выч-им:

$$\bar{x} = \bar{u}\,h_1 + c_1 = -0{,}425\cdot 10 + 40 = 35{,}75;\ \bar{y} = \bar{v}\,h_2 + c_2 = 0{,}09\cdot 10 + 35 = 35{,}9;$$

$$\sigma_X = h_1\sigma_u = 1{,}106\cdot 10 = 11{,}06,\ \sigma_Y = h_2\sigma_v = 1{,}209\cdot 10 = 12{,}09.$$

Написав ур-ие рег-и Y на X в общем виде $\bar{y}_x - \bar{y} = r_B\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$, получим искомое ур-ие

$\bar{y}_x - 35{,}9 = 0{,}603\cdot\dfrac{12{,}09}{11{,}06}(x - 35{,}75)$ или окончательно

$$\tilde{y}_x = 0{,}659x + 12{,}34.$$

Сравним условные ср., выч-ные: а) по этому ур-ю; б) по данным крцн-й табл. 6. Н-р, при $x = 30$:

$$\text{а) } \bar{y}_{30} = 0{,}659 \cdot 30 + 12{,}34 = 32{,}11;$$

$$\text{б) } \bar{y}_{30} = \frac{23 \cdot 25 + 30 \cdot 35 + 10 \cdot 45}{63} = 32{,}94.$$

Как видим, согласование расчетного и нбл-ного условных ср. – уд-ое.

тз5. Температура объекта Z зависит от процентного содержания X компоненты A в теплоносителе и температуры окружающей среды Y. Результаты 11 замеров приведены в табл. 7.

Таблица 7

X, %	1	4	9	11	3	8	5	10	2	7	6
Y, °C	8	2	– 8	– 10	6	– 8	0	– 12	4	– 2	– 4
Z, °C	6	8	1	0	5	3	2	– 4	10	– 3	5
$\tilde{Z}$, °C	7,90	4,96	0,06	–2,96	4,88	1,04	3,98	0,14	7,98	0,96	4,06

Найти оценки параметров модели $Z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y$, выч-ть коэф-ты мнн-ой рег-и, проверить гп-ы H_0: $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2$).

Р. Коэф-ты фк-и рег-и $\tilde{z} = b_0 + b_1 x + b_2 y$ найдем по методу нм-их кв-ов в виде $F(b_0, b_1, b_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\tilde{z} - z_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (b_0 + b_1 x + b_2 y - z_i)^2$. Нх-ые условия мнм-а фк-и F образуют систему (вместо $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ пишем Σ):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b_0} &= \frac{1}{n}\Sigma 2(b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i - z_i)\cdot 1 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b_1} &= \frac{1}{n}\Sigma 2(b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i - z_i)x_i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b_2} &= \frac{1}{n}\Sigma 2(b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i - z_i)y_i = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b_0 + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y} &= \bar{z}; \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} + b_2 \overline{yx} &= \overline{zx}; \\ b_0 \bar{y} + b_1 \overline{xy} + b_2 \overline{y^2} &= \overline{zy}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

По данным табл. 7 выч-яем: $\bar{z} = 3$; $\bar{x} = 6$; $\bar{y} = -2$; $\overline{x^2} = \Sigma x_i^2/n = 46$; $\overline{y^2} = \Sigma y_i^2/n = 44$; $\overline{xy} = \Sigma x_i y_i/n = -31{,}45$; $\overline{zx} = \Sigma z_i x_i/n = 7{,}73$; $\overline{zy} = \Sigma z_i y_i/n = 12{,}9$. Подставив эти зн-ия в (1), получим:

$$\left.\begin{aligned} b_0 + 6b_1 - 2b_2 &= 3; \\ 6b_0 + 46b_1 - 31{,}45b_2 &= 7{,}73; \\ -2b_0 - 31{,}5b_1 + 44b_2 &= 12{,}9. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $b_0 = 14{,}186$; $b_1 = -2{,}041$; $b_2 = -0{,}53$. Итак, получили ур-ие рег-и:

$$\tilde{z} = 14{,}186 - 2{,}041x - 0{,}53y \qquad (2)$$

Зн-ия вел-ны $\tilde{z}$, вычн-ые для нблм-ых зн-й вел-н x и y, приведены в последней строке табл. 7.

Найдем погр-ть ур-ия (2):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(z_i - \tilde{z}_i\right)} = \sqrt{6{,}19} = 2{,}49;$$

а также вбрч-е ср.кв. отк-ие вел-ы z:

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(z_i - \bar{z}_i\right)} = \sqrt{17{,}27} = 4{,}16.$$

Т.о., погр-ть модели $z_i \approx \tilde{z}_i$ в $1{,}7 = \frac{4{,}16}{2{,}49}$ раз меньше погр-ти модели $z_i \approx \bar{z}_i$. Вычислим также

$$\sigma_{\tilde{z}} = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(\tilde{z}_i - \bar{z}_i\right)} = \sqrt{10{,}78} = 3{,}28.$$

Степень лин. крцн-ой звт-и вел-ы z от x и y по вбрч. данным измеряется вбрч. мнн-ым коэф-ом крц-и:

$$R^2_{z|x,y} = \frac{\sigma^2_{\tilde{z}}}{\sigma^2_z} = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(\tilde{z}_i - \bar{z}_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum\left(z_i - \bar{z}_i\right)^2} = \frac{10{,}78}{17{,}27} = 0{,}62. \qquad (3)$$

Т.о., судя по вбрч. данным, 62% дсп-и вел-ы z (температура объекта) объясняется ее лин-ой в ср-ем звт-ю от x и y.

Для проверки гп-ы H_0: $R_{z|x,y} = 0$ используется F-рсп. с $k_1 = 2$ и $k_2 = n - 3 = 8$ ст-ми свободы и для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ находим из Т$_{15}$ $F_{\text{крт}}$ и сравниваем с F. Для нашего случая имеем

$$F = \frac{\sigma^2_{\tilde{Z}} \cdot \frac{n}{2}}{\sigma^2_Z \cdot \frac{n}{n-3}} = \frac{10{,}78/2}{6{,}19/8} = 6{,}97;\ F_{\text{крт}}\,(0{,}05;\, 2;\, 8) = 4{,}46.$$

Т.к. $F > F_{\text{крт}}$, то гп-у H_0 отвергаем, т.е. с вер-ю, равной 0,05, считаем, что в гнр-ой свк-ти изменчивость z связана с лин-ым влиянием на них x и y. Судя по вбр-е, ст. этого влияния составляет 62%, на долю некрум-ых фкт-ов приходится 38%.

зм1. Отметим, что фм-е (3) тождественна фм-а (теснота связи z с x, y)

$$R^2_{z|x,y} = \frac{r^2_{zx} + r^2_{zy} - 2r_{zx}r_{zy}r_{xy}}{1 - r^2_{xy}},$$

где r – вбрч. парный коэф-т крц-и, причем $0 \le R \le 1$.

Теснота связи z и x (при пст-ом y), z и y (при пст-ом x) оценивается ств-но частными вбрч-ми коэф. крц-и:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{xy}\right)\cdot\left(1 - r^2_{yz}\right)}};\ r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy} \cdot r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{xy}\right)\cdot\left(1 - r^2_{xz}\right)}}.$$

Фк-ю рег-и $\tilde{z} = b_0 + b_1x + b_2\cdot$возьмем в виде $\tilde{z} - \bar{z} = b_1\cdot(x - \bar{x}) + b_2\cdot(y - \bar{y})$, где

$$b_1 = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{1 - r^2_{xy}} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x},\ b_2 = \frac{r_{yz} - r_{xy} \cdot r_{xz}}{1 - r^2_{xy}} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Здесь r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} – коэф. крц-и между признаками ств-но x и z, y и z, x и y.

Оценка β_0 выч-ся по фм-е $b_0 = \bar{z} - b_1\bar{x} - b_2\bar{y}$.

зм2. Задачи мнн-ой лин. рег-и можно решить и с помощью матричных ур-ий (см. [8]), что рекомендуем освоить читателю и решить тз5 этим методом, затем произвести сравнительную оценку двух методов.

Задание для кр. работы: по образцу примеров из 6.1–3 и тз1-тз5 решить з1-з20.

1. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и Y на X по данным табл. 1*.
2. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и Y на X по данным табл. 2*.
3. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и Y на X по данным табл. 3*.

Ук. См. п4 из 4°: 6.1. О: 1. $\bar{y}_x = 1{,}92x + 101{,}6$. 2. $\bar{y}_x = 4x + 57{,}8$. 3. $\bar{y}_x = -2{,}15x + 181{,}8$.

4. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и X на Y по данным табл. 1*.
5. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и X на Y по данным табл. 2*.
6. Найти вбрч-е ур-ие прямой линии рег-и X на Y по данным табл. 3*.

Ук. См. п4 из 4°: 6.1. О: 4. $\bar{x}_y = 0{,}12y + 3{,}7$. 5. $\bar{x}_y = 0{,}19y - 3{,}1$. 6. $\bar{x}_y = -0{,}33y + 65{,}7$.

1*

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	–	–	–	–	–	–	3
120	3	4	3	–	–	–	–	–	10
140	–	–	5	10	8	–	–	–	23
160	–	–	–	1	–	6	1	1	9
180	–	–	–	–	–	–	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

2*

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	–	1	–	–	–	–	–	1
150	1	2	5	–	–	–	–	8
175	–	3	2	12	–	–	–	17
200	–	–	1	8	7	–	–	16
225	–	–	–	–	3	3	–	6
250	–	–	–	–	–	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

3*

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	–	–	–	–	–	6	1	7
120	–	–	–	–	–	4	2	6
140	–	–	8	10	5	–	–	23
160	3	4	3	–	–	–	–	10
180	2	1	–	1	–	–	–	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

7. По вбр-е объема $n = 62$, извлеченной из норм. дмр-ой гнр-ой свк-ти (X, Y), найден вбрч-й коэф. крц-и $r_B = 0{,}3$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у о рав-ве нулю гнр-го коэф-та крц-и при конкурирующей гп-е H_1: $r_Г \neq 0$. Ук. См. п5 из 5°: 6.1. О: $k = 60$, $\tau_{нбл} = 2{,}43$, $t_{крт}(0{,}01;\ 60) = 2{,}66$. Т.к. $\tau_{нбл} < t_{крт}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; X и Y – некрв. слн. вел-ы.

8. Решить з7 при $n = 120$, $r_B = 0{,}4$, $\alpha = 0{,}05$. О: $k = 118$, $\tau_{нбл} = 4{,}74$; $t_{крт}(0{,}05;\ 118) = 1{,}16$. Нулевая гп H_0: $r_Г = 0$ отвергается, т.е. X и Y – некрв. слн. вел-ы.

9. По вбр-е объемом $n = 100$, извлеченной из дмр-ой норм. гнр-ой свк-ти (X, Y) составлена крцн-я табл. 8. Требуется: а) найти вбрч-й коэф. крц-и; б) при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $r_Г = 0$ о равенстве нулю гнр-го коэф-та крц-и $r_Г$ при конкурирующей гипотезе H_1: $r_Г \neq 0$. Ук. Перейти к условным врт-ам $u_i = (x_i - 17)/5$, $v_i = (y_i - 130)/10$, см. тз2. О: а) $\overline{u} = -0{,}11$; $\sigma_u = 0{,}948$; $\overline{v} = 0{,}25$; $\sigma_v = 0{,}994$. $\Sigma n_{uv}uv = 73$, $r_B = 0{,}8$; б) $\tau_{нбл} = 13{,}2$; $t_{крт}(0{,}01;\ 98) = 2{,}64$. Нулевая гипотеза отвергается, т.е. X и Y крв-ы.

10. Решить з9 при $n = 100$, $\alpha = 0{,}001$; H_0: $r_Г = 0$; H_1: $r_Г \neq 0$ по данным табл. 9. Ук. Перейти к условным врт-ам $u_i = (X_i - 42)/10$, $v_i = (Y_i - 80)/5$, см. тз2. О: а) $\overline{u} = -0{,}03$; $\sigma_u = 1{,}321$; $\overline{v} = -0{,}09$; $\sigma_v = 1{,}877$. $\Sigma n_{uv}uv = -206$, $r_B = -0{,}83$; б) $\tau_{нбл} = -14{,}73$; $t_{крт}(0{,}001\ 98) = 3{,}43$. Нулевая гипотеза отвергается, т.е. X и Y крв-ы.

11. Решить з9 при $n = 100$, $\alpha = 0{,}05$; H_0: $r_Г = 0$; H_1: $r_Г \neq 0$ по данным табл. 10. Ук. Перейти к условным врт-ам $u_i = (X_i - 115)/5$, $v_i = (Y_i - 45)/10$, см. тз2.

О: а) $\overline{u} = -0{,}84$; $\sigma_u = 1{,}758$; $\overline{v} = 0{,}69$; $\sigma_v = 1{,}563$. $\Sigma n_{uv}uv = -94$, $r_B = -0{,}13$; б) $\tau_{нбл} = -1{,}3$; $t_{крт}(0{,}05;\ 98) = 1{,}565$. Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у, т.е. X и Y некрв-ы.

Таблица 8

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	–	–	–	–	6
120	–	6	2	–	–	–	8
130	–	–	3	50	2	–	55
140	–	–	1	10	6	–	17
150	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Таблица 9

Y \ X	12	22	32	42	52	62	72	n_y
65	–	–	–	–	10	6	2	18
70	–	–	–	–	–	4	1	5
75	–	–	2	7	4	2	–	15
80	–	–	1	25	–	–	–	26
85	–	4	6	–	1	–	–	11
90	1	5	8	2	–	–	–	16
95	1	2	6	–	–	–	–	9
n_x	2	11	23	34	15	12	3	$n = 100$

Таблица 10

$Y \backslash X$	100	105	110	115	120	125	n_y
35	4	–	6	7	8	3	28
45	5	5	2	10	–	–	22
55	6	7	–	–	2	3	18
65	–	6	5	4	–	2	17
75	5	1	2	4	3	–	15
n_x	20	19	15	25	13	8	$n = 100$

12. Найти вбрч. ур-ие рег-и $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ и вбрч-ое крцн. отн-ие η_{yx} по данным, приведенным в крцн-ой табл. 11.

13. Решить з12 по данным табл. 12.

14. Решить з12 по данным табл. 13.

15. Решить з12 по данным табл. 14.

16. Решить з12 по данным табл. 15.

О: 12. $\overline{y}_x = 0{,}66x^2 + 1{,}23x + 1{,}07$; $\eta_{yx} = 0{,}95$. 13. $\overline{y}_x = 3{,}20x^2 - 13{,}1x + 9{,}09$; $\eta_{yx} = 0{,}99$. 14. $\overline{y}_x = 1{,}53x^2 + 1{,}95x + 1$; $\eta_{yx} = 0{,}86$. 15. $\overline{y}_x = 1{,}59x^2 + 3{,}33x + 9{,}4$; $\eta_{yx} = 0{,}83$. 16. $\overline{y}_x = -1{,}52x^2 + 121{,}94x - 576$; $\eta_{yx} = 0{,}83$.

Таблица 11

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7	12		19
17					20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

Таблица 12

$Y \backslash X$	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

Таблица 13

$Y \backslash X$	0	4	5	n_y
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n = 150$

Таблица 14

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
n_x	27	23	28	23	39	$n = 150$

Таблица 15

$Y \backslash X$	7	8	9	n_y
200	41	7		48
300	1	52	1	54
400		8	40	48
n_x	42	67	41	$n = 150$

17. Найти вбрч. ур-ие рег-и $\overline{x}_y = ay^2 + by + c$ и вбрч-ое крцн. отн-ие η_{xy} по данным в крцн-ой табл. 16.

18. Решить з17 по данным табл. 17.

О: 17. $\overline{x}_y = 2{,}8y^2 + 0{,}02y + 3{,}18$; $\eta_{xy} = 0{,}96$. 18. $\overline{x}_y = 2{,}29y^2 - 1{,}25y + 1$; $\eta_{xy} = 0{,}92$.

Таблица 16

Y \ X	6	30	50	n_Y
1	15			15
3	1	14		15
4		2	18	20
n_X	16	16	18	$n = 50$

Таблица 17

Y \ X	1	9	19	n_Y
0	13			13
2	2	10		12
3	1	1	23	25
n_X	16	11	23	$n = 50$

19. Для приведенных ниже данных найти оценки параметров модели $z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y$, выч-ть коэф-ты мнн-ой рег-и, проверить гп-ы H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и H_0^j : $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2$) (см. п6 из 6°: 6.3 и тз5).

x	1	– 1	2	1	– 1	– 4	7	0	8	3	6	– 2
y	– 1	1	– 2	– 6	– 8	5	3	– 3	0	– 10	2	7
z	2	0	1	– 4	– 8	4	11	– 2	9	8	10	5

О: $\tilde{z} = 1{,}8 + 1{,}07x + 0{,}59y$, гп-ы H_0 и H_0^j отклоняются, $R \approx 0{,}815$.

20. Решить з19 при сд-их исх. данных.

x	1	4	0	5	–3	3	–5	–1	2	–2
y	4	–6	2	–4	12	–2	14	6	0	8
z	–4	–5	4	–1	4	0	5	1	2	7

О: $\tilde{z} = 2{,}75 - 1{,}42x - 0{,}26y$, гп-ы H_0 и H_0^j принимаются, $R \approx 0{,}739$.

21. Решить з19 при сд-их исх. данных.

x	31	34	35	41	38	32	29	34
y	29,5	14,2	18,0	21,3	47,5	10,0	21,0	36,5
z	22,0	14,0	23,0	43,0	66,0	7,6	12,0	36,0

О: $\tilde{z} = -94{,}55 + 2{,}08x + 1{,}07y$, гп-ы H_0 и H_0^j отклоняются, $R \approx 0{,}99$.

7. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. МАССОВЫЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

> Абстракция является решающей чертой [рационального] знания, потому что при сравнении и классификации необъятного многообразия форм, структуры и явлений вокруг нас мы не можем учесть все их особенности, а отбираем среди них лишь немногие важные. Так мы строим мысленный образ реальности, в котором вещи сводятся к их общим очертаниям.
>
> Ф. Капра

ЛЕКЦИЯ 20

7.1. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЦЕПИ МАРКОВА

1°. Основные понятия случайных процессов. До сих пор в основном мы изучали отдельные слн. вел-ы. Рас-им теперь основные понятия и нек-ые приложения слн-ых процессов (или слн. фк-й), представляющих не отдельные слн. вел-ы, а семейства слн-ых вел-н, звщ-их от параметра. Именно такая схема расв-ся в данной лк-и.

Под слн. процессами будем понимать слн-ые вел-ы, изменяющиеся в звт-и от вр-и или какого-либо др. параметра. Н-р, при малых вр-ных инр-ах плодородие почвы – фк-ия пр-ых координат (крд.), а при больших вр-ных инр-ах (десятки, сотни лет) надо еще учитывать зв-ть от вр-и. Или еще: рождаемость – фк. возрастной структуры населения и др-х условий (планирование (плн.) числа детей в семье, традиции и т.д.), а от вр-и они зв-т лишь постольку, поскольку все факторы (фкт.), влияющие на рождаемость, развиваются во вр-и. Отсюда получим сд. опр-ие.

о1. Слн. процессом наз. семейство слн-ых вел-н $X(t) = X_t(w)$, $t \in T$, заданных на вероятностном (вер.) пр-ве $\{\Omega, S, P\}$.

Параметр t обычно интерпретируют (инпр.) как время. Фк-ю вр-и $X_t(w_0)$ при фиксированном (фксн.) элементарном (элр.) событии (сб.) $w_0 \in \Omega$ наз. реализацией (траекторией) слн-го процесса. Если фиксировать (фкс.) зн-ие вр-и t_0, то $X_{t_0}(w)$ есть обычная слн. вел-а. S – мн. состояний.

Если параметр t принимает дискретные (дк.) зн-ия ($t = 1, 2, \ldots$), то $X(t)$ принимает дк. зн-ия; если t в нек-ом инр-ле принимает непр-ые зн-ия, то $X(t)$ – процесс с непр. зн-ми.

Т.к. речь идет о семействе слн. вел-н, то их взаимосвязь может быть охарактеризована только многомерными (ммр.) распределениями (рсп.).

о2. Слн-ый процесс считается заданным, если для любого набора $0 \le t_1 < < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i \in T$, указано ммр-ое рсп-ие

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\}, \qquad (1)$$

причем эти рсп-ия согласованы между собой, т.е. при $n' < n$ имеем

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n'}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n'}) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n'}, \infty, \ldots, \infty).$$

о3. Слн-ый процесс $X(t)$ наз. процессом с незв. зн-ми, если для любого набора $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i \in T$, слн. вел-ы $X(t_1)$, $X(t_2)$, …, $X(t_n)$ незв-мы.

Ммр-ые рсп-ия слн-го процесса с незв-ми зн-ми целиком опр-ся одномерными (омр.) рсп-ми, т.к.

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1}(x_1)\, F_{t_2}(x_2) \ldots F_{t_n}(x_n). \tag{2}$$

о4. Мт-им ожиданием (ож.) слн-го процесса $X(t)$ наз. неслн-ая фк. $a(t) = M[X(t)]$, зн-ие к-ой при фксн-ом зн-и $t = t_0$ равно мт-му ож-ю слн-ой вел-ы $X(t_0)$, т.е. $a(t_0) = M[X(t_0)]$.

Мт. ож-ие $a(t)$ есть нек-ая ср. фк-ия (см. рис. 1), около к-ой группируются реализации слн-го процесса, поэтому иногда обз-ют $M[X(t)] = m(t)$.

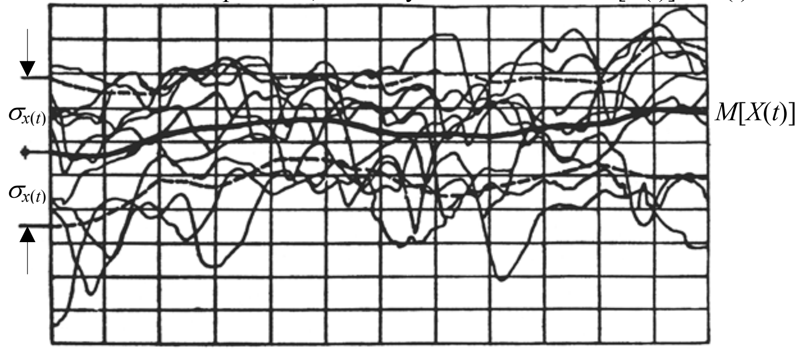


Рис. 1

о5. Дсп-ей слн-го процесса $X(t)$ наз. неслн. фк-ия $\sigma^2(t) = D[X(t)] = M[X(t) - a(t)]^2$, зн-ие к-ой при фксн-ом $t = t_0$ равно дсп-и слн-ой вел-ы $X(t_0)$, т.е. $\sigma^2(t_0) = D[X(t_0)]$.

Дсп-ия хркз-ет рассеяние реализаций слн-го процесса отс-но ср-го течения слн-го процесса, т.к. отс-но $a(t) = m(t)$. На рис. 1 показано ср. кв. отк-ие слн-го процесса $\sigma_{x(t)} = \sqrt{\sigma^2(t)} = \sigma(t)$.

о6. Крцн-ой (автокрцн-ой) фк-ей слн-го процесса $X(t)$ наз. неслн. фк-ия $B(t, \tau) = \mathrm{cov}[X(t), X(\tau)] = M[(X(t) - a(t))(X(\tau) - a(\tau))]$, зн-ие к-ой при фксн-ом $t = t_0$, $\tau = \tau_0$ равно коэф-ту ковариации слн-ых вел-н $X(t_0)$, $X(\tau_0)$, т.е. $B(t_0, \tau_0) = \mathrm{cov}[X(t_0), X(\tau_0)]$. Заметим, что при $t = \tau$ получим $B(t, \tau) = \sigma^2(t)$.

Нормированная (норв.) крцн. фк-я

$$\rho(t, \tau) = \frac{B(t,\tau)}{\sigma(t)\sigma(\tau)}$$

хркз-ет ст-нь звт-и слн-ых вел-н в моменты вр-и t и τ. Было бы точнее наз-ть фк-ю $B(t, \tau)$ ковариационной, а фк-ю $\rho(t, \tau)$ – крцн-ой. Для процессов с незв. зн-ми $B(t, \tau) = 0$ при $t \ne \tau$, а сд-но, и $\rho(t, \tau) = 0$.

Важным классом процессов, для к-ых $a(t)$ и $B(t, \tau)$ полностью опр-ют ммр-ые рсп-ия, яв-ся гауссовский процесс, ммр-ое рсп-ие зн-й к-го в моменты $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i \in T$, задается сд. фк-ей рсп-ия:

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|B|}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)' B^{-1}(x-a)\right\} dx_1 \dots dx_n, \quad (3)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a(t_1) \\ a(t_2) \\ \dots \\ a(t_n) \end{pmatrix}$, $B = \|B(t_i, t_j)\|$, $i, j = \overline{1, n}$, $|B|$ – опр-ль матрицы B.

о7. Слн-ый процесс $X(t)$ наз. стационарным (в узком смысле), если его ммр-ые рсп-ия инвариантны (не изменяющиеся) отс-но сдвига, т.е. для любого τ

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4)$$

о8. Слн. процесс $X(t)$ с непр-ым вр-ем наз. стационарным в широком смысле, если

$$a(t) = a = \text{const},\ \sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{const},\ B(t, \tau) = B(\tau - t),\ \tau \ge t. \quad (5)$$

Стационарный в узком смысле процесс яв-ся стационарным в широком смысле, но не наоборот. Для гауссовских процессов ммр-ые рсп-ия целиком опр-ся фк-ми $a(t)$ и $B(t, \tau)$. Поэтому для таких процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах экв-ны.

Методы опр-ия мт-го ож-ия, крцн-ой фк-и и законов рсп-ия ординат слн-ой фк-и при обработке опытных данных (серии реализаций) не отличаются от методов опр-ия ств-их вер-ных хркс-ик системы слн-х вел-н. При обработке реализаций стационарных слн. фк-й обычно допустимо вместо усреднения по реализациям пользоваться усреднением по вр-и, т.е. находить вер-ные хркс-ки по одной или нескольким дт-но длительным реализациям. Выполнение этого условия носит название эргодичности. В этом случае оценки мт-го ож-ия и крцн-ой фк-и опр-ся фм-ми:

$$\tilde{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \quad (3а)$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-\tilde{x}][x(t+\tau)-\tilde{x}]dt \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)dt - \tilde{x}^2, \quad (4а)$$

где T – полное время записи реализации, $\tilde{x}$ – мт. ож-ие неизвестно.

Если мт. ож-ие $\bar{x}$ известно, то (4а) приобретает вид

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-\bar{x}][x(t+\tau)-\bar{x}]dt \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)dt - \bar{x}^2, \quad (5а)$$

Когда $\tilde{x}$ и $\tilde{K}_x(\tau)$ опр-ся по зн-ям ординат реализации слн-ой фк-и в дк-ые моменты вр-и $t_j = (j-1)\Delta$, ств-щие фм. имеют вид

$$\tilde{x} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x(t_j), \quad (4б)$$

$$\tilde{K}(\tau) = \frac{1}{m-l}\sum_{j=1}^{m-l}[x(t_j)-\tilde{x}][x(t_j+\tau)-\tilde{x}] \approx \frac{1}{m-l}\sum_{j=1}^{m-l}x(t_j)x(t_j+\tau) - \tilde{x}^2, \quad (5б)$$

п1а. Ординаты стационарной слн. фк-и опр-ся путем фотографирования шкалы измерительного прибора через равные промежутки вр-и Δ. Опр-ть нб. допустимые зн. Δ, при к-ом увеличение дсп-и крцн-ой фк-и $\widetilde{K}_x(0)$ по сравнению с дсп-ей, получаемой при обработке непр-го графика реализации слн-ой фк-и, будет не больше чем на δ%, если прж. зн-ие $\widetilde{K}_x(\tau) = a\,e^{-\alpha|\tau|}$, полное время записи $T >> 1/\alpha$. Известно, что $\bar{x} = 0$, а фк-ю $X(t)$ можно считать норм-ой.

Р. Т.к. $\bar{x} = 0$, то при использовании непр-ой записи зн-ие $\widetilde{K}_x(0)$ опр-ся по фм-е (см. (5а)) $\widetilde{K}_1(0) = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x^2(t)dt$. Для нахождения дсп. $\widetilde{K}_1(0)$ имеем

$$D\left[\widetilde{K}_1(0)\right] = M\left[\widetilde{K}_1^2(0)\right] - \left\{M\left[\widetilde{K}_1(0)\right]\right\}^2 =$$

$$= \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T K_x^2(t_2 - t_1)dt_1dt_2 \approx \frac{4}{T^2}a^2\int\limits_0^T (T-\tau)e^{-2\alpha\tau}d\tau .$$

Отбрасывая после интв-ия вел-ны, содержащие малый (по условию) множитель, получим

$$D\left[\widetilde{K}_1(0)\right] = \frac{a^2}{T^2\alpha^2}(2\alpha T - 1).$$

При дк-ом опр-и ординат слн-ой фк-и зн-ие $\widetilde{K}_x(0)$ равно

$$\widetilde{K}_2(0) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x^2(j\Delta).$$

Опр-им дс п-ю $\widetilde{K}_2(0)$:

$$D\left[\widetilde{K}_2(0)\right] = \frac{1}{m^2}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} M\left[X^2(j\Delta)X^2(l\Delta)\right] - m^2K_x^2(0)\right\} = \frac{2}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} K_x^2(l\Delta - j\Delta),$$

где при выч-и мт. ож-ия использовано св-во моментов норм-ых слн. вел-н.

Подставляя зн-ие $\widetilde{K}_x(\tau)$, получим

$$D\left[\widetilde{K}_2(0)\right] = \frac{2a^2}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} e^{-2\alpha|l-m|\Delta} = \frac{4a^2}{m^2}\sum_{r=1}^{m}(m-r)e^{-2\alpha r\Delta} - \frac{2a^2}{m} =$$

$$= \frac{2a^2\Delta T\left(1-e^{-4\alpha\Delta}\right) - 2\Delta e^{-2\alpha\Delta}}{T^2\left(1-e^{-2\alpha\Delta}\right)^2}.$$

Граничное зн. Δ найдется из ур-ия $\dfrac{D\left[\widetilde{K}_2(0)\right]}{D\left[\widetilde{K}_1(0)\right]} = 1 + 0{,}01\delta$, т.е. из ур-ия

$$\frac{2a^2\Delta\left[T\left(1-e^{-4\alpha\Delta}\right) - 2e^{-2\alpha\Delta}\right]}{(2\alpha T - 1)\left(1-e^{-2\alpha\Delta}\right)^2} = 1 + 0{,}01\delta.$$

При $\alpha\Delta << 1$ прж-но получим

$$\alpha\Delta = \frac{-5\lambda + \sqrt{25\lambda^2 + 12(1-11\lambda)}}{2(1-11\lambda)},\ \lambda = \frac{2\alpha T - 1}{2\alpha T - 3}\cdot\frac{\delta}{100}.$$

2°. Цепи Маркова. Рас-им слн-ые процессы с дк-ым вр-ем и дк-ым конечным мн-ом зн-й – состояний (сст.) $S_1, \ldots, S_n$, в к-ых находится элемент (эл.) (или частица) процесса. Н-р, каждый работник предприятия (прд.) в любой рабочий день может находиться в одном из сд-их сст-й: S_1 – работает, S_2 – в командировке, S_3 – в отпуске, S_4 – болен, т.е. состояния S_i не обязательно числовые. Или еще: сст-ия студентов на начало учебного года могут быть опр-ны так: S_1 – первокурсник (I), S_2 – II, S_3 – III, S_4 – IV, S_5 – выпускник, S_6 – окончил, S_7 – выбыл. В кач-е ед-цы вр-и можно взять год.

Рас-им слн. процессы $X(t)$, в к-ых $X(t)$ принимает зн-ие того сст-ия, в к-ом процесс (т.е. его эл-т) находится в момент t: $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ Эл. $X_i = X(t_i)$ принимает зн-ия $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Простейшим обобщением с незв-ми зн-ми яв-ся Марковский процесс, для к-го

$$P(X_i = x_i | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}) = P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}), \qquad (6)$$

т.е. вер-ть попасть в сст-ие $X_i = S_i$ в момент t_i зв-т не от всего прошлого, а лишь от сст-ия $X_{i-1} = S_i$, в к-ом процесс был в предыдущий момент вр-и t_{i-1}.

Если обз-им $P(X(t_j) = S_j | X(t_{i-1}) = S_i) = p_{ij}$, то получим матрицу P с эл-ми p_{ij} (i, j = $\overline{1, n}$). Матрица P размером $n \times n$ наз. матрицей вер-ей перехода, поскольку ее эл-ты – вер-ти переходов из сст-ия i в сст-ие j.

Далее рас-им Марковские процессы, для к-ых разности смежных моментов нбл-ия пст-ны и для простоты равны ед-е, т.е. $t_i - t_{i-1} = 1$ и все возможные сст. перечислены. Такие Марковские процессы наз-ют цепями Маркова.

п1. Частица, находящаяся на прямой, движется по этой прямой под влиянием слн-ых толчков, происходящих в моменты $t_1, t_2, \ldots$ Частица может находиться в точках с целочисленными (цлч.) крд-ми a, $a + 1$, $a + 2$, …, b. В точках a и b отражающие стенки. Каждый толчок перемещает частицу вправо с вер-ю p и влево с вер-ю $q = 1 - p$, если только частица не находится у стенки. Если у стенки, то любой толчок переводит частицу на ед-у вовнутрь стенок.

Блуждания частицы между стенками (отражающими) есть цепь Маркова.

Точно так же можно рас-ть случай, когда частица прилипает к одной из стенок (поглощающих) или к обеим из них.

Марковские цепи наз-ся однородными (одн.) по вр-и, если вер-ти перехода за ед-у вр-и не зв-ят от того, где на оси вр-и происходит переход, т.е. условная вер-ть $P\left(A_j^{s+1} \mid A_j^s\right)$ не зв-т от s – номера испытания (исп.) и обз-ся $P(A_j | A_i) = p_{ij}$ (или $P(S_j | S_i) = p_{ij}$).

Далее рас-им одн. цепи Маркова. При этом сст-ие системы при переходе от одного сст-я к сд-му задается матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

п2. Система может находиться в сст-ях A_1, A_2, A_3 с $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Тогда, если система находилась в сст-и A_1, то после изменения сст-ия на один шаг она с вер-ю 1/2 останется в том же сст-и, с вер-ю 1/6 перейдет в сст. A_2, 1/3 – в A_3. Если система находилась в сст-и A_2, то она с одинаковой вер-ю 1/2 примет сст. A_1 или A_3. Если система находилась в сст-и A_3, то с вер-ю 1/3 она перейдет в A_1, или A_2, или A_3.

п3. Для блуждающей частицы (см. п1) между стенками a и b обз-им через A_1 сб-е «частица находится у стенки a», A_2 – пребывание частицы в точке $a + 1$, …, A_s $(s = b - a + 1)$ – пребывание частицы в точке b. Тогда матрица перехода будет такова:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \; 1 \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ q \; 0 \; p \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; q \; 0 \; p \ldots 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \\ 0 \; 0 \ldots 0 \; 1 \; 0 \end{pmatrix}.$$

п4. Матрица перехода для блуждания частицы между поглощающими стенками имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 \; 0 \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ q \; 0 \; p \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; q \; 0 \; p \ldots 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \\ 0 \; 0 \; . \; . \; . \; . \; 0 \; 1 \end{pmatrix}.$$

п5. Рас-им мн-во сст-й студентов нек-го вуза с пятилетним сроком обучения: S_1 – первокурсник (I), S_2 – II, S_3 – III, S_4 – IV, S_5 – выпускник, S_6 – специалист, окончивший вуз и S_7 – лицо, исключенное из вуза. Составить матрицу переходов из сст-ия в сст-ие, предполагая, что исключенные не могут быть восстановлены.

Р. Опр-им вер-ти перехода из сст. в сст. так из сст. S_1 (первокурсник) за год возможны переходы в сд-ие сст-ия: S_2 (второкурсник) с вер-ю r_1, S_1 (остался на I курсе) с вер-ю q_1 и S_7 (выбыл из вуза) с вер-ю p_1. Остальные переходы невозможны. Поэтому первая строка состоит из трех плж. чисел: $p_{11} = q_1, p_{12} = r_1, p_{17} = p_1$ $(q_1 + p_1 + r_1 = 1)$. Анч-но для S_2 (второкурсник) имеем $p_{22} = q_2, p_{23} = r_2, p_{27} = p_2$ $(q_2 + p_2 + r_2 = 1)$ и т.д.

Откуда получим матрицу вер-ей переходов в виде:

$$P = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & r_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & r_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7')$$

п6. Для многих экнч-их задач (энергетики, мелиорации и т.д.) нх-мо знать чередование годов с опр-ми зн-ми годовых стоков рек. Конечно, это чередование не может быть опр-но абс-но точно. Для опр-ия вер-ей чередования (перехода) разделим стоки (эл-ты процесса), вводя четыре градации (сст-ия): первую (I), вторую (II), третью (III) и четвертую (IV). В результате накопления влаги (в земле, водохранилищах) будем для опр-сти считать, что за I градацией (самый низкий сток) никогда не следует IV (самый высокий сток), а за IV – I. Допустим, что остальные переходы возможны и

из I можно попасть в каждую из средних вдвое чаще, чем опять в I;

из II градации переход в др-е может быть только реже (чем обратно во II): в I – в 2 раза, в III – на 25%, в IV – в 4 раза;

из III градации переход во II градацию столь же вер-тен, как и возвращение в III, а переходы в I и IV градации бывают в 4 раза реже;

из IV переходы во II и III бывают в 4 и 5 раз чаще, чем опять в IV.

Составить матрицу переходов.

Р. Из условия задачи имеем:

для I $p_{11} = 0{,}2, p_{12} = 0{,}4, p_{13} = 0{,}4, p_{14} = 0$;
для II $p_{21} = 0{,}2, p_{22} = 0{,}4, p_{23} = 0{,}3, p_{14} = 0{,}1$;
для III $p_{31} = 0{,}1, p_{32} = 0{,}4, p_{33} = 0{,}4, p_{34} = 0{,}1$;
для IV $p_{41} = 0, p_{42} = 0{,}4, p_{43} = 0{,}5, p_{34} = 0{,}1$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

В примерах п5 и п6 получены две матрицы вер-ей переходов из одного сст-ия в др-ое, состоящие из 7 и 4 сст-й. Если цепь Маркова имеет k сст-й, то ее строки представляют собой k рсп-й вер-ей. Для одн-ых цепей Маркова матрицы вер-ей переходов не зв-ят от вр-и. Для краткости P наз. просто матрицами переходов или переходными матрицами.

Переходные матрицы обладают сд. св-ми:

1) все их эл-ты неотц-ны, т.е. $0 \le p_{ij} \le 1$ $(i, j = \overline{1, k})$;

2) суммы по строкам равны ед-це, т.е. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ $(i, j = \overline{1, k})$.

Иногда матрицы с такими св-ми наз-ют стохастическими.

Матрицы перехода позволяют выч-ть вер-ть любой траектории эл-та слн-го процесса, представляющего собой цепь Маркова, с помощью стн-й (1) и (6) (см. п6, п7).

3°. Характеристики цепей Маркова. При изучении цепей Маркова нб-й интерес представляют сд-ие вел-ы: вер-ти перехода за n шагов, ср. время пребывания в опр-ом сст-и и др. Рас-им каждую из них в отдельности.

1. Вер-ти перехода между сст-ми за n шагов. Найдем вер-ти $p_{ij}(n)$ перехода из сст. $A_i^{(s)}$ в s-ом исп-и в сст-ие $A_j^{(s+n)}$ через n исп-й.

Рас-им промежуточное исп. с номером $s + m$. В этом исп-и осуществится какое-то одно из возможных сб-й $A_r^{(s+m)}$ $(1 \le r \le k)$. Вер-ть такого перехода согласно введенным обз-ям равна $p_{ir}(m)$. Вер-ть же перехода из сст-ия $A_r^{(s+m)}$ в сст-ие $A_j^{(s+n)}$ равна $p_{rj}^{(n-m)}$. Тогда по фм-е полной вер-ти имеем

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m) p_{rj}(n-m). \tag{8}$$

Стн-ие (8) для всех $r = \overline{1,k}$ можно представить как пзв-ие матриц:

$$P(n) = P(m)P(n-m). \tag{8'}$$

Для удобства (взяв Π вместо матрицы P) обз-им через Π_n матрицу перехода через n исп-й

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{21}(n) & \dots & p_{2k}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(n) & p_{k1}(n) & \dots & p_{kk}(n) \end{pmatrix}$$

Тогда стн. (8′) можно писать так:

$$\Pi(n) = \Pi(m)\Pi(n-m) = \Pi_m \Pi_{n-m} \ (0 < m < n). \tag{9}$$

В част., при $n = 2$ находим $\Pi_2 = \Pi_1\Pi_1 = \Pi_1^2$, при $\Pi_3 = \Pi_1\Pi_2 = \Pi_1^3$ и вообще при любом n имеем $\Pi_n = \Pi_1^n$.

Если $m = 1$, то из (8) и (9) получим

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir} p_{rj}(n-1),\ \Pi(n) = \Pi_1\Pi(n-1) = \Pi_1^n,$$

где $p_{ir} = p_{ir}(1)$, $\Pi_1 = \Pi(1)$.

п7. Матрица перехода за два шага для блуждания частицы между отражающими и поглощающими стенками ств-но имеют вид:

$$\Pi_2 = \Pi_1\Pi_1 = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & q+pq & 0 & p^2 & 0 & \dots & & & \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & q & 0 & p \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ q & p & q & 0 & p^2 & \dots & \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Интуитивно ясно, что после большего числа шагов для отражающих стенок частица окажется в любой точке, а для поглощающих стенок возрастает вер-ть, что частица будет поглощена стенками.

2. Рсп-ие по сст-ям на шаге $n \to \infty$. Сформулируем

т1. Если при нек-ом $s > 0$ все эл-ты матрицы перехода Π_5 плж-ны, то сущ-ют такие пст-ые p_j ($j = \overline{1,k}$), что незв-мо от индекса i верно рав-во

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j \ (j = \overline{1,k},\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1).$$

Д-во (см. [14]) сводится к установлению, что нб-ая из вер-ей $p_{ij}(n)$ с ростом n не может взр-ть, а нм-ая – не может уб-ть и max $\{p_{ij}(n) - p_{lj}(n)\} \to 0$ ($i, l = \overline{1,k}$) при $n \to \infty$, что д-ет теорему.

Физический смысл т1 состоит в том, что вер-ть системе находиться в сст-и A_j практически не зв-т от того, в каком сст-и она находилась в далеком прошлом. Эта теорема была впервые д-на А.А. Марковым и играла важную роль среди так наз-мых эргодических теорем, используемых в современной физике.

Зная матрицу перехода за n шагов и нач. матрицу Π_1, можно найти вер-ть находиться на шаге n в сст-и A_j. Для этого обз-им через e_i вектор-строку, состоящую из нулей и ед-ц, к-ая находится на i-м месте нач-го сст-ия A_j. Из стн. (9), заменяя при $m = 1$ $\Pi(1)$ на $e_i\Pi$ и $n - m$ на $n - 1$, получим для каждого i стн-ие

$$e_i\Pi(n-1)\Pi = e_i\Pi(n) = e_i\Pi^n, \tag{10}$$

к-ое опр-ет вектор $(p_1(n), p_2(n), \ldots, p_k(n))$, т.е. рсп-ие цепи Маркова по сст-ям A_j через n шагов после выхода из сст. A_i.

Обз-им вектор из эл-ов $p_j(n)$ через $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_k(n))$. тогда из стн. (10) имеем

$$p(n) = e_i\Pi^n = e_i\Pi^{n-1}\Pi = p(n-1)\Pi. \tag{11}$$

В стн. каждый эл. вектора $p(n)$ связан с вектор-строкой e_i и столбцом $p_j(n)$, т.е. $p_j(n) = p_{ij}(n)$. Тогда по т1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p(n-1) = p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Сд-но, стн. (11) принимает вид

$$p = p\Pi. \tag{12}$$

Вектор p наз. предельным рсп-ем. Его смысл состоит в сд-ем. При $n \to \infty$ (пусть n – время) цепь Маркова входит в устойчивый режим, к-ый хркз-ся св-ми (T – дт-но большое время):

а) ср. время пребывания в сст-и A_j равно p_iT;

б) ср. время возвращения в сст-е A_j равно $1/p_j$.

п8. Найти ср. время между засухами и полноводными годами для стоков рек, описанных в п6.

Находим матрицы $\Pi_1^n = \Pi$ до устойчивого сст-ия и используем (12).

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix},\ \Pi_1^2 = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}4 & 0{,}36 & 0{,}08 \\ 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}37 & 0{,}08 \\ 0{,}14 & 0{,}4 & 0{,}37 & 0{,}09 \\ 0{,}13 & 0{,}4 & 0{,}37 & 0{,}10 \end{pmatrix},\ \Pi_1^3 = \begin{pmatrix} 0{,}148 & 0{,}4 & 0{,}368 & 0{,}084 \\ 0{,}147 & 0{,}4 & 0{,}368 & 0{,}085 \\ 0{,}145 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}086 \\ 0{,}143 & 0{,}4 & 0{,}370 & 0{,}087 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1^4 = \begin{pmatrix} 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}368 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}086 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}086 \end{pmatrix},\ \Pi_1^5 = \begin{pmatrix} 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1^6 = \begin{pmatrix} 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \end{pmatrix}$$

Матрица Π_1^5 принимает устойчивое сст., т.к. $\Pi_1^5 = \Pi_1^6 = \Pi$ (условие т1 выполняется с Π_1^2), тогда с учетом $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ получим:

$$p = p\Pi = (p_1, p_2, p_3, p_4)\begin{pmatrix} 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \\ 0{,}146 & 0{,}4 & 0{,}369 & 0{,}085 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\cdot 0{,}146; \\ p_2 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\cdot 0{,}4; \\ p_3 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\cdot 0{,}369; \\ p_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\cdot 0{,}085 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = 0{,}146; \\ p_2 = 0{,}4; \\ p_3 = 0{,}369; \\ p_4 = 0{,}085. \end{array}$$

Предельные вер-ти засушливых и дождливых лет равны $p_1 = 0{,}146$ и $p_4 = 0{,}085$, сд-но, периодичность засушливых лет в ср-ем равна $1/0{,}146 = 6\text{-}7$ лет, а дождливых $1/0{,}085 = 11\text{-}12$ лет.

Выводы т1 неверны при нарушении ее условий.

п9. Проверить выполнение условий т1 для матрицы переходов $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Р. Находим $\Pi_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $\Pi_1^4 = \Pi_1$, $\Pi_1^5 = \Pi_1^2$, $\Pi_1^6 = \Pi_1^3$ и т.д. Сд-но, для любого n в матрице $\Pi = \Pi_1^n$ имеются нулевые эл. и условия т6 не выполнены. Однако вектор $p = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ уд-ет условию $p = p\Pi$ при любом n, что проверяется непосредственной подстановкой. Т.о., при $n \to \infty$ предел для вер-ей $p_j(n)$ не сущ-ет и для произвольно большого n сст-ие A_j точно опр-ся начальным.

3. Ср. время пребывания. До сих пор мы рас-ли цепи Маркова, в к-ых из любого сст. A_i возможно попасть в любое до. сст. A_j за один или несколько шагов. В п5 (и п4) это не так: из сст. s_3 нельзя попасть в сст. s_1 и s_2, а из сст-й s_6 и s_7 можно попасть лишь в сст. s_6 и s_7 ств-но. Поэтому сст-ия s_j цепи Маркова, из к-ых частицы могут только вернуться обратно в s_j, наз-ют поглощающими. Для поглощающих сст-й $p_{ji} = 1$.

Для цепей Маркова с поглощающими сст. т1 неверна. В этом случае нарушено условие плж-ти эл-ов матрицы $\Pi_1^t = \Pi$: при любом t (здесь вместо n взяли t) переходы из поглощающего сст-я, н-р, s_a, в любые др. невозможны. В матрице $p_{aa} = 1$ эл-ты $p_{aj} = 0$ при любом t и $j \neq a$; сд-но, всегда имеются нулевые эл. Убедиться в этом можно. перемножая матрицы Π, у к-ых строка a имеет все нулевые эл., кроме $p_{aa} = 1$. Соберем все поглощающие l сст-ия s_i при $i = \overline{1,l}$.

Сст-ия s_i, $i = l + 1,\ l + 2,\ \ldots,\ m,\ m \le k$, из к-ых можно выйти, т.е. при каком-либо t эл-ты $p_{ij}(t) > 0$ для $i = \overline{l+1,k}$ и $j = \overline{1,k}$, но в к-ые нельзя вернуться, т.е. $p_{ij}(t) = 0$ при любом t и при $j = \overline{1,k}$, $i = \overline{l+1,k}$, наз-ся невозвратными. Далее рас-им лишь цепи Маркова с числом сст-й $k = m + l$, в к-их последние $k - l$ сст-й s_i, $i = \overline{l+1,k}$, – невозвратные, а первые l сст-й s_i, $i = \overline{1,l}$, – поглощающие. При этом безразлично, можно ли из любого невозвратного сст-я попасть в любое др. невозвратное или нельзя. Для таких цепей Маркова, наз-мых поглощающими, возможно приведение матрицы переходов порядка $k \times k$ к блочному виду:

$$P = \left(\begin{array}{c:c} E_l & O \\ \hdashline R & Q \end{array} \right), \tag{13}$$

где Q – матрица порядка $(k-l)\times(k-l)$, R – матрица порядка $(k-l)\times l$, E_l – единичная матрица порядка $l\times l$, O – нулевая матрица порядка $l\times(k-l)$.

Система, описываемая цепью Маркова с переходной матрицей (13), постепенно переходит из невозвратных сст-й в поглощающие, находясь в невозвратных сст-ях некоторое слн. время.

Пусть τ_{ij} – слн. вел-а, равная общему числу ед-ц вр-и, к-ое система проводит в сст-и S_j, если в начальный (нач.) момент вр-и она находилась в сст-и S_i. Для опр-ия ср-их зн-й вел-н τ_{ij} используют сд-ю

т2. Для поглощающих цепей Маркова с матрицей переходов (13)

$$M\tau_{ij} = T_{ij},$$

где T_{ij} – эл-ы матрицы

$$T = (E_{k-1} - Q)^{-1}.$$

Обз-им через $t_i = \sum_{j=1}^{k-l} \tau_{ij}$ общее время, включая время пребывания в исх. сст-и S_i, к-ое система проводит во всех невозвратных сст-ях до попадания в какое-либо поглощающее сст-ие, а через b_{ij} – вер-ть попадания системы в поглощающее сст-ие S_j ($j = \overline{1,l}$) при выходе ее из S_i ($i = \overline{l+1,k}$). Тогда верна

т3. Для поглощающих цепей Маркова с матрицей перехода (13) Mt_i равно компонентам вектора T1, где 1 – вектор-столбец с компонентами, равными 1, а вер-ти b_{ij} – эл-ты матрицы $B = TR$.

Использование теорем т2 и т3 покажем на сд-ем

п10. Рас-ть п5 и привести матрицу (7′) к виду (13) с $l = 2$ и $k = 7$ при $p_i = p = 0{,}2$, $r_i = r = 0{,}7$ и $q_i = q = 0{,}1$, а также найти матрицы T, t (ср-ие зн-ия вр-и), B (вер-ть попадания в поглощающие сст-ия) и пояснить полученные числовые результаты.

Р. Матрица перехода (13) имеет вид (см. (7′) в направлении с юго-восточного к северо-западному углу):

$$P = \left(\begin{array}{c:c} E_2 & O \\ \hdashline R & Q_5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & & & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & & & & 0{,}7 & 0{,}1 \end{array} \right).$$

Найдем матрицу $T = (E_{k-1} - Q)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}7 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}7 & 0{,}9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}7 & 0{,}9 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}7 & 0{,}9 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}41 & 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 \end{array}\right) \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1{,}11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}86 & 1{,}11 \end{pmatrix}.$$

Опр-им ср-ие зн-ия вр-и пребывания в институте $t = T1 = \begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 1{,}97 \\ 2{,}64 \\ 3{,}16 \\ 3{,}57 \end{pmatrix}$.

Выч-им матрицу вер-ей попадания в поглощающие сст-ия:

$$B = TR = \begin{pmatrix} 1{,}11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 \\ 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 \\ 0{,}41 & 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \\ 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}63 & 0{,}37 \\ 0{,}71 & 0{,}29 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы B следует, что вер-ть закончить учебу для первокурсника равна 0,29, т.е. из каждых 100 поступивших заканчивают лишь 29 студентов.

На время пребывания студента в вузе действует два противоположных фкт-а: возможность остаться для повторного обучения, что увеличивает время пребывания, и возможность отчисления, что уменьшает это время. В результате влияния обоих фкт-ов для каждых 100 пятикурсников суммарное время обучения на курсе составляет 111 человеко-лет, 100 четверокурсников – 197 человеко-лет, третьекурсников – 264, второкурсников – 316, первокурсников – 357 человеко-лет обучения в вузе до окончания или отчисления. На IV курсе, если бы учились далее все 100 перешедших на него, суммарное время обучения было бы равно 200 человеко-лет, но из-за отчислений это время меньше и составляет 197 человеко-лет. Особенно заметна разница для начавших обучения в вузе: вместо 500 человеко-лет обучения каждые 100 поступающих учатся 357 человеко-лет.

4°. Распределенные лаги. Случайные временные ряды. Лаг (временной лаг) есть экн-й показатель, отражающий отставание или опережение во вр-и одного экн. явления по сравнению с другим, связанным с ним явлением (см. о лаге в КС). Такие явления отражаются в экономико-математических (экн.-мт.), в машинной имитации через так наз-мые распределенные (рспн.) лаги различных видов. В модели с рспн-ым лагом результат расв-ся как слн. фк-ия посл-ти ряда лет прошлого периода. Отсюда приходим к сд. понятию.

Слн. процессы (фк-и) с дискретным (дк.) вр-ем наз-ют временными рядами (см. КС). Далее описываются только одномерные (омр.) временные (врн.) ряды, хотя часто встречаются и ммр-ые (н-р, нбл-ия во вр-и спроса и предложения, к-ые расв-ся в свк-ти). Приведем примеры.

п11. Приращение $\Delta F(t)$ основных прз-ых фондов $F(t)$ нек-ой отрасли в году t зв-т от капиталовложений и их накопления за несколько предыдущих лет, поскольку не все объекты могут быть закончены в год начала их строительства. Сд-но,

$$\Delta F(t) = a_0 f(t) + a_1 f(t-1) + \ldots, \tag{14}$$
где a_k – доля ввода фондов в году t от капиталовложений $f(t-k)$, сделанных в данную отрасль в году $t-k$. Т.о., приращение состоит из суммы капиталовложений за несколько лет. Обычно в эту сумму добавляют еще слн-ю составляющую (сост.), отражающую сокращение ввода фондов за счет неблагоприятных условий и увеличение ввода за счет благоприятных условий, а также «аккумулирующую» влияние всех др. фкт-ов, каждое из к-ых в отдельности незначительно.

п12. Число вновь появившихся особей в нек-ой популяции, н-р, человеческой, зв-т от числа особей, к-ые появились в предыдущие годы и дожили до настоящего вр-и. Если $y(t)$ – число особей, появившихся в году t, c_i – доля выживших за i лет, b_i – число появившихся потомков у особей в возрасте i за один год, то число появившихся особей в году t равно
$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots, \tag{15}$$
где $a_i = c_i b_i$.

Дсв-но, если i лет назад появилось $y(t-i)$ особей, то до года t дожило $c_i y(t-i)$. У каждой особи возраста i (их $c_i y(t-i)$) появляется за год b_i потомков, поэтому всего от особей, появившихся i лет назад, в году t будет $b_i c_i y(t-i)$ потомков.

Чтобы получить общее число особей, появившихся в году t, следует просуммировать число потомков особей всех возрастов.

Очень часто первые a_i равны 0, т.к. $b_i = 0$ для $i = \overline{1,n}$. Так, ель начинает плодоносить с 15 лет, поэтому в популяции елей $a_i = 0$ для $i = \overline{1,14}$ ($a_i \neq 0$ для $i = 15, \ldots$), а в популяции дубов $a_i = 0$ для $i = \overline{1,55}$ ($a_i \neq 0$ для $i = 56, \ldots$). Для популяции некоторых ценных пород рыб $a_i \neq 0$ для $i = 4, 5, 6$, а для людей, как правило, $a_i \neq 0$ для $i = 17 \div 18$ лет и далее.

Как в (14), к ур-ю (15) добавляют слн. сост-ю, возникшую из-за различных причин (слн. число потомков, слн. число доживших до опр-го возраста, слн. число вновь появившихся потомков).

Перейдем к анализу моделей и состава врн-х рядов. Из любого врн. ряда можно выделить две компоненты: детерминированную (дтр.) и случайную (слн.).

Саму дтр-ю компоненту в экн-е обычно представляют в виде регулярной и сезонной периодической сост-их. Н-р, трудовая активность работников города имеет четко выраженный недельный период. Демографические волны (спады и подъемы в рождаемости, изменения возрастной структуры населения) повторяются через 20-30 лет, что очень четко прослеживается в послевоенные годы. Более подробно вопрос выделения регулярной сост-ей из врн. ряда, содержащего дтр-ю и слн-ю сост-ие, рас-ен в 7.2. Здесь на примерах будет показано, как модель врн-го ряда позволяет установить вид регулярной сост-ей.

Рас-им схему п12.
$$Y(t) = a_1 Y(t-1) + a_2 Y(t-2) + \ldots + a_k Y(t-k) + X_t, \tag{16}$$
где X_t – незв. при разных t слн. вел-ы с мт. ож-ем и дсп-ей
$$M(X_t) = 0 \text{ и } D(X_t) = \sigma^2. \tag{16$'$}$$

Врн. ряд (16) наз. авторегрессией (автoрег.) k-го порядка. В авторег-и наличие и вид регулярной сост-ей опр-ся корнями сд-го ур-ия, наз-го характеристическим (хркч.):

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_{k-1}x - a_k = 0. \qquad (17)$$

Если все корни хкрч-го ур-ия (17) по модулю меньше 1, то авторег-я не имеет ни фнц-ой, ни периодической сост-ей, т.е. врн. ряд стационарен. Убедимся в этом в сд. примере авторег-и 1-го порядка

$$Y(t) = aY(t-1) + X_t. \qquad (18)$$

Т.к. по (16′) $M(X_t) = 0$, то имеем $M[Y(t)] = aM[Y(t-1)]$. Обз-ая $M[Y(t)] = m(t)$, получаем $m(t) = am(t-1)$, а хркч. ур-ие $x - a = 0$ опр-ет корень $x = a$.

При $|a| < 1$ и $m(0) = m$ мт. ож-ие $m(t) \to 0$, поскольку $m(1) = am$, $m(2) = = am(1) = a^2m$, $m(3) = am(2) = a^3m$ и т.д. Поэтому (см. п12) $m(t) = am(t-1) = a^tm$ и $a^t \to 0$ при $t \to \infty$, что приводит к $m(t) \to 0$. Если X_t не зв-т от $Y(t-1)$, то дсп-ия $Y(t)$ при $t \to \infty$ равна $D[Y(t)] = \sigma^2/(1-a^2)$ (см. з7(1) из 7.0), т.е. будет пст-ой.

Если $a = -1$, т.е. $|a| = 1$, то мт. ож-ие будет равно то m, то $-m$, а $D[Y(t)]$ лин-о увеличивается (з8(1): 7.0), т.е. фнц-ая компонента врн-го ряда имеет периодическую сост-ю.

Наконец, при $a > 1$ и мт. ож-ие, и дсп-ия растут при $t \to \infty$ как a^t и a^{2t} ств-но. Последнее означает тенденцию к увеличению – регулярная компонента будет иметь вид a^t. Итак, при $|a| < 1$ врн. ряд, уд-щий (18), нестационарен. Анч-ые результаты можно получить и при авторег-и (16) более высоких порядков.

В п11 поведение врн-го ряда зв-т от посл-ти $f(t)$ при $t = 0, 1, 2, \dots$, т.е. от экзогенной пер-ой (см. КС).

Возвратимся к (18) и рас-им еще один случай: пусть t дт-но велико и $|a| < 1$. Тогда, посл-но подставляя в (16) врж-ия (18) для $t-1$, $t-2$, …, получим

$$Y(t) = X_t + a(X_{t-1} + aY(t-2)) = X_t + a(X_{t-1} + a(X_{t-2} + \dots)\dots).$$

Отсюда

$$Y(t) = X_t + aX_{t-1} + a^2X_{t-2} + \dots + a^kX_{t-k}. \qquad (19)$$

Врн. ряд $Y(t)$ в стн-и (19) получается с помощью скользящего суммирования (сумв.), если вел-ы X_t считаются некрв-ми (незв-ми) с $M(X_t) = 0$ и $D(X_t) = \sigma^2$.

Итак, мы рас-ли три типа врн-ых рядов:

1) авторег-и, заданные стн-ем (16);

2) скользящее сумв-ие, заданное стн-ем (19) и $\operatorname{cov}(x_t, x_\tau) = 0$ при $t \neq \tau$;

3) распределенные запаздывания или лаги, заданные стн-ем

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{t-1} a_i X_{t-i} + X_t. \qquad (20)$$

Стн. (20) представляет собой др-ю запись врн-го ряда из п11.

Если врн. ряд $Y(t)$ рспрн-ых лагов имеет коэф-ы $a_i = a^i$, то он яв-ся авторег-ей первого порядка. Для остальных случаев

$$M[Y(t)] = 0 \text{ и } D[Y(t)] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 .$$

Одной из важных хркс-ик стационарных врн. рядов яв-ся норв-ая крцн. фк-ия $\rho(s)$, к-ая опр-ся стн-ем

$$\rho(s) = \frac{\operatorname{cov}(Y(t+s), Y(t))}{D[Y(t)]}. \tag{21}$$

Для нестационарных врн. рядов крцн. фк-ия яв-ся фк-ей двух пер-ых: момента вр-и t, положения и сдвига s.

Учитывая, что нерав-во $|\operatorname{cov}(x, z)| \le \sqrt{D(X)D(Y)}$ верно для любых X и Z, в том числе и для $X = Y(t + s)$ и $Z = Y(t)$, из стн. (21) получим сд-ие св-ва крцн-ой фк-и:

1. $\rho(0) = 1$.
2. $|\rho(s)| \le 1$ (св-во огр-сти).
3. При $\rho(s) = 0$ фк-и $Y(t + s)$ и $Y(t)$ лин. незв-мы.
4. $\rho(s) = \rho(-s)$ (св-во симметрии).

Известно, что для процессов скользящего сумв-ия

$$D[Y_{\rho(s)}] = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{k-s} a_i a_{i+s} & \text{при } s \le k; \\ 0 & \text{при } s > k. \end{cases}$$

Процессы рспн-ых лагов могут быть беск-ым ($k = \infty$), но для сущ-ия (конечности) дсп-и нх-ма сх-ть ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i^2$.

В част. случае $a_i = a^i$ ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i^2$ сх. при $|a| < 1$. Поэтому $M[Y(t)] = 0$, $D[Y(t)] = \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}$ и $\rho(s) = a^{|s|}$. В случае $|a| < 1$ процесс рсп-ых лагов (при $k = \infty$) – это авторег-ия первого порядка (18). При $a = 1$ процесс авторег-и первого порядка яв-ся процессом с незв-ми приращениями. Авторег-ия первого порядка – это марковский процесс с дк. вр-ем, но с непр-ым мн-ом сст-й. Процесс с незв. приращениями – марковский процесс и может быть иссл-ан методами марковских процессов.

Рас-им авторег-ный стационарный процесс $Y(t)$ с мт. ож-ем $M[Y(t)] = 0$, зн-ия к-го до момента T известны. Опр-им прогноз $Y(T + 1)$ в виде лин-ой фк-и $Y(t)$, $t \le T$, т.е.

$$Y(T+1) = b_1 Y(t) + b_2 Y(t-1) + \ldots \tag{22}$$

Будущее зн. $Y(T + 1)$ (слн. вел-а) может отличаться от прогноза $\widetilde{Y}(T+1)$ (фк-и, зв-ей от $Y(t)$, $Y(t - 1)$, …). Найдем неизвестные коэф. b_1, b_2, … так, чтобы дсп-я $D[Y(T + 1) - \widetilde{Y}(T+1)]$ была мнм-ой. Используя (22) и (16), получим стн-ие

$$Y(T+1) - \widetilde{Y}(T+1) = (a_1 - b_1)Y(T) + (a_2 - b_2)Y(T-1) + \ldots + X_{T+1}.$$

Дсп-я полученной разности равна

$$M[Y(T+1) - \widetilde{Y}(T+1)]^2 = (a_1 - b_1)^2 \sigma_y^2 + (a_2 - b_2)^2 \sigma_y^2 + \\ + 2(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\sigma_y^2 R(1) + \ldots + \sigma_x^2,$$

где $\sigma_y^2 = D[Y(t)]$, $\sigma_x^2 = D[X_i]$ для любых t. Дсп. мнм-на при $b_i = a_i$, поэтому наилучший прогноз $\widetilde{Y}(T+1)$, построенный на основе известных реализаций $Y(t)$ при $t = T, T-1, \ldots$ равен

$$\widetilde{Y}(T+1) = a_1Y(T) + a_2Y(T-1) + \ldots + a_kY(T-k+1),$$

т.е. $\widetilde{Y}(T+1)$ отличается от $Y(T+1)$ только на слагаемые X_{T+1}.

Анч-но можно получить прогноз на два шага $\widetilde{Y}(T+2)$. Т.к.

$$\widetilde{Y}(T+2) = c_1Y(T+1) + c_2Y(T) + \ldots + c_kY(T-k+2)$$

и отличается от $Y(T+2)$ двумя слагаемыми: слн. ошибкой X_{T+2} и разностью неизвестного $Y(T+1)$ от полученного ранее прогноза $\widetilde{Y}(T+1)$, равной $c_1Y(T+1)$, т.е.

$$Y(T+2) - \widetilde{Y}(T+2) = c_1X_{T+1} + X_{T+2}.$$

Т.о., прогноз на два шага

$$\widetilde{Y}(T+2) = a_1\widetilde{Y}(T+1) + a_2Y(T) + \ldots + a_kY(T-k+2),$$

т.к. коэф-ы c_i для $\widetilde{Y}(T+2)$ снова равны a_i.

Для прогноза на τ шагов, учитывая, что $\widetilde{Y}(t) = Y(T)$ при $t \le T$, можно получить анч-ое врж-ие:

$$\widetilde{Y}(T+\tau) = \begin{cases} a_1\widetilde{Y}(T+\tau-1) + a_2\widetilde{Y}(T+\tau-2) + \ldots + a_k\widetilde{Y}(T+\tau-k) \text{ при } \tau > k; \\ a_1Y(T+\tau-1) + a_2Y(T+\tau-2) + \ldots + a_kY(T+\tau-k) \text{ при } \tau \le k; \end{cases}$$

во втором стн-и последние $k-\tau$ слагаемых представляют собой известные реализации $Y(T)$, $Y(T-1)$, а первые – полученные на их основе прогнозы $\widetilde{Y}(T+\tau-i)$. Дсп-ия наилучшего лин. прогноза для авторег-и k-го порядка имеет вид

$$D[Y(T+\tau) - \widetilde{Y}(T+\tau)] = \begin{cases} \left(1 + a_1^2 + \ldots + a_k^2\right)\sigma_x^2 \text{ при } \tau > k; \\ \left(1 + a_1^2 + \ldots + a_\tau^2\right)\sigma_x^2 \text{ при } \tau \le k. \end{cases}$$

ЛЕКЦИЯ 21

7.2. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1°. Постановка задачи. Нек-ие вопросы одномерного (омр.) врн-го ряда мы рас-ли в 4°: 7.1. Здесь продолжим изучение врн-ых рядов.

В общем случае врн. ряд содержит детерминированную (дтр.) и случайную (слн.) сост-ие (для простоты их будем считать аддитивными):

$$y_t = f(t, x_t) + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ ,$$

где y_t – зн-ия врн-го ряда, $f(t, x_t)$ – дтр. сост-ая, x_t – зн. дтр-ых фкт-ов, влияющих на дтр. сост-ую в момент t, ε_t – слн. сост-ая с мт. ож-ем $M(\varepsilon_t) = 0$, T – длина ряда.

Мт. статистика (стс.) занимается анализом и прогнозом врн-ых рядов, содержащих слн. сост-ую.

В экн-ке роль дтр-ой сост-ей играет, н-р, результирующий показатель, представляющий собой объем прз-ва, обусловленный общей тенденцией экнч-го роста, научно-техническим прогрессом и затратами экнч-их ресурсов. На этот результат, кроме экнч-их фкт-ов, могут оказывать долговременное влияние и нек-ые природные фкт-ы, поддающиеся предсказанию. Н-р, солнечная активность оказывает влияние на урожайность с/х-ых культур с периодичностью 11,2 года. Слн-ая же сост-я (н-р, погодные условия, интенсивность спроса или предложения и т.д.) аккумулирует мн-ва не включенных в дтр. сост-ую фкт-ов, каждый из к-ых отдельно оказывает незначительное влияние на результат.

Основная задач анализа врн-ых рядов состоит в выделении на основе знания отрезка врн-го ряда $\{y_t,\ t = \overline{1,T}\ \}$ дтр-ой и слн-ой сост-их, а также в оценке их хркс-ик. Получив оценки дтр-ой и слн-ой сост-их, можно решить задачи прогноза будущих зн-й как самого врн-го ряда, так и его сост-их.

2°. Трендовые модели. Под трендом (в узком смысле) понимается дтр. сост-ая, зв-ая только от вр-и. Тогда врн-й ряд представляется сд-ей теоретико-вероятностной схемой:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ , \tag{1}$$

где $f(t)$ – тренд, ε_t – слн. сост-ая с мт. ож-ем $M(\varepsilon_t) = 0$.

Если тренд линеен отс-но своих параметров, а слн. сост-ая имеет известную матрицу ковариаций, то задача сводится к задаче ммр-ой (т.е. множественной (мнн.)) рег-и, описанной в 6°: 6.3. В самом деле, в таком случае стн-ие (1) принимает сд. вид:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i(t) + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ , \tag{2}$$

где $\varphi_i(t)$ – известные фк. вр-и. Н-р, в случае полиномиального тренда стн. (2) имеет вид

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t^i + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ . \tag{2'}$$

Обз-ив $\varphi_i(t)$ через x_{ti}, придем к обычной модели мнн-ой рег-и, лин-ой отс-но параметров

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{ti} + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ , \tag{3}$$

или в матричной форме

$$Y = X\alpha + \varepsilon, \tag{4}$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_T \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_{T1} & \dots & x_{Tk} \end{pmatrix}$, $x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{t1} \\ \dots \\ x_{tk} \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$.

Ур-ие (4) решим, исходя из теории регн-го анализа (см. 6°: 6.3). Причем формы решения зв-т от стсч-их хркс-ик слн-ой сост-ей:

1. Слн. сост-ая с незв. зн-ми. В этом случае ковариационная матрица слн-ой сост-ей имеет вид

$$\Gamma = \|\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s)\| = \sigma^2 E,\ D(\varepsilon_t) = \sigma^2,$$

а наилучшие оценки коэф-ов тренда получаются по методу нм-их кв-ов и имеют сд-й вид:

1) оценка коэф-ов тренда

$$\tilde{\alpha} = (X'X)^{-1}XY,\ M(\tilde{\alpha}) = \alpha,\ \Gamma_{\tilde{\alpha}} = \|\text{cov}(\tilde{\alpha}_l, \tilde{\alpha}_i)\| = \sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2 C; \tag{5}$$

2) оценка дсп-й слн-ой сост-ей

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T-k-1}\cdot\sum_{i=1}^{T}(y_t - \tilde{y}_t)^2\ , \tag{6}$$

где $\tilde{y}_t = x_t'\,\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\tilde{\alpha}_i x_{ti} = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\tilde{\alpha}_i\varphi_i(t)$;

3) точечный прогноз дтр-ой сост-ей на глубину τ выполняется по фм-е

$$f(T+\tau) = \tilde{y}(T+\tau) = x'_{T+\tau}\,\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\tilde{\alpha}_i\varphi_i(T+\tau). \tag{7}$$

Отметим, что

$$M\left[\tilde{f}(T+\tau)\right] = f(T+\tau) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi_i(T+\tau),\ D\left[\tilde{f}(T+\tau)\right] = \sigma^2 x'_{T+\tau}\,Cx_{T+\tau}, \tag{8}$$

где $x'_{T+\tau} = [1, \varphi_1(T+\tau), \dots, \varphi_k(T+\tau)]$;

4) интервальный прогноз для дтр-ой сост-ей на глубину τ задается сд. фм-ой (в предположении, что слн. сост-ая имеет норм. рсп-ие или расв-ся дт-но длинный отрезок ряда):

$$\tilde{f}(T+\tau) - t_p\,\tilde{\sigma}_{\tilde{f}(T+\tau)} \le f(T+\tau) \le \tilde{f}(T+\tau) + t_p\,\tilde{\sigma}_{\tilde{f}(T+\tau)}\,, \tag{9}$$

где $t_p = t_p(T-k-1)$– доверительная граница рсп-ия Стьюдента с $T-k-1$ ст-ми свободы, ств-щая уровню значимости p, $\tilde{\sigma}_{\tilde{f}(T+\tau)} = \tilde{\sigma}\sqrt{x'_{T+\tau}Cx_{T+\tau}} =$

$$= \tilde{\sigma}\sqrt{\sum_{i,l=0}^{k}\varphi_i(T+\tau)C_{il}\varphi_l(T+\tau)}\ .$$

Рас-им более подробно случай лин-го тренда:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t,\ k = 1,\ \varphi_1(t) = t.$$

Фм-ы (5)-(9) принимают сд-й вид:

1) оценка коэф-ов лин-го тренда

$$\widetilde{\alpha}_0 = \bar{y} - \widetilde{\alpha}_1\bar{t},\ \widetilde{\alpha}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(t-\bar{t})}{\sum_{i=1}^{n}(t-\bar{t})^2},\ \bar{t} = \frac{1+T}{2}; \tag{5'}$$

2) оценка дсп-й слн-ой сост-ей

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T-2}\cdot\sum_{i=1}^{T}(y_t - \widetilde{y}_t)^2, \tag{6'}$$

где $\widetilde{y}_t = \widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{\alpha}_1\bar{t} = \bar{y} + \widetilde{\alpha}(t-\bar{t}) = \bar{y} + \widetilde{\alpha}_1\left(t - \frac{1+T}{2}\right)$;

3) точечный прогноз дтр-ой сост-ей

$$\widetilde{f}(T+\tau) = \bar{y} + \widetilde{\alpha}_1\left(\frac{T-1}{2}+\tau\right), \tag{7'}$$

$$M\left[\widetilde{f}(T+\tau)\right] = \alpha_0 + \alpha_1(T+\tau),\ D\left[\widetilde{f}(T+\tau)\right] = \widetilde{\sigma}^2\left[\frac{1}{T} + \frac{\left(\frac{T-1}{2}+\tau\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(t - \frac{T+1}{2}\right)^2}\right]; \tag{8'}$$

4) интервальный прогноз для дтр-ой сост-ей

$$\widetilde{f}(T+\tau) - t_p\widetilde{\sigma}_{\widetilde{f}(T+\tau)} \le f(T+\tau) \le \widetilde{f}(T+\tau) + t_p\widetilde{\sigma}_{\widetilde{f}(T+\tau)}, \tag{9'}$$

где $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{f}(T+\tau)} = \widetilde{\sigma}\left[\frac{1}{T} + \frac{\left(\frac{T-1}{2}+\tau\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(t - \frac{T+1}{2}\right)^2}\right]$.

Априорные предположения о форме тренда формулируются в виде рабочей гп-ы. Н-р, в случае рабочей гп-ы о пст-тве годовых абс-ых приростов $f(t+1) - f(t) = \alpha_1 = \text{const}$ приходим к лин. тренду. Если же имеет место гп-а пст-тва темпов роста $f(t+1)/f(t) = \alpha_1 = \text{const}$, то получаем экспонентный тренд $f(t) = \alpha_0\alpha_1^t$, к-ый в лгр-ах сводится к лин-му. В др-их случаях приходится использовать нелин-ые методы оценивания (см. 6°).

2. Зн-ия слн-ой сост-ей зв-мы, матрица ковариаций известна. В этом случае задана известная ковариационная матрица слн-ой сост-ей $\Gamma = M(\varepsilon\varepsilon') = \|\text{cov}(\varepsilon_t,\ \varepsilon_s)\|,\ t,\ s = \overline{1,T}$, и наилучшие несмещенные точечные оценки коэф-ов тренда опр-ся методом мкс-го правдоподобия. В матричной форме эти оценки опр-ся сд. врж-ми:

$$\widetilde{\alpha} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}Y,\ M(\widetilde{\alpha}) = \alpha,\ \Gamma_{\widetilde{\alpha}} = \|\text{cov}(\widetilde{\alpha}_l, \widetilde{\alpha}_i)\| = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}. \tag{10}$$

Точечный прогноз дтр-ой сост-ей на глубину τ осуществляется по фм-е

$$\tilde{f}(T+\tau) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{\alpha}_i \varphi_i(T+\tau), \tag{11}$$

при этом

$$M\left[\tilde{f}(T+\tau)\right] = f(T+\tau) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i(T+\tau),\ D\left[\tilde{f}(T+\tau)\right] = x'_{T+\tau}\,(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} x_{T+\tau},$$

где $x'_{T+\tau} = [1,\ \varphi_1(T+\tau),\ \dots,\ \varphi_k(T+\tau)]$.

Проверка гп-з о значимости оценок коэф-ов тренда и всего ур-ия тренда в целом можно выполнить по фм-ам, приведенным в гл. 6.

3. Зн-ия слн-ой сост-ей зв-мы, матрица ковариации неизвестна. Если ковариационная матрица неизвестна, но имеет специальную структуру, опр-мую нек-ым числом параметров (коэф-ы тренда и параметры ковариационной матрицы) можно применять метод мкс-ма правдоподобия.

В общем случае, когда о структуре ковариационной матрицы ничего неизвестно, можно применять итерационную, по крайней мере, двухшаговую, процедуру: на первом шаге с помощью метода нм-их кв-ов опр-ют оценки коэф-ов тренда $\tilde{\alpha}$ и оценку ковариационной матрицы $\tilde{\Gamma}$ по отк-ям, на втором шаге находят уточненные оценки коэф-ов тренда по фм-ам (10), в к-ые вместо матрицы Γ подставлена ее оценка $\tilde{\Gamma}$, что позволяет получить прогноз дтр-ой сост-ей на глубину τ по фм-е (11).

3°. Структура временного экономического ряда. При иссл-и днмч-их рядов экнч-их показателей обычно выделяют 4 основные сост-ие:

1. Долговременная («вековая») эволюторно изменяющаяся сост-ая (обз-ся U_t, $t = \overline{1,n}$ (или $t = \overline{1,T}$)). Она яв-ся результатом действия фкт-ов, к-ые приводят к постепенному изменению данного экнч-го показателя. Н-р, в результате научно-технического прогресса, совершенствования орг-и и упл-ия прз-ом отс-ные показатели результативности и эффективности (эфс.) прз-ва растут, а удельные расходы ресурсов на ед-у полезного эффекта (эф.) снижаются.

2. Долговременная циклическая сост-ая (обз-ся V_t, $t = \overline{1,n}$), к-ая проявляется на протяжении длительного вр-и в результате действия фкт-ов, обладающих большим последействием либо циклически изменяющихся со вр-ем. Н-р, кризисы перепроизводства и структурные кризисы; док-но, что изменение солнечной активности с периодичностью 11,2 года оказывает сущ-ое влияние на развитие биологических объектов, так урожайность с/х-ых культур повышается с 11-летним периодом и амплитудой 5-7% среднегодовой урожайности.

3. Сезонная циклическая сост-ая (обз-ся C_t, $t = \overline{1,n}$), к-ая проявляется в течение одного года. Н-р, колебания продуктивности с/х-ых животных в зв-ти от вр-и года, колебания розничного товарооборота по вр-ам года и т.д.

4. Слн. сост-ая (обз-ся ε_t, $t = \overline{1,n}$), к-ая образуется в результате суперпозиции большого числа внешних фкт-ов, не участвующих в формировании дтр-ых сост-их (U_t, V_t и C_t) и оказывающих каждый в отдельности незначи-

тельное влияние на изменение зн-й показателя. Н-р, изменение погодных условий, изменение интенсивности спроса и предложения на товары повседневного потребления и т.д.

В нашем понимании первые три сост-ие представляют собой тренд, т.е. дтр. сост-ю. Причем вековую сост-ю можно дт-но хорошо представить отрезком ряда Тейлора, сд-но, эта сост-ая во многих практических случаях может расв-ся как полиномиальный тренд. Что касается долговременной и сезонной циклических сост-их, то обе они яв-ся периодическими фк-ми, к-ые дт-но хорошо могут быть представлены отрезком ряда Фурье, т.е. эти сост-ие могут расв-ся как триг-й тренд.

4°. Полиномиальный тренд. Схема, приведенная в 2°, для полиномиального тренда (см. (2'): $\varphi_i(t) = t^i$, $\varphi_0(t) = 1$) имеет вид

$$f(t,\alpha) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t^i, \quad t = \overline{1,T}. \tag{12}$$

Исх-ю модель врн-го ряда

$$y_i = \alpha_0 + \sum \alpha_i t^i + \varepsilon_t,\ M[\varepsilon_t] = 0,\ t = \overline{1,T} \tag{13}$$

можно записать в матричной форме

$$Y = X\alpha + \varepsilon, \text{ где } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^k \\ & & & & \\ 1 & t & t^2 & \dots & t^k \\ 1 & T & T^2 & \dots & T^k \end{pmatrix} \tag{13'}$$

Остальные обз. совпадают с (4).

Матрица коэф-ов норм-ых ур-й (к-ые протабулированы) имеет вид

$$A = X'X = \left\| \sum_{t=1}^{T} t^{i+l} \right\|, \quad i, l = \overline{0,k}.$$

Правые части норм. ур-й нх-мо подсчитывать для каждого ряда

$$X'Y = \left\| \sum_{t=1}^{T} y_t t^i \right\|, \quad i = \overline{0,k},$$

причем для оценки свободного члена используется фм-а

$$\tilde{\alpha}_0 = \tilde{y} - \sum_{i=1}^{k} \tilde{\alpha}_i \bar{t}^i, \tag{14}$$

в к-ой коэф-ы при оценках $\tilde{\alpha}_i$ $\bar{t}^i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t^i$ также протабулированы.

Прогноз на глубину τ осуществляется по фм-е

$$\tilde{y}_{T+\tau} = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{\alpha}_i (T+\tau). \tag{15}$$

Доверительный интервал для дтр-ой сост-ей имеет сд-й вид

$$\sum_{i=0}^{k} \tilde{\alpha}_i (T+\tau)^i - t_p \tilde{\sigma}_{y_{T+\tau}} \le \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (T+\tau) \le \sum_{i=0}^{k} \tilde{\alpha}_i (T+\tau)^i + t_p \tilde{\sigma}_{y_{T+\tau}}, \tag{16}$$

где $\tilde{\sigma}_{y_{T+\tau}} = \tilde{\sigma}\sqrt{\sum_{i,l=0}^{k} C_{il}(T+\tau)^{i+l}}$, $C = (X')^{-1}$, $\tilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{T-k-1}\cdot\sum_{i=1}^{T}(y_t - \tilde{y}_t)^2$.

п1. Пусть требуется иссл-ть днмч-й ряд среднегодовых удоев молока (кг) от одной коровы, заданных в табл. 1, за 1961-1985 гг. (длина ряда $T = 25$ лет). Для расчетов использовать фм-ы (5')-(9') полиномиального тренда при $k = 1$ (гп-а лин-го тренда о пст-ве прироста). Исх-ые и расчетные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Годы	Фактический удой y_t	ty_t	Выравненный удой $\tilde{y}_t$	Отклонения $y_t - \tilde{y}_t$	Квадрат отклонений $(y_t - \tilde{y}_t)^2$
1961	2532	2532	2565	– 33	1089
1962	2317	4634	2621	– 304	92416
1963	2341	7023	2676	335	112225
1964	2513	10052	2731	– 218	47524
1965	2968	14840	2787	181	32761
1966	2956	17736	2842	114	12996
1967	3041	21287	2898	143	20449
1968	3182	25456	2953	229	52441
1969	3177	28593	3008	169	28561
1970	3181	31810	3064	117	13689
1971	3201	35211	3119	2	4
1972	3192	38304	3174	18	324
1973	3156	41028	3230	– 74	5476
1974	3364	47096	3285	79	6241
1975	3489	52335	3341	148	21904
1976	3587	57392	3396	191	36481
1977	3648	62016	3451	197	38809
1978	3475	62550	3507	– 32	1024
1979	3475	66025	3562	– 87	7569
1980	3579	71580	3617	– 38	1444
1981	3473	72993	3673	– 200	40000
1982	3385	74470	3728	– 343	117649
1983	3701	81523	3784	– 83	6889
1984	3854	92496	3839	15	225
1985	3966	99150	3894	72	5184
Σ	80753	1121733			643793

Р. Находим оценки коэф-ов $\tilde{y} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = \dfrac{80753}{25} = 3230$, $\bar{t} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t =$

$$= \frac{T+1}{2} = 13,\ \sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} = \frac{25\cdot 26\cdot 51}{6} = 5525,$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{h\sum_{t=1}^{T}(y_i - \bar{y})(t-\bar{t})}{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} ty_i - T\bar{t}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{T} t^2 - T(\bar{t})^2} = \frac{1121733 - 25\cdot 13\cdot 3230}{5525 - 25\cdot 13^2} = 55{,}37,$$

$\tilde{\alpha}_0 = \bar{y} - \tilde{\alpha}_1\bar{t} = 3230 - 720 = 2510.$

Теперь выч-ем выравненные зн-ия $\tilde{y}_t = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 t$ (с точностью до 1 кг) и заполняем столбцы $\tilde{y}_t$, $y_t - \tilde{y}_t$, $(y_t - \tilde{y}_t)^2$ табл. 1.

По найденной сумме кв-ов отк-й $S_R^2 = \sum_{i=1}^{T}\left(y_t - \tilde{y}_t\right)^2 = 643793$ теперь можно найти оценку дсп-и слн-ой сост-ей.

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{i=1}^{T}\left(y_t - \tilde{y}_t\right)^2 = 27991, \text{ откуда } \tilde{\sigma} = 167{,}3.$$

Найдем расчетную значимость коэф-та лин-го тренда

$$t_{\tilde{\alpha}_1} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\sigma_{\tilde{\alpha}_1}} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}\cdot\tilde{\alpha}_1\sqrt{\sum_{t=1}^{T}\left(t-\bar{t}\right)^2} = \frac{55{,}37\sqrt{1300}}{167{,}3} = 11{,}93,$$

к-ая сущ-но превышает табл-ю (см. T_{16}) значимость $t_{0,05}(23) = 2{,}069$ при 5%-ом риске, т.е. коэф. лин-го тренда сущ-но отличается от нуля и, сд-но, тренд дсв-но имеет место.

Теперь можно найти прогностические зн-ия тренда среднегодовых удоев молока от одной коровы на 1986-1990 гг.:

$$\tilde{y}_{T+1} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\left(T+1\right) = 3949 \text{ (1986 г.)};$$
$$\tilde{y}_{T+2} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\left(T+2\right) = 3995 \text{ (1987 г.)};$$
$$\tilde{y}_{T+3} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\left(T+3\right) = 4050 \text{ (1988 г.)};$$
$$\tilde{y}_{T+4} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\left(T+4\right) = 4105 \text{ (1989 г.)};$$
$$\tilde{y}_{T+5} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\left(T+5\right) = 4161 \text{ (1990 г.)}.$$

Построим доверительный интервал прогноза для теор-го тренда удойности за 1987 г.:

$$\tilde{y}_{T+2} - t_{0,05}(23)\,\tilde{\sigma}_{y_{T+2}} \le \alpha_0 + \alpha_1(T+2) \le \tilde{y}_{T+2} + t_{0,05}(23)\,\tilde{\sigma}_{y_{T+2}}.$$

Т.к. $t_{0,05}(23) = 2{,}069$, то $\tilde{\sigma}_{y_{T+2}} = \tilde{\sigma}\sqrt{\frac{1}{T} + \frac{\left(\frac{T-1}{2}+2\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(t-\bar{t}\right)^2}} = 167{,}3\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{14^2}{1300}} = 73,$

тогда

$$3844 \le \alpha_0 + \alpha_1(T+2) \le 4143,$$

этот размах равен 302, т.е. он дт-но велик по отношению к зн-ю середины инр-а 7,5% = 302/3995.

Практика показывает, что колеблемость удойности вокруг тренда главным образом обусловлена колеблемостью урожайности кормовых культур, т.е. обеспеченность кормами оказывает решающее воздействие на продуктивность животных. Синхронная колеблемость вокруг своих трендов рядов динамики удойностей и урожайности зерновых показана на рис. 1, на к-ом точки отсчета и масштаба выбраны так, чтобы тренды исходили из одной точки, а размахи рядов были примерно одинаковыми. Фактические и выравненные зн-ия ряда урожайности зерновых (см. табл. 2 и 3) показаны на рис. 1 штриховой линией, а для ряда удойности коров – сплошной линией.

Т.о., большое практическое зн-ие имели бы надежные методы прогнозирования (в том числе на длительный срок) урожайности с/х-х культур в звт-и от метеорологических условий, т.е. прогнозирования отк-й зн-й урожайности от тренда в звт-и от врц-и погодных условий. Однако к настоящему вр-и таких методов пока нет.

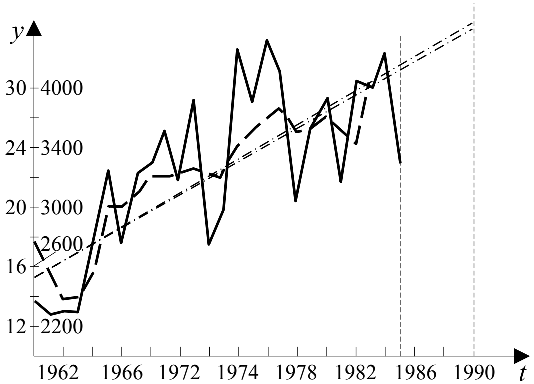


Рис. 1

Что касается выявления тренда урожайности зерновых (ц/га), то результаты ств-их расчетов приводятся далее и представлены в табл. 2 и 3:

$$\widetilde{\alpha}_0 = 14{,}6;\ \widetilde{\alpha}_1 = 0{,}56;\ S_R^2 = 393;\ \widetilde{\sigma}^2 = 17{,}1;\ \widetilde{\sigma} = 4{,}13.$$

Таблица 2

Годы	Значения урожайности		Отклонения	Годы	Значения урожайности		Отклонения
	фактические y_t	выравненные $\widetilde{y}_t$	$y_t - \widetilde{y}_t$		фактические y_t	выравненные $\widetilde{y}_t$	$y_t - \widetilde{y}_t$
1960	13,3	11,67	1,63	1973	19,5	22,52	– 3,02
1961	12,2	13,36	– 1,16	1974	30,1	23,08	7,02
1962	12,4	14,6	– 2,2	1975	26,7	23,63	3,07
1963	12,4	15,62	– 3,22	1976	31,0	24,17	6,83
1964	16,4	16,53	– 0,13	1977	28,4	24,71	3,69
1965	22,0	17,34	4,66	1978	20,0	25,24	– 5,24
1966	17,2	18.1	– 0,9	1979	24,7	25,76	– 1,06
1967	21,8	18,81	2,99	1980	26,9	26,27	0,63
1968	22,4	19,49	2,91	1981	21,3	26,79	– 5,49
1969	24,8	20,13	4,67	1982	28,6	27,3	1.3
1970	21,3	20,76	0,54	1983	27,7	27,8	– 0,1
1971	26,7	21,36	5,34	1984	30,0	28,3	1,7
1972	17,9	21,95	– 5,05	1985	22,9	28,8	– 5,9

Таблица 3

Годы	Прогноз	Стандартная ошибка прогноза
1986	29,8	1,69
1987	30,4	1,32
1988	31,0	1,90
1989	31,5	2,02
1990	32,1	2,11

Отсюда и из табл. 2, 3 видно, что стандартные (стдн.) ошибки дт-но высоки, поэтому размахи доверительного интервала прогноза по тренду составят ± 3,4, …, 4,3, что весьма значительно. Тем не менее, эти прогнозы можно использовать на практике в предположении, что сохранится сложившаяся долговр-ая тенденция изменения зн-й данного показателя. Если же тенденция происходит при добавлении др-го фкт-а, то отк-ие от прогноза по тенденции надо расв-ть как суперпозицию результата влияния нового фкт-а и слн-ой сост-ей.

Из рис. 1 видно, что в последнее десятилетие годовой прирост урожайности снизился, поэтому возможно улучшить результат выбором тренда, более всего отвечающего реальной ситуации. Так в табл. 4 приведены результаты по различным трендам, лин-м отс-но двух параметров. Как видим, нм-ая из рас-ных сумм кв-ов отк-й у лгр-го тренда, к-ый хркз-ся постепенным падением абс-ых приростов, что отвечает сформулированной выше гп-е:

$$f(t+1) - f(t) = A + B\ln(t+1) - A - B\ln t = B\ln(1 + 1/t).$$

Таблица 4

Формула тренда	Значения коэффициентов		Остаточная сумма квадратов отклонений
	A	B	
$A + Bt$	14,6	0,56	392
Ae^{Bt}	14,5	0,029	448
$A + B/t$	24,9	– 18,3	512
$1/(A + Bt)$	0,069	– 0,0015	581
$A + B\ln t$	9,27	5,5	328
e^{A+Bt}	3,2	– 0,97	463
Экспоненциальное сглаживание $\tilde{y}_{T+\tau} = 29{,}68 + 0{,}6427\tau$	29,68	0,6427	439

Этот тренд дает более осторожный прогноз по сравнению с прогнозом по лин. тренду, что видно из табл. 5.

Таблица 5

Годы	Прогноз по линейному тренду	Прогноз по логарифмическому тренду	Экспоненциальное сглаживание
1986	29,8	27,4	30,3
1987	30,4	27,6	31,0
1988	31,0	27,8	31,6
1989	31,5	28,0	32,3
1990	32,1	28,1	32,9

В табл. 4 и 5 приводятся коэф-ы прогнозирующего полинома и прогнозы на те же годы тенденции данного ряда, полученные методом (рабочие фм-ы см. в 7°) экспоненциального сглаживания.

5°. Тригонометрический тренд. Рас-им модель

$$y_t = f(t + \alpha) + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ ,$$

где $M(\varepsilon_t) = 0$, $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, $f(t, \alpha)$ – периодическая фк-я с периодом m, нацело делящим T, т.е. $T = hm$. Далее m, а сд-но, и T будем считать четными.

При рас-и тренда только в нблм-ые моменты вр-и его можно точно выразить через T лин-о незв-ых триг-их фк-й. Если же период тренда равен $m < T$, то все его первые m зн-й затем повторяются еще $\frac{T}{m} - 1$ раз, т.е. всего h раз, поэтому в разложение фк-и в точках $t = \overline{1,T}$ дт-но включить m членов, к-ые дают точное представление фк-и в точках $t = \overline{1,m}$, а все остальные зн. повторяют первые m зн-й.

Фк-и $\cos\frac{2\pi j}{m}t$, $\sin\frac{2\pi j}{m}t$ имеют период $\frac{m}{j}$, поскольку

$$\cos\left[\frac{2\pi j}{m}\left(t+\frac{m}{j}\right)\right] = \cos\left[\frac{2\pi j}{m}t+2\pi\right] = \cos\frac{2\pi j}{m}t,$$

$$\sin\left[\frac{2\pi j}{m}\left(t+\frac{m}{j}\right)\right] = \sin\left[\frac{2\pi j}{m}t+2\pi\right] = \sin\frac{2\pi j}{m}t,$$

причем этот период укладывается в общей длине ряда $Tj/m = h_j$ раз, т.е. целое число раз, если j – целое.

Теперь подберем m таких фк-й с нм-ми периодами. Прежде всего в разложение нх-мо включить константу $\varphi_0(t) = 1$. Затем посл-но будем включать пары триг-их фк-й $\cos\frac{2\pi j}{m}t$, $\sin\frac{2\pi j}{m}t$ при $j = 1, 2, \ldots$ с периодами $\frac{m}{j}$. Сд-но, остановившись на $j = m/2 - 1$, мы включим $m - 1$ фк-ю. Т.о., осталось включить еще одну фк-ю с $j = m/2$, имеющую период $\frac{m}{j} = \frac{m}{m/2} = 2$. В кач-ве такой фк-и выберем

$$\varphi_{m-1}(t) = (-1)^t.$$

Окончательно получим сд. представление периодического тренда

$$f(t,\alpha) = \sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i\varphi_i(t) = \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(\alpha_{2j-1}\cos\frac{2\pi j}{m}t+\alpha_{2j}\sin\frac{2\pi j}{m}t\right) + \alpha_{m-1}(-1)^t. \quad (17)$$

Н-р, при рас-и ежемесячных данных, имеющих сезонный хрк-р (т.е. период $m = 12$), дт-но включить в разложение 12 членов, т.е.

$$\varphi_0(t) = 1,\ \varphi_{2j-1} = \cos\left(\frac{2\pi j}{12}t\right),\ \varphi_{2j} = \sin\left(\frac{2\pi j}{12}t\right),\ m = \frac{12}{j},\ j = \overline{1,5},\ \varphi_{11}(t) = (-1)^t,\ m = 2$$

и разложение принимает вид

$$f(t,\alpha) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{5}\left[\alpha_{2j-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{12}t\right)+\alpha_{2j}\sin\left(\frac{2\pi j}{12}t\right)\right] + \alpha_{11}(-1)^t. \quad (18)$$

Теперь воспользуемся методом нм-их кв-ов для оценки параметров α_i получившейся теоретико-вероятностной схемы

$$y_t = \alpha_0 + \sum\left[\alpha_{2j-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)+\alpha_{2j}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)\right] + \alpha_{m-1}(-1)^t + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}. \quad (19)$$

Норм. ур-ия в терминах фк-й вр-и имеют сд-й вид

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left[\sum_{t=1}^{T}\varphi_i(t)\varphi_l(t)\right]\tilde{\alpha}_i = \sum_{t=1}^{T}\varphi_l(t)y_t \tag{20}$$

и в данном случае распадаются на m отдельных ур-й, содержащих только одно неизвестное, что вытекает из орт-сти расв-ых триг-их фк-й.

Рас-им оценку для свободного члена

$$\tilde{\alpha}_0 = \bar{y} - \sum\tilde{\alpha}_i\tilde{\varphi}_i(t).$$

Согласно табл. T_1 (при $m = 0$, $\sigma^2 = 1$) имеем

$$\bar{\varphi}_{2j-1}(t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right) = 0,$$

$$\bar{\varphi}_{2j}(t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sin\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right) = 0,$$

$$\bar{\varphi}_{m-1}(t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(-1)^t = 0,$$

поэтому

$$\tilde{\alpha}_0 = \bar{y}\,.$$

Рас-им внедиагональные члены матрицы норм-ых ур-й (20). Выше было показано, что

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i(t)\varphi_0(t) = \sum_{t=1}^{T}\varphi_i(t) = 0.$$

При условии, что $0 < i < l \le m - 1$, внедиагональные коэф. обращаются в нуль; дсв-но,

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i(t)\varphi_l(t) = \sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{m}t\right) = \sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi kh}{T}t\right) = 0,$$

$$i = 2j - 1,\ l = 2k - 1,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i(t)\varphi_l(t) = \sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{m}t\right) = \sum_{t=1}^{T}\cos\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi kh}{T}t\right) = 0,$$

$$i = 2j - 1,\ l = 2k,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i\varphi_{m-1} = \left(\sum_{t=1}^{T}\cos\frac{2\pi j}{m}\right)(-1)^t = 0,\ i = 2j - 1,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i\varphi_{m-1} = \left(\sum_{t=1}^{T}\sin\frac{2\pi j}{m}\right)(-1)^t = 0,\ i = 2j.$$

Коэф-ы при единственном неизвестном в каждом из норм-их ур-й также опр-ся по фм-ам:

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i^2 = \sum_{t=1}^{T}\cos^2\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) = \sum_{t=1}^{T}\cos^2\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right) = \frac{T}{2},\ i = 2j - 1 < m - 1,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_i^2 = \sum_{t=1}^{T}\sin^2\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) = \sum_{t=1}^{T}\sin^2\left(\frac{2\pi jh}{T}t\right) = \frac{T}{2},\ i = 2j < m,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\varphi_{m-1}^2 = \sum_{t=1}^{T}(-1)^{2t} = T.$$

Окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= \bar{y}, \\ \tilde{\alpha}_{2j-1} &= \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right), j = 1, \ldots, \frac{m}{2}-1, \\ \tilde{\alpha}_{2j} &= \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \sin\left(\frac{2\pi j}{m}t\right), j = 1, \ldots, \frac{m}{2}-1, \\ \tilde{\alpha}_{m-1} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_i (-1)^t . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Т.о., точечные оценки тренда опр-ся врж-ем

$$\bar{y}_t = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\tilde{\alpha}_{2j-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) + \tilde{\alpha}_{2j}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)\right) + \tilde{\alpha}_{m-1}(-1)^t, \tag{22}$$

а оценка дсп-и слн-ой сост-ей

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T-m}\sum_{i=1}^{T}(y_t - \tilde{y}_t)^2 = \frac{1}{T-m}\left[\sum_{i=1}^{T} y_t^2 - T\tilde{\alpha}_0^2 - \frac{T}{2}\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\tilde{\alpha}_{2j-1}^2 + \tilde{\alpha}_{2j}^2\right) - T\tilde{\alpha}_{m-1}^2\right], \tag{23}$$

Построение доверительных интервалов для параметров не вызывает затруднений, т.к. легко находятся дсп-и их точечных оценок:

$$D(\tilde{\alpha}_0) = D(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{T},\ D(\tilde{\alpha}_{2j-1}) = D(\tilde{\alpha}_{2j}) = \frac{2\sigma^2}{T}, j = 1, \ldots, \frac{m}{2}-1,\ D(\tilde{\alpha}_{m-1}) = \frac{\sigma^2}{T}.$$

Вследствие некоррелируемости оценок параметров легко опр-ся дсп-я точечной оценки тренда:

$$D(\tilde{y}_t) = D(\tilde{\alpha}_0) + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left[\left(\cos^2\frac{2\pi j}{m}t\right)D(\tilde{\alpha}_{2j-1}) + \left(\sin^2\frac{2\pi j}{m}t\right)D(\tilde{\alpha}_{2j})\right] + D(\tilde{\alpha}_{m-1}) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{T} + \frac{2\sigma^2}{T}\left(\frac{m}{2}-1\right) + \frac{\sigma^2}{T} = \frac{m\sigma^2}{T} = \frac{\sigma^2}{h}.$$

п2. Используя фм-ы триг-го тренда, найти тренд в днмч-ом ряде помесячных удоев от одной коровы по исх. данным табл. (взяты те годы, к-ые хркз-ся практически одинаковым среднегодовым удоем, т.е. имеют место только сезонные циклические колебания).

Р. В табл. 6 и далее используется обз-ие $\bar{a}_t = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{2} y_{t+12l}$. Используя данные табл. 6, получаем $\tilde{\alpha}_0 = \bar{y}$ = 192,2. Легко также найти $\tilde{\alpha}_{11} = \frac{1}{36}\Sigma(-1)^t y_t =$ $= -37/36 = -1{,}03$.

Остальные коэф. найдем сд-им образом:

$$\tilde{\alpha}_{2j-1} = \frac{2}{36}\sum_{t=1}^{36} y_t \cos\frac{2\pi j}{12}t = \frac{1}{6}\sum_{t=1}^{12}\bar{a}_t \cos\frac{\pi j}{6}t,$$

$$\tilde{\alpha}_{2j} = \frac{2}{36} \sum_{t=1}^{36} y_t \sin\frac{2\pi j}{12} t = \frac{1}{6} \sum_{t=1}^{12} \bar{a}_t \sin\frac{\pi j}{6} t \ .$$

Таблица 6

Месяц	Годы			Всего	Среднее
	1975	1978	1983		
Январь	140	143	133	416	138,7
Февраль	147	148	135	430	143,3
Март	196	196	183	575	191,7
Апрель	210	208	203	624	208
Май	259	240	254	753	251
Июнь	288	290	294	872	290,7
Июль	271	278	276	825	275
Август	244	245	264	743	247,7
Сентябрь	190	195	196	681	193,7
Октябрь	136	136	144	416	138,7
Ноябрь	104	110	115	329	109,7
Декабрь	116	120	124	360	120
Итого	2301	2309	2311	6921	2307
Среднее	191,8	192,4	192,6	576,8	192,2

Исх. данные для расчета приведены в табл. 7, откуда получаем зн-ия оценок остальных коэф-ов, к-ые помещены в табл. 8.

Таблица 7

	a_t	$\cos\frac{\pi}{6}t$	$\sin\frac{\pi}{6}t$	$\cos\frac{\pi}{3}t$	$\sin\frac{\pi}{3}t$	$\cos\frac{\pi}{2}t$	$\sin\frac{\pi}{2}t$	$\cos\frac{2\pi}{3}t$	$\sin\frac{2\pi}{3}t$	$\cos\frac{5\pi}{3}t$	$\sin\frac{5\pi}{3}t$
1	138,7	0,866	0,5	0,5	0,866	0	1	– 0,5	0,866	0,866	0,5
2	143,3	0,5	0,866	– 0,5	0,866	– 1	0	– 0,5	– 0,866	0,5	– 0,866
3	191,7	0	1	– 1	0	0	– 1	1	0	0	1
4	208	– 0,5	0,866	– 0,5	– 0,866	1	0	– 0,5	0,866	– 0,5	– 0,866
5	251	– 0,866	0,5	0,5	– 0,866	0	1	– 0,5	– 0,866	0,866	0,5
6	290,7	– 1	0	1	0	– 1	0	1	0	– 1	0
7	275	– 0,866	– 0,5	0,5	0,866	0	– 1	– 0,5	0,866	0,866	– 0,5
8	247,7	– 0,5	– 0,866	– 0,5	0,866	1	0	– 0,5	– 0,866	– 0,5	0,866
9	193,7	0	– 1	– 1	0	0	1	1	0	0	1
10	138,7	+0,5	– 0,866	– 0,5	– 0,866	– 1	0	– 0,5	0,866	0,5	0,866
11	109,7	0,866	– 0,5	0,5	– 0,866	0	– 1	– 0,5	– 0,866	– 0,866	– 0,5
12	120	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	$\sum \bar{a}_t \varphi(t)$	– 496,95	– 30,15	– 17,35	– 84,26	3	7	40,05	– 43,21	– 17,3	30,9

Как видно из табл. 8, нб. зн-ие амплитуды у первой гармоники с периодом $m = 12$, причем это зн-ие на порядок выше амплитуд остальных гармоник, поэтому на практике можно ограничиться одной

$$\bar{y}_t = 192{,}2 - 82{,}8\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) - 5{,}0\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$$

или двумя гармониками

$$\bar{y}_t = 192{,}2 - 82{,}8\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) - 5{,}0\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right) - 2{,}9\cos\left(\frac{4\pi}{12}t\right) + 13{,}7\sin\left(\frac{4\pi}{12}t\right).$$

Более точные результаты получаются при включении всех шести гармоник:

$$\bar{y}_t = 192{,}2 - 82{,}8\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) - 5{,}0\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right) - 2{,}9\cos\left(\frac{4\pi}{12}t\right) + 13{,}7\sin\left(\frac{4\pi}{12}t\right) +$$

$$+ 0{,}5\cos\left(\frac{6\pi}{12}t\right) + 1{,}2\sin\left(\frac{6\pi}{12}t\right) + 6{,}7\cos\left(\frac{8\pi}{12}t\right) - 7{,}2\sin\left(\frac{8\pi}{12}t\right) -$$

$$- 2{,}9\cos\left(\frac{10\pi}{12}t\right) + 5{,}15\sin\left(\frac{10\pi}{12}t\right) - 1{,}55(-1)^t.$$

Таблица 8

	Оценка коэффициентов					
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$\tilde{\alpha}_{2j-1}$	82,8	– 2,9	0,5	6,7	– 2,9	– 1,6
$\tilde{\alpha}_{2j}$	– 5,0	13,7	1,2	– 7,2	5,2	–
Амплитуда $\rho_j = \sqrt{\tilde{\alpha}_{2j-1}^2 + \tilde{\alpha}_{2j}^2}$	83	14	1,3	9,8	5,9	1,6
Период $m_j = 12/j$	12	6	4	3	2,5	2

В табл. 9 приведены фактические зн-ия ряда и их оценка по первой гармонике, а также отк-й по первой и второй гармоникам. Добавление всех остальных гармоник приводит к весьма незначительному улучшению результата.

Таблица 9

Месяц	Фактические $\tilde{\alpha}_t$	Расчетные по первой гармонике		Расчетные по первой и второй гармоникам	
		$\tilde{y}_t$	$\tilde{\alpha}_t - \tilde{y}_t$	$\tilde{\tilde{y}}_t$	$\tilde{\alpha}_t - \tilde{\tilde{y}}_t$
Январь	138,7	118	20,7	128,5	10,2
Февраль	143,3	146,5	– 3,2	159,9	– 16,6
Март	191,7	187,2	4,5	190,1	1,6
Апрель	208	229,3	– 21,3	218,8	– 10,8
Май	251	261,4	– 10,4	248	3
Июнь	290,7	275	15,7	272,1	18,6
Июль	275	266,4	8,6	276,9	– 1,9
Сентябрь	193,7	197,2	– 3,5	200,1	– 6,4
Октябрь	138,7	155,1	– 16,4	144,6	– 5,9
Ноябрь	109,7	123	– 13,3	109,6	0,1
Декабрь	120	109,4	10,6	106,5	13,5
$\lvert\tilde{\alpha}_t - \tilde{y}_t\rvert$			137,7		89,4

6°. Нелинейные тренды. Когда тренд нелинеен отс-но коэф-ов и его невозможно линеаризовать, то применяют нелин. методы оценки коэф-ов, основанные на итерационных процедурах, на каждом шаге к-ых используются алт-мы лин-ых оценок. Имеет место сд-ая теоретико-вер. схема:

$$y_t = f(t, \alpha) + \varepsilon_t,\ t = \overline{1,T}\ , \tag{24}$$

где $f(t,\ \alpha)$ – тренд, нелин-ый отс-но вектора параметров α, $\alpha' = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$, ε_t – слн. сост-ая с $M(\varepsilon_t) = 0$, $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$, причем для простоты будем предполагать, что ее зн-ия незв-мы.

Рас-им сумму кв-ов отк-й известного отрезка ряда y_t, $t = \overline{1,T}$ от тренда

$$Q(\alpha) = \sum_{t=1}^{T}\left[y_t - f(t,\alpha)\right]^2 .$$

Для мнмз-и суммы кв-ов отк-й нх-мо приравнять нулю производные по параметрам:

$$g_i = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = -2\sum_{t=1}^{T}\left[y_t - f(t,\alpha)\right]\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0,\ i = \overline{1,k} . \tag{25}$$

Если лин-о незв-мы как фк-и вр-и, то матрица X имеет ранг k:

$$X = \left(\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right),\ t = \overline{1,T}\ ,\ i = \overline{1,k}\ .$$

Для иссл-ия движения к точке эксм-ма нх-мо рас-ть и вторые производные:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} = 2\sum_{i=1}^{T}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} - 2\sum_{t=1}^{T}\left[y_t - f(t,\alpha)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = H_{ij}^{(1)} + H_{ij}^{(2)} .$$

Иссл-ие проведем при сд-их предположениях:

1) нелин-ый тренд имеет отс-но невысокий порядок нелин-сти, т.е. вторые производные имеют не очень большие по модулю зн-ия;

2) точка $\alpha^{(0)}$, с к-ой начато иссл-е, находится вблизи точки мнм-а $\alpha^* = \arg\inf Q(\alpha)$, т.е. $(\alpha^{(0)} - \alpha^*)$ мало.

Исходя из этих предположений, рас-им разложение тренда в окрс-ти нек-ой точки $\alpha^{(l)}$:

$$f(t,\ \alpha) = f(t,\ \alpha^{(l)}) - \sum\frac{\partial f\left(t,\alpha^{(l)}\right)}{\partial \alpha_i}\left(\alpha_i - \alpha_i^{(l)}\right) + o(\Delta),\ \Delta = \max\left|\alpha_i - \alpha_i^{(l)}\right|, \tag{26}$$

причем вследствие предположений 1)-2) вторые производные в разложении отсутствуют.

Посл-ть точек $\alpha^{(l)}$, $l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ будем строить т.о., чтобы она сх-ась к α^*. Введем обз-ия

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_T \end{pmatrix},\ f(\alpha) = \begin{pmatrix} f(1,\alpha) \\ \ldots \\ f(T,\alpha) \end{pmatrix},\ X_l = \left(\frac{\partial f\left(t,\alpha^{(l)}\right)}{\partial \alpha_i}\right),\ t = \overline{1,T}\ ,\ i = \overline{1,k}\ .$$

Тогда имеем

$$Y = f(\alpha) + \varepsilon = f(\alpha^{(l)}) + X_l(\alpha - \alpha^{(l)}) + \tilde{\varepsilon}\ , \tag{27}$$

где вел. $\tilde{\varepsilon}$ вобрала в себя и остальные разложения каждой врн-ой компоненты $f(\alpha)$, при этом по-прежнему считаем, что $M(\tilde{\varepsilon}) = 0$.

Если предыдущая точка $\alpha^{(l)}$ уже каким-то образом опр-на, то будем искать последующую точку $\alpha^{(l+1)}$ с помощью метода нм-их кв-ов, расв-ая в кач-е исх-ой модели (в матричном виде) сд-им образом прб-ное врж-ие (27):

$$Y - f(\alpha^{(l)}) = X_l(\alpha - \alpha^{(l)}) + \tilde{\varepsilon}\ ,\ M(\tilde{\varepsilon}) = 0. \tag{28}$$

Врж-ие (28) представляет собой модель тренда, лин-го отс-но коэф-ов $\alpha_i - \alpha_i^{(l)}$, причем нблм-ми зн-ми ряда яв-ся $y_t - f(t, \alpha^{(l)})$, а зн-ми фк-й вр-и при параметрах рег-и – $\varphi_i(t) = \dfrac{\partial f\left(t, \alpha^{(l)}\right)}{\partial \alpha_i}$. Применяя метод нм-их кв-ов к оценке параметров лин-ой модели (28), получим

$$\tilde{\alpha} - \alpha^{(l)} = \left(X_l' X_l\right)^{-1} X_l' \left[T - f\left(\alpha^{(l)}\right)\right];$$

обз-ив полученную оценку $\tilde{\alpha}$ через $\alpha^{(l+1)}$, имеем

$$\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} + \left(X_l' X_l\right)^{-1} X_l' \left[T - f\left(\alpha^{(l)}\right)\right].$$

Итак, начиная с нек-ой точки $\alpha^{(0)}$ рекуррентным образом получаем посл-ть точек $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, … т.о., что каждая последующая точка получается из предыдущей с помощью метода нм-их кв-ов для лин-го отс-но коэф-ов тренда. Можно док-ть, что указанная посл-ть в предположениях 1)-2) сх-ся к точке мнм-а

$$\alpha^{(l)} \to \alpha^* = \arg\inf Q(\alpha).$$

7°. Экспоненциальное сглаживание. При рас-и лин-ых и нелин-ых врн-ых трендов нх-мо было указать форму тренда с точностью до параметров перед началом экспл-го иссл-ия на основе известного отрезка y_t, $t = \overline{1,T}$, врн-го ряда. Метод экспоненциального (экпц.) сглаживания (сгж.) позволяет анализировать врн-ый ряд и получить прогноз без предварительного задания формы тренда. Требуется лишь, чтобы в обл. иссл-ия тренд изменялся дт-но постепенно, эволюторно.

В основе экпц-го сгж-ия лежит сд-ая теоретико-вер. схема:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,\ M(\varepsilon_t) = 0,\ D(\varepsilon_t) = \sigma^2. \tag{29}$$

Для простоты будем предполагать, что зн-ия слн-ой сост-ей в разные моменты вр-и некрв-ы, т.е.

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \text{ при } t \neq s.$$

Из первоначального врн. ряда y_t сгж-ый ряд $S_t(y)$ можно получить с помощью сд-го лин-го оператора сгж-ия:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}(y), \tag{30}$$

где α – константа сгж-ия, $0 < \alpha \leq 1$. Если применить оператор сгж-ия посл-но ко всем зн-ям отрезка ряда, то получим

$$\begin{aligned} S_T(y) &= \alpha Y_T + (1 - \alpha)S_{T-1}(Y) = \alpha Y_T + (1 - \alpha)[\alpha Y_{T-1} + (1 - \alpha)S_{T-2}(Y)] = \\ &= \alpha Y_T + \alpha(1 - \alpha)Y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 Y_{T-2} + (1 - \alpha)^3 S_{T-3}(y) = \\ &= \alpha Y_T + \alpha(1 - \alpha)Y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 Y_{T-2} + \ldots + \alpha(1 - \alpha)^{T-2} + (1 - \alpha)^T Y_1, \end{aligned} \tag{31}$$

при этом в последнем рав-ве сгж-ное зн-ие $S_1(y)$ заменим на первое известное зн. ряда. Т.о., в случае экпц-го сгж-ия нбл-ия входят в обработку не с одинаковыми, а с экпц-но уб-щими весами, т.е. настоящие нбл-ия воспринимаются как бы с большим доверием, чем прошлые.

Т.к. веса экпц-но уб-ют, то при дт-но большой длине ряда его прошлые зн. входят с быстро стремящимися к нулю (по мере удаления) весами, поэтому условный ряд можно считать беск-ым. Тогда оператор сгж-ия имеет вид:

$$S_t(y) = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \, y_{t-s}. \qquad (31')$$

Оператор сгж-ия как в первоначальной, так и в унифицированной форме линеен, поэтому, применяя его к отдельным составным частям теоретико-вер. схемы, можно получить результат сгж-ия всего исходного ряда.

Применим оператор с слн-ой сост-ей, тогда имеем

$$S_t(\varepsilon) = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \, \varepsilon_{t-s}.$$

Теперь найдем дсп-ю сгж-ых зн-й слн-ой сост-ей, воспользовавшись незв-ю ее зн-й в различные моменты вр-и:

$$D[S_t(\varepsilon)] = M\left[\alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \varepsilon_{t-s}\right]^2 = \alpha^2 \sum_{s,r=0}^{\infty} (1-\alpha)^{s+r} \, \varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-r} =$$

$$= \alpha^2\sigma^2 \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2s} = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha}{2-\alpha}\sigma^2 .$$

Отсюда следует, что в результате сгж-ия дсп-ия слн-ой сост-ей уменьшается, поскольку $\alpha/(2-\alpha) \le 1$, т.к. $\alpha \le 2-\alpha$, т.е. дсв-но имеет место сгж-ие. «Выступающие» зн-ия дтр-ой сост-ей также сгж-ся, т.е. сгж-ю дсв-но подвергается врн-ой ряд в целом. Оператор сгж-ия можно вновь применить к уже сгж-ным зн-ям; в результате получим оператор сгж-ия второго порядка, последующее сгж-е дает оператор третьего порядка и т.д.:

$$\left.\begin{aligned} S_t^{(1)} &= \alpha y_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}^{(1)}(y), \\ S_t^{(2)} &= \alpha S_t^{(1)}(y) + (1-\alpha)\, S_{t-1}^{(2)}(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_t^{(N)} &= \alpha S_t^{(N-1)}(y) + (1-\alpha)\, S_{t-1}^{(N)}(y). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Применяя несколько раз оператор сгж-ия, а также подбирая ств-им образом константу сгж-ия, можно практически полностью исключить слн. сост-ю, в результате останется только прб-ая дтр. сост-ая.

Теперь рас-им вопрос: как построить прогноз? Для экпц-го сгж-ия имеются аналитические врж-ия для прогноза, полученные из теоремы Брауна, утв-щего, что коэф-ы полиномов, по к-ым производится прогнозирование, опр-ся с помощью дисконтированного метода нм-их кв-ов и аналитически врж-ся через сгж-ые зн-ия ряда.

Введем сд-ие обз-ия для прогнозирующего полинома ст-и N, построенного в предположении, что зн-ие ряда в момент t яв-ся последним:

$$\tilde{y}_{t+\tau} = a_0^{(t)} + \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^{(T)}}{i!}\tau^i . \qquad (33)$$

Т.о., по этому полиному можно получить прогноз в точках $(t + \tau)$. Коэф-ы полинома должны быть опр-ны так, чтобы прогноз был нб-е точным.

т1 (Брауна). Коэф-ы прогнозирующих полиномов, опр-ные по дисконтированному методу нм-их кв-ов

$$\alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \left(y_{t-s} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{(t)}}{i!} s^i \right)^2 , \qquad (34)$$

лин-о врж-ся через сгж-ые зн-ия ряда

$$S_t^{(1)}(y),\ \ldots,\ S_{t-1}^{(N)}(y),\ S_t^{(N+1)}(y).$$

Д-во приведем только для сл. $N = 1$ из-за сложности выкладок. Имеем

$$\widetilde{y}_{t+\tau} = a_0^{(t)} = a_1^{(t)}\tau .$$

Найдем оценки двух параметров прогнозирующего полинома с помощью дисконтированного метода нм-их кв-ов (индекс t опущен, введено обз-ие $\beta = 1 - \alpha$). Получаем

$$Q(a_0, a_1) = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left(y_{t-s} - a_0 - a_1 s\right)^2 . \tag{35}$$

Точку мнм-а находим из условия рав-ва нулю производных:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = -\,2\alpha \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left(y_{t-s} - a_0 - a_1 s\right) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = -\,2\alpha \sum_{s=0}^{\infty} s\beta^s \left(y_{t-s} - a_0 - a_1 s\right) = 0,$$

откуда получаем сд-ие ур-ия:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s\right)\widetilde{a}_0 - \left(\sum_{s=0}^{\infty} s\beta^s\right)\widetilde{a}_1 &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s y_{t-s} , \\ \left(\sum_{s=0}^{\infty} s\beta^s\right)\widetilde{a}_0 - \left(\sum_{s=0}^{\infty} s^2\beta^s\right)\widetilde{a}_1 &= \sum_{s=0}^{\infty} s\beta^s y_{t-1} . \end{aligned}\right\}$$

Т.к. $\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s = \frac{1}{\alpha}$, $\sum_{s=0}^{\infty} s\beta^s = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$, $\sum_{s=0}^{\infty} s^2\beta^s = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^3}$, то

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{a}_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\,\widetilde{a}_1 &= S_t^{(1)}(y), \\ (1-\alpha)\,\widetilde{a}_0 - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha}\,\widetilde{a}_1 &= S_{t-1}^{(2)}(y) - \alpha S_t^{(1)}(y) . \end{aligned}\right\}$$

отсюда окончательно имеем:

$$\widetilde{a}_0 = 2\,S_t^{(1)}(y) - S_t^{(2)}(y),$$

$$\widetilde{a}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_t^{(1)}(y) - S_t^{(2)}(y)\right] \blacksquare$$

В случае нб-е часто используемого квч. прогнозирующего полинома

$$a_0^{(t)} + a_1^{(t)}\tau - \frac{a_2^{(t)}}{2}\tau^2$$

можно анч-но получить сд-ие врж-ия для оценок его коэф-ов:

$$\widetilde{a}_0^{(t)} = 3\,S_t^{(1)}(y) - 3\,S_t^{(2)}(y) + S_t^{(3)}(y),$$

$$\widetilde{a}_1^{(t)} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\cdot\left[(6-5\alpha)S_t^{(1)}(y) - 2(5-4\alpha)\,S_t^{(2)}(y) + (4-3\alpha)\,S_t^{(3)}(y)\right], \tag{36}$$

$$\widetilde{a}_2^{(t)} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\left[S_t^{(1)}(y) - 2\,S_t^{(2)}(y) + S_t^{(3)}(y)\right].$$

Для расчетов на ЭВМ применяют сд. рекуррентные фм., экв-ые (36):

$$\tilde{a}_0^{(t)} = y_t + (1-\alpha)^3(\tilde{y}_t - y_t),$$

$$\tilde{a}_1^{(t)} = \tilde{a}_1^{(t-1)} + \tilde{a}_2^{(t-1)} - \frac{3}{2}\alpha^2(2-\alpha)(\tilde{y}_t - y_t) \qquad (36')$$

$$\tilde{a}_2^{(t)} = \tilde{a}_2^{(t-1)} - \alpha^3(\tilde{y}_t - y_t),$$

где $\tilde{y}_t = \tilde{a}_0^{(t-1)} + \tilde{a}_1^{(t-1)} + \frac{1}{2}\tilde{a}_2^{(t-1)}$.

Из этих фм-л видно, что при появлении нового нбл-ия не обязательно хранить весь предыдущий отрезок врн-го ряда, надо лишь знать коэф-ы прогнозирующего полинома, найденные по этому отрезку.

Для прогнозирования на глубину τ за пределы известного отрезка ряда используют прогнозирующий полином, найденный на основе всего ряда

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\tilde{a}_i^{(T)}}{i!}\tau^i . \qquad (37)$$

В том случае, когда в окрс-ти точки T дтр-ая сост. близка к пст-ой, применяют аппарат однократного экпц-го сгж-ия и прогноз опр-ся по фм-е

$$\tilde{y}_{T+\tau} = S_T^{(1)}(y).$$

Т.к.

$$D\left[S_T^{(1)}(y)\right] = D\left[S_T^{(1)}(\varepsilon)\right] = \frac{\alpha\varepsilon^2}{2-\alpha},$$

то получим сд-й доверительный интервал прогноза:

$$S_T^{(1)}(y) \pm t_p(T-1)\,\sigma\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} .$$

Если в окр-ти точки T дтр. сост-ая лин-я, то применяют двойное экпц-ое сгж-ие и точечный прогноз осуществляют по фм-е

$$\tilde{y}_{T+\tau} = \tilde{a}_0^{(T)} + \tilde{a}_1^{(T)}\tau .$$

Тогда получим

$$D\left[\tilde{y}_{T+\tau}\right] = \frac{\alpha\varepsilon^2}{(2-\alpha)^3}\cdot[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)\tau + 2\alpha^2\tau^2],$$

поэтому имеем сд-й доверительный интервал для прогноза

$$\tilde{a}_0^{(T)} + \tilde{a}_1^{(T)}\tau \pm t_p(T-1)\,\sigma\sqrt{\frac{\alpha\left[1+4(1-\alpha)+5(1-\alpha)^2+2\alpha(4-3\alpha)\tau+2\alpha^2\tau^2\right]}{(2-\alpha)^3}} .$$

Если дтр-ая сост. – нелин-ая в окрс-ти T, то применяют тройное экпц. сгж-ие и точечный прогноз опр-ся фм-ой

$$\tilde{y}_{T+\tau} = \tilde{a}_0^{(T)} + \tilde{a}_1^{(T)}\tau + \frac{a_2^{(T)}}{2}\tau^2 .$$

В том случае, если дтр. сост-ая, кроме роста, испытывает еще периодические колебания, т.е. в окрс-ти t может быть описана фм-ой

$$f(t+\tau) = (A_t + B_t\tau)F(t+\tau),$$

где $F(t)$ – периодическая фк. с известным периодом M, то может быть применено сезонное экпц. сгж-ие, к-ое реализовано в ряде пакетов прикладных программ (прг.). Прг. система по заданному периоду инициализации M производит первоначальную оценку периодической фк-и:

$$\widetilde{F}(t) = y_t \left[y_i - \left(\frac{M+1}{2} - j \right) \hat{B}_1 \right]^{-1}, \ t \le kM, j = \overline{1, M}\ , \ i = \overline{1, k}\ ;$$

$$\hat{B} = \frac{1}{(k-1)M^2} \left[\sum_{s=(k-1)m+1}^{km} y_s - \sum_{s=1}^{m} y_s \right], \ \hat{A}_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} y_i\ ;$$

$$\hat{F}(t) = M \frac{\overline{F}_t}{\sum_{j=1}^{M} \overline{F}_j}, \ \overline{F}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \widetilde{F}(j + iM); \ t, j = \overline{1, M}\ .$$

В дальнейшем производится взаимосвязанное сгж. периодической фк-и и коэф-ов тренда по сд-им фм-ам (kM – число нбл-й):

$$\hat{A}_t = \alpha \frac{y_t}{\overline{F}_{t-M}} + (1 - \alpha)(\hat{A}_{t-1} = \hat{B}_{t-1}), \ \hat{F}_{t-M} = \hat{F}_t\ , \ t \le M,$$

$$\hat{F}_t = \beta(y_t / \hat{A}_t) + (1 - \beta)\hat{F}_{t-M}, \ t > M,$$

$$\hat{B}_t = \gamma(\hat{A}_{t-1} - \hat{A}_t) + (1 - \gamma)\hat{B}_{t-1}.$$

Прогноз врн-го ряда на τ шагов вперед осуществляется по фм-е

$$\hat{Y}_{t+\tau} = (\hat{A}_t + \hat{B}_t)\hat{F}(t + \tau - M).$$

Опт-ые зн-ия констант сгж-ия α, β, γ выбирают по мнм-у сумму кв-ов отк-й прогнозов (на один шаг) от дсв-ых зн-й ряда.

Анализ вр-ых рядов более подробно см. в [29].

ЛЕКЦИЯ 22

7.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1°. Предмет и классификация теории массового обслуживания. Случайные процессы. Одно из многочисленных применений теории слн-ых процессов (фк-й) в самых разных обл-ях практики связано с работой так наз-мых систем массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, парикмахерские, торговые прд-ия и т.д. Каждая такая система состоит из некоторого (нек-го) числа обслуживающих (обс.) единиц (ед.), к-ые будем наз-ть «каналами». В качестве (кач.) каналов (кн.) могут фигурировать линии связи; лица, выполняющие те или иные операции; различные приборы и т.п. СМО могут быть одноканальными (окн.) и многоканальными (мкн.).

Работа любой СМО состоит в выполнении поступающего на нее потока требований или заявок. Заявки поступают одна за другой в слн. моменты вр-и. Обс-ие поступившей заявки имеет слн-ую длительность вр-и (н-р, длительность разговора по телефону). Т.о., процесс фнцр-ия СМО представляет собой слн-ый процесс.

Каждая СМО в звт-и от числа кн-в и их производительности, обладает опрн-ой пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Предмет теории массового обслуживания (МО) – установление звт-и между хрк-ом потока заявок, производительностью (прзл.) отдельного кн-а, числом кн-в и эффективностью (эфс.), т.е. успешностью обс-ия. В кач-е хркс-ик эфс-ти (в звт-и от условий задачи и целей иссл-ия) могут применяться различные вел. и фк-и, н-р средний (ср.) процент заявок, получающих отказ и покидающих систему необслуженными (необс.); ср. время ож-ия в очереди; вер-ть того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обс-ю; закон длины очереди и т.д. Каждая из этих хркс-ик описывает с той или другой стороны степень приспособленности системы к выполнению потока заявок, иными словами – ее пропускную способность.

Под «пропускной способностью» в узком смысле слова обычно понимают ср. число заявок, к-ое система может обс-ть в ед-у вр-и. Наряду с нею часто расв-ют отс-ю пропускную способность – ср. отн-ие числа обс-ных заявок к числу поданных.

Отметим, что в силу слн-ти поступления заявок и длительности их обс-ия процесс работы СМО протекает нерегулярно: в потоке заявок образуются местные сгущения и разрежения. Сгущения могут привести либо к отказам в обс-и, либо к образованию очередей. Разрежения приводят к непроизводительным (непрзл.) простоям отдельных кн-в или системы в целом. Чтобы дать рекомендации по рациональной орг-и системы, выяснить ее пропускную способность и предъявить к ней требования, нх-мо изучить слн-ый процесс, протекающий в системе, и описать ее мтч-ки. Этим и занимается теория МО.

Отметим также, что обл. применения мтч-их методов теории МО непр-но расширяется: многие задачи автоматизации (автц.) прз-ва оказываются близким к теории МО; потоки деталей, поступающих для выполнения над ними различных операций, могут расв-ся как «потоки заявок», различность поступления к-ых нарушается за счет слн-ых причин. К теории МО укладываются задачи, связанные с проблемой орг-и транспорта и системы сообщений, а также задачи, относящиеся к надежности технических (техн.) устройств, кн-ы наведения, линии связи, аэродромы, устройства для сбора и обработки инф-и и т.д., к-ые представляют собой своеобразные СМО со своим режимом работы и пропускной способностью.

СМО могут быть классифицированы по ряду признаков. Так в звт-и от условий ож-ия начала обс-ия различают:

1. СМО с потерями (отказами), т.е. когда все кн. заняты, то заявка теряется. Н-р, если на городской телефонной станции (ГТС) вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

2. СМО с ож-ем, т.е. когда все кн-ы заняты, то заявка ставится в очередь и ож-ет, пока не освободится один из обс-их кн-в.

3. СМО с огр. длиной очереди, т.е. допускается огр-ое число мест в ней.

4. СМО с огр. вр-ем ож-ия, т.е. допускается огр-ый срок пребывания каждой заявки.

По числу кн-в СМО делятся на окн-ые и мкн-ые.

По месту нахождения источника требований (заявки) СМО делятся на:

а) разомкнутые, когда заявка находится вне системы, н-р, ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры – это заявки на их обс-ие, они находятся вне самой системы;

б) замкнутые, когда заявки находятся в самой системе, н-р, станочный участок, в к-ом станки яв-ся источником неисправностей, а сд-но, источником требований (заявкой) на их обс-ие, скажем, бригадой наладчиков.

Возможны и др. признаки классификации СМО, н-р, по дисциплине обс-ия, – однофазные и многофазные СМО и др.

Теперь рас-им слн. процессы со счетным (или конечным) мн-ом состояний (сст.). СМО представляет собой физическую систему дискретного (дк.) типа с конечным (или счетным) мн-ом сст-й, а переход системы из одного сст-ия в другое происходит скачком, в момент, когда осуществляется какое-то сб. (приход новой заявки, освобождение кн-а, уход заявки из очереди и т.п.).

Рас-им физическую систему X со счетным мн-ом сст-й: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ В любой момент вр-и t система X может быть в одном из этих сст-й. Обз-им через $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) вер-ть того, что система в момент t будет находиться в сст-и x_k. Очевидно, что для любого t

$$\sum_k P_k(t). \qquad (1)$$

Свк-ть вер-ей $P_k(t)$ для каждого момента вр-и t хркз-ет данное сечение слн-го процесса, протекающего в системе.

Слн. процессы со счетным мн-ом сст-й бывают двух типов: с дк-ым или непр-ым вр-ем. Н-р, для дк-ой системы X, в к-ой протекает слн-ый процесс с непр-ым вр-ем, рас-им группу из n самолетов, совершаемых налет на территорию противника, обороняемую истребительной авиацией. Ни момент обнаружения группы, ни моменты подъема истребителей заранее не известны. Различные сст-ия системы ств-ют числу пораженных самолетов в составе группы: $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$, что означает: не поражено ни одного самолета, поражено ровно 1, …, k, …, n самолетов. Схема возможных сст-й системы и возможных переходов из сст-ия в сст-ие показана (стрелками) на рис. 1. Причем закругленная стрелка, направленная из сст-ия x_k в него же, означает, что система может не только перейти в соседнее сст-ие x_{k+1}, но и остаться в прежнем. Для данной системы хрк-ны необратимые процессы, т.е. пораженные самолеты не восстанавливаются. При этом на схеме переходы возможны только из сст-ия в соседнее сст. и невозможны «перескоки» через сст-ие: эти перескоки отброшены как практически невозможные. Дсв-но, для «перескока» системы через сст-ие нх-мо, чтобы строго одновременно были поражены два или более самолетов, а вер-ть такого сб-я равна нулю.

Для большинства СМО хрк-ны обратимые процессы с непр-ым вр-ем: занятый кн. может освободиться, очередь может «рассосаться». Н-р, рас-им окн-ю СМО (одну телефонную линию), в к-ой заявка, заставшая кн. занятым, не становится в очередь, а покидает систему (получает «отказ»). Это – дк. система с непр-ым вр-ем и двумя возможными сст-ми: x_0 (кн. свободен), x_1 (кн. занят). Переходы из сст-ия в сст-ие обратимы (см. схему на рис. 2).

Для n-кн-ой системы такого же типа схема возможных переходов показана на рис. 3 с возможными сст-ми: x_0 (все кн. свободны), x_1 (занят ровно один кн.), x_2 (занято ровно два кн-а) и т.д.

Рас-им еще один пример дк-ой системы с непр-ым вр-ем: окн-ю СМО, к-ая может находиться в 4-х сст-ях: x_0 (кн. исправен и свободен), x_1 (кн. исправен и занят), x_2 (кн. неисправен и ждет ремонта), x_3 (кн. неисправен и ремонтируется). Схема возможных переходов показана на рис. 4. Переход системы из x_3 непосредственно в x_1, минуя x_0, можно считать практически невозможным, т.к. для этого нужно, чтобы окончание ремонта и приход очередной заявки произошли строго в один и тот же момент вр-и.

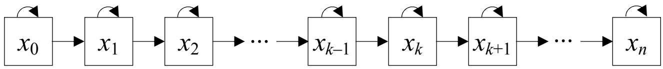


Рис. 1

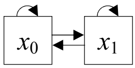


Рис. 2

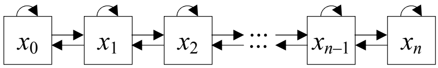


Рис. 3

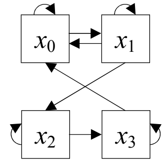


Рис. 4

Для СМО основным фкт-ом, обусловливающим протекающие в ней процессы, яв-ся поток заявок. Поэтому мт. описание любой СМО начинается с описания потока заявок. Причем в настоящее время теор-ки наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения задач МО, в к-ых входящий поток требований яв-ся простейшим (пуассоновским).

2°. Поток событий. Простейший поток и его свойства. Под потоком сб-й в теории вер-ей понимается посл-ть сб-й, происходящих одно за другим в какие-то моменты вр-и. Н-р, поток вызовов на телефонной станции, поток включений приборов в бытовой электросети, поток сбоев (неисправностей) ЭВМ и т.д. Сб-ия, образующие поток в общем случае могут быть различными, здесь рас-им лишь поток однородных (одн.) сб-й, различающихся только моментами появления. Такой поток можно изобразить как посл-ть точек t_1, t_2, …, t_k, … на числовой оси (рис. 5), ств-их моментам появления сб-й.

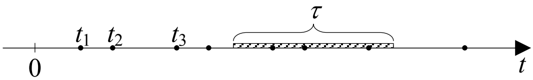


Рис. 5

Поток наз. регулярным, если сб-я образуют одно за другим строго опр-ые промежутки вр-и. Такой поток встречается редко. Типичным для СМО яв-ся слн-ый поток заявок.

Здесь рас-им потоки сб-й, обладающие нек-ми простыми св-ми. Введем ряд опр-й:

о1. Поток сб-й наз. стационарным, если вер-ть попадания того или иного числа сб-й на участок вр-и длиной τ (рис. 5) зв-т только от длины участка и не зв-т от того, где именно на оси Ot расположен этот участок. В част., для стационарного потока хрк-на пст-я плотность (ср. число заявок в ед-у вр-и). На практике часто встречаются потоки заявок, к-ые (по крайней мере, на огр-ном отрезке вр-и) могут расв-ся как стационарные. Н-р, поток вызовов на ГТС на участке вр-и 12-13 часов может считаться стационарным, тот же поток в течение целых суток уже не может считаться стационарным (ночью плотность вызовов значительно меньше, чем днем).

о2. Поток сб-й наз. ординарным, если вер-ть попадания на элр-ый участок Δt двух или более сб-й пренебрежимо мала по сравнению с вер-ю попадания одного сб-я. Н-р, дт-но малой яв-ся вер-ть того, что из группы станков, обс-мых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

о3. Поток сб-й наз. потоком без последействия, если для любых неперекрывающихся участков вр-и число сб-й, попадающих на один из них, не зв-т от числа сб-й, попадающих на другие. Н-р, если на ткацком станке в данный момент произошел обрыв нити и он устранен ткачихой, то это не опр-ет, произойдет ли новый обрыв на данном станке в сд-й момент или нет, тем более что это не влияет на вер-ть возникновения обрыва на др. станках. Поток пассажиров, входящих на станцию метро яв-ся потоком без последействия, а поток пассажиров, покидающих станцию, есть поток с последействием, т.к. моменты выхода пассажиров, прибывших одним и тем же поездом, зв-мы между собой.

Поток сб-й, обладающих св-ми о1-о3, наз. простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком и число сб-й, попадающих на любой фиксированный интервал (инр.) вр-и, будет рсп-но по закону Пуассона (см. 2°: 2.3).

Простейший поток играет среди потоков сб-й вообще особую роль, до нек-ой ст-и анч-ую роли норм-го закона среди др. законов рсп-ия. Известно, что при суммировании (сумв.) большого числа незв-х слн. вел-н, подчиненных практически любым законам рсп-ия, получается вел-а, прж-но рсп-ная по норм. закону. Анч-но можно д-ть, что при сумв-и (взаимном наложении) большого числа стационарных, ординарных потоков с практически любым последействием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему. Условия, к-ые должны для этого соблюдаться, анч-ны условиям центральной предельной теоремы (ЦПТ), а именно – складываемые потоки должны оказывать на сумму приблизительно (прт.) равномерно малое влияние.

Не д-вая этого положения и даже не формулируя мтч-ки условия, к-ым должны уд-ть потоки, проиллюстрируем его элр-ми рассуждениями. Пусть имеется ряд незв-ых потоков Π_1, …, Π_n. «Суммирование» потоков состоит в том, что все моменты появления сб-й сносятся на одну и ту же ось Ot, как показано на рис. 6.

Предположим, что потоки Π_1, Π_2, … имеют плотности одного порядка, а число их дт-но велико и эти потоки стационарны и ординарны, но каждый из них может иметь последействие, и рас-им суммарный (сумр.) поток

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \qquad (2)$$

на оси Ot (рис. 6). Очевидно, что поток Π должен быть стационарным и ординарным, т.к. каждое слагаемое обладает этим св-ом и они незв-мы. Кроме того, дт-но ясно, что при увеличении числа слагаемых последействие в сумр-ом потоке, даже если оно значительно в отдельных потоках, должно постепенно слабеть. Дсв-но, рас-им на оси Ot два неперекрывающихся отрезка τ_1 и τ_2 (рис. 6). Каждая из точек, попадающих в эти отрезки, слн-ым образом может оказаться принадлежащей тому или иному потоку, и по мере увеличения n удельный вес точек, принадлежащих одному и тому же потоку (и значит, зв-ых), должен уменьшаться (а остальные точки принадлежат разным потокам и появляются на отрезках τ_1, τ_2 незв-мо друг от друга). Значит, сумр-ый поток будет терять последействие и прж-ся к простейшему.

На практике обычно оказывается дт-но сложить 4-5 потоков, чтобы получить поток, с к-ым можно оперировать как с простейшим.

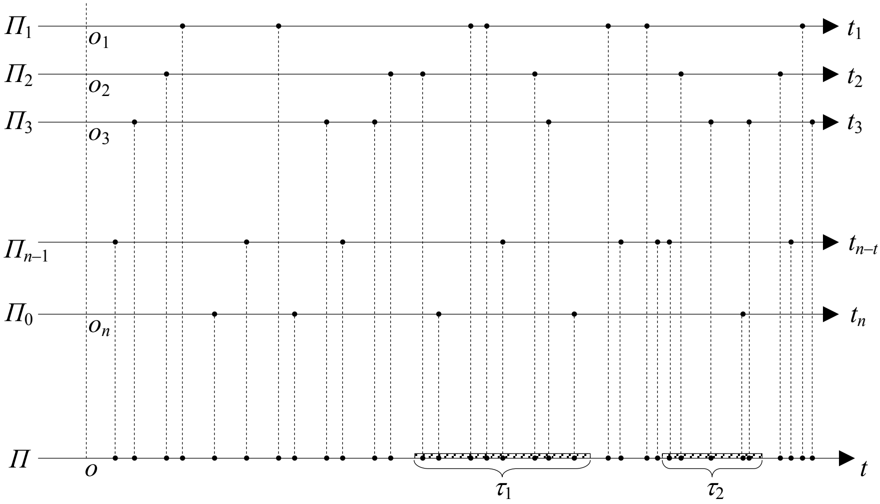


Рис. 6

Рас-им на оси Ot простейший поток сб-й $П$ (рис. 7) как неогр-ю посл-ть слн-ых точек. Выделим произвольный участок вр-и длиной τ. Тогда при условиях о1-о3 число точек m, попадающих на участок τ, рсп-но по закону Пуассона с мт-им ож-ем

$$a = \lambda\tau. \tag{3}$$

где λ – плотность потока (ср. число сб-й, приходящееся на ед-у вр-и).

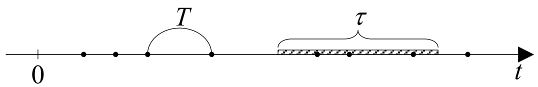


Рис. 7

Вер-ть того, что за время τ произойдет ровно m сб-й, составляет

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} \ . \tag{4}$$

В част., вер-ть того, что участок окажется пустым (не произойдет ни одного сб-я), будет

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}. \tag{5}$$

Важной хркс-ой потока яв-ся закон рсп-ия длины промежутка между соседними сб-ми. Рас-им слн. вел-у T – промежуток вр-и между произвольными двумя соседними сб-ми в простейшем потоке (рис. 7) и найдем ее фк-ю рсп-ия

$$F(t) = P(T < t).$$

Перейдем к вер-ти противоположного сб-я

$$1 - F(t) = P(T \ge t).$$

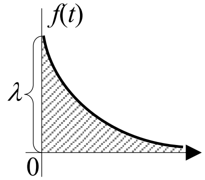


Рис. 8

Эта вер-ть появления на участке вр-и длиной t (с началом в точке t_k) одного из сб-й не влияет на вер-ть появления др. сб-й в силу простейшего потока (без последействия). Поэтому вер-ть $P(T \ge t)$ можно выч-ть по фм-е (5) $P(T \ge t) = P_0(t) = e^{-\lambda\tau}$, откуда

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda\tau}\ (t > 0). \tag{6}$$

Диф-уя, найдем плотность рсп-ия

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda\tau}\ (t > 0). \tag{7}$$

Закон рсп-ия с плотностью (7) наз. показательным законом, а вел. t – его параметром. График плотности $f(t)$ представлен на рис. 8.

Найдем мт. ож-ие и дсп-ию слн. вел-ы T, рсп-ой по показательному закону:

$$m_t = M[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \lambda\int_0^\infty te^{-\lambda\tau}dt = \begin{vmatrix} u = t, & dv = e^{-\lambda t}dt \\ du = dt, & v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty + \lambda\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D_t = D[T] = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - m_t^2 = \lambda\int_0^\infty t^2e^{-\lambda\tau}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \begin{vmatrix} u = t^2, & dv = e^{-\lambda t}dt \\ du = 2dt, & v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda}\,t^2e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - \frac{2\lambda}{\lambda}\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, получили

$$m_t = \frac{1}{\lambda}, \tag{8}$$

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma_t = \frac{1}{\lambda}. \tag{9}$$

Показательный закон обладает сд-им важным св-ом: если промежуток вр-и, рсп-ый по показательному закону, уже длился нек-ое время τ, то это никак не влияет на закон рсп-ия оставшейся части промежутка, т.е. он будет таким же, как и закон рсп-ия всего промежутка τ.

3°. Нестационарный пуассоновский поток. Если поток сб-й нестационарен, то его основной хркс-ой яв-ся мгновенная плотность $\lambda = \lambda(t)$. Мгновенной плотностью потока наз. предел отн-ия ср-го числа сб-й, приходящегося на элр-ый участок вр-и $(t, t + \Delta t)$, к длине участка при $\Delta t \to 0$:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = m'(t). \tag{10}$$

где $m(t)$ – мт. ож-ие числа сб-й на участке $(0, t)$.

Рас-им поток однородных (одн.) сб-й, ординарный и без последействия, но не стационарный, с пер-ой плотностью $\lambda(t)$. Такой поток наз. нестационарным пуассоновским потоком. Это – первая ступень обобщения по сравнению с простейшим потоком. Легко показать (см. 3°: 1.3), что для такого потока число сб-й, попадающих на участок длины τ, начинающийся в точке t_0, подчиняется закону Пуассона

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где a – мт. ож-ие числа сб-й на участке $(t_0, t_0 + \tau)$, равное

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt\,. \tag{12}$$

Здесь вел. a зв-т не только от длины τ участка, но и от его положения на оси Ot.

Найдем для нестационарного потока закон рсп-ия промежутка вр-и T между соседними сб-ми. Ввиду нестационарности потока этот закон будет зв-ть от того, где на оси t расположено первое из сб-й, и от вида фк-и $\lambda(t)$. Предположим, что первое из двух соседних сб-й появилось в момент t_0, и найдем закон рсп-ия вр-и T между этим сб-ем и последующим:

$$F_{t_0}(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geq 1).$$

Найдем $P(T \geq t)$ – вер-ть того, что на участке $(t_0, t_0 + \tau)$ не появится ни одного сб-ия:

$$P(T \geq t) = e^{-a} = e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)dt}, \text{ откуда}$$

$$F_{t_0}(t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)dt}. \tag{13}$$

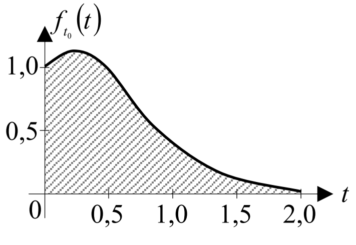


Рис. 9

Диф-уя, найдем плотность рсп-ия

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t)\, e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)dt} \quad (t > 0). \tag{14}$$

Закон рсп-ия (14) уже не будет показательным. Вид его зв-т от параметра t_0 и вида фк-и $\lambda(t)$. Н-р, при лин-ом изменении $\lambda(t) = a + bt$ имеем

$$f_{t_0}(t) = [a + b(t_0 + t)]\, e^{-at - bt_0 t - \frac{bt^2}{2}}. \tag{15}$$

График этого закона при $a = 0{,}4$, $b = 2$, $t_0 = 0{,}3$ представлен на рис. 9.

4°. Поток с ограниченным последействием (поток Пальма). Второй ступенью обобщения простейшего потока яв-ся поток с огр-ым последействием. Рас-им стационарный, ординарный поток одн-ых сб-й (рис. 10). Этот поток наз. потоком с огр-ным последействием (или потоком Пальма), если промежутки вр-и между посл-ми сб-ми T_1, T_2, … представляют собой незв. слн-ые вел-ы. Н-р, поток отказов в работе электрических ламп представляет собой поток пальма.

Очевидно, простейший поток яв-ся частным случаем потока Пальма: в нем расстояния T_1, T_2, … представляют собой незв. слн-ые вел-ы, рсп-ные по показательному закону. Нестационарный пуассоновский поток не яв-ся потоком Пальма, т.к. его закон рсп-ия зв-т от длины промежутка и от его положения на оси Ot (см. (11)).

Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков СМО. Основой теории выходных потоков яв-ся теорема Пальма, к-ую сформулируем без д-ва:

Пусть на СМО поступают заявки типа Пальма, причем заявка, заставшая все кн-ы занятыми, получает отказ (не обс-ся). Если при этом время обс-ия имеет показательный закон рсп-ия, то поток необслуженных заявок яв-ся также потоком типа Пальма.

Интересным примером потоков в огр-ым последействием яв-ся так наз-ые потоки Эрланга, к-ые образуются «просеиванием» простейшего потока.

Рас-им простейший поток (рис. 11) и выбросим из него каждую вторую точку (на рис. они отмечены крестами). Оставшиеся точки образуют поток, к-ый наз. потоком Эрланга первого порядка ($Э_1$). Очевидно, этот поток есть поток Пальма: поскольку незв-мы промежутки между сб-ми в простейшем потоке, то незв-мы и вел-ы T_1, T_2, …, получающиеся сумв-ем таких промежутков по два.

Поток Эрланга получится, если сохранить в простейшем потоке каждую третью точку, а две промежуточные выбросить (рис. 12).

Вообще, потоком Эрланга k-го порядка ($Э_k$) наз. поток, получаемый из простейшего, если сохранить (k + 1)-ю точку, а остальные выбросить. Очевидно, простейший поток можно расв-ть как поток Эрланга нулевого порядка ($Э_0$).

Найдем закон рсп-ия промежутка вр-и T между соседними сб-ми в потоке Эрланга k-го порядка ($Э_k$). Рас-им на оси Ot (рис. 13) простейший поток с инр-ми T_1, T_2, … Вел. T представляет собой сумму $k + 1$ незв. слн-ых вел-н

$$T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i\,, \tag{16}$$

где T_1, …, T_{k+1} – незв. слн. вел-ы, подчиненные одному и тому же показательному закону

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{17}$$

Найдем закон рсп-ия вел-ы T, обз-ив через $f_k(t)$ плотность рсп-ия вел-ы T для потока $Э_k$; $f_k(t)dt$ есть вер-ть того, что вел. T примет зн-ие между t и $t + dt$ (рис. 13). Это значит, что последняя точка промежутка T должна попасть на элр-ый участок (t, $t + \Delta t$), а предыдущие k точек простейшего потока – на участок (0, t). Вер-ть первого сб-ия равна λdt в силу (3); вер-ть второго на основании фм-ы (4) будет

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,.$$

Перемножая эти вер-ти, получим $f_k(t)dt = \dfrac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dt$, откуда имеем

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{18}$$

Закон рсп-ия с плотностью (18) наз. законом Эрланга k-го порядка. При $k = 0$ он обращается в показательный:

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{19}$$

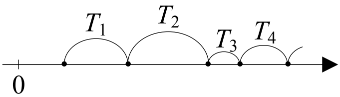


Рис. 10

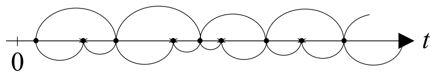


Рис. 11

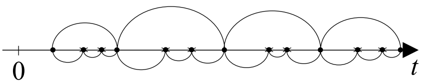


Рис. 12

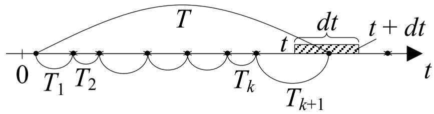


Рис. 13

Найдем хркс-ки закона Эрланга: мт. ож-ие m_k и дсп-ю D_k. По теореме сж-ия мт. ож-й,

$$m_k = \sum_{i=1}^{k+1} m_0 = (k+1)m_0,$$

где $m_0 = 1/\lambda$ – мт. ож-ие промежутка между сб-ми в простейшем потоке. Отсюда

$$m_k = (k+1)/\lambda. \tag{20}$$

Анч-но, по теореме сж-ия дсп-й,

$$D_k = (k+1)/\lambda^2,\ \sigma_k = \sqrt{k+1}\big/\lambda\,. \tag{21}$$

Плотность Λ_k потока $Э_k$ будет обратна вел-е m_k

$$\Lambda_k = \lambda/(k+1). \tag{22}$$

Т.о., при увеличении порядка потока Эрланга увеличиваются как мт. ож-ие, так и дсп-ия промежутка вр-и, а плотность потока падает.

Выясним, как будет изменяться поток Эрланга при $k \to \infty$, если его плотность будет сохраняться пст-ой? Пронормируем вел-у T так, чтобы ее мт. ож-ие (и сд-но, плотность потока) оставалось неизменным. Для этого изменим масштаб по оси вр-и и вместо T рас-им вел-у

$$\widetilde{T} = \frac{T}{k+1}\,. \tag{23}$$

Наз-ем такой поток нормированным (норв.) потоком Эрланга k-го порядка. Закон рсп-ия промежутка $\widetilde{T}$ между сб-ми этого потока будет

$$\widetilde{f}_k(t) = \frac{\Lambda_k(\Lambda_k t)^k}{k!} e^{-\Lambda_k t} \quad (t > 0), \tag{24}$$

где $\Lambda_k = \lambda/(k+1)$, или

$$\widetilde{f}_k(t) = \frac{\lambda(k+1)}{k!}(\lambda(k+1)t)^k e^{-\lambda(k+1)t} \quad (t > 0), \tag{25}$$

Мт. ож-ие вел-ы $\widetilde{T}$, рсп-ной по закону (25) не зв-т от k и равно

$$\widetilde{m}_k = m_0 = 1/\lambda,$$

где λ – плотность потока, совпадающая при любом k с плотностью исх-го простейшего потока. Дсп-ия вел-ы T равна

$$\widetilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)} \qquad (26)$$

и неогр-но уб-ет с взр-ем k.

Т.о., приходим к выводу: при неогр-ом увеличении k норв-ый поток Эрланга прж-ся к регулярному потоку с пст. инр-ми, равными $1/\lambda$.

Это св. потоков Эрланга удобно в практических применениях, к-ое дает возможность, задаваясь различными k, получить любую ст-нь последействия: от полного отсутствия ($k = 0$) до жесткой фнц-ой связи между моментом появления сб-й ($k = \infty$). Т.о., порядок потока Эрланга может служить «мерой последействия», имеющегося в потоке. Поэтому удобно заменять реальный поток заявок с последействием на норв-ый поток Эрланга с примерно теми же хркс-ми промежутка между заявками: мт. ож-ем и дсп-ей.

п1. В результате стсч-ой обработки промежутков между заявками получены оценки для мт. ож-ия и дсп-и вел-ы T: $m_t = 2$ (мин), $D_t = 0{,}8$ (мин^2). Заменить этот поток норв. потоком Эрланга с теми же хркс-ми.

Р. Имеем $\lambda = 1/m_t = 0{,}5$. Из (26) получим $k + 1 \approx 1/D_t\lambda^2 = 1/0{,}8 \cdot 0{,}25 = 5$, $k = 4$. Поток можно заменить прж-но норв. потоком Эрланга четвертого порядка.

5º. Время обслуживания и функция ее распределения. Одной из важнейших вел-н, связанных с СМО, яв-ся время (вр.) обс-ия одной заявки $T_{об}$. Обз-им $G(t)$ ее фк-ю рсп-ия:

$$G(t) = P(T_{об} < t) = 1 - e^{-\mu t}, \qquad (27)$$

а $g(t)$ – плотность рсп-ия:

$$g(t) = G'(t). \qquad (28)$$

Для практики особый интерес представляет случай, когда $T_{об}$ имеет показательное рсп:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0), \qquad (28')$$

где параметр μ – вел-а, обратная ср-у вр-и обс-ия одной заявки:

$$\mu = \frac{1}{m_{t_{об}}}, \; m_{t_{об}} = M[T_{об}]. \qquad (29)$$

Показательным законом можно использовать для «обслуживания» по устранению неисправностей техн-их устройств, когда поиски неисправной детали или узла осуществляются рядом тестов или проверок. К такому типу можно отнести задачи, где «обслуживание» заключается в обнаружении какого-либо объекта радиолокатором, если объект с какой-то вер-ю может быть обнаружен при каждом цикле обзора. Показательным законом хорошо описываются и те случаи, когда плотность рсп-ия уб-ет при взр-и аргумента t. Это бывает, когда основная масса заявок обс-ся очень быстро, а значительные задержки в обс-и нбл-ся редко. Н-р, в почтовом отделении основная масса посетителей покупает марки или конверты и обс-ся очень быстро. Реже встречаются заявки на отправление заказных писем, они обс-ся несколько дольше. Переводы посылаются еще реже и обс-ся еще дольше.

Допущение о пуассоновском хрк-ре заявок и о показательном рсп-и вр-и обс-ия ценны тем, что позволяют применить в теории МО аппарат марковских слн. процессов (см. 2°, 3°: 7.1). В случае, когда процесс, протекающий в физической системе со счетным мн-ом сст-й и непр-ым вр-ем, яв-ся марковским, можно описать этот процесс с помощью обыкновенных диф. ур-й, в к-ых неизвестными фк. яв-ся вер-ти сст-й $p_1(t)$, $p_2(t)$, … Составление и решении таких ур-й рас-им в сд-ем п° на примере простейшей СМО.

6°. Система массового обслуживания с отказами. Уравнения Эрланга. Пусть имеется n-кн-ая СМО с отказами. Рас-им ее как физическую систему X с конечным мн-ом сст-й: x_0 (свободны все кн.), x_1 (занят ровно один кн.), …, x_k (занято ровно k кн-ов), …, x_n (заняты все n кн-ов). Схема возможных переходов дана на рис. 14. Опр-им вер-ти сст-й системы $p_k(t)$ ($k = \overline{0,n}$) для любого момента вр-и t. Задачу будем решить при сд-их допущениях:

1) поток заявок – простейший с плотностью λ;

2) время обс-ия $T_{об}$ – показательное с параметром $\mu = \dfrac{1}{m_{t_{об}}}$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0). \tag{30}$$

Заметим, что параметр μ (плотность потока освобождений) в фм-е (30) полностью анч-ен параметру λ (плотность потока заявок) показательного закона рсп-ия промежутка T между соседними сб-ми простейшего потока:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{31}$$

Т.к. оба потока (заявок и освобождений) простейшие, то процесс, протекающий в СМО, будет Марковским.

Рас-им возможные сст-ия системы и их вер-ти

$$p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t). \tag{32}$$

Очевидно, для любого момента вр-и

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1. \tag{32а}$$

Составим диф-ые ур-ия для всех вер-ей (32), начиная с $p_0(t)$. Зафиксируем момент вр-и t и найдем вер-ть $p_0(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в сст-и x_0 (все кн. свободны). Это может произойти двумя способами (рис. 15):

А – в момент t система находилась в сст-и x_0, а за время Δt не перешла из нее в x_1 (не пришло ни одной заявки).

В – в момент t система находилась в сст-и x_1, а за время Δt кн. освободился, и система перешла в сст-ие x_0.

Возможностью «перескока» системы через сст-ие (н-р, из x_2 в x_0 через x_1) за малый промежуток вр-и можно пренебречь как вел-ой высшего порядка малости по сравнению с $P(A)$ и $P(B)$. Тогда по теореме сж-ия вер-ей имеем

$$p_0(t + \Delta t) \approx P(A) + P(B). \tag{32б}$$

Найдем вер-ть сб-я A по теореме умн-ия. Вер-ть того, что в момент t системы была в сст-и x_0, равна $p_0(t)$. Вер-ть того, что за вр. Δt не придет ни одной заявки, равна $e^{-\lambda\Delta t}$. С точностью до вел-н высшего порядка малости имеем

$$e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \Delta t. \tag{32в}$$

Сд-но, $$P(A) \approx p_0(t)(1 - \lambda\Delta t).$$

Найдем $P(B)$. Вер-ть того, что в момент t системы была в сст-и x_1, равна $p_1(t)$. Вер-ть того, что за вр. Δt кн. освободится, равна $1 - e^{-\mu\Delta t}$, тогда по (32в) получим

$$1 - e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t.$$

Сд-но, $$P(B) \approx p_1(t)\mu\Delta t.$$

Отсюда $$p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + \mu p_1(t)\Delta t.$$

Перенося $p_0(t)$ в левую часть, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \qquad (32г)$$

Анч-ые диф. ур-ия могут быть составлены и для др-их вер-ей сст-й.

Возьмем любые k $(0 < k < n)$ и найдем вер. $p_k(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в сст-и x_k (рис. 16). Эта вер. выч-ся как вер-ть суммы трех сб-й:

A – в момент t система была в сст-и x_k (занято k кн-ов), а за время Δt не перешла из него ни в x_{k+1}, ни в x_{k-1} (ни одна заявка не поступила, ни один кн. не освободился);

B – в момент t система была в сст-и x_{k-1} (занято $k - 1$ кн-ов), а за вр. Δt перешла в x_k (пришла одна заявка);

C – в момент t система была в сст-и x_{k+1} (занято $k + 1$ кн-ов), а за вр. Δt один из кн-ов освободился.

Найдем $P(A)$. Выч-им сначала вер-ть того, что за время Δt не придет ни одна заявка и не освободится ни один из кн-ов:

$$e^{-\lambda\Delta t}\left(e^{-\mu\Delta t}\right)^k = e^{-(\lambda + k\mu)\Delta t} \approx 1 - (\lambda + k\mu)\Delta t,$$

откуда $$P(A) \approx p_k(t)[1 - (\lambda + k\mu)\Delta t].$$

Анч-но, $$P(B) \approx p_{k-1}(t)\lambda\Delta t,$$
$$P(C) \approx p_{k+1}(t)(k + 1)\mu\Delta t$$

и $$p_k(t + \Delta t) \approx p_k(t)[1 - (\lambda + k\mu)\Delta t] + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t + p_{k+1}(t)(k + 1)\mu\Delta t.$$

Отсюда получим диф-ое ур-ие для $p_k(t)$ $(0 < k < n)$:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k + 1)\mu p_{k+1}(t). \qquad (32д)$$

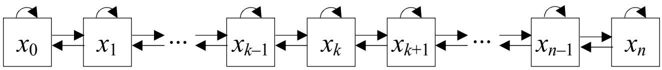
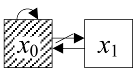
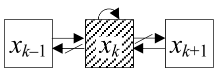


Рис. 14





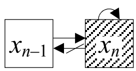


Рис. 15 Рис. 16 Рис. 17

Составим ур-ие для последней вер-ти $p_n(t)$ (рис. 17). Анч-но имеем:

$$p_n(t + \Delta t) \approx p_n(t)(1 - n\mu\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t,$$

где $1 - n\mu\Delta t$ – вер-ть того, что за время Δt не освободится ни один кн; $\lambda\Delta t$ – вер-ть того, что за время Δt придет одна заявка. Получим диф. ур-ие для $p_n(t)$:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \qquad (32е)$$

Из (32г)-(32е) образуем систему диф-ых ур-й для вер-ей $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)\ (0 < k < n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t).
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Ур-ие (33) наз. ур-ем Эрланга. Интв-ие система (33) при нач. условиях

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = \ldots = p_n(0) = 0$$

(в нач-ый момент все кн. свободны) дает зв-ть $p_k(t)$ для любого k. Вер. $p_k(t)$ хркз-ют ср. загрузку системы и ее изменение с течением вр-и. В част., $p_n(t)$ есть вр. того, что заявка, пришедшая в момент t, застанет все кн-ы занятыми (получит отказ) равна $P_{отк} = p_n(t)$.

Вел-а $q(t) = 1 - p_n(t)$ наз. отс-ой пропускной способностью системы. Для данного момента t это есть отн-ие ср-го числа обслуженных за ед-у вр-и заявок к ср-му числу поданных.

Система лин. диф-ых ур-й (33) сравнительно легко может быть интв-на при любом конкретном числе кн-ов n. Причем вел-ы λ и μ (плотности потока заявок и потока освобождений могут быть зв-ми от вр-и t, т.е. $\lambda = \lambda(t)$, $\mu = \mu(t)$).

7°. Установившийся режим обслуживания. Формула Эрланга. Рас-им n-кн-ую СМО с отказами, на вход к-ой поступает простейший поток заявок с плотностью λ, а время обслуживания – показательное с параметром μ. Возникает вопрос: будет ли стационарным слн-ый процесс, протекающий в системе? В начале работы системы будет «переходной» нестационарный процесс. Однако спустя нек-ое вр. этот переходный процесс затухнет, и система перейдет на стационарный, так наз-мый «установившийся» режим, вер-ные хркс-ки к-го уже не будет зв-ть от вр-и.

Можно д-ть, что для любой системы с отказами такой предельный режим сущ-ет, т.е. при $t \to 0$ все вер-ти $\{p_k(t)\}$ стремятся к пст-ым пределам $\{p_k\}$, а все их производные – к нулю, и вместо (33) получим систему алг. ур-й:

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0,\\
&\lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0\ (0 < k < n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda p_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu)p_{n-1} + n\mu p_n = 0,\\
&\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

К этим ур-ям нх-мо добавить условие

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1. \quad (34а)$$

Решим систему (34) отс-но неизвестных $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Из первого ур. имеем

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0. \tag{34б}$$

Из второго с учетом (34б) получим

$$p_2 = \frac{1}{2\mu}[-\lambda p_0 + (\lambda+\mu)p_1] = \frac{1}{2\mu}[-\lambda p_0 + \frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \lambda p_0] = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0, \tag{34в}$$

анч-но из третьего с учетом (34б) и (34в) имеем

$$p_3 = \frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \frac{\lambda^3}{2\mu^2} p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \cdot 2\mu p_0\right) = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0,$$

и вообще, для любого $k \le n$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0. \tag{35}$$

Введем обз-ия:

$$\lambda/\mu = \alpha.$$

и наз-ем вел-у α приведенной плотностью потока заявок. Это есть ср. число заявок, приходящееся на ср. время обс-ия одной заявки. Дсв-но,

$$\alpha = \lambda/\mu = \lambda\, m_{t_{об}},$$

где $m_{t_{об}} = M[T_{об}]$ – ср. время обс-ия одной заявки. Тогда фм. (35) примет вид

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0. \tag{35а}$$

Фм. (35а) выражает все вер-ти p_k через p_0. Чтобы выразить их через α и n, используем (34а):

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum \frac{\alpha^k}{k!} = 1.$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}. \tag{35б}$$

Подставляя (35б) в (35а), получим окончательно

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \quad (0 \le k \le n). \tag{36}$$

Фм-ы (36) наз. фм-ми Эрланга. Они дают предельный закон рсп-ия числа занятых кн-ов в звт-и от хркс-ик потока заявок и прзл-ти системы обс-ия. Полагая в фм-е (36) $k = n$, получим вер-ть отказа

$$P_{отк} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}. \tag{36а}$$

В част., для окн-ой системы ($n = 1$)

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \tag{36б}$$

а отс-ая пропускная способность

$$q = 1 - P_{отк} = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{36в}$$

Фм-ы Эрланга (36) и их следствия (36а)-(36в) выведены для случая показательного рсп-ия вр-и обс-ия. Эти фм-ы верны и при любом законе рсп-ия вр-и обс-ия, лишь бы входной поток был простейшим.

п2. АТС имеет 4 линии связи. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 3$ (вызова в мин). Вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Ср-я длительность разговора 2 мин. Найти: а) вер-ть отказа; б) ср-ю долю вр-и, в течение к-ой ТС вообще не загружена.

Р. Имеем $m_{t_{об}} = 2$ (мин), $\mu = 0{,}5$ (разн./мин), $\alpha = \lambda/\mu = 6$.

а) по фм-е (36а) получим $P_{отк} = p_n = \dfrac{\frac{\alpha^4}{4!}}{1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0{,}47$.

б) по фм-е (35б) имеем $p_0 = \dfrac{1}{1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0{,}0087$.

Несмотря на то, что фм-ы Эрланга в точности справедливы только при простейшем потоке заявок, ими можно с известным прж-ем пользоваться и в случае, когда поток заявок отличается от простейшего (н-р, яв-ся стационарным потоком с огр-ым последействием). Такая замена простейшим потоком с плотностью λ оправдана, т.к. она мало влияет на хркс-ки пропускной способности системы. Фм-ой Эрланга можно прж-но пользоваться и в случае, когда СМО допускает ож-ие заявки в очереди, если срок ож-ия мал по сравнению со ср. вр-ем обс-ия одной заявки.

п3. Станция наведения истребителей имеет 3 кн-а. Каждый кн. одновременно наводит один истребитель на одну цель. Ср-е время наведения истребителя на цель $m_{t_{об}} = 2$ мин. Поток целей – простейший с плотностью $\lambda = 1{,}5$ (самолетов в мин). Станцию можно считать «системой с отказами», т.к. цель, по к-ой наведение не началось в момент, когда она вошла в зону действия истребителей, вообще остается не атакованной. Найти ср-ю долю целей, проходящих через зону действия не обстрелянным.

Р. Имеем $\mu = 1/2 = 0{,}5$, $\lambda = 1{,}5$, $\alpha = \lambda/\mu = 3$. По фм-е (36а) получим $P_{отк} =$
$= p_3 = \dfrac{\frac{3^3}{3!}}{1+\frac{3}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}} \approx 0{,}346$. Вер-ть отказа равна 0,346 и она же выражает ср-ю долю необстрелянных целей.

Заметим, что в примере плотность потока целей выбрана такой, что при их регулярном следовании одна за другой через опр-ые инр-лы и при точном фиксированном (фксн.) вр-и наведения $T_{об}$ = 2 мин номинальная пропускная способность системы дт-на для того, чтобы обстрелять все без исключения цели. Снижение пропускной способности происходит из-за наличия слн-ых сгущений или разрежений в потоке целей, к-ые нельзя предвидеть заранее.

8º. Система массового обслуживания с ожиданием. Если время ож-ия заявки в очереди ничем не огр-но, то система наз. «чистой системой ож-ия». Если оно огр-но какими-то условиями (н-р, вр-ем ож-ия заявки очереди, числом заявок в очереди, обс-ем по предпочтительности (прч.) и т.д.), то система наз. «системой смешанного типа». Это промежуточный случай между чистой системой с отказами и чистой системой с ож-ем.

Здесь изучим простейший случай смешанной системы, яв-ся естественным обобщением задачи Эрланга для системы с отказами.

Рас-им смешанную СМО X с n кн-ми, на вход к-ой поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обс-ия одной заявки $T_{об}$ – показательное с параметром $\mu = 1/m_{t_{об}}$. Заявка, заставшая все кн-ы занятыми, становится в очередь и ож-ет обс-ия, время ож-ия огр-но нек-ым сроком $T_{ож}$. Если до истечения этого срока заявка не будет принята к обс-ю, то она покидает очередь и остается необслуженной (необс.). Срок ож-ия $T_{ож}$ будем считать слн-ым и рсп-ым по показательному закону

$$h(t) = \nu e^{-\nu t} \quad (t > 0),$$

где параметр ν – вел., обратная ср. сроку ож-ия:

$$\nu = 1/m_{t_{ож}}, \; m_{t_{ож}} = M[T_{ож}].$$

Параметр ν полностью анч-ен параметрам λ и μ потока заявок и «потока освобождений». Его можно инпр-ть как плотность «потока уходов» заявки, стоящей в очереди.

Очевидно, при $\nu \to \infty$ система смешанного типа превращается в чистую систему с отказами; при $\nu \to 0$ – в чистую систему с ож-ем.

Благодаря допущению о пуассоновском хрк-е всех потоков сб-й, приводящих к изменениям сст-й системы, процесс, протекающий в ней, будет марковским. Напишем ур-ия для вер-ей сст-й системы. Возможными сст-ми системы будут: x_0 (ни один кн. не занят, очереди нет), x_1 (занят ровно один кн., очереди нет), …, x_k (занято ровно k кн-ов, очереди нет), …, x_n (заняты все n кн-ов, очереди нет), x_{n+1} (заняты все n кн-ов, одна заявка стоит в очереди), …, x_{n+s} (заняты все n кн-ов, s заявок стоит в очереди), …

Число заявок s, стоящих в очереди, может быть сколь угодно большим, сд-но, число описывающих ее диф-ных ур-й тоже будет беск-ым. Первые n ур-й совпадают с ур-ми Эрланга.

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_{n-1}(t)}{dt} = \lambda p_{n-2}(t) - [\lambda + (n-1)\mu)p_{n-1}(t) + n\mu p_n(t).
\end{aligned}\right\} \tag{37}
$$

Отличие от ур-й Эрланга начнется при $k = n$. Составим диф. ур-е для $p_n(t)$. Зафиксируем момент t и найдем $p_n(t + \Delta t)$ – вер-ть того, что система в момент $t + \Delta t$ будет в сст-и x_n. Это может осуществиться тремя способами:

1) в момент t система была в сст-и x_n и за вр. Δt не вышла из него (не пришла ни одна заявка и ни один из кн-ов не освободился);

2) в момент t система была в сст-и x_{n-1} и за вр. Δt перешла в x_n (пришла одна заявка);

3) в момент t система была в сст-и x_{n+1} и за вр. Δt перешла в x_n (либо освободился один кн. и стоящая в очереди заявка заняла его, либо стоящая в очереди заявка ушла в связи с оконч. срока).

Отсюда $p_n(t + \Delta t) \approx p_n(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+1}(t)(n\mu + v)\Delta t$, откуда

$$
\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n\mu + v)p_{n+1}(t).
$$

Выч-им $p_{n+s}(t + \Delta t)$ при любом $s > 0$ – вер-ть того, что в момент $t + \Delta t$ все n кн-ов будут заняты и ровно s заявок будут стоять в очереди. Это сб. получим 3-мя способами:

1) в момент t система была в сст-и x_{n+s} и за вр. Δt не вышла из него (ни одна заявка не пришла, ни один кн. не освободился и ни одна из заявок s, стоящих в очереди, не ушла);

2) в момент t система была в сст-и x_{n+s-1} и за вр. Δt перешла в x_{n+s} (т.е. пришла одна заявка);

3) в момент t система была в сст-и x_{n+s+1} и за вр. Δt перешла в x_{n+s} (либо один из кн-в освободился и стоящая в очереди заявка $s + 1$ заняла его, либо стоящая в очереди заявка ушла в связи с оконч. срока). Сд-но,

$p_{n+s}(t + \Delta t) \approx p_{n+s}(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t - sv\Delta t) + p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+s-1}(t)[n\mu + (s+1)v]\Delta t$,

откуда $\dfrac{dp_{n+s}(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu + sv)p_{n+s}(t) + \lambda p_{n+s-1}(t) + [n\mu + (s+1)v]p_{n+s+1}(t)$.

Т.о. получили для вер-ей сст-й систему беск-го числа диф-ых ур-й:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)\ (1 \le k \le n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + [n\mu + v]p_{n+1}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_{n+s}(t)}{dt} = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu + sv)p_{n+s}(t) + [n\mu + (s+1)v]p_{n+s+1}(t).
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Ур-ия (38) яв-ся обобщением ур-й Эрланга на случай системы смешанного типа с огр-ым вр-ем ож-ия. Параметры λ, μ, v в этих ур-ях могут быть как пст-ми, так и пер-ми. На практике вер-ти $p_{n+s}(t)$ при взр-и s становятся беск-но малыми, поэтому ств-ие ур-ия могут быть отброшены.

Выведем фм-ы, анч-ые фм-ам Эрланга при установившемся режиме обс-ия (при $t \to \infty$). Из ур-й (38), полагая все p_k ($k = 0, 1, \dots, n, \dots$) пст-ми, а все производные – равными нулю, получим систему алг-их ур-й:

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0,\\
&\lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0\ (1 \le k \le n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n\mu + v)p_{n+1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu + sv)p_{n+s} + [n\mu + (s+1)v]p_{n+s+1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

К ним надо присоединить условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad (39а)$$

Систему (39) решим как в случае системы с отказами по (35) при $k \le n$:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} p_0. \quad (39б)$$

Перейдем к ур-ям для $k > n$ ($k = n + s$, $s \ge 1$). Тем же способом получим:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} p_0}{n!\,\mu^n (n\mu + v)},\ p_{n+2} = \frac{\lambda^{n+2} p_0}{n!\,\mu^n (n\mu + v)(n\mu + 2v)},$$

и вообще при любом $s \ge 1$

$$p_{n+s} = \frac{\lambda^{n+s} p_0}{n!\,\mu^n \prod_{m=1}^{s} (n\mu + mv)}, \quad (39в)$$

В обе фм-ы (39б) и (39в) входит вер. p_0. Опр-им ее из условия (39а) и получим

$$p_0\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+s}}{n!\,\mu^n\prod_{m=1}^{s}\left(n\mu+m\nu\right)}\right\}=1,$$

откуда имеем

$$p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+s}}{n!\,\mu^n\prod_{m=1}^{s}\left(n\mu+m\nu\right)}}. \qquad (39г)$$

Прб-уем врж-ия (39б), (39в), (39г), взяв вместо плотностей λ и ν «приведенные» плотности:

$$\left.\begin{aligned}\lambda/\mu=\lambda m_{t_{об}}=\alpha,\\ \nu/\mu=\nu m_{t_{об}}=\beta.\end{aligned}\right\} \qquad (39д)$$

Параметры α и β врж-ют ств-но ср. число заявок и ср. число уходов заявки, стоящей в очереди, приходящиеся на ср. время обс-ия одной заявки.

В новых обз-ях фм-ы (39б), (39в) и (39г) примут вид:

$$p_k=\frac{\alpha^k}{k!}p_0\ (0<k\le n); \qquad (39е)$$

$$p_{n+s}=\frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!}p_0}{\prod_{m=1}^{s}\left(n+m\beta\right)}\ (s\ge 1) \qquad (39ё)$$

$$p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}\left(n+m\beta\right)}}. \qquad (39ж)$$

Подставляя (39ж) в (39е) и (39ё), получим окончательно:

$$p_k=\frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}\left(n+m\beta\right)}}\ (0\le k\le n); \qquad (40)$$

$$p_{n+s}=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}\left(n+m\beta\right)}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}\left(n+m\beta\right)}}\ (s\ge 1). \qquad (40а)$$

Зная вер-ти всех сст-й системы, можно легко опр-ть др. интересующие нас хркс-ки, в част., вер-ть $P_н$ того, что заявка покинет систему необс-ой. Опр-им ее из сд-их соображений: при установившемся режиме вер-ть $P_н$ есть отн-ие ср-го числа заявок, уходящих из очереди в ед-у вр-и, к ср. числу заявок, поступающих в ед-у вр-и. Найдем ср. число заявок, уходящих из очереди в ед-у вр-и. Для этого сначала выч-им мт. ож-ие m_s числа заявок, находящихся в очереди:

$$m_s = M[s] = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \tag{41}$$

Чтобы получить $P_н$, нужно m_s умножить на ср-ю «плотность уходов» одной заявки ν и разделить на ср-ю плотность заявок λ, т.е. умножить на коэф-т

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{\mu}\bigg/\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{41а}$$

$$P_н = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \tag{42}$$

Отс. пропускная способность хркз-ся вер-ю того, что заявка, попавшая в систему, будет обс-на:

$$q = 1 - P_н.$$

Очевидно, что пропускная способность системы с ож-ем при тех же λ и μ будет всегда выше, чем пропускная способность системы с отказами, ибо в случае наличия ож-ия необс-ми уходят не все заявки, заставшие n кн-ов занятыми, а только нек-ые. Пропускная способность увеличивается при увеличении ср-го вр-и ож-ия $m_{t_{ож}} = 1/\nu$.

Непосредственное использование фм-л (40), (40а) и (42) несколько затруднено тем, что в них входят беск. суммы. Однако члены этих сумм быстро уб-ют. Для грубой оценки ошибки, происходящей от отбрасывания всех членов сумм, начиная с r-го, можно пользоваться фм-ми:

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)} < \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^r}{r!}e^{\frac{\alpha}{\beta}},\quad \sum_{s=r}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)} < \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^r}{(r-1)!}e^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{43}$$

Рас-им, какой вид примут фм-ы (40) и (40а) при $\beta \to \infty$ и $\beta \to 0$. Очевидно, что при $\beta \to \infty$ система с ож-ем должна стать системой с отказами (заявка мгновенно уходит из очереди). Дсв-но, при $\beta \to \infty$ фм-ы (40а) дадут нули, а фм-ы (40) превратятся в фм-ы Эрланга для систем с отказами.

При $\beta \to 0$ (чистая система с ож-ем) заявки вообще не уходят из очереди, и поэтому $P_н = 0$: каждая заявка рано или поздно дождется обс-ия. Но в чистой системе с ож-ем не всегда сущ-ет стационарный режим при $t \to \infty$. Такой режим сущ-ет только при $\alpha < n$, т.е. когда ср. число заявок, приходящееся на время обс-ия одной заявки, не выходит за пределы возможностей n-кн-ой системы. Если же $\alpha \geq n$, то число заявок, стоящих в очереди, будет неогр-но возрастать при $t \to \infty$.

Предположим, что $\alpha < n$, и найдем P_k ($0 \leq k \leq n$) для чистой системы с ож-ем. Для этого положим в фм-ах (39ж), (40) и (40а) $\beta \to 0$ и получим $p_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{n^s}}$ или, суммируя прогрессию (что возможно при $\alpha < n$), имеем

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \tag{44}$$

Отсюда, пользуясь фм-ми (39е) и (39ё), найдем

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad (0 \leq k \leq n), \tag{45}$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad (k = n + s,\ s \geq 0). \tag{45а}$$

Ср. число заявок, находящихся в очереди, опр-ся по фм-ам (41) при $\beta \to 0$:

$$m_s = \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \tag{46}$$

п4. На вход трехкн-ой системы с неогр-ым вр. ож-ия поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 4$ (заявки в час). Ср. время обс-ия одной заявки $m_{t_{об}} = 30$ мин. Опр-ть, сущ-ет ли установившийся режим обс-ия; если да, то найти вер-ти P_0, P_1, P_2, P_3, вер-ть наличия очереди и ср. длину m_s.

Р. Имеем $\mu = \dfrac{1}{m_{t_{об}}} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$, $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{4}{2} = 2$. Т.к. $\lambda < n$, установившийся режим сущ-ет. По фм-е (45) находим $P_0 = 1/9 \approx 0{,}111$, $P_1 = 2/9 \approx 0{,}222$, $P_2 =$

$= 2/9 \approx 0{,}222$, $P_3 = 8/54 \approx 0{,}148$. Вер-ть наличия очереди $P_{оч} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = 0{,}297$. Ср. длина очереди по (46) будет $m_s = 0{,}89$ (заявок).

9°. Система смешанного типа с ограничением по длине очереди. Рас-им систему с видом огр-ия ож-ия – по числу заявок, стоящих в очереди. Пусть заявка, заставшая все кн-ы занятыми, становится в очередь (с s заявками), только если в ней находится не менее m заявок ($s < m$) и при $s = m$ покидает систему необс-ной. По-прежнему поток заявок простейший с плотностью λ, вр. обс-ия одной заявки $T_{об}$ – показательное с плотностью $\mu = 1/m_{t_{об}}$.

Составим диф. ур-ия для вер-ей сст-й n-кн-ой системы со сст-ми: x_0 (все кн. свободны, очереди нет), x_1 (занят один кн., очереди нет), …, x_k (занято k кн-ов. очереди нет), …, x_{n-1} (занято $n-1$ кн., очереди нет), x_n (заняты все n кн-ов, очереди нет), x_{n+1} (заняты все n кн-ов, одна заявка стоит в очереди), …, x_{n+m} (заняты все n кн-ов, m заявок стоит в очереди).

Очевидно, первые n ур-й для вер-ей $p_0(t)$, $p_1(t)$, …, $p_{n-1}(t)$ будут совпадать с ур-ми Эрланга (33). Выведем остальные ур-ия. Имеем

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + p_{n+1}(t)n\mu\Delta t,$$

откуда
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t).$$

Далее выведем ур-ие для $p_{n+s}(t)$ $(1 \le s < m)$.

$$p_{n+s}(t + \Delta t) = p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + p_{n+s}(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + p_{n+s+1}(t)n\mu\Delta t,$$

откуда
$$\frac{dp_{n+s}(t)}{dt} = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t).$$

Последнее ур. имеет вид

$$\frac{dp_{n+m}(t)}{dt} = \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t).$$

Т.о., получена система $(n + m + 1)$ диф-ых ур-й:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)\ (1 < k \le n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_{n+s}(t)}{dt} = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t)\ (1 \le s < m),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dp_{n+m}(t)}{dt} = \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t).
\end{aligned}\right\}\qquad (47)$$

При установившемся режиме ($t \to \infty$) обс-ия из (47), полагая все p_k пст-ми, а их производные – равными нулю, получим систему алг-их ур-й:

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \ (1 < k \le n-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu)p_{n+s} + n\mu p_{n+s+1} = 0 \ (1 \le s < m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0. \end{array}\right\} \qquad (48)$$

К ним добавим условие

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1. \qquad (48а)$$

Ур-ия (48) могут быть решены так же, как решили анч-ые алг. ур-ия в предыдущих п°п°. Поэтому приведем только окончательные фм-ы

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} \ (0 \le k \le n), \qquad (49)$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^k}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} \ (0 \le s \le m). \qquad (49а)$$

Вер-ть того, что заявка покинет систему необс-ой, равна вер-ти P_{n+m} того, что в очереди стоят уже m заявок.

Заметим, что фм-ы (49) и (49а) получаются из фм-л (40) и (40а), если взять в них $\beta = 0$ и огр-ть сумв-ие по s верхней границей m.

п5. На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 0{,}5$ (машины в час). Имеется одно помещение для ремонта ($n = 1$). Во дворе станции могут одновременно находиться, ож-ая очереди, не более трех машин. Ср. время ремонта одной машины $m_{t_{об}} = 1/\mu = 2$ (часа). Опр-ть: а) пропускную способность системы; б) ср. время простоя машин; в) насколько изменятся эти хркс-ки, если оборудовать второе помещение для ремонта.

Р. Имеем: $\lambda = 0{,}5$, $\mu = 0{,}5$, $\alpha = \lambda/\mu = 1$, $m = 3$, $n = 1$.

а) По фм-е (49а) при $n = 1$ находим вер-ть того, что пришедшая заявка покинет систему необс-ой: $P_н = p_{1+3} = \dfrac{1}{1+1+3} = 0{,}20$. Отс. пропускная способность системы $q = 1 - p_н = 0{,}80$. Абс. пропускная способность $Q = \lambda q = 0{,}4$ (машины в час).

б) Ср. доля вр-и, к-ое система будет простаивать, найдем по (49): $p_0 =$ $= 1/5 = 0{,}20$.

в) Полагая $n = 2$, найдем $P_н = p_{2+3} = \dfrac{\dfrac{1}{16}}{1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}} = 1/47 \approx 0{,}021$;

$q = 1 - p_н \approx 0{,}979$ (т.е. уд-ся около 98% всех заявок), $Q = \lambda q \approx 0{,}49$ (машины в час). Отс-ое время простоя: $p_0 = 16/47 \approx 0{,}34$, т.е. оборудование будет простаивать полностью 34% всего вр-и.

7.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

7.1. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЦЕПИ МАРКОВА

Вопросы для самопроверки

1. Что вы понимаете под слн. процессами? Приведите примеры.
2. Дайте опр-ия мт. ож-ия и дсп-и слн-го процесса.
3. Дайте опр-ия крц-ой и норв-ой крц-ой фк-и.
4. Что такое цепи Маркова? Приведите примеры.
5. Приведите хркс-ки цепей Маркова.
6. Что понимаете под распределенными лагами?
7. Что понимаете под временными (врн.) рядами?
8. Какие модели врн-ых рядов вы знаете?

7.2. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит основная задача врн-ых рядов?
2. Что вы понимаете под трендом? Приведите трендовые модели в различной форме.
3. Как решаются модели врн-го ряда в зв-ти от стсч-их хркс-ик слн-ой сост-ей?
4. Опишите структуру врн-го экнч-го ряда.
5. В чем заключается суть анализа полиномиального тренда? Приведите пример.
6. В чем заключается суть анализа триг-го тренда? Приведите пример.
7. Когда используют нелин-ый тренд и в чем состоит его суть?
8. Когда используют экпц-ое сгж-ие и в чем состоит его суть?

7.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое система массового обслуживания (СМО)?
2. Каковы классификационные признаки СМО?
3. Что такое поток событий? Простейший поток и его свойства.
4. Как вы понимаете нестационарный пуассоновский поток?
5. Что такое поток с огр-ным последействием (поток Пальма)?
6. Как опр-ся время обс-ия заявки? Приведите ее фк-и рсп-ия.
7. Что такое СМО с отказами? Ур-ия Эрланга.
8. Что такое установившийся режим обсл-ия? Формула Эрланга.
9. Что такое СМО с ож-ем?
10. Что такое система смешанного типа с огр-ем по длине очереди?
11. Что такое СМО с огр-ым вр-ем ож-ия (см. з20а(3))?
12. Что такое замкнутые СМО (см. з20а(3))?

Типовые задачи по параграфам.

1(1). Д-ть, что условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_x(\tau)$ = 0 яв-ся нх-ым условием для того, чтобы фк-ия $X(t)$ была эргодичной, см. п1а из 1°: 7.1. Ук. Нужно д-ть, что если $\tilde{x} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$, то $M[\tilde{x}] = \bar{x}$, $\lim\limits_{T\to\infty} D[\tilde{x}] = 0$.

2(1). Для оценки крцн-ой фк-и стационарного норм. слн. процесса $X(t)$ ($\bar{x} = 0$) используется коррелятор, работающий по фм-е $\tilde{K}_x(\tau) = \int\limits_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt$. Вывести фм-у для $D\left[\tilde{K}_x(\tau)\right]$ (см. п1а из 1°: 7.1). О: $D\left[\tilde{K}_x(\tau)\right] = \dfrac{2}{(T-\tau)^2}\int\limits_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\left[K_x^2(\tau_1) + K_x(\tau_1+\tau)K_x(\tau_1-\tau)\right]dt$.

3(1). Крцн. фк-я стационарного слн. процесса $X(t)$ имеет вид $K_x(t) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Найти дсп-ю оценки мт-го ож-ия, опр-мую по фм-е $\widetilde{x} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$ (см. п1а из 1°: 7.1). О: $D[\widetilde{x}] = \dfrac{2\sigma_x^2}{\alpha T}\left(1 - \dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right)$.

4(1). Из табл. слн-х чисел, содержащей все целые числа от 1 до m включительно, выбираются числа наудачу. Система находится в состоянии Q_j, если нб-е из выбранных чисел равно j ($j = \overline{1,m}$). Найти вер-ти $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = \overline{1,m}$) того, что после выбора из этой табл. n слн-х чисел нб-е число будет k, если раньше было число i.

Р. В табл. слн-х чисел любое число от 1 до m равновозможно, поэтому переход из состояния Q_1 (нб-е выбранное число равно ед-е) в любое сст. Q_j равновероятен. Тогда $p_{1j} = \frac{1}{m}$ ($j = \overline{1,m}$). Из сст-я Q_2 в Q_1 переход невозможен, поэтому $p_{21} = 0$. В состоянии Q_2 можно остаться в двух случаях, когда очередное выбираемое число равно 1 или 2, поэтому $p_{22} = \frac{2}{m}$, $p_{2j} = \frac{1}{m}$ ($j = \overline{3,m}$). В общем случае получим $p_{ii} = \frac{i}{m}$, $p_{ij} = 0$ при $i > j$, $p_{ij} = \frac{1}{m}$ при $i < j$ ($i, j = \overline{1,m}$). Матрица вероятностей перехода записывается в сд. виде:

$$P = \begin{pmatrix} 1/m & 1/m & 1/m & \ldots & 1/m & 1/m \\ 0 & 2/m & 1/m & \ldots & 1/m & 1/m \\ 0 & 0 & 3/m & \ldots & 1/m & 1/m \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)/m & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хркч-ое ур-ие $|\lambda E - P| = \prod\limits_{k=1}^{m}\left(\lambda - \dfrac{k}{m}\right) = 0$ имеет простые корни $\lambda_k = \frac{k}{m}$ ($k = \overline{1,m}$). Для опр-ия вер-ей $p_{ik}^{(n)}$, яв-хся эл-ми матрицы P^n, воспользуемся формулой Перрона. Алг-ие дпн-ия $A_{ki}^{(n)}$ эл-ов опр-ля $|\lambda E - P|$ сд-ие: при $i > k$ $A_{ki}(\lambda) = 0$, $A_{kk}(\lambda) = \dfrac{|\lambda E - P|}{\lambda - \dfrac{k}{m}}$; при $i < k$ получим $A_{ki} =$

$$= \frac{1}{m}\prod_{v=1}^{k-2}\left(\lambda - \frac{v}{m}\right)\prod_{r=k+1}^{m}\left(\lambda - \frac{r}{m}\right) = \frac{|\lambda E - P|}{m\cdot\left(\lambda - \dfrac{k}{m}\right)\cdot\left(\lambda - \dfrac{k-1}{m}\right)}.$$

Подставляя эти врж-ия в формулу Перрона, получим

$$p_{ik}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i > k, \\ \left(\dfrac{k}{m}\right)^n & \text{при } i = k, \\ \left(\dfrac{k}{m}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{m}\right)^n & \text{при } i < k. \end{cases}$$

5(1). Препарат облучается потоком радиоактивных частиц через равные инр-ы вр-и Δt. Вер-ть того, что за время облучения препарат поглотит r радиоактивных частиц, опр-ся фм-ой $\beta_r = \dfrac{a^r}{r!}e^{-a}$. Каждая радиоактивная частица, содержащаяся в препарате, за время между двумя посл-ми облучениями может распасться с вер-ю q. Опр-ть предельные вер-ти числа частиц в препарате.

Р. Пусть сст-ие Q_i означает, что после очередного облучения препарат будет содержать i радиоактивных частиц ($i = 0, 1, 2, \ldots$). За инр-л вр-и Δt переход из сст-ия Q_i в Q_k произойдет в том случае, если $i - v$ частиц ($v = 0, 1, \ldots, i$) распадутся, а $k - v$ ($k \geq v$) будут поглощены препаратом. Вер-ти перехода $p_{ik} = \sum\limits_{v=0}^{i(k)} C_i^v p^v q^{i-v}\dfrac{a^{k-v}}{(k-v)!}e^{-a}$ ($i, k = 0, 1, \ldots$), где $p = 1 - q$, а сумв-ие производится до $i \leq k$, и до k, если $k < i$.

В препарате возможно нахождение любого числа частиц, т.е. все сст-ия системы достижимы. Поэтому цепь Маркова неприводимая. Т.к. вер-ти p_{ii} отличны от нуля, то цепь непериодическая.

Рас-им систему лин-х ур-й $\sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ (j = 0, 1, …). Положим $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j$. Умножив обе части системы на z^j, просуммировав по j от 0 до ∞ и применив фм-у $n - 1$ раз, получим

$$G(z) = e^{a(z-1)}G[1 + (z-1)P] = e^{a(z-1)}(1 + P + P^2 + \ldots + P^{n-1})G[1 + (2-1)P^n].$$

Отсюда находим

$$G(z) = e^{\frac{a}{q}(z-1)} G(1) = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{q} z\right)^j}{j!}.$$

Из сравнения двух врж-й для $G(z)$ получим

$$u_j = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Т.к. $\sum_{j=0}^{\infty} \left|u_j\right| = |G(1)|$, а произвольную пст-ю $G(1)$ можно взять отличной от 0 и ∞, то алг. система имеет нулевое решение, причем ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left|u_j\right|$ сх-ся. Поэтому $p_i^{(\infty)}$ могут быть найдены из системы $\sum p_{ij}\, p_i^{(\infty)} = p_i^{(\infty)}$ (j = 0, 1, …). Система для $p_i^{(\infty)}$ анч-на решенной выше системе u_j, сд-но,

$$p_j^{(\infty)} = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Т.к. $\sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(\infty)} = 1$, то $G(1) = 1$, поэтому искомые вер-ти

$$p_j^{(\infty)} = \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} e^{-\frac{a}{q}} \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

6(1). Число X дефектных изделий в каждой незв. вбр-е объема N из беск-но большой партии подчиняется бином. закону, т.е. $p(X = k) = p_k = C_N^k p^k q^{N-k}$ ($k = \overline{0, N}$), $q = 1 - p$. Если при очередной вбр-е получено r дефектных изделий, то считается, что по условиям приема партия изменила свое предыдущее сст-ие Q_v на Q_{v+r-1}, причем партия брк-ся, если $v + r - 1 \geq m$ и принимается, когда $v + r - 1 = 0$. Опр-ть вер-ти того, что партия будет принята, если начальное сст-ие партии по условиям приема Q_j ($j = \overline{1, m-1}$).

Р. Возможно $m + 1$ сст-й партии Q_i ($i = \overline{0, m}$). При достижении сст-ия Q_0 партия принимается, а при достижении Q_m – брк-ся. Т.к. эти два сст-ия яв-ся сст-ми поглощения, то $P_{00} = 1$, $P_{mm} = 1$. Когда $i \neq 0$ и $j \neq m$, $p_{i,i+j-1} = p_j$ ($j = \overline{1, m-i}$), $p_{im} = 1 - \sum_{j=0}^{m-i} p_j$ ($i = \overline{1, m-1}$).

Матрица вер-ей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_{m-2} & p_{m-1} & p_{1,m} \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_{m-3} & p_{m-2} & p_{2,m} \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \ldots & p_{m-4} & p_{m-3} & p_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_1 & p_2 & p_{m-2,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_0 & p_1 & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Искомые вер. p_{*j} ($j = \overline{1, m-1}$) яв-ся вер-ми перехода от несущ-ых сст-й Q_1, Q_2, …, q_{m-1} в сущ-ое сст-ие Q_0 и опр-ся с помощью алг-ой системы

$$p_{*j} = \sum_{\nu=0}^{m-1} p_{j\nu} p_{*\nu} + p_{j0} \ (j = \overline{1, m-1}),$$

к-ую можно писать в виде

$$(p_1 - 1)p_{*1} + \sum_{k=2}^{m-1} p_k p_{*k} = -p_0,$$

$$p_0 p_{*,r-1} + (p_1 - 1)p_{*r} + \sum_{k=r+1}^{m-1} p_{k-r+1} p_{*k} = 0 \ (r = \overline{2, m-1}).$$

Опрт-ль Δ_{m-1} этой системы находится с помощью рекуррентной фм-ы

$$\Delta_{m-r} = (p_1 - 1)\Delta_{m-r-1} - \sum_{j=2}^{m-r} (-1)^j p_j p_0^{j-1} \Delta_{m-r-j} \ (r = \overline{1, m-1}),$$

где $\Delta_0 = 1$. Искомые вер-ти опр-ся рав-ми

$$p_{*j} = (-1)^j p_0^j \frac{\Delta_{m-j-1}}{\Delta_{m-1}} \ (j = \overline{1, m-1}).$$

7(1). Проверить утв-ие: если вычесть из левой части (18) из 4º: 7.1 $m(t)$, а из правой – $am(t-1)$, затем возвести обе части получившегося рав-ва в кв-т и выч-ть мт. ож-ие, то имеем рав-во

$$D[Y(t)] = a^2 D[Y(t-1)] + \sigma_X^2 + 2a\mathrm{cov}[Y(t-1), X_t].$$

Учитывая, что $\mathrm{cov}[Y(t-1), X_t] = 0$, для незв-ых X_t и $Y(t-1)$ получим, переходя к пределу по $t \to \infty$, рав-во $D[Y] = \sigma_X^2 / (1 - a^2)$, к-ое при $a = -1/2$ имеет вид $D[Y] = 4\sigma_X^2/3$.

8(1). Покажите, как в з7(1), но для частных случаев, что: а) $D[Y(t)] = D[Y(t-1)] + \sigma_X^2$ при $a^2 = 1$. Отсюда для $D[Y(0)] = 0$, $D[Y(1)] = \sigma_X^2$, $D[Y(2)] = 2\sigma_X^2$ и т.д.; б) при $a^2 = 2$ $D[Y(1)] = \sigma_X^2$, поскольку $D[Y(0)] = 0$, т.к. $Y(0)$ задано, т.е. число $Y(0)$ не слн-ое. Далее $D[Y(2)] = 2\sigma_X^2 + \sigma_X^2 =$ $= (2^1 + 1)\sigma_X^2$, $D[Y(3)] = (2^2 + 2 + 1)\sigma_X^2 = \dfrac{2^3 - 1}{2 - 1}\sigma_X^2$ и т.д. $D[Y(t)] = \dfrac{2^t - 1}{2 - 1}\sigma_X^2 = (2^t - 1)\sigma_X^2$.

9(2) (оценка адекватности и точности трендовых моделей). Предварительно приведем нх-ые материалы и фм-ы. Трендовая модель (мд.) y_t конкретного врн. ряда y_t считается адекватной, если правильно отражает компоненты врн-го ряда. Рас-им сд-ие проверки.

1*. Проверка слн-ти колебаний уровней остаточной посл-ти означает проверку гп-ы о правильности выбора тренда по наборам разностей:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \ (t = \overline{1, n}).$$

Хрк. этих отк-й изучается с помощью ряда критериев (кт.). Одним из таких кт-ев яв-ся кт-й серий, основанный на медиане вбр-и. Для применения данного кт-я ряд из вел-н ε_t располагают в порядке взр-ия их зн-й и находят медиану ε_m, т.е. ср. зн-ие. Возвращаясь к исходной посл-ти ε_t и сравнивая зн-ия с ε_m, будем ставить знак «плюс», если $\varepsilon_t > \varepsilon_m$, и знак «минус», если $\varepsilon_t < \varepsilon_m$. При $\varepsilon_t = \varepsilon_m$ зн-ие ε_t опускается. Т.о., получается посл-ть, состоящая из плюсов или минусов, общее число к-ых не превосходит n. Посл-ть подряд идущих плюсов или минусов наз. серией. Для того чтобы посл-ть ε_t была слн. вбр-ой, протяженность самой длинной серии не должна быть слишком большой, а общее число серий – слишком малым.

Обз-им протяженность самой длинной серии через $K_{\max}$, а общее число серий – через V. Вбр-ка признается слн-ой, если выполняются сд-ие нерав-ва для 5%-ного уровня значимости

$$K_{\max} < [3{,}3(\lg n + 1)]; \ v > \left[\frac{1}{2}\left(n + 1 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right)\right], \tag{1}$$

где кв. скобки означают целую часть числа.

Если хотя бы одно из этих нерав-в нарушается, что гп-а о слн-ом хрк-е отк-ий уровней врн-го ряда от тренда отвергается, и сд-но, трендовая мд. признается неадекватной.

Другим кт-ем для данной проверки может служить кт-й пиков (поворотных точек). Уровень посл-ти ε_t считается мкс-ом, если он больше двух рядом стоящих уровней, т.е. $\varepsilon_{t-1} < \varepsilon_t > \varepsilon_{t+1}$, и мнм-ом, если $\varepsilon_{t-1} > \varepsilon_t < \varepsilon_{t+1}$. В обоих случаях ε_t считается поворотной точкой. Общее число поворотных точек для ост-ой посл-ти ε_t обз-им через p. В слн. вбр-е мт. ож-ие числа точек поворота $\overline{p}$ и дсп-ия σ_p^2 врж-ся фм-ми $\overline{p} = \dfrac{2}{3}(n-2)$, $\sigma_p^2 = \dfrac{16n-29}{90}$.

Кт-ем слн-ти с 5% уровнем значимости яв-ся выполнение нерав-ва

$$p > \left[\overline{p} - 1{,}96\sqrt{\sigma_p^2}\right], \tag{2}$$

где кв. скобка есть целая часть числа.

2*. Проверка ств-ия рсп-ия слн-ой компоненты норм. закону рсп-ия может быть произведена лишь прж-но с помощью асимметрии (γ_1) и эксцесса (γ_2). При норм-ом рсп-и показатели асимметрии и эксцесса равны нулю.

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}}; \quad \hat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}} - 3;$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}; \quad \sigma_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}. \tag{3}$$

В этих фм-ах $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ – вбрч-ые хркс-ки асимметрии и эксцесса; $\sigma_{\hat{\gamma}_1}$ и $\sigma_{\hat{\gamma}_2}$ – ствщ-ие ср. кв. ошибки. Если одновременно выполняются сд. нерав-ва:

$$|\hat{\gamma}_1| \le 1{,}5\,\sigma_{\hat{\gamma}_1}; \quad \left|\hat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| \le 1{,}5\,\sigma_{\hat{\gamma}_2},$$

то гп-а о норм-ом хрк-е рсп-ия слн-ой компоненты принимается.

Если выполняется хотя бы одно из нерав-в

$$|\hat{\gamma}_1| \ge 2\,\sigma_{\hat{\gamma}_1}; \quad \left|\hat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| \ge 2\,\sigma_{\hat{\gamma}_2},$$

то гп-а о норм-ом хрк-е рсп-ия отвергается, трендовая мд. признается неадекватной.

Норм-сть закона рсп-ия можно проверить и кт-ем RS по фм-ам

$$R = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min},\ S = S_{\hat{y}} = \sqrt{\sum \varepsilon_t^2/(n-1)}.$$

Выч-ное зн. $RS = R/S$ – кт. сравнивается с табличными (критическими) нижней (d_1) и верхней (d_2) границами данного отн-ия, и если это зн-ие не попадает в инр-л (d_1, d_2), то с заданным уровнем значимости α гп-а о норм-сти рсп-ия отвергается; в противном случае эта гп-а принимается.

Для иллюстрации приведем несколько пар зн-й критических (крт.) границ RS для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$: при $n = 10$ имеем $d_1 = 2{,}7$, а $d_2 = 3{,}685$; при $n = 20$ будет $d_1 = 3{,}18$ и $d_2 = 4{,}49$; при $n = 30$ они составляют $d_1 = 3{,}47$ и $d_2 = 4{,}89$.

3*. Проверка рав-ва мт. ож-ия слн-ой компоненты нулю, если она рсп-на по норм. закону, осуществляется на основе t-кт. Стъюдента по фм-е

$$t = \frac{\overline{\varepsilon} - o}{S_\varepsilon}\sqrt{n}, \tag{4}$$

где $\overline{\varepsilon}$ – ср. ариф-ое зн-ие уровней ост. посл-ти ε_t, S_ε – стандартное (стдн.) (среднекв-ое) отк-ие.

Если расчетное зн. t меньше табличного зн-ия t_α стс-ки Стъюдента с заданным уровнем значимости α и числом ст-ей свободы $n-1$, то гп-а о рав-ве нулю мт. ож-ия слн-ой посл-ти принимается. В противном случае эта гп. отвергается и мд. считается неадекватной.

4*. Проверка незв-ти зн-й уровней слн-ой компоненты, т.е. проверка отсутствия сущ-ной автокорреляции (автокрц.) в остаточной посл-ти может производиться по d-кт. Дарбина-Уотсона с использованием фм-ы

$$d = \sum_{i=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \ . \tag{5}$$

Заметим, что расчетное зн. кт-ия Дарбина-Уотсона в инр-ле [2, 4] свидетельствует об отц-ой связи; в этом случае вместо d надо использовать $d' = 4 - d$.

Расчетное зн. кт-ия d (или d') сравнивается с нижним d_1 и верхним d_2 кт-ми зн. стс-ки Дарбина-Уотсона, фрагмент табличных зн-й к-ых для различных зн-й уровней ряда n и числа опр-мых параметров k представлен в табл. 1 (уровень значимости 5%).

Таблица 1

n	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65

Если расчетные зн. кт-ия $d > d_2$, то гп-а о незв-ти уровней остаточной посл-ти, т.е. об отсутствии в ней автокрц-и, принимается. Если $d < d_1$, то эта гп. отвергается и мд. неадекватна. Если $d_1 \le d \le d_2$, то считается, что нет дт-ных оснований сделать тот или иной вывод и нх-мы дальнейшие иссл-ия, н-р, по большому числу нбл-й.

Вывод об адекватности трендовой мд-и делается, если все указанные выше четыре проверки св-в остаточной посл-ти дают плж-ый результат. Для адекватных мд-ей имеет смысл ставить задачу оценки их точности. Точность мд-и хркз-ся вел-ой отк-ия выхода модели от реального зн-ия мд-мой пер-ой (экнч-го показателя). Для врн-го ряда в кач-е стсч-их показателей точности применяются сд-ие фм-ы:

ср. кв. отк-ие

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2} \ ; \tag{6}$$

ср. отс. ошибка аппроксимации

$$\bar{\varepsilon}_{отс} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| \cdot 100\%; \tag{7}$$

коэф-т сх-ти

$$\varphi^2 = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y}_t)^2 \ ; \tag{8}$$

коэф-т детерминации

$$R^2 = 1 - \varphi^2. \tag{9}$$

где n – кол. уровней, k – число опр-мых параметров мд-и, $\hat{y}_t$ – оценка уровней ряда по мд-и, $\bar{y}$ – ср. ариф-ое зн-ие уровней ряда.

Теперь сформулируем **задачу**.

Для врн-го ряда, заданного в табл. 2, построена трендовая модель (мд.) в виде полинома первой степени (лин-я мд.):

$$\hat{y}_t = 87{,}8 - 3{,}4t.$$

Требуется оценить адекватность и точность построенной мд-и.

Р. В четвертой колонке табл. 2 находим ряд остатков $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$. Проверку слн-ти уровней ряда проведем на основе кт-ия пиков (поворотных точек), кол-во к-ых равно шести ($p = 6$). Правая часть нерав-ва (2) равна двум, т.е. это нерав. выполняется, значит, св-во слн-ти ряда остатков подтверждается.

Для проверки ств-ия остаточной посл-ти норм. закону рсп-ия используем кт-й RS: $R = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} = 2{,}7 - (-2{,}1) = 4{,}8$, а ср. кв. отк-ие $S_{\hat{y}} = \sqrt{\varepsilon_t^2/(n-1)} = \sqrt{15{,}51:8} = 1{,}39$. Сд-но, кт-й $RS = R/S_{\hat{y}} = 4{,}8:1{,}39 = 3{,}45$, и это зн-ие (при $n = 10$ и $\alpha = 0{,}05$) попадает в инр-л $d_1 = 2{,}7 < 3{,}45 < 3{,}7 = d_2$, значит, св-во норм-ти рсп-ия выполняется.

Проверку рав-ва (близости) к нулю мт. ож-ия осуществляем по $M[\varepsilon_t] = -0{,}3/9 = -0{,}03$ и, сд-но, можно подтвердить выполнение данного св-ва, не прибегая к стс-ке Стъюдента.

Для проверки незв-ти уровней ряда остатков (отсутствия автокрц-и) выч-им зн-ие кт-ия Дарбина-Уотсона по фм-е (5) d = 35,26/15,51 = 2,27. Эта вел. превышает 2, что свидетельствует об отц-ой автокрц-и. Тогда вместо d берем d' = 4 – d = 4 – 2,27 = 1,73. Данное зн. сравниваем с крт-ми табл. зн-ми d_1 = 1,08 и d_2 = 1,36. Т.к. d = 1,73 > 1,36 = d_2, то делаем вывод о незв-ти уровней остаточной посл-ти.

Итак, ост. посл-ть уд-ет всем св-ам 1*-4* слн-ой компоненты врн-го ряда, сд-но, построенная мд. яв-ся адекватной и можно проверить точность мд-и.

Для этого по (7) находим ср. отс. ошибку аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{отс}$ = 13,29/9 = 1,48(%), т.е. получили высокую точность ошибки (меньше 5%).

Таблица 2

t	Фактическое y_t	Расчетное $\hat{y}_t$	Отклонение ε_t	Точки пиков	ε_t^2	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	$\lvert\varepsilon_t\rvert{:}y_t\times100$
1	85	84,4	0,6	–	0,36	–	–	0,71
2	81	81,0	0,0	1	0,00	– 0,6	0,36	0,00
3	78	77,6	0,4	1	0,16	0,4	0,16	0,49
4	72	74,1	– 2,1	1	4,41	– 2,5	6,25	2,69
5	69	70,7	– 1,7	0	2,89	0,4	0,16	2,46
6	70	67,3	2,7	1	7,29	4,4	19,36	3,86
7	64	63,8	0,2	1	0,04	– 2,5	6,25	0,31
8	61	60,4	0,6	1	0,36	0,4	0,16	0,98
9	56	57,0	– 1,0	–	1,00	– 1,6	2,56	1,79
45	636	636,3	– 0,3	6	15,51		35,26	13,29

10(2) (прогнозирование экнч-ой динамики на основе трендовых мд-й). Предварительно приведем рабочие фм-ы, к-ые опираются на выводы и фм-ы теории рег-и. Методы, разработанные для стсч-их свк-ей, позволяют опр-ть доверительный инр-л, звщ-ий от стдн-ой ошибки оценки прогнозируемого показателя, вр-и упреждения прогноза, кол-ва уровней во врн-ом ряду и уровня значимости (ошибки) прогноза.

Стдн. (ср. квч-ая) ошибка оценки прогнозируемого показателя опр-ся по фм-е:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-k}}\,, \tag{1}$$

где y_t – фактическое зн. уровня врн-го ряда для вр-и t, $\hat{y}_t$ – расчетная оценка ствщ-го показателя по модели (по ур-ю кривой роста), n – кол-во уровней в исх-м ряду, k – число параметров мд-и.

В случае прямолинейного тренда доверительный инр-л прогноза выч-ся по фм-е

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}\,, \tag{2}$$

где L – период упреждения, $\hat{y}_{n+L}$ – точечный прогноз по мд-и на (n + L)-й момент вр-и, t_α – табл. зн-ие кт-ия Стъюдента для уровня значимости α и для числа ст-ей свободы, равного n – 2.

Обз-им через $K = t_\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$, тогда фм. (2) примет вид

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm S_{\hat{y}} K, \tag{3}$$

Зн-ия K табулированы. Фрагмент такой табл-ы для α = 0,2 приведен в табл. 3.

Таблица 3

Число уровней в ряду (n)	Период упреждения L					
	1	2	3	4	5	6
7	1,932	2,106	2,300	2,510	2,733	2,965
10	1,692	1,774	1,865	1,964	2,069	2,180
13	1,581	1,629	1,682	1,738	1,799	1,863
15	0,536	1,572	1,611	1,653	1,697	1,745

Иногда фм-у (2) используют в несколько прб-ом виде:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(t_L-\bar{t})^2}{\sum(t-\bar{t})^2}}, \qquad (4)$$

где t – порядковый номер уровня ряда ($t = \overline{1,n}$), $t_L = n + L$ – время, для к-го делается прогноз, $\bar{t}$ – время, ств-щее середине периода нбл-й для исх-го ряда, н-р, $\bar{t} = (n + 1)/2$.

Фм-у (4) можно упростить, перенеся начало отсчета вр-и на середину ($\bar{t} = 0$):

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{t_L^2}{\sum t^2}}. \qquad (5)$$

Фм-а для расчета доверительных инр-ов прогноза отс-но тренда, имеющего вид полинома второго или третьего порядка, выглядит так:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{t_L^2}{\sum t^2}+\frac{\sum t^4-2t_L^2\sum t^2+nt_L^4}{n\sum t^4-\left(\sum t^2\right)^2}}. \qquad (6)$$

Оценку кач-а полученного прогноза можно осуществить по фм-е:

$$k = p/(p + q), \qquad (7)$$

где p – число прогнозов, подтвержденных фактическими данными, q – число прогнозов, не подтвержденных фактическими данными.

Рас-им **пример** расчета точечного и инр-го прогноза.

Пусть для врн-го ряда, представленного в табл. 2, требуется дать прогноз на два шага вперед ($t = 10$ и $t = 11$) на основе адекватной лин. мд-и $\hat{y}_t .= 87{,}8 - 3{,}4t$.

Р. Точечные прогнозы получим, подставляя в ур-ие мд-и зн-ия $t = 10$ и $t = 11$:

$$\hat{y}_{10} = 87{,}8 - 3{,}4\cdot 10 = 53{,}8;$$

$$\hat{y}_{11} = 87{,}8 - 3{,}4\cdot 11 = 50{,}4.$$

Зн-ие ср. квч-ой ошибки оценки прогнозируемого показателя $S_{\hat{y}} = 1{,}39$ возьмем из з9(2), а зн-ия вел-ы K в фм-е (3) для ряда из $t = 9$ уровней при уровне значимости $\alpha = 0{,}2$ получим из табл. 3 путем лин-ой инпц-и приведенных зн-й для $n = 7$ и $n = 10$: для $t = 10$ ($L = 1$) $K = 1{,}77$; для $t = 11$ ($L = 2$) $K = 1{,}88$. Результаты расчета по фм-е (3) представлены в табл. 4.

Таблица 4

Время (t)	Шаг (L)	Точечный прогноз $\hat{y}_{n+L}$	Доверительный интервал прогноза	
			нижняя граница	верхняя граница
10	1	53,8	51,3	56,3
11	2	50,4	47,8	53,0

Т.к. мд. признана адекватной (см. з9(2)), то с принятым уровнем значимости $\alpha = 0{,}20$ (т.е. с доверительной вер-ю 0,80 или 80%) можно утверждать, что прогнозируемая вел. попадет в инр-л, образованный нижней и верхней границами.

11(2) (прогнозирование по адаптивной модели Брауна – модель экспоненциального сглаживания). До сих пор мы расв-ли прогнозирование, когда основные фкт-ы и тенденции, имеющие место в прошлом, сохраняются и в будущем. Теперь рас-им адаптивные методы, учитывающие неравноценность (н-р, в силу изменения внешних условий) уровней врн-го ряда.

При оценке параметров адаптивных мд-й нбл-ям (уровням ряда) присваиваются различные веса в зв-ти от того, насколько сильным признается их влияние на текущей уровень. Это позволяет учитывать изменения в тенденции, а также любые колебания, в к-ых прослеживается закономерность.

Модель Брауна может отб-ть процессы, не имеющие тенденции развития [$y(t + k) = A_0$], лин-ой тенденции [$y(t + k) = A_0 + A_1k$], параболической тенденции [$y(t + k) = A_0 + A_1k + A_2k^2$]. Порядок мд-и опр-ют либо на основе знаний законов развития, либо методом проб.

Рас-им этапы построения лин. адаптивной мд-и Брауна.

1*. По первым пяти точкам врн-го ряда оцениваются нач-ые зн. A_0 и A_1 параметров мд-и с помощью метода нм-их кв-ов для лин-ой аппроксимации:

$$Y_p(t) = A_0 + A_1t \ (t = \overline{1,5}).$$

2*. С использованием A_0 и A_1 по мд-и Брауна находим прогноз на один шаг ($k = 1$):

$$Y_p(t, k) = A_0(t) + A_1(t)k.$$

3*. Расчетное зн. $Y_p(t, k)$ экнч-го показателя сравнивают с фактическим $Y(t)$ и выч-ся вел-а их расхождения (ошибки). При $k = 1$ имеем:

$$e(t + 1) = Y(t + 1) - Y_p(t, 1).$$

4*. В ств-и с вел-ой $e(t + 1)$ корректируются параметры мд-и по фм-ам:

$$A_0(t) = A_0(t-1) + A_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t),\ A_1(t) = A_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t),$$

где β – коэф-т обесценения данных в пределах от 0 до 1 ($\alpha + \beta = 1$). Его выч-ют так:

$$\beta = (N-3)/(N-1),$$

где N – длина врн-го ряда, α – параметр сгж-ия ($\alpha = 1 - \beta$), $e(t)$ – ошибка прогнозирования уровня $Y(t)$, выч-ная в момент $(t-1)$ на один шаг вперед.

5*. По мд-и со скорректированными параметрами A_0 и A_1 находят прогноз на сд-й момент вр-и. Возврат на п3*, если $t < N$.

Если $t = N$, то модель можно использовать для прогнозирования на будущее.

6*. Интервальный прогноз строится как для лин. мд-и кривой роста.

Теперь сформулируем и решим сд-ю **задачу**.

Построить прогноз по лин-ой мд-и Брауна курса немецкой марки за май 1997 г. для 19 уровней врн-го ряда $Y(t)$, заданного в табл. 5.

Таблица 5

t	$Y(t)$	A_0	A_1	$Y_p(t)$	$e(t)$
0		3302,1	19,7		
1	3333	3331,2	21,5	3321,8	11,2
2	3337	3339,5	19,0	3352,7	– 15,7
3	3354	3354,7	18,3	3358,5	– 4,5
4	3364	3365,4	16,8	3373,0	– 9,0
5	3418	3412,3	22,5	3382,3	35,7
6	3392	3398,9	15,7	3434,8	– 42,8
7	3380	3385,5	10,2	3414,5	– 34,5
8	3406	3404,4	11,8	3395,7	10,3
9	3394	3397,5	8,3	3416,2	– 22,2
10	3409	3408,5	8,8	3405,8	3,2
11	3410	3411,2	7,6	3417,3	– 7,3
12	3425	3424,0	8,6	3418,8	6,2
13	3409	3412,8	4,8	3432,6	– 23,6
14	3415	3415,4	4,4	3417,6	– 2,6
16	3416	3416,6	3,8	3419,8	– 3,8
16	3402	3404,9	0,9	3420,4	– 18,4
17	3387	3390,0	– 2,2	3405,8	– 18,8
18	3391	3390,5	– 1,7	3387,9	3,1
19	3390	3389,8	– 1,5	3388,8	1,2
20				3388,3	
21				3386,9	

Р. Нач. оценки параметров получим по первым пяти точкам (табл. 6) по фм-м:

$$A_1 = \sum\left[\left(t - t_{cp}\right)\cdot Y\left(t\right) - Y_{cp}\right] / \sum\left(t - t_{cp}\right)^2 = 197/10 = 19{,}7,$$

где $t_{cp} = \dfrac{1}{5}\sum t_i = 3$ – ср. зн-ие фкт-а «время», $Y_{cp} = 16806/5 = 3361{,}2$ – ср. зн-ие исслм-го показателя.

Таблица 6

t	$Y(t)$	$(t - t_{cp})\cdot(t - t_{cp})$	$Y(t) - Y_{cp}$	$t - t_{cp}$	$(t - t_{cp})\cdot(Y(t) - Y_{cp})$
1	3333	4,0	– 28,2	– 2	56,4
2	3337	1,0	– 24,2	– 1	24,2
3	3354	0,0	– 7,2	0	0
4	3364	1,0	2,8	1	2,8
5	3418	4,0	56,8	2	113,6
15	16806	10,0	0	0	197

Возьмем $k = 1$, а параметр сгж-ия $\alpha = 0{,}4$. В табл. 5 приведены расчеты параметров мд-и Брауна на каждом шаге. На последнем шаге получена мд.:

$$Y_p(N + k) = 33829{,}8 - 1{,}5k.$$

Прогнозные оценки по этой мд-и получаются подстановкой в нее $k = 1$ и $k = 2$, а интервальные – по фм-е:

$$U(k) = S_{\hat{y}}\, t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{\left(N + k - t_{cp}\right)^2}{\sum\left(t - t_{cp}\right)^2}}\ ,$$

где, как и в фм-е (2) из з10(2), $S_{\hat{y}}$ – ср. квч. отк-ие аппроксимации, t_α – табличное зн. кт-ия Стъюдента с заданным уровнем значимости α.

На рис. 1 приведены результаты аппроксимации и прогнозирования по этой мд-и. Ряд 1 ств-ет фактическим, а ряд 2 – расчетным данным по мд-и Брауна. При этом указаны точечные прогнозы на два шага вперед. Инрн-ые прогнозы можно получить, используя приведенные в табл. 5 зн-ия $U(1) = 36{,}31$; $U(2) = 36{,}86$.

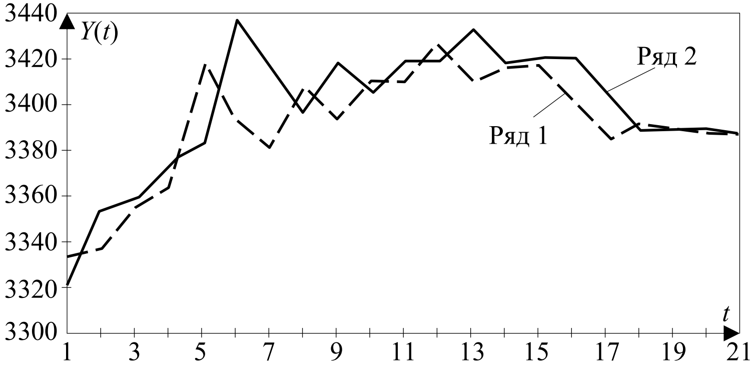


Рис. 1

12(3) (задача с размеченным графом состояний СМО). Предварительно приведем нх-мые материалы и фм-ы. Возможные состояния (сст.) системы X наглядно изб-ся с помощью графов, как на рис. 2а, где показан граф 4-х сст-й системы: x_1, x_2, x_3, x_4. Из сст-я x_1 возможны переходы в x_2 или x_3, из сст-ия x_2 – в x_4 или x_1, из сст-ия x_3 – в x_4, из сст-ия x_4 – в x_3. Теорию графов см. в [51].

Сст-ие системы наз. «сст-ем без выхода», если из него невозможен переход ни в какое др. сст-ие (см. сст-ие x_3 на рис. 2б).

Если процесс, протекающий в системе с дк. сст-ми и непр-ым вр-ем, яв-ся марковским, то для вер-ей сст-й $p_1(t)$, $p_2(t)$, …, $p_n(t)$, уд-их условию $\sum p_k(t) = 1$, можно составить систему лин. диф-ых ур-й. А при составлении этих диф. ур-й удобно пользоваться графом сст-й системы, на к-ом проставлена плотность (интенсивность) λ_{ij} потока сб-й при переходе из сст-ия x_i в сст-ие x_j по данной стрелке. Образец такого графа (размеченного графа сст-й) показан на рис. 2в.

Если имеется размеченный граф сст-й системы X, то систему диф-ых ур-й для вер-ей $p_k(t)$ ($k = \overline{1,n}$) можно сразу написать, пользуясь правилом: если стрелка ведет в данное сст-ие, член имеет знак плюс, если ведет из данного сст-ия, член имеет знак минус. Н-р, для системы X, размеченный граф сст-й к-ой показан на рис. 2в, система диф. ур-й имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda_{2,1}p_2(t) + \lambda_{3,1}p_3(t) - (\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3})p_1(t),\\
\frac{dp_2(t)}{dt} &= \lambda_{1,2}p_1(t) - (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4})p_2(t),\\
\frac{dp_3(t)}{dt} &= \lambda_{1,3}p_1(t) + \lambda_{2,3}p_2(t) - (\lambda_{3,1} + \lambda_{3,4})p_3(t),\\
\frac{dp_4(t)}{dt} &= \lambda_{2,4}p_2(t) + \lambda_{3,4}p_3(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Число ур-й может быть уменьшено на ед-у, если учесть условие при любом t:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1.$$

Нач. условия для интв-ия такой системы отражает сст-ие системы в нач-ый момент. Если, н-р, система при $t = 0$ была в сст-и x_k, то полагают

$$p_k(0) = 1,\ p_i(0) = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Предельным режимом для системы X наз. слн-ый процесс, устанавливающийся в системе при $t \to \infty$.

Если в числе сст-й системы имеются сст-ия без выхода, то при $t \to \infty$ система с практической достоверностью оказывается в одном из них.

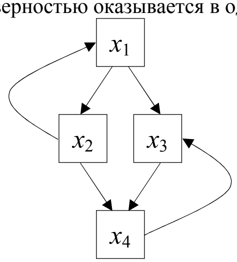


Рис. 2а

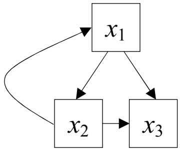


Рис. 2б

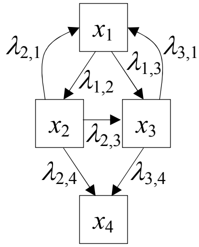


Рис. 2в

Если все потоки, переводящие систему из сст-ия в сст-ие, стационарны (λ_{ij} = const), общее число сст-й конечно и сст-й без выхода нет, то предельный режим сущ-ет и хркз-ся предельными вер-ми сст-й $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($\sum p_k = 1$). Тогда $dp_k(t)/dt = 0$ и система диф-ых ур-й (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{2,1}p_2 + \lambda_{3,1}p_3 - (\lambda_{1,2} - \lambda_{1,3})p_1 = 0,\\
&\lambda_{1,2}p_1 - (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4})p_2 = 0,\\
&\lambda_{1,3}p_1 + \lambda_{2,3}p_2 - (\lambda_{3,1} + \lambda_{3,4})p_3 = 0,\\
&\lambda_{2,4}p_2 + \lambda_{3,4}p_3 = 0,\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Потоком Пальма (потоком с огр-ым последействием) наз. поток, у к-го промежутки между соседними сб-ми представляют собой незв-ые слн. вел-ы. Если эти слн. вел. рсп-ны одинаково, то поток Пальма наз. стационарным.

Простейший (стационарный пуассоновский) поток яв-ся потоком Пальма.

Нестационарный пуассоновский поток потоком Пальма не яв-ся.

Потоком Эрланга k-го порядка наз. поток сб-й, получаемый из простейшего путем операции «разрежения», когда выбрасывают из потока k точек подряд, а сохраняют только (k + 1)-ю (рис. 3). Простейший поток есть поток Эрланга нулевого порядка.

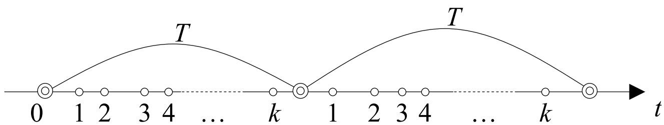


Рис. 3

Промежуток вр-и T между двумя соседними сб-ми в потоке Эрланга k-го порядка есть неотц-ая слн. вел-а с плотностью рсп-ия

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

и фк-ей рсп-ия

$$F_k(t) = P(T < t) = 1 - \sum_{s=0}^{k}\frac{(\lambda t)^s}{s!}e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

При $k = 0$ (простейший поток) получаем показательный закон:

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Фк-и $f_k(t)$, $F_k(t)$ можно выч-ть, используя табл. пуассоновского рсп-ия:

$$P(k,\,a) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}\;.$$

В этих обз-ях

$$f_k(t) = \lambda P(k,\,\lambda t)\;(t > 0),$$
$$F_k(t) = 1 - R(k,\,\lambda t),$$

где

$$R(k,\,\lambda t) = \sum_{s=0}^{k}\frac{(\lambda t)^s}{s!}e^{-\lambda t}$$

– табулированная фк. (см. T_{19}), где приведены зн-ия фк-и

$$Q(m,\,a) = 1 - R(m,\,a).$$

Фк-ю $P(k,\,a)$ можно выч-ть по тем же табл-м $R(k,\,a)$:

$$P(k,\,a) = R(k,\,a) - R(k-1,\,a) = Q(k-1,\,a) - Q(k,\,a).$$

Фк-и $P(k,\,a)$ и $R(k,\,a)$ между собой связаны сд. стн-ем:

$$\frac{\partial}{\partial a}R(k,\,a) = -\,P(k,\,a).$$

Имеют место предельные стн-ия:

$$\lim_{k\to\infty}R(k,\,a) = 1,\;\;\lim_{k\to\infty}P(k,\,a) = 0.$$

Обз-им через n число каналов (кн.), λ – плотность потока заявок, μ – плотность «потока обслуживаний (обс.)» одного кн-а. Причем $\mu = 1/\bar{t}_{об}$, где $\bar{t}_{об} = M[T_{об}]$, $T_{об}$ – слн-ое вр. обс-ия. На рис. 4 показан размеченный граф сст-й n-кн-ой СМО с отказами. Сст-ие x_k ($0 \le k \le n$) состоит в том, что занято ровно k кн-ов из n (предполагается, что каждый кн. обс-ет только одну заявку, а каждая заявка обс-ся только одним кн-м).

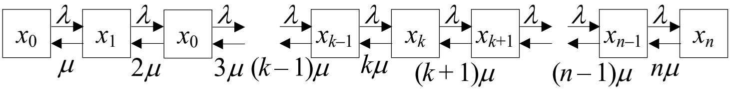


Рис. 4

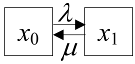


Рис. 5

Из графа (рис. 4) следуют диф. ур-ия для вер-ей сст-й (ур-ия Эрланга):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\,\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -\,(\lambda + \mu)p_1(t) + \lambda p_0(t) + 2\mu p_2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dp_k(t)}{dt} &= -\,(\lambda + k\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= -\,n\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t).
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Систему (3) обычно инт-ют при нач-ых условиях $p_0(0) = 1$, $p_k(0) = 0$, $k > 0$ (в нач. момент все кн-ы свободны). При $t \to \infty$ сущ-ет предельный (установившийся) режим работы СМО, при к-ом вер-ти сст-й опр-ся фм-ой Эрланга

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!}\Bigg/\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\;\;(k = \overline{0,n}\,).\qquad(4)$$

где $\alpha = \lambda/\mu$. Вер-ти p_k выч-ся по табл. T_{19} пуассоновского рсп-ия:

$$p_k = \frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{R(k,\alpha) - R(k-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}\;\;(k = \overline{0,n}\,).\qquad(5)$$

Вер-ть того, что заявка будет обс-на (не получит отказ), врж-ся фм-ой:

$$P_{обс} = 1 - p_n = 1 - \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}\;.\qquad(6)$$

Для СМО смешанного типа с огр-ми по числу мест в очереди вер-ти p_k врж-ся фм-ми:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m}{1-\dfrac{\alpha}{n}}}\quad (k=\overline{0,n});\\ p_{n+s} &= \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m}{1-\dfrac{\alpha}{n}}}\quad (s=\overline{0,m}). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где n – число кн-ов обс-ия, m – число мест в очереди, $\alpha = \lambda/\mu$, λ – плотность потока заявок, μ – плотность «потока обс-й» одного кн-а.

Для чистой системы с ож-ем ($m = \infty$) установившийся предельный режим сущ-ет только в случае $\alpha/n < 1$ и p_k врж-ся фм-ми:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)}}\quad (k=0,1,\ldots,n);\\ p_{n+s} &= \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)}}\quad (s=1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Сформулируем **задачу**: расв-ся работа ЭВМ, ср. время безотказной работы к-ой равно $1/\lambda$; поток отказов (сбоев) ЭВМ – простейший с параметром λ. Если в машине происходит сбой, то она останавливается и неисправность устраняется. Ср. время устранения неисправности равно $1/\mu$; поток восстановлений ЭВМ – простейший с параметром μ. Опр-ть вер-ть того, что ЭВМ в момент вр-и t будет работать, если она в момент вр-и $t = 0$ работала.

Р. Рас-им два сст-ия ЭВМ: x_0 – ЭВМ исправна, x_1 – ЭВМ ремонтируется. Вер-ти этих сст-й в момент t обз-им $p_0(t)$ и $p_1(t)$ ств-но. Составим размеченный граф сст-й (рис. 5). Система диф-ых ур-й для вер-ей сст-й имеет вид

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);\quad \frac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t).$$

Решение системы при нач. условиях $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$ будет

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right);$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right).$$

При $t \to 0$ имеем стационарный режим работы системы с вер-ми сст-й

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu};\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

13(3). Расв-ся предельный стационарный режим работы n-кн-ой СМО с отказами. Плотность потока заявок λ, плотность «потока обс-й» (потока освобождений одного занятого кн-а) μ. Найти сд-ие хркс-ки СМО:

1) ср. число занятых кн-ов $\bar{k}$;

2) вер-ть того, что произвольно взятый кн. будет занят;

3) ср. время занятости одного (произвольно взятого) кн-а $\bar{t}_{зан}$;

4) ср. время простоя кн-а $\bar{t}_{пр}$.

Р. 1) Для любой СМО, в к-ой каждая заявка обс-ся только одним кн-ом, ср. число заявок λ_0, обс-мых в ед-у вр-и, опр-ся как пзв-ие ср-го числа занятых кн-ов на плотность потока обс-й: $\lambda_0 = \mu\bar{k}$.

Вер-ть обс-ия произвольно выбранной заявки равна отн-ю плотности потока обс-ных заявок к плотности потока поступающих заявок: $P_{обс} = \lambda_0/\lambda$, откуда $\lambda_0 = \mu\bar{k} = P_{обс}\lambda$. Сд-но, $\bar{k} = \dfrac{\lambda}{\mu}P_{обс}$ или, в ств-и с фм-ой (6), имеем $\bar{k} = \alpha\dfrac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}$, где $\alpha = \lambda/\mu$. Врж-е для ср-го числа занятых кн-ов можно получить и из фм-ы $\bar{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} kp_k$, где p_k опр-ся по фм-е (5).

2) Обз-им вер-ть того, что произвольно взятый кн. занят обс-ем какой-то заявки, через $P_{зан}$. Очевидно, что эта вер. одинакова для всех кн-ов, сд-но, $\bar{k} = nP_{зан}$, откуда $P_{зан} = \dfrac{\bar{k}}{n} = \dfrac{\alpha}{n}\cdot\dfrac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}$.

3) Ср. время занятости одного кн-а $\bar{t}_{зан} = 1/\mu$, т.е. равна ср-у вр-и обс-ия заявки.

4) Ср. время простоя кн-а $\bar{t}_{пр}$ опр-им из условия $P_{зан} = \dfrac{\bar{t}_{зан}}{\bar{t}_{зан} + \bar{t}_{пр}}$, откуда $\bar{t}_{пр} = \bar{t}_{зан}\dfrac{1-P_{зан}}{P_{зан}} =$

$= \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1-P_{зан}}{P_{зан}}$.

14(3). Расв-ся работа АТС, рассчитанной на одноврн-ое обс-ие 20 абонентов (двадцатикн-ая СМО). Вызов на АТС поступает в ср-ем через 6 секунд. Каждый разговор длится в ср-ем 2 минуты. Если абонент застает АТС занятой, то он получает отказ. Если абонент застает свободным хотя бы один из 20 кн-ов, то он соединяется с нужным ему номером.

Опр-ть вер. того, что абонент, вызывая АТС, не застанет ее занятой; найти также др. хркс-ки работы СМО: ср. число занятых кн-ов, вер-ть занятости кн-а, ср. время простоя кн-а.

Р. АТС можно расв-ть как СМО с отказами и с параметрами:

$$n = 20;\ \lambda = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\text{сек}}\right];\ \mu = \frac{1}{2\cdot 60} = \frac{1}{120}\left[\frac{1}{\text{сек}}\right];\ \alpha = \lambda/\mu = 20.$$

Вер-ть обс-ия выч-им, используя табл. T_{19} $P_{обс} = \dfrac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \dfrac{R(19,20)}{R(20,20)} \approx 0{,}841$. Ср. число занятых кн-ов $\bar{k} = \alpha P_{обс} \approx 16{,}8$. Вер. того, что кн. занят, $P_{зан} = \dfrac{\bar{k}}{n} \approx 0{,}841$. Ср. время простоя кн-а $\bar{t}_{пр} = \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{1-P_{зан}}{P_{зан}} \approx 22{,}6$ [сек].

Из полученных данных видно, что АТС загружена дт-но сильно.

15(3). Группа из 10 рыболовных траулеров обс-ся одной плавучей базой. База принимает на переработку рыбу и обеспечивает траулер нх-ми материалами. Ср. время плавания траулера равно 3 суткам. На базе имеется один причал; ср. время обс-ия траулера – 8 часов. Опр-ть ср. длину очереди $\bar{s}$, ср. время простоя траулера $\bar{t}_{пр}^{(и)}$, ср. время простоя базы $\bar{t}_{пр}^{(к)}$, ср. время ож-ия заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$.

Р. Плавучую базу можно расв-ть как СМО с огр-ым числом источников заявок (m = 10). Число кн-ов обс-ия $n = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\text{сут}}\right)$; $\mu = 3\left(\dfrac{1}{\text{сут}}\right)$. Параметры системы:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{9};\ \chi = \frac{n\mu}{\lambda} = 9;\ p = \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0{,}1;\ q = 1 - p = 0{,}9.$$

Вер. того, что кн. свободен, опр-ся по фм-е (см. T_{19}):

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\widetilde{B}(m,n,p)}{q^m} + \dfrac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}} = 0{,}168,$$

где

$$B(m,k,p) = C_m^k p^k q^{m-k};\ \widetilde{B}(m,k,p) = \sum_{l=0}^{k} C_m^l p^l q^{m-l}.$$

Ср. число заявок в очереди:

$$\bar{s} = \frac{P(1,1)p_0}{P(0,1)P(10,9)}[9R(9,9) - 9R(8,9)] \approx 4{,}54.$$

Мт. ож-ие числа занятых кн-ов при $n = 1$ равно $\bar{k} = 1 - p_0 = 0{,}832$. Вер. того, что траулер будет простаивать, $P_{пр}^{(з)} = \dfrac{\bar{s}+\bar{k}}{m} = 0{,}537$. Ср. время простоя траулера $\bar{t}_{пр}^{(и)} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{P_{пр}^{(з)}}{1-P_{пр}^{(з)}} = 3{,}48$ [суток]. Ср. время простоя плавучей базы $\bar{t}_{пр}^{(к)} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1-P_{пр}^{(к)}}{P_{пр}^{(к)}} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1-\bar{k}/n}{\bar{k}/n} \approx 0{,}067$ [суток]. Ср. время ож-ия заявки в очереди $\bar{t}_{оч} = \bar{t}_{пр}^{(и)} - 1/\mu = 3{,}48 - 1/3 = 3{,}15$ [суток].

Из результатов расчета видно, что при таких параметрах плавучая база плохо приспособлена для обс-ия траулеров: они простаивают примерно столько же, сколько и плавают.

16(3). Условия те же, что и в задаче 15(3), но на плавучей базе имеется три причала для обс-ия траулеров ($n = 3$), однако при этом производительность (прзл.) каждого причала уменьшена в три раза $\mu = 1$ (1/сут.), т.е. общая прзл. всех причалов ($n\mu = 3$ (1/сут.)) осталась такой же, как в 15(3). Опр-ть те же хркс-ки, как в задаче 15(3).

Р. Параметры: $\lambda = 1/3$; $\mu = 1$; $n = 3$; $m = 10$; $\alpha = 1/3$; $\chi = 9$; $p = 0{,}75$; $q = 1 - p = 0{,}25$.

Вер-ть того, что все причалы свободны,

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\widetilde{B}(10;3;0{,}75)}{0{,}25^{10}} + \dfrac{P(3,3)R(6,9)}{P(0,3)\cdot P(10,9)}} \approx 0{,}042.$$

Ср. число занятых причалов

$$\bar{k} = p_0\sum_{k=1}^{3} k\,B(m,k,p) + \frac{np_0P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)} \approx 2{,}38.$$

Ср. число траулеров, ож-их обс-ия,

$$\bar{s} = \frac{P(n,n)p_0}{P(0,n)P(m,\chi)}[(m-n)R(m-n,\chi) - \chi R(m-n-1,\chi)] \approx 0{,}635.$$

Вер. того, что траулер простоит около плавучей базы:

$$P_{пр}^{(з)} = \frac{\bar{s}+\bar{k}}{m} \approx 0{,}300.$$

Ср. время простоя траулера

$$\bar{t}_{пр}^{(и)} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{P_{пр}^{(з)}}{1-P_{пр}^{(з)}} \approx 1{,}28 \text{ [суток]}.$$

Ср. время простоя причала:

$$\bar{t}_{пр} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1-\bar{k}/n}{\bar{k}/n} \approx 0{,}26 \text{ [суток]}.$$

Т.о., увеличение числа причалов до трех при сохранении их общей прзл-ти привело к значительному улучшению обс-ия траулеров.

17(3) (СМО с отказами). В вычислительный центр (ВЦ) коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от прд-й на вычт. работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается и прд-ие вынуждено обратиться в др. ВЦ. Пусть ср. время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность (плотность) потока заявок 0,25 (1/ч). Найти вер-ть отказа и ср. число занятых ЭВМ.

Р. Имеем: $m = 3$, $\lambda = 0{,}25$ (1/ч), $T_{обс} = 3$ (ч). Из $P_i = \dfrac{\rho^i}{i!}P_0$ $(i = \overline{1,m})$, где $\rho = \lambda/\mu$. $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!}\right]^{-1}$.

Находим: $\rho = \lambda/\mu = \lambda\cdot\overline{T}_{обс} = 3\cdot0{,}25 = 0{,}75$; $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{3}\dfrac{\rho^i}{i!}\right]^{-1} = \left[1 + 0{,}75 + \dfrac{0{,}75^2}{2!} + \dfrac{0{,}75^3}{3!}\right]^{-1} = [2{,}1]^{-1}$,

$P_{отк} = \dfrac{\rho^m}{m!}P_0 = \dfrac{0{,}75^3}{3!}\cdot\dfrac{1}{2{,}1} = 0{,}033$; $m_з = \sum_{n=1}^{m} nP_n = P_0\sum_{n=1}^{m}\dfrac{\rho^n}{(n-1)!} = \dfrac{1}{2{,}1}\left[0{,}75 + 0{,}75^2 + \dfrac{0{,}75^2}{2!}\right] \approx 0{,}72$.

Т.о., $P_{отк} = 0{,}033$; $m_з = 0{,}72$ (ЭВМ).

18(3) (СМО с огр. длиной очереди). На автозаправочной станции установлены три колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на три машины для их ож-ия в очереди. На станцию прибывает в ср-ем две машины в 1 мин. Найти вер. отказа и ср-ю длину очереди.

Р. Имеем $m = 3$, $l = 3$, $\lambda = 2$ (1/мин), $\overline{T}_{обс} = 1$ (мин), $\mu = 1/\overline{T}_{обс} = 1$ (1/мин). Используем фм-ы $P_i = \dfrac{\rho^i}{i!}P_0$ $(i = \overline{1,m})$. $P_i = \dfrac{\rho^i}{m^{i-m}m!}P_0$ $(i = \overline{m+1, m+l})$, где $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=m+1}^{m+l}\dfrac{\rho^i}{m^{i-m}m!}\right]^{-1}$. На практике отн-ие $\dfrac{\rho}{m} < 1$ и P_0 используются в виде $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \dfrac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\dfrac{1-(\rho/m)^l}{1-\rho/m}\right]^{-1}$. Далее находим: $\rho = \lambda/\mu = 2/1 = 2$, $\rho/m = 2/3$, $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \dfrac{\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot\dfrac{1-(\rho/m)^l}{1-\rho/m}\right]^{-1} = \left[1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \right.$

$\left. + \dfrac{2^4}{3\cdot3!}\cdot\dfrac{1-(2/3)^3}{1-2/3}\right]^{-1} \approx 0{,}122$, $P_{отк} = P_{m+l} = \dfrac{\rho^{m+l}}{m^l\cdot m!}P_0 = \left(\dfrac{\rho}{m}\right)^l\dfrac{\rho^m}{m!}P_0 = (2/3)^3\,\dfrac{2^3}{3!}\cdot0{,}122 = 0{,}048$,

$M_{ож} = \dfrac{P_0\rho^m}{m!}\sum_{n=1}^{l} n\left(\dfrac{\rho}{m}\right)^n = \dfrac{0{,}122\cdot2^3}{3!}\left[\dfrac{2}{3} + 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right] = 0{,}35$.

Т.о., $P_{отк} = 0{,}048$, $M_{ож} = 0{,}35$ (машины).

19(3) (СМО с ож-ем). В порту имеется два причала для разгрузки грузовых судов. Интенсивность потока судов равна 0,8 (судов в сутки). Ср. время разгрузки одного судна составляет 2 сут. Предполагается, что очередь ожидающих разгрузки судов может быть неогр-ой длины. Найти ср. число занятых причалов и ср. время пребывания судна в порту.

Р. Имеем: $m = 2$, $\lambda = 0{,}8$ (1/сут), $\mu = 1/\overline{T}_{обс} = 0{,}5$ (1/сут); $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8/0{,}5 = 1{,}6$. Используем фм-ы $P_i = \dfrac{\rho^i}{i!}P_0$ $(i = \overline{1,m})$. $P_i = \dfrac{\rho^i}{m^{i-m}m!}P_0$ $(i = m + 1, \ldots, m + k, \ldots)$. При $\rho/m < 1$ для опр-ия P_0 используют фм-у $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \dfrac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)}\right]^{-1}$. Находим: $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \dfrac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \dfrac{1{,}6}{1!} + \right.$

$\left. + \dfrac{1{,}6^2}{2!} + \dfrac{1{,}6^3}{2!(2-1{,}6)}\right]^{-1} = 0{,}11$, $m_з = \rho q$, $q = 1 \Rightarrow m_з = 1{,}6$, $M_{ож} = \dfrac{P_0\rho^{m+1}}{m\cdot m!}\cdot\dfrac{1}{(1-\rho/m)^2} = \dfrac{0{,}11\cdot1{,}6^3}{2\cdot2\cdot(1-0{,}8)^2} =$

$= 2{,}8$, $\overline{T}_{ож} = \dfrac{M_{ож}}{\lambda} = 3{,}5$.

Итак, $m_з = 1{,}6$ (причалов), $\overline{T}_{ож} = 3{,}5$ (сут).

20(3) (СМО с огр. вр-ем ож-ия). В пункте химчистки имеется три аппарата для чистки. Интенсивность потока посетителей $\lambda = 6$ (посетителей в час). Интенсивность обс-ия посетителей одним аппаратом $\mu = 3$ (посетителей в час). Ср. кол-во посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обс-ия, $v = 1$ (посетитель в час). Найти абс-ную пропускную способность пункта.

Р. Имеем: $m = 3$, $\lambda = 6$, $\mu = 3$; $v = 1$. Используем фм-ы $P_i = \dfrac{\rho^i}{i!}P_0$ ($i = \overline{1,m}$). $P_i = \dfrac{\rho^m}{m!}\cdot\dfrac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^{k}(m\mu + jv)}$ ($i = m+1, \ldots, m+k, \ldots$), где $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\rho^i}{i!} + \dfrac{\rho^m}{m!}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^{k}(m\mu + jv)}\right]^{-1}$. Находим: $\rho = \lambda/\mu = 6/3 = 2$, $P_0 = \left[1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \dfrac{2^3}{3!}\cdot\left(\dfrac{6}{3\cdot3+1} + \dfrac{6^2}{(3\cdot3+1)(3\cdot3+2\cdot1)}\right)\right]^{-1} = 0{,}13$.

Вер-ть занятости всех приборов равна $P_{зан} = 1 - P_0 = 0{,}87$. Тогда абс. пропускная способность может быть получена как пзв-ие: $A = mP_{зан} = 3\cdot0{,}87 = 2{,}61$.

Т.о., $A = 2{,}61$ (посетителя в час).

20а(3) (замкнутые СМО). Рабочий обс-ет группу из трех станков. Каждый станок останавливается в ср-ем два раза в час. Процесс наладки занимает в ср. 10 мин. Опр-ть абс. пропускную способность наладки рабочим станков.

Р. Имеем: $n = 1$; $m = 3$; $\lambda = 2$, $\overline{T}_{обс} = 1/6$, $\mu = 6$. Используем фм.

$$P_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i!}\rho^i P_0\ (i = \overline{1,n}),\ P_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n!n^{i-n}}\rho^i P_0\ (i = \overline{n+1,m}),$$

где $P_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i!}\rho^i + \sum_{i=n+1}^{m}\dfrac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n!n^{i-n}}\rho^i\right]^{-1}$. Находим: $\rho = \lambda/\mu = 1/3$,

$$P_0 = \left[1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1!1^1}\rho^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1!1^2}\rho^3\right]^{-1} = \left[1 + 3\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot2\cdot1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{-1} = 0{,}346.$$

Опр-ем вер. того, что рабочий будет занят обс-ем: $P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0{,}346 = 0{,}654$. Если рабочий занят обс-ем, то он обс-ет 6 станков в час. Сд-но, абс. пропускная способность находится как пзв-ие: $A = \mu P_з = 6\cdot0{,}654 = 4$. Т.о., $A = 4$ (станка в час).

Задачи для кр. работы.

21(1). Показать, что для одн-ой цепи Маркова вер-ти перехода связаны рав-ом $P_{ij}^{(\alpha+\beta)} = \sum_{v=1}^{m}P_{iv}^{\alpha}P_{vj}^{\beta}$ ($i, j = \overline{1,m}$), см. 1.4. Ук. Следует из рав. $P^{\alpha+\beta} = P^{\alpha}P^{\beta}$.

22(1). При данной серии выстрелов каждый стрелок группы с равной вер-ю получает любое кол. очков от $N + 1$ до $N + m$. Опр-ть вер. того, что среди сд-их n стрелков из этой группы хотя бы один стрелок получит $N + k$ очков, если нб-е число очков, полученных предыдущими стрелками, равно $N + i$ ($k \geq i = \overline{1,m}$). О. Сст-ие Q_j – нб. число выбитых очков равно $N + j$; $p_{ii} = i/m$, $p_{ii} = 0$ при $i > j$; $p_{ii} = 1/m$ при $i < j$ (см. 4(1)); $P_{ii}^{(n)} = \left(\dfrac{i}{m}\right)^n$; $P_{ik}^{(n)} = 0$ при $i > k$; $P_{ik}^{(n)} = \left(\dfrac{k}{m}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{m}\right)^n$ $i < k$.

23(1). Дана матрица $P = (p_{ij})$ вер-ей перехода, к-ая яв-ся неприводимой, непериодической и дважды стохастической, т.е. суммы эл-ов каждого столбца и каждой строки равны ед-е. Опр-ть предельные вер-ти $p_j^{(\infty)}$ ($j = \overline{1,m}$) (см. 5(1). О. Из $\sum_{j=1}^{m} p_j^{(\infty)} = 1$, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} p_j^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ ($j = \overline{1,m}$) следует, что $p_j^{(\infty)} = 1/m$ ($j = \overline{1,m}$).

24(1). Вер-ти перехода для цепи Маркова с беск. числом сст-й опр-ся рав-ми $p_{i1} = q$, $p_{i,i+1} = p = 1 - q$ ($i = 1, 2, \ldots$). Опр-ть предельные вер-ти $p_j^{(\infty)}$ ($i = 1, 2, \ldots$) (см. 5(1)). О. Цепь неприводимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) $\Rightarrow u_1 = q \sum_{i=1}^{\infty} u_i$, $u_j = u_1 p^{j-1}$. При этом $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = u_1 \sum_{j=1}^{\infty} p^{j-1} = \frac{u_1}{q} < \infty$; поэтому эргодическая; $p_j^{(\infty)} = p^{j-1} p_1^{(\infty)}$, $p_j^{(\infty)} = q$, т.е. $p_j^{(\infty)} = qp^{j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots$).

25(1). Цепь Маркова с беск. числом сст-й имеет сд-ие вер-ти перехода: $p_{11} = 1/2$, $p_{12} = 1/2$, $p_{i1} = 1/i$; $p_{i,i+1} = (i - 1)/i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Опр-ть предельные вер-ти $p_{ik}^{(\infty)}$ ($i, k = 1, 2, \ldots$) (см. 5(1)). О: цепь неприводимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) следует, что $u_j = \frac{u_1}{2(j-1)}$ ($j = 2, 3, \ldots$). Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j = u_1 \left[1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2(j-1)}\right]$ расх-ся, т.е. цепь не эргодическая. Это нуль-регулярная цепь, для к-ой $p_{ik}^{(\infty)} = 0$ ($i, k = 1, 2, \ldots$).

26(1). Матрица вер-ей перехода задана в виде $P = \begin{pmatrix} R & O \\ U & W \end{pmatrix}$, где R – матрица, ств-щая неприводимой непериодической группе C сущ-ых сст-й $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, а кв. матрица W ств-ет несущ-ым сст-ям $Q_{s+1}, Q_{s+2}, \ldots, Q_m$. Опр-ть предельные вер-ти p_{*j} ($j = \overline{s+1,m}$) того, что система перейдет в сст-ие из группы C (см. 6(1)). О: т.к. $W^\infty = 0$, то $p_{*j} = \sum_{v=1}^{s} P_{jv}^{(\infty)} = 1$ ($j = \overline{s+1,m}$).

27(1). Матрица вер-ей перехода задана в виде $P = \begin{pmatrix} R & O & O \\ O & R_1 & O \\ U & U_1 & W \end{pmatrix}$, где R – матрица, ств-щая непериодической группе C сущ-ых сст-й $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, а кв. матрица W ств-ет несущ-ым сст-ям $Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_m$. Опр-ть вер-ти p_{*j} ($j = \overline{r+1,m}$) того, что система перейдет в сст-е, принадлежащее к группе C, если все эл-ты матрицы W равны α, а сумма эл-ов любой строки матрицы U равна β (см. 6(1)). О: из системы $p_{*j} = \sum_{v=r+1}^{m} p_{*v} + \beta$ ($j = \overline{r+1,m}$) получаем $p_{*j} = \frac{\beta}{1-\alpha(m-r)}$ ($j = \overline{r+1,m}$).

28(2). Опр-те вид и параметры тренда в днмч-ом ряде выплавки стали с 1960 по 1979 гг. (табл. 7).

Таблица 7

Годы	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Выплавка стали, млн. т	65,3	70,8	76,3	80,2	85,0	91,0	96,9	102,2	106,5

Годы	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Выплавка стали, млн. т	110,3	115,9	120,7	125,6	131,5	136,2	141,3	144,8	146,7	151,5

29(2). Выпишите из справочников «Народное хозяйство СССР» днмч. ряды урожайности важнейших с/х культур и найдите по ним коэф-ты лин-ых трендов. Опр-те экнч-й смысл коэф-ов.

30(2). Выпишите из справочников «Народное хозяйство СССР» данные о прямых затратах труда на прз-во важнейших видов с/х продукции. Опр-те среднегодовые темпы снижения трудоемкости. Ук: рассчитайте параметры лин-го тренда днмч-го ряда лгр-ов исх-го ряда.

31(3) (СМО с отказами). Интенсивность потока телефонных звонков директору прд-ия равна λ = 1,2 вызова в мин, ср. продолжительность разговора (обс-ия заявки) $\bar{t}_{обс}$ = 2,5 мин и все потоки сб-й (вызовов и обс-ия) имеют хрк-р простейших пуассоновских потоков. Найти предельную (отс-ю и абс-ю) пропускную способность СМО, вер-ть отказа, а также полное число обс-ых и необс-ых (получивших отказ) заявок в течение 1 ч работы СМО. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т.е. с пропускной способностью, к-ой обладала бы система в том случае, если бы каждая заявка обслуживалась ровно 2,5 мин и все заявки следовали бы одна за другой без перерыва.

Р. Имеем: λ = 1,2 (1/мин), $\bar{t}_{обс}$ = 2,5 (мин), $\mu = 1/\bar{t}_{обс}$ = 1/2,5 = 0,4 (заявок/мин). Целевая фк. может быть записана в общем виде сд-им образом:

$$Q/Q_н = f(\chi, \lambda, \bar{t}_{обс}, \mu, p, p_{обс}, p_{отк}, A) \to max.$$

Находим пст-ю вр-и $\tau = \dfrac{1}{\lambda+\mu} = \dfrac{1}{1{,}2+0{,}4} \approx 0{,}63$ мин, тогда переходный процесс в СМО завершается через $3\cdot\tau = 3\cdot 0{,}63 \approx 1{,}9$ мин. Отс. пропускная способность (вер. того, что кн. свободен) $P_0 = Q = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = \dfrac{0{,}4}{1{,}2+0{,}4} = 0{,}25$, абс. пропускная способность $A = \lambda Q = 1{,}2\cdot 0{,}25 = 0{,}3$ (заявки в мин). Вер-ть занятости кн-а $P_1 = 1 - P_0 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{1{,}2}{1{,}2+0{,}4} = 0{,}75$.

Число заявок, обс-ных в течение часа, составляет $60A = 60\cdot 0{,}3 = 18$ заявок, а получивших отказ – $60\cdot\lambda p_1 = 60\cdot 1{,}2\cdot 0{,}75 = 5{,}4$ заявки.

В тех же условиях номинальная прзл. равна $Q_н = 60/\bar{t}_{обс}$ = 60/2,5 = 24 заявкам в час, т.е. фактическая прзл-ть (учитывающий слн-ый хрк-р процесса) составляет 18:24·100% = 75% от номинальной. Т.о., СМО может обс-ть только 25% всех поступающих заявок. Очевидно, что работу такой СМО нельзя считать уд-ой ($Q/Q_н$ = 0,25/0,4 = 0,625). Что же нужно сделать, чтобы повысить отс. пропускную способность окн-ой СМО? Этого можно добиться увеличением либо интенсивности обс-ия μ, либо кн-ов обс-ия. При этом уменьшится отн-ие фактической прзл-ти СМО к номинальной $Q_н$, что можно записать так: $\dfrac{A}{Q_н} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda Q}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = P_1$.

Данную задачу решить при λ = 1,4 и $\bar{t}_{обс}$ = 2,1.

32(3). Сапожник выполняет заказы по ремонту обуви, затрачивая в ср-ем на один заказ 30 мин. Рядом с сапожником расположено одно кресло, в к-ом заказчик ожидает выполнения заказа. Клиенты приходят к нему в ср-ем каждые 40 мин и в случае занятости сапожника уходят к другому. Опр-ть долю потери клиентов, долю вр-и простоя и отн-ие «заработанные деньги/потерянные деньги», если ср. стоимость ремонта равна 55 руб.

Р. Имеем: $\bar{t}_{обс}$ = 30 мин = 1/2 ч, $\bar{t}_з$ = 40 мин = 2/3 ч, тогда $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обс}} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ (1/ч), $\lambda = \dfrac{1}{\bar{t}_з} = \dfrac{1}{2/3} = 1{,}5$ (1/ч). Система диф-ых ур-й Эрланга имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\ p_0(0) = 1, \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t),\ p_1(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \lambda p_0 - \mu p_1 = 0, \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1{,}5 p_0 + 2 p_1 = 0, \\ 1{,}5 p_0 - 2 p_1 = 0, \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ср. долю обс-мых заявок $p_0 = 4/7 \approx 0{,}57$, т.е. 57% клиентов из числа поступивших будут обс-ны. Ср. доля необс-ых составляет $p_1 = 3/7 \approx 0{,}43$, т.е. 43% клиента из числа поступивших получат отказ.

Ср-й доход равен $D_1 = p_0 \cdot N \cdot 55$ (где N – кол. обс-ных клиентов, 55 – ср. стоимость ремонта), ср. вел-а потерянного дохода $D_2 = p_1 \cdot N \cdot 55$. Тогда отн-ие «заработанные деньги/потерянные деньги» для сапожника равно:

$$R = \frac{D_1}{D_2} = \frac{p_0 \cdot N \cdot 55}{p_1 \cdot N \cdot 55} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{0{,}57}{0{,}43} = 1{,}33.$$

Обратная вел., опр-щая отн-ие «потерянные деньги/заработанные деньги», равна

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{0{,}43}{0{,}57} = 0{,}754,$$

что свидетельствует об ощутимости доли потерь.

Данную задачу решите при $\bar{t}_{обс} = 20$ мин, $\bar{t}_з = 35$ мин, $C = 60$ руб.

33(3). Найти опт. число телефонных номеров, нх-ых для установки на прд-и, при условии, что заявки на переговоры поступают с интенсивностью $\lambda = 90$ заявок в час. а ср. продолжительность разговора $\bar{t}_{обс} = 2$ мин.

Целевая фк. в общем виде может быть записана сд. образом:

$$n^\circ = \text{опт}\, f(\lambda,\ \bar{t}_{обс},\ \mu, \rho, p_0, p_{обс}, A,\ \bar{n}_з,\ K_з).$$

Р. Имеем: $\lambda = 90$ (1/час), $\bar{t}_{обс} = 2$ мин $= 1/30$ час, $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обс}} = \dfrac{1}{1/30} = 30$ заявок/час, интенсивность нагрузки $\rho = \lambda/\mu = 90/30 = 3$. Находим долю вр-и простоя кн-ов $p_0 = \left[\sum_{k=1}^{1} \dfrac{\rho^k}{k!}\right]^{-1} =$

$= \left[\dfrac{3^0}{0!} + \dfrac{3^1}{1!}\right]^{-1} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Сд-но, 25% в течение часа телефон будет не занят, т.е. $\bar{t}_{пр} = 15$ мин.

Доля заявок, получивших отказ, равна $P_{отк} = \dfrac{3^1}{1!} \cdot 0{,}25 = 0{,}75$. Значит, 75% из числа поступивших заявок не принимается к обс-ю. Вер-ть обс-ия поступивших заявок составит: $P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, т.е. 25% из числа поступивших заявок обс-ся.

Ср. число кн-ов, занятых обс-ем, равно $\bar{n}_з = \rho \cdot p_{обс} = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$. Коэф-т занятости обс-ем кн-ов $K_з = n_з/n = 0{,}75/1 = 0{,}75$. Сд-но, телефон на 75% занят обс-ем. Абс. пропускная способность системы равна $A = p_{обс} \cdot \lambda = 0{,}25 \cdot 90 = 22{,}5$ заявки/час.

Очевидно, такая СМО с одним кн-ом будет плохо справляться с обс-ем заявок (потеря заявок 75% очень велика, а вер-ть обс-ия – всего 25%), кроме того, низка пропускная способность системы (только 22 заявки в час из 90 поступивших). Сд-но, нх-мо увеличить число кн-ов. Для опр-ия опт-ой вел-ы приведем анч-ые выч-ия для $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (см. табл. 8).

Таблица 8

n	1	2	3	4	5	6
p_0	0,25	0,12	0,077	0,06	0,05	0,05
$p_{отк}$	0,75	0,54	0,35	0,21	0,1	0,5
$p_{обс}$	0,25	0,46	0,65	0,79	0,9	0,95
$n_з$	0,75	1,38	1,95	2,37	2,7	2,85
$K_з$	0,75	0,69	0,65	0,59	0,54	0,47
A	22,5	41,4	58,5	71,1	81	85,5

Из табл. 8 видно, что опт. число телефонных номеров составляет 5, поскольку в этом случае доля обс-ных заявок составит 90% и только 10% заявок получат отказ, абс. пропускная способность СМО составит 81 заявку в час. При изменении кт-ия эффективности и введении дптн-ых огр-й (н-р, по затратам на приобретение, установку и содержание телефонов, а также затрат на обеспечение сотрудников служебными переговорами и их нх-го кол-ва) установленная вел. телефонных номеров может измениться. Т.о., изменение условий меняет ответ, значит, задача носит мфктн-ый хрк-р.

Данную задачу решите при $\lambda = 80$, $\bar{t}_{обс} = 2{,}5$.

34(3). Коммерческая фирма занимается посреднической деятельностью по продаже автомобилей и осуществляет часть переговоров по 3 телефонным линиям. В ср-ем поступает 75 звонков в час. Ср. время предварительных переговоров справочного хрк-а составляет 2 мин. Опр-ть хркс-ки СМО и дать оценку работы СМО.

Р. Имеем: $n = 3$, $\lambda = 75$ звонков/час, $\bar{t}_{обс} = 2$ мин $= 1/30$ ч, $\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 30$ ед./ч, $\rho = \lambda/\mu = 75/30 = 2{,}5$. Находим вер-ти того, что все кн. свободны: $p_0 = [1 + \rho + \rho^2/2! + \rho^3/3!]^{-1} = [1 + 2{,}5 + (2{,}5)^2/2! + (2{,}5)^3/3!]^{-1} = 0{,}11$; занят один кн.: $p_1 = \rho/1!\cdot p_0 = 2{,}5/1!\cdot 0{,}11 = 0{,}271$; заняты два кн-а: $p_2 = \rho^2/2!\cdot p_0 = (2{,}5)^2/2!\cdot 0{,}11 = 0{,}338$; заняты три кн-а, доля потерянных заявок (необс-ых): $p_{отк} = p_3 = \rho^3/3!\cdot p_0 = (2{,}5)^3/3!\cdot 0{,}11 = 0{,}282$; отс-ая пропускная способность: $p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$; абс-ая пропускная способность: $A = \lambda\cdot p_{обс} = 75\cdot 0{,}718 = 54$ ед./ч; ср. число занятых кн-ов: $\bar{n}_з = \rho\cdot p_{обс} = 2{,}5\cdot 0{,}718 = 1{,}8$ кн.; коэф. занятости кн-ов: $K_з = \bar{n}_з/n = 1{,}8/3 = 0{,}6$.

Доля потерянных заявок составляет около 28% (это очень много), а обс-ных – всего 72%. Абс. пропускная способность СМО – 54 заявки/ч, каждый из кн-ов занят обс-ем всего 60% рабочего вр-и. Повышение эффективности (эфс.) работы СМО можно осуществить путем увеличения кол-ва телефонных линий и уменьшением ср-го вр-и обс-ия.

Данную задачу решите при $n = 2$, $\lambda = 60$, $\bar{t}_{обс} = 2$.

35(3). Туристическая фирма обс-ет клиентов по телефону, имеющему разветвление на 4 линии. В ср-ем за один час работы поступает 100 запросов. Ср. время переговоров референтов фирмы с клиентом по телефону составляет 2,5 мин. Ср. стоимость путевки 300 у.е. Опр-ть хркс-ки, отн-ие «потерянные деньги/заработанные деньги» СМО и дать оценку работы СМО.

Р. Имеем: $n = 4$, $\lambda = 100$ запросов/ч, $\bar{t}_{обс} = 2{,}5$ мин $\approx 0{,}042$ ч, $\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1/0{,}042 = 23{,}81$ заявки/ч. Находим: интенсивность нагрузки: $\rho = \lambda/\mu = \lambda\cdot\bar{t}_{обс} = 100\cdot 0{,}042 = 4{,}2$; долю вр-и простоя референтов фирмы: $p_0 = \left(1+\rho+\dfrac{\rho^2}{2!}+\dfrac{\rho^3}{3!}+\dfrac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = 0{,}025$; вер. занятости обс-ем всех четырех линий: $p_4 = p_{отк} = \dfrac{\rho^4}{4!}\cdot p_0 = 12{,}97\cdot 0{,}025 = 0{,}324$; отс-ю пропускную способность фирмы: $Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}324 = 0{,}676$; абс-ю пропускную способность фирмы: $A = \lambda\cdot Q = 100\cdot 0{,}676 = 67{,}6$ клиента/ч; ср. число занятых кн-в: $\bar{n}_з = \rho\cdot Q = 4{,}2\cdot 0{,}676 = 2{,}8$; коэф. занятости кн-в: $K_з = \bar{n}_з/n = 2{,}8/4 = 0{,}7$; отн-ие «потерянные деньги/заработанные деньги»: $R = \dfrac{p_{отк}\cdot N\cdot 300}{p_{обс}\cdot N\cdot 300} = \dfrac{p_{отк}}{p_{обс}} = \dfrac{0{,}324}{0{,}676} = 0{,}48$.

Доля необс-ных клиентов составляет 32% (очень много), а обс-ных – всего 68%, абс. пропускная способность равна 68 клиентам в час, а отн-ие потерянных денег к заработанным – в ср-ем 48%, сд-но, система работает с большими потерями, что составляет при $N = 10$ обс-ых клиентов $R\cdot N\cdot C = 0{,}48\cdot 10\cdot 300 = 1440$ у.е.

Можно увеличить кол-во линий разветвлений телефона до 8 кн-ов, ств-но введением еще 4 референтов и снижением вр-и обс-ия до 2 мин, пропускная способность возрастает при этом до 98,7%, сд-но, потери переговоров будут незначительны, а доход от продажи путевок может увеличиться.

Данную задачу решите при $n = 3$, $\lambda = 80$, $\bar{t}_{обс} = 2$, $C = 400$ у.е.

36(3) (СМО с огр. длиной очереди). В магазине самообслуживания установлено, что поток покупателей яв-ся простейшим с интенсивностью $\lambda = 2$ покупателя в минуту. В магазине один кассовый аппарат с интенсивностью обс-ия $\mu = 2$ покупателя в минуту. Опр-ть хркс-ки СМО при условии, что очередь огр-на контролером при входе в зал самообслуживания $m = 5$ покупателями.

Р. Имеем: $\lambda = 2$ (1/мин), $\mu = 2$ (1/мин), $m = 5$, $\rho = \lambda/\mu = 1$. Используем фм-ы (СМО одноканальная (окн.)): $p_i = \rho^i p_0$, где $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m+1}\rho^k\right]^{-1} = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$, если $\rho \neq 1$. Если $\rho = 1$, то $p_0 = 1/(m + 2)$, все остальные вер-ти также равны $1/(m + 2) = p_i$. Если $m = 0$, то $[1 + \rho]^{-1} = [1 + \lambda/\mu]^{-1} = \mu/(\lambda + \mu)$ (получили окн. систему с отказами). В случае $\lambda = \mu$ получим $p_0 = 1/2$. Отсюда находим вер. отказа $p_{отк} =$

$= p_{m+1} = \rho^{m+1}p_0$, отс-ая пропускная способность $Q = 1 - p_{отк} = 1 - \rho^{m+1}p_0$, абс. пропускная способность $A = Q\lambda$, ср. число заявок $L_{оч}$, стоящих в очереди на обс-ие, опр-ся мт. ож-ем числа заявок k:

$$L_{оч} = M(k) = 1p_2 + 2p_3 + \ldots + mp_{m+1} = \rho^2(1 + 2\rho + \ldots + (m-1)\rho^{m-2} + m\rho^{m-1})p_0 \qquad (а)$$

при вер-и p_0 – кн. свободный, p_1 – кн. занят (очередей нет).

С учетом св-ва геом-ой прогрессии $S(\rho) = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^m = \dfrac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho} \Rightarrow S'(\rho) = 1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + m\rho^{m-1} = \left(\dfrac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho}\right)' = \dfrac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{1-\rho}$ вместо (а) получим

$$L_{оч} = \rho^2\,\frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{1-\rho}. \qquad (б)$$

При $\rho = 1$ имеем $L'_{оч} = (1 + 2 + \ldots + m)p_0 = \dfrac{m(m+1)}{2}\cdot\dfrac{1}{m+2} = \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}$. Ср. время ож-ия обс-ия заявки в очереди: $T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$ $(\rho \neq 1)$ и $T'_{оч} = \dfrac{L'_{оч}}{\lambda}$ $(\rho = 1)$.

Если $m \to \infty$ при $\rho < 1$, то $p_k = \rho^k p_0$, где $p_0 = 1 - \rho$. Причем $p_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому отс. пропускная способность будет $Q = 1$, абс. пропускная способность станет равной $A = \lambda Q = \lambda$, сд-но, обс-ся все поступившие заявки, причем ср. длина очереди окажется равной $L_{оч} = \dfrac{\rho^2}{1+\rho}$, а ср. время ож-ия $T_{оч} = \dfrac{\rho}{\mu(1+\rho)} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$. Если $\rho \ll 1$, то $\dfrac{\rho}{\mu}$, т.е. ср. время ож-ия быстро уменьшается с увеличением интенсивности потока обс-ия. Если $\rho \geq 1$, то в СМО отсутствует установившийся режим и очередь взр-ет неогр-но.

В данном примере $\rho = \lambda/\mu = 1$, поэтому все вер-ти сст-й СМО одинаковы и равны $p_0 = \dfrac{1}{m+2} = \dfrac{1}{7}$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \dfrac{1}{7}$. Вер-ть отказа обс-ия равна $p_{отк} = p_6 = 1/7 \approx 0{,}143$. Отс-ая и абс-ая пропускные способности ств-но равны $Q = 1 - p_6 = 0{,}857$, $A = \lambda Q = 2\cdot 0{,}857 = 1{,}7$ покупателя/мин. Ср. длина очереди $t'_{оч} = \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)} = \dfrac{5\cdot 6}{2\cdot 7} = 2{,}14$. Ср. время ож-ия в очереди $T_{оч} = \dfrac{L'_{оч}}{\lambda} = \dfrac{2{,}14}{2} = 1{,}07$ мин. Ср. время пребывания покупателя в СМО: $T_{СМО} = \dfrac{m+1}{2\mu} = \dfrac{6}{2\cdot 2} = 1{,}5$ мин.

Т.о., ср. время пребывания покупателя у кассы втрое превышает зн-ие 0,5 мин, к-ое было бы при равномерном следовании заявок и равномерном обс-и.

Улучшение хркс-ик СМО происходит очень быстро, если уменьшить отн-ие $\lambda/\mu = \rho$. Уже при $\rho \leq 0{,}8$ можно отказаться от огр-ия на длину очереди. Н-р, если установить $\mu = 2{,}5$, ств-но $\rho = 2/2{,}5 = 0{,}8$ и принять $m = \infty$, то получим СМО со сд. хркс-ми: вер. отказа $p_{отк} = 0$, отс. пропускная способность $Q = 1$, абс. пропускная способность $A = \lambda Q = 2$ (покупателя в мин), ср. длина очереди $L_{оч} = 3{,}2$ (покупателя), ср. время пребывания у кассы $\bar{t}_{обс} = 2$ мин, ср. время пребывания в очереди $T_{оч} = 1{,}6$ мин.

Такой режим работы СМО яв-ся более предпочтительным по сравнению с режимом работы при $\rho = 1$, т.к. ни одному из покупателей не отказывается в обс-и, а длина очереди и время обс-ия в ср-ем возросли немного.

Данную задачу решите при $\lambda = 2$, $\mu = 2{,}5$, $m = 4$.

37(3) (СМО с огр. вр-ем ож-ия). На автомойку в ср-ем за час приезжают три автомобиля; если в очереди уже находятся два, то вновь прибывающие не желают терять время в ож-и обс-ия и уезжают, поскольку ср. время обработки одного автомобиля составляет 20 мин, а место всего одно. Требуется провести анализ работы СМО с 9.00 до 21.00 часов, если ср. стоимость мойки одного автомобиля составляет 70 руб.

Р. Имеем: $\lambda = 3$ авт./ч, $\bar{t}_{обс} = 20$ мин, $m = 2$, $c_1 = 70$ руб., $T_{раб} = 12$ ч, $n = 1$. Целевую фк. выручки от мойки автомобилей в общем виде можно представить так:

$$B = f\{\lambda,\ \bar{t}_{обс},\ \mu, \rho, n, m, p_0, p_{отк}, A, L_{оч}, L_{СМО}, T_{раб}, T_{оч}, T_{СМО}\} \to max.$$

Используем фм-ы: ср. время пребывания заявки в СМО $T_{СМО} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda} + \dfrac{L_{об}}{\lambda} = \dfrac{m}{\lambda} + \dfrac{q}{\mu} = \dfrac{L_{СМО}}{\lambda}$ ($\rho \neq 1$) или $T_{СМО} = \dfrac{m}{\lambda} + \dfrac{q}{\mu} = \dfrac{m+1}{2\mu}$ ($\rho = 1$). Если очередь не огр-на, то $T_{\infty} = \dfrac{m}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{m+1}{2\mu}$ при $\rho < 1$, а при $\rho \geq 1$ получим $T_{\infty} \to \infty$.

Находим $\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1/20 = 3$ авт./ч. Опр-им интенсивность нагрузки $\rho = \lambda/\mu = 3/3 = 1$. Предельные вер. сст-й равны: $p_0 = p_1 = p_2 = p_{n+m} = p_з = \dfrac{1}{m+2} = \dfrac{1}{2+2} = 0{,}25$. Вер-ть отказа в обс-и: $p_{отк} = p_з = 0{,}25$. Отс. пропускная способность: $Q = 1 - p_з = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Абс. пропускная способность: $A = \lambda{\cdot}Q = 3{\cdot}0{,}75 = 2{,}25$ авт./ч. Ср. длина оч.: $L_{оч} = \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)} = \dfrac{2\cdot 3}{2\cdot 4} = 0{,}75$ авт. Ср. время простоя в очереди: $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 0{,}75/3 = 0{,}25$ ч = 15 мин. Ср. число заявок, находящихся на обс-и: $L_{обс} = \dfrac{m+1}{m+2} = 0{,}75$ авт. Ср. число заявок в системе: $L_{СМО} = L_{обс} + L_{оч} = 1{,}5$ авт. Ср. время пребывания авт-ля в системе обс-ия мойки: $T_{СМО} = L_{СМО}/\lambda = 1{,}5/3 = 30$ мин.

Т.о., ср. длина потерянных заявок составляет 25% из числа поступивших, что при круглосуточном режиме работа составит: $\lambda{\cdot}24{\cdot}p_{отк} = 3{\cdot}24{\cdot}0{,}25 = 18$ авт., что приведет к потере выручки от обс-ия в сумме 1260 руб.

Данную задачу решите при $\lambda = 4$, $\bar{t}_{обс} = 25$ мин, $m = 2$, $c_1 = 70$ руб., $T_{раб} = 12$ ч, $n = 1$.

38(3). Провести анализ работы СМО задачи 37(3) при изменении одного условия – интенсивности приезда автомобилей на мойку до 6 автомобилей в час.

Р. Имеем: $\lambda = 6$ авт./ч, $\bar{t}_{обс} = 20$ мин, $m = 2$, $c_1 = 70$ руб., $T_{раб} = 12$ ч, $n = 1$.

Находим: $\rho = \lambda/\mu = 6/3 = 2$, $p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \dfrac{1-2}{1-2^4} = 0{,}067$, $p_{отк} = \dfrac{(1-\rho)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} = \dfrac{(1-2)2^3}{1-2^4} = 0{,}5$,

$Q = 1 - p_{отк} = 0{,}5$, $A = \lambda{\cdot}Q = 6{\cdot}0{,}5 = 3$ авт./ч, $L_{оч} = \rho^2\dfrac{1-\rho^m(m - m\cdot\rho + 1)}{(1-\rho)^2}p_0 = 4\dfrac{1-4(2-2\cdot 2+1)}{(1-2)^2}0{,}0625 =$ $= 1{,}33$, $L_{обс} = \rho{\cdot}Q = 2{\cdot}0{,}5 = 1$ авт., $L_{СМО} = L_{оч} + L_{обс} = 1{,}33 + 1 = 2{,}33$ авт., $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 1{,}33/6 = 0{,}22$ ч = = 13,2 мин, $T_{СМО} = L_{СМО}/\lambda = 2{,}33/6 = 0{,}39$ ч = 23,3 мин.

Т.о., доля потерянных заявок составляет 50% ($p_{отк} = 0{,}5$), тогда при $T_{раб} = 12$ ч кол-во потерянных заявок составит: $\lambda{\cdot}12{\cdot}0{,}5 = 6{\cdot}12{\cdot}0{,}5 = 36$, а потеря получки: $36{\cdot}70 = 2520$ руб., что, конечно, нежелательно.

Данную задачу решите при $\lambda = 4$, $\bar{t}_{обс} = 30$ мин, $m = 2$, $\mu = 3$ авт./ч, $c_1 = 70$ руб., $T_{раб} = 12$ ч, $n = 1$.

39(3) (окн-ая СМО с неогр-ой очередью). Булочная «Горячий хлеб» имеет одного контролера-кассира. В течение часа приходят в ср-ем 54 покупателя. Ср. стоимость одной покупки составляет 7 руб. Ср. время обс-ия контролером-кассиром одного покупателя составляет 1 мин. Опр-ть выручку от продаж, хркс-ки СМО и провести анализ ее работы.

Р. Имеем: $\lambda = 54$ ед./ч, $\mu = 60$ ед./ч, $n = 1$, $\bar{t}_{обс} = 1$. Находим: $\rho = \lambda/\mu = 0{,}9$. Вер-ть того, что конт.-кассир свободен: $p_0 = 1 - \rho = 0{,}1$. Вер. его занятости $p_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Ср. число покупателей в очереди $L_{оч} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1$ чел.; ср. число ож-ия в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda =$ $= 8{,}1{\cdot}60/54 = 9$ мин. Ср. время пребывания покупателя в булочной $T_{СМО} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = 9 + 1 = 10$ мин. Ср. число покупателей в булочной $L_{СМО} = L_{оч} + \rho = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0{,}9}{1-0{,}9} = 9$ чел. Вер-ть того, что в булочной ож-ют расчета в очереди к конт.-кассиру 1, 2, 3 чел., равна $p_1 = \rho(1-\rho) = 0{,}9(1-0{,}9) = 0{,}09$; $p_2 = \rho^2(1-\rho) = 0{,}9^2(1-0{,}9) = 0{,}081$; $p_3 = \rho^3(1-\rho) = 0{,}9^3(1-0{,}9) = 0{,}073$; вер-ть того, что ож-ют расчета конт.-кассира не более трех чел., равна $P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}09 + 0{,}081 + 0{,}073 = 0{,}244$.

Итак, доля вер-и простоя конт.-кассира составляет всего 10% ($p_0 = 0{,}1$) от продолжительности рабочего дня, однако время ож-ия покупателей $L_{CMO} = 9$ мин, поэтому следует уменьшить время обс-ия $\bar{t}_{обс}$, введя дпн-ый кассовый аппарат.

Решите анч-ую задачу: интенсивность потока автомобилей (авт.) на АЗС к колонке за бензином АИ-92 составляет 90 авт-ей в 1 ч, а ср. время заправки – 5 мин. Опр-ть хркс-ки СМО и провести анализ ее работы.

О: $\rho = 2{,}5 > 1$, АЗС не будет работать в стационарном режиме, значит, надо ввести еще одну колонку с бензином АИ-92 или уменьшить $\bar{t}_{обс}$ до 1,9, тогда $\rho = \lambda\cdot \bar{t}_{обс} = 0{,}95$, сд-но $\rho < 1$ и возможен стационарный режим работы в СМО.

40(3). В парикмахерской работает только один мужской мастер. Ср. время стрижки одного клиента составляет 20 мин. Клиенты в ср-ем приходят каждые 20 мин. Ср. стоимость стрижки 60 руб. Как в первую смену – с 9 до 15 часов, так и во вторую – с 15 до 21 часа работает по одному мастеру. Провести анализ работы СМО.

Р. Имеем: $\lambda = 2{,}4$ клиента/ч, $\bar{t}_{обс} = 20$ мин $= 1/3$ ч. Находим: $\rho = \lambda/\mu = \lambda\cdot \bar{t}_{обс} = 2{,}4\cdot 20/60 = 0{,}8$; $p_0 = 1-\rho = 1-0{,}8 = 0{,}2$; $p_{зан} = 1-p_0 = 1-0{,}2 = 0{,}8$; $L_{оч} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = 0{,}8^2/0{,}2 = 3{,}2$ клиента; $T_{оч} = L_{оч}/\lambda = 3{,}2/2{,}4 = 1{,}34$ мин; ср. время пребывания клиентов в СМО: $T_{смо} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = 1{,}34 + 20 = 21{,}34$ мин.

Т.о., система работает вполне уд-но. Поскольку $\rho < 1$, то режим работы устойчивый, 20% рабочего вр-и мастер не занят, а 80% занят работой, длина очереди 3,2 клиента – небольшая, а ср. время пребывания клиент в СМО всего 21,34 мин.

Задачу решить при $\lambda = 4$, остальные данные оставив без изменения.

41(3) (мкн-ая СМО с огр. длиной очереди). В минимаркет поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в мин, к-ых обс-ют три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. Длина очереди огр-на 5 покупателями. Опр-ть хркс-ки СМО и дать оценку ее работы.

Р. Имеем: $n = 3$, $m = 5$, $\lambda = 6$, $\mu = 2$, $\rho = \lambda/\mu = 3$, $\rho/n = 1$.

Используем фм-ы: $p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\cdot p_0$, $n \le r \le m$; $p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\cdot p_0 = p_{отк}$; $p_0 = \left[1+\dfrac{\rho}{1!}+\dfrac{\rho^2}{2!}+\ldots\right.$ $\left.\ldots + \dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\dfrac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}+\ldots+\dfrac{\rho^m}{n^m\cdot n!}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}+\dfrac{\rho^n}{n!}\cdot\dfrac{\rho/n-(\rho/n)^{m+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}\right.+$ $+\left.\dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\cdot\left(1-(\rho/n)^m\right)\right]^{-1}$. Вер-ти образования очереди $p_{оч} = \sum_{k=n}^{n+m-1} p_k = \dfrac{\rho^n}{n!}\cdot\dfrac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n}\cdot p_0$, отказа $p_{отк} = p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\cdot p_0$; $k = n+m$. Отс-я и абс-я пропускные способности $Q = p_{обс} = 1 - p_{отк}$ и $A = \lambda\cdot Q$; ср. число занятых и простаивающих кн-ов $\bar{n}_з = A/\mu = \rho\cdot Q$ и $\bar{n}_{пр} = n - \bar{n}_з$; коэф-ы занятости (использования) и простоя кн-ов $K_з = \bar{n}_з/n$ и $K_{пр} = 1 - K_з$; ср. число заявок на очереди $L_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\cdot\dfrac{1-(\rho/n)^m\cdot(m+1-m\cdot\rho/n)}{(1-\rho/n)^2}p_0$ ($\rho/n \ne 1$); ср. время ож-ия в очереди $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$ ($\rho/n \ne 1$); $T'_{оч} = L'_{оч}/\lambda$ ($\rho/n = 1$); ср. время пребывания заявки в СМО $T_{смо} = L_{оч}/\lambda - Q/\mu$ ($\rho/n = 1$).

Теперь находим вер-и простоя кн-ов $p_0 = \left[1+\dfrac{\rho}{1!}+\dfrac{\rho^2}{2!}+\dfrac{\rho^3}{3!}+\dfrac{5\rho^4}{3\cdot 3!}\right]^{-1} \approx 0{,}0282$; занятости 1-го, 2-х, 3-х кн-ов $p_1 = 3\cdot p_0 = 0{,}0846$; $p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!}\cdot p_0 = 4{,}5p_0 = 0{,}127$; $p_3 = \dfrac{\rho^3}{3!}\cdot p_0 = 4{,}5p_0 = 0{,}127$;

вер-ть того, что заняты обс-ем все три кн-а и пять мест в очереди: $p_8 = 0{,}127$, причем $\sum_{i=0}^{8} p_i = 1$.

Вер-ть отказа наступает при $k = m + n = 5 + 3 = 8$ и равна $p_8 = p_{отк} = 0{,}127$. Отс-я и абс-я проп. способности: $Q = 1 - p_{отк} = 0{,}873$ и $A = 0{,}873 \cdot \lambda = 5{,}24$ (покупателя в мин). Ср. число занятых кн-ов и ср. длина очереди равны $\overline{n}_з = \rho \cdot Q = 2{,}62$; $L'_{оч} = 1{,}9$ покупателя. Ср. время ож-ия в очереди и пребывания в СМО: $T_{оч} = L'_{оч}/\lambda \approx 0{,}32$ мин, $T_{смо} = \bar{t}_{обс} + Q/\mu \approx 0{,}76$ мин. Полученные результаты можно оценить только на уд-но.

Задачу решить при $n = 4$, остальные данные оставив без изменения.

42(3). На плодоовощную базу в ср-ем через 30 мин прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Ср. время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ож-и разгрузки не более 4 автомашин. Опр-ть показатели и дать оценку работы СМО.

Р. Имеем: $n = 2$, $m = 4$, $\lambda = 2$ авт./ч, $\mu = 2/3$ авт./ч, $\rho = \lambda/\mu = 3$, $\rho/n = 3/2 = 1{,}5$. Находим: $p_0 =$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n=2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot \left(1 - (\rho/n)^m\right)\right]^{-1} = \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{2!(2-3)} \cdot \left(1 - 1{,}5^4\right)\right]^{-1} = 0{,}0158;\ p_{отк} = p_{n+m} =$$

$$= p_6 = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0 = \frac{3^6}{2! \cdot 2^4} \cdot 0{,}0158 = 0{,}36;\ Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64;\ A = \lambda \cdot Q = 2 \cdot 0{,}64 =$$

$$= 0{,}28 \text{ авт./ч};\ \overline{n}_з = A/\mu = 1{,}92;\ K_з = \overline{n}_з/n = 192/2 = 0{,}96;\ L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho - n)^m \cdot (m + 1 - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} \cdot p_0 =$$

$$= \frac{3^3}{2! \cdot 2} \cdot \frac{1 - 1{,}5^4 \cdot (1 + 4 - 4 \cdot 1{,}5)}{(1 - 1{,}5)^2} \cdot 0{,}0158 \approx 2{,}6 \text{ авт.}$$

Итак, доля вр-и простоя грузчиков составляет всего 1,58%, а вер-ть отказа 36% (велика), коэф-т занятости 0,96, отс. пропускная способность всего 64%, ср. длина очереди = 2,6 авт., сд-но, СМО не справляется с выполнением заявок на обс-ие и нх-мо увеличить число бригад грузчиков и шире использовать возможности дебаркадера.

Задачу решить при $n = 3$, остальные данные оставив без изменения.

8. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Для того чтобы познать систему, нужно знать ее в целом и частях одновременно.

Н.М. Амосов

ЛЕКЦИЯ 23

8.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА И ИНСПЕКТИРОВАНИЕ

1°. Качественный статистический контроль и классификация контроля. Для борьбы с браком осуществляется контроль (кр.) качества (кач.) продукции при ее прз-ве и вводится система инспектирования (инсп.) технического (техн.) состояния эксплуатируемой продукции. Несмотря на различие задач этих разных типов кр-ля, методы, к-ми пользуются при их осуществлении, часто совпадают.

Кр. различают по колн-м признакам, по рсп-ю продукции по сортам и качественным (качн.) признакам. Рас-ие кр-ля по колн-м признакам (см. [47]), когда регистрируются точные зн-ия показателей и параметров аппаратуры и изделий, не яв-ся задачей данной гл-ы. Здесь рас-им качн-ый кр. по признаку «годен-негоден» или «исправно-дефектно» и кр. рсп-ия продукции по сортам. Причем в дальнейшем будем касаться в основном методов выборочного (вбрч.) кр-ля.

При вбрч. кр-ле генеральная (гнр.) совокупность (свк.) (в частном случае партия изделий) признается удщ-ей требованиям (годной), если кол-во (доля) дефектных изделий в ней меньше нек-ой ранее установленной нормы. В противном случае гнр. свк-ть должна подвергаться сплошной разбраковке (разбрк.) либо признаваться негодной. Поэтому организация (орг.) предусматривает опр-ую систему правил.

В правилах указывают: как орг-ся отбор изделий в выборку (вбр.); объем вбр-и; порядок увеличения объема, если по первой вбр-е решение не принято, или порядок браковки (брк.) при сл-ом объеме вбр-и; порядок разбрк-и партии или условия, при к-ых выборочный кр. продолжается.

Эти же правила или их часть соблюдаются при инсп-и кач-ва эксплуатируемой продукции. Приведем пример орг-и инсп-ия. Пусть на предприятие (прд.) поступило N однотипных изделий. В процессе эксплуатации часть из них отказала, была восстановлена ремонтными подразделениями и обслуживающим (обс.) персоналом. О состоянии изделий доложено вышестоящей орг-и, туда же поступили заявки на запасные детали и агрегаты для восстановления отказавших изделий. В опр-ый момент вышестоящая орг-я направляет на данное прд-е инсп-щую комиссию, к-ая должна отобрать сл-ным образом n изделий и проверить их. По состоянию проверенных изделий делается заключение обо всей гнр-ой свк-ти. Так обычно вышестоящие орг-и проверяют объективность сведений, предоставляемых прд-ми, эксплуатирующими изделия. Оценка проводится в баллах в зв-ти от наличия недостатков и дефектов проверенных изделий. При этом учитываются результаты кр-ля каждого изделия, т.о. работа зачастую орг-тся по схеме поштучного последовательного (посл.) кр-ля.

По классификации наиболее часто используются три вида кр-ля для качн. признака.

1. Однократная выборка. Из партии объемом N слн. образом отбирается n изделий. Если после проверки всех n изделий число неудщ-их требованиям техн-их условий $m \le m'$ (где m' – целое заданное приемочное число, m – слн. дефектное число при кр-е n изделий), то партия считается годной. Если же $m > m'$, то партия признается негодной.

2. Двукратная выборка. В партии объема N одним из методов слн-го отбора составляется первая вбр. n_1. Если после кр-ля всех n_1 образцов $m \le m'$, то гнр. свк-ть признается годной. Если $m > m'_2 > m'_1$, то партия брк-ся. Если же $m'_1 < m \le m'_2$, то назначается вторая вбр. объемом n_2. Когда число дефектных изделий в двух вбр-ах $m_1 + m_2 = m \le m'_3$, то гнр. свк-ть признается годной, если же $m > m'_3$, то партия брк-ся.

Преимуществом двойного кр-ля по сравнению с однократной вбр-ой яв-ся меньшее ср. число кр-мых изделий, что составляет 67-75% изделий, кр-мых при одиночном кр-е. Однако в орг-ом плане осуществление этого вида кр-ля несколько сложнее однократной вбр-ки.

3. Последовательный анализ. Если логически продолжим идею двойной вбр-ки, то придем к мнн-му посл-му кр-лю. При этом виде кр-ля из партии объемом N берется вбр. n_1. Опр-ся число дефектных изделий. Если $m \le m'_1$, то партия принимается, если же $m > m'_2 > m'_1$, то партия брк-ся. Если $m'_1 < m \le m'_2$, то отбор продолжается и опр-ся n_2 и т.д.

На i-м шаге, если $\sum_i m_i \le m'_i$, то партия принимается, если же $\sum_i m_i > m'_{i+1}$, то партия брк-ся. Если $m'_i < \Sigma m_i \le m'_{i+1}$, то берется сд. вбр-а объемом n_{i+1} и т.д.

Другой разновидностью посл-го анализа яв-ся поштучный кр. В этом случае последующая вбр. отличается от предыдущей на ед-у. После кр-ля каждого изделия принимается решение о приемке, брк-е или продолжении кр-ля партии.

Основное преимущество посл-го кр-ля состоит в том, что ср-й объем вбр-и составляет 50-67% объема при одиночном кр-е. Однако в орг-ом плане осуществление посл-го анализа более сложно, чем при первых двух видах кр-ля. Но нх-мо учитывать, что в ряде случаев, особенно при инсп-и изделий в условиях эксплуатации и при оценке их техн-го состояния, зачастую невозможно орг-ть кр-ль иначе, чем по плану поштучного посл-го кр-ля. Н-р, группа контролеров-инспекторов проверяет агрегаты и после кр-ля каждого из них докладывает руководителю о его состоянии (сст.). Руководитель должен принять решение об остановке кр-ля и оценке сст-ия агрегатов. Решение зв-т обычно от вел-ы доли неисправных агрегатов. Естественно, что в таких условиях целесообразно воспользоваться методикой посл-го анализа.

Стсч-й кр. позволяет установить кач-о продукции путем испытания (исп.) части изделий с гарантируемыми вер-ми α забрк-ть хорошую (годную) партию («риск поставщика») и β принять негодную партию («риск потребителя»), где α наз. ошибкой первого рода, β – второго рода. Для этого нх-мо провести оценку в диапазоне $\delta = q_1 - q_0$ зн-ия параметра q. Тогда надо выбрать одну из альтернативных гп-з H: $H_0 \equiv q = q_0$ и $H_1 \equiv q = q_1$. Выбранная гп. может быть верной или неверной (см. 5.1), поэтому возникает нх-сть ее проверки. Как раз при этом могут быть допущены ошибки двух родов: $\alpha = P(H_1|H_0)$ – условная вер. того, что принята гп. H_1, если на самом деле в гнр. свк-ти верна гп. H_0 и вер-ть ошибки второго рода $\beta = P(H_0|H_1)$, т.е. принята гп. H_0, если в самом деле в гнр. свк-ти верна гп. H_1.

Схема ошибок первого и второго рода позволяет заключить, что в каждой из них могут быть две ситуации.

1. Партия годная, мы можем принять ее с вер-ю $(1 - \alpha)$ и можем ошибочно забрк-ть с вер-ю α.

2. Партия выше нормы засорена дефектными изделиями, мы можем ее забрк-ть с вер-ю $(1 - \beta)$ и ошибочно принять с вер-ю β. Геом. инпц-ия этих ситуаций показана на рис. 1 с помощью фк-и $L(q)$ оперативной хркс-ки, к-ая представляет собой мт-ое врж-ие вер-ти принятия партии в зв-ти от доли дефектных изделий q в ее гнр-ой свк-ти (партии). Оперативная хркс. зв-т от объемов N – гнр-ой и n – вбрч-ой свк-ей.

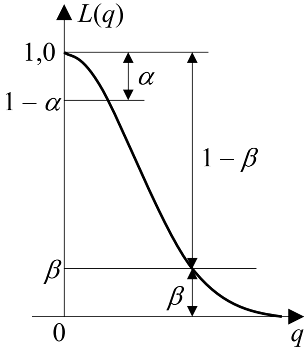


Рис. 1

Т.о., основные хркс-ки планов кр-ля удобно врж-ть как фк-и непр-ой вел-ы q, т.е. $L(q)$, причем $0 \le L(q) \le 1$. В то же время при инсп-и кач-а в процессе эксплуатации изделий и в ряде др-х ситуаций оценки производятся в баллах или др-х дк-ых ед-ах. Поэтому возникает необходимость перевода дк-ых оценок на общую непр. шкалу q.

2º. Переход от балльных оценок к непрерывной шкале на примере оценки технического состояния АСУП. В кач-е примера перехода от балльных оценок к непр-ой шкале можно было бы рас-еть приемку разносортной продукции и опр-ие кач-а нек-ых пищевых продуктов методом экспертных оценок.

Однако с учетом того, что в последние годы на базе бурного развития ЭВМ создаются и интенсивно внедряются в гос-ном масштабе всевозможные автз-ые системы типа АСОД, АСПР, ОГАС, АСУ, АСУП и т.д. (их хркс-ки см. в КС), в кач-е примера перехода от балльных оценок к непр-ой шкале приведем экспериментальные (экспл.) данные, полученные специалистами при оценке техн-го состояния АСУП – автоматизированной системы управления производством. Типы этих систем различны. Сложные автз-ые системы состоят из подсистем самого разнообразного назначения и конструкции. Главное требование к ним – выполнение возложенных на них функций. Если это требование не выполняется, то состояние подсистемы нельзя считать уд-ным. Однако у каждой подсистемы сущ-ет оговоренное число признаков, отсутствие к-ых может в нек-ых условиях привести к неисправности, но может и не привести. Эти признаки, к-ые в нек-ой ст-и снижают работоспособность подсистемы в экстремальных (эксл.) или др. случаях. В идеальных условиях все эти признаки могут находиться в пределах нормы.

Однако на практике при кр-е АСУП или ее подсистем наблюдаются (нбл.) различные отклонения (отк.) от норм, к-ые приводят к прекращению фнцр-ия системы или к угрозе аварии. Поэтому нх-мо оценить степень отк-ия. Обычно ст-нь отк-ия оценивается в баллах: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Эти оценки можно наз-ть скорее качн-ми, чем колн-ми. Если бы была возможность соотнести эти качн. оценки с нек-ой непр-ой колн. шкалой, то можно было бы связать полученную оценку с долей отк-ия расв-мых признаков от идеального состояния (сст.).

Поскольку АСУП давно сущ-ет в ряде отраслей промышленности, то к настоящему вр-и накоплен большой опыт кр-я техн-го сст-ия как систем в целом, так и их отдельных подсистем. При этом каждый эксперт имеет свое субъективное представление о том, за что он снижает баллы оценки.

Было установлено, что за «идеальную подсистему» (ед-у) принимается 100%. Мнения специалистов учитывались по 6 типам различных подсистем АСУП [19]. Границы критерия (кт.) для различных типов подсистем почти совпадали, т.е. тип подсистемы мало влиял на оценку. Поэтому можно объединить результаты опроса по всем типам подсистем, что приведены в табл. 1 при $n = 588$.

Таблица 1

Критерий $q\%$ / Оценка	Количество специалистов по диапазонам критерия													
	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	110
«5»	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	129	296	142	12
«4»	0	0	0	0	0	3	12	52	98	244	106	59	13	1
«3»	0	18	34	89	98	138	101	72	41	17	0	0	0	0

Проверка полученных результатов эмп-их рсп-й на сх-ть с норм. законом дала результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Оценка	Б%	$S_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$	$E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$
«5»	92	0,03	– 0,22
«4»	84	0,025	0
«3»	68	0,07	0

В табл. 2 обз-ют: Б% – ср. зн-ие кт-ия сст-ия подсистем АСУП, μ_3 и μ_4 – третий и четвертый центральный моменты, σ^3 и σ^4 – ср. кв. отк-ия в кубе и в четвертой степени.

Чтобы рас-еть порядок расхождения эмп-ой фк-и рсп-ия с норм. законом при полученных зн-ях коэф-ов асимметрии и эксцесса, использованы фм-ы Эджворта. Откуда можно заключить, что нижняя граница точности расчетов при n = 588 в данном эксп-те опр-ся по крайней мере числом $1/\sqrt{n}$ = 0,04.

Учитывая небольшие зн-ия коэф-ов асимметрии и эксцесса, можно заключить, что фактическая сх-ть рсп-й с норм-ым будет еще выше.

Т.о., можно сделать вывод, что мнения специалистов с дт-ой точностью опр-ся норм-ым рсп-ем со ср-им зн-ем на непр-ой оси оценок, указанным в табл. 2 в столбце Б%. Если принять ср. зн-ия кривых рсп-ия за границы между балльными оценками, то можно указать сд. ств-ие для градации оценок:

«2» ств-ет Б < 0,68;
«3» ств-ет Б = 0,68 – 0,84;
«4» ств-ет Б = 0,84 – 0,92;
«5» ств-ет Б ≥ 0,92.

Итак, установлено ств-ие между балльными оценками и непр. шкалой q в границах от нуля до ед-ы. Установленная подобным образом шкала оценивает при любой плж. оценке только работоспособное сст-ие АСУП и ее подсистем. При нарушении условий фнцр-ия системы оценка техн-го сст-ия ств-ет «неудовлетворительной». Кроме этой методики сущ-ют и др. методы.

3°. Статистический бездефектный контроль и инспектирование малых партий. На практике и в теории кт-ля кач-а продукции, когда решение о принятии или отбр-ке партии принимается в зв-ти от числа дефектных изделий среди отобранных для проверки, основным законом рсп-ия яв-ся гипергеометрический (гипергеом.).

Составим табл. 3 обз-й для гипергеом-го рсп-ия.

Таблица 3

Характеристика	Обозначения	
	выборка	партия
Количество изделий	n	N
Количество дефектных изделий	m	M
Количество годных изделий	$n - m$	$N - M$
Доля дефектных изделий	q	Q
Доля годных изделий	$1 - q$	$1 - Q$

з1. Имеется N иссл-мых объектов (изделий) с M дефектными изделиями. Слн-ым образом выбираются n изделий. Каждое проверенное изделие не возвращается в партию, т.е. вбр-а яв-ся безвозвратной. Найти вер-ть того, что среди n изделий будет m дефектных изделий (см. п11 из 4°: 1.1).

Р. В вбр-у могут попасть m негодных изделий, извлеченных C_M^m способами, и ($n - m$) годных изделий, извлеченных C_{N-M}^{n-m} способами. Тогда пзв-ие $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ опр-ет число благоприятствующих (блпщ.) сл-в, а C_N^n – общее число сл-в. Отсюда получим вер-ть того, что среди n изделий будет ровно m дефектных (закон гипергеом-го рсп-ия):

$$q_{m,n} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \quad (1)$$

Если $m = 0$ (т.е. при бездефектном контроле), то фм-а (1) упрощается:

$$q_{m,n} = q_{0,n} = \frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}. \quad (2)$$

Бездефектный кр. широко применяется в ряде отраслей. В случае очень малых партий (до 30 ед-ц) этот вид кр-я яв-ся единственным (едн.) допустимым, если мы хотим обеспечить высокую ст-нь доверия к полученным результатам.

Для успешного применения метода бездефектного кр-я нх-мо обеспечить контролера или инсп-щего компактными таблицами, пользуясь к-ми, можно принять решение без громоздких выч-й. Кроме табличного, сущ-ет графический (грфч.), а также аналитический виды кр-я с привлечением ств-их фм-л и стсч-их табл-ц, отражающих различные законы рсп-ия слн-х вел-н. Их рас-им далее.

Обз-им

$$q_в = M_в / N, \quad (3)$$

где $M_в$ ($q_в$) – верхняя доверительная граница для числа (доли) дефектных ед. в гнр. свк-ти.

Верхняя доверительная граница может быть опр-на из ур-ия

$$\gamma = 1 - \sum_{k=1}^{m'} q(N, n, M_в, k). \quad (4)$$

Если $m' = 0$, то

$$\gamma = 1 - \frac{C_{N-M_в}^n}{C_N^n}. \quad (5)$$

Выясним, как изменится ур. (5), если $N \to \infty$ при бездефектном кр-е, т.е. $C_{N-M_в}^n = C_N^n$.

$$1 - \gamma = \frac{C_{N-n}^n}{C_N^n} = \frac{(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-M_в+1)n!}{n!N(N-1)\ldots(N-M_в+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{N-M_в+1}\right),$$

тогда

$$\gamma = 1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{M_в} \text{ и } \frac{n}{N} = 1 - \sqrt[M_в]{1-\gamma}. \quad (6)$$

Если $N = 100$, точное зн. n/N, полученное по ур-ю (5), оказывается очень близким к результату, к-ый дает фм-а (6). При $30 \le N \le 100$ отн-ие n/N при заданных $M_в$ и γ изменяется очень мало, что видно из табл. 4 зн-й n/N при $\gamma \ge 0{,}90$ и $m = 0$.

Также из табл. 4 видно, что если опр-ять n/N по ур-ю (6), то объем вбр-и окажется с нек-ым запасом. Чем больше объем гнр-ой свк-ти, тем этот запас меньше. Т.о. для практических расчетов можно рекомендовать две табл-ы:

рассчитанную по фм-е (5) при $N \leq 30$ (см. табл. 5) и рассчитанную по фм-е (6) при $N > 30$ (см. табл. 6).

Таблица 4

$M_в$ \ N	30	60	80	100	∞
1	0,90	0,90	0,90	0,90	0,900
3	0,53	0,53	0,53	0,53	0,536
5	0,37	0,35	0,36	0,36	0,370
7	0,27	0,27	0,28	0,27	0,280
9	0,20	0,22	0,21	0,22	0,226
11	–	0,18	0,18	0,18	0,189

В табл. 5 в столбцах γ указывается истинное зн. доверительной вер-ти. Причем в ячейках, ств-их $M_в = 1$ для $N < 20$, отсутствуют зн-ия при $\gamma \geq 0,90$, т.к. не представляется возможным пользоваться вбрч-ым кр-ем малых партий изделий на основе гипергеом-го рсп-ия, если засоренность дефектными изделиями мала, требования к γ высокие. Если партии мало засорены, то и при низкой доверительной вер-ти, ств-ей 0,8, мнм-ые вбр. носят скорее теор-й, чем практический хрк-р. Табл. 5 позволяет проверяющему в ств-и со стоящими задачами самостоятельно выбрать рабочий участок.

Таблица 5

$M_в$	N	$0,90 > \gamma \geq 0,80$		$0,95 > \gamma \geq 0,90$		$\gamma \geq 0,95$	
		n	γ	n	γ	n	γ
1	10	8	0,800	–	–	–	–
	12	10	0,833	–	–	–	–
	14	12	0,857	–	–	–	–
	16	13	0,818	–	–	–	–
	18	15	0,833	–	–	–	–
	20	16	0,800	18	0,900	–	–
	22	18	0,818	20	0,909	21	0,955
	24	20	0,833	22	0,917	23	0,958
	26	21	0,808	24	0,923	25	0,962
	28	23	0,821	26	0,929	27	0,964
	30	24	0,800	27	0,900	29	0,966
2	7	4	0,857	–	–	5	0,952
	8	5	0,893	–	–	6	0,964
	9	5	0,833	6	0,917	7	0,972
	10	6	0,867	7	0,933	8	0,978
	12	7	0,848	8	0,909	9	0,955
	14	8	0,835	10	0,934	11	0,967
	16	9	0,825	11	0,917	12	0,950
	18	10	0,817	12	0,902	14	0,961
	20	11	0,811	14	0,921	15	0,947
	22	12	0,805	15	0,909	17	0,957
	24	13	0,801	16	0,899	18	0,946
	26	14	0,797	18	0,914	20	0,954
	28	16	0,825	19	0,905	22	0,960
	30	17	0,821	20	0,897	23	0,952
3	10	4	0,833	5	0,917	6	0,967
	12	5	0,841	6	0,909	7	0,955
	14	6	0,846	7	0,904	8	0,945

Продолжение табл. 5

$M_в$	N	$0,90 > \gamma \geq 0,80$		$0,95 > \gamma \geq 0,90$		$\gamma \geq 0,95$	
		n	γ	n	γ	n	γ
3	16	7	0,850	8	0,900	10	0,964
	18	7	0,798	9	0,897	11	0,957
	20	8	0,807	10	0,895	12	0,951
	22	9	0,814	12	0,922	13	0,946
	24	10	0,820	13	0,919	15	0,959
	26	11	0,825	14	0,915	16	0,953
	28	12	0,829	15	0,913	17	0,950
	30	12	0,799	16	0,910	18	0,946
4	14	5	0,874	6	0,930	7	0,965
	16	5	0,819	7	0,931	8	0,961
	18	6	0,838	8	0,931	9	0,959
	20	7	0,852	9	0,932	10	0,957
	22	7	0,813	9	0,902	11	0,955
	24	8	0,829	10	0,906	12	0,953
	26	8	0,795	11	0,909	13	0,952
	28	9	0,811	12	0,911	14	0,951
	30	10	0,823	13	0,913	15	0,950
5	18	5	0,850	6	0,908	7	0,946
	20	5	0,806	7	0,917	8	0,949
	22	6	0,834	8	0,924	9	0,951
	24	6	0,798	8	0,897	10	0,953
	26	7	0,823	9	0,906	11	0,954
	28	8	0,842	10	0,913	12	0,956
	30	8	0,815	11	0,918	13	0,957
6	20	5	0,871	6	0,922	7	0,956
	22	5	0,834	7	0,933	7	0,962
	24	5	0,798	7	0,908	8	0,967
	26	6	0,832	8	0,919	9	0,946
	28	6	0,802	8	0,897	10	0,951
	30	7	0,830	9	0,909	11	0,954
7	24	5	0,854	6	0,908	8	0,967
	26	5	0,823	7	0,923	8	0,952
	28	6	0,865	7	0,902	9	0,957
	30	6	0,830	8	0,916	10	0,962
8	28	5	0,842	6	0,897	8	0,960
	30	5	0,815	7	0,916	8	0,945
9	30	5	0,857	6	0,909	8	0,965

В табл. 6 зн-ия $M_в$ следуют только до 30. Когда $M_в > 30$, отн-ие n/N окажется меньше 0,10 и можно пользоваться бином-м рсп-ем.

Таблица 6

$M_в$ \ γ	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,999
1	0,800	0,900	0,950	0,975	0,990	0,999
2	0,553	0,684	0,776	0,842	0,900	0,968
3	0,415	0,536	0,632	0,708	0,785	0,900
4	0,331	0,438	0,527	0,602	0,684	0,822
5	0.275	0,369	0,451	0,522	0,602	0,749
6	0,235	0,319	0,393	0,459	0,536	0,684
7	0,205	0,280	0,348	0/410	0,482	0,627

Продолжение табл. 6

$M_в$ \ γ	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,999
8	0,182	0,250	0,312	0,379	0.438	0,578
9	0,164	0,226	0,283	0,336	0,401	0,336
10	0,149	0,206	0,259	0,308	0,369	0,499
11	0,136	0,189	0,238	0,285	0,342	0,466
12	0,126	0,175	0,221	0,265	0,319	0,438
13	0,116	0,162	0,206	0,247	0,298	0,412
14	0,109	0,152	0,193	0,232	0,280	0,389
15	0,102	0,142	0.181	0,218	0,264	0,369
16	0,0957	0,134	0,171	0,206	0,250	0,351
17	0,0903	0,127	0,162	0,195	0,237	0,334
18	0,0855	0,120	0,153	0,185	0,226	0,319
19	0,0812	0,114	0,146	0,176	0,215	0,305
20	0,0773	0,109	0,139	0,168	0,206	0,292
21	0.0738	0,104	0,133	0,161	0,197	0,280
22	0,0705	0,0994	0,127	0,154	0,189	0,269
23	0,0676	0,0953	0.122	0,148	0,181	0,259
24	0,0649	0,0915	0,117	0,142	0,175	0,250
25	0,0623	0,0880	0,113	0,137	0,168	0,241
26	0,0600	0,0848	0,109	0,132	0,162	0,233
27	0,0579	0,0817	0,105	0,128	0,157	0,226
28	0,0559	0,0789	0,101	0,123	0,152	0,219
29	0,0540	0,0763	0,0981	0,119	0,147	0,212
30	0,0522	0,0739	0,0950	0,116	0,142	0,206

Табл. 5 и 6 позволяют решать задачи трех типов.

а. Планирование (плн.) эксп-та. Заданы N, $M_в$ ($q_в$), γ. Найти объем вбр-и n.

б. Проверка ств-ия полученной в эксп-те мкс-ой засоренности партии дефектными изделиями допустимой засоренности, при к-ой еще соблюдается заданная доверительная вер-ть. Даны N, n, γ. Найти $M_в$ ($q_в$).

в. Проверка ств-ия полученной в эксп-те доверительной вер-ти заданной вел-не. Даны N, n, $M_в$. Найти γ.

Рас-им примеры по указанным типам задач.

п1а. На заводе изготовлено 26 метеорологических приборов для зондирования воздуха на Дальнем Севере. Из них не менее 21 нх-мо запускать. Пять приборов яв-ся запасными. Требуется опр-ть, каким должен быть объем вбр-и для бездефектного кт-ля на заводе, чтобы с доверительной вер-ю 0,8 и 0,9 утв-ть, что для выполнения поставленной задачи дт-но отправить на север 26 приборов.

Р. Имеем: $N = 26$, $M_в = 5$, $\gamma_1 = 0,8$, $\gamma_2 = 0,9$. Найдем: n_1, n_2. По табл. 5 для $M_в = 5$ и $N = 26$ опр-ем: $n_1 = 7$ при $\gamma = 0,823 > 0,8$ и $n_1 = 9$ при $\gamma = 0,906 > 0,9$. О: При доверительной вер-ти, равной 0,823, можно принять для бездефектного кт-ля на заводе 7 приборов, а при $\gamma = 0,906$ – 9 приборов.

п2а. В условиях п1а, но $N = 60$, $M_в = 10$ при $\gamma \geq 0,90$ найти n.

Р. По табл. 6 для $M_в = 10$ находим $n/N = 0,206$. Откуда $n = 0,206 \cdot N = 0,206 \cdot 60 = 12,36$. О: Нх-мо провести на заводе бездефектный кт. 13 приборов.

п3б. Создано 28 объектов. При вбрч-ом приемочном кт-е проверяется 9 объектов. Партия принимается, если в вбр-е не окажется ни одного дефектного объекта. Требуется опр-ть с доверительной вер-ю не менее 0,8, какая доля брака может оказаться в принятой партии.

Р. Имеем: $N = 28$, $n = 9$, $\gamma \geq 0{,}8$. Найдем $q_в$. По табл. 5 находим для $N = 28$ и $n = 9$ при $\gamma = 0{,}811$, что $M_в = 4$. Тогда $q_в = M_в / N = 4/28 \approx 0{,}143$. О: Верхняя доверительная граница равна 0,143.

п4б. Условия п3б, но $N = 100$, $n = 26$, $\gamma = 0{,}95$. Найти $q_в$.

Р. Находим $n/N = 0{,}26$. По табл. 6 для $\gamma = 0{,}95$ и ближайшему зн-ю n/N, к-ое в табл. равно 0,259, опр-ем $M_в = 10$, отсюда $q_в = M_в / N = 0{,}10$. О: В принятой партии может оказаться до 10% брака.

п5в. Для 21 пункта связи выпущена партия из 25 коммутаторов. Проверено 11, ни один не отказал. Требуется опр-ть, можно ли прекратить проверку, чтобы с доверительной вер-ю не ниже 0,9 утв-ть, что будет обеспечена работоспособность 21 пункта связи.

Р. Имеем: $N = 25$, $n = 11$, $M_в = 25 - 21 = 4$, $\gamma > 0{,}9 = ?$ По табл. 5 для данных между $N = 24$ и $N = 26$ в колонке $0{,}90 \leq \gamma < 0{,}95$ при $M_в = 4$ находим подходящее зн. $n = 11$, при к-ом можно получить $\gamma > 0{,}9$. О: С доверительной вер-ю не ниже 0,9 можно принять решение о прекращении исп-й, т.к. партия коммутаторов в состоянии обеспечить работу 21 пункта связи.

п6в. По техн. условиям (ТУ) предусмотрены исп-ия вбр-и объемом в 22 изделия. Все проверенные изделия оказались годными. По ТУ допускается не более 14% дефектных изделий. Требуется опр-ть, будет ли обеспечена доверительная вер-ть $\gamma = 0{,}95$ того, что партия в 200 изделий уд-ет ТУ.

Р. Имеем: $N = 200$, $n = 22$, $M_в = q_в \cdot N = 0{,}14 \cdot 200 = 28$, $\gamma \geq 0{,}95 = ?$ По табл. 6 для $M_в = 28$ в колонке $\gamma = 0{,}95$ находим $n/N = 0{,}101$. Опр-ем нх-ю вбр-у для обеспечения $\gamma = 0{,}95$: $n = 0{,}101 \cdot 200 = 20{,}2$. О: Для обеспечения доверительной вер-ти 0,95 дт-но было бы вбр-и в 21 изделии, к-ая меньше объема вбр-ки, предусмотренного ТУ. Значит, $\gamma > 0{,}95$. Для обеспечения $\gamma = 0{,}95$ можно поставить вопрос об изменении ТУ и установлении по ТУ объема вбр-и для бездефектного кр. в 21 изделии.

4°. Статистический контроль и инспектирование больших партий. Разделение гнр-ых свк-ей на большие и малые яв-ся весьма условным. Однако установлено, что при $n/N \leq 0{,}10$ для решения ряда задач можно пользоваться бином-м рсп-ем, а в нек-ых сл. и законом Пуассона.

Будем считать, что вбр. небольшая, если сумр-ый объем вбр-к не превзойдет 10% гнр-ой свк-ти. При этом нх-мо установить, когда можно будет использовать бином-ое рсп. и когда – рсп-ие Пуассона. Для этого следует выч-ть вторые и третьи моменты, с помощью к-ых опр-ся расхождение среднеквч-их отк-й и коэф-ов асимметрии данных законов.

Напомним фм-ы нач-ых моментов s-го порядка дк-ых (непр-ых) слн. вел-н

$$v_s[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \quad \left(v_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx \right), \qquad (7)$$

где $v_1 = M[X] = m_x$ – мт. ож-ие. Для цтрв-ых слн. вел-н получим

$$\mu_s[x] = \mathrm{M}[\overset{o}{X}{}^{s}] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s p_i \quad \left(\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^s f(x)dx\right), \tag{8}$$

где $\mu_2 = D[x]$ – дисперсия.

Ф-лы ср. кв. отк-ия σ_x, асимметрии S_x и эксцесса E_x слн. вел-ы X имеют виды

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D[X]},\ S_x = \frac{\mu_3}{\sigma^3},\ E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{9}$$

Приведем также фм-ы бином-го рсп-ия

$$q_n(m) = q(n, q, m) = C_n^m q^m p^{n-m}; \tag{10}$$

$$v_1 = M(m) = nq,\ \mu_2 = D(m) = \sigma^2(m) = nqp,\ \mu_3 = (p-q)nqp, \tag{11}$$

где v_1 – ср. число дефект. изделий,

$$S_m = \frac{p-q}{\sqrt{npq}} \tag{12}$$

и пуассоновского рсп-ия

$$q_n(m) = \frac{(nq)^m}{m!}e^{-nq} = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \tag{13}$$

$$v_1 = M(m) = nq,\ \mu_2 = D(m) = \sigma^2(m) = nq,\ \mu_3 = nq, \tag{14}$$

$$S_m = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{nq}{(nq)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{nq}}. \tag{15}$$

Используя ф-лы (9), (11) и (14), выч-им коэф-т:

$$\beta_1 = \frac{\sigma_б}{\sigma_П} = \frac{\sqrt{nqp}}{\sqrt{nq}} = \sqrt{p} = \sqrt{1-q}, \tag{16}$$

где $\sigma_б$ и $\sigma_П$ – ср. кв. отк-ие бином-го рсп-ия и закона Пуассона.

Разделим (12) на (15) и получим:

$$\beta_2 = \frac{S_б}{S_П} = \frac{(p-q)\sqrt{nq}}{\sqrt{nqp}} = \frac{p-q}{\sqrt{p}} = \frac{p-q}{\sqrt{1-q}} = \frac{1-2q}{\sqrt{1-q}}. \tag{17}$$

Представим на табл. 7 коэф-ы β_1 и β_2, н-р, для зн-й $q \in [0{,}005;\ 0{,}32]$ и рас-им хркс-ки рассеивания законов рсп-ия при различных q.

Таблица 7

q	β_1	β_2	q	β_1	β_2
0,32	0,825	0,436	0,10	0,949	0,843
0,30	0,837	0,478	0,08	0,959	0,876
0,25	0,866	0,577	0,05	0,975	0,923
0,20	0,884	0,671	0,04	0,980	0,940
0,16	0,917	0,742	0,03	0,985	0,954
0,15	0,922	0,760	0,02	0,990	0,970
			0,01	0,995	0,985
			0,005	0,998	0,992

Из табл. 7 при $q = 0{,}10$ и 0,05 получим, что хркс-ки рассеивания отличаются ств-но на $1 - \sqrt{1-q} = 1 - \beta_1 = 1 - 0{,}949 \approx 0{,}05 = 5\%$ и $1 - \beta_1 = 1 - 0{,}975 = 0{,}025 = 2{,}5\%$. Значит, если принять хркс-ки рассеивания закона Пауссона $\sigma_П$ за $\sigma_б$, то ошибка не превысит 2,5%, а при q еще меньших, н-р, 0,005, разница составляет $1 - \beta_1 = 1 - 0{,}992 = 0{,}002 = 0{,}2\%$. Т.о., чем меньше q, тем точнее результат.

Коэф-ы асимметрии отличаются при $q = 0{,}10$ на 16% $\approx 0{,}157 = 1 - 0{,}843$, а при $q = 0{,}05$ – на 8%. Далее, чем меньше q, тем точнее результат с учетом асимметрии рсп-ия. Так при $q = 0{,}005$ отн-ие составит только $0{,}8\% = 0{,}008 = 1 - 0{,}992$.

Кроме того, исходя из фм-ы (15), можно заключить, что чем больше ср. число интересующих нас сб-й (nq), тем меньше асимметрия.

Нек-ые авторы утв-ют, что рсп-ие Пуассона сх-ся с бином-м при $q \le 0{,}10$. Однако анализ табл. 7 показывает, что нх-ма осторожность, поэтому рекомендуется переход от бином-го рсп-ия к рсп-ю Пуассона при $q \le 0{,}05$. Это будет учитываться при расчете таблиц.

По анг-и с предыдущим пунктом приведем расчеты зн-й $q_в$. Естественно, что при $\nu = \text{const}$ и изменении n вел-а $q_в$ будет меняться в широком диапазоне. Рас-им поэтому вел-у

$$Q = nq_в.$$

Оказывается, при заданном зн-и ν и фиксированном (фксн.) m величина Q сравнительно мало изменяется при $n \to \infty$. Сд-но, на практике удобно воспользоваться вместо громоздких таблиц для бином-го рсп-ия и рсп-ия Пуассона простыми общими табл., пригодными сразу для двух законов, часто используемых при инсп-и стсч-ом кр-е.

Особенностью предлагаемых таблиц яв-ся наличие колонки, обз-ной $q_в = 0$. Она ств-ет закону Пуассона. Использование кт-я Q не вызывает затруднения.

Для $m = 0$ составлена табл. 8. Табл. 9, 10, 11 рассчитаны для часто применяемых зн-й доверительных вер-тей 0,90; 0,95 и 0,995, в к-ых входами яв-ся два параметра: m и $q_в$. В табл. 8 входами яв-ся ν и $q_в$. Точность таблиц в колонках $q_в = 0$ ств-ет 0,01, а в остальных колонках – 0,05, кроме табл. 8, где всем зн-ям ств-ет точность 0,01.

Таблица 8

γ \ $q_в$	0	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,80	1,61	1,57	1,53	1,45	1,36	1,27	1,16
0,85	1,90	1,85	1,80	1,70	1,60	1,49	1,37
0,90	2,30	2,26	2,19	2,06	1,94	1,80	1,60
0,95	3,00	2,92	2,85	2,69	2,52	2,35	2,16
0,96	3,22	3,13	3,06	2,88	2,71	2,52	2,33
0,97	3,51	3,42	3,34	3,14	2,95	2,75	2,53
0,98	3,91	3,81	3,71	3,51	3,29	3,07	2,82
0,99	4,61	4,48	4,38	4,13	3,88	3,61	3,32
0,995	5,30	5,16	5,04	4,76	4,46	4,15	3,82
0,999	6,91	6,74	6,56	6,19	5,81	5,41	4,99
0,9995	7,60	7,41	7,22	6,81	6,41	5,95	5,40
0,9999	9,21	8,99	8,75	8,24	7,76	7,22	6,65

Таблица 9

Значения $Q = nq_в$ при $\gamma = 0,90$

m \ $q_в$	0	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0	2,30	2,25	2,20	2,05	1,95	1,80	1,65
1	3,89	3,80	3,70	3,55	3,45	3,25	3,05
2	5,33	5,20	5,15	4,95	4,80	4,60	4,40
3	6,68	6,60	6,50	6,30	6,10	5,90	5,65
4	8,00	7,90	7,80	7,60	7,35	7,10	6,85
5	9,30	9,20	9,10	8,80	8,60	8,35	8,05
6	10,63	10,40	10,30	10,10	9,80	9,55	9,25
7	11,78	11,60	11,55	11,25	11,00	10,75	10,45
8	13,00	12,90	12,80	12,55	12,30	11,90	11,55
9	14,20	14,00	13,95	13,65	13,40	13,05	12,75
10	15,44	15,25	15,20	14,80	14,45	14,20	13,85
11	16,60	16,50	16,40	16,10	15,60	15,30	15,00
12	17,84	17,60	17,50	17,20	16,80	16,45	16,10
13	19,00	18,90	18,80	18,40	18,00	17,60	17,20
14	20,17	20,00	19,90	19,60	19,15	18,80	18,35

Таблица 10

Значения $Q = nq_в$ при $\gamma = 0,95$

m \ $q_в$	0	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0	3,00	2,90	2,85	2,70	2,50	2,35	2,15
1	4,74	4,65	4,55	4,35	4,10	3,95	3,70
2	6,30	6,20	6,10	5,85	5,60	5,35	5,10
3	7,75	7,65	7,55	7,30	7,00	6,70	6,40
4	9,15	9,00	8,95	8,65	8,30	8,00	7,70
5	10,51	10,45	10,30	10,00	9,65	9,30	8,95
6	11,84	11,75	11,60	11,25	10,90	10,55	10,20
7	13,15	13,00	12,85	12,50	12,15	11,80	11,45
8	14,43	14,25	14,05	13,75	13,45	13,05	12,65
9	15,71	15;55	15,35	15,05	14,65	14,25	13,80
10	16,96	16,80	16,60	16,25	15,85	15,45	15,00
11	18,21	18,00	17,85	17,45	17,00	16,60	16,15
12	19,44	19,30	19,15	18,75	18,25	17,80	17,35
13	20,67	20,45	20,25	19,85	19,45	19,00	18,50
14	21,89	21,65	21,40	21,05	20,65	20,15	19,65
15	23,10	22,90	22,70	22,30	21,80	21,25	20,75
16	24,30	24,05	23,80	23,40	22,95	22,45	21,95
17	25,50	25,25	25,05	24,60	24,15	23,60	23,10
18	26,69	26,45	26,25	25,85	25,30	24,75	24,20
19	27,88	27,70	27,50	27,00	26,45	25,85	25,25
20	29,06	28,80	28,55	28,10	27,65	27,05	26,50

Таблица 11

Значения $Q = nq_в$ при $\gamma = 0{,}995$

m \ $q_в$	0	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0	5,30	5,15	5,05	4,75	4,45	4,15	3,80
1	7,43	7,25	7,10	6,75	6,40	6,00	5,60
2	9,27	9,10	8,90	8,50	8,10	7,70	7,20
3	10,98	10,80	10,60	10,15	9,70	9,25	8,75
4	12,59	12,40	12,20	11,70	11,20	10,70	10,20
5	14,15	14,00	13,80	13,25	12,70	12,15	11,60
6	15,66	15,50	15,30	14,70	14,10	13,50	12,90
7	17,13	16,90	16,65	16,10	15,50	14,90	14,25
8	18,58	18,25	18,00	17,50	16,90	16,25	15,60
9	20,00	19,75	19,50	18,95	18,30	17,60	16,90
10	21,40	21,10	20,80	20,25	19,60	18,95	18,15
11	22,78	22,50	22,20	21,65	20,95	20,15	19,45
12	24,14	23,85	23,55	22,95	22,25	21,50	20,70
13	25,50	25,20	24,90	94,30	23,60	22,75	21,90
14	26,84	26,55	26,25	25,55	24,80	24,05	23,20
15	28,16	27,80	27,50	26,75	26,00	25,20	24,45
16	29,48	29,15	28,80	28,00	27,25	26,50	25,60
17	30,79	30,40	30,05	29,30	28,55	27,70	26,85
18	32,09	31,70	31,30	30,50	29,80	28,95	28,05
19	33,38	33,00	32,60	31,80	31,00	30,20	29,35
20	34,67	34,30	33,90	33,05	32,20	31,40	30,50

В приведенных табл-х расв-ся связь между четырьмя хркс-ми m, n, v, $q_в$. Значит, по аналогии с пунктом 3° можно заключить, что эти табл. позволяют решать задачи четырех типов.

α. Планирование эксп-та. Дано: v, m и $q_в$. Найти n.

β. Опр-ие доверительной вер-ти, т.е. опр-ть вер-ть появления хотя бы одного сб-ия в серии из n опытов (если $m = 0$, то используем табл. 8). В этом случае дано: m, n и $q_в$,. Найти v.

γ. Опр-ие числа сб-й m. Дано: n, $q_в$, и v. Найти m.

δ. Опр-ие предельной засоренности гнр-ой свк-ти дефектными изделиями. Заданы n, m и v. Требуется опр-ть $q_в$.

Рас-им примеры по указанным типам задач.

п7*α*. Приемка изделий производится по результатам исп-й на надежность. Вер-ть отказа не должна превосходить $q_в = 0{,}075$. Требуется опр-ть мнм. число изделий, подлежащих кр-ю, чтобы подтвердить заданную надежность с доверительной вер-ю 0,95.

Р. Для опр-ия мнм-ой вбр-и приняли, что число отказов во время исп-й равно нулю, значит условия сд-ие: $m = 0$, $q_в = 0{,}075$, $v = 0{,}95$; $n = ?$ По табл. 8 для $v = 0{,}95$ интерполяцией (инп.) зн-ия в столбцах 0,05 и 0,10, т.е. 2,92 и 2,85, находим $Q = 2{,}885$. По $Q = nq_в = 2{,}885$ находим $n = 2{,}885/0{,}075 \approx 38{,}5 \approx 39$. О: Мнм. число изделий равно 39.

п8α. По условиям п7α требуется найти объем вбр-и, если при исп-ях допускается: а) не более одного отказа; б) не более двух отказов.

Р. Имеем: а) $m = 1$; б) $m = 2$; $v = 0{,}95$; $q_в = 0{,}075$; $n_1 = ?$, $n_2 = ?$ По табл. 10 путем инп-и находим $Q_а = \dfrac{4{,}65 + 4{,}55}{2} = 4{,}6$ и $Q_б = \dfrac{6{,}2 + 6{,}1}{2} = 6{,}15$. Отсюда $n_1 = \dfrac{Q_а}{q_б} = \dfrac{4{,}6}{0{,}075} \approx 61{,}3 = 62$, $n_2 = \dfrac{6{,}15}{0{,}075} = 82$. О: Если при исп-ях допускается не более одного отказа, то объем вбр-и равен 62, а если допускаются два отказа – 82 изделиям.

п9α. Партия изделий принимается по плану двукратной вбр-и вторым сортом, если в ней доля дефектных изделий не превосходит $q_в = 0{,}05$. При исп-ях 40 изделий обнаружили 2 дефектных, что превосходит первое приемочное число. Требуется опр-ть мнм-ый объем дпл-ой вбр-и, чтобы с доверительной вер-ю 0,90 можно было утв-ть, что данную партию можно принять вторым сортом.

Р. Имеем: $m = 2$, $v = 0{,}90$, $q_в = 0{,}05$, $n_1 = 40$; $n_2 = ?$

1. Выдвигаем гипотезу, что при продолжении исп-ий новых дефектных изделий не будет обнаружено.

2. По табл. 9 для $q_в = 0{,}05$ при $m = 2$ опр-ем $nq_в = 5{,}20$.

3. $n = 5{,}20/0{,}05 \approx 104$.

4. При условии, что дальнейшие исп-ия не приведут к обнаружению дефектного изделия, можно считать, что мнм. дпн-ая вбр-а $n_2 = n - n_1 = 104 - 40 = 64$.

зм1. Предложенные табл. пригодны также для решения различных стсч-их задач, не связанных с приемочным кр-ем.

п10α. Вер-ть появления брн-ой детали равна 0,05. Надо опр-ть, при каком числе изготовленных деталей вер-ть появления хотя бы одной негодной равнялась бы 0,995.

Р. Имеем: $q_в = 0{,}05$, $v = 0{,}995$, $m = 0$, $n = ?$ По табл. 8 находим $Q = nq_в = 5{,}16$. Отсюда $n = 5{,}16/0{,}05 = 103{,}2 \approx 104$. О: При выпуске 104 деталей вер-ть появления хотя бы одной брн-ой равна 0,995.

п10β. Вер-ть отказа в единичном опыте равна 0,05. Требуется опр-ть вер-ть получения хотя бы одного отказа, если будет проведена серия из 45 опытов.

Р. Имеем: $m = 0$, $q_в = 0{,}05$, $n = 45$. Найти v. Находим $Q = nq_в = 45 \cdot 0{,}05 = 2{,}25$. По табл. 8 для $q_в = 0{,}05$ и $Q = 2{,}25$ находим $v = 0{,}90$.

п11γ. Условия эксплуатации позволяют огр-ся проверкой только 37 приборов. Мкс. доля неисправных приборов данного типа, допускаемая по всей гнр-ой свк-ти, не более 10%. Требуется опр-ть при доверительной вер-ти 0,9, сколько отказов можно допустить при вбр-е в 37 приборов.

Р. Имеем: $n = 37$, $v = 0{,}90$, $q_в = 0{,}10$. Найти m. По табл. 9 для $Q = nq_в = 37 \cdot 0{,}1 = 3{,}7$ при $q_в = 0{,}10$ находим $m = 1$. Значит, при данных условиях кт-ля допускается не более одного отказа из 37 приборов.

п12δ. По ТУ кр-ль вбр-и объемом 237 штук из числа выпускаемых эл-ов допускает появление одного отказа. Доверительная вер-ть опр-на ТУ вел-ой

0,95. Требуется опр-ть мкс-ю засоренность партии неисправными эл-ми, если объем партии более чем в 20 раз превосходит вбр-ку.

Р. Имеем: $v = 0,95$, $m = 1$, $n = 237$. Найти $q_в$. Применим метод проб. По табл. 10 для $m = 1$ и $q_в = 0,05$ опр-ем $n_1 = 4,65/0,05 = 93$. Значит, $n_1 < n$. Нх-мо вбр-ть зн-ие Q левее, т.е. в столбце $q_в = 0$. Находим $Q = n \cdot q_в = 4,74$. Отсюда $q_в = Q/n = 4,74/237 = 0,02$. О: Мкс-ая засоренность партии дефектными эл-ми не должна быть больше 2%.

зм2. Рас-ные практические примеры позволяют судить о возможностях использования приведенных табл. 8-11, когда имеем дело с вбр-ой, объем к-ой яв-ся неслн. вел-ой. Однократная и двукратная вбр-и принципиально отличаются от посл-го анализа (см. в 8.2), где объем вбр-и яв-ся слн. вел-ой.

ЛЕКЦИЯ 24

8.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1°. Основные формулы контроля качества при однократной и двукратной выборках. До сих пор мы расв-ли стсч-й кр. кач-ва при однократной и двукратной вбр-ах, использовав табличный способ кр-я и инсп-ия. Однако сущ-ют аналитический (ств. фм-ми) и графический (грфч.) способы кр-я кач-ва, к рас-ю к-ых и приступим.

Напомним, что стсч-й кр. позволяет установить кач-о продукции путем исп-ия части изделий с гарантируемыми вер-ми α забрк-ть хорошую партию («риск поставщика») и β принять негодную партию («риск потребителя»).

Партия считается хорошей, если параметр, хркз-й кач-о партии, не превзойдет нек-ое граничное зн-ие, и негодной, если этот параметр имеет зн-ие не ниже нек-го др-го граничного зн-ия.

Параметром, хркз-им кач-о партии, может быть или число l дефектных изделий в партии (границы l_0 и $l_1 > l_0$), или ср. зн-ие ξ и λ параметра и партии (границы ξ_0 и $\xi_1 > \xi_0$ или λ_0 и $\lambda_1 > \lambda_0$), или (при кр-е одн-сти продукции) дсп-ия параметра в партии (границы σ_0^2 и $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$); в том случае, когда кач-о партии улучшается с ростом зн-ия параметра, ств-щие нерав-ва должны быть заменены на противоположные.

При однократной вбр-е опр-ся объем вбр-и n_0 и приемное число v; если в вбр-е зн-ие контролируемого (крум.) параметра $M \le v$, то партия принимается, если $M > v$, то брк-ся.

Если контролируется (крут.) число (доля) дефектных изделий в вбр-е объема n_0, общее число дефектных изделий в партии L, а объем партии N, то

$$\alpha = P(M > v|L = l_0) = 1 - \sum_{m=0}^{v} \frac{C_{l_0}^m C_{N-l_0}^{n_0-m}}{C_N^{n_0}},$$

$$\beta = P(M \le v|L = l_1) = \sum_{m=0}^{v} \frac{C_{l_1}^m C_{N-l_1}^{n_0-m}}{C_N^{n_0}},$$

где зн-ия C_n^m берут из табл. T_{22} приложения.

При $n_0 \le 0{,}1N$ возможен прж-ый переход к бином. закону рсп-ия

$$\alpha = 1 - \sum_{m=0}^{v} C_{n_0}^m p_0^m (1 - p_0)^{n_0-m} = 1 - P(p_0, n_0, v),$$

$$\beta = \sum_{m=0}^{v} C_{n_0}^m p_1^m (1 - p_1)^{n_0-m} = P(p_1, n_0, v),$$

где $p_0 = l_0/N$, $p_1 = l_1/N$, а зн-ия $P(p, n, v)$ можно взять из табл. 9 из 4°: 8.1.

Если $n_0 \le 0{,}1N$ и $p_0 < 0{,}1$, $p_1 < 0{,}1$, то, положив $a_0 = n_0p_0$, $a_1 = n_0p_1$ (переходя к закону рсп-ия Пуассона), получим

$$\alpha = \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a_0^m}{m!} e^{-a_0} = 1 - P(\chi^2 \ge \chi_{q0}^2),$$

$$\beta = 1 - \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{a_1^m}{m!} e^{-a_1} = P(\chi^2 \geq \chi_{q1}^2),$$

где $\chi_{q0}^2 = 2a_0$, $\chi_{q1}^2 = 2a_1$, $\sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ даны в табл. T_4, T_{19}, а вер-ти $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ могут быть получены из табл. T_8 при числе ст-ей свободы $k = 2(\nu + 1)$.

Если $50 \leq n_0 \leq 0{,}1N$, $n_0p_0 \geq 4$, то можно пользоваться еще более удобными фм-ми

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\nu - n_0p_0 + 0{,}5}{\sqrt{n_0p_0(1-p_0)}}\right), \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{n_0p_1 - \nu - 0{,}5}{\sqrt{n_0p_1(1-p_1)}}\right),$$

где $\Phi(z)$ – фк. Лапласа (см. табл. T_2, T_{11}).

Если крут-ся ср. зн-ие $\widetilde{x} = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n} x_i$ параметра в вбр-е, зн-ие параметра x_i подчиняется норм. закону рсп-ия с известной дсп-ей σ^2, то

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\nu - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right), \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\xi_1 - \nu}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right).$$

При $\xi_0 < \xi_1$ партия принимается, если $\widetilde{x} \geq \nu$; брк-ся, если $\widetilde{x} < \nu$, а в фм-ах для α и β знак минус перед вторым членом заменяется на плюс.

Если крум-й параметр имеет плотность вер-ти $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, то

$$\alpha = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q0}^2),\ \beta = P(\chi^2 \geq \chi_{q1}^2),$$

где $\chi_{q0}^2 = 2n_0\lambda_0\nu$, $\chi_{q1}^2 = 2n_0\lambda_1\nu$, а вер-ть $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ опр-ся по табл. T_8 при $k =$ $= 2n_0$ ст-ях свободы.

Если $n_0 > 15$, то прж-но

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\chi_q^2 - 2n_0}{2\sqrt{n_0}}\right).$$

Если крут-ся одн-сть продукции, а параметр, хркз-й кач-о изделия, нормален, то

$$\alpha = 1 - P(\widetilde{\sigma} \leq q_0\sigma_0),\ \beta = P(\widetilde{\sigma} \leq q_1\sigma_1),$$

где $q_0 = \frac{\nu}{\sigma_0}$, $q_1 = \frac{\nu}{\sigma_1}$, $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, если мт. ож-ие $\bar{x}$ известно, или

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2,$$

если $\bar{x}$ неизвестно. Вер-ти $P(\widetilde{\sigma} \leq q\sigma)$ выч-ся по табл. T_5 при $k = n_0$ ст-ях свободы, если $\bar{x}$ известно, и при $k = n_0 - 1$, если $\bar{x}$ неизвестно.

При двукратной вбр-е опр-ся объемы первой n_1 и второй n_2 вбр-к и приемочные числа ν_1, ν_2, ν_3 (обычно $\nu_1 < \frac{n_1}{n_1 + n_2}\nu_3 < \nu_2$). Если в первой вбр-е крум-й параметр $M \le v_1$, то партия принимается; если $M > v_2$, то партия брк-ся; в остальных случаях берется вторая вбр-а. Если опр-ое по вбр-е объема $(n_1 + n_2)$ зн-ие крум-го параметра $M \le v_3$, то партия принимается; если $M > v_3$, то партия брк-ся.

Если крут-ся число дефектных изделий в вбр-е, то

$$\alpha = 1 - \sum_{m_1=0}^{v_2} \frac{C_{l_0}^{m_1} C_{N-l_0}^{n_0-m_1}}{C_N^{n_1}} + \sum_{m_1=v_1+1}^{v_2} \left[\frac{C_{l_0}^{m_1} C_{N-l_0}^{n_0-m_1}}{C_N^{n_1}} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{v_3-m_1} \frac{C_{l_0-m_1}^{m_2} C_{N-l_0-n_1+m_1}^{n_2-m_2}}{C_{N-n_1}^{n_2}} \right) \right],$$

$$\beta = \sum_{m_1=0}^{v_2} \frac{C_{l_1}^{m_1} C_{N-l_1}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}} + \sum_{m_1=v_1+1}^{v_2} \left[\frac{C_{l_1}^{m_1} C_{N-l_1}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}} \sum_{m_2=0}^{v_3-m_1} \frac{C_{l_1-n_1}^{m_2} C_{N-l_1-n_1+m_1}^{n_2-m_2}}{C_{N-n_1}^{n_2}} \right].$$

Так же, как при однократной вбр-е, при наличии опр-ых стн-й между числами n_1, n_2, N, l_0, l_1 возможен прж-ый переход от гипергеом-го закона рсп-ия к бином-му, норм-у или закону рсп-ия Пуассона.

Если крут-ся ср. зн-ие $\tilde{x}$ параметра в вбр-е, то при норм-ом законе рсп-ия параметра одного изделия с заданной дсп-ей σ^2 в частном случае, когда $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, будет

$$\alpha = 1 - p_1 - 0{,}5\left(p_2 - p_1^2\right),\ \beta = p_3 + 0{,}5\left(p_4 - p_3^2\right),$$

где

$$p_1 = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi\left(\frac{v - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),\ p_2 = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi\left(\frac{v - \xi_0}{\sigma/\sqrt{2n}}\right),$$

$$p_3 = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi\left(\frac{v - \xi_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right),\ p_4 = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi\left(\frac{v - \xi_1}{\sigma/\sqrt{2n}}\right).$$

При $\xi_0 > \xi_1$ знаки нерав-в в условиях приемки и брк-и заменяются на противоположные, а в фм-ах для p_1, p_2, p_3, p_4 знак плюс перед вторым членом – на минус.

Если крут-ся $\tilde{x}$, а плотность вер-ти параметра X для одного изделия показательная: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, то

$$\alpha = 1 - p_1 - 0{,}5\left(p_2 - p_1^2\right),\ \beta = p_3 + 0{,}5\left(p_4 - p_3^2\right),$$

где

$$p_1 = 1 - P(\chi^2 \ge \chi_{q0}^2),\ p_2 = 1 - P(\chi^2 \ge \chi_{q0}^2),$$

$$p_3 = 1 - P(\chi^2 \ge \chi_{q1}^2),\ p_4 = 1 - P(\chi^2 \ge \chi_{q1}^2),$$

где $\chi_{q0}^2 = 2n\lambda_0 v$, $\chi_{q1}^2 = 2n\lambda_1 v$, а вер-ти $P(\chi^2 \ge \chi_q^2)$ выч-ся по T_8 при числе ст-ей свободы $k = 2n$ (для p_1 и p_3) и $k = 4n$ (для p_2 и p_4).

Если крут-ся однс-ть продукции при норм-ом законе рсп-ия крум-го параметра, $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, то

$$\alpha = 1 - p_1 - 0{,}5\left(p_2 - p_1^2\right),\ \beta = p_2 + 0{,}5\left(p_4 - p_3^2\right),$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 опр-ся из табл. T_9 по q и k, причем $q = q_0$ для p_1 и p_2, $q = q_1$ для p_3 и p_4; при известном $\bar{x}$ $k = n$ для p_1 и p_3,и $k = 2n$ для p_2 и p_4; при неизвестном $\bar{x}$ $k = n - 1$ для p_1 и p_3, $k = 2(n - 1)$ для p_2 и p_4.

2°. Основные зависимости последовательного анализа. При посл-ом анализе А. Вальда для пер-го объема вбр-ки n и слн-го зн-ия крум-го параметра в вбр-е выч-ся коэф-т правдоподобия ν и кр-ль продолжается до тех пор, пока ν не выйдет за пределы интервала (B, A), где $B = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, $A = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$; если $\gamma \le B$, то партия принимается; если $\gamma \ge A$, то партия брк-ся, при $B < \gamma < A$ исп-ия продолжаются.

Если крут-ся число m дефектных изделий в вбр-е, то

$$\gamma = \gamma(n, m) = \frac{C_{l_1}^m C_{N-l_1}^{n-m}}{C_{l_0}^m C_{N-l_0}^{n-m}}.$$

При $n \le 0{,}1N$ пригодна фм-а, справедливая для бином-го закона рсп-ия

$$\gamma(n, m) = \frac{p_1^m (1-p_1)^{n-m}}{p_0^m (1-p_0)^{n-m}}, \text{ где } p_0 = \frac{l_0}{N},\ p_1 = \frac{l_1}{N}.$$

В этом случае партия принимается, если $m \le h_1 + nh_3$; партия брк-ся, если $m \ge h_2 + nh_3$; исп-ия продолжаются, если $h_1 + nh_3 < m < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg\dfrac{p_1}{p_0} + \lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}},\quad h_2 = \frac{\lg A}{\lg\dfrac{p_1}{p_0} + \lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}},\quad h_3 = \frac{\lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0} + \lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}.$$

На рис. 1 для этого случая полоса II дает обл. зн-й n и m, при к-ых исп-ия продолжаются, I – обл. приемки партии, III – обл. брк-и.

Если $n \le 0{,}1N$, $p_1 < 0{,}1$, то $\gamma(n, m) = \dfrac{a_1^m e^{-a_1}}{a_0^m e^{-a_0}}$, где $a_0 = np_0$, $a_1 = np_1$. В остальном условия посл-го кр-ля и грфч-й метод останутся без изменения, но в данном случае h_1, h_2, h_3 опр-ся так:

$$h_1 = \lg B \Big/ \lg\frac{p_1}{p_0},\quad h_2 = \lg A \Big/ \lg\frac{p_1}{p_0},\quad h_3 = 0{,}4343(p_1 - p_0) \Big/ \lg\frac{p_1}{p_0}.$$

Если можно принять бином-ый закон рсп-ия, то мт-ие ож-я объема вбр-и опр-ся:

$$M[n|p_0] = \frac{(1-\alpha)\lg B + \alpha\lg A}{p_0\lg\dfrac{p_1}{p_0} - (1-p_0)\lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}},$$

$$M[n|p_1] = \frac{\beta\lg B + (1-\beta)\lg A}{p_1\lg\dfrac{p_1}{p_0} - (1-p_1)\lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}.$$

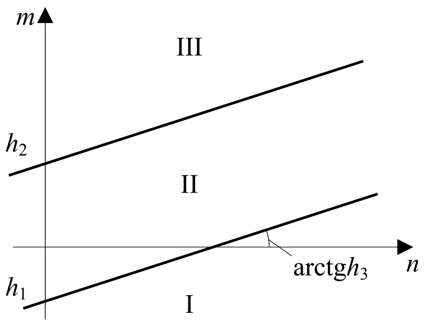


Рис. 1

Нб. зн-ие мт-го ожидания объема вбр-и имеет место при числе дефектных изделий в партии $l = Nh_3$:

$$M[n]_{\max} = -\frac{\lg B \lg A}{\lg\frac{p_1}{p_0}\lg\frac{1-p_0}{1-p_1}}, \text{ где } p_0 = \frac{l_0}{N},\ p_1 = \frac{l_1}{N}.$$

Если крут-ся ср. зн-ие $\widetilde{x}$ параметра в вбр-е, а зн-ие параметра одного изделия – норм. слн. вел-на с известной дсп-ей σ^2, то

$$\gamma = \gamma(n,\ \widetilde{x}\ ) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\xi_1)^2-(x_i-\xi_0)^2\right]\right\}.$$

Партия принимается, если $n\widetilde{x} \le h_1 + h_3n$; партия брк-ся, если $n\widetilde{x} \ge h_2 + h_3n$; исп-ия продолжаются, если $h_1 + nh_3 < n\widetilde{x} < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = 2{,}303\frac{\sigma^2}{\xi_1-\xi_0}\lg B;\ h_2 = 2{,}303\frac{\sigma^2}{\xi_1-\xi_0}\lg A;\ h_3 = \frac{\xi_0+\xi_1}{2}.$$

Метод кр-ля и в данном случае можно представить грфч-и анч-но рис. 1, если по оси ординат вместо m откладывать $n\widetilde{x}$. При $\xi_0 > \xi_1$ будет $h_1 > 0$, $h_2 < 0$ и знаки нерав-в в условиях приемки и брк-и меняются на противоположные.

Мт. ож-ия числа исп-й опр-ся фм-ми:

$$M[n|\xi_0] = \frac{h_2+(1-\alpha)(h_1-h_2)}{\xi_0-h_3},\ M[n|\xi_1] = \frac{h_2+\beta(h_1-h_2)}{\xi_0-h_3},\ M[n]_{\max} = -\frac{h_1h_2}{\sigma^2}.$$

Если периметр отдельного изделия имеет плотность вер-ти $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, то

$$\gamma = \gamma(n,\ \widetilde{x}\ ) = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_0^n}e^{-(\lambda_1-\lambda_0)n\widetilde{x}}.$$

Партия принимается, если $n\widetilde{x} \ge h_1 + nh_3$; брк-ся, если $n\widetilde{x} \le h_2 + nh_3$; исп-ия продолжаются, если $h_1 + nh_3 > n\widetilde{x} > h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = -2{,}303\frac{\lg B}{\lambda_1-\lambda_0};\ h_2 = -2{,}303\frac{\lg A}{\lambda_1-\lambda_0};\ h_3 = 2{,}303\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big/(\lambda_1-\lambda_0).$$

Грфч. представление метода кр-ля отличается от изб-го на рис. 1 только тем, что в данном случае I – обл. брк-ки, III – обл. приемки. Мт. ож-ия числа исп-й выч-ся по фм-ам

$$M[n|\lambda_0] = \frac{(1-\alpha)\lg B+\alpha\lg A}{\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-0{,}4343\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}},$$

$$M[n|\lambda_1] = \frac{\beta\lg B+(1-\beta)\lg A}{\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-0{,}4343\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_1}},\ M[n]_{\max} = -\frac{h_1h_2}{h_3^2}.$$

Если крут-ся однс-ть продукции (закон норм-го рсп-ия), то

$$\gamma = \gamma(n,\ \widetilde{x}\ ) = \frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n}e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2}-\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)}.$$

Партия принимается (при известном $\overline{x}$), если $n\widetilde{\sigma}^2 \le h_1 + nh_3$; брк-ся, если $n\widetilde{\sigma}^2 \ge h_2 + nh_3$; исп-ия продолжаются, если $h_1 + nh_3 < n\widetilde{\sigma}^2 < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = \frac{4{,}606 \lg B}{\dfrac{1}{\tilde{\sigma}_0^2} - \dfrac{1}{\tilde{\sigma}_1^2}};\ h_2 = \frac{4{,}606 \lg A}{\dfrac{1}{\tilde{\sigma}_0^2} - \dfrac{1}{\tilde{\sigma}_1^2}};\ h_3 = \frac{2{,}303 \lg \dfrac{\tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{\sigma}_0^2}}{\dfrac{1}{\tilde{\sigma}_0^2} - \dfrac{1}{\tilde{\sigma}_1^2}}.$$

Грфч. представление анч-но рис. 1, только по оси ординат откладываются $n\tilde{\sigma}^2$.

При неизвестном $\bar{x}$ всюду в фм-ах n заменяется на $(n – 1)$.

Мт. ож-ия числа исп-й имеют вид:

$$M[n|\sigma_0] = \frac{h_2 + (1-\alpha)(h_1 - h_2)}{\sigma_0^2 - h_3},\ M[n|\sigma_1] = \frac{h_2 + \beta(h_1 - h_2)}{\sigma_1^2 - h_3},\ M[n]_{\max} = -\frac{h_1 h_2}{2h_3^2}.$$

Рас-им нек-ые случаи, встречающиеся на практике.

1. Число дефектов изделия подчиняется закону Пуассона. При кр-е общего числа дефектов изделий вбр-и, если число дефектов одного изделия подчиняется закону Пуассона с параметром a, применим все приведенные выше фм-ы для закона Пуассона при замене m на $n\tilde{x}$, p_0 и p_1 – на a_0 и a_1, a_0 и a_1 – на na_0 и na_1, χ^2_{q0} – на $2na_0$, χ^2_{q1} – на $2na_1$, где n – объем вбр-ки.

При $n \ge 50$, $na \ge 4$ возможен переход к норм. закону

$$\sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a^m e^{-a}}{m!} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{na - v - 0{,}5}{\sqrt{na}}\right).$$

2. Рсп-ие А. Вальда при $\alpha << \beta$ или $\beta << \alpha$. Для опр-ия вер-ти того, что число исп-й $n < n_g$ при посл-ом анализе в случае, когда $\alpha << \beta$ или $\beta << \alpha$, применимо рсп-ие А. Вальда

$$P(y < y_g) = W_c(y_g) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_0^{y_g} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c}{2}\left(y + \frac{1}{y} - 2\right)} dy,$$

где y – отн-ие числа исп-й n к мт. ожиданию n при нек-ом зн-и крум-го параметра партии (l, ξ, λ), $y_g = y\big|_{n=n_g}$, а параметр c рсп-ия А. Вальда опр-ся фм-ми:

а) для бином-го закона рсп-ия доли дефектных изделий

$$c = K\frac{\left| p \lg \dfrac{p_1}{p_0} - (1-p)\lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1} \right|}{p(1-p)\left(\lg\dfrac{p_1}{p_0} + \lg\dfrac{1-p_0}{1-p_1}\right)},\ p = \frac{l}{N};$$

б) для норм-го рсп-ия параметра изделий

$$c = K\frac{\left| \tilde{x} - \dfrac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right|}{\xi_1 - \xi_0};$$

в) для показательного закона рсп-ия параметра изделий

$$c = K\frac{\left|2{,}303\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda}\right|}{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda}\right)^2},$$

где

$$K = \begin{cases} 2{,}303|\lg B|, \text{ если } c < h_3,\ \alpha << \beta; \\ 2{,}303|\lg A|, \text{ если } c > h_3,\ \beta << \alpha. \end{cases}$$

3. Показательный закон рсп-ия при исп-и на надежность. Особый случай кр-ля по числу дефектных изделий возникает при исп-и на надежность в течение вр-и t, при к-ом обычно считается справедливым показательный закон рсп-ия вр-и безотказной работы. В этом случае вер-ть p выхода изделия из строя за время t опр-ся фм-ой $p = 1 - e^{-\lambda t}$.

Все фм-ы для кр-ля доли дефектных изделий при бином-ом законе остаются справедливыми, если произвести замену p_0 на $1 - e^{-\lambda_0 t}$, p_1 на $1 - e^{-\lambda_1 t}$. Если $\lambda t < 0{,}1$, возможен переход к закону рсп-ия Пуассона с заменой в ств-их фм-ах a_0 на $n\lambda_0 t$, a_i – на $n\lambda_1 t$, χ^2_{q0} – на $2n\lambda_0 t$, χ^2_{q1} – на $2n\lambda_1 t$.

Посл-ый анализ отличается в данном случае тем, что фксн-ом числе n_0 испытываемых изделий слн-ым яв-ся вр. t исп-й. Партия принимается, если $t \geq t_1 + mt_3$; брк-ся, если $t \leq t_2 + mt_3$; исп. продолжаются, если $t_1 + mt_3 > t > t_2 + mt_3$, где

$$t_1 = -2{,}303\frac{\lg B}{n(\lambda_1 - \lambda_0)};\ t_2 = -2{,}303\frac{\lg A}{n(\lambda_1 - \lambda_0)};\ t_3 = 2{,}303\lg\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big/ n(\lambda_1 - \lambda_0),$$

а m – число отказов за время t. При грфч-ом представлении по оси абсцисс откладывается m, а по оси ординат t.

Мт. ож-ия вр-и исп-ия T при $\lambda t < 0{,}1$ опр-ся по фм-ам:

$$M[T|\lambda_0] = \frac{t_н}{n_0}M[n|p_0],\ M[T|\lambda_1] = \frac{t_н}{n_0}M[n|p_1],\ M[T]_{\max} = \frac{t_н}{n_0}M[n]_{\max},$$

где $t_н$ – произвольное число, зн-ие к-го выбирают, исходя из удобства расчетов, а $p_0 = \lambda_0 t_н$, $p_1 = \lambda_1 t_н$.

Для опр-ия вер-ти того, что вр-я исп-ия $T < t_g$ в случае, когда $\alpha << \beta$ или $\beta << \alpha$, применимо рсп-ие А. Вальда, в к-ом нужно положить $y = \dfrac{t}{M[T \mid \lambda]}$ и опр-ть параметр c по фм-е для бином-го закона рсп-ия при выбранном зн-и $t_н$.

3°. Типовые примеры и их решения. Рас-им практические примеры.

п1. Партия в $N = 40$ изделий считается первосортной, если в ней число изделий, имеющих дефекты, не превышает $l_0 = 8$ штук. Если число изделий, имеющих дефекты, больше $l_1 = 20$ штук, то партия возвращается на исправление. Требуется:

а) выч-ть α и β при однократной вбр-е объема $n_0 = 10$, если приемочное число $\nu = 3$;

б) Найти α и β при двукратной вбр-е, для к-ой $n_1 = n_2 = 5$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 3$;

в) сравнить эфс-ть планов кр-ля методами однократной и двукратной вбр-ок по ср. числу проверяемых изделий в 100 однотипных партиях;

г) при α и β, полученных в п. а), построить план посл-го кр-ля, опр-ть $n_{\min}$ для партий с $L = 0$ и $L = N$.

Р. а) Выч-им α и β по фм-ам $\alpha = 1 - \sum_{m=0}^{3} \frac{C_8^m C_{32}^{10-m}}{C_{40}^{10}}$, $\beta = \frac{1}{C_{40}^{10}} \sum_{m=0}^{3} C_{20}^m C_{20}^{10-m}$.

Используя табл. T_{22} или фм-у Стирлинга [(10*) из 3°: 1.2] для C_n^m, находим $\alpha = 0{,}089$, $\beta = 0{,}136$.

б) Находим α и β по фм-ам

$$\alpha = 1 - \frac{1}{C_{40}^5} \sum_{m=0}^{2} C_8^m C_{32}^{5-m} + \sum_{m_1=1}^{2} \left[\frac{C_8^{m_1} C_{32}^{5-m_1}}{C_{40}^5} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{3-m_1} \frac{C_{8-m_1}^{m_2} C_{27+m_1}^{5-m_2}}{C_{35}^5} \right) \right],$$

$$\beta = \frac{C_{20}^0 C_{20}^5}{C_{40}^5} + \sum_{m_1=1}^{2} \left[\frac{C_{20}^{m_1} C_{20}^{5-m_1}}{C_{40}^5} \sum_{m_2=0}^{3-m_1} \frac{C_{20-m_1}^{m_2} C_{15+m_1}^{5-m_2}}{C_{35}^5} \right],$$

получаем $\alpha = 0{,}105$, $\beta = 0{,}134$.

в) Вер-ть того, что партия первого сорта при методе двукратной вбр-и после первой вбр-и объемом в 5 изделий будет принята, равна

$$P(m_0 \le \nu_1) = P(m_1 = 0) = \frac{C_8^0 C_{32}^5}{C_{40}^5} = 0{,}306.$$

Мт. ож-ие числа партий, принимаемых после первой вбр-и из общего числа в 100 партий, $100 \cdot 0{,}306 = 30{,}6$ партии; для остальных 69,4 партий потребуется вторая вбр-а; ср-й расход изделий при методе двукратной вбр-и составит $30{,}6 \cdot 5 + 69{,}4 \cdot 10 = 847$ изделий.

При методе однократной вбр-и расход изделий равен $100 \cdot 10 = 1000$ изделий.

Заметим, что при сравнении эфс-ти методов кр-ля не учтена разница между зн-ми α и β, полученными по методам однократной и двукратной вбр-ок.

г) При $\alpha = 0{,}089$ и $\beta = 0{,}136$ план посл-го анализа получается сд-ий:

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} = 0{,}149, \ \lg B = -0{,}826, \ A = \frac{1-\beta}{\alpha} = 9{,}71, \ \lg A = 0{,}987.$$

Для опр-ия $n_{\min}$ в случае, когда все изделия в партии хорошие, выч-яем посл-ые зн-ия $\lg \gamma(n; 0)$ по фм-ам

$$\lg \gamma(1; 0) = \lg(N - l_1)! + \lg(N - l_0 + 1)! - \lg(N - l_0)! - \lg(N - l_1 + 1)!,$$

$$\lg \gamma(n + 1; 0) = \lg \gamma(n; 0) - \lg(N - l_0 - n)! + \lg(N - l_1 - n)!$$

Имеем:

$$\lg \gamma(1; 0) = 0{,}7959;$$

$$\lg \gamma(2; 0) = 0{,}5833; \quad \lg \gamma(3; 0) = 0{,}3614;$$

$$\lg \gamma(4; 0) = 0{,}1295; \quad \lg \gamma(5; 0) = -0{,}1136;$$

$$\lg \gamma(6; 0) = -0{,}3688; \quad \lg \gamma(7; 0) = -0{,}6377;$$

$$\lg \gamma(8; 0) = -0{,}9217.$$

Т.к. нерав-во $\lg \gamma(n;\,0) < \lg B$ выполняется только начиная с $n = 8$, то $n_{\min} = 8$.

Для партии, состоящей из дефектных изделий, $n = m$. Находим $\lg \gamma(1;\,1) = 0{,}3979$.

Для последующих n пользуемся фм-ой

$$\lg \gamma(n+1;\,m+1) = \lg \gamma(n;\,m) + \lg(l_1 - m) - \lg(l_0 - m).$$

Получаем $\lg \gamma(2;\,2) = 0{,}8316$; $\lg \gamma(3;\,3) = 1{,}3087 > \lg A = 0{,}987$; сд-но, в этом случае $n_{min} = 3$.

п2. Большая партия ламп ($N > 10000$) проходит кр-ль на годность. Если доля дефектных ламп $p \le p_0 = 0{,}02$, то партия считается хорошей, при $p \ge p_1 = 0{,}10$ – негодной. Используя законы рсп-ия бином-ый и Пуассона (проверив их применимость), требуется

а) выч-ть α и β при однократной вбр-е (одиночном кр-ле), если $n_0 = 47$, $v = 2$;

б) выч-ть α и β при двукратной вбр-е (двойном кр-ле), приняв $n_1 = n_2 = 25$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$;

в) сравнить эфс-ть одиночного и двойного кр-ля по числу испытываемых изделий, приходящихся на 100 партий;

г) составить план посл-го кр-ля, начертить грф., опр-ть $n_{\min}$ для партий с $p = 0$, $p = 1$. Выч-ть мт. ож-ие числа исп-й при посл-ом кр-ле.

Р. а) При бином-ом законе рсп-ия имеем:

$$\alpha = 1 - \sum_{m=0}^{2} C_{47}^{m} 0{,}02^{m} 0{,}98^{47-m}, \quad \beta = \sum_{m=0}^{2} C_{47}^{m} 0{,}10^{m} 0{,}90^{47-m}.$$

Используя табл-у для $\sum C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, получим $\alpha = 0{,}0686$ и $\beta = 0{,}1350$.

При законе рсп-ия Пуассона, выч-ив $a_0 = n_0 p_0 = 0{,}02 \cdot 47 = 0{,}94$, $a_1 = n_0 p_1 = 47 \cdot 0{,}1 = 4{,}7$, получим

$$\alpha = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{0{,}94^{m} e^{-0{,}94}}{m!}, \quad \beta = 1 - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4{,}7^{m} e^{-4{,}7}}{m!}.$$

Используя табл. T_4, T_{19} закона Пуассона, находим (инп-руя по a) $\alpha = 0{,}0698$ и $\beta = 0{,}159$.

б) При бином-ом законе рсп-ия, используя табл. для $\sum C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, находим

$$\alpha = 1 - \sum_{m_1=0}^{2} C_{25}^{m} 0{,}02^{m_1} 0{,}98^{25-m_1} +$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{2} \left[C_{25}^{m_1} 0{,}02^{m_1} 0{,}98^{25-m_1} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{2-m_1} C_{25}^{m_2} 0{,}02^{m_2} 0{,}98^{25-m_2} \right) \right] = 0{,}0704,$$

$$\beta = C_{25}^{0} 0{,}1^{0} 0{,}9^{25} + \sum_{m_1=1}^{2} \left[C_{25}^{m_1} 0{,}1^{m_1} 0{,}9^{25-m_1} \left(\sum_{m_2=0}^{2-m_1} C_{25}^{m_2} 0{,}1^{m_2} 0{,}9^{25-m_2} \right) \right] = 0{,}1450.$$

При законе рсп-ия Пуассона, используя табл. T_{14}, T_{19} и выч-ив $a_{01} = 0{,}5$, $a_{02} = 0{,}5$, $a_{11} = 2{,}5$, $a_{21} = 2{,}5$, имеем

$$\alpha = \sum_{m_1=3}^{\infty} \frac{0{,}5^{m_1} e^{-0{,}5}}{m_1!} + \sum_{m_1=1}^{2} \left[\frac{0{,}5^{m_1} e^{-0{,}5}}{m_1!} \left(\sum_{m_2=3-m_1}^{\infty} \frac{0{,}5^{m_2} e^{-0{,}5}}{m_2!} \right) \right] = 0{,}0715,$$

$$\beta = 1 - \sum_{m_1=3}^{\infty}\frac{2{,}5^{m_1}e^{-0,25}}{m_1!} + \sum_{m_1=1}^{\infty}\left[\frac{2{,}5^{m_1}e^{-2,5}}{m_1!}\left(1-\sum_{m_2=3-m_1}^{\infty}\frac{2{,}5^{m_2}e^{-2,5}}{m_2!}\right)\right] = 0{,}1935.$$

Сущ-ное различие между зн-ми β, вычн-ми при использовании законов рсп-ия бином-го и Пуассона, объясняется большой вел-ой $p_1 = 0{,}10$.

в) Вер-ть принятия хорошей партии ($p \le 0{,}02$) после первой вбр-и при двойном кр-е (сравниваем результаты для бином-го закона рсп-ия)

$$P(m_1 \le \nu_1) = P(m_1 = 0) = C_{25}^{0}\,0{,}02^0\cdot 0{,}98^{25} = 0{,}6035.$$

Ср. число хороших партий, принимаемых после первой вбр-и, из общего числа в 100 партиях составит $100\cdot 0{,}6035 = 60{,}35$ партий; для остальных 39,65 потребуется вторая вбр-а; ср-й расход ламп при двойном кр-е 100 партий будет равен

$$60{,}35\cdot 25 + 39{,}64\cdot 50 = 3497 \text{ ламп};$$

в случае плохой партии вер-ть забрк-ть ее после первой вбр-и при двойном кр-е:

$$P(m_1 > \nu_2) = P(m_1 > 2) = 1 - \sum_{m_1=0}^{2} C_{25}^{m_1}\,0{,}1^{m_1}0{,}9^{25-m_1} = 0{,}4629.$$

Ср. число партий, брк-мых после первой вбр-и, из общего числа в 100 партий составит $100\cdot 0{,}4629 = 46{,}29$; для остальных 53,71 партии потребуется вторая вбр-а; ср-й расход ламп при двойном кр-е 100 партий равен $46{,}29\cdot 25 + 53{,}71\cdot 50 = 3843$; при одиночном кр-е будет израсходовано во всех случаях $100\cdot 50 = 5000$ ламп.

г) При $\alpha = 0{,}0686$ и $\beta = 0{,}1350$ для посл-го кр-ля получаем, используя бином-ый закон рсп-ия: $B = 0{,}1450$, $\lg B = -0{,}8388$, $A = 1{,}261$, $\lg A = 1{,}1007$. Далее, $h_1 = -1{,}140$, $h_2 = 1{,}496$, $h_3 = 0{,}0503$ (рис. 2).

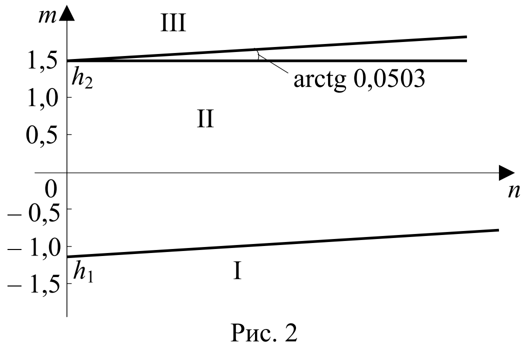


Рис. 2

Находим n_{min} для хорошей партии при $p = 0$: $0 = h_1 + n_{min}h_3$, $n_{min} = -h_1/h_3 = 1{,}140/0{,}0503 = 22{,}7 \approx 23$ лампы; для негодной партии при $p = 1$: $n_{min} = h_2 + n_{min}h_3$, $n_{min} = h_2/(1 - h_3) = 1{,}496/0{,}9497 = 1{,}5 \approx 2$. Опр-им ср. числа исп-й при различных p: $M[n|0{,}02] = 31{,}7$; $M[n|0{,}10] = 22{,}9$; $M[n]_{max} = 35{,}7$.

п3. Большая партия сопротивлений, для к-ых время безотказной работы подчиняется экпц. закону рсп-ия, исп-тся на надежность. Если интенсивность отказов $\lambda \le \lambda_0 = 1\cdot 10^{-5}$ час$^{-1}$, то партия считается хорошей, если $\lambda \ge \lambda_0 = 1\cdot 10^{-5}$ час$^{-1}$ –

негодной. Считая, что $\lambda t_0 < 0{,}1$, где t_0 – фксн-ое вр. исп-ия каждого эл. в вбр-е из n_0 штук, опр-ть при $\alpha = 0{,}005$, $\beta = 0{,}08$ n_0 для метода однократной вбр-и при различных t_0, найти v при условии, что $t_0 = 1000$ часов, а также составить план посл-го кр-ля при $n = n_0$ для $t_0 = 1000$ часов. Выч-ть $t_{\min}$ для хорошей и плохой партий, а также $M[T|\lambda]$, $P(t < 1000)$, $P(t < 500)$.

Р. Опр-ие объема вбр-и n_0 и приемочного числа v производим с учетом того, что $\lambda t_0 < 0{,}1$, что позволяет использовать закон рсп-ия Пуассона и от него перейти к χ^2-рсп-ию. Выч-им отн-ие $\lambda_0/\lambda_1 = 0{,}2$. Далее из табл. T_8 находим зн-ия χ^2_{q0} по входным вел-ам $P(\chi^2 \geq \chi^2_{q0}) = 1 - \alpha = 0{,}995$ и k; χ^2_{q1} – по сходным вел-ам $P(\chi^2 \geq \chi^2_{q1}) = \beta = 0{,}08$ и k.

Методом подбора устанавливаем, что при $k = 15$ $\chi^2_{q0} = 4{,}48$, $\chi^2_{q1} = 23{,}22$, $\chi^2_{q0}/\chi^2_{q1} = 0{,}1930$; при $k = 16$ имеем $\chi^2_{q0} = 5{,}10$, $\chi^2_{q1} = 24{,}48$, $\chi^2_{q0}/\chi^2_{q1} = 0{,}2041$.

Инп-руя по вел-е $\chi^2_{q0}/\chi^2_{q1} = 5{,}10/24{,}48 = 0{,}2$, находим: $k = 15{,}63$, $\chi^2_{q0} = 4{,}87$, $\chi^2_{q1} = 23{,}99$. Выч-ем $v = k/2 - 1 = 6{,}815$; принимаем $v = 6$, $2n_0\lambda_0 t_0 = 4{,}87$, откуда $n_0 t_0 = \dfrac{4{,}87}{2 \cdot 0{,}000002} = 1{,}218 \cdot 10^6$. Условие $\lambda t_0 < 0{,}1$ дает $t_0 < 0{,}1/0{,}00001 = 10000$ часов (т.к. $\lambda_1 = 0{,}00001$). Взяв различные зн-ия $t_0 < 10000$, получим ств-щие зн-ия n_0, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

t_0, час	100	500	1000	2500	5000
n_0	12180	2436	1218	487	244

Выч-им B, A, t_1, t_2, t_3 для метода посл-го анализа: $B = 0{,}08041$, $\ln B = -2{,}5211$; $A = 184$, $\ln A = 5{,}2161$.

Примем $n_0 = 1218$, тогда

$t_1 = 258{,}7$ часа;

$t_2 = -535{,}3$ часа;

$t_3 = 165{,}2$ часа (рис. 3).

Мнм-ое время исп-й при $m = 0$ для хорошей партии $t_{\min} = 258{,}7$ часа; для плохой партии $t_{\min} = -535{,}3 + 165{,}2m > 0$, отсюда $m = 3{,}24 \approx 4$; при $m = 4$ имеем $t_{\min} = 125{,}5$ часа. Если при $t < 125{,}5$ часа $m \geq 4$, то партия брк-ся.

Для выч-ия ср-го вр-и исп-й при $n = n_0 = 1218$ принимаем $t_н = t_0 = 1000$ час. Тогда $p_0 = \lambda_0 t_н = 0{,}002$; $p_1 = \lambda_1 t_н = 0{,}010$; $\lambda^* t_н = \dfrac{t_н}{n_0 t_3} = 0{,}00497$. Далее находим $M[n|p_0] = 505$, $M[n|p_1] = 572$, $M[n]_{max} = 1001$, после чего выч-ем $M[T|\lambda_0] = 415$ час; $M[T|\lambda_1] = 470$ час; $M[T]_{\max} = 821$ час.

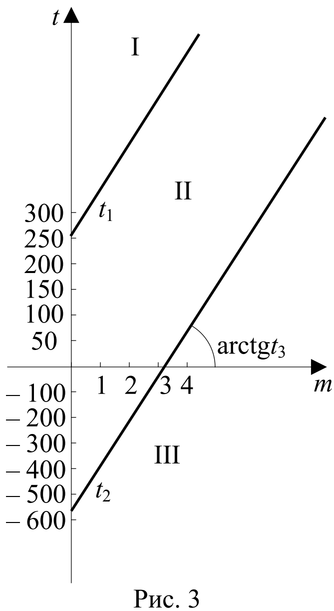


Рис. 3

Найдем вер-ть того, что время исп-й при фксн-ом числе эл-ов $n = n_0 = 1218$ меньше 1000 час и 500 час. Для этого при $t_н = 1000$ час выч-ем зн-ие параметра c рсп-ия Вальда и зн-ие $y = \dfrac{n_0}{M[n \mid p_0]} = \dfrac{t_н}{M[T \mid \lambda]}$ при условии, что $p_0 = \lambda_0 t_0 = 0{,}002$; $p_1 = \lambda_1 t_0 = 0{,}01$. Получим, принимая $p = p_0$, т.к. $\alpha \ll \beta$, $c = 2{,}37$, $y = 1000/415 = 2{,}406$. Получаем $P(T < 1000) = P(n < 1218) = W_e(y) = 0{,}9599$. При $\gamma = 0{,}5$ имеем $y = 1{,}203$, $P(T < 500) = 0{,}725$.

п4. Кач-во дисков, изготовленных на плоскошлифовальном станке, опр-ся числом пятен на них. Если ср. число пятен на десяти дисках не более 1, то диски считаются доброкачн-ми, если более 5 – негодными. Взята вбр-а в 40 дисков из большой партии ($N > 1000$). Требуется (предполагая, что число пятен на диске подчиняется закону рсп-ия Пуассона):

а) опр-ть α и β при $v = 9$;

б) по этим α и β построить план посл-го кр-ля, выч-ть $n_{\min}$ для хорошей и плохой партий, зн-ия $M[n|a]$;

в) проверить конкретную вбр., для к-ой данные приведены в табл. 2, по методам однозначного и посл-го кр-ля.

Таблица 2

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	0	9	1	17	2	25	4	33	4
2	1	10	1	18	2	26	4	34	4
3	1	11	1	19	3	27	4	35	5
4	1	12	1	20	3	28	4	36	5
5	1	13	2	21	3	29	4	37	6
6	1	14	2	22	3	30	4	38	6
7	1	15	2	23	3	31	4	39	7
8	1	16	2	24	4	32	4	40	7

Р. а) Используя закон рсп-ия Пуассона, имеем $a_0 = 0{,}1$; $a_1 = 0{,}5$; $na_0 = 4$; $na_1 = 20$. Используя табл. T_{19} для суммарных вер-ей чисел x_n появления пятен на дисках в расв-ой вбр-е, находим

$$\alpha = \sum_{x_n=10}^{\infty} \frac{4^{x_n} e^{-4}}{x_n!} = 0{,}00813,\ \beta = 1 - \sum_{x_n=10}^{\infty} \frac{20^{x_n} e^{-20}}{x_n!} = 0{,}00500;$$

б) при $\alpha = 0{,}0081$; $\beta = 0{,}0050$ получаем для хркс-ик посл-го кр-ля (рис. 4):

$$B = 0{,}005041;\ \lg B = -2{,}298;\ A = 122{,}8;\ \lg A = 2{,}089,\ h_1 = \lg B \Big/ \lg\frac{a_1}{a_0} = -3{,}29;$$

$$h_2 = \lg A \Big/ \lg\frac{a_1}{a_0} = 2{,}99;\ h_3 = 0{,}4343(a_1 - a_0) \Big/ \lg\frac{a_1}{a_0} = 0{,}248.$$

Выч-ем $n_{\min}$: при $x_n = 0$ $n_{\min} = 13{,}2 \approx 14$; при $x_n = n$ $n_{\min} = 18{,}7 = 19$. Ср. зн-ия чисел исп-й при посл-ом кр-е:

$$M[n|a_0] = 21{,}8;\ M[n|a_1] = 11{,}8;\ M[n]_{max} = 39{,}5;$$

в) в вбр-е при $n_0 = 40$ оказалось $x_n = 7 < v = 9$; сд-но, партия принимается. Применив метод посл-го кр-ля (см. рис. 4), получаем, что при $n = 30$ точка с крд-ми (n, m) оказывается ниже нижней прямой, т.е. партия должна быть принята. Дсв-но, при $n = 29$, $x_n = 4\ h_1 + mh_3 = 3{,}90$; $x_n > h_1 + mh_3$;

при $n = 30$, $x_n = 4\ h_1 + mh_3 = 4{,}15$; $x_n < h_1 + mh_3$.

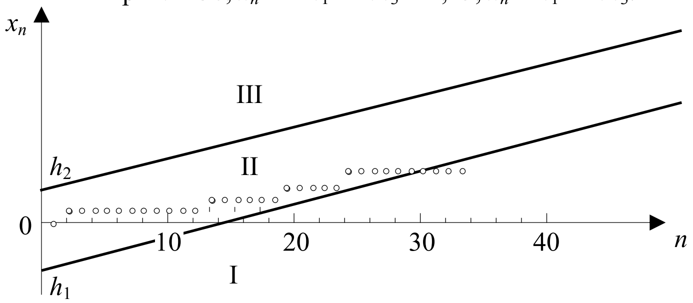


Рис. 4

п5. О кач-е одного типа штамповок горизонтально-ковочной машины судят по рассеиванию их высот X, о к-ых известно, что они подчиняются закону норм-го рсп-ия с мт. ож-ем $\bar{x} = 32$ мм (номинальный размер). Если ср. кв. отк-ие $\sigma \le \sigma_0 = 0{,}18$ мм, то партия считается хорошей; если $\sigma \ge \sigma_1 = 0{,}30$ мм – негодной. Найти α и β для метода однократной вбр-и при $n_0 = 39$ и $v = 0{,}22$ мм. По найденным α и β составить план кр-ля по методу посл-го анализа. Выч-ть n_{min} для хорошей и негодной партий, $M[n|\sigma]$.

Р. Выч-им α и β по фм-ам: $\alpha = 1 - P(\tilde{\sigma} \le q_0\sigma_0)$, $\beta = P(\tilde{\sigma} \le q_1\sigma_1)$ при $k = n_0 = 39$, $q_0 = v/\sigma_0 = 1{,}221$, $q_1 = v/\sigma_1 = 0{,}733$.

Инп-руя по табл. T_{10} для закона χ^2-рсп-ия находим $\alpha = 0{,}0303$; $\beta = 0{,}0064$.

Выч-им зн-ия B, A, h_1, h_2, h_3 для метода посл-го анализа:

$$B = 0{,}006601;\ \ln B = -5{,}021;\ A = 30{,}10,\ \ln A = 3{,}405;$$

$$h_1 = -0{,}528;\ h_2 = 0{,}345;\ h_3 = 0{,}0518.$$

Находим n_{min}. Для худшей из хороших партий $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_0^2 = 00324$; $n_{min}\sigma_0^2 = h_1 + n_{min}h_3$; $n_{min} = 27{,}2 \approx 28$. Для лучшей из негодных партий $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2 = 0{,}0900$; $n_{min}\sigma_1^2 = h_2 + n_{min}h_3$; $n_{min} = 9{,}3 \approx 10$. Выч-им ср. числа исп-й $M[n|\sigma]$ при различных σ:

$$M[n|\sigma_0] = 25{,}9;\ M[n|\sigma_1] = 8{,}8;\ M[n]_{max} = 34{,}0.$$

п6. Нб. давление X в камере порохового ракетного двигателя рсп-но норм-но со ср. кв. отк-ем $\sigma = 10$ кг/см^2. Двигатель считается хорошим, если $X \le \xi_0 = 100$ кг/см^2; если $X \ge \xi_1 = 105$ кг/см^2, то двигатель возвращается на завод для регулировки. Установлены зн-ия $\alpha = 0{,}10$ и $\beta = 0{,}01$. Составить планы одиночного (n_0, v) и посл-го кр-ля, выч-ть вер-ти $P(n < n_0)$ и $P(n < \frac{1}{2}n_0)$ того, что при посл-ом кр-ле ср. число исп-й будет меньше n_0 и $\frac{1}{2}n_0$ ств-но.

Р. Для выч-ия объема вбр-и n_0 и приемочного числа v при одиночном кр-е используем фм-ы $\Phi\left(\dfrac{v-\xi_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right) = 1 - 2\alpha$, $\Phi\left(\dfrac{\xi_1 - v}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right) = 1 - 2\beta$. Подставляя зн-ия α и β и пользуясь табл. T_{11} для фк-и Лапласа, находим $\frac{v-100}{10}\sqrt{n_0}$ = = 1,2816, $\frac{105-v}{10}\sqrt{n_0}$ = 2,3264, откуда $n_0 = 52$, $v = 101{,}8$ кг/см^2. А для посл-го кр-ля находим:

$$B = 0{,}0111;\ \ln B = -4{,}500;\ A = 9{,}9,\ \ln A = 2{,}293;$$
$$h_1 = -90;\ h_2 = 45{,}86;\ h_3 = 102{,}5.$$

Опр-им $n_{\min}$. Для худшей из хороших партий при $\tilde{x} = \xi_0 = 100\ n_{\min}\cdot 100 = -90 + n_{\min}\cdot 105 = 45{,}86 + n_{\min}\cdot 102{,}5$; откуда $n_{\min} = 18{,}3 \approx 19$. Ср. числа нбл-й $M[n|\xi]$ равны: $M[n|\xi_0] = 30{,}6$; $M[n|\xi_1] = 17{,}8$; $M[n]_{\max} = 41{,}3$.

Для опр-ия вер-ти $P(n < 52)$, учитывая, что $\beta \ll \alpha$ при $\bar{x} = \xi_1 = 105$, выч-ем:

$$K = \ln A = 2{,}293;\ c = 1{,}146;\ y_{11} = \frac{n_0}{M[n\,|\,\xi_1]} = 4{,}031;\ y_{12} = \frac{1}{2}y_{11} = 2{,}016.$$

Из табл. для закона рсп-ия Вальда находим $P(n < 52) = 0{,}982$, $P(n < 26) = 0{,}891$.

п7. Ср-я продолжительность работы одного типа электронных ламп составляет для хорошей партии $t \ge t_0 = 1282$ часа, для негодной $t \le t_1 = 708$ часов. Известно, что время T безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону рсп-ия с плотностью вер-ти $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где параметр λ – интенсивность отказов – есть вел-а, обратная ср-ей продолжительности работы лампы в часах. Опр-ть при $\alpha = 0{,}001$ и $\beta = 0{,}01$ объем n_0 однократной вбр-и и приемочное число v, составить план посл-го кр-ля, найти $n_{\min}$, $M[n|\lambda]$, $P(n < n_0)$, $P(n < \frac{1}{2}n_0)$.

Р. Предполагая, что $n_0 > 15$ (т.к. α и β малы), используем замену закона χ^2-рсп-ия, к-му подчиняется вел-а $\frac{2\lambda n_0}{\tilde{\lambda}}$, норм-ым, т.е. полагаем

$$P(\chi^2 \ge \chi_q^2) = 0{,}5 - 0{,}5\,\Phi\left(\frac{\chi_q^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right),$$

т.к. число степеней свободы $k = 2n$. Тогда получаем ур-ия:

$$0{,}5 - 0{,}5\,\Phi\left(\frac{\chi_{q0}^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,\ 0{,}5 - 0{,}5\,\Phi\left(\frac{\chi_{q1}^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) = \beta,$$

откуда находим с помощью табл. T_2 $\frac{\chi_{q0}^2 - 2n}{2\sqrt{n}} = -3{,}090$, $\frac{\chi_{q1}^2 - 2n}{2\sqrt{n}} = 2{,}324$ или, учитывая, что $\chi_{q0}^2 = 2\lambda_0 n_0 v$, $\chi_{q1}^2 = 2\lambda_1 n_0 v$, $\lambda_0 = 1/t_0 = 0{,}00078$, $\lambda_1 = 1/t_1 = 0{,}001413$, имеем

$$\left.\begin{aligned} 0{,}000780 - v &= -3{,}090\frac{v}{\sqrt{n_0}}; \\ 0{,}001413 - v &= 2{,}324\frac{v}{\sqrt{n_0}}; \end{aligned}\right\}$$

решая эту систему ур-й, получим $v = 0{,}001141$, $n_0 = 99{,}03 \approx 100$.

Т.к. $n_0 > 15$, то использование норм-го закона рсп-ия допустимо.

Для посл-го кр-ля находим: $B = 0{,}01001$; $\ln B = -4{,}604$; $A = 990$, $\ln A = 6{,}898$; $h_1 = 7273$; $h_2 = -1090 \cdot 10$; $h_3 = 938{,}0$; $\lambda^* = 1/h_3 = 0{,}001066$.

Опр-им $n_{\min}$. Для худшей из хороших партий $\tilde{t} = t_0 = 1282$ час, $n_{\min} = 21{,}1 \approx 22$; для лучшей из плохих партий $\tilde{t} = t_1 = 708$ час, $n_{\min} = 47{,}4 \approx 48$.

Находим ср. числа исп-й при различных λ: $M[n|\lambda_0] = 20{,}7$; $M[n|\lambda] = 46{,}6$; $M[n]_{\max} = 90{,}0$.

Учитывая, что $\alpha << \beta$, опр-им $K = |\ln B| = 4{,}604$, а затем параметр c рсп-ия Вальда $c = 1{,}525$; далее находим $y_{01} = 100/20{,}7 = 4{,}82$; $y_{02} = 2{,}41$.

Из табл. фк-и рсп-ия Вальда по входным вел-ам y_{01} (y_{02}) и c имеем:

$$p = P(n < 100) > 0{,}99 \text{ (но } p < 0{,}999), \; P(n < 50) = 0{,}939.$$

ЛЕКЦИЯ 25

8.3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1°. Основные понятия. Эффективность сложных систем. Экономическая эффективность ОАСУ. В условиях конкуренции выпуска кач-ой продукции и расширения пространства (рынка) их реализации объективно возникает нх-ть повышения эффективности (эфс.) общественного производства (прз.) и кач-ва выпускаемой продукции и работ, нх-ых при этом. Для этого каждый руководитель должен стремиться принять наиболее эффективное (эфн.) решение в любом секторе н/х-ва на каждом этапе пр-ва продукции.

Чтобы убедиться в эфс-и принятого решения, нужно оценить возможный эффект (эф.) от внедрения решения при различных условиях и выбрать из всех вариантов (врт.) наиболее опт-ый в данных условиях. Сд-но, каждый практический работник должен владеть математико-статистическими (мт-стсч.) методами оценки эфс-и принятых решений на основе упл-ия процессами с применением АСУ.

Основы теории эфс-и построены школами МГУ, Н.Н. Моисеева, Ю.Б. Гермейера, В.М. Глушкова и Н.П. Бусленко на основе методологии иссл-я операций (см. КС). Они включают широкий спектр мт-их моделей, построенных методами теории инф-и, теории игр, теории МО, теории расписаний и др., т.е. мт-ка и теория эфс-и тесно связаны между собой. Кратко изложим эту связь.

При опр-и эфс-и прз-ва продукции для предприятий (прд.) и объединений многими авторами рассматриваются четыре группы показателей: 1) использования труда (темпы роста производительности (прзл.) труда, доля прироста чистой (см. КС) и товарной (валовой, см. КС) продукции в результате повышения прзл-ти труда, экономия живого труда); 2) использования основных фондов, оборотных средств и капитальных вложений (сюда включаются фондоотдача, оборачиваемость оборотных средств, отн-ие прироста чистой продукции к приросту капитальных вложений, срок окупаемости капитальных вложений); 3) использования материальных затрат (здесь учитывают уровень материальных затрат на рубль товарной (валютной) продукции); 4) обобщающих показателей (сюда относят темпы роста прз-ва, прз-во чистой продукции на рубль затрат, отс-ную экономию использования живого труда, общую рентабельность).

Важнейшим направлением повышения экнч-ой эфс-и упл-ия прз-ом яв-ся использование АСУ (см. КС). Поэтому далее дт-ое внимание уделено эфс-и использования АСУ и ЭВМ. Общий подход (методика) к оценке эфс-и должен учитывать, что современные АСУ – это сложные человеко-машинные системы. Отраслевые методики, учитывающие особенности отрасли в расчетах экнч-ой эфс-ти АСУП (см. КС), приобретают законную силу только после согласования их с ГКНТ и Госпланом.

Одним из важнейших кт-ев эфс-и яв-ся экнч-ая эфс-ть. Поэтому по опр-ю экнч-ой эфс-и остановимся на расчетах по методике для отраслевой автз-ой системы упл-ия (ОАСУ). Состав ОАСУ включает сд-ие подсистемы:

– перспективного развития отрасли;
– технико-экономического плн-ия;
– оперативного упл-ия;
– упл-ия сбытом продукции;
– упл-ия финансовой деятельностью;
– плн-ия, учета и анализа труда и заработной платы;
– упл-ия материально-техническим снабжением;
– плн-ия, учета и анализа кадров;
– упл-ия капитальным строительством;
– бухгалтерского учета;
– научно-технической информации;
– упл-ия научно-исследовательскими работами.

Этот состав может корректироваться в зв-ти от особенностей отрасли.

Экнч-ая эфс-ть ОАСУ опр-ся на основе факторов (фкт.), имеющих колн. оценки. Экнч-ие показатели опр-ся по действующим на момент расчета оптовым ценам, тарифам и ставкам заработной платы. При опр-и экнч-ой эфс-ти ОАСУ нх-мо обеспечить сопоставимость всех показателей во вр-и, по ценам, нормам и кругу эл-ов затрат.

Экнч-ая эфс-ть ОАСУ опр-ся тремя основными хркс-ми:

1. Годовая экономия от снижения себестоимости продукции (или годовой прирост прибыли от внедрения ОАСУ). Она является результатом:

– снижения затрат на выпуск всей продукции;

– прибыли вследствие улучшения использования прзн-ых мощностей, дпнт-ой реализации продукции в результате улучшения плана прз-ва.

Годовой прирост прибыли может быть рассчитан по фм-е

$$Э_{год} = \left(\frac{A_2 - A_1}{A_1} \right) \cdot П_1 + \Delta П^A + \Delta C^A, \qquad (1)$$

где A_1 – годовой объем реализации продукции до внедрения ОАСУ (млн. руб. и далее),

A_2 – годовой объем реализации продукции после внедрения ОАСУ,

$\Delta A = A_2 – A_1$ – дпнт-ый прирост объема выпуска и реализации продукции,

$П_1$ – прибыль от реализации продукции после внедрения ОАСУ,

$\Delta П^A$ – дпнт. прибыль, получаемая в результате ликвидации непроизводительных расходов в отрасли, не входящих в себестоимость выпускаемой продукции,

ΔC^A – изменение себестоимости реализуемой продукции вследствие фнцр-ия ОАСУ.

2. Годовой экнч-й эф-т (от внедрения ОАСУ). Он опр-ся по фм-е:

$$Э = \left(\frac{A_2 - A_1}{A_1} \right) \cdot П_1 + \Delta П^A + \Delta C^A - E_H K_Д^A = Э_{год} - E_H \cdot K_Д^A, \qquad (2)$$

где E_H – нормативный коэф. экнч-ой эфс-ти капитальных вложений в данной отрасли,

$K_Д^A$ – дпн. затраты отрасли на создание ОАСУ (проектирование и внедрение), млн. руб.

3. Эфс-ть затрат (на создание ОАСУ). Она опр-ся фм-ой

$$E_H = Э_{год} / K_Д^A \qquad (3)$$

или обратной величиной – сроком окупаемости

$$T = K_Д^A / Э_{год} \,. \qquad (4)$$

Вел-ы A_1 и E_H, входящие в фм-ы (1)-(4), известны. Сд-но, для расчета трех основных характеристик, опр-щих экнч-ю эфс-ть ОАСУ, нх-мо опр-ть ΔA, $\Delta П^A$, ΔC^A, $K_Д^A$.

Приведем сд-ие расчетные фм. для конкретных задач.

1*. Расчет дпн-го прироста объема выпуска и реализации продукции. Рас-им фкт-ы, к-ые могут реально повлиять на прирост объема выпуска и реализации продукции в результате внедрения ОАСУ.

1. Одним из основных фкт-в яв-ся оптз-я прзн-ой программы (прг.), проводимая ГВЦ АСУ. Ств-щий прирост объема выпуска и реализации ΔA_1^A (млн. руб.) учитывается в плане. В подсистемах ОАСУ решается одна или несколько сд-их задач:

– опр-ие основных показателей опт-го плана развития прз-ва отрасли,

– расчет врт-ов опт-ых перспективных планов развития и размещения прз-ва отрасли,

– расчет опт-го текущего прз-го плана прд-й или подотраслей,

– выявление резервов дпн-ых мощностей в результате анализа хода выполнения плана.

Решив указанные задачи и зная годовой объем выпуска и реализации продукции, получаемый в результате оптз-и прз-ой прг-мы A_2^1 (млн. руб.), можно опр-ть

$$\Delta A_1^A = A_2^1 - \text{А}_1. \qquad (5)$$

2. В ходе выполнения плана ГВЦ АСУ проводится анализ основных показателей прз-но хоз-ой деятельности отрасли, на основе к-го выявляются и включаются в прз-во резервы, принимаются меры по обеспечению ритмичности прз-ва и ликвидации срывов в выпуске продукции, т.е. делают корректировку плана и получают дпнт-ый прирост объема выпуска и реализации продукции по фм-е

$$\Delta A_2^A = \Delta A_ф \cdot Г_{нп} \cdot 12, \qquad (6)$$

где $\Delta A_ф$ – среднемесячное фактически сложившееся невыполнение плана выпуска продукции до внедрения ОАСУ (млн. руб.), $Г_{нп}$ – ср. месячный коэф. возможного сокращения невыполнения плана выпуска продукции в результате своевременного получения инф-и и принятия решения в усл-ях фнцр-ия ОАСУ.

3. В подсистеме ОАСУ решается задача учета и контроля труда и заработной платы.

Путем оперативного вмешательства с помощью ОАСУ в кадровую политику, политику труда и заработной платы, приводящего к уменьшению текучести кадров основных рабочих, можно получить дпнт-ю продукцию:

$$\Delta A_3^A = П_{тр} \cdot Г_{пт} \cdot Ч_у \cdot Г_{ст}, \qquad (7)$$

где $Ч_у$ – среднегодовое число основных рабочих, уволенных по неуважительным причинам,

$Г_{ст}$ – коэф-т снижения текучести основных рабочих в условиях фнцр-ия ОАСУ,

$П_{тр}$ – фактическая среднегодовая выработка на одного основного рабочего (руб.),

$Г_{пт}$ – коэф. снижения прзл-ти труда основных рабочих при переходе на др. работу.

4. В подсистемах ОАСУ решаются также задачи кр-ля за ходом выполнения плана капитальных вложений, строительства пусковых и особо важных проектов. Использование результатов решения этих задач на ОАСУ позволяет добиться досрочного ввода в действие прзн-ых мощностей и дпнт-го выпуска продукции:

$$\Delta A_4^A = K_ф \frac{Ф_{отд}}{12} \cdot t_c, \qquad (8)$$

где $К_ф$ – стоимость досрочно вводимых в эксплуатацию основных фондов в результате фнцр-ия ОАСУ (млн. руб.),

$Ф_{отд}$ – годовая фондоотдача в отрасли от внедрения ОАСУ (млн. руб.),

t_c – вел-а сокращения срока строительства в результате фнцр-ия ОАСУ (мес.).

5. Кроме вышеуказанных в методике четырех составляющих (сост.), на прирост объема выпуска и реализации продукции могут оказать и др. фкт-ы. Обозначим общее число факторов через n, тогда получим

$$A_2 = A_1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i^A \,. \qquad (9)$$

Фкт-ы с индексами $i = 1, 2, 3, 4$ описаны. Фкт-ы $i = \overline{5,n}$ рас-им далее. С учетом (9) имеем:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + A_2^1 - \text{А}_1 + ΔA_ф{\cdot}Г_{нп}{\cdot}12 + П_{тр}{\cdot}Г_{пт}{\cdot}Ч_у{\cdot}Г_{ст}, + К_ф \frac{Ф_{отд}}{12} \cdot t_c = \\ &= A_2^1 + \Delta A_ф{\cdot}Г_{нп}{\cdot}12 + П_{тр}{\cdot}Г_{пт}{\cdot}Ч_у{\cdot}Г_{ст}, + К_ф \frac{Ф_{отд}}{12}\, t_c. \end{aligned} \qquad (10)$$

п1. Опр-ть дпнт-ый прирост объема выпуска и реализации продукции после внедрения ОАСУ (т.е. в результате внедрения оптз-и прзн-ой прг-мы), если зн-ие годового объема выпуска и реализации продукции составляет 3 млрд. руб., среднемесячное фактически сложившееся невыполнение плана выпуска продукции до внедрения ОАСУ равно 1 млн. руб., среднемесячное зн-ие коэф-та $Г_{нп}$ = 0,10. Известны значения $П_{тр}$ = 600 руб., $Г_{пт}$ = 0,15, $Ч_у$ = = 2000 чел., $Г_{ст}$ = 0,40. Сроки строительства в результате фнцр-ия ОАСУ не снизились, A_1 = 2969,2 млн. руб.

Р. Имеем: A^1 = 3000 (млн. руб. и далее), $\Delta A_ф$ = 1, $Г_{нп}$ = 0,10, $П_{тр}$ = 0,006, $Г_{пт}$ = 0,15, $Ч_у$ = 2000 чел., $Г_{ст}$ = 0,40, t_c = 0. По (10) с учетом t_c = 0 получим A_2 = 3000 + 1·0,10·12 + 0,006·0,15·2000·0,40 ≈ 3001,92 млн. руб. Отсюда находим дополнительный прирост объема выпуска и реализации продукции

$$\Delta A = A_2 - A_1 = 3001{,}92 - 2969{,}9 = 32{,}02 \text{ млн. руб.}$$

2*. Расчет дпнт-ой прибыли в результате сокращения непроизводительных расходов, не входящих в себестоимость продукции. Благодаря оперативному кр-ю и регулированию финансовых отн-й при помощи ОАСУ сокращаются потери по уплате неустоек, штрафов и пени, что позволяет получить дпнт-ю прибыль. На ОАСУ решаются сд-ие задачи:

– оптз-я плана рсп-ия фондов по прд-ям и орг-ям отрасли,

– формирование плана поставок и оперативный контроль хода поставок,

– анализ финансового состояния прд-й и орг-й отрасли,

– анализ фкт-ов, влияющих на неуд-ое финансовое состояние прд-ий.

Решение первых двух задач позволяет сократить потери материальных ресурсов, комплектующих изделий, готовой продукции при хранении на складе. Это дает рост прибыли:

$$\Delta П_1^A = У_i{\cdot}Г_{пi} \qquad (11)$$

где $У_i$ – годовые убытки в отрасли от i-ых потерь (млн. руб.), $Г_{пi}$ – коэф-т i-ых потерь до фнцр. ОАСУ.

От использования результатов решения последних двух задач получим прибыль

$$\Delta \Pi_2^A = H_{ni} \cdot \Gamma_{непр\,i}, \tag{11а}$$

где H_{ni} – вел-а непроизводительных расходов i-го вида в отрасли до внедрения ОАСУ,

$\Gamma_{непр\,i}$ – коэф-т снижения непроизводительных расходов i-го вида при фнцр-и ОАСУ.

Из (11) и (11а) получим всю вел-у дпнт-ой прибыли в виде

$$\Delta \Pi^A = \sum_{i=1}^{n} \Delta \Pi_i^A \,. \tag{11б}$$

п2. В год, предшествующий внедрению ОАСУ, на хранение готовой продукции на складах затрачено 1,5 млрд. руб., на хранение комплектующих изделий – 2,5 млн. руб., на хранение запасных эл-тов – 1,2 млн. руб. Кроме того, из-за сверхнормативного простоя железнодорожного транспорта на станциях разгрузки прд-й выплачено штрафов 1,8 млн. руб., за несвоевременную поставку продукции – 500 тыс. руб., пени за несвоевременную выплату по счетам составили 25 тыс. руб. После внедрения на ОАСУ опт-го плана рсп-ия фондов по прд-ям и внедрения оперативного контроля поставок коэф-т снижения потерь составил 0,2. Анализ финансового состояния прд-й и фкт-в, приводящих к нарушению установленных финансовых требований, позволил при помощи ОАСУ получить коэф-т снижения непроизводительных расходов, равный 0,3. Опр-ть объем дпнт-ой прибыли, полученной в результате сокращения непроизводительных расходов, не входящих в себестоимость продукцию.

Р. Имеем: $У_1 = 1{,}5 + 2{,}5 + 1{,}2 = 5{,}2$ млн. руб., $\Gamma_{n1} = 0{,}2$, $H_{n2} = 1{,}8 + 0{,}5 + 0{,}025 = 2{,}325$ млн. руб., $\Gamma_{непр\,2} = 0{,}3$. Находим $\Delta \Pi_1^A = У_1 \cdot \Gamma_{n1} = 5{,}2 \cdot 0{,}2 = 1{,}04$ млн. руб., $\Delta \Pi_2^A = H_{n2} \cdot \Gamma_{непр\,2} = 2{,}325 \cdot 0{,}3 = 0{,}6975$ млн. руб. $\Delta \Pi^A = \Delta \Pi_1^A + \Delta \Pi_2^A = 1{,}04 + 0{,}6975 \approx 1{,}74$ млн. руб.

3*. Расчет снижения себестоимости реализуемой продукции. Благодаря оперативному вмешательству при фнцр-и ОАСУ можно снизить себестоимость реализуемой продукции

$$\Delta C^A = \Delta C_{уп}^A - C_{экс}^{ВЦ}\,, \tag{12}$$

где $\Delta C_{уп}^A$ – годовая экономия условно-переменных расходов, опр-мых прямым счетом, в условиях фнцр-ия ОАСУ (млн. руб.), $C_{экс}^{ВЦ}$ – эксплуатационные затраты на содержание ГВЦ (млн. руб.).

Рассмотрим сост-ие $\Delta C_{уп}^A$, а затем источники получения данных для расчетов:

$$\Delta C_{уп}^A = \Delta C_{м}^A + \Delta C_{э}^A + \Delta C_{хм}^A + \Delta C_{з}^A + \Delta C_{т}^A + \Delta C_{нир}^A + \Delta C_{и}^A\,, \tag{13}$$

где $\Delta C_{м}^A$ – экономия (экн.) затрат на сырье и материалы (млн. руб. и так далее), $\Delta C_{э}^A$ – экн-я затрат на электроэнергию и топливо, $\Delta C_{хм}^A$ – экн-я текущих затрат отрасли в результате уменьшения расходов по хранению запасов материалов, $\Delta C_{з}^{A}$ – экн-я затрат на основную и дпнт-ю зарплату (с отчислениями на социальное страхование) основных рабочих в результате пересмотра норм выработки, $\Delta C_{т}^{A}$ – экн-я затрат на транспортные расходы в результате рационального прикрепления поставщиков к потребителям, $\Delta C_{нир}^{A}$ – экн-я затрат в результате снижения расходов на проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, $\Delta C_{и}^{A}$ – экн-я затрат в результате замены ручной обработки инф-и на автн-ю.

Эксплуатационные затраты на содержание ГВЦ опр-ся по фм-е

$$C_{экс}^{ВЦ} = З_{ф}^{ВЦ} + a^{ВЦ} + C_{м}^{ВЦ} + C_{т}^{ВЦ} + H_{т}^{ВЦ} + H_{н}^{ВЦ} + C_{э}^{ВЦ} + C_{проч}^{ВЦ}, \qquad (14)$$

где $З_{ф}^{ВЦ}$ – основная и дпнт-ая заработная плата персонала, обслуживающего инфн-ю сеть и ГВЦ отрасли с отчислениями на социальное страхование (млн. руб. и так далее), $a^{ВЦ}$ – амортизация оборудования, $C_{м}^{ВЦ}$ – затраты на материалы, нх-ые для фнцр-ия ГВЦ, $H_{т}^{ВЦ}$ – затраты на текущий и профилактический ремонт техн-х средств, $H_{н}^{ВЦ}$ – накладные расходы на содержание ГВЦ, $C_{э}^{ВЦ}$ – затраты на прз-ное потребление электроэнергии техн-ми средствами, $C_{проч}^{ВЦ}$ – прочие затраты.

Пусть по фм-ам (13) и (14) получили результаты $\Delta C_{уп}^{A} \approx 9{,}72$ млн. руб. и $C_{экс}^{ВЦ} \approx 1{,}74$ млн. руб. тогда по (12) имеем $\Delta C^{A} = 9{,}72 - 1{,}74 = 7{,}98$ млн. руб. – изменение себестоимости реализуемой продукции вследствие фнцр-ия ОАСУ.

4*. Расчет затрат на создание ОАСУ. Рекомендуется производить расчет затрат отрасли на создание ОАСУ по фм-е

$$K_{Д}^{A} = K_{П}^{A} + K_{о}^{A} \pm \Delta O_{о}^{A} + K_{Л}^{A} - K_{выс}^{A}, \qquad (15)$$

где $K_{П}^{A}$ – прз. затраты (млн. руб. и так далее), $K_{о}^{A}$ – затраты на приобретение техн-х средств и строительство здания ГВЦ отрасли, $\Delta O_{о}^{A}$ – изменение вел-ны оборотных средств, $K_{Л}^{A}$ – остаточная стоимость ликвидируемого оборудования, устройств, зданий, сооружений в отрасли, к-ые при внедрении ОАСУ не нашли применения и реализация к-ых невозможна, $K_{выс}^{A}$ – остаточная стоимость высвобождаемого оборудования, устройств, зданий, сооружений в отрасли, к-ые будут использовании при внедрении ОАСУ, или на др. участках прз-ва, или реализованы на сторону.

Теперь вычислим составляющие $K_{Д}^{A}$.

1. Прз. затраты опр-ся по фм-е

$$K_{П}^{A} = K_{пп}^{A} + K_{пр}^{A}, \qquad (16)$$

где $K_{пп}^{A}$ – затраты на обследование объекта, разработку техн-го задания и др. предпроектные работы, $K_{пр}^{A}$ – затраты на техн-ое и рабочее проектирование и внедрение ОАСУ.

Рассмотрим методику расчета сост-их фм-ы (16):

а) $K^{A}_{nn} = T_{np} \cdot З_{итр}(1 + Н_{дс} + Н_{н})$, (17)

где $Н_{дс}$ – коэф-т, учитывающий дпнт. заработную плату и отчисления на социальное страхование, $Н_{н}$ – коэф., учитывающий накладные расходы, T_{np} – трудоемкость разработки техн. задания и др. проектных работ (чел.-дни), $З_{итр}$ – ср. месячная зарплата одного ИТР (руб.);

б) $K^{A}_{np} = З_{итр}(T_{mn} + T_{pn} + T_{вн})(1 + Н_{дс} + Н_{н})$ (18)

где T_{mn} – трудоемкость разработки техн. проекта (чел.-дни), T_{pn} – трудоемкость разработки рабочего проекта (чел.-дни), $T_{вн}$ – трудоемкость внедрения ОАСУ (чел.-дни).

Заметим, что опр-ие сост-их в (18) – весьма сложный процесс и фм-а (18) носит условный характер. Н-р, в ней не учтена стоимость машинного времени на отладку прг-м. Однако такие ошибки могут быть постепенно устранены.

2. Затраты на приобретение техн. средств и строительство здания ГВЦ ОАСУ выч-ся по фм-е

$$K^{A}_{o} = K^{A}_{ктс} + K^{A}_{un} + K^{A}_{c}, \qquad (19)$$

где $K^{A}_{ктс}$ – затраты на приобретение, транспортировку, монтаж и наладку комплекса техн-их средств ГВЦ, K^{A}_{un} – затраты на оборудование инфн-ых и кустовых пунктов и каналов связи ОАСУ, K^{A}_{c} – затраты на строительство здания ГВЦ.

Затраты на строительство здания ГВЦ опр-ся по фм-е

$$K^{A}_{c} = У_{n}(Б_{m} + Б_{в} + Б_{n}), \qquad (20)$$

где $У_{n}$ – стоимость 1 м^2 площади (пщ.) ГВЦ, к-ая опр-ся по «Единым районным единовременным расценкам» (руб.); $Б_{m}$, $Б_{в}$, $Б_{n}$ – пщ. ств-но для монтажа техн. средств, размещения вспомогательного оборудования, размещение персонала ГВЦ.

3. Эл-т ΔO^{A}_{o} фм-ы (15) опр-ся после решения в подсистемах ОАСУ задач:

– расчет сводной потребности отрасли в материалах,

– прогнозирование потребности отрасли в материальных ресурсах.

После решения этих задач можно подсчитать ΔO^{A}_{o} по фм-е

$$\Delta O^{A}_{o} = (O_{ф} - O_{н}Г_{в})Г_{св}, \qquad (21)$$

где $O_{ф}$, $O_{н}$ – фактические и нормативные среднегодовые остатки оборотных средств по тем же видам ценностей (млн. руб.), $Г_{в}$ – коэф. роста выпуска продукции в условиях фнцр-ия ОАСУ, $Г_{св}$ – коэф. снижения сверхнормативных остатков оборотных средств в связи с решением на ОАСУ двух упомянутых выше задач.

4. Зн-ия двух др. сост-их $K^{A}_{Л}$ и $K^{A}_{выс}$ фм-ы (15) выявляются при фнцр-и ОАСУ и зв-ят от конкретных условий.

п3. Провести расчет затрат на создание ОАСУ по изложенной методике, если известны сд-ие сост. расходов на этапе разработки техн-го задания:

– ср. дневная зарплата одного ИТР без учета дпнт-ой зарплаты, отчислений на социальное страхование и накладных расходов составляет 5 руб.

$T_{пр}$ = 10000 чел.-дней, $Б_п$ = 1500 м^2,
$Н_{дс}$ = 0,16, $K^A_{ктс}$ = 7 млн. руб.,
$Н_н$ = 0,5, $K^A_{ип}$ = 0,25 млн. руб.,
$Т_{тп}$ = 90000 чел.-дней, $K^A_Л$ = 2,5 млн. руб.,
$Т_{рп}$ = 160000 чел.-дней, $О_ф$ = 12,6 млн. руб.,
$Т_{вн}$ = 150000 чел.-дней, $О_н$ = 6 млн. руб.,
$У_п$ = 200 руб., $Г_в$ = 1,2,
$Б_т$ = 1000 м^2, $Г_{св}$ = 0,2,
$Б_в$ = 200 м^2, $K^A_{выс}$ = 1 млн. руб.

Р. Находим: по (17) предпроектные затраты

$$K^A_{пп} = 10000 \cdot 5(1 + 0{,}16 + 0{,}5) = 83000 \text{ руб.} = 0{,}083 \text{ млн. руб.}$$

По (18) затраты на техн-ое и рабочее проектирование:

$$K^A_{пр} = 5 \cdot (90000 + 160000 + 150000)(1 + 0{,}16 + 0{,}5) = 3320000 \text{ руб.} = 3{,}32 \text{ млн. руб.}$$

По (16) прз-ые затраты: $K^A_П = 0{,}083 + 3{,}32 = 3{,}403$ млн. руб.

По (20) затраты на строительство здания ГВЦ: $K^A_c = 200(1000 + 200 + 1500) =$ $= 540000 = 0{,}54$ млн. руб.

По (19) затраты на оборудование и строительно-монтажные работы: $K^A_O = 7 +$ $+ 0{,}25 + 0{,}54 = 7{,}79$ млн. руб. По (21) экн-ю в результате изменения остатков оборотных средств: $\Delta O^A_O = (12{,}6 - 6 \cdot 1{,}2)0{,}2 = 1{,}08$ млн. руб. По (15) дпн-ые затраты отрасли на создание ОАСУ: $K^A_Д = 3{,}403 + 7{,}79 - 1{,}08 + 2{,}5 - 1 \approx$ $\approx 11{,}61$ млн. руб.

5*. Задачи на вычисление годового экнч-го эффекта от внедрения ОАСУ и сроков окупаемости. Задачи, решенные в данном пункте, позволили опр-ть ряд хркс-к для дальнейшего расчета основных кт-ев эфс-и. С учетом ранее вычисленных данных решим сд-ие задачи.

п4. Опр-ть годовой прирост прибыли от внедрения ОАСУ $Э_{год}$, если известны сд-ие данные: прибыль от реализации продукции до внедрения ОАСУ равна 800 млн. руб., годовой объем реализации продукции до внедрения ОАСУ – 2969,9 млн. руб., годовой объем реализации продукции после внедрения ОАСУ (см. п1) составляет 3001,92 млн. руб., дпнт-ая прибыль в результате ликвидации непроизводительных расходов в отрасли, не входящих в себестоимость выпускаемой продукции (п2), равна 1,74 млн. руб., ожидаемое снижение себестоимости реализуемой продукции благодаря фнцр-ю ОАСУ равно 7,98 млн. руб.

Р. Имеем: $П_1$ = 800 млн. руб. (и так далее), A_1 = 2969,9, A_2 = 3001,92, $\Delta П^A$ = 1,74, ΔC^A = 7,98. Находим по (1) годовой прирост от внедрения ОАСУ

$$Э_{год} = \frac{3001{,}92 - 2969{,}9}{2969{,}9} \cdot 800 + 1{,}74 + 7{,}98 = 18{,}36 \text{ млн. руб.}$$

Итак, рас-ли методику оценки экнч-ой эфс-ти отраслевых ОАСУ. Проведение расчетов является зачастую весьма длительным процессом. Подобные расчеты проводятся на ЭВМ, т.к. оптз-ия планов яв-ся дт-но сложной проблемой, но позволяет получить прирост объема выпуска и реализации продукции ΔA_1^A . Чтобы модели планов были более адекватны реальным процессам, нх-мо учитывать и возможные слн. отк-ия при реализации планов, что требует применения методов теории вер-ей.

Решенные примеры показали, сколь разнообразны методы и подходы при опр-и экнч-ой эфс-и ОАСУ. Причем самой сложной задачей яв-ся решение вопроса о том, эф-но ли внедрять АСУ и как быстро окупятся затраты. Однако с появлением АСУ – сложных систем (СС) – появилась нх-сть разработки методов оценки эфс-ти СС-м вообще. Понятия системы и СС см. в КС.

Упл-ие прз-ом и отраслями н/х-ва осуществляется при помощи автз-ых систем упл-ия (АСУП, АСУ, ОАСУ), обеспеченных современными ЭВМ. Прз-ые объединения, отрасли н/х-ва, упл-мые АСУ, яв-ся типичными представителями СС. Задачи, решаемые АСУ, можно расв-ть как мт-ие модели анализа и синтеза СС.

Сущв-ие различных типов ЭВМ и различных принципов их мт-го обеспечения ранее приводило к большим затратам на пргв-ие, затрудняло типизацию задач анализа систем и обмен инф-ей при эксплуатации АСУ. Поэтому такие разнородные системы объединили в гос. единую систему ЕС ЭВМ. При этом одной из важнейших проблем – проблемой унификации мт-их схем, используемых при мдв-и, и методов машинного анализа мд-ей – занимается теория СС. Причем поведение СС не всегда удается оценить колн-ми показателями, тогда ее можно охарактеризовать только кач-но. Это вызвало к жизни качн-ую теорию СС. Наконец, в последнее десятилетие в иссл-и СС все чаще применяется имитационное (имт.) мдв-ие.

Сложная система – мн. неодн-ых эл-ов, находящихся в отн-ях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ю целостность, единство. Н-р, энергетические комплексы, телефонные сети крупных городов, инфн-ые системы, прзн-ые процессы крупного предприятия, системы упл-ия полетом в крупных аэропортах, ОАСУ и др. (см. КС).

В кач-ве основных св-в СС можно выделить сд-ие:

1) большое число взаимосвязанных и взаимодействующих эл-ов;

2) сложность выполняемой фк-и для достижения цели фнцр-ия;

3) иерархическая структура, возможность деления системы на подсистемы;

4) наличие упл-ия, интенсивных потоков инф-и и разветвленной инфн-ой сети;

5) взаимодействие с внешней средой и фнцр-ие в условиях воздействия слн-ых фкт-ов.

Теперь рас-им фнц-ые хркс-ки СС. К ним относятся показатели эфс-ти, надежности, кач-ва упл-ия, помехозащищенности и устойчивости. Основным показателем яв-ся эфс-ть. Она хркз-ет кач-во фнцр-ия СС. Для этого надо строго определить цели и задачи фнцр-ия СС, т.е. совокупность показателей эфс-ти должна опр-ять степень приспособленности СС-ы к выполнению поставленных перед нею задач, учитывать основные особенности СС-ы (хрк-р ее взаимодействия с внешней средой, условия возникновения и хрк-р воздействия внутренних возмущающих фкт-ов, структуру системы).

Каждый показатель эфс-ти опр-ся мн-ом основных параметров: параметры системы X_1, …, X_n и параметры внешней среды $Y_1,\dots,Y_m$. В результате он может быть представлен в общем виде сд-ей фм-ой:

$$R = R(X_1,\dots, X_n;\ Y_1,\dots,Y_m). \tag{22}$$

СС-ы фнцр-ют при взаимодействии с большим кол-вом слн-ых фкт-ов, тогда результаты их фнцр-ия зачастую носят слн. хрк-р. Поэтому в кач-ве показателей эфс-ти часто пользуются вер-ми нек-ых слн. событий (сб.) или ср. зн-ми (мт. ож-ми). Так можно опр-ть ср. число пассажиров, отправляемых из аэропорта в течение суток, ср. число изделий, выпускаемых прд-ем в течение недели. Можно также опр-ть вер-ть решения задач, поступающих со ср-й интенсивностью на ВЦ, если ср. время их решения опр-ено, и т.д.

Отметим, что для большинства систем не найден общий, единый показатель эфс-и, каждая из к–ых хркз-ся своим показателем эфс-и. В таких сл-х нх-мо использовать показатели, к-ые позволяют согласовать «конфликтующие» между собой тенденции в задачах и целях фнцр-ия системы.

Пусть требуется оценить эфс-ть такой СС-ы, как комбинат. В кач-е кт-ия эфс-и можно принять приведенные затраты

$$З_п = C + E_н K, \tag{23}$$

где C – текущие затраты, включая амортизацию (себестоимость продукции), K – капитальные вложения, $E_н$ – нормативный коэф. эфс-и.

Для уменьшения приведенных затрат нх-мо экономить сырье и материалы, уменьшить расходы электроэнергии и топлива, снизить фонд заработной платы, уменьшить капитальные вложения.

Если же в кач-ве кт-ия эф-ти принять производительность (прзл.) оборудования, то внимание надо сосредоточить на параметрах, к-ые влияют на этот показатель. А такие параметры, как фонд зарплаты, себестоимость продукции, расход топлива и электроэнергии отодвигаются на второй план. Эти разнородные тенденции можно согласовать, если ввести нек-ые огр-ия для одного из кт-ев. Можно использовать кт-й прзл-ти оборудования, при к-ом приведенные затраты не превышают заданной вел-ы.

Сд-но, приходится либо использовать мн-во (набор) кт-ев эфс-и, либо общие кт-и эфс-и с огр-ми.

Для получения показателей эфс-и результаты фнцр-ия эл-ов системы нх-мо выражать в колн-ой форме. Колн. выражение результатов фнцр-ия эл-тов системы наз. хркс-ми фнцр-ия средств системы. Показатели эфс-и фнцр-ия средств системы получаются путем прб-ия хркс-к фнцр-ия эл-ов системы. Показатели эфс-и фнцр-ия средств системы наз-ся частными показателями. Они не хркз-ют роли данной подсистемы в достижении целей всей системы. Поэтому расв-ют не сам чистый показатель эфс-и, а его приращение, полученное вследствие фнцр-ия данной подсистемы, к-ое для i-й подсистемы первого уровня имеет вид

$$\Phi_l^{C(1,i)} - \Phi_l^{0(1,i)}, \tag{24}$$

где $\Phi_l^{C(1,i)}$ – l-й показатель эфс-и фнцр-ия всей системы, $(1, i)$ – символ, обозначающий первый иерархический уровень расв-мой подсистемы (1) и ее номер (i) на этом иерархическом уровне, l – индекс показателя эфс-ти, ств-щий l-й цели фнцр-ия ($l = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,n}$), C – индекс, означающий что кт-й эфс-и относится ко всей системе, $\Phi_l^{0(1,i)}$ – показатель эфс-и фнцр-ия средств системы при условии, что i-я подсистема первого уровня совершенно не участвует в достижении l-й цели системы, но все ресурсы системы между остальными подсистемами распределены опт-ым образом.

При таком подходе оказывается возможным выделить вклад каждой системы первого уровня в достижение l-й цели фнцр-ия системы в целом. Меняя l, можно выявить, каким образом данная $(1, i)$-я подсистема участвует в достижении различных целей системы. Точно так же можно опр-ть вклад любой подсистемы второго уровня $(2, ij)$ и т.д. Опр-ые трудности вызывает размерность кт-ия. Она может не соответствовать хрк-у фнцр-ия средств этой подсистемы. Пусть в кач-е системы расв-ся экн-ка страны, а l-я цель состоит в прз-ве угля. В кач-е $(1, i)$-й подсистемы расв-ся Министерство легкой промышленности. В данной ситуации эфс-ть средств легкой промышленности не будет измеряться в тоннах угля. Во избежание подобных недоразумений в кач-е основных показателей эфс-и средств (1, i)-й подсистемы принято выбирать отс-ые приращения показателей фнцр-ия всех средств системы, получаемые вследствие фнцр-ия (1, i)-й подсистемы:

$$R_l^{(1,i)} = \frac{\Phi_l^{C(1,i)} - \Phi_l^{0(1,i)}}{\Phi_l^{u(1,i)} - \Phi_l^{0(1,i)}} \ (l = \overline{1,k}\,,\ i = \overline{1,n}\,), \tag{25}$$

где $\Phi_l^{u(1,i)}$ – показатель эфс-и средств системы при условии, что средства (1, i)-й подсистемы идеально участвуют (т.е., н-р, при ресурсах, к-ые отпускаются Министерству легкой промышленности в ств-и с опт-ым планом фнцр-ия всей экн-ки страны, оно поставляет продукцию, уд-щую всем требованиям техн-их условий) в обеспечении l-й цели системы, а все ресурсы системы расп-ны опт-ым образом между остальными подсистемами.

Оценим, в каких пределах будет меняться выбранный кт-й $R_l^{(1,i)}$. Из (25) следует

$$\Phi_l^{u(1,i)} - \Phi_l^{0(1,i)} \ge \Phi_l^{C(1,i)} - \Phi_l^{0(1,i)}, \tag{25а}$$

тогда

$$0 \le R_l^{(1,i)} \le 1. \tag{25б}$$

Выч-ив кт-и эфс-и, можно сравнивать разные проекты однотипных СС-м, выбирать лучшие подсистемы из ряда предложенных, проводить сравнительную оценку упл-щих алгоритмов или систем передачи инф-и. Лучшим обычно считается тот вариант, при к-ом эфс-ть всей СС-ы оказывается наивысшей. В экнч-их иссл-ях обычно считается, что экнч-ая эфс-ть опр-ся отн-ем полученного эф-а к затратам.

На базе показателя эфс-ти строится кт-й надежности СС-ы:

$$\Delta\Phi_н = \Phi_н^u - \Phi_н^*, \tag{26}$$

где $\Phi_н^u$ – показатель эфс-и системы при условии, что эл-ы системы абс-но надежны, $\Phi_н^*$ – показатель эфс-и системы при условии, что отказы будут происходить при кт-ях, ств-щих заданным хркс-ам надежности, $\Delta\Phi_н$ – показатель, хркз-щий снижение эфс-и системы вследствие возможных отказов ее эл-ов.

Если зн-ие $\Delta\Phi_н$ невелико, значит, отказы мало влияют на эфс-ть всей системы. Если же их влияние сущ-но, то надо выбирать наиболее действенный метод: повышение надежности отдельных эл-ов, введение профилактики, уменьшающей вер-ть появления отказов, изменение схемы отдельных техн. подсистем, резервирование ненадежных эл-ов, улучшение работы ремонтных органов по восстановлению подсистем и т.д.

Такой же подход на базе показателя эфс-и предлагается для оценки сложных систем по устойчивости, помехозащищенности, кач-у упл-ия и нек-ым др. показателям, сущ-ным для конкретных реальных СС-м.

При оценке фнцр-ия СС каждый руководитель на любом уровне обязан знать и уметь подбирать ств-щие показатели эфс-и и уметь их использовать для повышения кач-а работы на своем участке. При этом процесс оценки эфс-и опирается на иссл-ие операций (см. КС).

2°. Оценка эффективности сложных систем на основе теории операций. Для введения основных понятий рас-им простейший пример. Прз-ву задан план по выпуску продукции по номенклатуре и в стоимостном врж-и. Цель руководства – выполнение плана. Руководство должно провести совокупность (свк.) действий, направленных на достижение заданной цели. Такая свк-ть действий наз. **операцией**. Оперирующей стороной яв-ся свк-ть лиц или авт-ов, к-ые в данной операции стремятся к заданной цели. В ряде орг-й цель назначается вышестоящим в иерархии упл-ия органом. Исследователь (иссл.) операции – человек или группа, принадлежащие к оперирующей стороне и добивающиеся той же цели. Иссл-лю должна быть известна цель операции и все условия ее проведения. Однако часто бывает, что иссл-ль операции оказывается менее информированным, чем др. часть оперирующей стороны, наз-мой технологом. Это зачастую связано с объективными причинами, т.к. иссл-ль чаще всего бывает мт-ом или специалистом по мтч-му обеспечению ЭВМ или АСУ, а остальная часть (технолог) оперирующей стороны – специалистом отрасли или производства, в интересах к-го и проводится иссл-ие операций. Иногда технолог не может или не хочет выдать полную информацию иссл-ю, а в некоторых случаях это происходит из-за отсутствия должного взаимодействия и взаимопонимания между технологом и иссл-ем. Иссл-ль поэтому не принимает окончательных решений, а помогает выработать их технологу – главной части оперирующей стороны, поэтому иногда технолога будем наз. оперирующей стороной.

Оперирующая сторона имеет в своем запасе так наз-мые активные средства, н-р, рабочую силу, сырье прз-ва, оборудование, финансы и т.д. Стратегии оперирующей стороны – способы использования активных средств. Работа иссл-ля операций заключается в сравнении стратегий и оценки эфс-и.

Достижение цели в данной операции зв-т от кол-ва средств и выбора стратегий. Кол-во активных средств зв-т от контролируемых (крум.) и неконтролируемых (оперирующей стороной) фкт-ов.

Обстановка проведения операции включает неконтролируемые (некрум.) фкт-ы. Н-р, в с/х-е для руководства совхоза – оперирующей стороны – кол-во удобрений, порядок сева на разных полях яв-ся крум. фкт-ми, а метеорологические усл-я – некрум. фкт-ми. При постановке задачи иссл-ия операций обязательно указывается инф-ность оперирующей стороны и иссл-ля об обстановке проведения операции, где главные сведения относятся к некрум-ым фкт-м.

Мт-ая модель (мд.) должна учитывать все компоненты операции, т.к. адекватность мд-и будет зависеть от этих компонент. Ход изменения сст-й системы, т.е. ход операции описывается n фазовыми крд-ми x_i. Чем больше кол-во фазовых крд-т, тем точнее описание операции, но сложнее мт-ое иссл-ие. Кт-й (показатель) эфс-и

$$R = R[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)]$$

хркз-ет степень ств-ия хода операции поставленной цели.

В чем заключается цель операций с мт-ой точки зрения? Она заключается в стремлении к увеличению (уменьшению) кт-ия эфс-и. Кт-й эфс-и в заданной модели яв-ся мт-им врж-ем цели операции.

Активные средства опр-ся кол-но и задаются вектором $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Они могут быть огр-ны сверху: $b_i \leq b_i^0$, где b_i^0 – предельное кол-во i-х активных средств.

Некрум-ые фкт. опр-ют обстановку проведения операции, поэтому рас-им подробней их классификацию в зв-ти от инф-сти о них исст-ля в момент иссл-ия:

– фиксированные (фикс.) фкт., зн-ия их известны;

– слн. процессы с известными законами рсп-ия (слн. фикс. фкт-ы);

– неопределенные (неопр.) фкт-ы, известна обл. расп-ия фкт-а, но не известен закон расп-ия.

Неопр-ые фкт. также делят на три группы: 1) стратегии противника, у к-го имеются свои активные средства, т.е. фкт-ы, не зв-щие от оперирующей стороны (н-р, в военных действиях или в конкурентной внешней торговле); 2) природные неопр-ые фкт-ы, к-ые появляются из-за слабой изученности нек-ых процессов (н-р, известны только мт. ож-ие и дсп-ия слн-ой вел-ы); 3) неопр-ые фкт-ы, появляющиеся из-за нечеткости знания цели операции или кт-ия эфс-и (н-р, выбор кт-ия оценки работы прд-й, выпускающих изделия совершенно разных типов).

Рас-им объединения элр-ых действий над кт-ми эфс-и. На основе теории и практики проведения операций опр-но, что сущ-ет два вида целей и, сд-но, два вида кт-ев эфс-и: а) качн-ое опр-ие цели, когда возможны два исхода (результаты достигнуты или не достигнуты), т.е. кт-й эфс-и принимает только два зн-ия

$$\varPhi = \begin{cases} 1, \text{ если результат получен;} \\ 0, \text{ если результат не получен;} \end{cases}$$

б) колн. опр-ие цели, когда стремятся увеличить или уменьшить кт-й эфс-и. Причем часто бывает удобно представить общий кт-й эфс-и через частные кт-и. Общим кт-ем измеряют эфс-ть системы в целом. Частными наз-ют кт-и, измеряющие эфс-ть нек-ой составляющей (сост.) операции.

При опр-и общего кт-ия эфс-и выделяют два случая:

1. Общий кт-й имеет сд-ю структуру:

$$\varPhi_c = F(\varPhi_1, \varPhi_2, \ldots, \varPhi_n),$$

где $\varPhi_i$ – зн-ия кт-ия для i-й сост-ей операции (i-й частный кт-й).

2. Суммарный кт-й представляется как фк-ия крд-т новой операции. Однако он не яв-ся фк-ей частных кт-ев, как в первом случае. Это значит, что новая объединенная операция имеет свою цель, не связанную с частными целями частных операций.

Объединенная операция базируется только на активных средствах частных операций, но не относится к процессу получения общего кт-ия из частных, т.е. получение общего кт-ия относится только к первому случаю.

Остановимся на элр-ых способах объединения (свертывания) кт-ев эфс-и.

I. Суммирование, или «экономический способ». Целью объединения операции яв-ся мксз-ия суммарного кт-ия

$$\varPhi_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varPhi_i \,, \tag{27}$$

где λ_i – вес частного кт-ия $\varPhi_i$.

Если свертывается кт-й, зв-щий от непр-го параметра, то

$$\varPhi_c = \int \varPhi(u)\lambda(u)du \;\; \left(\lambda(u) \ge 0,\ \int \lambda(u)du = 1, \text{ где } u \text{ – пер-ая}\right). \tag{27а}$$

Если одна из операций всегда выполняется, т.е., н-р, $\varPhi_{n+1} = 1$, то (27) запишется так:

$$\varPhi_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varPhi_i + \lambda_{n+1}. \tag{27б}$$

II. Способ перехода к цели первого типа. Этот способ осуществляется разбиением вектора $\varPhi$ на уд-ные и неуд-ные:

$$\left.\begin{aligned} &\varPhi_c = 1, \text{ если } \varPhi_i \ge \varPhi^0 \ (i = \overline{1,n}\,); \\ &\varPhi_c = 0 \text{ или } -\infty, \text{ если } \varPhi_i < \varPhi^0 \ (i = \overline{1,n}\,). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Граничное зн-ие вектора $\varPhi^0$ выбирается оперирующей стороной в зв-ти от условий решаемых задач. Если $n = 0$, то оперирующая сторона будет добиваться, чтобы $\varPhi_c \ge \varPhi_c^0$.

III. Способ посл-го достижения частных целей. К началу выполнения последующей операции должны быть получены абс-ые мкс. (мнм.) кт-и эфс-и предыдущих i-х частных операций. Этот способ объединения при $\Phi_i \geq 0$ можно представить так:

$$\Phi_c = \Phi_j + \sum_{i=0}^{j-1} \sup \Phi_i \ , \tag{29}$$

где $\sup \Phi_i$ – верхняя грань возможных зн-й кт-ия эфс-и Φ_i.

IV. Логическое объединение целей. Общий кт-й и частные кт-и относятся к качн-му виду (первому) и принимают только два зн-ия: 0 и 1. При этом используются элр. действия над кт-ми. Можно представить три случая:

1) кт-й для цели, противоположной данной, опр-ся фм-ой

$$\Phi_c = 1 - \Phi_i; \tag{30}$$

2) суммарная цель состоит в обязательном выполнении всех целей

$$\Phi_c = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i \ ; \tag{30а}$$

3) суммарная цель состоит в выполнении хотя бы одной из частных целей

$$\Phi_c = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \Phi_i\right). \tag{30б}$$

Все три действия составляют полную систему булевых операций. Если Φ_c и Φ_i принимают только зн-ия 0 и 1, то любая зв-ть $\Phi_c = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ может быть записана в виде конечного числа псл-ых повторений действий 1), 2) и 3). Н-р, в СС-е подсистемы техн-их средств АСУ соединены посл-но, тогда для норм-го фнцр-ия системы нх-мо, чтобы все подсистемы были в рабочем сст-и (случай 2); однотипные блоки системы соединены прл-но, тогда для норм-го фнцр-ия системы дт-на исправность одного блока (случай 3); если Φ_i хркз-ет исправные сст-ия i-й подсистемы, то неисправное сст-ие может быть хркз-но вел-ой $1 - \Phi_i$ (случай 1).

V. Обобщенное логическое свертывание кт-ев. Данный способ объединения кт-ев, т.е. фк-й $\Phi_c = F(\Phi_i)$, яв-ся прямым обобщением предыдущего (IV). Так, если у оперирующей стороны сущ-ют антагонистические интересы, то:

а) вместо (30) запишем

$$\Phi_c = -\Phi_i; \tag{31}$$

б) обобщение (30а) позволяет записать

$$\Phi_c = \min_{1 \leq i \leq n} \Phi_i \lambda_i, \ \lambda_i \geq 0; \tag{31а}$$

в) вместо (30б) можно записать

$$\Phi_c = \max_{1 \leq i \leq n} \Phi_i \lambda_i, \ \lambda_i \geq 0. \tag{31б}$$

Фм-ы (31а) и (31б) будут ств-ть (30а) и (30б), если предположить в частном случае, что Φ_i принимают зн-ия 0 и 1, а $\lambda_i = 1$. Примером применения операций max и min может служить оценка вр-и исправной работы неремонтируемых систем.

VI. Случайное и неопределенное свертывание. В данном случае в зв-ти от того, какое зн. примет i-й некрум-ый фкт., i-й частный кт-й принимается суммарным кт-ем

$$\Phi_c = \Phi(i) = \Phi_i. \tag{32}$$

Если частные кт-и опр-ся непр-ой слн-ой или неопр-ой вел-ой, то общий кт-й имеет вид:

$$\Phi_c = \Phi(\alpha) = \Phi_\alpha, \qquad (32а)$$

где α – слн. или неопр. вел-а.

В кач-е примера можно рас-ть случай, когда оперирующая сторона не в состоянии точно опр-ть коэф-т веса λ_i для частных операций в способах объединения кт-ев I и V. Тогда зн-ия $\{\lambda_i\}$ окажутся неопр-ми фкт-ми. Увеличение кол-ва слн-ых и неопр-ых фкт-ов, некрум-ых оперирующей стороной, снижает эфс-ть стратегий и создает большие трудности при выборе стратегий. В случае (32а) все кт-и равнозначны. Если же вес кт-ев различен, то рекомендуется вводить коэф-ты веса для частных кт-ев

$$\Phi_c = \lambda(\alpha)\Phi_\alpha.$$

Все шесть рас-ных элр-ых действий над кт-ми применимы также для тех случаев, когда операция сформулирована не полностью. Частными кт-ми при этом станут фк-и $w_i(X, Y)$, где X – вектор крум-ых фкт-ов, а Y – вектор некрум-ых фкт-ов. Вектор $w_i(X, Y)$ яв-ся сост-им вектор-фк. $w(X, Y) = \{w_i(X, Y)\}$ крум-ых и некрум-ых фкт-ов. Обычно вектор-фк. состоит из всех или части фазовых крд-т. Однако без вектор-фк. нельзя обойтись при не полностью сформулированных моделях (мд.) операции. Эти мд-и появляются из-за неопр-ых ситуаций. В не полностью сформулированных операциях нет единого кт-ия эфс-и, как, н-р, в полностью сформулированных мд-х.

Введенные элр. действия I-IV охватывают все возможные однозначные звт-и общих кт-ев от частных на основе теорем т1-т4. Теорема т1 посвящена точному представлению звт-ей в виде конечного числа элр-ых действий. Теоремы т1, т2 и и4 дк-ют возможности прж-го представления с любой заданной точностью.

т1. Если однозначная фк. $\Phi_c = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ и каждая из Φ_i принимает лишь конечное число конечных возможных зн-й, то зв-ть Φ_c от Φ_i может быть представлена в виде конечного числа действий типа IV (30)-(30б) и типа I и II (27), (27а) и (28).

т2. Пусть $\Phi_c = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ принимает конечное число N зн-й $\Phi_{cк}$, а Φ_i произвольны, но огр-ны. Тогда каково бы ни было $\varepsilon > 0$, сущ-ет мн. M векторов $\{\Phi_i\}$ и фк-ия $F^*(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, составленная из конечного числа действий I, II и IV, такие, что:

1) $F(\Phi_i) = F^*(\Phi_i)$, когда $\{\Phi_i\} \in M$;

2) $F^*(\Phi_i)$ пробегает все N зн-й $\Phi_{cк}$ при $\{\Phi_i\}$, пробегающем M, не принимая иных зн-й при любых $\{\Phi_i\}$;

3) мн. M образует ε-сеть на огр-ом мн-ве всех $\{\Phi_i\}'$, т.е. для любого $\{\Phi_i\}$ найдется $\{\Phi_i'\} \in M$, удаленная от $\{\Phi_i\}$ не более чем на ε.

т3. Если $\Phi_c = F(\Phi_i)$ равномерно непр-на на нек-ом параллелепипеде возможных зн-й $\{\Phi_i\}$, то она с любой степенью точности может быть представлена в виде конечного числа действий типа I, II и IV.

При рас-и свертывания типа V было показано, что оно обобщает действия IV. Это док-ет и полноту системы действий I, II и IV. Однако сд-ая теорема док-ет более сильное утв-ие.

т4. Если $\Phi_c = F(\Phi_i)$ $(i \le n)$ непр-на на обл. $-\infty < \Phi_l^0 \le \Phi_i \le \Phi_l^1 < \infty$, то каково бы ни было ε, найдется такое конечное число коэф-ов a_{lki}, c_{lk} $(l \le l^0$, $k \le k_0 \le n + 2)$, что в этой обл-и

$$|F(\Phi_i) - \min_{1 \le l \le l_0} \max_{1 \le k \le k_0} (\Sigma a_{lki}\Phi_i + c_{lk})| \le \varepsilon.$$

Теоремы т1-т4 (док-ва см. в [11]) показывают полноту пяти рас-ных элр. способов объединения кт-ев при $\Phi_c = F(\Phi_i)$. Если общий кт-й Φ_c зв-т от частных кт-ев Φ_i и от нек-го некрум-го параметра α, то фиксируем зн-ие α и для врж-ия $\Phi_c = F(\Phi_i, \alpha)$ воспользуемся свертыванием типа VI. В результате полнота способов объединения при наличии некрум-ых фкт-ов также будет док-на.

Остановимся на практических рекомендациях исследователю (исст.) операций. При проведении иссл-й всегда надо учитывать неопр-ые фкт-ы. Увеличение числа стратегий может привести только к большому успеху. Поэтому выгодно, когда исст-ль представляет, как изменится кт-й эфс-и в результате объединений операций. При мн-ве стратегий появляются большие возможности, чем при простой сумме стратегий, вследствие перерсп-ия активных средств между частными стратегиями. Н-р, в экнч-их иссл-ях можно перерсп-ть ассигнования, к-ые должны обеспечить прибыль.

Исст-ль операции обычно для осторожности ориентируется на наихудшие зн-ия некрум-ых фкт-ов. Если это приводит к неуд-ным результатам, то исст-ль обязан известить оперирующую сторону, к-ая может дать дпн-ую инф. либо принять рискованное решение. Сам исст-ль не имеет права на принятие рискованного решения.

Исст-ль должен применять принцип получения гарантированного результата. При этом принципе получается логически строгая теория принятия решения. Частным случаем этой теории яв-ся теория оптз-и, к-ая решает задачи при отсутствии слн-ых и неопр-ых фкт-ов.

Выясним, когда легче и выгоднее проводить иссл-ие операций – в более ранний период или перед самым утв-ем планов. Перед утв-ем планов, когда, как правило, имеется готовый станочный парк и опр-ен тип выпускаемой продукции, можно варьировать техл. процессами. При раннем рас-и вариантов можно иметь большую свободу и варьировать и станочным парком, и видом выпускаемой продукции и техн. процессами. В этом случае имеем меньшее число огр-й. Значит, ранние иссл-ия мтч-ки могут оказаться более простыми, т.к. увеличение числа огр-й приводит к усложнению задачи. Можно т.о. простыми методами получить основное опорное решение, а потом в более поздний период уточнить результаты в окрс-ти этого решения. Итак, ранний период иссл-ия операций позволяет уменьшить число огр-й на стратегии (техл-ие процессы) и активные средства (сырье, материалы, станочный парк и др.).

Теперь рас-им кт-и эфс-и АСУ, построенные на основе системы элр-ых действий. На АСУ решаются как задачи по опр-ию эфс-и внедрения автз-ной системы упл-ия и ее подсистем, так и задачи опр-ия эфс-и фнцр-ия упр-мых объектов. Эти задачи затрагивают весьма широкий спектр проблем и требуют большого разнообразия мтч-их методов, н-р, теория МО, теория игр, теория вер-ей, теория инф-й и др. Все задачи в ств-и с двумя видами кт-ев в звс-и от цели упл-ия можно разделить на два класса.

В задачах **первого класса** целью упл-ия яв-ся получение заданного эф-а, н-р, заданного зн-ия кт-ия эфс-и:

$$\Phi_c = \begin{cases} 1, \text{ если месячный план прд-ем выполнен;} \\ 0, \text{ если месячный план не выполнен.} \end{cases}$$

Такой подход хорош при дтр-ной модели упл-ия прд-ем, когда результаты анализируются по достоверным данным. Если изучаются слн. процессы упл-ия, то в кач-е общего кт-ия эфс-и можно принять вер-ть получения заданного результата упл-ия

$$\Phi_c = P(A), \tag{33}$$

где $P(A)$ – вер-ть выполнения задачи упл-ия, A – слн. сб-е, состоящее в выполнении задачи упл-ия.

Если на систему упл-ия действуют возмущающие фкт., к-ые обз-им через X, то $P(A/X)$ обз-ет условную вер-ть выполнения задачи упл-ия. На практике обычно опр-ют ср. зн-ие, дсп-ию фк-и $P(A/X)$, а также зн-ие при нб-е благоприятных (блп.) и при наименее блп-ых условиях. Получающийся при нб-е неблп-ых условиях фнцр-ия АСУ результат

$$\Phi_c = \min_X P(A/X) \tag{33а}$$

гарантируется с большей вер-ю, чем наилучший или ср-й.

Опт-ой будет та система, к-ая обеспечит мкс. зн-ие кт-ия эфс-и:

$$\Phi_c^* = \max_\Phi \Phi_c = \max_\Phi \min_X P(A/X). \tag{33б}$$

В задачах **второго класса** целью упл-ия яв-ся получение наилучшего эф-а, оцениваемого эклс-ым зн-ем кт-ия эфс-и. Если изучаемая мд. носит стсч-й хрк-р, то целью яв-ся получение опт-го зн. ср-ей вел-ы эф-а.

Пусть G – слн. вел-а результата упл-ия, $M[G]$ – мт. ож-ие G, тогда

$$\Phi_c = M[G]. \tag{34}$$

Гарантированный результат упл-ия при нб-е неблп-ых условиях можно оценить с помощью кт-ия

$$\Phi_c = \min_X M[G/X], \tag{34а}$$

а опт-ый результат – при помощи кт-ия

$$\Phi_c^* = \max_\Phi \min_X M[G/X], \tag{34б}$$

где $M[G/X]$ – мт. ож-ие слн. вел-ы результата упл-ия при воздействии неопр-ых слн. фкт-ов X.

Чем выше зн-ие кт-ия, опр-го фм-ой (34а), тем с лучшей стороны хркз-ся оцениваемая система или оцениваемый процесс. Опт-ым будет оценка (34б).

Чем ниже зн-ие кт-ия, опр-го фм-ой (34), тем лучше хркз-ся оцениваемый процесс или система. Тогда гарантированный результат упл-ия выразится фм-ой

$$\Phi_c = \max_X M[G/X], \tag{34в}$$

а опт-ый результат упл-ия – фм-ой

$$\Phi_c^* = \min_\Phi \max_X M[G/X], \tag{34г}$$

Известно, н-р, что при оценке прзл-ти труда на однотипных прд-ях отрасли и обнаружении большого разброса между прзл-ю труда передовых и отстающих прд-й принимаются меры по уменьшению этого разброса путем подтягивания отстающих прд-й до уровня передовых. Для этого проводится мн-во организационно-техн., социологических, кадровых мероприятий и мероприятий воспитательного хрк-а. Отстающие прд-ия оснащаются более современным эфн. оборудованием, организуется обучение специалистов передовым методам работы на лучших прд-ях, принимаются меры по улучшению воспитательной, рационализаторской и изобретательской работы, пересматриваются нормы оплаты труда, открываются школы по повышению квалификации рабочих и т.д. Т.о., на практике повышение кт-ия эфс-и достигается в результате опр-ых затрат, к-ые нельзя не учитывать. Кт-й эфс-и при учете экнч-их показателей опр-ся по фм-е

$$\varPhi_c = F[\varPhi, C], \tag{35}$$

где $\varPhi$ – оценка результата упл-ия, C – затраты на получение эф-а $\varPhi$. Причем $\varPhi_c$ – общий кт-й, тогда $\varPhi$ и C станут частными кт-ми.

В общем случае общий кт-й зв-т от n частных к-ев, т.е. $\varPhi_c = F[\varPhi_1, \varPhi_2, \ldots, \varPhi_n]$. Тогда общий кт-й может быть выражен при помощи известных нам элр-ых действий над частными кт-ми. Так для АСУ расв-ся 4 типа элр-ых действий:

1. Для непр-го случая

$$\varPhi_c = \int_\alpha^\beta \varPhi(x)\lambda(x)dx \ \ (\lambda(x) \geq 0,\ \int_\alpha^\beta \lambda(x)dx \ = 1) \tag{35а}$$

Если пер. дк-на, то

$$\varPhi_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varPhi_i\ . \tag{35б}$$

2. Задача упл-ия будет решена, если будут решены все частные задачи. Н-р, план по выпуску продукции районом считается выполненным, если все прд-ия, входящие в его состав, выполняют свои планы. Кт-й эфс-и для такой задачи рассчитывается по (30а). Эту задачу можно отнести к первому классу. В общем случае можно пользоваться ф-ой (31а).

3. Общая задача упл-ия считается решенной, если будет решена хотя бы одна из частных задач. Это задача первого класса. Кт-й эфс-и выч-ся по фм-е (30б). В общем случае – по фм-е (31б).

4. Частные цели фнцр-ия СС-ы могут оказаться противоречивыми. Н-р, нельзя добиться мкс-ой прзл-и труда при мнм-ой себестоимости продукции. В данной ситуации общая задача упл-ия будет решена, если частные кт-и эфс-и будут находиться в опр-ых пределах или не ниже нек-ых допустимых пределов согласно (28):

$$\varPhi_c = \begin{cases} 1, \text{ если } \varPhi_i \geq \varPhi_i^0; \\ 0, \text{ если } \varPhi_i < \varPhi_i^0,\ 1 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{35в}$$

Изучим оценку эфс-и с учетом вер-ей событий (сб.). Для иллюстрации возможности использования вер-ей сб-й в кач-е кт-ев эфс-и рас-им сд-й

п1. Пусть завод состоит из пяти цехов A_i ($i = \overline{1,5}$). Все цеха работают незв-мо друг от друга. Выполнение плана заводом считается завершенным, если все цеха выполнили свой план. Вер-ти выполнения плана цехами даны: $P(A_1) = 0{,}96$, $P(A_2) = 0{,}97$, $P(A_3) = 0{,}99$, $P(A_4) = 0{,}98$, $P(A_5) = 0{,}97$. Опр-ть вер-ть выполнения плана заводом.

Р. $P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = 0{,}96 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 = 0{,}88$.

Рас-им пример, когда работа цехов зв-т от результатов работы др-х цехов завода.

п2. На заводе имеется пять цехов. Из них два (A_1, A_2) сборочные, а три (A_3, A_4, A_5) – механические, изготавливающие детали для сборочных цехов с вер-ми выполнения дневного плана $P(A_3) = 0,99$, $P(A_4) = 0,98$, $P(A_5) = 0,97$. Пусть $\overline{A}_i$ – сб. «i–й цех не выполняет план». Тогда $P\left(\overline{A}_3\right) = 0,01$, $P\left(\overline{A}_4\right) = 0,02$, $P\left(\overline{A}_5\right) = 0,03$. Мехн. цех A_3 изготавливает детали только для сбор. цеха A_1, а мехн. цеха A_4 и A_5 делают детали для сбор. цеха A_2 с условными вер-ми $P(A_1/A_3) = 0,96$ и $P\left(A_2 / A_4A_5, \overline{A}_4A_5, A_4\overline{A}_5\right) = 0,97$. Найти вер-ти выполнения плана: 1) первым сбор. цехом; б) вторым сбор. цехом; 3) заводом.

Р. 1) $P(A_1) = P(A_3)P(A_1/A_3) = 0,99{\cdot}0,96 = 0,9504 \approx 0,95$.

2) Т.к. по условию задачи $P\left(A_2 / A_4A_5, \overline{A}_4A_5, A_4\overline{A}_5\right) = P(A_2/C) = 0,97$, сначала выч-им $P\left(\overline{C}\right) = P\left(\overline{A}_4\overline{A}_5\right) = P\left(\overline{A}_4\right)\cdot P\left(\overline{A}_5\right) = 0,02{\cdot}0,03 = 0,0006$. Тогда $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,0006 = 0,9994$. Отсюда $P(A_2) = P(C)P(A_2/C) = 0,9994{\cdot}0,97 \approx 0,97$.

3) $P = P(A_1)P(A_2) = 0,95{\cdot}0,97 = 0,92$.

Обобщим решение п2 на основе ф-ы полной вер-ти (см. (19) из 5°: 1.2). Представим себе, что нх-мо найти вер-ть сб-ия A, к-ое может произойти при осуществлении одной из гипотез (гп.) $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Считаем, что все n гп-з (сб-й) образуют полную группу несовместных сб-й. Тогда фм-а полной вер-и имеет вид

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \tag{36}$$

где $P(H_i)$ – вер-ть гп-ы H_i, $P(A/H_i)$ – условная вер-ть сб. A при гп-е H_i.

Обратимся к кт-ям эфс-и. Пусть $P(A)$ – общий кт-й эфс-и, тогда

$$\Phi = P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_i\Phi_i\ , \tag{37}$$

где Φ_i – частный кт-й эфс-и, к-ый в ств-и с (36) имеет смысл условной вер-ти появления сб. A при гп-е H_i, P_i – вер-ть гп-ы H_i.

Рас-им АСУ, состоящую из n невосстанавливаемых подсистем. Сд-но, каждая подсистема может находиться либо в работоспособном состоянии (сст.), либо в сст-и отказа. В заданном инр-е вр-и частные кт-и эфс-и не зв-т от моментов возникновения отказов подсистем. В этом инр-е можно отразить все возможные сст-ия системы на основе полной группы несовместных сб-й. Сст-ие системы опр-ся в данном случае сст-ем подсистем. Примером одного из сст-й системы яв-ся работоспособность всех подсистем, а др-го – отказ одной подсистемы при наличии $(n - 1)$ работоспособных подсистем. В символах это можно записать с помощью фм-ы (36). Введем сд-ие обз-ия:

H_0 – гп-а о том, что все подсистемы работоспособны,

H_i – гп. о том, что i-я подсистема отказала, а $(n - 1)$ подсистем исправны,

H_{ij} – гп. о том, что отказали две подсистемы (i-я, j-я), а $(n - 2)$ подсистемы исправны,

. . . .

$H_{12\ldots n}$ – гп. о том, что отказали все подсистемы.

K_v – коэф. готовности системы, к-ый трактуется как вер-ть застать систему в исправном сст-и,

p_0 – вер-ть гп-ы H_0,

p_i – вер-ть гп-ы H_i,

q_i – вер. нахождения i-й подсистемы в сст-и отказа в заданном инр-е вр-и ($p_i + q_i = 1$). Причем надо различать P_i и p_i и $q_i = 1 - p_i$, где P_i – вер. нахождения системы в i-м сст-и, ств-ем гп-е h_i, p_i – вер. нахождения i-й подсистемы в работоспособном сст-и, т.е. $P_i = p_1 \ldots p_{i-1} q_i p_{i+1} \ldots p_n$, а вер-ть гп-ы H_{ij} опр-ся так: $P_{ij} = p_1 \ldots p_{i-1} q_i p_{i+1} \ldots p_{j-1} q_j p_{j+1} \ldots p_n$.

Общий кт-й эфс-и врж-ся на основе фм-ы полной вер-ти так:

$$\Phi = K_v\Big(P_0\Phi_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i\Phi_i + \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}\Phi_{ij} + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} P_{ijk}\Phi_{ijk} + \ldots + P_{12\ldots n}\Phi_{12\ldots n}\Big), \quad (38)$$

где $\Phi_{12\ldots n}$ – частный кт-й эфс-и при отказе всех подсистем.

Т.о., для решения практических задач по опр-ю общих кт-ев эфс-и нх-мо опр-ть вер-ти безотказной работы каждой подсистемы (или вер-ть ее отказа) и частные кт-и эфс-и.

п3. Опр-ть эф-ть кр-ля экнч-ой инф-и при наличии трех видов кр-ля: синтаксического, семантического и прагматического. Причем кач. кр-я одного вида не влияет на кач. кр-я др-го. Коэф. готовности всей системы кр-я равен 0,99. При исключении трех видов (уровней) кр-я частные кт-и эфс-и равны нулю. При исключении синтаксического кр-я частный кт-й его эфс-и равен нулю. Известны вер-ти решения задачи при каждом виде кр-я: $P_{с\,инт} = P_1 = 0{,}99$, $P_{сем} = P_2 = 0{,}96$, $P_{прагм} = P_3 = 0{,}95$. Известны частные кт-и эфс-и кр-я: $\Phi_0 = 0{,}97$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0{,}90$, $\Phi_3 = 0{,}80$, $\Phi_{23} = 0{,}50$.

Поясним, что $\Phi_0 = 0{,}97$ означает частный кт-й эфс-и при применении всех трех видов кр-я; $\Phi_1 = 0$ означает, что при исключении синт-го уровня кр-я частный кт-й эфс-и равен нулю, сд-но, $\Phi_{12} = 0$, т.е. при исключении синт-го и сем-го уровней кр-я частный кт-й эфс-и также равен нулю, т.о. имеем $\Phi_1 = \Phi_{12} = \Phi_{13} = 0$; частный кт-й эфс-и $\Phi_2 = 0{,}90$ при исключении сем-го уровня кр-я; частный кт-й эфс-и $\Phi_{23} = 0$ при исключении сем-го и прагм-го уровней кр-я.

Р. Упростим общую фм-у (38) с учетом конкретных данных задачи: $\Phi = K_r\Big(P_0\Phi_0 + \sum_{i=1}^{3} P_i\Phi_i + \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\Phi_{ij}\Big) = K_r(P_0\Phi_0 + P_1\Phi_1 + P_2\Phi_2 + P_3\Phi_3 + P_{12}\Phi_{12} + P_{13}\Phi_{13} + P_{23}\Phi_{23})$. Учитывая, что $\Phi_1 = \Phi_{12} = \Phi_{13} = 0$ и $P_0 = P_1P_2P_3$, $P_2 = P_1(1 - P_2)P_3$, $P_3 = P_1P_2(1 - P_3)$, $P_{23} = P_1(1 - P_2)$, получим

$$\Phi = K_r[P_1P_2P_3\Phi_0 + P_1(1 - P_2)P_3\Phi_2 + P_1P_2(1 - P_3)\Phi_3 + P_1(1 - P_2)(1 - P_3)\Phi_{23}] =$$
$$= 0{,}99(0{,}99\cdot0{,}96\cdot0{,}95\cdot0{,}97 + 0{,}99\cdot0{,}04\cdot0{,}95\cdot0{,}90 +$$
$$+ 0{,}99\cdot0{,}96\cdot0{,}05\cdot0{,}080 + 0{,}99\cdot0{,}04\cdot005\cdot0{,}50) = 0{,}94.$$

Заметим, что в п3 не учтены затраты C на получение эф-а Φ для повышения общего кт-я эфс-и системы кр-я из-за трудности опр-ия общей зв-ти между кт-ми в врж-ии (35). Однако иногда можно пользоваться графическими (грф.) методами, представив общий кт-й эфс-и как фк-ю затрат в виде

$$\Phi_c = \frac{\Phi(C)}{C}, \tag{39}$$

к-ое можно расв-ть как ср. вел-у кт-ия эфс-и, приходящуюся на ед-у стоимости затрат.

Пусть процесс, к-ым мы упл-ем, хркз-ся мксн-ным зн-ем кт-ия Φ_c. Тогда можно найти max ср-го эф-а на ед-у затрат. Для этого найдем частную производную Φ_c по C и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial C} = \frac{1}{C}\frac{\partial \Phi(C)}{\partial C} - \frac{1}{C^2}\Phi(C) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi(C)}{\partial C} - \frac{\Phi(C)}{C} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial \Phi(C)}{\partial C} = \frac{\Phi(C)}{C}. \tag{40}$$

Врж-ие (40) показывает, что на кривой $\Phi(C)$ есть точка, касательная к к-ой проходит через начало крд-т (рис. 1). Сд-но, опт. зн-ие кт-я можно опр-ть так:

1. Построить фк-ю $\Phi(C)$.
2. Из начала крд-т провести касательную к кривой $\Phi(C)$.
3. Опр-ть крд-ты точки касания ($C_{опт}$, $\Phi_{опт}$).

Полученный результат может подсказать проектировщику или эксплуатационнику диапазон изменения затрат, при к-ых обеспечивается допустимый уровень общего кт-я. Точка L_0 ств-ет системе с высоким эф-ом упл-ия, но не мнм-ой по стоимости. Мкс. зн-ие частной производной фк-и $\Phi(C)$ по C находится в точке L, а не L_0 (точка L_0 ств-ет системе с опт. кт-ми).

п4. Эксплуатация показала, что коэф-т готовности K_v яв-ся важной хркс-ой эфс-и техн-их средств АСУ. Для повышения K_v нх-мы затраты средств. Опыт эксплуатации техн-их средств 200 АСУ за трехмесячный период при односменной работе позволил получить сд-ие зн-ия коэф-а готовности и затрат (табл. 1).

Таблица 1

Стоимость эксплуатации, руб.

K_v	Заработная плата обслуживающего персонала	Профилактика и ремонт	Учеба обслуживающего персонала	Замена элементов	Прочие расходы	Общие затраты
0,3	3600	680	–	–	–	4280
0,4	3600	700	–	300	200	4800
0,5	3600	600	400	100	300	5000
0,6	3600	600	800	250	550	5800
0,7	3600	900	1200	300	500	6500
0,8	4000	1000	1800	200	–	7000
0,9	4400	1000	2200	150	250	8000
0,95	5000	1500	2200	300	–	9000
0,96	5000	2000	2200	–	800	10000
0,97	5000	2000	2400	400	2200	12000

Р. 1. Построим грф. звс-ти $Ф_1(C) = K_r$ от общей стоимости C (рис. 2), если известно, что частным кт-ем эфс-и яв-ся коэф. готовности.

2. Из начала крд-т проведем касательную к кривой $Ф(C)$.

3. Опр-им крд-ты точки касания грфч-и. Получаем $K_{r\ опт}$ = 0,85, $C_{опт}$ = = 7500 руб.

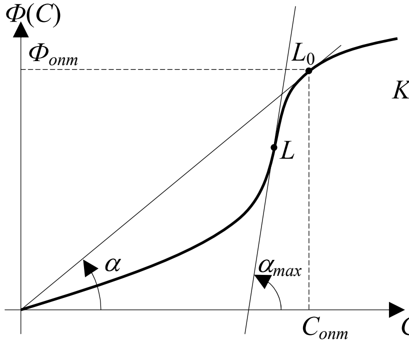


Рис. 1

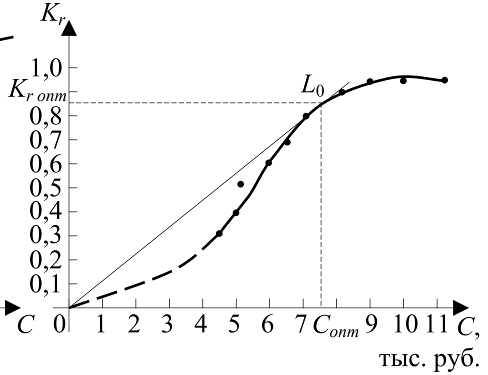


Рис. 2

п5. По данным п4 выч-им фк-ю $Ф_c = f(K_r, C) = K_r/C$, полученные результаты представим в табл. 2.

Таблица 2

K_r	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,96	0,97
C, руб.	4280	4800	5000	5800	6500	7000	8000	9000	10000	12000
$10^5\ Ф_c$	7	8	10	10,3	10,9	11,4	11,2	10,5	9,6	8,1

Опр-ть грф-ки по полученным данным $K_{r\ опт}$ и $C_{опт}$ по фк-и $Ф_c = K_r/C$ и по фк-и $Ф_c = \varphi(C)$.

Р. 1. Строим грф-к $Ф_c = f(K_r, C)$ (рис. 3). Грф-ки в точке max $f(K_r, C)$ находим зн-ие $K_{r\ опт}$ = 0,85.

2. Строим грф-к $Ф_c = \varphi(C)$ (рис. 4). Грф-ки в точке max $\varphi(C)$ находим $C_{опт}$ = 7500 руб.

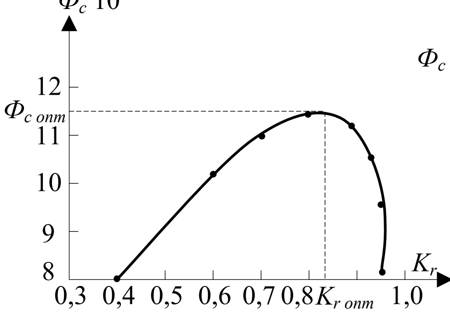


Рис. 3

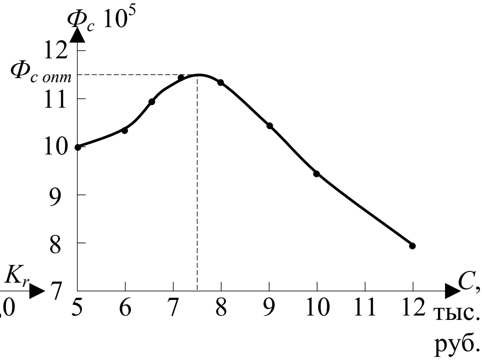


Рис. 4

Итак, в п5 проверено решение п4 грфч-им же методом.

3°. Оценка эффективности на основе информационных критериев. Теория информации (инф.) широко используется для изучения процессов упл-ия и преобразование (прб.) инф-и яв-ся главнейшей проблемой процесса упл-ия.

Теорией инф-и наз-ся наука, изучающая колн-ые закономерности получения, передачи, обработки и хранения инф-и, т.е. яв-ся вер-ным подходом к процессам прб-ия инф-и.

В теории одним из основных понятий яв-ся энтропия – мера степени неопределенности (неопр.) слн-ых вел-н (системы) $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с вер-ми $P = \{p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)\}$. Энтропией системы наз-ся врж-ие

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \lg_a p_i \ . \tag{1}$$

На практике обычно берут $a = 2$ и обз-ют $\lg_2 p_i = \log p_i$, редко $a = 10$, обз-ив $\lg_{10} p_i = \lg p_i$, $p_i = p(X = x_i)$. Так при $X = 0$ или 1 с равной вер-ю $p_1 = p_2 = 1/2$, то вместо (1) получим

$$H(X) = -\log\frac{1}{2} = 1 \text{ бит}. \tag{1а}$$

Бит (см. КС) яв-ся двоичной ед-ей кол-ва инф-и.

Если слн. вел-а X принимает n зн-й и каждое зн. равновероятно, то энтропия, яв-яся мерой неопр-ти, будет мкс-ой:

$$H(X) = -n\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = -\log 1 + \log n = \log n. \tag{1б}$$

Н-р, если система находится в 16 сст-ях, то ее энтропия $H(X) = \log 16 = 4$.

Из фм-ы (1) видно, что энтропия некоторого дк-го процесса в момент вр-и t зв-т только от числа возможных сст-й n и их вер-ей $\{p_i\}$. Если каждое сст. хркз-ся нек-ой крд-ой процесса, то энтропия не зв-т от зн-ия этой крд-ы.

Если одна из вер-ей достоверна ($p_i = 1$), то все остальные вер-ти $p_1 \ldots p_{i-1}$ $p_{i+1} \ldots p_n$ равны нулю и энтропия системы равна нулю.

Предположим, что надо решать задачи инфн-го плана в системе (расв-ой как черный ящик) упл-ия, на входе к-го имеется слн. вел-а Y, а на выходе – слн. вел. X. Нх-мо опр-ть кол-во инф-и о входной вел-е, содержащееся в выходной вел-е. За ср. кол-во инф-и при нбл-и вел-ы X будем принимать разность между энтропиями вел-ы Y до и после нбл-ия вел-ы X:

$$I_x(Y) = H(Y) - H_x(Y). \tag{2}$$

Причем фм-у можно представить в виде (1), т.е. $I_x(Y) = I_x = -\Sigma p_i \log p_i$, где $p_i = p(X = x_i)$. Т.о., энтропия и кол-во инф-и измеряются в двоичных (битах) ед-ах.

Инфн-ая пропускная способность – мкс. кол-во инф-и, к-ое может быть передано по каналу (кн.) в ед-у вр-и. Различают мкс-ое и мнм-ое кол-во инф-и, нх-мой при упл-и объектом с заданной точностью. Зная эти зн-ия, можно опр-ть верхнюю и нижнюю границы объема памяти ЭВМ.

Пусть теперь имеется система, описываемая одной непр-ой слн. вел-ой X с плотностью рсп-ия $f(x)$. Под X будем понимать крд-у процесса упл-ия, к-ая в каждый момент вр-и t яв-ся непр-ой слн. вел-ой. Тогда процесс назовем непр. слн. процессом. Оценим энтропию непр-ой слн. вел-ы. Для этого опр-им предел точности измерений и тогда непр. слн. вел-у сведем к дк-ой. Пусть Δx ств-ет отрезку, в пределах к-го зн-ия крд-ты X неразличимы. Тогда энтропию системы X, расв-мую с точностью до Δx, можно опр-ть прж-но:

$$H_{\Delta x}(X) = \sum_i f(x_i)\Delta x \log [f(x_i)\Delta x] = - \sum_i f(x_i)\Delta x[\log f(x_i) + \log \Delta x] =$$
$$= - \sum_i [f(x_i)\log f(x_i)]\Delta x - \log \Delta x \sum_i f(x_i)\Delta x.$$

При дт-но малом Δx можно принять $\sum_i [f(x_i)\log f(x_i)]\Delta x \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx$,

а $\sum_i f(x_i)\Delta x \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Тогда

$$H_{\Delta x}(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx - \log \Delta x. \qquad (3)$$

От Δx не зв-т $H^*(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx$ и зв-т $- \log \Delta x$. С уменьшением Δx этот член неогр-но возрастает. Значит, с повышением точности возрастает неопр-ть:

$$H_{\Delta x}(X) = H^*(X) - \log \Delta x. \qquad (3а)$$

Значит, от точности измерения Δx зв-т начало отсчета, при к-ом энтропия выч-ся. Энтропия процесса с крд-ой X не меняется, если изменится начало крд-т. Для сохранения записи обычно принимают $\Delta x = 1$. Причем начало отсчета надо брать одним и тем же для сравнения энтропии крд-т непр-го процесса. В общем случае энтропию непр-го процесса можно записать в виде мт-го ож-ия фк-и:

$$H_{\Delta x}(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log[f(x)\Delta x]dx = M\{- \log [f(x)\Delta x]\}. \qquad (4)$$

Анч-но

$$H^*(X) = M\{- \log f(x)\}. \qquad (5)$$

Т.о., энтропия непр-го процесса яв-ся усредненной хркс-ой плотности рсп-ия. Энтропия не яв-ся исчерпывающей хркс-ой слн-ой крд-ты X расв-го процесса. Непр-ые сообщения не имеют абс-ой меры энтропии. Для них вводится понятие отс-ой энтропии. Эталоном обычно берут непр-ый сигнал X, имеющий равномерный закон рсп-ия в инр-ле ε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')dx = \int_{0}^{\varepsilon} dx' = \varepsilon. \qquad (6)$$

Учитывая (6) и (3а), неопр-ть непр-ой вел-ы X можно опр-ть числом, к к-му стремится разность энтропий сигналов X и X':

$$H_\varepsilon(X) = \lim_{\Delta x \to 0} [H(x) - H(x')] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx - \log \varepsilon. \qquad (6а)$$

Если считать, что стандартная вел. имеет равномерный закон рсп-ия в единичном инр-ле ($\varepsilon = 1$), то получим

$$H_\varepsilon(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx \,. \tag{7}$$

Врж-ие (7) яв-ся отс-ой энтропией. Здесь за стандарт принята равномерно рсп-ная вел. в ед-ном инр-ле.

Рас-им эксл-ые св-ва энтропии нек-ых непр. процессов.

1. Известен инр-л изменения $[a, b]$ непр-ой слн. вел-ы. Известно, что

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \tag{8}$$

Неизвестна плотность рсп-ия слн-ой вел-ы. Для неизвестной фк-и $f(x)$ найти max энтропии, к-ая задается врж-ем

$$H^*(X) = -\int_a^b f(x)\log f(x)dx \,.$$

Для огр-ой на отрезке $[a, b]$ слн-ой вел-ы энтропия будет мкс-ой при равномерном рсп-и. Т.о., мкс-ым зн-ем энтропии будет

$$H^*(X) = -\int_a^b \frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\log(b-a)\int_a^b dx = \log(b-a) \Rightarrow$$

$$H(X) = \log(b-a) - \log\Delta x = \log\frac{b-a}{\Delta x}\,, \tag{9}$$

где Δx – инр-л, на к-ый разбита непр-ая слн. вел-а X.

2. Слн. вел-а изменяется в неогр-ой обл., известны ее дсп-ия σ_x^2, мт. ож-ие m_x. Опр-ть закон рсп-ия, при к-ом функционал (фнц.), равный энтропии, обращается в max, т.е. $H^*(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx = \max$ при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx = \sigma^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Таким будет норм. рсп-ие $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$. По (5) находим мкс-ю энтропию $H^*(X) = M\left[-\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}\right)\right] = M\left[-\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\log e\right)\right] =$

$= -\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{\log e}{2\sigma^2}M[(x-m_x)^2] = \log\sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{2} = \log\sigma\sqrt{2\pi e}$. Тогда

$$H(X) = H^*(X) - \log\Delta x = \log\sigma\sqrt{2\pi e} - \log\Delta x = \log\frac{\sigma\sqrt{2\pi e}}{\Delta x}\,. \tag{10}$$

3. Слн. вел-а X изменяется на плж-ой полуоси $x \in\ ]0, \infty[$. Известно ее мт. ож-ие $a = 1/\lambda$. Опр-ть ее эксл. рсп-ие: $H^*(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx = \max$ при условии $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 1/\lambda$.

Таким рсп-ем будет экпц-ое $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Мкс. энтропия

$$H^*(X) = -\ M\left[\log\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)\right] = -M[\log\lambda - \lambda x\log e] = \log\frac{e}{\lambda},\ \text{т.к. } M[x] = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$H(X) = \log\frac{e}{\lambda} - \log\Delta x = \log\frac{e}{\lambda\Delta x}. \qquad (11)$$

п1. Сст-ие процесса на химическом прз-ве хркз-ся тремя крд-ми: t – температурой (темп.), P – давлением и V – объемом прореагировавших газов. Темп. рсп-на с равномерной плотностью в диапазоне t = 171-180°С (с точностью 1°С). Давление рсп-но по норм. закону со ср. зн-ем m_p = 120 Па и ср. кв. отк-ем, равным 4 Па (точность 0,5 Па). Объем реагирующих газов меняется по экпц. закону рсп-ия с параметром $\lambda = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\text{м}^3}$ (точность 0,1 м^3). Слн. вел-ы параметров процесса незв-мы. Найти энтропию процесса.

Р. 1. По (9) находим $H(t) = \log\frac{t_2 - t_1}{\Delta t} = \log\frac{180 - 171}{1} = \log 9$.

2. По стн-ю (10) опр-им энтропию второй крд-ты P:

$$H(P) = \log\frac{\sigma_P\sqrt{2\pi e}}{\Delta P} = \log\frac{4\sqrt{6{,}283\cdot 2{,}718}}{0{,}5} \approx \log 33{,}07.$$

3. Опр-им по (11) энтропию третьей крд-ты V:

$$H(V) = \log\frac{e}{\lambda\Delta V} = \log\frac{e}{0{,}5\cdot 0{,}1} = \log 54{,}36.$$

4. Опр-им энтропию химического процесса:

$$H(t, P, V) = \log\frac{t_2 - t_1}{\Delta t} + \log\frac{\sigma_P\sqrt{2\pi e}}{\Delta P} + \log\frac{e}{\lambda\Delta V} = \log(9\cdot 33{,}07\cdot 54{,}36) \approx 14\ \text{бит}.$$

Т.о., общая энтропия системы при трех незв-ых параметрах упл-ия равна 14 бит. Рас-им их физический смысл в отдельности. Число 9 показывает, что на участке длиной $t_2 - t_1$ = 9°С уложится ровно девять участков нечувствительности ценой в 1°С (при равномерном законе рсп-ия). Число 33,07 показывает, что на общем участке длиной $\sigma_P\sqrt{2\pi e}$ = 16,536 укладывается 33,07 участка нечувствительности ценой 0,5 Па (при норм-ом законе рсп-ия). Наконец, при экпц-ом законе рсп-ия параметра (объем реагирующих газов) на участке $\frac{e}{\lambda}$ = 5,436 укладывается 54,36 участка нечувствительности ценою в 0,1 м^3.

В п1 считали, что крд-ы системы упл-ия t, P, V яв-ся незв-ми слн. вел-ми. Если крд-ы процесса яв-ся зв-ми слн. вел-ми, то нх-мо использовать условную (усл.) энтропию.

Пусть даны две зв. системы X и Y. Введем сд-ие обз-ия:

$H(X/y)$ – частная усл. энтропия непр-ой слн. вел-ы X при условии, что непр. слн. вел-а Y приняла зн-ие $Y = y$ (кратко: частная усл. энтропия X отс-но Y). Эта энтропия будет зв-ма от вел-ы Y:

$$H(X/y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y)\log[f(x/y)]dx, \qquad (12)$$

где $f(x/y)$ – усл. плотность вер-ти слн-ой вел-ы X.

Анч-но опр-ся частная усл. энтропия Y отс-но X:

$$H(Y/x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)\log[f(y/x)]dy. \qquad (12')$$

Запишем стн. (12') в форме мт-го ож-ия:

$$H(Y/x) = M[-\log f(Y/x)]. \qquad (13)$$

Поскольку частная усл. энтропия X отс-но Y зв-т от вел-ы Y, можно провести ее усреднение по всем возможным зн-ям слн-ой вел-ы Y и получить ср. усл. энтропию X отс-но Y:

$$H_y(X) = -M[\log f(X/y] = M[H(X/y)]. \qquad (14)$$

Отметим, что для незв-ых слн. крд-т процесса X и Y усл-ые энтропии крд-ы X процесса всегда совпадают с энтропией $H(X)$:

$$H(X/y) = H_y(X) = H(X). \qquad (14а)$$

В общем случае энтропия слн-ой вел-ы не может быть меньше ее ср. усл. энтропии:

$$\left.\begin{aligned} H(X) \geq H_y(X); \\ H(Y) \geq H_x(Y), \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

где

$$H_y(X) = M[H(X/y)] = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)f(x/y)\log[f(x/y)]dxdy. \qquad (16)$$

Если учесть, что $f(x, y) = f_2(y)f(x/y)$ (где $f(x, y)$ – плотность вер-ти системы слн-ых вел-н X, Y), то (16) можно записать в виде

$$H_y(X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log[f(x/y)]dxdy, \qquad (16а)$$

где $f_2(y)$ – плотность вер-ти слн-ой вел-ы Y.

Если слн-ый процесс хркз-ся слн. зв. крд-ми X и Y, то

$$H(X, Y) = H(X) + H_x(Y) = H(Y) + H_y(X). \qquad (17)$$

Фм-у (17) можно обобщить на n-мерные процессы:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -M[\log f_1(X_1) + \log f_2(X_2/X_1) + \ldots + \qquad (17а)$$
$$+ \log f_n(X_n/X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})] = H(X_1) + H_{X_1}(X_2) + \ldots + H_{X_1X_2\ldots X_{n-1}}(X_n).$$

Если же параметры процесса незв-мы, то приходим к случаю, рас-му в п1:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i). \qquad (18)$$

Теперь опр-им кол-во инф-и в системе с верн-ми параметрами. Пусть требуется решить задачи инф-го плана в системе (расв-мой как черный ящик) упл-ия, на входе к-го имеется слн. вел-а Y, а на выходе – слн. вел. X (рис. 5). Нх-мо опр-ть кол-во инф-и о входной вел-е, содержащееся в выходной вел-е. За ср. кол-во инф-и при нбл-и вел-ы X будем принимать разность между энтропиями вел-ы Y до и после нбл-ия вел-ы X:

$$I_x(Y) = H(Y) - H_y(X). \tag{19}$$

В силу (15) можно заключить, что $I_x(Y) \geq 0$. При этом ср. кол-во инф-и о слн-ой вел-е Y, содержащееся в слн. вел-е X, будет равно нулю, если слн. вел. X, Y незв-мы:

$$I_x(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log\frac{f(x, y)}{f_1(x)f_2(y)}dxdy\,, \tag{20}$$

где $f_1(x)$ $[f_2(y)]$ – плотность вер-ти слн-ой вел-ы X $[Y]$, $f(x, y)$ – плотность вер-ти слн-го вектора (X, Y) Причем известно, что

$$I_x(Y) = I_y(X). \tag{21}$$

Пусть $X = x$, тогда $I(Y/x)$ наз. частным кол-ом инф-и и выч-ся по фм-е

$$I(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)\log\frac{f(y/x)}{f_2(y)}dx\,. \tag{22}$$

Рас-им ср. кол-во инф-и при передаче норм-но рсп-ых слн-ых вел-н. Пусть Y – входной, а X – выходной сигналы. Нбл-ем выходной сигнал X. Опр-им ср. кол-во инф-и о вел-е Y при нбл-и слн-ой вел-ы X.

Пусть слн-ый вектор (X, Y) подчинен норм. закону рсп-ия. Этот вектор хркз-ся пятью параметрами: m_x, m_y, σ_x, σ_y, ρ_{xy}, где ρ_{xy} – коэф-т корреляции (крц.) между двумя слн. вел-ми. Ср. кол. инф-и запишем в форме мт-го ож-ия

$$I_x(Y) = M\left[\log\frac{f(x, y)}{f_1(X)f_2(Y)}\right] = -\frac{1}{2}\log\left(1 - \rho_{xy}^2\right). \tag{23}$$

Сд-но, ср. кол. инф-и при входном сигнале Y и нбл-ом выходном сигнале X, к-ые рсп-ны норм-но, зв-т только от одного из пяти параметров слн-го вектора – от ρ_{xy}. Если обе слн. вел-ы были незв-ы, то кол-во инф-и равнялось бы нулю, т.к. $\rho_{xy} = 0$.

Теперь рас-им случай, когда присутствуют возмущающие фкт-ы (рис. 6). Пусть A – измерительное устройство. Измерение производится без запаздываний с ошибкой слн-го хрк-ра Z, к-ая подчиняется норм. закону рсп-ия и незв-т от Y. Сд-но, новые условия записываются так: 1) $X = Y + Z$; 2) известны σ_y, σ_z; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 + \sigma_z^2$; 4) совместный закон рсп-ия (X, Y) норм-ый.

Опр-им ср. кол. инф-и о вел-е Y по нбл-ю на выходе измерительного прибора при наличии возмущения (рис. 6).

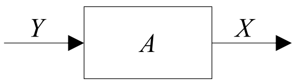


Рис. 5

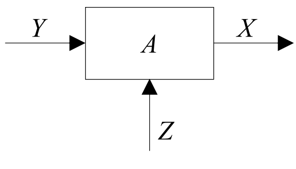


Рис. 6

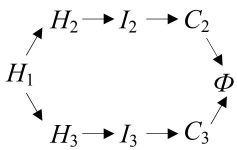


Рис. 7

В данном случае коэф-т крц-и удобно выразить через дсп-и слн-х вел-н $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_z^2}}$. Тогда ср. кол. инф-и опр-ся по (23):

$$I_x(Y) = -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2+\sigma_z^2}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_z^2}{\sigma_y^2+\sigma_z^2} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2}\right). \quad (24)$$

Т.о., ср. кол. инф-и на выходе измерительного устройства будет уменьшаться с ростом дсп-и ошибки измерения.

Выбор АСУ ТП и типов ЭВМ по инфн-ым кт-ям эф-ти. Рас-им примеры применения инфн-ых кт-ев и пути возможного перехода к экнч-им кт-ям. Н-р, проектировщику дт-но знать, что его система, имеющая большую инфн. пропускную способность, будет более эф-но работать, чем эксплуатируемая система с меньшей пропускной способностью. Данный инфн. кт-й яв-ся для него дт-ным. Экнс-у этого мало. Ему надо знать, сколько нх-мо затратить средств на систему и какой эф-т получит прз-во в результате применения этой системы, опр-ть срок окупаемости или сравнить полученный коэф. капитальных вложений с нормативным и т.д. Т.о., если специалист в состоянии опр-ть эфс-ть не только по инфн-ым, техн-им или техл-им кт-ям, но и по экнч-им, то его решение будет, как правило, более обоснованным. При проектировании же отдельных эл-ов системы не всегда удается выйти на экнч-ие кт-и, хотя по техн-им и инфн-ым показателям эфс-ть опр-ся. В нек-ых случаях экнч-ий кт-й невозможно опр-ть. В таких ситуациях отсутствие экнч-ой оценки не следует считать незавершенностью работы. Рас-им несколько примеров.

п2. На химическом прз-ве дистанционное упл-ие технологическим процессом (ТП) производится вручную путем регулирования со щита упл-ия темп-ы t, давления P и содержания примесей q. Разброс крд-т процесса подчиняется норм. закону рсп-ия со ср. кв. отк-ми $\sigma_t = 24\cdot10^{-1}$°C, $\sigma_P = 32\cdot10^{-1}$ Па, $\sigma_q = 16\%$. От уровня разброса всех трех параметров при регулировке процесса зв-т эфс-ть химической реакции. При более точном упл-и тремя параметрами нбл-ся повышение процента выхода конечного продукта реакции. Результат химической реакции ощутим при повышении инфн-ой пропускной способности по всем трем параметрам упл-ия процессом. Для повышения эфс-и получения данного продукта реакции можно применить одну из двух систем АСУ ТП. Параметры систем АСУ ТП 1 и АСУ ТП 2 представлены в табл. 1.

Все параметры яв-ся незв. вел-ми и подчиняются норм. закону рсп-ия. Процесс регулирования при всех трех системах упл-ия продолжается в течение 5 с (τ).

Надо выбрать систему, обеспечивающую мкс. инфн. пропускную способность C канала упл-ия при условии, что энтропия меняется равномерно в течение периода упл-ия. Для этого нх-мо опр-ть отс-ую эфс-ть по инфн-ой пропускной способности.

Р. Для выч-ия C_i надо знать I_i, к-ое можно выч-ть как разность энтропий при ручном упл-и и при упл-и с помощью АСУ ТП$_i$ (i = 1, 2). Значит, для опр-ия отс-ой эфс-и по инфн. кт-ю можно идти двумя путями, как показано на рис. 7, где индекс 1 относится к ручному упл-ю, 2 – к упл-ю АСУ ТП$_1$, 3 – к упл-ю АСУ ТП$_2$. Тогда выч-ия можно произвести в сд-ем порядке.

1. Опр-им энтропию при ручном упл-и процессом:

$$H(t_1, P_1, q_1) = H(t_1) + H(P_1) + H(q_1) =$$
$$= \log\left(\sigma_{t_1}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{P_1}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{q_1}\sqrt{2\pi e}\right).$$

2. Опр-им энтропию при упл-и АСУ ТП$_1$:

$$H(t_2, P_2, q_2) = H(t_2) + H(P_2) + H(q_2) =$$
$$= \log\left(\sigma_{t_2}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{P_2}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{q_2}\sqrt{2\pi e}\right).$$

3. Опр-им энтропию при упл-и АСУ ТП$_2$:

$$H(t_3, P_3, q_3) = H(t_3) + H(P_3) + H(q_3) =$$
$$= \log\left(\sigma_{t_3}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{P_3}\sqrt{2\pi e}\right) + \log\left(\sigma_{q_3}\sqrt{2\pi e}\right).$$

4. Выч-им ср. кол. инф-и при замене ручного упл-ия регулировкой при помощи АСУ ТП$_1$ (I_2) и АСУ ТП$_2$ (I_3):

$$I_2 = H(t_1, P_1, q_1) - H(t_2, P_2, q_2) = \left[\log\left(\sigma_{t_1}\sqrt{2\pi e}\right) - \log\left(\sigma_{t_2}\sqrt{2\pi e}\right)\right] +$$
$$+ \left[\log\left(\sigma_{P_1}\sqrt{2\pi e}\right) - \log\left(\sigma_{P_2}\sqrt{2\pi e}\right)\right] + \left[\log\left(\sigma_{q_1}\sqrt{2\pi e}\right) - \log\left(\sigma_{q_2}\sqrt{2\pi e}\right)\right] =$$
$$= \log\frac{\sigma_{t_1}}{\sigma_{t_2}} + \log\frac{\sigma_{P_1}}{\sigma_{P_2}} + \log\frac{\sigma_{q_1}}{\sigma_{q_2}} = \log\frac{32}{4} + \log\frac{32}{8} + \log\frac{16}{1} = 9 \text{ бит}.$$

$$I_3 = H(t_1, P_1, q_1) - H(t_3, P_3, q_3) = \log\frac{\sigma_{t_1}}{\sigma_{t_3}} + \log\frac{\sigma_{P_1}}{\sigma_{P_3}} + \log\frac{\sigma_{q_1}}{\sigma_{q_3}} =$$
$$= \log\frac{32}{2} + \log\frac{32}{4} + \log\frac{16}{2} = 10 \text{ бит}.$$

5. Выч-им инфн. пропускную способность кн-ов при упл-и АСУ ТП$_1$ и АСУ ТП$_2$:

$$C_2 = I_2/\tau = 9/5 = 1{,}8 \text{ бит/с}, \quad C_3 = I_3/\tau = 10/5 = 2 \text{ бит/с}.$$

6. Опр-им кт-й отн-ия эф-а АСУ ТП$_2$ к эф-у АСУ ТП$_1$:

$$\Phi = C_3/C_2 = 2/1{,}8 \approx 1{,}11.$$

Сд-но, по кт-ю «инфн. пропускная способность» конструктору целесообразнее выбрать систему АСУ ТП$_2$ с инфн. пропускной способностью 2 бит/с.

Таблица 1

Условия управления	$\sigma_{t_i} \cdot 10^{-1}$, °C	$\sigma_{P_i} \cdot 10^{-1}$, Па	σ_{q_i}, %
Без АСУ ТП	32	32	16
АСУ ТП$_1$	4	8	1
АСУ ТП$_2$	2	4	2

п3. Воспользуемся данными п2 и дпн-ой инф-ей о процессе. Научно-исст. институтом отрасли установлено, что при повышении инфн. пропускной способности от 1 бит/с до 2 бит/с на каждую десятую долю бит/с в ср-м приходится 1% повышения выхода продукта. Повышение выхода продукта на 1% дает прд-ю годовой прирост прибыли 400 тыс. руб. Известно, что система АСУ ТП$_1$ стоит 100 тыс. руб., ее монтаж – 50 тыс. руб., наладка – 25 тыс. руб.; АСУ ТП$_2$ стоит 200 тыс. руб., монтаж – 40 тыс. руб., наладка – 15 тыс. руб. Эксплуатационные расходы в течение года в каждой из систем – 10 тыс. руб.

Найти коэф. эфс-и затрат и сроки окупаемости при внедрении АСУ $ТП_2$ вместо АСУ $ТП_1$, если нормативный коэф. экнч-ой эфс-и капитальных вложений равен 0,5.

Р. 1. Опр-им дпн. капитальные вложения при внедрении АСУ $ТП_2$ вместо АСУ $ТП_1$:

$$K_Д = 200 + 40 + 15 - (100 + 50 + 25) = 80 \text{ тыс. руб.}$$

2. Опр-им дпн. годовой прирост прибыли $Э_{год}$ при внедрении АСУ $ТП_2$: $C_3 - C_2 = 2 - 1{,}8 = 0{,}2$ бит/с; это повысит на 2% выход продукции и на $2 \cdot 400 = 800$ тыс. руб. годовой прирост прибыли, т.е. $Э_{год} = 800$ тыс. руб.

3. Опр-им расчетный коэф. эфс-и затрат:

$$E_р = Э_{год}/K_Д = 800/80 = 10 \ (E_р > E_н).$$

4. Опр-им срок окупаемости дпн-ых затрат:

$$T = K_Д/Э_{год} = 1/E_р = 1/10 = 0{,}1 \text{ года.}$$

Сд-но, дпн. затраты окупятся за 1,2 месяца. Значит, с экнч-ой точки зрения выбор конструктора АСУ $ТП_2$ по инфн. кт-ю яв-ся выгодным для прд-ия.

Другой тип задач, как обобщение 3°, приводится в кз24(3): 8.0.

зм1. Оценки эфс-и сложных систем основываются и на др. видах кт-ев, н-р, на основе кт-ев ТМО, игровых кт-ев и т.д. (см. [11], [20]).

ЛЕКЦИЯ 26

8.4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И КАЧЕСТВА ЖИЗНИ КОРЕННОГО НАСЕЛЕНИЯ

1º. Основные понятия и обозначения. Главные положения. В данной лк-и использованы идеи, заложенные в работе «Математические модели сложной системы и весовой метод их решения» (см. [52], стр. 582-652), разработанные автором на основе весового подхода к иссл-ю сложных систем.

Моделирование (мдв.) социальной (соц.) системы – сложный и трудный процесс. Объясняется это тем, что в соц-ой системе процесс происходит на основе личных интересов индивида и его поведения. Это сущ-но затрудняет описание мт-ой модели (мд.). Поэтому очень важно выделить общие положения (это не простая задача, см. КС: Глобальный кт-й опт-сти в экн-ке), к к-ым стремится коренное население страны в целом.

Под коренным населением будем понимать людей, чьи отцы, деды, прадеды и т.д. жили в данной местности – деревне, регионе, стране (для краткости их назовем регионами) в согласии и дружбе между собой независимо (незв.) от национальных различий – т.е. где могут жить русские, башкиры, татары, марийцы, чуваши и т.д. с уважительным отношением (отн.) к обычаям этих наций незв-мо от их численности. Причем в каждом регионе есть менее обеспеченные (их около 85%, назовем их простым народом) и более обеспеченные (15%).

Мы исходим из того (и это одно из главных положений), что в данный момент и гос-во (в том числе и низовые уровни гос-ых органов, н-р, сельских, районных и т.д. Советов или органов. Самым низким уровнем гос-ва яв-ся семья. Семья есть атом любого уровня гос-ва), и наука, и религия должны вместе спасать (остановить процесс преобладания смертности над рождаемостью, поднять производительность труда на любом рабочем месте, обработать и целесообразно использовать брошенные земли после ликвидации колхозов и совхозов в с/х-ве) простой народ деревень и городов, создать рабочие места, усилить обеспечение их жильем, питанием и медицинским обслуживанием, добиться целенаправленного обучения и воспитания всего населения не ниже уровня передовых стран, оказать повседневную помощь, чтобы народ верил, расправил крылья и включился в общее дело динамичного развития страны.

В каждом регионе мы имеем дело с соц-ой системой (мд-ю) S.

Под соц-ой системой будем понимать любую часть общества, которую можно отделить от др-их. У такой «системы» есть нек-ые собственные потребности и способы их уд-ия, неодинаковые возможности с точки зрения как самой системы, так окружающей среды. При этом естественным образом возникает взаимоподчиненность систем. Н-р, деятельность любого подразделения организации (орг.) зависит (зв.) от деятельности орг-и в целом (н-р, бригада – цех – завод – отрасль); деятельность, развиваемая в отдельном регионе страны, зв-т от деятельности регионов в системе и т.д.

В соц. системе возникает категория звс-ти. Н-р, если офицер начинает руководить действиями солдата, то солдат обязан подчиняться его распоряжениям, это означает, что солдат должен зв-ть от офицера. Это относится ко всем видам управления (упл.) людьми, группами и орг-ми.

Понятие зв-ти приводит к понятию руководства и власти. Если условиться, что власть зиждется на возможности руководства или упл-ия людьми или группами лиц, то основой должна быть зв-ть руководимых (S_1) от того или тех, кто руководит (S_2). При этом S_2 иногда наз-ют доминирующей системой или средой. Причем зв-ть и власть не одно и то же.

Власть – это возможность для доминирующей системы упл-ть (или руководить) поведением зв-ой системы на основе звс-ти. Доминирующая система направляет действия зв-ой системы посредством «наказаний» или «поощрений». Зв-ть должна быть пропорциональна наказанию и поощрению.

Анч-ые подтверждения сказанного можно найти в области международных, политических и экнч-их или имущественных отн-й и т.д. Понятие зв-ти одной страны от другой яв-ся в этом смысле совершенно классическим. В част-и, известны примеры зв-ти развивающихся стран от поставок продуктов питания из др-х стран, примеры поставок сырья и военной техники и т.д. Сокращение или прекращение этих поставок есть наказание, а увеличение размеров этих поставок – поощрение.

В соц-ой системе опр-ые зв-ти пст-но возникают и отмирают. История человечества яв-ся на самом деле историей зв-ей между людьми.

Следует отметить, что каждый индивид $S^{\tau} \in S$ ($\tau = 1, 2, \ldots$) в одних ситуациях выполняет роль S_1^{τ}, а в др-х – S_2^{τ}. Н-р, руководитель $S^{\tau} \in S$ для нижестоящего органа есть S_2^{τ}, а для вышестоящего – S_1^{τ}, или S^{τ} в семье может оказаться в роли S_2^{τ}, а на рабочем месте – S_1^{τ}.

Такая взаимоподчиненность есть объективная необходимость (нх.), от к-ой никуда не денешься. Поэтому для общего развития каждого индивида $S^{\tau} \in S$ и общества (страны) в целом сд-им главным положением яв-ся необходимость, чтобы $S_1^{r} \in S_1$ выбирали, поддерживали и верили в $S_2^{\tau} \in S_2$ (где $S_1 \cup S_2 = S$), а $S_2^{\tau} \in S_2$, в свою очередь, заботились, оправдывали доверие и работали для $S_1^{r} \in S_1$. Т.е. между $\{S_1^{r}\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ должны быть взаимодоверие, взаимопомощь, взаимозабота.

Если в устройстве общества исходить из этого положения, то отпадает его деление на классы, а гос-во (см. КС) станет общенародным (в этом случае семья есть мини-гос-во, а гос-во есть большая семья) и будет работать на общее благо всего народа и развитие страны в целом.

Более того, в этом случае появится условие самовыдвижения в зв-ти от способностей и возможностей на роль $S_2^{\tau} \in S_2$ на основе одобрения и поддержки народа. Такому руководителю более выгодно быть маяком, примером, как жить, творить и быть патриотом своей страны. Не исключено, что роль руководителя займет и такой индивид $S_0^{\sigma} \in S_0$ ($S_0 \subset S$), к-ый занимает пост в корыстных целях: все хапает («прихватизирует»), богатеет и полностью игнорирует мнение народа. В таком случае законом должно быть предусмотрено право народа на немедленный отзыв такого руководителя с занимаемой должности (не дожидаясь окончания выборного срока) с применением ств-го наказания. Тогда мы избавимся от пустой траты огромных средств на предвыборных кампаниях различных партий, от к-ых все равно нет толку, кроме обещаний.

Сд-им главным положением яв-ся принцип коридора [52], где строго в законном порядке регламентируются обязанности и права индивидов $S_1^{r} \in S_1$ и $S_2^{\tau} \in S_2$ в разумных пределах по зарплате, демократии, обеспеченности жильем и работой, общественным и семейным положениям, перед судебными законами, правилами дорожного движения, по использованию различных льгот и т.д.

Коридор не должен быть слишком широким (тогда S_2 будет иметь неогр. права по сравнению с правами S_1. Это приведет к недовольству и недоверию к S_2 со стороны S_1) и слишком узким (тогда различие в правах S_1 и S_2 будет почти отсутствовать. Это приведет к снижению интереса к работе и ее неэфс-ти $S_2^{\tau} \in S_2$, ибо в этом случае им выгоднее быть в роли $S_1^{r} \in S_1$). В част., если коридор в пределе превратится в линию, то различий в правах $\{S_1^{r}\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ не будет, а для соц-го общества этот предел окажется самым опасным.

Для спасения простого народа, нормального развития страны и для эфн-ой работы $\{S_1^{r}\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ главным яв-ся сд. положение.

Постоянно развивать и улучшать генофонд (см. КС), а все остальное (обеспечение народа жильем и питанием, образованием и воспитанием, работой и медицинским обслуживанием) подчинено и исходит [52] из этой глобальной задачи.

Коренное население состоит из индивидов $\{S_1^{r}\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$, к-ые выполняют вышеприведенные главные положения. Н-р, если $\{S_2^{\tau}\}$ работает против $\{S_1^{r}\}$, преследуя свои корыстные цели, то теряет статус коренного населения и переходит в статус S_0^{σ} (с дальнейшим переходом в статус S_1^{r}, если это допустимо по степени совершенных деяний); если S_1^{r} совершит преступные действия, то переходит в статус $\{S_0^{\sigma}\}$ и т.д. В статус $\{S_0^{\sigma}\}$ включаются и приезжие в поисках работы из др-х стран. Если они долгое время (н-р, 3-5 лет) работают и живут в данной местности, признают обычаи и порядки коренного населения и строго их выполняют, то они могут перейти (по согласию старейшин и местных органов коренного населения) в статус $\{S_1^{r}\}$. Но это очень серьезный вопрос с опасными последствиями для коренного населения, поэтому целесообразно остановить процесс воссоединения семей и усилить высылку нелегалов.

Любой индивид S_0^σ может перейти в статус $\{S_1^r\}$ или «останов» $S_{ост}^\nu$, означающий депортацию (незаконно приезжих из др. стран) или ликвидацию (изолирование от общества психически больных и злостных преступников).

Вообще, переход из одного статуса в др-й может меняться в сд. порядке:

$$\begin{tikzcd} S_1^r \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & S_2^\tau \arrow[r] & S_0^\sigma \arrow[r] \arrow[ll, bend left] & S_{ост}^\nu \end{tikzcd}$$

Здесь переход из S_0^σ в S_2^τ невозможен, иначе будут ущемлены интересы коренного населения. При решении вопроса переходов индивидов от одного статуса в другой мнение старейшин региона играет важную роль, поэтому в каждом регионе должен образоваться и оперативно действовать Совет старейшин и местные органы гос-ва, к-ые в то же время могут поставить заслон оттоку богатства из региона.

В дальнейшем, если нет нх-ти различать $S_1^r \in S_1$ и $S_2^\tau \in S_2$, то будем обз-ть их через $s^\lambda \in S$, где $S = S_1 \cup S_2$.

Напомним, что экнч-ая эфс-ть опр-ся отн-ем полученного эффекта к затрате. В общем случае в сложных системах, кроме экнч-ой, расв-ся (см. 1°: 8.3) эф-ти по надежности, устойчивости, помехозащищенности, кач-ву упл-ия и т.д.

Качество – филос. категория (см. КС), выражающая неотделимую от бытия объекта его сущн-ю опр-сть, благодаря к-ой он яв-ся именно этим, а не иным объектом.

Качество жизни – соцч. категория (см. КС), выражающая качество (кач.) уд-ния материальных и культурных потребностей людей.

Отметим, что в нашем случае мы имеем дело только с экнч-ой эфс-ю. Причем эфс-ть и кач-о жизни населения тесно связаны между собой, поэтому их разделять не будем, а рас-им вместе.

2°. Исходные положения и основные критерии. Для анализа и мдв-ия соц-ой системы будем исходить из выделения тех общих факторов (фкт.), к к-ым стремится коренное население страны в целом. Эти фкт-ы наз-ем исходными (исх.) положениями (пж.) и обз-им через $\Pi = \{\Pi_i\}$. Если исх. пж-ия $\{\Pi_i\}$ сформулированы объективно и справедливо, то возражать против них трудно. Н-р, кто из членов общества не желает, чтобы страна была развивающейся, цветущей, красивой, чтобы люди жили в достатке и относились друг к другу доброжелательно, помогали друг другу, чтобы не было коррумпированных чиновников, взяточников, преступников, террористов, маньяков и пр., чтобы народ был уверенным в завтрашнем дне и не боялся вечером выйти на улицу и т.д. Ясно, что все этого хотят. Значит, есть общие стремления, что можно взять за основу и сформулировать их в виде исх-ых пж-й $\{\Pi_i\}$.

Исх. пж-ия $\{\Pi_i\}$ сами по себе еще ничего не дают, их надо хркз-ть так назм-ми основными критериями (кт.) $K = \{k_j\}$, к-ые численно врж-ют суть исх-ых пж-й. Для этого используется [52] девятибалльная шкала $i_2 = \{0,2; 0,4; \ldots; 1,8\}$.

Сформулируем исх. пж-ия в порядке их предпочтительности (прч.), т.е. важности.

П$_1$. Индивиды $S_1^r \in S_1$ и $S_2^\tau \in S_2$ взаимосвязаны так, что не могут сущв-ть друг без друга. Поэтому они должны доверять, заботиться и помогать друг другу. Это выгодно каждому S_1^r и S_2^τ больше, чем перейти в др-й статус: $S_1^r \to S_0^\sigma$ и $S_2^\tau \to S_0^\sigma$ (или S_1^r).

П$_2$. Каждый индивид $S_1^r \in S_1$ и $S_2^\tau \in S_2$ обязан выполнять принцип «коридора», где строго в законном порядке регламентируется совокупность прав и обязанностей соц-ых подсистем $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^\tau\}$.

П$_3$. Постоянно развивать и улучшать генофонд, а все остальное (обеспечение народа жильем и питанием, образованием и воспитанием, работой и медицинским обслуживанием) подчинено и исходит из этой глобальной задачи.

П$_4$. Каждый индивид $s^\lambda \in S$ (где $S = S_1 \cup S_2$) должен помогать сам себе (никто за него этого не сделает) в сохранении здоровья, получении хорошего воспитания и образования, постоянном повышении уровня своей квалификации и прз-сти труда, достижении семейного счастья и спокойствия за весь период жизни. Поэтому не зря говорят, что человек яв-ся хозяином своей судьбы.

П$_5$. Все индивиды $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^\tau\}$ должны понять, что у каждой страны свой путь развития и сущв-ния на основе природных и климатических условий, наличия полезных ископаемых и др-их ресурсов, менталитета, обычаев, религии и традиций местного народа, и нельзя подражать образу жизни и слепо копировать установленные порядки др-их стран, но можно перенимать положительный опыт и использовать его на благо своей страны.

П$_6$. Каждый индивид $s^{\lambda} \in S$ коренного населения должен понять и признать, что семья – атом любого уровня гос-ва. Без семьи нет гос-ва и без гос-ва нет семьи. Семья есть маленькое гос-во. Дружные, крепкие семьи – это фундамент развивающегося гос-ва. Поэтому поддержка и обеспечение семьи всем нх-м в жизни в пределах закона очень важно.

П$_7$. Индивиды коренного населения $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ должны совместно вести пст-ю и жесткую борьбу против отк-й от принятых норм П$_2$ установленного законом порядка (т.е. от $\{S_0^{\sigma}\}$: коррупции, воровства, всевозможных маньяков, наркоманов, алкоголиков, рецидивистов, террористов, нелегалов, олигархов и т.д.) и защищать самих себя от этих закононепослушных эл-ов. Страна будет находиться в развивающемся режиме только в том случае, когда пст-но будет оказываться поддержка и помощь коренному населению, ибо только коренное население бережет народное богатство, полезные ископаемые, лесные, рыбные и пр. ресурсы, противостоит оттоку богатства в др. страны, стремится содержать экологию на опт-ом уровне, защищает интересы будущего поколения.

П$_8$. Индивиды $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ должны понять и признать, что в данный момент поднятие с/х-ва на должный уровень развития яв-ся первостепенной задачей. Надо усовершенствовать технологию обработки и использования земли. Добиться, чтобы житье в деревне стало не менее выгодным, чем в городе. Восстановить былое назначение с/х-ва как источника людских ресурсов, продуктов в дт-ом кол-ве для всего населения S страны и импорта с целью накопления капиталовложений для дальнейшего развития с/х-ва, сырьевых ресурсов промышленности и т.д.

П$_9$. Каждый индивид $S_1^r \in S_1$ и $S_2^{\tau} \in S_2$ коренного населения яв-ся гражданином своей страны, сд-но, имеет право на жилье, образование, труд и медицинское обслуживание. Помогать и работать в направлении уд-ия этих потребностей яв-ся главной задачей каждого индивида коренного населения. Здесь главную роль играют индивиды $\{S_2^{\tau}\} = S_2$ руководящих и гос-ых органов с материальными, финансовыми, медицинскими, учебно-воспитательными, интеллектуальными, инф-ми и др-ми ресурсами.

П$_{10}$. Индивиды $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ должны способствовать опт-му рсп-ию гос-го бюджета на каждый вид $\{A_j\}$ потребностей строго опр-ые суммы $\{a_j\}$ (млн. руб.) на каждый год. Сюда входят и расходы на содержание армии, силовых и судебных структур, содержание в опт-ом режиме действий инф-ых, сухопутно-дорожных, морских, воздушных коммуникаций и т.д. Правильное и объективное рсп-ие гос-го бюджета по этим потребностям очень важна для развития страны, чтобы она была сильная и цветущая.

П$_{11}$. Индивиды $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^{\tau}\}$ должны целенаправленно использовать такие средства, как художественная литература, кино, театр, СМИ и т.д. для целесообразного влияния на население всей страны. Все эти средства должны находиться под контролем гос-ва и направляться на активное воспитание всех членов общества.

П$_{12}$. Индивиды $\{S_2^{\tau}\}$ должны понять и признать, что телевизионные передачи яв-ся самым массовым и сильно влияющим средством для 80% всего населения страны почти всех возрастов, к-ые более половины свободного вр-и тратят на просмотр телевизионных передач. Поэтому все каналы телевизионных передач должны находиться в руках гос-ва, как и нефтяные, газовые и др. богатства страны.

Теперь на основе исх-ых пж-й П$_1$-П$_{12}$ сформулируем основные кт-и $K = \{k_j\}$, к-ые хркз-ют индивидуальные св-ва индивида $s^{\lambda} \in S$ (эти св-ва врж-ся с помощью девятибалльной шкалы i_2) коренного населения в порядке прч-сти этих св-в.

Каждый индивид $s^{\lambda} \in S$ должен:

k_1. Иметь норм-ое, крепкое здоровье.

k_2. Иметь норм. умственное развитие.

k_3. Иметь дт-ый уровень нравственного, патриотического и коллективного воспитания.

k_4. Иметь ств-е ему среднее, высшее и т.д. образование, адекватное его специальности.

k_5. Стремиться к труду, понять и признать, что Труд облагораживает человека. Поэтому любой труд (пст-й или врн-й, физический или умственный, домашний или прз-ый) для каждого человека яв-ся основой жизни. Причем каждый человек должен стараться иметь пст-ю работу по специальности в ств-и со своими способностями (возможностями).

k_6. Стремиться повышать свою квалификацию и поднимать прзл-ть труда. Быть творческим работником в занимаемой должности – в работе.

k_7. Иметь семью (желательно с двумя и более детьми).

k_8. Быть свободным от наркотических и алкогольных зв-ей. Вести здоровый образ жизни.

k_9. Быть требовательным к себе и окружающим, справедливым по отношению к своим подчиненным, нх-мо стараться установить порядок в своем регионе и помогать ств-им органам вести борьбу против $\{S_0^\sigma\}$.

k_{10}. Быть законопослушным гражданином своей страны. Соблюдать правила и порядок в общественной и семейной жизни.

k_{11}. Быть честным, справедливым, доброжелательным и примером для окружающих. Каждый индивид $S_1^r \in S_1$ и $S_2^\tau \in S_2$ должен понять и признать, что быть таким гораздо важнее, чем стремиться достичь корыстных целей и потерять эти кач-ва.

Ясно, что основные кт-и k_1-k_{11} должны строго учитываться при переходе из статуса S_1^r в статус S_2^τ (т.е. $S_1^r \to S_2^\tau$) или $s^\lambda \to S_0^\sigma$ и $S_0^\sigma \to S_1^r$, назначенных индивидам $s^\lambda \in S$ зарплаты, различных льгот и т.д., т.е. при установлении «коридора» для индивидов $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^\tau\}$.

Для приобретения индивидами $s^\lambda \in S$ индивидуальных качеств k_1-k_{11} нх-мо тратить активные средства на каждый месяц по виду $\{A_j\}$ потребностей (A_1 – поднятие и развития с/х-ва с дальнейшим развитием промышленности, A_2 – жилье, A_3 – питание, A_4 – дошкольное обучение и воспитание, A_5 – образование, A_6 – физк. и спорт, A_7 – воспитание посредством телевизора, кино, театра, искусства, СМИ и т.д., A_8 – трудоустройство, создание рабочих мест, A_9 – медицинское обслуживание, A_{10} – пенсионное обеспечение и санаторно-курортное лечение, A_{11} – поддержка и обеспечение семьи, детей-инвалидов, A_{12} – борьба с закононепослушными индивидами $\{S_0\}$) строго опр-ые суммы $\{a_i\}$, врж-ые в частях (одна часть – единица измерения). Одна часть каждого a_i формирует совокупность (свк.) индивидуальных кач-в k_1-k_{11}, врж-ых в вероятностях (вер.) a_{ij} $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\right)$. Каждая часть потребления a_j имеет стоимость c_j (тыс. руб.). Пусть x_j – месячное потребление в частях j-го вида, т.е. план, тогда получим компактно записанную табл. 1 в этих обз-ях.

Таблица 1

C – стоимость	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	k – кол. осн. кт-в
A – виды потребл. / K – виды осн. кт-в	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	
K_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	k_1
K_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	k_2
…	…	…	…	…	…	…	…
K_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	k_i
…	…	…	…	…	…	…	…
K_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	k_m
a – кол. потребл.	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n	–
x – план	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	–

зм1. Виды потребностей $\{A_j\}$ можно интерпретировать как продукт или изделие, а осн. кт-и $\{K_i\}$ – как фонды или ресурсы. Тогда табл. 1 будет принимать вид табл. 2 из 4º: 3.1 [52].

зм2. В кач-ве a_{ij} можно взять и степени сравнения кт-ия k_i над кт-ем k_j. В этом случае $a_{ij} \in [0,2; 1,8]$, к-ые позволяют установить работоспособность, нравственный уровень и т.д., т.е. опр-ть индивидуальные св-ва k_1-k_{11} каждого индивида $s^\lambda \in S$ с целью опт-го его использования на благо общества или отстранения его с занимаемой должности для закононепослушного индивида $S_0^\sigma \in S_0$ вплоть до отделения его от общества.

3º. Постановка задач. Примеры. Соц. система яв-ся сложной и для ее изучения мы используем весовой (см. [52]) подход (в двух аспектах): анализ трудных понятий (задача В) и способ мдв-ия (задача Б). С учетом зм2 сначала будет рас-на

зВ. Пусть фиксированный неуп-ый набор k_1-k_{11}, хркз-ий весовую фк-ю φ на базе $П_1$-$П_{12}$, опр-ен на основе экспертных оценок с помощью девятибальной шкалы i_2 с учетом степени важности каждого из этих кт-ев отс-но остальных. Требуется найти опт-ю (в смысле $П_1$-$П_{12}$) оценку φ с помощью совместного учета числовых зн-й осн-ых кт-ев k_1-k_{11}.

Такая постановка задачи позволяет целенаправленно опр-ть индивидуальные св-ва каждого индивида $s^\lambda \in S$ с помощью простых расчетов, мт-им аппаратом к-ых яв-ся весовые фк-и [52]. Итак, эф-ть и кач-о системы S опр-ся как весовые фк-и от k_1-k_{11}:

$$\varphi = \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_{11}). \tag{1}$$

В отн. (1) каждый k_i не одинаково важен отс-но остальных кт-ев, т.е. зв-т от остальных, что устанавливается с помощью попарного сравнения k_i. Причем результат сравнения – превосходство k_i над k_j выразим через «важно», превосходство k_i над остальными $\{k_j\}$ – через «предпочтительно» (прч.), а эф-ть и кач. системы S, выраженной по φ – через «эффективно». Степени a_{ij} сравнения k_i над k_j и коэф-ы α_j^0 эфс-ти (табл. 2) врж-ся в баллах $\{i_2\}$ по девятибальной шкале.

Таблица 2

i_2	a_{ij}	α_i
0,2	неважно	неэффективно
0,4	чуть важно	чуть эффективно
0,6	маловажно	мало эффективно
0,8	более важно	менее эффективно
1,0	одинаково важно	эффективно
1,2	важнее	более эффективно
1,4	очень важно	очень эффективно
1,6	ультраважно	ультраэффективно
1,8	суперважно	суперэффективно

Пусть $P(k_i)$ – важность k_i. Тогда $a_{ij} = 1$, если $P(k_i) = P(k_j)$; $a_{ij} = \{0{,}2/0{,}4/0{,}6/0{,}8\}$, если $P(k_i) < P(k_j)$ и $a_{ij} = \{1{,}2/1{,}4/1{,}6/1{,}8\}$, если $P(k_i) > P(k_j)$, где / – знак или. Причем a_{ij} обладает св-ми: $a_{ii} = 1$ и $a_{ji} = 2 - a_{ji}$.

На основе экспертных оценок $\{a_{ij}\}$ заполнены в табл. 3.

Таблица 3

k	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	Σa_{ij}	a_i	a_i^0	α_i^0	$\sqrt{a_i^0\alpha_i^0}$	β_i^0	γ_i^0	$\sqrt{a_i^0\beta_i^0}$	$\sqrt{a_i^0\gamma_i^0}$
k_1	1,0	1,2	1,0	0,8	0,6	1,0	0,8	0,4	1,4	0,8	0,4	9,4	0,078	0,386	1,2	0,681	1,4	1,6	0,735	0,786
k_2	0,8	1,0	1,2	1,0	0,8	0,8	1,0	0,6	1,2	1,0	0,6	10,0	0,083	0,568	1,4	0,892	1,4	1,4	0,892	0,892
k_3	1,0	0,8	1,0	0,6	1,0	1,2	1,2	0,4	1,0	0,6	0,4	9,2	0,076	0,313	1,0	0,559	1,2	1,6	0,613	0,708
k_4	1,2	1,0	1,4	1,0	1,2	1,0	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	10,8	0,089	0,886	1,6	1,191	1,0	1,2	0,941	1,031
k_5	1,4	1,2	1,0	0,8	1,0	1,4	1,2	1,0	1,2	1,0	0,8	12,0	0,099	1,150	1,8	1,431	1,0	1,0	1,072	1,072
k_6	1,0	1,2	0,8	1,0	0,6	1,0	0,8	0,6	0,8	0,6	0,4	8,8	0,073	0,200	0,6	0,346	0,6	0,6	0,346	0,346
k_7	1,2	1,0	0,8	1,2	0,8	1,2	1,0	1,2	1,4	1,2	1,0	12,0	0,099	1,150	0,2	0,480	0,2	0,6	0,480	0,831
k_8	1,6	1,4	1,6	1,2	1,0	1,4	0,8	1,0	1,6	1,4	1,2	14,2	0,117	1,800	1,6	1,697	1,6	1,6	1,697	1,697
k_9	0,6	0,8	1,0	1,2	0,8	1,2	0,6	0,4	1,0	0,8	0,8	9,2	0,076	0,313	0,4	0,364	0,8	0,8	0,500	0,500
k_{10}	1,2	1,0	1,4	1,2	1,0	1,4	0,8	0,6	1,2	1,0	1,2	12,0	0,099	1,150	0,8	0,959	0,6	0,6	0,831	0,831
k_{11}	1,6	1,4	1,6	1,2	1,2	1,6	1,0	0,8	1,2	0,8	1,0	13,4	0,11	1,586	1,0	1,259	0,8	0,8	1,126	1,126
Σ	12,6	12,0	12,8	11,2	10,0	13,2	10,0	7,8	12,8	10,0	8,6	121	1,000	9,502	11,6	9,856	10,6	11,8	9,233	9,820

Исходя из $\{a_{ij}\}$ можно опр-ть коэф-ты $\{a_i\}$ прч-ти k_i над $\{k_j\}$:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ , n = 11. \tag{2}$$

Для практического использования коэф-та $a_i = [\alpha, \beta] = [\min a_i, \max a_i] =$ $= [0{,}073; 0{,}117]$ (см. табл. 3) нх-мо ее прб-ть в $a_i^0 = [a, b] = [0{,}2; 1{,}8]$ по фм-е

$$a_i^0 = \frac{b-a}{\beta-\alpha}a_i + \frac{\beta a-\alpha b}{\beta-\alpha}. \quad (3)$$

Из (3), подставив числовые зн-ия вместо параметров, получим

$$a_i^0 = 36{,}36a_i - 2{,}45. \quad (4)$$

Зн-ия a_i^0 записаны в табл. 3. В част., $a_6^0 = 0{,}2$ и $a_8^0 = 1{,}8$, остальные $\{a_i^0\}$ расположены между ними.

Коэф-ты эф-ти α_i^0 (без учета a_i^0) каждого k_i отн-ия (1) опр-ся с помощью экспертных оценок для каждого индивида $s^\lambda \in S$ и записываются в табл. 3. Отсюда с учетом a_i^0 получим ср. зн-ие эфс-ти по фм-е

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\alpha_i^0}\,,\ n = 11. \quad (5)$$

Чтобы пользоваться стн-ем (5), нх-мо еще опр-ть крайнюю степень эфс-ти α. Для этого рас-им индивидов $s^\lambda \in S$ с заведомо низким уровнем индивидуальных св-в, т.е. для к-ых $\{k_i\} = 0{,}2$, и индивида $s^\lambda \in S$ с $\{k_i\} = 1{,}8$. Тогда по (5) получим

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\cdot 0{,}2} = 0{,}394,\ \overline{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\cdot 1{,}8} = 1{,}183\ (n = 11). \quad (6)$$

Сегмент, полученный из (6), $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] =$ $= [0{,}394; 1{,}183]$ разделим на пять подсегментов $\{\varphi_i\}$ и дадим оценку эфс-ти (табл. 4) для каждого индивида $s^\lambda \in S$ по общепринятой пятибалльной шкале.

Таблица 4

N	φ_i	Оценка
1	0,394; 0,551	очень плохо
2	0,552; 0,709	плохо
3	0,710; 0,867	удовлетворительно
4	0,868; 1,025	хорошо
5	1,026; 1,183	отлично

п1. Пусть требуется оценить эфс-ть и кач-о возможностей конкретного индивида $s^\lambda \in S$ с индивидуальными св-ми α_i^0, заданными в табл. 3 по предложенной методике.

Р. Заполняем колонку α_i^0 табл. 3 на основе экспертных оценок св-в данного индивида. По фм-е (5) находим $\alpha = 9{,}856/11 = 0{,}896$. Т.к. $0{,}896 \in [0{,}868; 1{,}025] =$ $= \varphi_4$, то эфс-ть и кач. возможностей данного индивида оценивается на хорошо.

п2. Пусть по объявлению на вакантное место ст. инженера прд-ия подали заявление два кандидата. Конкурсная комиссия на основе изучения их документов, тестирования и собеседования с каждым в отдельности оценила их индивидуальные св-ва $\{\beta_i^0\}$ и $\{\gamma_i^0\}$ по осн. кт-ям k_1-k_{11}. Требуется выбрать кандидата, к-ый набрал нб. балл.

Р. Заполняем колонки $\{\beta_i^0\}$ и $\{\gamma_i^0\}$ табл. 3 по результатам экспертных оценок k_1-k_{11} каждого кандидата. По фм-е (5) находим $\alpha = \alpha(\beta_i^0) = 9{,}233/11 =$ $= 0{,}839$ и $\alpha = \alpha(\gamma_i^0) = 9{,}820/11 = 0{,}893$. Т.к. $\alpha(\beta_i^0) = 0{,}839 \in [0{,}710; 0{,}867] =$ $= \varphi_3$, то индивид с данными $\{\beta_i^0\}$ оценивается на уд-но, а индивид с данными $\{\gamma_i^0\}$ $[\alpha(\gamma_i^0) = 0{,}893 \in \varphi_4]$ – на хорошо. Поэтому индивид с данными $\{\gamma_i^0\}$ становится победителем конкурса и занимает вакантную должность.

зм3. Следует отметить, что задача зВ не яв-ся оптз-й, она лишь выявляет способности (возможности) индивида $s^\lambda \in S$ на основе анализа его индивидуальных св-в по осн. кт-ям k_1-k_{11} с целью представления ему работы (должности) в ств-и с его способностями и адекватного принятия решения при переходе индивида от статуса $S_1^r \in S_1$ к статусу $S_2^\tau \in S_2$ (предполагается, что индивидуальные кач-ва каждого индивида прозрачны и доступны народу), что сущ-но повысит объективность выборного процесса на руководящие посты и избавит нас от громадных (ненужных) расходов во время выборных кампаний. Кроме того, на основе такой базы данных и гос-ву – $S_2^\tau \in S_2$ (на всех уровнях) создается благоприятные условия, чтобы опт-но с дт-ой эфс-ю руководить народом – $S_1^r \in S_1$.

Чтобы анч-ая задача была оптз-ой, нх-мо явно сформулировать цель задачи при огр-ях с данными параметрами задачи. Ведь для того, чтобы каждый индивид $s^\lambda \in S$ приобрел свойства (здоровье, умственное и физическое развитие, уровень нравственности и пр.), нх-мо тратить активные средства (финансы) на учреждения (здравоохранения, образования, жилья, силовых структур и т.д.). Причем эти средства надо тратить опт-но с большой пользой, т.е. эф-но с целью повышения кач-а жизни народа. Т.о., возникает оптз-ая задача зБ, кт-ю сформулируем в сд. виде.

зБ. Пусть для приобретения индивидуальных кач-в $\{k_i\}$ $(i = \overline{1,m})$ индивидами $s^\lambda \in S$ $(\lambda = \overline{1,\Lambda})$ нек-го региона нх-мо тратить активные средства на каждый месяц по виду $\{A_j\}$ $(j = \overline{1,n})$ потребностей (птб.) опр-ые суммы $\{a_j\}$ $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j = a\right)$, врж-ые в частях (одна часть = одна тыс. руб. есть единица измерения). Одна часть каждого a_j формирует совокупность (свк.) индивидуальных кач-в k_1-k_m, врж-ые в вероятностях (вер.) a_{ij}, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \le 1$ при $m \le n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, нек-ые $a_{ij} = 0$), каждого индивида s^λ. Каждая часть птб-ей a_j имеет стоимость c_j (тыс. руб.). Пусть x_j – месячная птб-ть j-го вида, т.е. план.

Требуется найти план, чтобы общая сумма расходов была мнм-ая при заданных мнм-ых зн-ях $\{k_i\}$ индивидуальных кач-в.

Отсюда получим мт-ю мд. задачи:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge k_i \ (i = \overline{1,m}), \tag{8}$$

$$0 \le x_j \le a_j \ (j = \overline{1,n}\ ), \tag{9}$$

где $k_i \in [0{,}2;\ 1{,}8]$.

Задача (7)-(9) яв-ся оптз-ой задачей для наилучшего использования бюджетных средств, выделенных на регион. Приведем несколько зм-й.

зм4. Коэф-ты a_{ij} стн-ия (8) при фиксированном $i = i_0$ яв-ся пропорциональным (прц.) рсп-ем активных средств $\{a_j\}$ для формирования индивидуального кач. k_{i_0} индивида s^λ региона, а при фиксированном $j = j_0$ a_{ij} – прц. рсп-ем активного средства a_j по формированию индивидуальных кач-в $\{k_i\}$ индивида s^λ региона.

зм5. При формировании k_1-k_m (сд-но, a_{ij}) нх-мо учесть рсп-ие кол-ва $Q = \sum_{t=1}^{5} q_t$ индивидов региона по соц-ым видам (q, q_2, q_3, q_4, q_5) = (дети дошкольного возраста, учащиеся школ и вузов, работающие, пенсионеры, прочие) с помощью стн-й $\overline{q}_t = q_t / Q$, где $\sum_{t=1}^{5} \overline{q}_t = 1$. Стн-ия $\{\overline{q}_t\}$ учитываются при формировании $\{a_{ij}\}$ как дпн-ые коэф-ы для увеличения или уменьшения a_{ij}. Т.о. индивид $\overline{q}_i$ есть прототип в обобщенном смысле.

зм6. Стн-ие, найденное после решения задачи (7)-(9), яв-ся суммой, рассчитанной на одного индивида, тогда $a_0 = Q\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ есть сумма, нх-ая для всего региона. Ясно, что $\sum_{j=1}^{n} a_j = a > a_0$ в силу условия задачи. Поэтому результатом решения задачи зБ яв-ся экономия бюджетных средств в сумме $\overline{a} = a - a_0$ для капитальных вложений по развитию региона, н-р, для увеличения спортивных сооружений, асфальтирования дорог региона и т.д.

Решим демонстрационный пример с условными данными.

п3. Пусть даны исх. данные $\{a_{ij}\}$, $\{k_i\}$, $\{c_j\}$ и $\{a_j\}$ в табл. 5 задачи (7)-(9). Составить мд. задачи и найти ее решение.

Таблица 5

C – стоим.	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	k – кол. осн. кт-в
K \ A	A_1 с/х	A_2 жилье	A_3 питан.	A_4 дошк.	A_5 образ.	A_6 физк. спорт	A_7 восп.	A_8 труд	A_9 мед. обсл.	A_{10} пенс. сан.-кур.	A_{11} под. сем. дет.-инв.	A_{12} борьба с S_0^σ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
K_1 здор.	1/24	1/24	1/12	3/12	1/12	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	0	0	1,8
K_2 умст. разв.	1/24	1/24	1/12	3/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	0	0	1,2
K_3 нрав., патр.	1/12	1/12	1/24	2/12	1/12	2/12	1/12	1/12	0	2/12	0	1/24	1,0
K_4 обр., спец.	1/12	1/12	1/12	0	4/12	1/12	1/12	1/12	0	0	1/12	1/12	1,6
K_5 стрем. к труду	2/12	1/12	1/12	0	2/12	1/12	1/12	1/12	2/12	0	1/12	0	1,2

Продолжение табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
K_6 пов. квал. прзв. тр.	1/12	1/12	1/12	0	0	1/12	1/12	1/12	2/12	0	2/12	2/12	1,0
K_7 иметь семью	1/12	1/12	1/12	0	0	1/12	1/12	2/12	2/12	0	1/12	2/12	1,17
K_8 незв. нарк., алк.	0	1/12	1/24	3/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/24	0	1,6
K_9 треб., спр., бор. с S_0^σ	2/12	1/12	0	0	0	0	0	0	0	2/12	4/12	3/12	0,8
K_{10} поряд. общ., сем.	1/12	1/12	2/12	0	0	1/12	1/12	1/12	0	2/12	1/12	2/12	1,0
K_{11} быть добр., прим.	1/12	2/12	2/12	0	0	1/12	1/12	1/12	1/12	2/12	1/24	1/24	1,2
a_j	1,2	0,6	2,3	1,8	3,2	1,6	1,4	0,8	1,0	4,6	0,7	1,6	20,8
c_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	–

Строка a_j и столбец k табл. 5, как и ее эл-ы a_{ij}, заполняются на основе экспертных оценок или по результатам стсч-их нбл-й расв-го региона.

Отметим также, что расходы для приобретения индивидуальных кач-в индивидами $s^\lambda \in S$, затрачиваемые самим индивидом и гос-ым, отдельно не выделены (т.е. расв-ся вместе) и рсп-ны по потребностям k_1-k_{11}. Поэтому нет отдельного столбца по зарплате, как и по пенсии.

Р. Исходя из данных табл. 5, составим мд. задачи в удобном виде:

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}.$$

$$\begin{aligned}
&0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} \ge 21{,}6\\
&0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} \ge 14{,}4\\
&x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8 + 2x_{10} + 0{,}5x_{12} \ge 12{,}0\\
&x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{11} + x_{12} \ge 19{,}2\\
&2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{11} \ge 14{,}4\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{11} + 2x_{12} \ge 12{,}0\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{11} + 2x_{12} \ge 14{,}0\\
&x_2 + 0{,}5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 0{,}5x_{11} \ge 19{,}2\\
&2x_1 + x_2 + 2x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} \ge 9{,}6\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_{10} + x_{11} + 2x_{12} \ge 12{,}0\\
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + 2x_{10} + 0{,}5x_{11} + 0{,}5x_{12} \ge 14{,}4
\end{aligned}$$

Верх. гр.	1,2	0,6	2,3	1,8	3,2	1,6	1,4	0,8	1,0	4,6	0,7	1,6
Нижн. гр.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Сформулированная задача решена симплекс-методом и получены сд. результаты:

Переменные

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}			
Зн.	1,20	0,60	2,30	1,80	2,60	1,60	1,40	0,80	1,00	4,60	0,10	1,60			
Верх. гр.	1,2	0,6	2,3	1,8	3,2	1,6	1,4	0,8	1	4,6	0,7	1,6			
Нижн. гр.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	ЦФ		
													Зн.		
Коэф. ЦФ	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	19,6	*min*	

													Ограничения		
Вид													лв. ч.	знак	пр. ч.
Огр. 1	0,50	0,50	1,00	3,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,00	1,00	0,00	0,00	21,6	≥	21,60
Огр. 2	0,50	0,50	1,00	3,00	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	23,2	≥	14,40
Огр. 3	1,00	1,00	0,50	2,00	1,00	2,00	1,00	1,00	0,00	2,00	0,00	0,50	24,55	≥	12,00
Огр. 4	1,00	1,00	1,00	0,00	4,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	20	≥	19,20
Огр. 5	2,00	1,00	1,00	0,00	2,00	1,00	1,00	1,00	2,00	0,00	1,00	0,00	16,4	≥	14,40
Огр. 6	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	2,00	0,00	2,00	2,00	13,3	≥	12,00
Огр. 7	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	2,00	2,00	0,00	1,00	2,00	14	≥	14,00
Огр. 8	0,00	1,00	0,50	3,00	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,00	20,6	≥	19,20
Огр. 9	2,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	4,00	3,00	17,4	≥	9,60
Огр. 10	1,00	1,00	2,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	2,00	1,00	2,00	22,7	≥	12,00
Огр. 11	1,00	2,00	2,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,00	0,50	0,50	21,85	≥	14,40

Т.о. получили min Z = 19,6, т.е. a_0 = 19,6 тыс. руб., тогда $\Sigma a_j - a_0 = 20{,}8 - 19{,}6 = 1{,}2$.

зм7. В задачах зВ и зБ исх-ые пж-ия $\{П_i\}$, сд-но, и $\{K_i\}$ меняются в зв-ти от конкретных ситуаций того или иного региона, значит, меняется и кт-й $\varphi = \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Это позволяет в опр-ой степени так орг-ть упл-ие обществом, что оно само стимулировало бы поиск кт-ев, меняющихся в зв-ти от изменения условий.

зм8. Мдв-ем соц-ых, экнч-их и экологических систем занимаются не только в отдельно взятых странах, но и происходит процесс объединения научных орг-й для совместного иссл-ия, н-р, исст-ких центров ООН под руководством В. Леонтьева, Международный институт прикладного системного анализа (ИСА) в Вене (где сотрудничают и российские экнс-ты), Римский клуб и др-ие (см. КС: Глобальное мдв-ие). Это дсв-но глобальный процесс мдв-ия масштабного хрк-ра. Спора нет, и этот процесс надо развивать, но нельзя забывать о решении повседневных вопросов народа, чтобы не получилось так, что космос осваиваем, а простой народ из-за нехватки предметов жизненной нх-ти (жилья, рабочих мест, нормального медобслуживания) страдает, и умирает больше людей, чем рождается. Этот вопрос сегодня более важен, чем освоение космоса и глобальное мдв-ие. Поэтому в данной работе делается попытка проанализировать эту тревожную ситуацию, помочь простому народу коренного населения на основе его стремления и чаяния, ибо только он может вывести страну в ряд передовых, сильных стран мира и помочь самому себе при создании реальных условий. Т.о., задача сводится к поиску этих условий.

4°. Основные выводы и рекомендации. Прежде чем делать конкретные выводы и давать рекомендации, самое главное в данный момент – мы все, $\left\{S_1^r\right\}$ и $\left\{S_2^\tau\right\}$, должны понять и признать, что настало время помочь самим себе и выкарабкаться из ямы сегодняшнего катастрофического положения (пж.). Для этого мы должны вместе создать порядок, уют в своем доме – стране, мы должны очнуться от алкогольного угара и остановить превышение смертности над рождаемостью (см. [56а]), поставить заслон снижению уровня здоровья и психологического состояния населения, мы должны серьезно бороться с беспризорностью и преступностью.

В настоящее время пж-ие дсв-но яв-ся тревожным и угрожающим. Чтобы не быть голословными, приведем нек-ые данные. Спрос на алкоголь в стране растет на 10 процентов в год. Так за 2007 г. выпито около 2 млрд. литров водки, т.е. 17 литров на каждого (включая детей и старушек) и плюс к этому – по 150 бутылок пива на душу. Для сравнения, в тяжелые послевоенные годы в СССР потребление алкоголя составляло всего два литра на душу населения.

Приведем показатели на 100 тыс. жителей и место России по данным показателям (2006 г.). Смертность: от убийств (1-е место в Европе и СНГ), от самоубийств (2-е место в Европе и СНГ после Литвы), от случайных отравлений алкоголем (1-е место в Европе и СНГ), от ДТП (3-е место в Европе и СНГ после Литвы и Латвии). По числу детей, оставшихся без попечительства родителей, Россия занимает 2-е место в Восточной Европе и СНГ после Литвы; кол-ву разводов на 1 тыс. жителей – 1-е место в Европе, абортов женщин в возрасте 15-49 лет – 1-е место в Восточной Европе и СНГ. По естественному приросту населения – одно из последних мест в Европе (перед Болгарией и Украиной); по индексу Джини, индексу концентрации доходов – 1-е место среди стран с развитой и переходной экн-ой, по индексу коррупции – 143-я позиция в мире (наряду с Гамбией, Индонезией) из 180 возможных.

Ежегодно 2 тыс. детей становятся жертвами убийств и тяжких телесных повреждений. Около 2 млн. детей страдают от жестокости родителей, а 50 тыс. убегают из дома. До 5 тыс. женщин гибнут от рук мужей. Насилие над женами, родителями и детьми фиксируется в каждой четвертой семье. Именно в нашей стране создается более 20% детской порнографии. Подобные данные, в свою очередь, дополняются криминализацией страны, где не только широко распространена практика криминальных «крыш», рейдерства (см. КС) и т.д., но и сущ-ет такое явление, как рабство.

Уже несколько лет в стране наблюдается тенденция снижения уровня здоровья населения, сокращается продолжительность жизни, увеличивается заболеваемость и смертность трудоспособного населения. За последние годы этот показатель возрос в 2,2 раза. За 2006-2008 годы увеличился уровень первичного выхода на инвалидность, при этом лица пенсионного возраста составляют здесь лишь 10-15%, а 85-90% – трудоспособное население.

Особую тревогу вызывает здоровье учащихся. За годы обучения в общеобразовательных школах уровень здоровья учащихся снижается в 4-5 раз. Только 10% учащихся заканчивают школу здоровыми. Увеличивается число школьников, пристрастившихся к табакокурению, спиртным напиткам и наркотикам. По данным последних иссл-й, учащиеся начинают курить уже с 7-летнего возраста. В Ярославской области провели опрос среди школьников: 88 процентов мальчиков и девочек пьют, как минимум, пиво.

Основными причинами тревожного пж-ия и таких отставаний от др-их стран яв-ся: массовое чувство соц-ой несправедливости и физической незащищенности; неуверенность в завтрашнем дне. Одна из главных причин самоубийств – утрата веры, смысла жизни и ее перспектив. Население страны очень сильно подвержено тревоге, депрессиям, страхам, различным фобиям (см. КС).

И это еще не все. Нам надо еще не попасть в хитро расставленные капканы (см. [60]): «…*Мы незаметно подменим их ценности на фальшивые и заставим их в эти фальшивые ценности верить. Как. Мы найдем своих единомышленников, своих помощников и союзников в самой России. Эпизод за эпизодом будет разыгрываться грандиозная по своему масштабу трагедия гибели самого непокорного на земле народа, окончательного, необратимого угасания его самосознания. Из литературы и искусства, например, постепенно вытравим их социальную сущность: литература, театры, кино – все будет изображать и прославлять самые низменные человеческие чувства. Будем всячески поддерживать и поднимать так называемых творцов, которые станут насаждать и вдалбливать в человеческое сознание культ секса, насилия, садизма, предательства – словом, всякой безнравственности. Хамство и наглость, ложь и обман, пьянство и наркоманию, животный страх друг перед другом и беззастенчивость, предательство, национализм и вражду народов, прежде всего вражду и ненависть к русскому народу: все это мы будем ловко и незаметно культивировать и лишь немногие, очень немногие будут догадываться и понимать, что происходит. Но таких людей мы поставим в беспомощное положение, превратив в посмешище. Найдем способ их оболгать и объявить отбросами общества*». (*Американский генерал Аллен Даллес, руководитель политической разведки США в Европе, ставший впоследствии директором ЦРУ*).

Теперь рас-им основные выводы предложенной работы.

1*. В данном параграфе использованы идеи весового подхода к иссл-ю сложных систем, заложенные в работах [48, 49, 52] на основе формулировки исх-ых пж-й $\{П_i\}$, к-ые позволяют выработать основные кт-и (k_i) для кол-ой оценки индивидуальных возможностей индивидов общества. В то же время исх-ые пж-ия яв-ся как бы выработкой основных ориентиров развития страны. По своей сути весовой подход в нек-ом смысле яв-ся эвристическим (см. КС) методом иссл-я систем.

2*. Кадровая политика в любом обществе яв-ся первостепенной задачей. Поэтому подбор кадров на любом уровне гос-ва должен осуществляться только на основе индивидуальных способностей (возможностей) $\{k_i\}$ каждого индивида $s^\lambda \in S$. Эти возможности $\{k_i\}$ (как плж-ые, так и отц-ые) должны фиксироваться в банке данных компьютера и обновляться при изменении данных. Н-р, если индивид $S_2^\tau \in S_2$ в корыстных целях предал доверие индивидов $\left\{S_1^r\right\} \in S_1$, то он переходит в статус S_0^σ, потеряв прежний статус навсегда, в лучшем случае возможен только переход $S_0^\sigma \to S_1^r$, если не заслуживает более жесткого наказания, что фиксируется сразу в банке данных. В такой ситуации каждый индивид S_2^τ будет стараться оправдать доверие индивидов $\left\{S_1^r\right\}$ и защищать их интересы. В первой задаче зВ работы решается именно задача оценки индивидуальных возможностей как индивидов $\left\{S_1^r\right\}$, так и индивидов $\left\{S_2^\tau\right\}$.

3*. Каждый регион страны имеет свои особенности отс-но др-их регионов. Поэтому при осваивании выделенных ему бюджетных средств выявляются нек-ые особенности в смысле опр-го перераспределения средств по потребностям. Для этого нх-мо проанализировать ситуацию в регионе и сделать так, чтобы такое перераспределение было опт-ым. Для этой цели надо решить задачу зБ, что позволит ситуацию в регионе держать под пст-ым контроле и изменить цели действий при нх-ти, чтобы направить развитие региона в целесообразном направлении.

Возникает естественный вопрос – что нужно сделать, чтобы поправить ситуацию.

1. В настоящее время сущ-ет нх-ть выработки основных ориентиров развития страны. Следует уделять больше внимания соц-ой сфере и психологическому состоянию общества. А для этого нх-мо не только решение экнч-их проблем, но и устранение огромных диспропорций в уровне доходов, декриминализация, возрождение нравственности, морали и т.д.

2. Испокон веков известно, что с/х-во играет первостепенную роль для всего общества, обеспечивая всех его членов всеми нх-ми продуктами питания, людскими ресурсами, продуктами-ресурсами для промышленности и т.д. Поэтому надо незамедлительно поднять с/х-во на новый уровень, чтобы жители деревень были обеспечены всем нх-ым для нормальной жизни и прекратился отток населения из деревень в город. Для этого надо создать условия сельским жителям, предложить новые рабочие места, обеспечить квалифицированным медицинским обслуживанием, улучшить состояние дорог и т.д.

3. Для каждого индивида $\left\{S_1^r\right\}$ и $\left\{S_2^\tau\right\}$ нх-мо создать банк данных, хркз-их их индивидуальные особенности k_1-k_{11}. Тогда легко будет выбирать как производственных, так и руководящих работников. Более того, базой данных можно пользоваться и во время выборной кампании. Причем эта база данных должна пст-но обновляться, изменяться вплоть до отслеживания переходов индивида от одного статуса к другому в звс-и от изменения индивида в лучшую или худшую стороны.

4. Чтобы вести борьбу с закононепослушными индивидами $\left\{S_0^\sigma\right\}$, нх-мо сначала проанализировать причины возникновения коррупции, наркоманов-алкоголиков, олигархов (см. КС), рейдеров (см. КС), террористов и т.д. и начать с устранения этих причин. Нх-мо вовлечь в эту борьбу всех индивидов $\left\{S_1^r\right\}$ и $\left\{S_2^\tau\right\}$, т.к. это общее дело в нашем общем доме – стране. Для этого следует усилить целенаправленное воспитание народа и добиться, чтобы закон был справедливым и жестким для всех индивидов $s^\lambda \in S$ незв-мо от их статуса.

5. В настоящее время самым важным положением яв-ся, чтобы народ $\left\{S_1^r\right\}$ поддержал, верил и помогал руководителям $\left\{S_2^\tau\right\}$, а руководители в свою очередь должны верить, помогать, проявлять заботливое, бережное отн-ие к народу и работать на благо всей страны и народа. Кратко все это назовем «принципом взаимопомощи». Причем принцип взаимопомощи яв-ся объективной нх-ю, т.к. индивиды $\left\{S_1^r\right\}$ и $\left\{S_2^\tau\right\}$ нужны друг другу и не могут сущв-ть друг без друга.

В данное время принцип взаимопомощи $\left\{S_1^r\right\}$ и $\left\{S_2^\tau\right\}$ очень важен, от него зв-т судьба каждого из нас и страны в целом. Поэтому мы должны не допускать ссоры, бесполезные споры, беспредметную взаимокритику и т.д. в своем доме (семье, деревне, районе, регионе, стране) и не позволять желтой прессе СМИ мешать осуществлению принципа взаимопомощи между S_1 и S_2. При этом каждый индивид $S_1^r \in S_1$ и $S_2^\tau \in S_2$ должен понять, что принцип взаимопомощи более выгоден ему, чем коррупция, рейдерство, воровство, всякие незаконные махинации и т.д., т.к., если индивид $s^\lambda \in S$ попал в статус $S_0^\sigma \in S_0$, то это более позорное наказание перед обществом – народом, чем какие-либо др-е, к-ые применяются в данный момент и от к-ых нет эфс-и.

Дсв-но, раз сущ-ет коррупция, взяточничество и т.д. на верхнем уровне чиновников, то на нижнем уровне властей их еще больше и они принимают еще более изощренный вид. А ныне применяемые наказания провинившихся лиц эф-а не дают. Надо найти выход из этой ситуации.

Если индивид s^λ (S_1^r или S_2^τ) $\in S$ провинился, то нх-мо его перевести в статус $S_0^\sigma \in S_0$, тем самым он потеряет доверие народа и прежнее (или анч-ое) место работы навсегда. Поэтому он с самого начала своей работы выберет себе путь по принципу взаимопомощи.

6. Не так давно на заседании думы обсуждался вопрос о снижении стоимости подарков депутатам от 5 тыс. до 3 тыс. руб. Это самый изощренный вид взяточничества. Чтобы избавиться от этого негативного явления, есть самый простой способ. Для этого сущ-ют сд. виды поощрений: грамоты, медали, ордена и благодарственные письма от народа и низовых орг-й.

Кстати, тоже недавно показали по телевизору, как подпольно делают в большом кол-ве разные ордена и медали, к-ые не отличаются от оригиналов (эпохи СССР) и продают открыто всем желающим. Это недопустимое кощунство по отношению к стране, своей истории и старшему поколению.

7. Каждый человек хозяин своей судьбы. Он сам должен помочь себе. Для этого нужны два атрибута жизни: А. Вера человека – самое главное в жизни. Человек без веры блуждает по жизни без цели. Вера в науку, религию, свою силу, вера в завтрашний день и т.д. есть половина победы в своих начинаниях – действиях. Б. Труд облагораживает человека. Любой труд полезен в любом возрасте. Человек меньше устает от труда, чем от безделья и праздного образа жизни.

Вера и труд человеку нужны как воздух. Поэтому самая главная миссия любого индивида $S_2^\tau \in S_2$ – чтобы его подчиненные $\{S_1^r\}$ приобрели веру и имели рабочие места для труда. В этом случае народ $\{S_1^r\}$ не замедлит сделать встречный шаг к индивиду S_2^τ и между ними установится полное взаимопонимание, тем самым соблюдается принцип взаимопомощи между народом $\{S_1^r\}$ и индивидом $S_2^\tau \in S_2$, тогда в дальнейшем индивиду S_2^τ гарантирована поддержка и доверие со стороны народа $\{S_1^r\}$. Это самое высокое поощрение и счастье для индивида $S_2^\tau \in S_2$, ибо он яв-ся маяком для простого народа $\{S_1^r\}$.

8. Из положения, что индивиды $\{S_1^r\}$ и $\{S_2^\tau\}$ нужны друг другу и не могут сущв-ть друг без друга, возникает понятие взаимозависимости, т.е. $\{S_2^\tau\} = f(\{S_1^r\})$ и $\{S_1^r\} = \varphi(\{S_2^\tau\})$ наподобие технологического процесса. Но в соц-ой системе каждый индивид в своих действиях преследует свои индивидуальные цели, а общим выражением этих целей яв-ся принцип взаимопомощи (т.к. чем человек больше заботится и помогает окружающим его людям, тем больше помогут и ему, значит, его личные цели будут достигаться быстрее и гарантированнее), тем самым приходим к понятию взаимопомощи, как к объективной необходимости, к-ую обз-им $\{S_2^\tau\} \Leftrightarrow f(\{S_1^r\})$ и $\{S_1^r\} \Leftrightarrow \varphi(\{S_2^\tau\})$ или кратко $f(\{S_1^r\}) \Leftrightarrow \varphi(\{S_2^\tau\})$. Это будет уже мд. соц-ой системы и самой опт-ой для всех индивидов $s^\lambda \in S$ независимо от их статуса. Если индивид s^λ не выполняет мд. соц-ой системы, то его переводят в статус $S_0^\sigma \in S_0$ на основе законом установленного порядка. Следует отметить, что этот вопрос очень сложный и разнообразный (см. КС, Глобальный критерий оптимальности в экономике).

9. Если мы приняли мд. $f(\{S_1^r\}) \Leftrightarrow \varphi(\{S_2^\tau\})$, то нх-мо думать и срочно решать сд-ие вопросы: зачем нам (и стране) нужны ВТО и связь с всемирной финансовой системой, к-ые своими щупальцами загоняют нас в зв-ть и ограничивают наше самостоятельное развитие; нам самим надо делать чайники, сотовые телефоны, телевизоры, тракторы, комбайны, одежду, обувь, продукты (имея огромные запасы земельных ресурсов и богатств, зачем мы закупаем «ножки Буша»?!), современные средства для обороны страны и т.д.

Коренное население регионов именно само хочет выпускать все это и обеспечивать себя всем нх-ым для здорового образа жизни, создавая рабочие места, чтобы все трудоспособные могли работать.

10. Однако из 9 не следует, что мы должны сворачивать связь с внешним миром. Наоборот, должны развивать и укреплять связь со всеми странами мира (не вступая в кабальные мировые организации) и торговать с ними на взаимовыгодной основе. Следить за развитием этих стран, перенимать передовой опыт по обработке земли, выращиванию продуктивных животных, созданию высокопроизводительных технологических процессов и машин для промышленности, с/х-ва и строительства дорог.

Итак, с точки зрения коренного населения,

что нам надо: работа (постоянное создание рабочих мест), жилье, хорошая ответственная медицинская помощь, непрерывная высокоорганизованная сеть воспитательных и образовательных учреждений (детсад – школа – училище [техникум] – институт – аспирантура, правдивые целенаправленные СМИ – телевидение – театр – искусство – художественная лит. – лит. для массового использования [питание, здоровье, полезные советы и пр.], интересно организованные учреждения досуга с учетом возраста населения: физкультура – спорт – туризм – санаторий и т.д.) под единым руководством – контролем и в строго целесообразном направлении, научно обоснованное питание для различных возрастов населения;

что делать: покончить с «дьяволом» коррупции и взяточничества с головы до хвоста; не допускать к народному богатству коренного населения олигархов и структуру рейдерства (см. КС), которые работают против народа с целью личного обогащения и занимаются оттоком капитала и богатства народа в чужие страны; любой руководитель или глава администрации должен заботиться, помогать, бережно и с уважением относиться к народу, а народ в свою очередь должен верить и поддерживать руководителя и работать для себя, семьи и благополучия страны; наша страна сущв-но отличается от других по своим природным условиям и богатствам, земельным ресурсам и суровым климатическим условиям, поэтому мы должны целенаправленно и планово работать и развиваться самостоятельно, своим путем незв-мо от др-их стран и мировых орг-й; с/х-во, тяжелая и легкая промышленность взаимосвязаны и неотделимы друг от друга как единая сложная система, поэтому в данное время безотлагательно нх-мо поднимать и развивать с/х, использовать на основе передовых технологий каждый га земли с пользой как источник питания (для всего населения страны), ресурсов (для легкой промышленности) и заказов с/х-ой техники (для тяжелой промышленности), сд-но, их надо развивать на основе единого (связывающего) упл-ия и все это надо начинать с реальной помощи народу, чтобы он приобрел веру в завтрашний день, и направить свои усилия – действия целесообразно в сторону здорового образа жизни на основе труда, т.е. надо жить за счет труда – работы настоящего поколения, а не за счет продажи богатства (нефти, газа и т.д.) будущего поколения.

Итак, мы должны работать → верить → победить, и мы победим! Для этого у нас есть все необходимые ресурсы.

Теляшево, июль 2008 г.

8.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

8.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА И ИНСПЕКТИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. По каким признакам осуществляется кр. качества (кач.)?
2. Какие виды кр-ля вы знаете для качн-го признака?
3. В чем состоит общее и различия кр. кач-ва и инспектирования (инсп.)?
4. Как осуществляется переход от балльных оценок к непр-ой шкале?
5. Что такое гипергеом. рсп-ие и бездефектный кр. кач-ва?
6. Перечислите три типа задач при бездефектном кр-е и инсп-и малых партий.
7. В чем состоит суть кр-ля и инсп-ия больших партий?
8. При каких зн-ях q можно переходить из бином-го рсп-ия к рсп-ю Пуассона?
9. Перечислите четыре типа задач кр-ля и инсп-ия больших партий.

8.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит различие между однократной и двукратной вбр-ми?
2. Хркз-йте однократную вбр-у и приведите ее основные фм-ы.
3. Хркз-йте двукратную вбр-у и приведите ее основные фм-ы.
4. В чем состоит различие вбр-и посл-го кр-ля от указанных типов вбр-и?
5. В чем состоит суть посл-го анализа?
6. Объясните графический метод кр-ля при посл-ом анализе.
7. Приведите основные зависимости посл-го анализа.
8. В чем состоит суть кт-я согласия Колмогорова λ?

8.3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Вопросы для самопроверки

1. Какие группы показателей вы знаете для опр-ия эфс-ти прз-ва продукции?
2. Из каких подсистем состоит ОАСУ?
3. Какими хркс. опр-ся экнч-ая эфс-ть ОАСУ?
4. Приведите расчетные фм. для решения конкретных задач.
5. Что такое сложная система (с.с.) и как она хркз-ся?
6. Какие вы знаете виды эфс-ти такой с.с., как, н-р, комбинат?
7. Что понимается под операцией, оперирующей стороной (иссл-ль, технолог)?
8. Как и кем осуществляется опт-ая связь с кол-ом активных средств и стратегией?
9. Приведите примеры контролируемых (крум.) и некрум-ых фкт-ов.
10. В чем заключается цель операции с мт-ой точки зрения?
11. Какие элр-ые действия производятся над кт-ми эфс-ти?
12. Сформулируйте кт-и эфс-ти АСУ, построенных на основе системы элр-ых действий.
13. Хркз-те кт-и эфс-ти АСУ, построенных на основе системы элр-ых действий.
14. Приведите оценку эфс-ти на основе фм-ы полной вер-ти.
15. Хркз-те грф-й метод для повышения общего кт-ия эфс-ти, представив ее как фк-ю затрат.
16. Как используется теория инф-и в процессах упл-ия?
17. Как вы понимаете кол-во инф-и и энтропии?
18. Приведите фм-ы оценки эфс-ти на основе инфн-ых кт-ев.
19. Как опр-ся кол-во инф-и в системе с вер. параметрами?
20. Как осуществляется выбор АСУ ТП и типов ЭВМ по инфн. кт-ям эфс-ти?

8.4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И КАЧЕСТВА ЖИЗНИ КОРЕННОГО НАСЕЛЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит трудность мдв-ия соц-ой системы?
2. Объясните, как возникает в соц. системе категория зв-ти?
3. Как вы понимаете категории эфс-ти и качества жизни населения?
4. Что такое исх-ые положения и основные критерии?
5. Приведите постановки задачи двух типов.
6. Какие выводы и рекомендации можно сделать из рас-ых задач?

Задачи для кр. работы.

1(1). Для надежного предсказания погоды нх-мо, чтобы из каждой сотни запущенных на шарах-зондах устройств не менее 75 были безотказными. Требуется опр-ть, сколько устройств надо планировать на кр-ый запуск при условии их безотказной работы, чтобы гарантировать заданную надежность с доверительной вер-ю 0,9.

Ук: см. п2а, $м_в = 100 - 75 = 25$. О: не менее 9 устройств.

2(1). Создано 26 объектов. При вбрч-ом приемочной кт-и проверяется 7 объектов. Партия принимается, если в врб-е не окажется ни одного дефектного объекта. Требуется опр-ть с доверительной вер-ю не менее 0,8, какая доля брака может оказаться в принятой партии. Ук: см. п3б.

3(1). Условия 2(1), но $N = 100$, $n = 24$, $\gamma = 0{,}9$. Найти $q_в$. Ук: см. п4б.

4(1). Для 19 пункта связи выпущена партия из 23 коммутаторов. Проверено 9, ни один не отказал. Требуется опр-ть, можно ли прекратить проверку, чтобы с доверительной вер-ю не ниже 0,9 утв-ть, что будет обеспечена работоспособность 19 пункта связи. Ук: см. п5в.

5(1). По техническим условиям (ТУ) предусмотрены исп-ия вбр-и объемом в 20 изделий. Все проверенные изделия оказались годными. По ТУ допускается не более 12% дефектных изделий. Требуется опр-ть, будет ли обеспечена доверительная вер-ть $\gamma = 0{,}95$ того, что партия в 200 изделий уд-ет ТУ. Ук: см. п6в.

6(1). Партия деталей считается кондиционной, если в ней доля дефектных не превосходит $q_в = 0{,}02$. Требуется опр-ть, какой мнм-ый объем вбр-и должен быть предусмотрен в ТУ, чтобы можно было подтвердить кондиционность с риском поставщика $\alpha = 0{,}05$ ($v = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$). Мнм-ый объем вбр-и может быть получен при $m = 0$. Ук: см. п7α, по табл. 8 для $v = 0{,}95$ при $m = 0$ находим $nq_в = 3{,}00$. О: 150.

7(1). По условиям 6(1) найти объем вбр-и, если по кт-ю допускается не более одного дефектного изделия, $\alpha = 0{,}05$, $q_в = 0{,}02$, $m = 1$ ($v = 0{,}95$); n – ? Ук: см. п8α, по табл. 10 для $q_в = 0$ при $m = 1$ находим $Q = 4{,}74$. О: 237.

8(1). Вер-ть безотказной работы эл-та в течение заданного вр-и равна 0,10. В схему входят 20 прл-но включенных эл-ов. Требуется опр-ть вер-ть безотказной работы схемы, если ее фнцр-ие обеспечивается при любом одном работающем эл-е. Ук: см. п10β; по табл. 8 для $Q = nq_в = 20 \cdot 0{,}10 = 2$ при $q_в = 0{,}10$, интерполируя зн-ия $v = 0{,}85$ и $v = 0{,}90$, находим $v = 0{,}876 \approx 0{,}88$. О: вер-ть безотказной работы низка, надо создавать более надежную схему.

9(1). Условия эксплуатации позволяют огр-ся проверкой 65 приборов. Мкс. доля неисправных приборов данного типа, допускаемая по всей гнр-ой свк-ти, не более 10%. Требуется опр-ть при доверительной вер-ти 0,90, сколько отказов можно допустить при вбр-е в 65 приборов. Ук: см. п11γ. О: $m = 3$.

10(1). По ТУ кр-ль вбр-и объемом 237 штук из числа выпускаемых эл-ов не допускает ни одного отказа. Доверительная вер-ть опр-на ТУ вел-ой 0,95. Требуется опр-ть мкс-ю засоренность партии неисправными эл-ми, если объем партии более чем в 20 раз превосходит вбр-у. Ук: см. п12б, по табл. 8 для $v = 0{,}95$ и $q_в = 0$ опр-ем $Q = nq_в = 3{,}00$, тогда $q_в = 3{,}00/237 \approx 0{,}0127 \approx 0{,}013$.

11(2). Отливки поступают в механический цех партиями по 100 штук и проходят кр-ль на кач-о литья. Если в партии кол-во бркн-ых отливок $L \le l_0 = 4$, то партия считается хорошей; если $L \ge l_1 = 28$, то партия должна быть забрк-на. Найти α и β для кр-ля по методам однократной вбр-и при $n_0 = 22$, $v = 2$ и двукратной вбр-и при $n_1 = n_2 = 15$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 3$, сравнить их эфс-ть по ср. числу исп-й; составить план кр-ля по методу посл-го анализа, выч-ть мнм-ое число исп-й для хорошей и негодной партий при посл-ом кр-ле, взяв α и β, полученные по методу однократной вбр-и. Ук: см. п1 из 8.2. О: для однократной вбр-и $\alpha = 0{,}0323$, $\beta = 0{,}0190$; для двукратной вбр-и $\alpha = 0{,}0067$, $\beta = 0{,}0100$. Ср-й расход изделий для 100 партий при двукратной вбр-е $48{,}36\cdot 15 + 51{,}64\cdot 30 = 2275$ изделий. Расход для 100 партий при однократной вбр-е составляет 2200 изделий. Расход изделий почти одинаков, но при двукратной вбр-е значительно меньше вер-ти ошибок α и β. $A = 30{,}38$, $B = 0{,}01963$; $\lg A = 1{,}4825$, $\lg B = -1{,}7069$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{min} = 13$; $\lg v(12{,}0) = -1{,}6288$, $\lg v(1{,}1) = 0{,}8451$, $\lg v(2{,}2) = 1{,}9590$.

12(2). Шарики для подшипников изготовляются большими партиями, причем партия считается хорошей, если число бркн-ых шариков не превышает 1,5%, негодной, если оно больше 5%. Составить и сравнить эфс-ть планов одиночного кр-ля при объеме вбр-и $n_0 = 410$ и приемочном числе $v = 10$ и двойного кр-ля при $n_1 = n_2 = 220$, $v_1 = 2$, $v_2 = 7$, $v_3 = 11$.

Составить план посл-го кр-ля, взяв α и β, полученные для плана одиночного кр-ля; сравнить эфс-ть всех трех методов по ср. числу исп-й, выч-ть n_{min} для хорошей и плохой партий при посл-ом кр-е. Ук: см. п2: 8.2. О: для однократной вбр-и $\alpha = 0{,}049$, $\beta = 0{,}009$; для двукратной вбр-и $\alpha = 0{,}046$, $\beta = 0{,}008$, $A = 19{,}8$, $B = 0{,}01053$; $h_1 = -3{,}758$, $h_2 = 2{,}424$, $h_3 = 0{,}02915$; $M[n/p_0] = 244{,}2$, $M[n/p_1] = 113{,}6$; $M[n]_{max} = 321{,}2$. Для 100 партий при двукратной вбр-е ср-й расход $35{,}1\cdot 220 + 64{,}9\cdot 440 = 36278$ изделий; при однократной вбр-е ср-й расход 41000 изделий. При посл-ом анализе на 100 хороших партий ср-й расход составляет не более 24420 изделий.

13(2). Большая партия штампованных изделий считается хорошей, если доля дефектных изделий $p \le p_0 = 0{,}10$, негодной, если $p \ge p_0 = 0{,}20$. Найти α и β при однократном кр-и, взяв объем вбр-и $n_0 = 300$ и приемочное число $v = 45$. По найденным α и β составить план кр-ля по методу посл-го анализа, выч-ть n_{min} для хорошей и плохой партий, найти $M[n|p]$ и $P[n|n_0]$, $P(n < \frac{1}{2} n_0)$. Ук: перейти к закону норм-го рсп-ия, см. п2 из 8.2. О: $\alpha = 0{,}0023$, $\beta = 0{,}0307$. $A = 415{,}9$, $B = 0{,}03077$; $h_1 = -4{,}295$, $h_2 = 7{,}439$, $h_3 = 0{,}1452$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{min} = 30$; для негодной партии при $p = 1$ $n_{min} = 9$; $M[n|0{,}10] = 94{,}52$, $M[n|0{,}20] = 128{,}9$, $M[n]_{max} = 257{,}4$; $c = 2{,}153$; $P(n < 300) = 0{,}9842$, $P(n < 150) = 0{,}8488$.

14(2). Для большой партии изделий составить план одиночного кр-ля (n_0, v), гарантирующий: а) риск поставщика в 1% и риск потребителя в 2%, если партия считается хорошей, когда доля дефектных изделий $p \le p_0 = 0{,}10$, и негодной, когда $p \ge p_0 = 0{,}20$ (воспользоваться норм. законом рсп-ия); б) $\alpha = 0{,}20$, $\beta = 0{,}10$ при тех же p_0 и p_1 применительно к закону рсп-ия Пуассона. Составить ств-ие планы посл-го кр-ля. Найти мт. ож-ия числа исп-й. Ук: см. п2 из 8.2. О: а) $n_0 = 285$, $v = 39$; $A = 98$, $B = 0{,}0202$; $h_1 = -4{,}814$, $h_2 = 5{,}656$, $h_3 = 0{,}1452$; $M[n/p_0] = 102{,}1$, $M[n/p_1] = 101{,}0$; $M[n]_{\max} = 219{,}4$; б) $n_0 = 65$, $v = 8$; $A = 8$, $B = 0{,}2222$; $h_1 = -1{,}861$, $h_2 = 2{,}565$, $h_3 = 0{,}1452$; $M[n/p_0] = 2{,}6$, $M[n/p_1] = 28{,}6$; $M[n]_{\max} = 38{,}6$.

15(2). Составить планы кр-ля по методам однократной вбр-и и посл-го анализа для больших партий радиоламп, если партия с долей дефектных ламп $p \le p_0 = 0{,}02$ считается хорошей, а при $p \ge p_0 = 0{,}07$ – негодной. Риск поставщика $\alpha = 0{,}0001$, риск потребителя $\beta = 0{,}01$. Для плана посл-го кр-ля опр-ть $n_{\min}$ для хорошей и плохой партий, найти ср. число исп-й $M[n|p]$ и вер-ти $P(n \le M[n/p_0])$, $P(n \le 2M[n/p_0])$. Ук: см. п2 из 8.2. Применить норм-ый закон рсп-ия. О: $n_0 = 286$, $v = 15$; $A = 9900$, $B = 0{,}01$; $h_1 = 3{,}529$, $h_2 = 7{,}052$, $h_3 = 0{,}04005$; $M[n/0{,}02] = 176{,}0$, $M[n/0{,}07] = 231{,}9$; $M[n]_{\max} = 647{,}1$; $c = 3{,}608$; $P(n < M[n|0{,}02]) = 0{,}5993$, $P(n < 2M[n|0{,}02]) = 0{,}9476$, $P(n < n_0) = 0{,}8860$.

16(2). Продолжительность работы T (в часах) трансформаторов подчиняется экспоненциальному закону рсп-ия с интенсивностью отказов λ. Считая, что $\lambda t_0 < 0{,}1$, составить план кр-ля по методам однократной вбр-и и посл-го анализа при $\alpha = 0{,}10$ и $\beta = 0{,}10$. При одиночном кр-е найти приемочное число v и объем вбр-и n_0 для срока исп-ия каждого трансформатора $t_0 = 500$, 1000, 2000, 5000 часов, заменив рсп-ие Пуассона χ^2 рсп-ем. При посл-ом кр-е взять фиксированный объем вбр-и n_0, ств-й $t_0 = 1000$ часов, найти ср. время исп-ия каждого трансформатора $M[T|\lambda]$. Учесть, что партия трансформаторов считается хорошей, если интенсивность отказов $\lambda \le \lambda_0 = 10^{-6}$ час$^{-1}$, и негодной при $\lambda \ge \lambda_0 = 2\cdot 10^{-5}$ час$^{-1}$. Ук: см. п3 из 8.2. О: при $n_0 = 925$ $v = 12$. При $t_0 = 1000$ час $A = -2{,}197$, $B = 2{,}197$; $t_1 = 237{,}6$, $t_2 = -237{,}6$, $t_3 = 74{,}99$, $M[T|10^{-6}] = 613{,}2$, $M[T|2\cdot 10^{-5}] = 482{,}9$, $M[T]_{max} = 750{,}6$.

t_0, час	500	1000	2000	5000
n_0	1849	925	463	185

17(2). Склады семенного картофеля перед посадкой проверяются на отсутствие очагов гниения. Картофель признается годным для посадки, если на каждых 10 плодах обнаружено не более 1 пятна; негодным, если пятен более 5.

Считая, что число пятен подчиняется закону рсп-ия Пуассона, выч-ть α и β при кр-е по методу двукратной вбр-и при $n_1 = 40$, $n_2 = 20$, $v_1 = 4$, $v_2 = 12$, $v_3 = 14$. По найденным α и β планы одиночного и посл-го кр-ля. Сравнить эфс-ть всех трех методов по ср. расходу картофеля на производство исп-й для 100 отсеков.

Ук: см. п4 из 8.2. О: для двукратной вбр-и $\alpha = 0{,}001486$, $\beta = 0{,}0009152$; для однократной вбр-и $n_0 = 62$, $v = 13$ (переход к закону норм. рсп-ия); $A = 671{,}0$, $B = 0{,}0009166$; $h_1 = -4{,}446$, $h_2 = 4{,}043$, $h_3 = 0{,}2485$; $M[n|a_0] = 29{,}2$, $M[n|a_1] = 16{,}0$, $M[n]_{max} = 70{,}7$. На 100 отсеков при двукратной вбр-е ср-й расход картофеля равен $62{,}88\cdot 40 + 37{,}12\cdot 60 = 4743$ шт. На 100 отсеков при однократной вбр-е расход картофеля 6200 шт.; при посл-ом анализе ср-й расход на 100 хороших партий – не более 2920 шт.

18(2). В партии электрических сопротивлений, слн. зн-ия к-ых подчиняются закону норм-го рсп-ия с известным ср. зн-ем в 200 Ом, хркс-ой кач-ва яв-ся ср. кв. отк-ие σ, причем партия считается хорошей, если $\sigma \le \sigma_0 = 10$ Ом, негодной, если $\sigma \ge \sigma_1 = 20$ Ом. Составить планы кр-ля по методам однократной вбр-и при $n_0 = 16$, $v = 12{,}92$ и двукратной вбр-и при $n_1 = n_2 = 13$, $v_1 = v_3 = 12$, $v_2 = \infty$. По найденным α и β (для одиночного кр-ля) составить план посл-го кр-ля. Сравнить эфс-ть всех трех методов кр-ля по ср. числу исп-й. Выч-ить n_{min} для худшей из хороших и лучшей из плохих партий. Ук: см. п5 из 8.2. О: для двукратной вбр-и $\alpha = 0{,}0896$, $\beta = 0{,}0233$; для однократной вбр-и $n_0 = 15$, $v = 12{,}45$; $A = 10{,}90$, $B = 0{,}0256$; $h_1 = -977{,}7$, $h_2 = 184{,}9$; $M[n|\sigma_0] = 9{,}81$, $M[n|\sigma_1] = 2{,}78$, $M[n]_{max} = 10$. При двукратной вбр-е ср-й расход изделий на 100 хороших партий $85{,}66\cdot 13 + 14{,}44\cdot 26 = 1488$; при однократной вбр-е расход изделий 1500 шт.; при посл-ом анализе ср-й расход – не более 981 изделия.

19(2). Партии капронового волокна исп-ются на прочность. Хркс-ка прочности X, измеряемая в г/денье (удельная прочность волокна), подчиняется закону норм. рсп-ия со ср.кв. отк-ем $\sigma = 0{,}8$ г/денье, причем партия считается хорошей, если $X \ge x_0 = 5{,}4$ г/денье, негодной, если $X \le x_1 = 4{,}9$ г/денье. Составить план кр-ля прочности волокна по методу однократной вбр-и при $n_0 = 100$ и $v = 5{,}1$. По найденным α и β составить план кр-ля по методу посл-го анализа, выч-ть ср. расход волокна на исп-и вер-ти $P(n < n_0)$, $P(n < \frac{1}{2} n_0)$. Ук: см. п6 из 8.2. О: при однократной вбр-е $\alpha = 0{,}0000884$, $\beta = 0{,}00621$; $A = 1124\cdot 10$, $B = 0{,}00621$; $h_1 = 6{,}506$, $h_2 = -11{,}94$, $h_3 = 5{,}15$; $M[n|\xi_0] = 26{,}02$, $M[n|\xi_1] = 47{,}32$, $M[n]_{max} = 121{,}4$; $c = 2{,}542$; $P(n \le 300) > 0{,}99$ ($< 0{,}999$), $P(n \le 150) = 0{,}9182$.

20(2). Известно, что если интенсивность отказов $\lambda \le \lambda_0 = 0{,}01$, то партия гироскопов считается надежной; если $\lambda \ge \lambda_1 = 0{,}02$, то партия ненадежна и должна быть забрк-на. Считая, что вр. T безотказной работы подчинено экспоненциальному закону рсп-ия, и принимая $\alpha = \beta = 0{,}001$, составить планы одиночного (n_0, v) и посл-го кр-ля по уровню параметра λ. Найти ср. число исп-мых гироскопов $M[n|\lambda]$ для случая посл-го кр-ля. Ук: см. п7 из 8.2. О: $n_0 = 0{,}86$, $v = 66{,}7$ часа; $A = 999$, $B = 0{,}001001$; $h_1 = 690{,}8$, $h_2 = -690{,}8$; $h_3 = 69{,}33$; $\lambda^* = 0{,}01442$; $M[n|\lambda_0] = 22{,}48$, $M[n|\lambda_1] = 35{,}67$, $M[n]_{max} = 99{,}3$.

21(3). Опр-ть годовой экнч-й эф-т от внедрения ОАСУ, используя данные п4 из 1°: 8.3. Кроме того, известно, что нормативный коэф-т экнч-ой эфс-ти капитальных вложений в отрасли равен 0,4, а дпн-ые затраты на создание ОАСУ в ств-и с п3 из 1°: 8.3 равны 11,61 млн. руб., т.е. дано: $П_1 = 800$ (млн. руб. и так далее), $A_1 = 2969{,}9$; $A_2 = 3001{,}9$; $\Delta П^A = 1{,}74$; $\Delta C^A = 7{,}98$; $E_H = 0{,}4$; $K_Д^A = 11{,}61$. О: годовой экнч-й эф-т по (2) $Э = Э_{год} - E_H K_Д^A \approx 13{,}72$ млн. руб.

22(3). Выяснить, эффективна ли ОАСУ (для этого опр-им расчетный коэф. эфс-ти затрат), если известны дпн-ые затраты на создание ОАСУ – 11,61 млн. руб. (п3 из 1°: 8.3) и известен годовой прирост прибыли от внедрения ОАСУ – 18,36 млн. руб. (п4 из 1°: 8.3). О: опр-ть расчетный коэф. эфс-ти затрат $E_p = Э_{год} \big/ K_Д^A = 18{,}36/11{,}61 = 1{,}58$. Ук: для опр-ия эфс-ти внедрения ОАСУ нх-мо сравнить нормативный коэф. капитальных вложений с полученным расчетным зн-ем, т.е. $E_H < E_p$ ($0{,}4 < 1{,}58$).

23(3). Опр-ть T – срок окупаемости ОАСУ, если известны зн-ия дпн-ых затрат на создание ОАСУ, $K_Д^A = 11{,}661$ млн. руб. и годовой прирост прибыли от внедрения ОАСУ, $Э_{год} = 18{,}36$ млн. руб. Ук: использовать фм-у (4) из 1°: 8.3. О: $T \approx 0{,}63$ года, т.е. стоимость внедрения ОАСУ окупится менее чем за 8 месяцев ее фнцр-ия.

24(3). Выбрать тип специализированной ЭВМ дк-го действия для упл-ия ТП-ем на основе опр-ия верхней и нижней границ емкости ее памяти. Каждый выходной сигнал должен измеряться четыре раза для обеспечения заданной точности. Инр-л дк-сти равен 1 с. Крд-ты параметров и ошибки их измерения предполагаются незв-ми и норм-но рсп-ми. Измеряются 4 параметра: 1) t – температура; 2) P – давление; 3) V – объем реагирующих веществ; 4) q – процент примесей. Хркс-ки точности упл-ия и измерения и ср. кв. отк-ия параметров системы в четыре дк-ых момента вр-и приведены в табл. 1, где σ_{ij} – ср. кв. отк-ие по i-му параметру, полученному в i-й момент вр-и ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,3}$). Опр-ть емкость памяти ЭВМ путем выч-ия мнм-го и мкс-го кол-ва инф-и на входе упл-щего устройства, у к-го упл-ие проводится по четырем крд-ам.

Таблица 1

Координата	Номер параметра (i)	Единица измерения	Точность управления координатой (σ_i)	Точность измерения координаты ($\sigma_{\Delta i}$)	Средние квадратические отклонения выходных координат в момент времени			
					0 (σ_{i0})	1 (σ_{i1})	2 (σ_{i2})	3 (σ_{i3})
t	1	0,1°C	8	4	63,9	45,1	31,7	23,7
P	2	0,1 Па	8	4	63,9	31,8	23,7	22,3
V	3	0,1 м^3	4	2	32,0	22,5	15,9	11,1
q	4	0,1%	4	2	31,9	15,9	11,1	7,8

Р. Сначала приведем нх-ые фм. для решения задачи. Обратимся к схеме, представленной на рис. 6 из 3°: 8.3. Найдем мкс. и мнм. кол-во инф-и, к-ое нх-мо системе для упл-ия объектами с заданной точностью. Для повышения точности измерения повторяют m раз ($i = \overline{1,m}$). Предельное зн. m^* опр-ит тот номер измерения, при к-ом будет обеспечена заданная точность упл-ия. Пусть имеется дк. система упл-ия (рис. 1). Ср. кол-во инф-и X, поступающее к выходу системы за m инр-ов дк-сти T, равно разности энтропии выходного сигнала $H_0(x)$ в нач-й момент вр-и и энтропии $H_m(x)$ в момент вр-и mT:

$$I_x^m(X) = H_0(X) - H_m(X). \quad (1)$$

По этой фм-е можно опр-ть и мнм. кол-во инф-и на входе упл-щего устройства:

$$I_y^m(Y) = H_0(Y) - H_m(Y) \; (I_y^m = I_x^m). \quad (2)$$

Мкс. кол-во инф-и на входе упл-щего устройства опр-ся по фм-е (24) из 3°: 8.3 при суммировании (сумв.) по всем ($m + 1$) измерениям:

$$I_y^m(X) = \Sigma \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_{x_i}^2}{\sigma_z^2}\right). \quad (3)$$

Фм. (3) верна при сд-их условиях: 1) зн-ия выходного сигнала незв-мы в момент измерения и они рсп-ны по норм. закону; 2) помеха z аддитивна и норм-но рсп-на. Отметим, что $\sigma_{x_i}^2$ – дсп. выходного сигнала X в момент i-го измерения, σ_z^2 – дсп. помехи z.

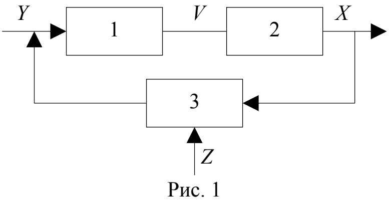


Рис. 1

Если таких параметров будет не один, а n, то задача решится сумв-ем по $j = \overline{1,n}$. Для мнм-го кол-ва инф-и имеем

$$I_x^m(X) = \sum_{j=1}^{n} \left[H_0(X_j) - H_m(X_j)\right]_j, \quad (4)$$

где X_j – выходной сигнал j-го параметра; j за кв. скобкой – индекс параметра, по к-му берется разность, записанная в кв. скобке.

Для мкс-го кол-ва инф-и получим

$$I_y^m(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma_{ji}^2}{\sigma_{z_j}^2}\right)\right],$$

где $\sigma_{z_j}^2$ – дсп. помехи z_j j- го параметра; σ_{ji}^2 – дсп. выходного сигнала X_j j-го параметра в момент i-го измерения.

По фм-ам (3) и (4) опр-ся верхние и нижние границы емкости памяти специализированной ЭВМ для данной АСУ ТП. Задачу решим в сд-ем порядке.

1. Опр-им мнм. кол-во инф-и о выходных крд-ах на входе упл-щего устройства I_x^m (t, P, V, q) = $H_0(t) - H_m(t) + H_0(P) - H_m(P) + H_0(V) - H_m(V) + H_0(q) - H_m(q) = \log\dfrac{\sigma_{t_0}}{\sigma_1} + \log\dfrac{\sigma_{P_0}}{\sigma_2} + \log\dfrac{\sigma_{V_0}}{\sigma_3} + \log\dfrac{\sigma_{q_0}}{\sigma_4} = \log\dfrac{63{,}9}{8} + \log\dfrac{63{,}9}{8} + \log\dfrac{32}{4} + \log\dfrac{31{,}9}{4} + \log\dfrac{31{,}9}{4} \approx 12$ бит.

2. Опр-им мкс. кол-во инф-и, получаемое на входе упл-щего устройства при (m + 1) зн-и каждого выходного сигнала:

$$I_y^m(t, P, V, q) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{\Delta 1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{\Delta 1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_{\Delta 1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{20}^2}{\sigma_{\Delta 2}^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{\Delta 2}^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{\Delta 2}^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{\Delta 2}^2}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{43}^2}{\sigma_{\Delta 4}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{63{,}9^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{45{,}1^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{31{,}7^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{23{,}7^2}{4^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{63{,}9^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{31{,}8^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{23{,}7^2}{4^2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{22{,}3^2}{4^2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{7{,}8^2}{2^2}\right) \approx 4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 4 + 3 + 2{,}5 + 2{,}5 + 4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 4 +$$

$$+ 3 + 2{,}5 + 2 = 49{,}5 \text{ бита.}$$

Т.о., установлено, что для эф-го решения задачи упл-ия по четырем упл-ым крд-ам процесса с заданной точностью σ по каждому параметру при ошибках измерения показаний параметров, указанных в табл. 1, $\sigma_{\Delta j}$ при незв-ти и норм-ти рсп-ия крд-т и ошибок, при использовании четырех замеров для упл-ия следует выбрать тип ЭВМ с нижней границей емкости памяти, более близкой к 12 бит, и верхней границей, более близкой к 49,5 бита.

25(4). Каким исх-ым пж-ям и основным кт-ям должен отвечать студент для успешного окончания вуза? Составьте задачу зВ и оцените свои (или товарища) индивидуальные возможности.

26(4). Сформулируйте основные кт-и на основе исх-ых пж-й и, взяв условные расходы по птб-ям $\{A_j\}$, составьте анч-ую табл. 5 из 3°: 8.4 и решите задачу типа 3Б.

III. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

9. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Все мышление направлено на заполнение пробелов путем интерполяции или экстраполяции.
Ф. Бартлетт

ЛЕКЦИЯ 27

9.1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ. ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ

1°. Введение. Структура погрешности. Корректность. Мт. обработка результатов опыта содержит в себе четыре части.

1. Мт-ие модели (мд.) изучаемых процессов и явлений, устанавливающих стн-ия между свк-ю пер-ых с параметрами упл-ия явлением. Для этого используются любые мт. средства: язык диф-ых или инт-ых ур-й, теория мн-в, мт. логика, теория вер-ей с мт. стс-ой и т.д. Процесс составления мт-ой мд-и (постановка задачи) наз. мт-им моделированием (мдв.). Для большинства процессов мд. обычно состоит из ур-й, описывающих процесс. Н-р, скорость ракеты при вертикальном полете в вакууме опр-ся ур-ем

$$\left(M - \int_0^T m(\tau)d\tau\right)\left(\frac{dV}{dt} + g\right) = Cm(t), \tag{1}$$

где M – нач. масса ракеты, $m(t)$ – заданный расход горючего, g – ускорение поля тяготения, C – скорость истечения газов, звщ-ая от хркс-ик топлива.

2. Теория вычислительных (вычт.) методов. Если мт-ая мд. выбрана недт-но тщательно (н-р, учтены не все хрк-ые черты процесса), то какие бы методы мы не применяли для расчета, все выводы будут недт-но надежными, а в нек-ых случаях могут оказаться совершенно неправильными. Так ур-ие (1) непригодно для запуска с поверхности земли, ибо в нем не учтено сопротивление воздуха. В звс-ти от сложности мд-и применяются различные по своей точности вычт. методы. Для более грубых и несложных мд-ей зачастую удается получить аналитические решения. Н-р, ур-ие (1) легко инт-тся при $g = \text{const}$ и $m(t) = \text{const}$: $V = C\ln[M/(M - mt)] - gt$. Для решения нб-е сложных и точных мд-ей используются вычт-ые методы.

3. Приборы, позволяющие автоматизировать (автз.) выч-ия, осуществлять связь, хранить инф-ию и т.д. Среди них центральную роль играют ЭВМ.

4. Вспомогательные средства, облегчающие упл-ие работой ЭВМ. К ним относятся алгоритмические (алтч.) языки различных назначений (н-р, АЛГОЛ, ФОРТРАН, PL-1, также см. КС: Автокод, Автоматизация (автц.) пргв-ия, АСОД, АСПР, АСУ, Операционная система ЭВМ, Компилятор, Транслятор), стандартные (библиотечные) подпрг-мы, прг. диспетчеры и т.п.

В данном разделе в краткой форме будут изложены основы теории вычт-их методов применительно для обработки результатов опыта.

Теория вычт-их методов яв-ся очень разветвленной наукой и имеет применение всюду (в мт-ке, физике, механике, астрономии, теории упл-ия и регулирования, экн-ке, биологии, медицине и т.д.), где возникают свои специфические задачи, а это потребовало создания многочисленных методов их решения. Но можно заметить одну общую идею этих методов, она отчетливее всего врж-ся в терминах функционального (фнц.) анализа. Кратко приведем эти термины.

В классическом мт. анализе основным предметом иссл-ия яв-ся числовая фк-ия и их системы, заданные в n-мерном Эвклидовом пр-ве. В фнц-ом же анализе расв-ся фк-и (операторы), аргументами к-ых яв-ся эл-ты фнц-ых (абстрактных, бесконечномерных) пр-в. В отличие от Эвклидовых в абстрактных пр-ах эл-ты могут иметь самую различную природу. Так, н-р, вводится понятие метрического (мтр.) пр-ва R как абстрактного мн-ва, для любых двух эл-ов к-го опр-но понятие расстояния $\rho(x, y)$, уд-щее сд-им условиям:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ ттогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x)$, $x, y, z \in R$ (аксиома туг-ка).

Евклидовы пр-ва с обычным $\left[\rho(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\right]$ опр-ем расстояния в них уд-ют всем этим условиям. Но могут быть и др. мтр. пр-ва.

Так рас-им мн-во всевозможных непр. фк-й, заданных на отрезке $[a, b]$, опр-лив расстояние рав-ом:

$$\rho(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{2}$$

Это расстояние уд-ет всем трем условиям. Т.о. получили фнц. мтр-ое пр-во, к-ое обычно наз-ют пр-ом C.

Др-им важным классом фнц-ых пр-в яв-ся пр-ва L_P ($P \geq 1$ дсв. число) с расстоянием

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^P dt\right]^{\frac{1}{P}}. \tag{3}$$

Так опр. расстояние уд-ет всем трем условиям.

В каждом мтр. пр-ве можно говорить об окрестности (окрс.) данной точки.

Назовем ε-окрс-ю точки x нек-го мтр. пр-ва R свк-ть его точек y, уд-ей нерав-ву

$$\rho(x, y) < \varepsilon. \tag{4}$$

В пр-ве C ε-окрс-ю будет свк-ть всех непр-ых на $[a, b]$ фк-й $\{y(t)\}$, лежащих (рис. 1) в полосе $x(t) \pm \varepsilon$, т.е.

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Будем писать $f(x) \in C_n[a, b]$, если фк. $f(x)$ опр-на на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем непр. производные до порядка n включительно. Запись ($n = 0$) $f(x) \in C[a, b]$ означает, что $f(x)$ непр-на на отрезке $[a, b]$.

В пр-ве L_P ε-окрс-ю будет свк-ть $\forall\ y(t) \in L_P$, для к-ых

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^P dt < \varepsilon^P. \qquad (6)$$

При этом в отдельных точках отк-ие $y(t)$ от $x(t)$ может быть очень большим, но зато в др-их точках очень малым (рис. 2).

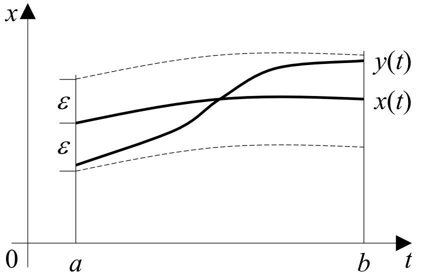


Рис. 1

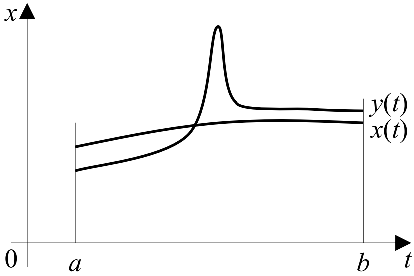


Рис. 2

В вычт-ой мт-ке часто приходится заменять (интерполировать) одну фк-ю $x(t)$ др-ой, более удобной для выч-ых целей и в каком-то смысле близкой к первой.

Так, если ε-окрс. берется в пр. C, то говорят о равномерном прж-и фк. $x(t)$.

Если ε-окрс. берут в пр. L_P, то говорят о прж-и в среднем. В част., при $p = 2$ говорят о среднекв-ом прж-и.

Опр-ие фк-й на фнц-ых пр-ах анч-но опр-ию в классическом мт. анализе.

Пусть даны два абстрактных пр-ва R_1 и R_2. И пусть каждому эл-у $x \in R_1$ ств-ет эл-т $y \in R_2$. Тогда будем говорить, что задана фк-ия $y(t)$ с обл-ю опр-ия R_1 и обл-ю зн-й R_2.

В част., если R_2 яв-ся обл-ю дсв-ых или комплексных чисел, то $A(t)$ наз. функционалом. Простейшим примером фнц-ла в пр-ве C будет

$$J(x) = \int_a^b x(t)dt .$$

Если пр-во R_2 совпадает с пр-ом R_1, то A наз. оператором.

Область мт-ки, изучающая св-ва фнц-ых пр-в и заданных на них фк-й наз. фнц-ым анализом. Иногда для удобства вместо R_1 и R_2 будем брать X и Y.

Следует отметить, что каждая задача может быть решена не одним, а несколькими вычт. методами. Поэтому умение выбирать вычт-ые методы для решения той или иной задачи яв-ся одним из важнейших навыков вычт-ля. Для этого он должен хорошо знать возможности (оценки, сх-ть и т.д.) того или иного метода. Объясним это подробнее.

Большинство задач в вычт-ой мт-ке записываются в виде

$$y = A(x) \ (x \in X, y \in Y). \qquad (7)$$

Задача состоит в отыскании либо y по заданному x, либо x по заданному y.

Чтобы решить задачу, производят замену пр-в X, Y и фк-и (оператора) A нек-ми др. пр-ми $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и фк-ей $\overline{A}$, более удобными для вычт-ых целей. Иногда бывает дт-но произвести замену пр-в X и Y или даже одно из них, или же заменить только фнц-л A.

Замена должна быть такой, чтобы решение новой задачи

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}) \ (\bar{x} \in \bar{X},\ \bar{y} \in \bar{Y}) \tag{8}$$

было в каком-то смысле близким к точному решению исх-ой задачи (7) и его возможно было бы практически отыскать сравнительно легко. Н-р, пусть требуется выч-ть инт-л

$$y = \int_a^b f(x)dx, \tag{9}$$

где $f(x)$ – непр. фк-ия, причем неопр-ый инт. не берется в элр-ых фк-ях.

Чтобы получить дт-но точное прж-ние инт-ла, можно идти двумя путями:

1) фк-ию $f(x)$ заменить алг-им мчл-ом $P(x)$, равномерно прж-щем фк-ю $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с нх-ой степенью точности ε, тогда выч-им

$$y = \int_a^b P(x)dx,$$

что не составит труда. Здесь мы, не меняя фнц-ла $A(f) = \int_a^b f(x)dx$, заменяем пр. C, к-му принадлежит $f(x)$, пр-ом мчл-ов $\{P(x)\}$. Причем

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon;$$

2) вместо инт-ла (9) можно взять $y = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$. Здесь мы уже заменяем фк-ю $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ новой фк-ей $\bar{A}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Решение мт-их задач (мд-й) состоит из двух этапов:

а) выбор численного метода решения задачи, т.е. замена задачи $y = A(x)$ ($x \in R_1$, $y \in R_2$) задачей $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$ ($\bar{x} \in \bar{R}_1$, $\bar{y} \in \bar{R}_2$), более удобной для вычт-ых целей, но ее решение в нек-ом смысле близко к решению исх-ой задачи. Для этого нх-мо наличие разработанных методов численного решения основных мт-их задач и должны быть известны точность и быстрота сх-ти этих методов;

б) составление вычт-ой схемы (при ручном счете) или прг-ы решения задачи $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$ (при машинном счете) и сам процесс счета.

Оценка погрешностей (погр.) в вычт-ой мт-ке занимает важное место, она должна быть согласована и учтена на всех этапах решения задач. Эти погр-ти вызываются сд-ми причинами.

1*. Неточность мт-ой мд. Любая мт. мд. лишь прж-но врж-ет реальную систему, откуда и возникает погр-ть мд-и.

2*. Ошибка инф-и о решаемой задаче, к-ая не зв-т от мт-ой стороны решения и поэтому наз. неустранимой погр-ю. Обычно эти ошибки яв-ся результатом того, что инф-я о мт. мд-и берется из опытных данных.

3*. Аппроксимация при замене задачи $y = A(x)$ задачей $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$. Вызываемая этим погр-ть должна учитываться при использовании того или иного метода. Поэтому погр-ть метода яв-ся одной из важнейших его хркс-ик.

4*. Округление при выполнении ариф-их операций. Наиболее часто для записи чисел для ЭВМ используется двоичная (или десятичная) система с плавающей запятой с огр-ым кол-ом знаков:

$$x \approx \pm 2^P \sum_{K=1}^{n} \alpha_K \cdot 2^{-K} = \pm 2^P(\alpha_1 \dots \alpha_n) \ (|P| \le P_0),\ \alpha_1 = 1.$$

Обычно $P_0 = 64$ и $n = 35$. В десятичной системе счисления порядок и число знаков даются рав-ми $2^{P_0} = 2^{64} \approx 7 \cdot 10^{19}$ и $2^{-N} = 2^{-35} \approx 3 \cdot 10^{-11}$.

Ясно, что прж. представление чисел в ЭВМ порождает погр-ти округлений при выполнении операций, сд-но, и при выч-и фк-й и т.д. Погр-ть округлений более подробно расв-ся в 2°.

Корректность. Задача $y = A(x)$ наз. корректно поставленной, если малым изменениям исх. данных $x + \Delta x$ ($\Delta x \to 0$) ств-ют малые изменения решений $y + \Delta y$ ($\Delta y \to 0$). Причем это решение единственно (едс.) и устойчиво.

Задача $y = A(x)$ наз. некорректной, если сколь угодно малые изменения исх. данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Применение численных методов к некорректным задачам бессмысленно, ибо погр-ти, неизбежно появляющиеся при численном расчете, будут катастрофически нарастать в ходе выч-й. Однако в настоящее время развиваются методы (наз-мые регуляризацией) решения многих некорректных задач. Но они основаны на решении не исх-ой, а близкой к ней вспомогательной корректно поставленной задачи, содержащей параметр α; при $\alpha \to 0$ решение вспомогательной задачи должно стремиться к решению исх-ой.

Мы будем заниматься лишь корректными задачами. На практике даже корректную (устойчивую) задачу нелегко решить, ибо численный алгоритм (алт.) может быть неустойчивым. Н-р, если производные заменяются разностями, то приходится вычитать близкие числа и сильно теряется точность. Эти неточные промежуточные результаты используются в дальнейших выч-ях и ошибки могут нарастать.

По анг-и можно говорить о корректности алт-а $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$, подразумевая сущв-ие и едс-ть прж-го решения для любых входных данных $\bar{x} \in \bar{R}_1$, а устойчивость – отс-но всех ошибок исх. данных и промежуточных выкладок.

2°. Погрешность округлений. Обз-им через x^* точное зн. прж-го числа x. Их разность $\Delta_x = x^* - x$ наз. ошибкой или погр-ю прж-го числа x, а вел-а $\Delta = |x^* - x|$ наз. истинной абс-ой погр-ю. Обычно точное зн. x^* неизвестно, и сд-но, ошибка прж-го числа x опр-на быть не может. Однако, как правило, можно указать число $\Delta(x)$ (наз-ое абс-ой погр-ю прж-го числа x), оценивающее сверху абс. вел-у ошибки прж-го числа, т.е.

$$|x^* - x| < \Delta(x) \tag{10}$$

(иногда в лит. Δ наз-ют абс-ой погр-ю, $\Delta(x)$ – предельной абс-ой погр-ю). Из (10) следует

$$x - \Delta(x) < x^* < x + \Delta(x). \tag{10a}$$

Для удобства стн. (10а) будем писать так:

$$x^* \approx x[\Delta(x)] \tag{10б}$$

и говорить, что прж. число x врж-ет точное зн. x^* расв-ой вел-ы с абс. погр-ю $\Delta(x)$. Н-р, если длина l нек-го отрезка уд-ет стн-ю 25,7 см $< l <$ 25,9 см, то длина его измерена с абс. погр-ю. равно 0,1 см, т.е. получим $l \approx 25{,}8[0{,}1]$ см.

Если же длина l нек-го отрезка с точностью до 0,2 равна 57,4 см, т.е. $l \approx 57{,}4[0{,}2]$ см, это значит, что 57,2 см $< l <$ 57,6 см.

п1. При взвешивании тела получены зн-ия: $x_1 = 68$ г с недостатком, $x_2 =$ $= 69$ г с избытком. Найти абс-ю погр-ть взвешивания.

Р. Пусть x^* – точное зн. массы тела. Из результатов взвешивания имеем $x_1 = 68 < x^* < 69 = x_2$. Отсюда $|x^* - x_1| < 1$, $|x^* - x_2| < 1$, сд-но, $\Delta(x_1) = 1$ г, $\Delta(x_2) =$ $= 1$ г. Тогда можно взять $\Delta(x) = 0{,}5$ при $x = 68{,}5$, т.е. $x^* = 68{,}5[0{,}5]$.

Заметим, что абс-ая погр-ть недт-но хркз-ет степень точности. Так, н-р, если известно, что нек-ая длина измерена с точностью 1 см, то еще нельзя сказать, дт-но ли точно сделано измерение. Если измерена высота многоэтажного дома, то такая точность дт-на, а для измерения высоты двери – нет. Это приводит нас к сд. понятию.

Относительной (отс.) погр-ю $\delta(x)$ прж-го числа x наз. врж-е вида

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}, \tag{11}$$

где вел-а $\delta = \dfrac{\Delta}{|x|}$ наз. истинной отс-ой погр-ю.

Между абс-ой и отс-ой погр-ми имеет место прямая прц. зв-ть

$$\Delta(x) = |x|\delta(x). \tag{11а}$$

п2. Найти отс-ю погр-ть прж-го числа 3,55[0,02].

Р. $\delta(3{,}55) = 0{,}02/3{,}55 \approx 0{,}006$. Можно принять $\delta(3{,}55) = 0{,}006$ или 0,6%.

Рас-им **правила округления чисел**. Округление чисел заключается в отбрасывании одного или нескольких последних десятичных знаков, а если их нет, то в замене одной или нескольких последних цифр целой части нулями. При этом руководствуются правилом: последняя сохраняемая цифра не изменяется (увеличивается на ед-у), если первая отбрасываемая цифра меньше (больше или равна) 5.

п3. Округлить число: а) 5,37261 до десятитысячных, тысячных, сотых, десятых долей; б) 1203752 до десятков, сотен, тысяч и десятков тысяч.

Р. а) $5{,}37261 \approx 5{,}3736$, б) $1\,203\,752 \approx 1\,203\,750 = 120\,375 \cdot 10$,
$5{,}37261 \approx 5{,}373$, $1\,203\,752 \approx 1\,203\,800 = 12\,038 \cdot 10^2$,
$5{,}37261 \approx 5{,}37$, $1\,203\,752 \approx 1\,204\,000 = 1\,204 \cdot 10^3$,
$5{,}37261 \approx 5{,}4$, $1\,203\,752 \approx 1\,200\,000 = 120 \cdot 10^4$.

При округлении целых чисел рекомендуется пользоваться последней формой записи, где видно, сколько разрядов округлено. Н-р, в числе $120 \cdot 10^4$ округлено до 4-х разрядов.

Иногда соблюдают правило четной цифры при отбрасывании числа 5: последняя сохраняемая цифра не изменяется (увеличивается на ед-у), если она четная (нечетная). Н-р, $2{,}8025 \approx 2{,}802$; $26{,}35 \approx 26{,}4$.

Округлять числа приходится или до опр-го десятичного знака (разряда), или до опр-го кол-ва значащих цифр. Значащими (знщ.) цифрами прж-го числа наз. все его цифры кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры, если прж. число – десятичная дробь, и нулей, стоящих в округленных разрядах, если прж. число – целое.

п4. Округлить числа: а) 0,02025 до третьего десятичного знака (до тысячных долей); б) 2 876 672 и 699 973 до четырех знщ-х цифр.

Р. а) $0{,}02025 \approx \underline{0{,}0}20$; $2\,876\,672 \approx 2\,877\,\underline{000} = 2\,877\cdot 10^3$ и $699\,973 \approx 700\,0\underline{00} = 7\,000\cdot 10^2$ (подчеркнутые нули не знщ-ие, остальные знщ.).

Известно, что всякое плж. число x представимо в виде конечной или беск-ой десятичной дроби: $x = a_m\cdot 10^m + \ldots + a_{m-n+1}\cdot 10^{m-n+1} + \ldots$, где $a_m \geq 1$, $a_i = \overline{0{,}9}$. Н-р, $3141{,}59\ldots = 3\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 1\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + \ldots$

Плж. число x представляется конечной десятичной дробью: $x = a_m\cdot 10^m + \ldots + a_{m-n+1}\cdot 10^{m-n+1}$.

Говорят, что n первых знщ-х цифр прж-го числа x яв-ся верными, если абс-ая погр-ть этого числа не превышает половины ед-цы разряда врж-го n-й знщ-ей цифрой, считая слева направо, т.е.

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2}\, 10^{m-n+1}. \tag{12}$$

Н-р, для точного числа $x^* = 35{,}97$ число $x = 36{,}00$ яв-ся прж-ем с тремя верными знаками, ибо $|x^* - x| = 0{,}03 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 0{,}05$, т.е. $x = 36{,}0$.

п5. Найти зн-я чисел с четырьмя точными знщ-ми цифрами: а) $x = 3{,}142$ яв-ся прж-ным зн-ем числа π; б) для числа 3,29975.

Р. а) т.к. $|\pi - x| = |3{,}14159\ldots - 3{,}142| = 0{,}00041 < 0{,}0005$, то $x = 3{,}142$ (все знаки верны); б) округляя до 4-х знаков, получим $3{,}29975 \approx 3{,}300$. Т.к. $|3{,}29975 - 3{,}300| = 0{,}00025 < 0{,}0005$, значит, число 3,300 имеет четыре точных (верных) знщ-х цифры.

п6. Округлить сомнительные цифры чисел $a_1 = 3{,}7622[0{,}0121]$, $a_2 = 12{,}5123[0{,}0211]$.

Р. Округлим a_1 так, чтобы абс-ая погр-ть не превышала пяти ед-ц первого отброшенного разряда. Округляя до двух знщ. цифр, получим 3,8 с ошибкой 0,0378, сд-но, $\Delta(3{,}8) = 0{,}0378 + 0{,}0121 = 0{,}0499 < 0{,}05$. Итак, $a_1 \approx 3{,}8[0{,}05]$. Анч-но для второго числа имеем $\Delta(12{,}5) = 0{,}0123 + 0{,}0211 = 0{,}0334 < 0{,}04$. Отсюда $a_2 \approx 12{,}5[0{,}04]$. Теперь у обоих чисел сохранены лишь точные знщ. цифры. Отс. ошибки округляем также с избытком.

При выполнении прж-ых выч-й число знщ-х цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две ед-цы. Лишняя цифра наз. сомнительной.

Число точных (верных) знщ-х цифр связано с отс. погр-ю числа.

т1. Если плж-ое число x имеет n верных десятич. знаков, то

$$\delta \leq \frac{1}{a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{13}$$

где a_m – первая знщ. цифра числа x.

Д. Пусть число $x = a_m 10^m + \ldots + a_{m-n+1}10^{m-n+1} + \ldots$ ($a_m \ge 1$) яв-ся прж-ым зн-ем точного числа x^* и имеет n верных знаков. Тогда из (12) получим

$$x^* \ge x - \frac{1}{2}10^{m-n+1} \ge a_m 10^m - \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^m\left(2a_m - \frac{1}{10^{n-1}}\right) \ge \frac{1}{2}10^m(2a_m - 1).$$

Отсюда $\delta = \dfrac{\Delta}{x^*} \le \dfrac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{\frac{1}{2}a_m 10^m} = \dfrac{1}{a_m}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$ ■

сл1. За предельную отс. погр-ть числа x можно принять

$$\delta(x) = \frac{1}{a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}. \tag{14}$$

сл2. Если число x имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \ge 2$, то верна фм-а:

$$\delta(x) = \frac{1}{2a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{15}$$

Дсв-но, при $n \ge 2$ числом $\dfrac{1}{10^{n-1}}$ можно пренебречь. Тогда

$$x^* > \frac{1}{2}10^m \cdot 2a_m = a_m 10^m, \text{ отсюда } \delta = \frac{\Delta}{x^*} \le \frac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{a_m 10^m} = \frac{1}{2a_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

откуда следует (15). Мы будем придерживаться наз-ий $\Delta(x)$ – абс-ая, $\delta(x)$ – отс-ая погр-ти.

п7. Найдем отс-ю погр-ть числа $x = 3{,}14$, взятого вместо π.

Р. По условию задачи $a_m = 3$, $n = 3$. Тогда $\delta(x) = \dfrac{1}{2\cdot 3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{3-1} = \dfrac{1}{600} = \dfrac{1}{6}\,\%$.

3°. Погрешности арифметических операций. Найдем абс. и отс. погр-ти. Пусть $x = \pm x_1 \pm \ldots \pm x_n$. Очевидно, что $\Delta x = \pm \Delta x_1 \pm \ldots \pm \Delta x_n$. Тогда за истинную абс. погр. берем

$$|\Delta x| \le |\Delta x_1| + \ldots + |\Delta x_n|. \tag{16a}$$

сл3. За абс. погр-ть алг. суммы можно принять суммы абс. погр-ей слагаемых

$$\Delta(x) \le \Delta(x_1) + \ldots + \Delta(x_n). \tag{16}$$

Из (16) вытекает правило (дополнения (дпн.) слагаемых суммы) для сложения прж-ых чисел с различной асб. погр-ю:

1. Выделить число, десятич. запись к-го обрывается ранее др-их.
2. Остальные числа округлить по образцу выделенного, сохраняя один или два запасных десятич. знака.
3. Произвести сложение данных чисел, учитывая все сохраненные знаки.
4. Полученный результат округлить на один знак.

При округлении по правилу дпн-ия слагаемых суммы $x = x_1 + \ldots + x_n$ до m-го десятич. разряда погр-ть округления суммы не превышает вел-ы

$$\Delta_{окр} \le n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^m. \qquad (17)$$

Можно получить более точный расчет погр-ти округления суммы, если учесть знаки ошибок округления.

п8. Найти сумму прж-ых чисел: 0,348; 0,1834; 345,4; 11,75; 0,00352, каждое из к-ых имеет все верные знаки.

Р. Выделяем число с нм-ей точностью 345,4, абс. погр-ть к-го может достигать 0,1. Остальные числа округляем с точностью до 0,01 и складываем их. Округляя результат до 0,1, получим прж. зн-ие суммы 357,7. Полная погр. состоит из трех слагаемых:

$$\begin{array}{r} 345{,}4 \\ 11{,}75 \\ 0{,}35 \\ 0{,}18 \\ \underline{0{,}00} \\ 357{,}68 \end{array}$$

а) суммы предельных погр-ей исх-ых данных

$$\Delta_1 = 10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-5} = 0{,}11111 < 0{,}112;$$

б) абс. вел-ы суммы ошибок округления слагаемых с учетом их знаков

$$\Delta_2 = |-0{,}002 + 0{,}0034 + 0{,}00352| = 0{,}00492 < 0{,}005;$$

в) заключительной погр-ти $\Delta_3 = 0{,}02$.

Тогда $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \le 0{,}112 + 0{,}005 + 0{,}02 = 0{,}137 < 0{,}2$.

Т.о. искомая сумма есть $357{,}7 \pm 0{,}2 = 357[0{,}2]$. Если же полную погр-ть выч-им по (17), получим $\Delta_{окр} \le 5 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^1 = 0{,}25 < 0{,}3$, т.е. за искомую сумму (в более грубом подсчете) можно взять 357[0,3].

зм1. Иногда приходится выч-ть сумму большого числа слагаемых, имеющих одинаковую погр-ть. Если число слагаемых велико ($n > 10$), то фм-а (16) дает завышенную оценку погр-ти. Более точную оценку даст фм-а Н.Г. Чеботарева:

$$\Delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \sqrt{3n}\,\Delta(x). \qquad (17а)$$

Отс-ые погр-ти операций устанавливаются сд. теоремами.

т2. Если слагаемые одного и того же знака, то отс-ая погр-ть их суммы не превышает нб-ей из отс-ых погр-ей слагаемых.

Д. Пусть $x = x_1 + \ldots + x_n$ – прж. зн-ие точного числа $x^* = x_1^* + \ldots + x_n^*$ (для опр-сти $x_i > 0$, $x_i^* > 0$, $i = \overline{1,n}$). Тогда, учитывая (11), получим

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x^*} = \frac{\Delta(x_1) + \ldots + \Delta(x_n)}{x_1^* + \ldots + x_n^*} = \frac{x_1^*\delta(x_1) + \ldots + x_n^*\delta(x_n)}{x_1^* + \ldots + x_n^*} \le \frac{\bar{\delta}(x_1^* + \ldots + x_n^*)}{x_1^* + \ldots + x_n^*} = \bar{\delta}, \qquad (18)$$

где $\bar{\delta} = \max[\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)]$. Сд-но, $\delta(x) < \bar{\delta}$ ■

т3. Отс-ая погр-ть пзв-ия нескольких прж-ых чисел, отличных от нуля, не превышает суммы отн-ых погр-ей этих чисел.

Д. Пусть $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ (для простоты $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$). Тогда $\ln x = \ln x_1 + \ldots + \ln x_n$. Отсюда, используя фм-у $\Delta \ln x = d \ln x = \frac{dx}{x} = \frac{\Delta x}{x}$, находим $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x_1}{x_1} +$

$+ \ldots + \dfrac{\Delta x_n}{x_n} \Rightarrow \left|\dfrac{\Delta x}{x}\right| \le \left|\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \ldots + \left|\dfrac{\Delta x_n}{x_n}\right|$. Если $|\Delta x_i|$ мало по сравнению с x_i, как это обычно бывает, по прж-но можно полагать $\left|\dfrac{\Delta x_i}{x_i}\right| \approx \left|\dfrac{\Delta x_i}{x_i^*}\right| = \delta_i$. Тогда

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \delta < \delta_1 + \ldots + \delta_n. \qquad (19)$$

Стн. (19), очевидно, остается верным также, если сомножители x_i ($i = \overline{1,n}$) имеют различные знаки.

сл4. Отс. погр-ть пзв-ия равна сумме отс-ых погр-ей сомножителей:

$$\delta(x) = \delta(x_1) + \ldots + \delta(x_n). \qquad (20)$$

сл5. Зная отс-ю погр-ть $\delta(x)$ пзв-ия x, можно опр-ть абс-ю погр-ть

$$\Delta(x) = |x|\delta(x). \qquad (21)$$

зм2. Если один из сомножителей пзв-ия x_1x_2, н-р, x_1 – точное число, то $\delta(x_1) = 0$. Тогда в силу (20) имеем $\delta(x_1x_2) = \delta(x_2)$. Отсюда и в силу (21) получим

$$\Delta(x_1x_2) = x_1x_2\delta(x_1x_2) = x_1x_2\delta(x_2) = x_1x_2\frac{\Delta(x_2)}{x_2} = x_1\Delta(x_2). \qquad (21а)$$

п9. Опр-ть пзв-ие x прж-ых чисел $x_1 = 12{,}2$ и $x_2 = 73{,}56$ и число верных знаков в нем, если все цифры верные.

Р. Имеем $\Delta(x_1) = 0{,}05$, $\Delta(x_2) = 0{,}005$. Отсюда $\delta(x) = 0{,}05/12{,}2 + 0{,}005/73{,}56 =$ $= 0{,}0042$. Т.к. пзв-ие $x = 12{,}2\cdot 73{,}56 = 897{,}432$, то $\Delta(x) = x\delta(x) = 897\cdot 0{,}004 = 3{,}6 < 4$. Сд-но, x имеет лишь два верных знака, т.е. $x = 897 \pm 4 = 897[4]$.

Очевидно, что $\underline{\delta} < \delta(x) < \overline{\delta}$, где $\underline{\delta} = \min[\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)]$. Поэтому при нахождении пзв-ия прж-ых чисел с различным кол-ом верных цифр надо пользоваться правилом (подсчета цифр):

1) округлять их так, чтобы каждое из них содержало на одну знщ. цифру больше, чем число верных цифр в нм-е точном из сомножителей;

2) в результате умн-ия сохранить столько знщ-х цифр, сколько их имеется в нм-е точном из сомножителей.

п10. Найти пзв-ие прж. чисел $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 72{,}397$ (с верными знаками).

Р. Применяя правило подсчета цифр, после округления имеем $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 72{,}40$. Отсюда $x = x_1x_2 = 2{,}5\cdot 72{,}4 = 181 = 1{,}8\cdot 10^2$.

Используя т1, можно подсчитать число верных знаков пзв-ия. Пусть имеется пзв-ие n сомножителей ($n < 10$) $x = x_1 \ldots x_n$, каждый из к-ых имеет m ($m > 1$) верных цифр. И пусть $a_1, \ldots, a_n$ – первые знщ. цифры. Тогда по $\delta(x_i) =$ $= \dfrac{1}{2a_i}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{m-1}$ (см. 15) и учитывая, что $\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} < 10$ (т.к. $n \le 10$) получим

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{m-1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{m-2}. \qquad (22)$$

Т.о. в самом неблагоприятном случае пзв-ие x имеет $m - 2$ верных знаков (m – число верных знаков в нм-е точном из сомножителей).

п11. Опр-ть отс. погр-ть и кол. верных цифр пзв-ия $x = 93{,}87\cdot 9{,}236$.

Р. По (22) имеем $\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{4-1} = \frac{1}{9}10^{-3} < \frac{1}{2}10^{-3}$, значит, пзв-ие x имеет по меньшей мере три верные цифры: $x = 93{,}87\cdot 9{,}236 = 866{,}98332 =$ $= 866{,}0$.

сл6. Если $n \le 100$, то фм-а (22) приобретает вид

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{m-3}. \tag{23}$$

сл7. Для частного случая т3 также верна, т.е. если $x = \frac{x_1}{x_2}$, то

$$\delta(x) = \delta(x_1) + \delta(x_2) \tag{24a}$$

и по (22)

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{m-1}. \tag{24}$$

сл8. Если $U = x^m$ $\left[u = \sqrt[m]{x} = x^{1/m}\right]$, то

$$\delta(u) = m\delta(x)\ [\delta(u) = \frac{1}{m}\delta(x)], \tag{25}$$

где m – нтр. число.

4°. Погрешность функции и обратная задача. Рас-им основную задачу теории погр-ей: по известным погр-ям аргументов найти погр-ти фк-и.

Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ – диф. фк-я, $|\Delta x_i|$ – истинная абс. погр-ти аргументов $\{x_i\}$ фк-и. Тогда $|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)|$.

Обычно на практике $|\Delta x_i|$ – малые вел., поэтому их пзв-ми, кв-ми и высшими ст-ми можно пренебречь, т.е. взять $|\Delta u| = |df(x_1, \ldots, x_n)| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \le$ $\le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\Delta x_i\right|$. Итак,

$$|\Delta u| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\Delta x_i\right|. \tag{26}$$

Отсюда получим абс. погр-ть фк-и

$$\Delta(u) = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta\left(x_i\right). \tag{27}$$

Разделив (26) на u, получим истинную отс. погр-ть фк-и

$$\delta \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u}\right||\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right||\Delta x_i|. \tag{28}$$

Сд-но, за отс-ю погр-ть фк-и можно взять

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right|\Delta\left(x_i\right). \qquad (29)$$

п12. Найти абс-ю и отс-ю погр-ти объема шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, если $R =$ $= 1{,}8[0{,}05]$ см, а $\pi = 3{,}14[0{,}016]$.

Р. Находим $\dfrac{\partial V}{\partial \pi} = \dfrac{4}{3}R^3 = 7{,}78$; $\dfrac{\partial V}{\partial R} = 4\pi R^2 = 40{,}7$. Используя (27) и (29), получим $\Delta(V) = \left|\dfrac{\partial V}{\partial \pi}\right||\Delta\pi| + \left|\dfrac{\partial V}{\partial R}\right||\Delta R| = 7{,}28\cdot 0{,}016 + 40{,}7\cdot 0{,}05 = 2{,}017 \approx 2{,}1$. Поэтому $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \approx 24{,}4 \pm 2{,}1$ см$^3 = 24{,}4[2{,}1]$. Отсюда $\delta(V) = \dfrac{\Delta(V)}{V} = \dfrac{2{,}017}{24{,}4} =$ $= 0{,}0827 \approx 8\%$.

Рас-им обратную задачу: по заданной абс. погр-ти фк-и найти абс. погр. ее аргументов. В общем случае задача неопр-ая. Поэтому предполагают (принцип равных влияний), что: а) все частные диф-лы $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$ одинаково влияют на абс-ю погр-ть $\Delta(u)$ фк-и $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|\Delta\left(x_i\right) = \ldots =$ $= \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|\Delta\left(x_n\right) = \dfrac{\Delta(u)}{n}$. Тогда

$$\Delta(x_i) = \frac{\Delta(u)}{n\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|},\ (i = \overline{1,n}). \qquad (30а)$$

п13. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ радиусом $R \approx 2$ м и высотой $H \approx 3$ м выч-н с точностью 0,1 м. Найти абс. погр-ти R и H.

Р. Полагая $R = 2$, $H = 3$, $n = 3$, из (30а) находим

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12 \Rightarrow \Delta_\pi = \frac{\Delta_V}{n\dfrac{\partial V}{\partial \pi}} = \frac{0{,}1}{3\cdot 12} < 0{,}003,$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH = 37{,}7 \Rightarrow \Delta_R = \frac{0{,}1}{3\cdot 37{,}7} < 0{,}001,$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12{,}6 \Rightarrow \Delta_H = \frac{0{,}1}{3\cdot 12{,}6} < 0{,}003;$$

б) иногда полагают, что $\Delta(x_1) = \ldots = \Delta(x_n)$. Тогда в силу (27) получим

$$\Delta(x_i) = \frac{\Delta(u)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|},\ i = \overline{1,n}. \qquad (30б)$$

в) можно предполагать, что точность измерения всех аргументов x_i одинакова, т.е. $\delta(x_1) = \ldots = \delta(x_n)$ или $\frac{\Delta(x_1)}{|x_1|} = \ldots = \frac{\Delta(x_n)}{|x_n|} = K$, т.е. $\Delta(x_i) = K|x_i|$, подставляя их в (27), получим $\Delta(u) = K\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$ или $K = \frac{\Delta(u)}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$. Откуда окончательно получим

$$\Delta(x_i) = \frac{|x_i|\Delta(u)}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|},\ i = \overline{1,n}. \tag{30}$$

п14. Сторона пуг-ка a = 5 м и b = 200 м. Какова допустимая абс. погр-ть при одинаковом изменении этих сторон, при к-ой пщ. S пуг-ка имеет абс-ю погр. $\Delta(S) = 1$ м^2.

Р. Т.к. $S = ab$, то $\Delta S = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = b\Delta a + a\Delta b$ и $\Delta(S) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$. По условию $\Delta a = \Delta b$, поэтому $\Delta(a) = \frac{\Delta(S)}{b+a} = \frac{1}{205} = 0{,}005$ м = 5 мм.

Сущ-ет и вторая обратная задача: при заданной отс-ой погр-ти фк-и найти абс-ые и отс-ые погр-ти аргументов.

Пусть задана $\delta(u)$. Тогда взяв $\Delta(u) = |u|\delta(u)$ вместо (30а), (30б), (30), получим

$$\Delta(x_i) = \frac{|u|\delta(u)}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}\ \text{а},\quad \Delta(x_i) = \frac{|u|\delta(u)}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}\ \text{б},\quad \Delta(x_i) = \frac{|x_i||u|\delta(u)}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}\ \text{в}. \tag{31}$$

Отсюда легко получить отс-ые погр-ти аргументов ($i = \overline{1,n}$).

$$\delta(x_i) = \frac{\Delta(x_i)}{|x_i|} = \frac{|u|\delta(u)}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||x_i|}\ \text{а},\quad \delta(x_i) = \frac{|u|\delta(u)}{|x_i|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}\ \text{б},\quad \delta(x_i) = \frac{|u|\delta(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}\ \text{в}. \tag{32}$$

5°. Нахождение абсолютной погрешности с помощью способа границ. Заметим, что фм-а (27) прж., т.к. она не учитывает пзв-ие ошибок. Иногда требуется иметь точные границы для искомого зн-ия фк-и, если известны границы изменения ее аргументов. В таких случаях абс-ая погр-ть фк-и опр-ся с помощью границ, дающих результат по точности не хуже (27).

Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ – непр-но диф. фк-ия, монотонная по каждому аргументу x_i. Для нахождения абс. погр-ти фк-и u дт-но предположить, что частные производные $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ сохраняют пст-ый знак в расв-ой обл-ти $F = \{x_i$: $\alpha_i^0 \le x_i \le \alpha_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

Положим, что $\tilde{x}_i = \alpha_i^0$, $\overline{x}_i = \alpha_i$, если фк-ия f – взр. по x_i и $\tilde{x}_i = \alpha_i$, $\overline{x}_i = \alpha_i^0$, если f – уб-ая по x_i. Тогда

$$\underline{u} \le u \le \overline{u}\,, \tag{33}$$

где $\underline{u} = f\left(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n\right)$, $\overline{u} = f\left(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n\right)$.

Отметим, что пер-ые $\{\tilde{x}_i\}$ и результат действий f над ними следует округлять в сторону уменьшения вел-ы $\underline{u}$, а $\{\overline{x}_i\}$ и результат f над ними округлять в сторону увеличения вел-ы $\overline{u}$. При этих обстоятельствах будет гарантировано строгое выполнение нерав-ва (33). В част., если фк. f монотонно взр-ая по каждому аргументу x_i, то имеем

$$f\left(\alpha_1^0,...,\alpha_n^0\right) < u < f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{33а}$$

п15. Алюминиевый цилиндр с радиусом основания $R = 1 \pm 0{,}005$ см и высотой $h = 11 \pm 0{,}02$ см весит $p = 93{,}4 \pm 0{,}001$ г. Опр-ть удельный вес γ алюминия и оценить его абс-ю погр-ть.

Р. Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$, отсюда $\gamma = \dfrac{p}{V} = \dfrac{p}{\pi R^2 h}$. Откуда следует, что в обл. $p > 0$, $R > 0$, $h > 0$ фк-ия γ взр. по p и уб-ая по R и h. Согласно условию задачи имеем: $R \in\ ]0{,}995;\ 1{,}005[$, $h \in\ ]10{,}98;\ 11{,}02[$, $p \in\ ]93{,}399;\ 93{,}401[$. Кроме того, $\pi \in\ ]3{,}14159;\ 3{,}1416[$. Тогда $\underline{\gamma} = \dfrac{93{,}399}{3{,}1416 \cdot 1{,}005^2 \cdot 11{,}02} =$ $= 2{,}671$ г/см^3, $\overline{\gamma} = \dfrac{93{,}401}{3{,}14159 \cdot 0{,}995^2 \cdot 10{,}98} = 2{,}722$ г/см^3. Взяв ср. ариф-ое, получим $\gamma = 2{,}697 \pm 0{,}025$.

ЛЕКЦИЯ 28

9.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА И НЬЮТОНА

1º. Постановка задачи. Схема Горнера. Конечные и разделенные разности. Пусть дана табл.

x	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_1	…	y_i	…	y_n

(а), содержащая прж-ые зн-ия x и y. Во многих случаях по данным нбл-ия (x_i, y_i) табл. (а) невозможно установить вид фк-и $y = f(x)$. Тогда обычно выбирают $f(x)$ в виде полинома $y = P_n(x)$, как на рис. 1. Основанием к замене искомой фк-и $f(x)$ полиномом служит д-ная Вейерштрассом

т1. Если $f(x)$ непр-на в промежутке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ сущ-ет ств-щий многочлен (мчл.) $P_n(x)$, такой, что для всех x из $[a, b]$ выполняется условие

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Геом-ки условие (1) означает, что график (грф.) мчл. $P_n(x)$ не выходит из пределов полосы (рис. 2) $f(x) - \varepsilon < P_n(x) < f(x) + \varepsilon$. При этом говорят, что мчл. $P_n(x)$ в промежутке $[a, b]$ равномерно прж-ет фк-ю $f(x)$ с точностью ε.

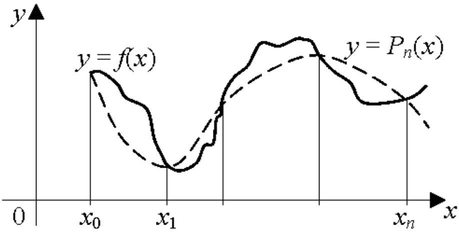


Рис. 1

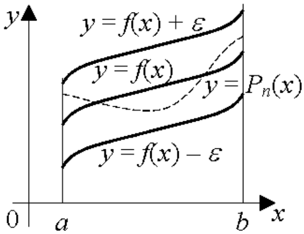


Рис. 2

Способ построения мчл-ов, равномерно прж-щих данную непр. фк. $f(x)$, был предложен в част. С.Н. Бернштейном. Любой промежуток $[a, b]$ путем лин-го прб-ия $x = a + t(b - a)$ можно свести к промежутку $[0, 1]$. Если $f(x)$ непр-на в $[0, 1]$, то можно подобрать по любому $\varepsilon > 0$ ств. число n, такое, что полином Бернштейна $B_n(x)$ будет уд-ть условию равномерного прж-ия (1). Полином $B_n(x)$ имеет вид:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \ . \qquad (2)$$

п1. Найти мчл. $B_2(x)$ для фк. $y = \sin \pi x$ в промежутке $[0, 1]$.

Р. По (2) получим $B_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \sin \frac{k\pi}{2} C_2^k x^k (1-x)^{2-k} = 2x(1 - x)$.

На практике часто приходится выч-ть мчл. $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ $\ldots + a_n x^n$ в точке $x = a$. Для этого приведем схему Горнера, записав мчл. в виде:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\ldots)). \qquad (3)$$

По фм-е (3), выч-ие зн-ия $P_n(a)$ сводится к посл. нахождению сд-их вел-н:

$$\left.\begin{aligned} &b_n = a_n,\\ &b_{n-1} = a_{n-1} + ab_n,\\ &b_{n-2} = a_{n-2} + ab_{n-1},\\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ &b_1 = a_1 + ab_2,\\ &b_0 = a_0 + ab_1 = P_n(a). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Способ нахождения зн-ия мчл-на по фм-ам (4) на основе (3) наз. схемой Горнера, к-ая реализуется с помощью n умн-й и n сж-й, т.е. за $2n$ ариф-их действий. Схема Горнера удобна также для реализации на ЭВМ в силу цикличности выч-й и нх-сти сохранить кроме коэф-ов мчл-на только одной промежуточной вел-ы b_i или ab_i при текущем $i = n, n-1, \ldots, 0$.

При ручном выч-и зн-ия мчл-а по схеме Горнера используют табл-у

$$\begin{array}{r|cccccc|l} + & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & & a \\ & & ab_n & ab_{n-1} & \ldots & ab_1 & & \\ \hline & b_n = a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 = P_n(a) & & \end{array}$$

п2. Выч-ть при $x = -1{,}5$ зн-ие мчл-а $P_5(x) = 1 - 4x + 3x^2 - x^3 + 2x^4 - x^5$.

Р.

$$\begin{array}{rcccccc|l} + & -1 & 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1{,}5 \\ & & 1{,}5 & -5{,}25 & 9{,}375 & -18{,}5625 & 33{,}84375 & \\ \hline & -1 & 3{,}5 & -6{,}25 & 12{,}375 & -22{,}5625 & 3484375 = P_5(-1{,}5) & \end{array}$$

Наряду с мчл-ом $P_n(x)$ на практике часто рас-ют мчл. Тейлора (см. [42]). Пусть задана фк. $f(x) \in C_{n+1}[a, b]$. Мчл-ом Тейлора n-й степени фк-и f в точке $x_0 \in [a, b]$ наз. мчл-н вида

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i\ . \qquad (5)$$

При замене фк-и f мчл-ом Тейлора возникает остаточный член в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (5а)$$

где $x \in [a, b]$, ξ – нек. точка, лежащая между x и x_0 при $x \neq x_0$.

Из (5) и (5а) имеем, что $f(x) - Q_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, к-ая огр-на на отрезке $[a, b]$ в силу непр-сти $f^{(n+1)}(x_0)$, т.е.

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| < \infty. \qquad (5б)$$

Тогда

$$|f(x) - Q_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \qquad (5в)$$

Отсюда получим мкс-ю погр-ть на всем отрезке $[a, b]$:

$$\max |f(x) - Q_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} l^{n+1}, \qquad (5г)$$

где $l = \max\{x_0 - a, b - x_0\}$.

При $x_0 = 0$ вместо фм-ы (5а) получим

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (5д)$$

где $x \in [a, b]$, ξ – нек. точка, лежащая между x и 0 при $x \neq 0$.

Погр-ти аппроксимации фк-и мчл-ом Тейлора быстро убывают при $x \to x_0$ и резко взр-ют у конца отрезка $[a, b]$, к-ый нб-е удален от точки x_0.

Мчл-ы Тейлора широко используются на практике для аппроксимации фк-й, у к-ых производные выч-ся дт-но просто, н-р: $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1 + x)$ и т.д.

п3. Аппроксимировать фк-ю $f(x) = e^x$ мчл-ом Тейлора на отрезке [0, 1] с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Р. Возьмем $x_0 = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$, чтобы мнмз-ть l, входящую в (5г). Тогда $f^{(i)}(x) = e^x$, $f^{(i)}(x_0) = e^{\frac{1}{2}}$, $M_{n+1} = e$, $l = 1/2$. Отсюда $Q_n(x) = e^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^i$. По (5г) имеем $\max\limits_{[0,1]} |e^x - Q_n(x)| \le R_n = \dfrac{e}{(n+1)!\,2^{n+1}}$. Находим $R_2 = 5{,}7\cdot 10^{-2}$, $R_3 =$ $= 7{,}1\cdot 10^{-3}$, $R_4 = 7{,}1\cdot 10^{-4}$, $R_5 = 5{,}9\cdot 10^{-5}$. Т.о., следует взять $n = 5$.

Для получения мчл-ов др. способами рас-им сначала вспомогательные материалы.

Конечные разности яв-ся рабочим аппаратом при выч-и фк-й, заданных табл-ей в равноотстоящих точках. Пусть $x_i = x_0 + ih$, где i – целое, $0 < \Delta x = h$ – приращение аргумента (шаг), $f_i = f(x_i)$. Вел-а

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i \tag{6}$$

наз. конечной разностью первого порядка фк-и f в точке x_i, а

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \tag{6а}$$

есть конечная разность второго порядка в точке x_i. Анч-но

$$\Delta^2 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

и т.д. Вообще,

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i, \tag{6б}$$

где $n \ge 1$, $\Delta^0 f_i = f_i$.

п4. Построить конечные разности фк-и $P(x) = x^3$ при $\Delta x = h = 1$.

Р. $\Delta P(x) = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$, $\Delta^2 P(x) = [3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1] -$ $- (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$, $\Delta^3 P(x) = [6(x + 1) + 6] - (6x + 6)$, $\Delta^4 P(x) = 0$ при $n > 3$.

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме горизонтальной (табл. 1) или диагональной (табл. 2) таблицы разностей.

п5. Составить горизонтальную табл. разностей фк-и $y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

Р. См. табл. 3.

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$

Таблица 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	– 1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12

Производные фк-и можно выч-ть через конечные разности на основе сд-ей

л1. Пусть фк. $f(x)$ имеет непр. производную $f''(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Тогда справедлива фм-а (вместо точки x_i взяли x, а h заменили на Δx):

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) \ (0 < \theta < 1), \tag{7}$$

к-ая док-ся методом мт-ой индукции. Так при $n = 1$ получаем теорему Лагранжа о конечном приращении фк-и.

Из (7) имеем: $f^{(n)}(x + \theta n\Delta x) = \dfrac{f^n(x)}{(\Delta x)^n}$. Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \tag{7а}$$

Сд-но, при малых Δx справедлива прж. фм-а

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \tag{7б}$$

Кроме того, фм-у (7б) можно использовать и при оценке погр-ти аппроксимации и интерполяции. Н-р, для фм-ы (5б) можно взять $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| \approx$ $\approx \dfrac{\Delta^{n+1} f(x)}{(\Delta x)^{n+1}}$.

Рас-им **разделенные разности**. Пусть теперь $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ – произвольные точки (узлы) оси x, причем $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Зн-ия $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_i), \ldots$ в узлах наз-ся разделенными разностями нулевого порядка. Число

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{8}$$

наз. разделенной разностью первого порядка фк-и f. Очевидно, что

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \tag{8а}$$

т.е. разделенная разность первого порядка яв-ся симметрической фк-ей аргументов x_0 и x_1. Анч-но получим

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Вообще, разность n-го порядка

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{x_n - x_0}. \tag{8б}$$

Разделенные разности удобно располагать в виде табл. 4.

Таблица 4

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3, x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

п5. Составить разделенные разности, заданные таблично: $\{x_i\}$, $\{f(x_i)\}$ (табл. 5).

Таблица 5

x	$f(x_i)$				
0 0,2 0,3 0,4 0,7 0,9	132,651 148,877 157,464 166,375 195,112 216,000	81,13 85,87 89,11 95,79 104,44	15,8 16,2 16,7 13,3	1 1 1	0 0

Р. Находим $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{148{,}877 - 132{,}651}{0{,}2 - 0} = 81{,}13$;

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{157{,}404 - 148{,}877}{0{,}3 - 0{,}2} = 85{,}87;$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{85{,}87 - 81{,}13}{0{,}3 - 0} = 15{,}8 \text{ и т.д.}$$

Так заполняем табл. 5.

Разделенные разности можно врж-ть через зн-ия узловых точек на основе сд-ей

л2. Разделенная разность n-го порядка врж-ся через узловые зн-ия фк-и по фм-е

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \tag{9}$$

т.е. яв-ся симметрической фк-ей своих аргументов.

Д. При $n = 1$ утв-ие вытекает из (8а). При $n = 2$ в ств-и с (8б) получим

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \tag{9а}$$

По мт-ой индукции док-ся для произвольного n.

Итак, согласно л2 зн-ие разделенной разности n-го порядка не зв-т от нумерации $n + 1$ узлов, по к-ым она строится. Всего имеется $(n + 1)!$ различных вариантов их нумерации целыми числами от 0 до n.

Связь между разделенной и конечной разностями устанавливается по

л3. Если $x_i = x_0 + ih$, т.е. узлы расположены пст-ым шагом $h > 0$, то

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}. \tag{10}$$

Д. Для $n = 1$ рав-во (10) вытекает из (6), (8). При нахождении каждой сд-ей по порядку конечной разности согласно (6б) происходит просто вычитание предыдущих разностей, а при выч-и сд-ей разделенной разности в силу фм-ы (8б) дпнт-но к вычитанию производится деление на вел-у $x_n - x_0 = nh$. Отсюда и возникает вел-а $n!h^n$ в знаменателе правой части рав-ва (10) ■

л4. Пусть $[\alpha, \beta]$ – мнм-ый отрезок, содержащий узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n, f \in C_n$ $[\alpha, \beta]$. Тогда сущ-ет такая точка $\xi \in]\alpha, \beta[$, что

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \tag{11}$$

Для узлов, расположенных с пст. шагом, рав-во (11) следует из л1, л3. Д-во леммы для общего случая опустим. Из (1) и (11) получим

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f_0}{h^n}. \tag{11а}$$

2°. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Пусть дана табл.

$$\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n \\ y_0, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n \end{matrix} \tag{12}$$

Требуется найти мчл. $L_n(x)$, принимающий в точках $\{x_i\}$ зн-ия $\{y_i\}$, т.е.

$$L_n(x_i) = y_i = f(x_i) = f_i \ (i = \overline{0, n}). \tag{13}$$

Геом. постановка вопроса (рис. 1) такова: требуется найти мчл-н, график к-го проходит через точки, крд-ы к-ых заданы табл-й (12).

Запишем искомый мчл. (полином) в виде

$$\begin{gathered} L_n(x) = C_0(x - x_1)\ldots(x - x_n) + C_1(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \ldots \\ \ldots + C_i(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) + \ldots + C_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}), \end{gathered} \tag{13а}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ – неопр. коэф-ты. Полагая в (13а) посл-но $x = x_i$ ($i = \overline{0, n}$), получим согласно (13) систему равенств (рав.)

$$\begin{gathered} y_0 = C_0(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n), \\ y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n), \ldots, \\ y_i = C_i(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n), \ldots, \\ y_n = C_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}). \end{gathered} \tag{13б}$$

Из (13б) найдем все

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \ i = \overline{0, n}. \tag{13в}$$

Если обз-им через $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_i)\ldots(x - x_n) \Rightarrow$

$$\begin{gathered} w'(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n) + (x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \ldots \\ \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}), \end{gathered}$$

отсюда $w'(x_i) = (x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$, то $C_i = \dfrac{y_i}{w'(x_i)}$.

Тогда, подставляя в (13а) зн-ия C_i из (13в), получим

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)} y_i \tag{14}$$

Стн. (14) наз. интерполяционным (инпн.) мчл-ом Лагранжа.

Выясним вопрос сущв-ия и единственности (еднт.) инпн-го мчл-а.

т2. Сущ-ет единственный (една.) инпн. мчл-н n-й ст-и, уд-й условиям (13).

Д. Сущв-ие инпн-го мчл-а можно установить непосредственно, выписав его. При $n = 1$ имеем

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1. \tag{а}$$

При $n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x)}f_2 \qquad (б)$$

и для общего случая при любом нтр-ом n

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}(x) f_i , \qquad (в)$$

где

$$P_{ni}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)},\ i = \overline{0,n} . \qquad (г)$$

Дсв-но, врж-ие (а) представляет собой лин. фк-ю, т.е. мчл-н первой степени, причем $L_1(x_0) = f_0$, $L_1(x_1) = f_1$. Т.о., требование (13) выполняется. Анч-но, фм-а (б) задает нек-ый мчл. $L_2(x)$ второй ст-и, уд-й при $n = 2$ условиям (13). Фм-а (г) при произвольном нтр. n врж-ет алг-й мчл-н ст-и n. Сд-но, фк-ия (в) тоже яв-ся алг. мчл-ми ст-и n. Причем, поскольку $P_{ni}(x_i) = 1$, а $P_{ni}(x_j) = 0$ при $i \neq j$, $0 \le j \le n$, требования (13) выполнены.

Д-ем едн-ть инпн-го мчл-а. Допустим, кроме инпн-го мчл. (в) имеется еще алг. мчл-н $\widetilde{L}_n(x)$ n-й ст-и, уд-й условиям

$$\widetilde{L}_n(x) = f_i,\ i = \overline{0,n} . \qquad (д)$$

Тогда, согласно (13), (д),

$$\widetilde{L}_n(x_i) - L_i(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n} . \qquad (е)$$

Если $\widetilde{L}_n(x) - L_i(x) \neq 0$, то эта разность – алг. мчл-н не выше n-й степени, к-ый в силу основной теоремы алгебры имеет не более n корней, что противоречит рав-ам (е), число к-ых равно $n + 1$. Сд-но, $\overline{L}_n(x) \equiv L_n(x)$ ■

п6. Построить инпн-й полином Лагранжа для фк., заданных таблицей

x_i	1	2	4	5
y_i	2	1	2	3

.

Р. Здесь $n = 3$ и в силу (13в) получим

$$L_3(x) = 2\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(-1)(-3)(-4)} + 1\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{1\cdot(-2)(-3)} + 2\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{3\cdot 3\cdot(-1)} +$$

$$+ 3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{4\cdot 3\cdot 1} = -\frac{1}{6}(x^3 - 11x^2 + 38x - 40) + \frac{1}{6}(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) -$$

$$- \frac{1}{3}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) + \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{12}x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{14}{3} .$$

Проверим правильность выч-ия: $L_3(1) = 2$; $L_3(2) = 1$; $L_3(4) = 2$; $L_3(5) = 3$.

п7. Опр-ть плотность 26%-го раствора фосфорной кислоты H_3PO_4 при 20ºС, пользуясь сд-ми данными:

x_i (%H_3PO_4):	14	20	35	50
y_i (плотности):	1,0764	1,1134	1,2160	1,3350

Р. Используя (14) при $n = 3$, выч-им

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{w(26)}{(26-x_i)w'(x_i)}=\frac{6(-9)(-24)}{-6(-21)(-36)}+\frac{12(-9)(-24)}{6(-15)(-30)}+\frac{12\cdot 6\cdot(-24)}{21\cdot 15\cdot(-15)}+$$

$$+\frac{12\cdot 6\cdot(-9)}{36\cdot 30\cdot 15}=-\frac{2}{7}+\frac{24}{25}+\frac{64}{175}-\frac{1}{25}=1.$$

Тогда

$$L_3(26)=y=\frac{2}{7}0{,}0764+\frac{24}{25}0{,}1134+\frac{64}{175}0{,}2160-\frac{1}{25}0{,}3350=1{,}1528.$$

Дсв-ое зн-ие плотности 26%-го H_3PO_4 составляет 1,1529.

В том случае, когда инпн. полином строится для известной фк. $f(x)$, естественно поставить вопрос об оценке погр-ти в инпн. фм-е Лагранжа. Рас-им разность

$$f(x)-L_n(x)=R_n(x).$$

Вел-у $R_n(x)$ наз-ют остаточным членом интерполяции (инп.).

т3. Если фк. $f(x)$ в промежутке имеет непр. производные до $(n+1)$-го порядка, то остаточный член инп-ции $R_n(x)$ можно представить в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x). \tag{14а}$$

Д-во см. в [60]. Из стн. (9) получим оценку

$$|R_n(x)|\le M_{n+1}(a,b)\frac{|w_{n+1}(x)|}{(n+1)!}, \tag{14б}$$

где $M_{n+1}(a,b)=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$, $\xi\in[\alpha,\beta]$ и зв-т от x.

п8. Построить инпн. полином Лагранжа для фк. $f(x)=\ln x$ с узлами $x=2$, 3, 4 и ств. зн-ми фк-ми $f(x)=0{,}6931$; $1{,}0986$; $1{,}3863$. Оценить погр-ть инпн-го полинома при $x=2{,}5$.

Р. Здесь $n=2$ и в силу (14) имеем

$$L_2(x)=0{,}6931\frac{(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)}+1{,}0986\frac{(x-2)(x-4)}{1\cdot(-1)}+1{,}3863\frac{(x-2)(x-3)}{2\cdot 1}=$$

$$=-0{,}4813+0{,}7000x-0{,}0589x^2\Rightarrow L_2(2{,}5)=0{,}9106.$$

Оценим погр-ть: $|w_1(2{,}5)|=0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5=0{,}375$; $f(x)=\ln x$

$$\Rightarrow f'(x)=1/x,\ f''(x)=-1/x^2,\ f'''(x)=2/x^3,$$

тогда

$$M_3(2,4)=\max\frac{2}{x^3}=\frac{1}{4},$$

и в силу (14б) получим

$$|R_3(2{,}5)|\le\frac{1}{4}\,\frac{0{,}375}{3!}=0{,}0156.$$

На самом деле погр-ть меньше $\ln 2{,}5-L_2(2{,}5)=0{,}9163-0{,}9106=0{,}0057$.

Рас-им частный случай, когда узлы инп. – равноотстоящие, так что $x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=h$.

В этом случае для упрощения полезно сделать замену $x=ht+x_0$, тогда $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, …, $t_n=n$, $x-x_i=h(t+i)$, $w(x)=h^{n+1}w^*(t)$,

$$w^*(t) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n),\ w'(x_i) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!h^n$$

и фм. Лагранжа (14) запишется в виде

$$L_n(x) = L_n(ht + x_0) = t(t-1)\ldots(t-n)\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{(t-i)\,i!\,(n-i)!}. \tag{15}$$

Если потребуется для улучшения прж-ия повысить на ед-у число узлов (а значит, а ст-нь полинома) прибавлением нового узла, полином Лагранжа придется перевычислить заново. В этом отношении удобно пользоваться инпн. полиномом Ньютона, к-ый связан с использованием разделенных и конечных разностей различных порядков.

3°. Интерполяционный многочлен Ньютона. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – произвольные попарно несовпадающие узлы, в к-ых известные зн-ия f.

л5. Алг-й мчл-н n-й ст-и

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \ldots \\ \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{16}$$

яв-ся инпн-ым мчл-ом, т.е.

$$L_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}\,. \tag{16а}$$

Д. Т.к. разделенные разности $f(x_0), f(x_0, x_1), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ яв-ся вполне опр. числами (см. 1°), то фк-ия (16) дсв-но есть алг-й мчл. n-й ст-и.

Д-ем рав-во (16) при $n = 2$. Имеем

$$L_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2). \tag{16б}$$

Очевидно, $L_2(x_0) = f(x_0)$. Далее, согласно (16б), (8), получим

$$L_2(x_1) = f(x_0) + (x_1-x_0)f(x_0, x_1) = f(x_0) + (x_1-x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$$

Наконец, учитывая (16б), (80, (9а), имеем

$$L_2(x_2) = f(x_0) + (x_2-x_0)f(x_0, x_1) + (x_2-x_0)(x_2-x_1)f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0) +$$

$$+\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)) + \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + f(x_2) = f(x_2).$$

При $n = 1$ рав-ва (16а) устанавливаются анч-но, а для произвольного нтр-го $n > 2$ они док-ся по мт-ой индукции ■

Мчл-н (16) наз. инпн-ым мчл-ом Ньютона для неравных промежутков.

зм1. Согласно т2 мчл. Ньютона тожд-но совпадает с инпн. мчл-ом Лагранжа (14), т.е. $\widetilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$, имеем лишь различные записи инпн-го мчл-а. Поэтому остаточный член инпн-го мчл. Ньютона тот же, что и у инпн-го мчл. Лагранжа. Более того, если эти полиномы построены для одной и той же фк-и и одной и той же системе узлов, то в силу т2 они должны быть тожд-но равны.

зм2. Инпн-ый мчл. Ньютона (16) врж-ся не через зн-ия f, а через ее разделенные разности. При изменении ст-и n у инпн-го мчл-а Ньютона требуется только добавить или отбросить ств-е число стандартных слагаемых.

п9. Найти зн-ие фк-и $y = f(x)$, заданной таблично: $\{x_i\}$, $\{f(x_i)\}$ (табл. 6), при $x = 13{,}5$.

Таблица 6

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
11	1342	434		
13	2210	548	38	1
14	2758	773	45	1
18	5850	1028	51	1
19	6878	1202	58	
21	9282			

Р. Строим табл-у разделенных разностей (см. табл. 6). Т.к. 13 < 13,5 < 14, то строим инпн. фм-у Ньютона по второй нисходящей строке разностей. Отсюда

$f(x) \approx 2210 + (x-13)548 + (x-13)(x-14)45 + (x-13)(x-14)(x-18)$,

тогда $f(13{,}5) = 2210 + 0{,}5 \cdot 548 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 45 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}5 = 2473{,}875$.

В кач-ве погр-ти, с учетом (11), можно взять

$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

где ξ – нек-ая точка расв-го промежутка.

Теперь рас-им случай равноотстоящих узлов. Пусть $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$, $i = \overline{0, n}$, $f_i = f(x_i)$. Тогда, учитывая (10) и вводя безразмерную пер.,

$$t = \frac{x - x_0}{h} \quad (x = x_0 + th), \tag{16в}$$

откуда узлу x_i будет ств-ть

$$t = t_i = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{x_0 + ih - x_0}{h} = i \tag{16г}$$

и, кроме того, будут выполняться стн-ия

$$x - x_j = x_0 + th - x_0 - jh = h(i - j). \tag{16д}$$

Вместо (16) получим:

$$f(x) \approx L_n(x) = L_n(x_0 + th) = f_0 + t\frac{\Delta f_0}{1!} + \\ + t(t-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \ldots + t(t-1)\ldots(t-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}. \tag{17}$$

Стн. (17) наз. мчл-ом Ньютона для интерполирования (инп.) вперед или первым инпн. мчл-ом Ньютона.

Из (17) имеем

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)}{i!}\Delta^i y_0 = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{17а}$$

где $\xi \in [a, b]$. На практике пользуются более удобной прж. фм-ой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n-1} y_0}{(n+1)!}t(t-1)\ldots(t-n). \tag{17б}$$

п10. Построить инпн. полином Ньютона вперед для фк. $f(x) = \ln x$ с узлами $x = 2, 3, 4$.

Р. Находим $y = \{\ln 2, \ln 3, \ln 4\} = \{0{,}6331; 1{,}0986; 1{,}3863\}$, тогда

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
2	0,6931	0,4055	– 0,1178
3	1,0986	0,2877	
4	1,3863		

Здесь $n = 2$, $h = 1$, и в силу (17) получим

$$L_2(x) = 0{,}6931 + 0{,}4055(x-2) - \frac{0{,}1178}{2}(x-2)(x-3) =$$
$$= -0{,}4713 + 0{,}7000x - 0{,}0589x^2.$$

Имеет место зм1 (см. п8).

В фм-е (17) коэф-ы опр-ли с помощью левых узлов. Теперь опр-им с помощью правых. Т.к. при выводе фм-ы Ньютона порядок узлов инп-и не существенен, то инпн. фм-у (16) можно писать в виде

$$f(x) \approx L_n(x) = f(x_n) + (x-x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (x-x_n)(x-x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0). \tag{18}$$

С учетом (10) фм-у (18) можно записать в виде:

$$L_n(x) = f(x_n) + (x-x_n)\frac{\Delta y_{n-1}}{h} + (x-x_n)(x-x_{n-1})\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} + \ldots$$
$$\ldots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}. \tag{18а}$$

Положим $x = x_n + th$, тогда $\dfrac{x-x_n}{h} = t$, $\dfrac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{h^2} = t(t+1)$, …, $\dfrac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)}{h^n} = t(t+1)\ldots(t+n-1)$ и фм. (18а) примет вид

$$f(x) \approx L_n(x) = L_n(x_n+th) = f(x_n) + t\Delta y_{n-1} +$$
$$+ \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{19}$$

Стн. (19) наз. мчл-ом Ньютона для инп-ия назад или вторым инпн. мчл-ом Ньютона. Погр-ть опр-ся анч-но (17а) и (17б):

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in [a, b] \tag{19а}$$

или

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n-1} y_0}{(n+1)!}t(t+1)\ldots(t+n). \tag{19б}$$

п11. Найти зн-ие фк-и $y = \sin x$ при $x = 0{,}14$ и $x = 0{,}46$, заданной табл.: $\{x_i\}$, $\{\sin x_i\}$ (табл. 7), пользуясь мчл-ом Ньютона для инп-ия вперед и назад ств-но.

Р. Строим табл-у разностей

Таблица 7

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5	0,09983 0,19867 0,29552 0,38942 0,47943	9884 9685 9390 9001	–199 – 295 – 389	– 96 – 94	2

Используя первый инпн. мчл. Ньютона (17), из табл. 7 получим

$$y \cong 0{,}09983 + t\cdot 0{,}09884 - \frac{t(t-1)}{2!}0{,}00199 -$$

$$- \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}0{,}00096 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}0{,}00002.$$

Отсюда при $t = \dfrac{0{,}14 - 0{,}1}{0{,}1} = 0{,}4$ получаем:

$$\sin 1{,}14 \cong 0{,}09983 + 0{,}4\cdot 0{,}09884 - \frac{0{,}4(-0{,}6)}{2}0{,}00199 -$$

$$- \frac{0{,}4(-0{,}6)(-1{,}6)}{6}0{,}00096 + \frac{0{,}4(-0{,}6)(-1{,}6)(-2{,}6)}{24}0{,}00002 = 0{,}13954.$$

Для нахождения sin 0,46 используем второй инпн. мчл. Ньютона (19):

$$y \cong 0{,}47943 + t\cdot 0{,}09001 - \frac{t(t+1)}{2!}0{,}00389 -$$

$$- \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}0{,}00094 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}0{,}00002.$$

Отсюда при $t = \dfrac{0{,}46 - 0{,}5}{0{,}1} = -\,0{,}4$ находим:

$$\sin 0{,}46 \cong 0{,}47943 + (-\,0{,}4)\cdot 0{,}09001 - \frac{(-\,0{,}4)\cdot 0{,}6}{2}\cdot 0{,}00389 -$$

$$- \frac{(-\,0{,}4)\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6}{6}\cdot 0{,}00094 + \frac{(-\,0{,}4)\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6\cdot 2{,}6}{24}\cdot 0{,}00002 = 0{,}44395.$$

4°. Экстраполяция. Обратная интерполяция. Приведенные выше инпн. фм-ы могут быть использованы не только для отыскания зн-й фк-и, ств-их промежуточным зн-ям аргумента, отсутствующим в табл., но и находящихся вне пределов табл-ы, т.е. для экстраполяции.

Такое применение этих фм-л ничем не отличается от рас-го в предыдущих примерах. Различие же состоит в том, что при инп-и по первой фм-е Ньютона зн-ие t оказывается плж-ым, а при эктп-и – отц-ым. Для второй фм-ы Ньютона, наоборот, при инп-и зн-ие t отц-но, а при эктп-и – плж-но.

Т.о., первая инпн. фм. Ньютона применяется инпн-ия вперед и эктп-ния назад, а вторая – для инпн-ия назад и эктп-ния вперед.

п12. Дана табл. зн-й фк-и $y = \sin x$ с шагом 5° с точностью до шести знаков в пределах от 15° до 55° (табл. 8). Выч-ть зн-ия $\sin x$ для углов от 10° до 15° через 1°.

Р. Составляем конечные разности (табл. 8) и по первой инпн. фм-е Ньютона получаем Δy_0 = 0,083201, $\Delta^2 y_0$ = – 0,002603, $\Delta^3 y_0$ = – 0,00613, $\Delta^4 y_0$ = 0,000023. Составим эктп. табл-у 9. Из $x = x_0 - th$ получим $t = -\dfrac{x - x_0}{h}$. Отсюда при x = 15° имеем $t_1 = -\dfrac{15° - 14°}{5} = -\,0{,}2$; $t_2 = -\dfrac{15° - 13°}{5} = -\,0{,}4$ и т.д., к-ми заполняем 2-й столбец табл. 9. Затем для $\Delta y_0 = 0{,}083201$ находим $t_1\Delta y_0 =$ $= -0{,}2\cdot 83201 = -16640{,}2$ (выч-ия ведем в целых ед-ах шестого знака), $t_2\Delta y_0 =$ $= -0{,}4\cdot 83201 = -33280{,}4$ и т.д., к-ми заполняем столбец (3). Для $\Delta^2 y_0 =$ $= -0{,}002603$ находим $\frac{t_1(t_1-1)}{2}\Delta^2 y_0 = \frac{-0{,}2(-0{,}2-1)}{2}(-2603) = -312{,}4$ и т.д. и заполняем столбец (4). Анч-но заполняем остальные столбцы табл. 9. Столбец (7) получаем как результат $y = y_0 + (3) + (4) + (5) + (6)$.

Таблица 8

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
15°	0,258819				
		83201			
20	0,342020		– 2603		
		80598		– 613	
25	0,422618		– 3216		23
		77382		– 590	
30	0,500000		– 3806		32
		73576		– 558	
35	0,573576		– 4364		29
		69212		– 529	
40	0,642788		– 4893		40
		64319		– 489	
45	0,707107		– 5382		42
		58937		– 447	
50	0,766044		– 5829		
		53108			
55	0,819152				

Таблица 9

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	t	Δy_0	$\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24}\Delta^4 y_0$	$y = y_0 + (3) + (4) + (5) + (6)$
14°	– 0,2	– 16640,2	– 312,4	+ 53,9	+ 1,7	0,241922
13	– 0,4	– 33280,4	– 728,8	+ 137,3	+ 4,4	0,224952
12	– 0,6	– 49920,6	– 1249,4	+ 255,0	+ 8,6	0,207913
11	– 0,8	– 66560,8	– 1874,2	+ 411,9	+ 14,7	0,190811
10	– 1,0	– 83201,0	– 2603,0	+ 613,0	+ 23,0	0,173651

Эктп-ия по второй инпн. фм-е Ньютона производится точно так же. Что касается фм-ы Лагранжа, то для выч-ия зн-ия фк-и при любом x, т.е. и для инп-ия, и для эктп-ия требуется только подставить x в фм-у (14).

Обратная интерполяция состоит в отыскании зн-ия аргумента x, к-му ств-ет данное зн. фк-и, отсутствующее в табл-е. Такая задача наз. задачей обратной инп-и.

Задачу обратной инп-и можно легко обратить, считая зн-ия фк-и, наоборот, зн-ми аргумента, к-ые не яв-ся равноотстоящими. Поэтому здесь применяется инпн. фм-а Лагранжа.

п13. Фк. $y = f(x)$ задана табл-ей (табл. 10). Найти x, ств-ий $y = 2{,}4142$.

Таблица 10

x	0,880	0,881	0,882	0,883
$y = f(x)$	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181

Р. Чтобы не менять обз-й в инпн-ых фм-ах, поменяем местами x и y. Тогда придем к фк-и $y = \varphi(x)$, зн-ия к-ой заданы в табл. 11 и для к-ой требуется найти $\varphi(2{,}4142)$. При этом зн-я x уже не будут равноотстоящими.

Таблица 11

x	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181
$y = \varphi(x)$	0,880	0,881	0,882	0,883

Пользуясь инпн. фм-ой Лагранжа (14) при $x = 2{,}4142$, найдем

$$y = \frac{(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4109-2{,}4133)(2{,}4109-2{,}4157)(2{,}4109-2{,}4181)}0{,}880 +$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4133-2{,}4109)(2{,}4133-2{,}4157)(2{,}4133-2{,}4181)}0{,}881 +$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4157-2{,}4109)(2{,}4157-2{,}4157)(2{,}4157-2{,}4181)}0{,}882 +$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)}{(2{,}4181-2{,}4109)(2{,}4181-2{,}4157)(2{,}4181-2{,}4157)}0{,}883.$$

Выч-им зн-ия дробей и округляя до пятого знака, получим $y = -\,0{,}06348\cdot 0{,}880 + 0{,}69824\cdot 0{,}881 + 0{,}41895\cdot 0{,}882 - 0{,}05371\cdot 0{,}883 = 0{,}88138$. Т.о., $\varphi(2{,}4142) = 0{,}88138$, т.е. зн-ие x, при к-ом фк. $f(x)$, заданная табл. 10, принимается зн-ие 2,4142, есть $x = 0{,}88138$.

5°. Интерполяция сплайнами. Сплайн-функции – это новая быстро развивающаяся обл. теории прж-ия фк-й и численного анализа. Методы сплайн-функций (спл-фк-й) широко применяется в вычт-ой мт-ке и инженерной практике.

По сравнению с классическим аппаратом прж-ия многочленами (мчл.) спл-фк-и обладают важными преимуществами: 1) лучшими аппроксимативными св-ми; 2) удобством реализации построенных на их основе алгоритмов (алт.) на ЭВМ; 3) удобством также в тех случаях, если «на стыках» первая производная двух соседних инпн. мчл-ов может терпеть разрыв.

Термин «сплайн» произошел от анг. spline и означает «рейка» (стержень). Так, если надо произвести график фк-и по известным точкам $y(x_i) = y_i$ ($i = \overline{0, n}$), то обычно пользуются лекалом. Однако, если точки расположены редко, то подобрать лекало трудно. Тогда берут гибкое лекало – металлическую линейку, проходящую через данные точки. Этот способ инп-и можно описать мтч-ки.

Разобьем заданный отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Сплайном $S_m(x)$ наз. фк., опрн-ая на отрезке $[a, b]$ и имеющая на нем непр. производную (m – 1)-го порядка, к-ая на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ совпадает с нек-ым мчл-ом ст-и не выше m; при этом хотя бы на одном из частичных отрезков ст-нь мчл-на точно равна m.

Сплайн, принимающий в узлах x_i те же зн-ия f_i, что и нек-ая фк. $f(x)$, наз. инпн-ым.

На практике широко применяют сплайны третьей ст-и, наз-мые кубическими сплайнами $S_3(x)$. Для построения инпн-го кубического сплайна разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частичных отрезков длины $h = (b - a)/n$. В этом случае кубический сплайн на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$, запишется в сд-ем виде:

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2[2(x-x_i)+h]}{h^3}f_i + \frac{(x-x_i)^2[2(x_{i+1}-x)+h]}{h^3}f_{i+1} + \\ + \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2}m_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2}m_{i+1}, \tag{20}$$

где m_i, m_{i+1} – нек-ые числа. При этом $S_3'(x_i) = m_i$, $S_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}$.

Кубический спл. (20) на каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ непр-ен вместе со своей первой производной всюду на $[a, b]$. Выберем вел-ы m_i так, чтобы была непр-на и вторая производная. Условие непр-сти второй производной в точках x_i ($i = \overline{0, n-1}$) принимает вид

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}),\ i = \overline{0, n-1}. \tag{20а}$$

Врж-ие (20а) яв-ся системой лин. алг-их ур-й отс-но m_i. Для однозначного опр-ия m_i добавляют еще два условия. Эти условия задают в виде огр-й на зн-ия спл-а и его производных на концах промежутка $[a, b]$ и наз-ют краевыми.

Сущ-ет несколько различных видов краевых условий:

I. $S_3'(a) = f'(a)$, $S_3'(b) = f'(b)$. II. $S_3''(a) = f''(a)$, $S_3''(b) = f''(b)$. III. $S_3^{(r)}(a) = S_3^{(r)}(b)$, $r = 1, 2$.

Условия типа III наз. периодическими. Их применяют в том случае, если инп-мая фк. $f(x)$ периодическая с периодом $b - a$.

В случае краевых условий типа I система ур-й для опр. m_i имеет вид

$$\begin{cases} m_0 = f_0', \\ m_n = f_n', \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = (3/h)(f_{i+1} - f_{i-1}),\ i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \tag{20б}$$

Для краевых условий типа II система ур-й для опр. m_i такова:

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = (3/h)(f_1 - f_0) - (h/2)\, f_0'', \\ 2m_n + m_{n-1} = (3/h)(f_n - f_{n-1}) + (h/2)\, f_n'', \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = (3/h)(f_{i+1} - f_{i-1}),\ i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \tag{20в}$$

Если $f(x)$ – периодич. фк-ия, то полагая $f_0 = f_n$, $f_{i+1} = f_1$, $m_0 = m_n$, $m_1 = m_{n+1}$, можно записать сд-ю систему для опр-ия m_i:

$$\begin{cases} 4m_1 + m_2 + m_n = (3/h)(f_2 - f_0), \\ m_{n-1} + 4m_i + m_{i-1} = (3/h)(f_{i+1} - f_{i-1}),\ i = \overline{2, n-1}, \\ m_1 + m_{n-1} + 4m_n = (3/h)(f_1 - f_{n-1}). \end{cases} \tag{20г}$$

Матрицы систем во всех трех случаях не вырождены, поэтому системы имеют и притом едн. решение. Решив ств-ую заданным краевым условиям систему ур-й, находят m_i. Затем по фм-е (20) строят сплайн на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

п13а. Найти сплайны третьей ст-и для фк-и $f(x) = \sin x$, $n = 4$.

Р. Т.к. фк. $f(x) = \sin x$ – периодическая, воспользуемся фм-ой (20г).

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\pi/2$	1
2	π	0
3	$(3/2)\pi$	-1
4	2π	0

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{2};\qquad \begin{cases} 4m_1 + m_2 + m_4 = 0, \\ m_1 + 4m_2 + m_3 = -12/\pi, \\ m_2 + 4m_3 + m_4 = 0, \\ m_1 + m_3 + 4m_4 = 12/\pi. \end{cases}$$

Решив систему, получим $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = -3/\pi$, $m_4 = 3/\pi$. Подставляя m_i в фм-у (20), получим сплайн-функции:

$$S_3(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$$

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi^3}(x-\pi)^3 - \frac{3}{\pi}(x-\pi), \qquad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi,$$

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi^3}(x-\pi)^3 - \frac{3}{\pi}(x-\pi), \qquad \pi \le x \le \frac{3}{2}\pi,$$

$$S_3(x) = -\frac{4}{\pi^3}(x-2\pi)^3 + \frac{3}{\pi}(x-2\pi), \qquad \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi.$$

6°. Численное дифференцирование. На практике иногда нужно найти производные, имея в своем распоряжении только табличные зн-ия фк-и (н-р, экспл. данные).

Соображения, изложенные в 3°, подсказывают, как следует поступать в таком случае. Дсв-но, если инпн-ый мчл-н на расв-ом участке с дт-ой ст-ю точности совпадает с заданной фк-ей, а сама фк. дт-но гладкая и плавно изменяется на расв-ом участке, то можно считать, что производная инпн-го мчл-а также мало отличается от требуемой производной (см. (10). (11)).

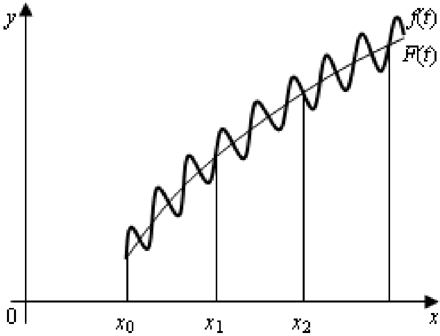


Рис. 3

При этом следует предположить, что расстояние между узлами инп-и дт-но мало, чтобы фк-ия не имела между ними большого числа эксм-ов. В противном случае может оказаться (рис. 3), что разность между зн-ми фк-и и инпн-го мчл-а мала, тогда как их производные не имеют между собой ничего общего.

Если расв-ая фк. плавно изменяется между узлами инпн-и, то для отыскания производной фк-и, заданной таблично, следует заменить инпн-ым мчл-ом.

По этой причине применение инпн-ой фм-ы Лагранжа для численного диф-ия не требует никаких дптн-ых пояснений. Для применения фм-л Ньютона нужно сделать сд-е зм-ие: в инпн-ых фм-ах (17) и (19) роль незв. пер-ой играет пер-я t, связанная с x стн-ем $x = x_0 + th$. Т.к. фк. $f(x)$ заменяется фк-ей $F(x_0 + th)$, то правило диф-ия сложной фк-и дает $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, что можно переписать как $\frac{dF}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$, а т.к. $\frac{dx}{dt} = h$, то

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{dF}{dt}. \qquad (20д)$$

п14. Пусть фк. $y = f(x)$ четырехзначной табл. с шагом $h = 0{,}1$ (табл. 12). Выч-ть производную $f'(1{,}06)$.

Таблица 12

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,6	1,8221			
0,7	2,0138	1917		
0,8	2,2255	2117	200	
0,9	2,4596	2341	224	24
1,0	2,7183	2587	246	22
1,1	3,0042	2859	272	26
1,2	3,3201	3159	300	28

Р. Т.к. $x = 1{,}06$ находится в конце табл. 12, то применяем вторую инпн. фм-у Ньютона (19). Полагаем $x_n = 1{,}1$, $y_n = 3{,}0042$, $\Delta y_{n-1} = 0{,}2859$, $\Delta^2 y_{n-2} = 0{,}0272$, $\Delta^3 y_{n-3} = 0{,}0026$. Тогда

$$F(1 + th) = 3{,}0042 + t \cdot 0{,}2859 + \frac{t(t+1)}{2} \cdot 0{,}0272 + \frac{t(t+1)(t+2)}{6} \cdot 0{,}0026.$$

Применяя фм-у (20), получим

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{dF}{dt} = \frac{1}{h}\left[0{,}2859 + \frac{2t+1}{2}0{,}0272 + \frac{3t^2+6t+2}{6}0{,}0026\right].$$

Т.к. $h = 0{,}1$ и из $x = x_n + th$ имеем $t = -\frac{x_n - x}{h} = \frac{1{,}1 - 1{,}04}{0{,}1} = 0{,}4$, то

$$f'(1{,}06) = 10\left[0{,}2859 + \frac{-0{,}4 \cdot 2 + 1}{2}0{,}0272 + \frac{3 \cdot 0{,}16 - 6 \cdot 0{,}4 + 2}{6}0{,}0026\right] = 2{,}8865.$$

Фк-ия в п14 есть $y = e^x$, поэтому истинное зн. производной есть $e^{1,06} = 2{,}8864$, так что ошибка равна ед-е четвертого знака.

Производные можно найти и через конечные разности. Рас-им первую инпн. фм. Ньютона

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t-(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t-(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \qquad (21)$$

Напишем представление той же фк-и по фм-е Маклорена

$$y = F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \frac{t^3}{3!}F'''(0) + \ldots \qquad (22)$$

Разложим члены рав-ва (21) по взр-щим степеням t

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots\right] + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \ldots\right] + \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[\Delta^4 y_0 - \ldots\right] + \ldots$$

Сравнивая полученные врж. с рав-ом (22) при одинаковых степенях t, получим

$$F^{I}(0) = \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots,$$

$$F^{II}(0) = \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots,$$

$$F^{III}(0) = \Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \ldots,$$

$$F^{IV}(0) = \Delta^4 y_0 - \ldots$$

Согласно (20), имеем $f'(x) = y' = \frac{1}{h}F'(t)$ и, анч-но, $y'' = \frac{1}{h^2}F''(t)$, $y''' = \frac{1}{h^3}F'''(t)$ и т.д. Обз-ив производные фк-и $y = f(x)$ при $x = x_0$ ств-но через y'_0, y''_0, …, имеем

$$\left.\begin{aligned}
y_0^{I} &= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots\right],\\
y_0^{II} &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots\right],\\
y_0^{III} &= \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \ldots\right],\\
y_0^{IV} &= \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0 - \ldots\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Фм-ы (23) яв-ся уточнениями фм-л (11а) при $n = 1, 2, 3, \ldots$

п15. Найти $y'(50)$ фк-и $y = \lg x$, заданной таблично (табл. 13).

Р. Используем первую строку (23) при $h = 5$

Таблица 13

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	– 36	5
55	1,7404	378	– 31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

$$y'_0 = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \ldots\right];$$

$$y'(50) = \frac{1}{5}[0{,}0414 + 0{,}0018 + 0{,}0002] = 0{,}0087.$$

Получение инпн-ых мчл-ов методов нм-их кв-ов рас-им в сд-ем параграфе (9.3).

ЛЕКЦИЯ 29

9.3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1°. Постановка задачи. Пусть в расв-ом процессе или явлении две вел-ы x и y связаны фнц-ой зв-ю $y = f(x)$, к-ая нам неизвестна. Однако известна табл. экспериментальных (экспл.) данных

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

(1)

содержащая приближенные (прж.) зн-ия вел-н x и y. Исходя из табл. данных (1), требуется найти фм-у, т.е. мт-ую мд. изучаемого процесса, прж-но представляющую фк. $f(x)$. Причем это прж. должно быть наилучшим в каком-то смысле, т.е. должно уд-ть нек-му условию. Возможна различная постановка вопроса о наилучшем прж-и фк-и. Мы рас-им нек-ые из них, в част., принцип наименьших (нм.) квадратов (кв.).

Такая фм., назм. эмпирической (эмп.), очень облегчает анализ изучаемой зв-ти. При этом характер (хрк.) зв-ти пер-ых x и y, т.е. вид фк-и $f(x)$, предполагается известным из каких-либо теор-их соображений и задачи подбора эмп-ой фм-ы сводится к тому, чтобы опр-ть числовые зн-ия параметров, входящих в фм-у данного вида $f(x)$.

Чаще всего при подборе эмп-их ф-л пользуются так назм-ым принципом нм-их кв-ов. Он основан на том, что из данного мн-ва фм. вида $y = f(x)$ наилучшим образом изображающей данные зн-ия, считается та, для к-ой сумма кв-ов отклонений (отк.) наблюдаемых (нблм.) зн-ий от вычт-их яв-ся нм-ой.

Подбор параметров фк. $f(x)$, основанной на этом принципе, наз-ют методом нм-их кв-ов.

Покажем, как практически подбираются по методу нм-их кв-ов коэф-ты для фк-й простейших видов типа:

1) линейная фк. вида $y = ax + b$;

2) квадратичная фк. вида $y = ax^2 + bx + c$;

3) гиперболическая фк. вида $y = \dfrac{a}{x} + b$;

4) показательная фк. вида $y = b + a^x$.

2°. Линейная интерполяция по способу наименьших квадратов. Пусть задана табл. (1) зн-й пер-ых и ств-щие точки вблизи прямой линии (рис. 1). В этом случае нужно подбирать коэф-ы лин. фк-и $y = ax + b$ так, чтобы сумма S кв-ов отк-й вычт-ых зн-й $ax_i + b$ от нблм-ых зн-й y_i принимала нм-е зн-ие. Сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

яв-ся фк-ей двух пер-ых a и b, поэтому она принимает минимальное (мнм.) зн-ие тогда, когда частные производные по этим пер-ым равны нулю, т.е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial a} &= 2\sum(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = 0;\\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2\sum(ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0,\end{aligned}\right\}$$

где индексы суммы Σ опущены. Отсюда получим систему:

$$\left.\begin{aligned}a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i;\\ a\sum x_i + b\cdot n &= \sum y_i.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Система (2) наз. нормальной (норм.) системой. Решив ее правилом Крамера или методом Гаусса, находим решение a^* и b^* и получим эмп-ую фм. $y = a^*x + b^*$.

Для проверки правильности выч-й на одном и том же графике (грф.) начертим полученную фм. $y = a^*x + b^*$ и точки табл. (1). Если эти точки расположены около грф-а фм-ы, то выч-ия выполнены правильно.

п1. Рост прзл-ти труда на прд-и за пять лет отражен в сд-ей табл.:

x (годы)	1	2	3	4	5
y [ср. кол. дет. за смену]	235	250	270	292	300

Полагая, что рост прзл-ти труда следует лин-ой зв-ти $y = ax + b$, найти по этим данным параметры a и b, применив способ (метод) нм-их кв-ов.

Р. Для составления норм-ой системы (2) выполняем необходимое (нх.) суммирование (сумв.) по табл. подсчетов.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1	235	1	235
2	2	250	4	500
3	3	270	9	810
4	4	292	16	1164
5	5	300	25	1500
Σ	15	1347	55	4209

Из этих данных получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned}55a + 15b &= 4209;\\ 15a + 5b &= 1347.\end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, опр-им: $a^* \approx 16{,}8$; $b = 219$, тогда зв-ть между пер-ми x и b прж-но врж-ся в виде эмп-ой фм-ы $y = 16{,}8x + 219$.

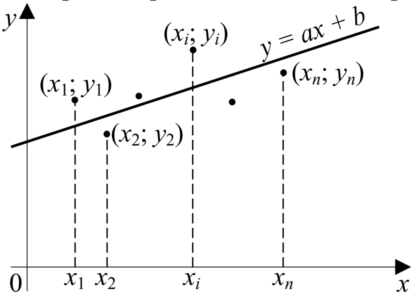


Рис. 1

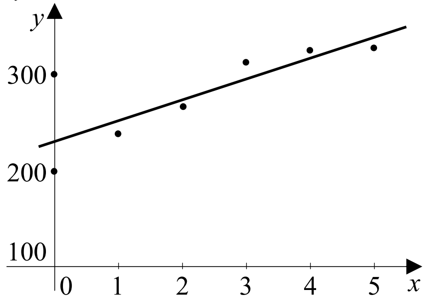


Рис. 2

Проверка осуществлена на рис. 2.

3°. Параболическая интерполяция. В случае квч-ой фк. $f(x) = ax^2 + bx + c$ расв-им сумму $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$, к-ая яв-ся фк-ей трех пер-ых a, b, c и поэтому эта сумма принимает мнм-ое зн. тогда, когда частные производные по этим пер-ым равны нулю, т.е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial a} &= 2\sum\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i^2 = 0;\\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2\sum\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i = 0;\\ \frac{\partial s}{\partial c} &= 2\sum\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)\cdot 1 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned}a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 &= \sum x_i^2 y_i;\\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i &= \sum x_i y_i;\\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn &= \sum y_i.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Решив систему (3), получим a^*, b^* и c^*, откуда имеем эмп-ую фм-у $f(x) = a^*x^2 + b^*x + c$.

Проверка выч-ия осуществляется анч-но 2°.

п2. Способом нм-их кв-ов найти эмп-ую фм. вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ для фк., заданной сд-ей табл.:

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

Р. Для составления системы (3) выч-им ств-ие зн-ия ст-ей x_i и их пзв-й с y_i:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,5	0,8	0,25	0,125	0,0625	0,4	0,2
2	1,0	1,9	1,0	1,0	1,0	1,9	1,9
3	1,5	4,9	2,25	3,375	5,0625	7,35	11,025
4	2,0	8,8	4,0	8,0	16,0	17,6	35,2
5	2,5	13,9	6,25	15,625	39,0625	34,75	86,875
Σ	7,5	30,3	13,75	28,125	61,1875	62,0	135,2

Из этих данных получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned}&61{,}1875a + 28{,}125b + 13{,}75c = 135{,}2;\\ &28{,}125a + 13{,}75b + 7{,}5c = 62{,}0;\\ &13{,}75a + 7{,}5b + 5c = 30{,}3.\end{aligned}\right\}$$

Решив систему, находим $a^* = 2{,}54$; $b^* = -1$; $c^* = 0{,}575$. Тогда искомая эмп-ая фм. имеет вид:

$$y = 2{,}54x^2 - x + 0{,}575.$$

Проверка правильности выч-й осуществлена на рис. 3.

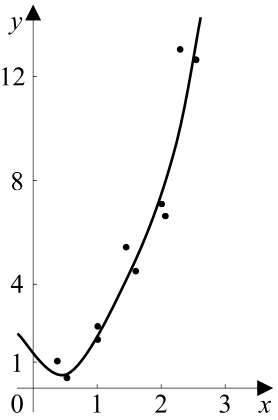


Рис. 3

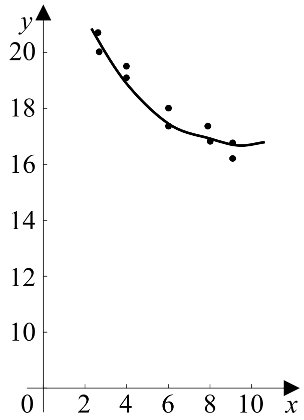


Рис. 4

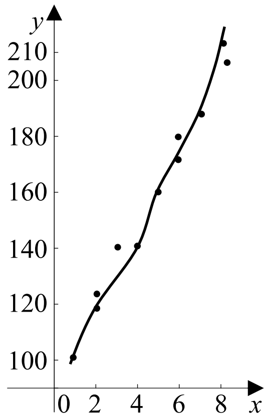


Рис. 5

4°. Гиперболическая и показательная интерполяции. При выравнивании экспл-ых данных по гиперболе $f(x) = \dfrac{a}{x} + b$ применение способа нм-их кв-ов приводит к рас-ю суммы $S = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{a}{x_i} + b - y_i\right)^2$, яв-йся фк-ей двух пер-ых параметров a и b. Тогда из

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= 2\sum\left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)\cdot\frac{1}{x_i} = 0; \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2\sum\left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)\cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} a\sum\frac{1}{x_i^2} + b\sum\frac{1}{x_i} &= \sum\frac{y_i}{x_i}; \\ a\sum\frac{1}{x_i} + bn &= \sum y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Откуда опр-им a^* и b^* и получим $y = \dfrac{a^*}{x} + b^*$.

Гиперболическая инп. может быть использована, н-р, при анализе себестоимости продукции в зависимости (звт.) от размеров отрасли животноводства.

п3. Для опр-ия звт-и себестоимости 1 ц молока от поголовья коров исх. данные приведены в табл.:

Группы колхозов по числу коров	200-300	300-500	500-700	700-900	900 и более
Среднее поголовье коров x_i, сотен голов	2,5	4,0	6,0	8,0	9,5
Себестоимость 1 ц молока y_i, руб.	20,0	19,0	18,0	17,5	17,0

Полагая, что зв-ть себестоимости 1 ц молока от поголовья коров соответствует гиперболической фк. $y = \dfrac{a}{x} + b$, найти по приведенным данным параметры a и b, используя способ нм-их кв-ов, и проверить результаты на грф-е.

Р. Для составления системы (4) выполняем нх-ое сумв-ие по табл. подсчетов:

i	x_i	y_i	$1/x_i$	$1/x_i^2$	y_i/x_i
1	2,5	20,0	0,400	0,1600	8,00
2	4,0	19,0	0,250	0,0625	4,75
3	6,0	18,0	0,167	0,0279	3,01
4	8,0	17,5	0,125	0,0156	2,19
5	9,5	17,0	0,105	0,0110	1,79
Σ	30	91,5	1,047	0,2770	19,74

Из этих данных получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned} 0{,}28a + 1{,}05b &= 1974; \\ 1{,}05a + 5b &= 91{,}5. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему, находим $a^* = 11{,}48$ и $b^* = 15{,}89$, отсюда получим ур-ие $y = 11{,}48/x + 15{,}89$, к-ое используется для опр-ия анализа себестоимости 1 ц молока в зв-ти от поголовья коров в колхозах области. Проверку см. на рис. 4.

Показательная интерполяция. При выравнивании опытных данных по показательной кривой $y = b{\cdot}a^x$ предварительно ее логарифмируем (лгр.): $\lg y = x\lg a + \lg b$ и рас-им сумму $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right)^2$, яв-ся суммарной фк-ей двух пер-ых $\lg a$ и $\lg b$. Тогда из

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \lg a} &= 2\sum\left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right)\cdot x_i = 0; \\ \frac{\partial s}{\partial \lg b} &= 2\sum\left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right)\cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \lg a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i \lg y_i; \\ a\sum x_i^2 + n\lg b &= \sum \lg y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Решив систему (5), находим $\lg a^* = \alpha$ и $\lg b^* = \beta$, откуда опр-им $a^* = 10^\alpha$ и $b^* = 10^\beta$, тогда получим кривую $y = b^*{\cdot}a^{*x}$.

п4. Пусть малому прд-ю A на основе рыночной экн-и удалось добиться роста дохода за 8 лет (в процентах к первому году работы) по таблице:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	120	126	136	153	171	190	204

Полагая, что рост дохода соответствует показательной фк. $y = b{\cdot}a^x$, найти по этим данным параметры a и b, используя способ нм-их кв-ов.

Р. Для составления норм-ой системы (5) выполняем нх-ое сумв-ие по табл. подсчетов:

i	x_i	y_i	$\lg y_i$	x_i^2	$x_i \lg y_i$
1	1	100	2,0	1	2,0
2	2	112	2,0492	4	4,0984
3	3	126	2,0969	9	6,2907
4	4	136	2,1335	16	8,534
5	5	153	2,1847	25	10,9235
6	6	171	2,2330	36	13,398
7	7	190	2,2788	49	15,9516
8	8	204	2,3096	64	18,4768
Σ	36	1192	17,2857	204	79,673

Из этих данных получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned} 204\lg a + 36\lg b &= 79{,}673; \\ 36\lg a + 8\lg b &= 17{,}2857. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы находим решение lg a^* = 0,0449 и lg b^* = 1,9585. Отсюда по табл. десятич. лгр-ов получим: $a^* = 10^{0,0449} = 1{,}109$; $b^* = 10^{1,9585} = 90{,}9$, тогда $y = 90{,}9 \cdot 1{,}109^x$.

Проверка правильности выч-й показана на рис. 5.

зм1. Если вид инп. фк-и $y = f(x)$ не задан, его иногда удается опр-ть по точкам (x_i, y_i) табл. 1, нанесенным на чертеж. Если же вид фк. $f(x)$ по точкам (x_i, y_i) невозможно опр-ть, то надо использовать интерполяционные (инпн.) фм-ы Лагранжа или Ньютона.

9.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

9.1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ. ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вопросы для самопроверки

1. Из каких частей состоит мт. обработка результатов опыта?
2. Чем отличается фнц-ый анализ от мт-го?
3. Охркз-те мтр-ое пр-во и пр-ва C и L_p. Приведите примеры.
4. Объясните суть выч-го метода при поиске x или y из ур-ия $y = A(x)$.
5. На основе каких причин возникают погрешности?
6. Что такое истинная абс. и отс. погр-ти? Опр-те абс. и отс. погр-ти числа.
7. Приведите погр-ти ариф-их операций.
8. В чем заключаются погр-ти фк-и и обратной задачи?
9. Опр-те абс-ю погр-ть фк-и с помощью способа границ.

Задачи для кр. работы: по образцу п1-п13 решите з1-з20.

1. Найти абс-ю погр-ть прж-го рав-ва $12/25 \approx 1/2$. О: 0,02.
2. Найти отс. погр-ть чисел: 5,26[0,02], 25,2[0,12]. О: 0,04; 0,005.
3. Найти абс. и отс. погр-ти числа 0,4357. О: $\Delta(x) = 0{,}0005$; $\delta(x) = 0{,}013\%$
4. Опр-ть, какое из чисел $\pi \approx 3{,}142$ и $e \approx 2{,}718$ точнее. О: π. Ук: см. кз23.
5. Опр-ть, какое равенство точнее: $x_1 = 5/17 = 0{,}294$ или $x_2 = \sqrt{15} = 3{,}87$. Ук: см. кз24.
6. Округлить сомнительные цифры числа 56,357[0,024] и 2,6534, $\delta(x) = 0{,}3\%$. Ук: см. кз23.
7. Число 7,75 найдено с отс. погр-ю 0,5%. Найти абс. погр-ть выч-ия. О: 0,04.
8. Найти пзв-ие чисел 2,56[0,005] и 1,2[0,05]. О: 3,1[0,2].
9. Выч-ть кубатуру комнаты, длина, ширина и высота которой ств-но равны 5,35[0,04] м, 3,24[0,02] м и 2,25[0,02] м. О: 39,0[0,9] м^3.
10. Найти частное от деления числа 2,8[0,3] на 25,8[0,05]. О: 0,11[0,01].
11. Прж. число 3,876 найдено с отс. погр-ю 0,2%. Опр-ть в нем кол-во точных значащих цифр. О: две.
12. Выч-ть $\sqrt{32}$ с погр-ю, не превышающей 0,1%. О: 5,66.
13. Найти разность $\pi - \cos 25°$ с абс. погр-ю до 0,001. О: 2,235[0,001].
14. Выч-ть частное от деления числа 5 на 7 с отс. погр-ю 0,3%. О: 0,714 [0,003].
15. Опр-ть отс. погр-ть частного от деления числа 7 на 11, если его взять с тремя точными значащими цифрам. О: 0,07%.
16. Выч-ть и опр-ть погр-ти результата $u = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, где $n = 3{,}0567$ [0,0004], $m = 5{,}72$[0,02]. О: $u = 2{,}55$[0,046], $\delta(x) = 1{,}77\%$. Ук: см. кз25.
17. Решить кз16 с помощью способа границ. Ук: см. п15 из 5°: 9.1.
18. Выч-ть, пользуясь правилами подсчета цифр $u = \pi h^2(R - h/3)$, где $h = 11{,}8$; $R = 23{,}67$. Ук: выч-ем с тремя верными знаками и одним или двумя запасными. О: $u = 8630 \approx 8{,}63 \cdot 10^3$.
19. Найти абс. и отс. погр-ти фк-и $u = \dfrac{mn^2}{\sqrt{k}}$ при $m = 28{,}3$[0,02], $n = 7{,}45$ [0,01], $k = 0{,}678$[0,03] с помощью способа границ. Ук: см. п15 из 5°: 9.1.
20. Даны числа 1,45[0,01], 2,28[0,02] и 1,12[0,01]. Найти их пзв-ие и оценить его отс. и абс. погр-ти. О: $x = x_1x_2x_3 = 3{,}71$; $\delta(x) = 0{,}025$. $\Delta(x) = 3{,}71 \cdot 0{,}025 < 0{,}10$.
21. Найти частное $\sqrt{5}/\pi$ и опр-ть его отс. погр-ть при условии, что $\sqrt{5}$ и π врж-ся с точностью до первого десятич. знака. О: $\sqrt{5} = 2{,}2$[0,05], $\pi = 3{,}1$ [0,05]. $\delta\left(\dfrac{2{,}2}{3{,}1}\right) = 0{,}04$.
22. При измерении длины с точностью до 5 м получено 23,37 км, а при опр-и другой длины с точностью до 0,5 см получено 5 м. Какое измерение точнее?

Типовые (контрольные) задачи.

23. Опр-ть, какое рав-во точнее: $x_1 = 9/11 = 0{,}818$ или $x_2 = \sqrt{18} = 4{,}24$.

Р. Находим зн-ия чисел с большим числом десятич. знаков: $x_1 = 9/11 = 0{,}81818\ldots$, $x_2 = \sqrt{18} = 4{,}2426\ldots$ Выч-им абс. погр-ти, округляя их с избытком $\Delta(x_1) = |0{,}1818 - 0{,}818| \le 0{,}00019$, $\Delta(x_2) = |4{,}2426 - 4{,}24| \le 0{,}0027$. Находим отс. погр-ти $\delta(x_1) = \dfrac{\Delta(x_1)}{x_1} = \dfrac{0{,}00019}{0{,}819} = 0{,}00024 = 0{,}024\%$, $\delta(x_2) = \dfrac{\Delta(x_2)}{x_2} = \dfrac{0{,}0027}{4{,}24} = 0{,}00064 = 0{,}064\%$. Имеем $\delta(x_1) < \delta(x_2)$, значит, рав-во $9/11 = 0{,}818$ яв-ся более точным.

Опр-ть, какое рав-во точнее: $x_1 = 7/13 = 0{,}538$ или $x_2 = \sqrt{15} = 3{,}87$.

24. Округлить сомнительные цифры числа 72,353[0,026].

Р. По условию $\Delta(x) = 0{,}026 < 0{,}05 = \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$, значит, верным знаком будет число 72,3, т.е., округляя, возьмем $x_1 = 72{,}4$. Тогда $\Delta(x) = 0{,}047 + 0{,}026 = 0{,}073$. Полученная погр-ть больше 0,05, значит, надо уменьшить число цифр до двух: $x_2 = 72$, $\Delta(x_2) = 0{,}353 + 0{,}026 = 0{,}379$. Т.к. $\Delta(x) = 0{,}379 < 0{,}5$, то оставшиеся две цифры верны, т.е. $x = 72$.

Округлить сомнительные цифры числа 2,3544, $\delta(x) = 0{,}2\%$.

25. Выч-ть и опр-ть погр-ти результата $u = \dfrac{m^2n^3}{\sqrt{k}}$, где $m = 28{,}3[0{,}02]$, $n = 7{,}45[0{,}01]$, $k = 0{,}678[0{,}003]$.

Р. Находим $m^2 = 800{,}9$; $n^3 = 413{,}5$; $\sqrt{k} = 0{,}8234$; $u = \dfrac{800{,}9\cdot 413{,}5}{0{,}8234} = 402200 = 4{,}02\cdot 10^5$. Имеем $\delta(m) = 0{,}02/28{,}3 = 0{,}00071$, $\delta(n) = 0{,}01/7{,}45 = 0{,}00135$, $\delta(k) = 0{,}003/0{,}678 = 0{,}0043$, откуда по (29) выч-им $\delta(u) = \sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right|\Delta(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}\ln u\right||x_i|\delta(x_i) = 2\delta(m) + 3\delta(n) + 0{,}5\delta(k) = 0{,}00142 + 0{,}00405 + 0{,}00222 = 0{,}00769 = 0{,}77\%$, $\Delta(u) = 4{,}02\cdot 10^5\cdot 0{,}0077 = 3{,}1\cdot 10^3$. О: $u = 4{,}02\cdot 10^5[3{,}1\cdot 10^3]$.

Выч-ть и опр-ть погр-ти результата $u = (m - n^2)/k$ при тех же данных.

9.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА И НЬЮТОНА

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается постановка задачи и замена фк-и мчл-ми?
2. Объясните схему Горнера на конкретном примере.
3. В чем состоит суть конечных и разделенных разностей?
4. Приведите инпн. мчл-н Лагранжа и его погрешность.
5. Какой вид имеет фм-а Лагранжа для равноотстоящих узлов?
6. Приведите инпн. мчл-н Ньютона и его погрешность.
7. Какой вид имеет первый инпн. мчл. Ньютона?
8. Какой вид имеет второй инпн. мчл. Ньютона?
9. Что такое эктп-ия и как ее получить через инпн-ые ф-ы?
10. В чем состоит суть обратной инп-и?
11. Когда возникает численное диф-ие, его особенности и фм-ы.

Задания для кр. работы: по образцу п1-п14 решить з1-з20.

1. Выч-ть при $x = -2$ по схеме Горнера зн-ие мчл-а $P_4 = 1 - 4x + 2x^2 - x^3 + 3x^4$.
2. Полагая $f_0 = f(x_0) = y_0$, вывести фм-у $\Delta^k y_0$ конечных разностей.

Р. $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$. Анч-но получим $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$. Вообще, используя фм-у бинома Ньютона $(y - 1)^k$ и полагая $y^k = y_k$, $1 = y_0 = y_0$, получим

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} k y_1 + (-1)^k y_0.$$

Найти $\Delta^4 y_2$, $\Delta^5 y_1$, $\Delta^6 y_0$.

3. Опр-ть зн-ия y_k при любом k через зн-ие y_0 и конечные разности до k-го порядка.

Р. Из $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ вытекает $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Анч-но, $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + \Delta y_1$, но т.к. $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, т.е. $\Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, то $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$. Далее получим $y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \Delta y_2$. Т.к. $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_0 - \Delta^2 y_0 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_0 - 2\Delta^2 y_0$ $\Rightarrow$ $\Delta y_2 = \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$, то $y_3 = (\Delta y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$. Вообще, используя фм-у бинома Ньютона, получим

$$y_k = (1 + \Delta)^k y_0 = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^k y_0.$$

Отметим очевидные св-ва конечных разностей.

1*. Если C пст-но, то $\Delta C = 0$.

2*. $\Delta[Cf(x)] = C\Delta f(x)$.

3*. $\Delta[f(x_1) + f(x_2)] = \Delta f(x_1) + \Delta f(x_2)$.

4*. $\Delta(x^n) = nhx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + \ldots + nh^{-1}x + h^n$. Для д-ва дт-но написать $\Delta(x^n) = (x + h)^n - x^n$ и воспользоваться фм-ой бинома Ньютона.

Найти $\Delta(x^4)$, $\Delta(x^5)$.

4. По зн-ям фк-и $y = f(x)$, заданным в табл. 1, найти $f(13{,}5)$.

Таблица 1

11	1342			
13	2210	434		
14	2758	548	38	1
18	5850	773	45	1
19	6878	1028	51	1
21	9282	1202	58	

Р. Строим табл-у разделенных разностей. Т.к. зн-ие $x = 13{,}5$ лежит между табл. зн-ми $x = 13$ и $x = 14$, то строим инпн. фм-у Ньютона назад.

$f(x) \approx 2210 + (x - 13)\cdot 548 + (x - 13)(x - 14)\cdot 45 + (x - 13)(x - 14)(x - 18)$. Откуда при $x = 13{,}5$ получаем $f(13{,}5) = 2210 + 0{,}5\cdot 548 - 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 45 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 4{,}5 = 2473{,}875$.

По табл. 1 найти $f(20)$.

5. Построить инпн. мчл. Лагранжа по сд. данным:

x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

О: $L_3(x) = 1 + \dfrac{62}{15} x - \dfrac{13}{6} x^2 - \dfrac{3}{10} x^3$.

6. Построить для фк-и $y = \sin \pi x$ инпн-ый мчл. Лагранжа и оценить его погр-ть, выбрав узлы: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$. Погр-ть проверить при $x = 1/3$.

Р. Выч-им $y_0 = \sin 0 = 0$, $y_1 = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $w_2 = x\left(x - \dfrac{1}{6}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$. $L_2(x) =$

$$= 0\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} + 1\cdot\frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = \frac{7}{2}x - 3x^2,$$

т.е. $\sin \pi x \approx \dfrac{7}{2}x - 3x^2$. Выч-ие можно проверить, н-р, в точке $x = \dfrac{1}{2}$: $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} = 1$, $1 \equiv 1$.

Найдем оценку погр-ти. Здесь $f(x) = \sin \pi x$, $n = 2$, $a = 0$, $b = 1/2$. Тогда $f'''(x) = -\pi^3 \sin \pi x$, $M_3 = \max|f'''(x)| = \pi^3$. Отсюда $\left|\sin \pi x - \dfrac{7}{2}x + 3x^2\right| \le \dfrac{\pi^3}{3!}\left|x\left(x - \dfrac{1}{6}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right|$. Н-р, при $x = \dfrac{1}{3}$ получим

$\sin\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{9} = 0{,}866 - 0{,}833 = 0{,}033$; $R_2 = \dfrac{\pi^3}{3!}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{31}{648} = 0{,}048$, т.е. $0{,}033 < 0{,}048$.

Построить для фк. $y = \cos \pi x$ инпн. мчл. Лагранжа в узлах $x = 0$, $1/3$, $1/2$ и оценить погр-ти.

7. Оценить, с какой точностью выч-ть по фм-е Лагранжа $\ln 100{,}5$, если известны зн-ия $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$.

Р. Здесь $f(x) = \ln x$, $n = 3$, $a = 100$, $b = 103$. $f^{IV}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $M_4 = \dfrac{6}{x^4}$. Тогда $|\ln 100{,}5 - L_3(100{,}5)| = \dfrac{6}{4!100^4}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5 = 2{,}344\cdot 10^{-9}$.

При тех же условиях оценить точность фк-и ln 101,3.

8. Составить инпн. мчл. Лагранжа для табл.

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Р. $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Отсюда находим $w'(x) = (x - 2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) + (x-1)\times\times(x-2)(x-4) + (x-1)\times(x-2)(x-3)$. Откуда $w'(1) = -6$, $w'(2) = 2$, $w'(3) = -2$, $w'(4) = 6$. Тогда получим $L_3(x) = \dfrac{2}{-6}(x - 2)(x-3)(x-4) + \dfrac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) + \dfrac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4) + \dfrac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x + 1$. Т.о., в данном случае инпн-ый мчл. Лагранжа есть лин. фк-я $L(x) = x + 1$.

Составить инпн. мчл. Лагранжа для табл.

x	2	3	4	5
y	1	2	3	4

.

9. Построить инпн. мчл. Ньютона для фк-и $f(x) = \ln x$ с узлами $x = 8, 9, 10$ и ств-ми зн. фк-и $f(x) = 2{,}0794$; 2,1972; 2,3026 и показать, что при $x = 8{,}5$ инпн-ый мчл. дает зн-ие фк-и с тремя верными знаками.

10. Даны точки (0, 3), (2, 1), (3, 5), (4,7). Составить ур-ие мчл-а, принимающего указанные зн-ия при заданных зн-ях аргумента. О: $y = -(2x^3 - 15x^2 + 25x - 9)/3$.

11. Построить мчл. в узлах $x = 1, 3, 4, 6$ со зн-ми фк-и $f(x) = -7, 5, 8, 14$. О: $y = 0{,}2(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$.

12. Построить мчл., грф-к к-го проходит через точки (2, 3), (4, 7), (5, 9), (10, 19). О: $y = 2x - 1$.

13. По зн-ям фк-и, заданным в табл. 2, найти $f(3{,}1)$, пользуясь первой инпн. фм-ой Ньютона.

Таблица 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3			
		4		
2	7		2	
		6		0
3	13		2	
		8		0
4	21		2	
		10		0
5	31		2	
		12		0
6	43		2	
		14		
7	57			

Р. Имеем $x = 3{,}1$, $h = 1$. Тогда $t = (x - x_0)h = (3{,}1 - 3)/1 = 0{,}1$. Инпн. мчл. Ньютона для этого случая имеет вид $y = y_0 + t\Delta y_0 + \dfrac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 = 13 + 0{,}1\cdot 8 + \dfrac{0{,}1(0{,}1-1)}{2}\cdot 2 = 13{,}71$. Инпн-ый мчл. для этой табл. имеет вид $y = 3 + (x-1)\cdot 4 + \dfrac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 2 = x^2 + x + 1$.

При тех же условиях найти $f(2{,}4)$.

14. Даны десятич. лгр. lg 2,0 = 0,30103, lg 2,1 = 0,3222, lg 2,2 = 0,34242, lg 2,3 = 0,36173, lg 2,4 = 0,3821, lg 2,5 = 0,39794. Найти lg 2,03, используя инпн. мчл-н Ньютона. О: lg 2,03 = = 0,30750.

15. Заданы пятизнач. лгр-мы чисел от 4 до 10 через ед-у. Пользуясь инпн. фм-ой Ньютона, выч-ть четырехзн. лгр. чисел от 6,5 до 7,0 через 0,1.

О:

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
y	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

16. Зная кв-т чисел 5, 6, 7, 8, найти кв. чисел 6,25 по инпн-ой фм-е Ньютона. О: 39,0625.

17. Составить инпн-ый мчл. Ньютона для фк-и, заданной табл-ей. О: $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

18. Дана табл. зн-й фк-и $y = \sin x$ с шагом 5º в пределах от 15º до 55º (табл. 8) п12 из 4º: 9.2. Выч-ть зн-ия $\sin x$ для узлов от 55º до 60º через 1º.

19. Фк. $y = \sin x$ задана табл-ей. Найти x_1 и x_2, ств-е $y_1 = 0{,}13954$ и $y_2 = 0{,}44395$. О: $x_1 = 0{,}14$ и $x_2 = 0{,}46$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942	0,47943

20. В точке $x_0 = 0{,}525$ найти $f'(x_0)$ = фк-и, заданной табл-ей. О: $f'(x_0) = \dfrac{1}{h}(\Delta y_0 - \dfrac{1}{2}\Delta^2 y_0) = 1000[0{,}00087 - 0{,}5\cdot 0{,}00001] = 0{,}86$.

x	0,525	0,526	0,527	0,528
y	0,50121	0,50208	0,50294	0,50381

9.3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое интерполяция (инп.) и как получаются эмп-ие фм-ы?
2. Какие вы знаете виды наилучшего прж-ия фк-и?
3. Объясните лин. инп-ию по способу нм-их кв-ов.
4. Объясните: а) параболическую инп-ию; б) гиперболическую инп-ию; в) показательную инп-ию.
5. Как проверяется правильность выч-й при инп-и?

Задание для кр. работы: в з1-з20 по заданной табл. и фк-и опр-ть способом нм-их кв-ов норм. систему и найти эмп-ую фм., ств-щую заданной фк. Делайте проверку, построив на одном чертеже полученную линию и данные точки.

1	x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	
	y_i	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9	$y = ax + b$
2	x_i	– 2	– 1	1	3	4	5		
	y_i	– 1	– 2	0	– 1	2	1		
3	x_i	– 1	0	1	2	3	4	5	
	y_i	– 1	– 1,5	0,5	– 0,5	0	1,5	1,5	
4	x_i	1	2	3	4	5	6	7	
	y_i	– 1	1	– 0,5	1	2	1	2	
5	x_i	– 1	1	2	3	4	5	6	
	y_i	– 0,5	– 1,5	0	1,5	0	1,5	2,5	
6	x_i	0	2	4	6	8	10		
	y_i	0	0,5	1,5	3,5	7	15		$y = ax^2 + bx + c$
7	x_i	0	0,5	1	2	3	4	5	
	y_i	5,5	1	– 1	– 1	– 3	– 4	0	
8	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	5	1	– 3	– 4	– 2	– 1	3,5	
9	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	2	0	– 2	– 4	– 3	– 1	2	$y = ax^2 + bx + c$
10	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	5	2	– 4	– 4	– 2,5	– 1	3	
11	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	7	6	3	3	2,8	2,6	2,4	$y = \dfrac{a}{x} + b$
12	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	6,5	6	4	2,8	2,8	2,6	2,4	
13	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	9	4,5	3,5	3,2	2,7	2,5	2,6	
14	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	8	5,5	3,4	3,1	2,6	2,6	2,4	
15	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	6	6	3,3	3,2	2,6	2,5	2,5	
16	x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2		
	y_i	0,37	0,76	1,4	3,1	5,9	12,1		$y = b + a^x$
17	x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2		
	y_i	0,36	0,77	1,3	3,2	5,8	12,2		
18	x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2		
	y_i	0,35	0,78	1,2	3,3	5,7	12,3		
19	x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2		
	y_i	0,35	0,79	1,1	3,4	5,6	12,4		
20	x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2		
	y_i	0,34	0,8	1,0	3,5	5,5	12,5		

21. Для прогнозирования урожайности озимой пшеницы по ур-ию показательной кривой на примере ее динамического ряда, представленного в табл. 1, найти эмп-ую фм. способом нм-их кв-ов. Правильность выч-й проверить на грф-е и сделать вывод об урожайности на конец сд-ей пятилетки. О: $a^* = 1{,}029$ и $b^* = 20{,}4$; 20,42 ц – ср. урожай за последние 5 лет; $\overline{y} = 20{,}4 \times \times (1{,}029)^5 = 23{,}5$ ц – примерная урожайность в сд-ей пятилетке.

Таблица 1

Номер года x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Урожай с 1 га y_i, ц	19,8	18,4	17,1	14,7	16,9	13,7	21,8	20,8	23,3	22,5

22. Способом нм-их кв-ов найти эмп-ую фм. вида $y = \dfrac{a}{x} + b$ для фк., заданной таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,6	2,3	2,2	1,9	2,0

О: $a^* = 2{,}1$; $b^* = 1{,}4$. Ук: сделайте проверку на графике.

23. Способом нм-их кв-ов найти эмп-ую фм. вида $y = ax + b$ для фк., заданной таблицей:

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9

Выч-ия производить с точностью до 0,01. Результаты выч-й проверить на грф-е. О: $a = 0{,}24$; $b = 0{,}01$.

24. Пусть фк-я задана таблицей:

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	0	0,5	1,5	3,5	7	15

Способом нм-их кв-ов найти эмп-ую фм. вида $y = ax^2 + bx + c$ на основе этих данных. Результаты проверить на грф-е.

10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

> Живые источники математического творчества неотделимы от интереса к познанию природы и задачам управления природными явлениями.
>
> А.Н. Колмогоров

ЛЕКЦИЯ 30

10.1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1°. Постановка вопроса. Отделение корней. Графическое решение уравнений. Метод половинного деления. Решение ур-й яв-ся одной из важнейших задач в практике инженера. Как известно, далеко не всякое ур. может быть решено точно. Это относится к большинству трансцендентных (показательные, лгр-ие, триг-ие, обратные триг. фк-и) ур-й. Даже для алг. ур-ия выше четвертой степени (ст.) не сущ-ет врж-ия для решения в виде фм-ы с конечным числом алг-их действий. Во всех таких случаях приходится обращаться к методам, позволяющим отыскать приближенное (прж.) решение заданного ур-ия с любой заданной точностью. Поэтому с точки зрения практических применений такие прж. решения ни в чем не уступают точным.

Говоря о прж-ом решении ур-й, будем иметь в виду отыскание лишь дсв-ых корней, если не будет оговорок. Причем прж-ые решения ур-й яв-ся по существу способом уточнения корней, т.е. для их применения нх-мо знание примерных зн-й корня. Для этой цели служат графические (грфч.) способы решения ур-й.

Пусть расв-ое ур. имеет вид

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Допустим, что ур-ие (1) можно представить в виде

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{2}$$

Тогда абсциссы точек пересечения кривых $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ будут дсв. корнями ур-ия (1).

п1. Найти прж-но корни ур-ия $x - \sin x - 1 = 0$.

Р. Записав данное ур. в виде $x - 1 = \sin x$, построим графики фк-й $y = \sin x$ и $y = x - 1$ (рис. 1). Пересечения этих линий имеет абсциссу $x_0 \approx 1{,}9$, что можно считать грубым прж-ем зн-ия корня. Далее x_0 нх-мо уточнить до заданной ст-и точности.

Будем предполагать, что ур-ие (1) имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня ур-ия (1) сущ-ет окрс-ть, не содержащая др-их корней этого ур-ия. Кроме того, иногда будем предполагать сущв-ие $f'(x)$ или даже $f''(x)$.

Прж-ое нахождение изолированных точек состоит из

1) отделения корней, т.е. нахождения окрс-ти $]\alpha, \beta[$, содержащей один корень;

2) уточнения прж-ых корней, т.е. доведения их до заданной ст-и точности.

Для отделения корней полезна сд-ая

т1. Если непр-ая фк. $f(x)$ принимает зн-ия разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по крайней мере один корень $\xi \in\ ]\alpha, \beta[$, такой, что $f(\xi) = 0$ (рис. 2).

Корень ξ будет едн-ым, если сущ-ет $f'(x)$ и сохраняет пст-ый знак внутри инр-ла $]\alpha, \beta[$, т.е. $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ для любого $x \in\ ]\alpha, \beta[$ (рис. 3).

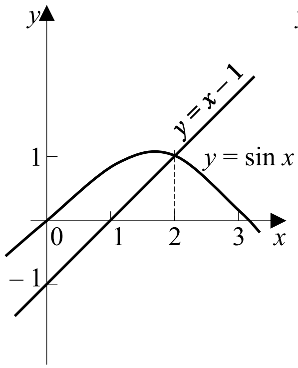


Рис. 1

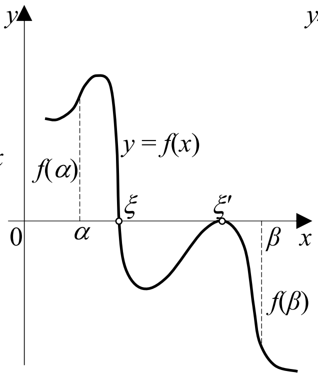


Рис. 2

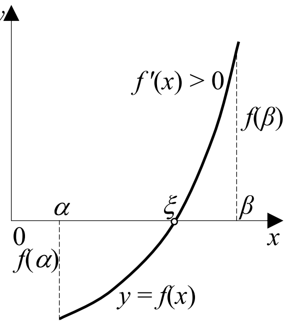


Рис. 3

Для сужения инр-ла $[\alpha, \beta]$, т.е. уточнения прж-го корня, можно использовать

Метод половинного деления. Пусть дано ур. (1), где фк. $f(x)$ непр-на на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Для нахождения корня $\xi \in [a, b]$ делим отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ есть корень ур-ия. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то выбираем ту из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на концах к-ой фк-ия $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и повторяем тот же процесс, и т.д. В результате получим на каком-то этапе точный корень ур-ия (1), или посл-ть вложенных сегментов $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ таких, что $f(a_n)f(b_n) < 0$. Т.к. $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$, то $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $0 \le \xi - a_n \le \frac{1}{2^n}(b - a)$.

п2. Методом половинного деления уточнить корень ур-ия $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, лежащий на отрезке $[0, 1]$.

Р. $f(0) = 2$, $f(1) = -3$; $f(0{,}5) = 0{,}125 - 3 + 2 = -0{,}875$; $f(0{,}25) = 0{,}0156 - 1{,}5 + 2 = 0{,}5156$; $f(0{,}375) = 0{,}0527 - 2{,}25 + 2 = -0{,}1973$ и т.д. за корень можно принять $\xi = \frac{1}{2}(0{,}25 + 0{,}375) = 0{,}3625$.

Алгебраическое уравнение. Отметим, что алг-ое ур. n-й ст-и

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

имеет не более n дсв-ых корней. Поэтому если для такого ур-ия получим $n + 1$ перемену знаков, то все корни его отделены.

п3. Отделить корни ур-ия $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$.

Р. Составляем прж. схему. Сд-но, ур-ие имеет три дсв-ых корня, лежащих в инр-ах $]-3, -1[$, $]0, 1[$, $]1, 3[$.

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	∞
$f(x)$	–	–	+	+	–	+	+

п4. Опр-ть корни ур-ия $f(x) = x^4 - 4x - 1 = 0$.

Р. Находим $f'(x) = 4(x^3 - 1)$, поэтому $f'(x) = 0$ при $x = 1$. Имеем $f(-\infty) > 0$ (+); $f(1) < 0$ (–); $f(\infty) > 0$ (+). Сд-но, ур-ие имеет только два дсв-ых корня, лежащих в инр-ах $]-\infty, 1[$, $]1, \infty[$.

п5. Опр-ть число дсв-ых корней ур-ия $f(x) = x + e^x$.

Р. Т.к. $f'(x) = 1 + e^x > 0$ и $f(-\infty) = -\infty$, $f(\infty) = +\infty$, то ур-ие имеет только один дсв. корень.

Оценка погр-ти прж-го корня дается сд-ей

т2. Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ ξ – точный, а $\bar{x}$ – прж-й корни ур-ия $f(x) = 0$, причем $|f'(x)| \geq m > 0$ при $x \in [\alpha, \beta]$. Тогда верна оценка

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{f(\bar{x})}{m}. \tag{3}$$

Д. Применяя теорему Лагранжа, имеем $f(\bar{x}) - f(\xi) = (\bar{x} - \xi)f'(c)$, где $c \in]\alpha, \beta[$. Отсюда и учитывая $f(\xi) = 0$, $|f'(x)| \geq m$, получим $|f(\bar{x}) - f(\xi)| = |f(\bar{x})| \geq m|\bar{x} - \xi|$, откуда следует (3).

зм1. Фм. (3) может дать грубые результаты и не всегда удобно ее применять. Поэтому на практике тем или иным способом сужают инр-л $]\alpha, \beta[$, содержащий корень ξ и его прж. зн-ие $\bar{x}$, тогда полагают $|\bar{x} - \xi| \leq \beta - \alpha$.

п6. Ур-ие $f(x) = x^4 - x - 1$ имеет прж-ый корень $\bar{x} = 1{,}22$. Оценить абс-ю погр-ть этого корня.

Р. Имеем $f(\bar{x}) = 2{,}2153 - 1{,}22 - 1 = -0{,}0047$. Т.к. при $\bar{x} = 1{,}23$ получаем $f(\bar{x}) = 2{,}2888 - 1{,}23 - 1 = 0{,}0588$, то точный корень ξ содержится в инр-ле $]1{,}22; 1{,}23[$. Производная $f'(x) = 4x^3 - 1$ в этом инр-ле взр-ет, поэтому ее нм. зн-ем яв-ся $m = 4\cdot 1{,}22^3 - 1 = 6{,}64$. Отсюда по (3) имеем $|\bar{x} - \xi| = 0{,}0047/6{,}264 \approx \approx 0{,}0008$.

Отметим, что метод половинного деления на практике не всегда используется, ибо часто требует слишком большого кол-ва выч-ий.

2°. Методы хорд и касательных. Эти методы яв-ся наиболее распространенными на практике для прж-го решения ур-й.

Пусть требуется найти корень $\xi \in [a, b]$ ур-ия (1). Для опр-ти предположим, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 4). Напишем ур-ие хорды $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$.

Полагая $x = x_1$, $y = 0$, найдем $x_1 = a - \dfrac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$. Теперь, если a будем менять, а b оставим без изменения, то получим посл-ть прж-ия

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Посл-ть (4) сх-ся, т.к. она взр-ет и огр-на $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < \xi < b$.

Анч-но, если b – подвижная, a – пст-ая (рис. 5), то получим $\dfrac{x-b}{a-b} =$ $= \dfrac{y - f(b)}{f(a) - f(b)}$. Отсюда при $x = x_1$, $y = 0$ имеем $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a) \Rightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

к-ая сх. как огр-ая и уб-щая посл.: $a < \xi < \ldots < x_n < \ldots < x_1 < x_0 = b$.

зм1. Отметим, что неподвижен (т.е. пст-ый) тот конец, для к-го знак фк-и $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. На рис. 4, 5 в обоих случаях $f''(x) > 0$.

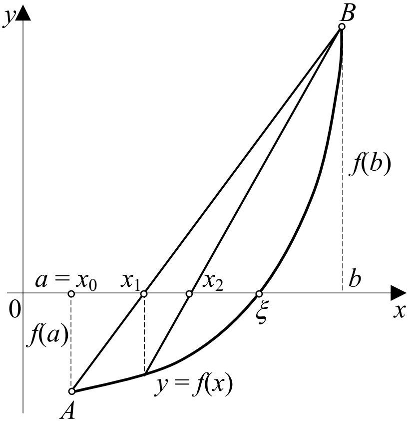


Рис. 4

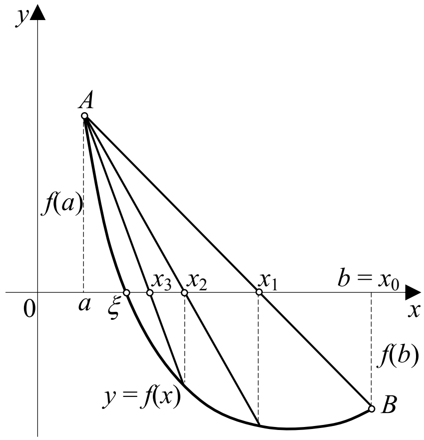


Рис. 5

Если окажется, что $f''(x) < 0$, это можно свести также к расв-му случаю, записывая ур-ие в виде $-f(x) = 0$, тогда фк. $y = -f(x)$ будет выпуклой вниз.

Для оценки погр-ти (см. (3)) можно взять

$$|x_n - \xi| < \frac{|f'(x_n)|}{m}\ (m \le |f'(x)|), \tag{6}$$

т.к. при $x \in [a, b]$ имеем $|f(x_n) - f(\xi)| < |x_n - \xi||f'(x)|$, откуда следует (6).

Приведем также оценку погр-ти в более простой форме: пусть $f'(x)$ непр-на и сохраняет пст-ый знак в $[a, b]$, причем $0 < m < |f'(x)| < M < \infty$. Для опр-ти возьмем фм-у (5), когда a яв-ся неподвижным: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)} \times$ $\times (x_{n-1} - a)$. Отсюда с учетом $f(\xi) = 0$ получим $f(\xi) - f(x_{n-1}) = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a} \times$ $\times (x_n - x_{n-1})$. Откуда по теореме Лагранжа имеем $(\xi - x_{n-1})\, f'(\bar{\xi}) = (x_n - x_{n-1})\, f'(\bar{x})$, где $\bar{\xi} \in\ ]x_{n+1}, \xi[$, $\bar{x} \in\ ]a, x_{n-1}[$. Тогда $|\xi - x_n| = \dfrac{f'(\bar{x}) - f'(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}|x_n - x_{n-1}|$ или

$$|\xi - x_n| \le \frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}|. \qquad (6а)$$

Если отрезок $[a, b]$ настолько узок, что $M \le 2m$, то из (6а) получим

$$|\xi - x_n| = |x_n - x_{n-1}|.$$

Т.о., в этом случае, как только будет обнаружено, что

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \qquad (6б)$$

где ε – заданная абс. погр-ть, то гарантировано $|\xi - x_n| < \varepsilon$.

п7. По методу хорд найти корень ур. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ в $[1{,}8; 1{,}9]$.

Р. Т.к. $f(1{,}8) = -0{,}248 < 0$, $f(1{,}9) = 0{,}339 > 0$ и $f''(x) = (6x-4)_{x=1{,}85} = 7{,}1 > 0$, то неподвижен конец b, т.е. используем фм-у (4): $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$.

Отсюда $x_1 = 1{,}8 - \dfrac{-0{,}248}{0{,}339 + 0{,}248}(1{,}9 - 1{,}8) = 1{,}842$. Выч-ив $f(1{,}842) = -0{,}01009 < 0$, снова находим $x_2 = 1{,}842 - \dfrac{-0{,}01009}{0{,}339 + 0{,}01009} = 1{,}8437$. Выч-ия зн-й фк-й дают $f(1{,}8438) < 0$, $f(1{,}8438) > 0$. Тогда, если полагать $\xi \approx x = 1{,}84375$, то погр-ть будет меньше 0,00005.

Метод касательных (Ньютона). Пусть требуется найти корень $\xi \in [a, b]$ ур-ия (1) при (для опр-ти) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 6).

Напишем ур-ие касательной, считая b подвижным, т.е. $b = x_n$:

$$Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \qquad (7)$$

Отсюда, полагая $y = 0$, $x = x_{n+1}$, получим (см. рис. 6)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

где $x_0 = b$. Если же в (8) положить $x_0 = a$ (т.е. $f(x_0)f''(x_0) < 0$), то $\tilde{x}_1 \overline{\in} [a, b]$ и метод Ньютона оказывается (см. рис. 6) не практичным. Поэтому условие

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad (8а)$$

яв-ся важным условием. При этом посл. (8) сх., т.к. она огр-на и уб-ет: $a < \xi < \ldots$ $\ldots < x_n < \ldots < x_0 = b$.

Т.о. в кач-ве исх-ой точки x_0 выбирается тот конец сегмента $[a, b]$, к-му отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x_0)$.

Для оценки погр-ти, как в (6), используем фм-у

$$|\xi - x_n| < \frac{|f(x_n)|}{m} \quad (m \le |f'(x)|). \qquad (8б)$$

Выведем еще одну фм. для оценки погр-ти, применяя фм-у Тейлора

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(\bar{\xi})(x_n - x_{n-1})^2, \quad (8в)$$

где $\bar{\xi} \in]x_{n-1}, x_n[$. Т.к. в силу (8) имеем $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$, то из (8в) находим: $|f(x_n)| \le \dfrac{1}{2}M_2(x_n - x_{n-1})^2$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. Отсюда, учитывая (8б), получим

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m}\,(x_n - x_{n-1})^2. \qquad (8г)$$

Отметим, если процесс Ньютона сх., то $x_n - x_{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому при $n \ge N$ имеем $|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$.

Однако обратное не верно, т.е. из $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ может не следовать $|\xi - x_n| < \varepsilon$ (см. рис. 7).

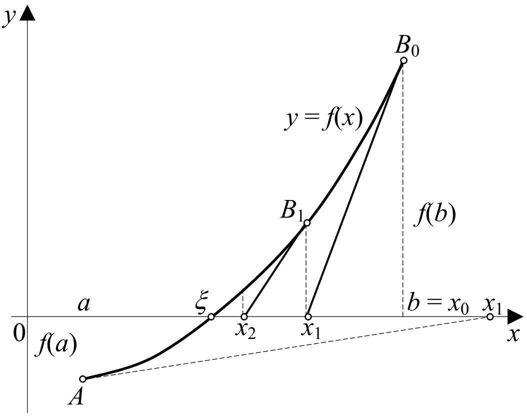


Рис. 6

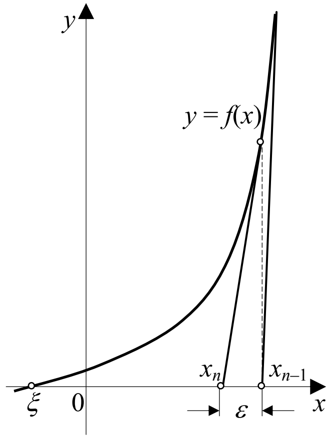


Рис. 7

п8. Методом касательных найти корень ур-ия $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ в сегменте [1,8; 1,9] (см. п7).

Р. Находим $f''(x) = (3x^2 - 4x + 3)' = 6x^2 - 4$. Т.к. $f(1{,}9)f''(1{,}9) = 0{,}339 \cdot 7{,}4 = 2{,}51 > 0$, то $x_0 = 1{,}9$. Учитывая, что $f'(1{,}9) = 6{,}23$, по (8) имеем $x_1 = 1{,}9 - 0{,}339/6{,}23 = 1{,}846$. Выч-ив $f(1{,}846) = 0{,}0132$ и $f'(1{,}846) = 5{,}8391$, находим $x_2 = 1{,}846 - 0{,}0132/5{,}8391 = 1{,}8438$. Как видели в п7, погр-ть найденного корня не превышает 0,00001.

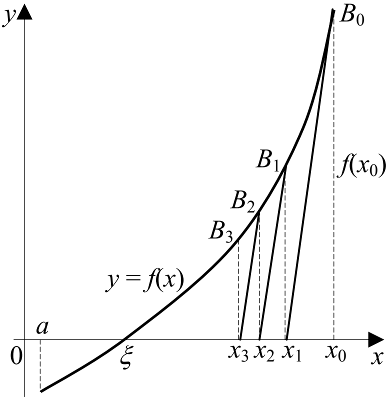


Рис. 8

зм2. Если на $[a, b]$ $f'(x)$ изменяется мало, то в (8) можно полагать $f'(x_n) \approx f'(x_0)$, тогда имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

Фм. (9) избавляет нас от необходимости каждый раз выч-ть производную $f'(x_n)$. Геом-ки этот способ означает, что мы заменяем касательные в точках $B_n(x_n, f(x_n))$ касательной в фиксированной точке $B_0(x_0, f(x_0))$, т.е. касательные прл-ны (рис. 8).

3°. Комбинированный метод хорд и касательных. Пусть $f(a)f(b) < 0$ и $f'(x), f''(x)$ сохраняют пст-ые знаки на отрезке $[a, b]$. Комбинируя метод хорд и касательных, можно с двух сторон прж-ся к корню ξ ур-ия $f(x) = 0$. Здесь возможны четыре случая:

1*. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ (рис. 9).

2*. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (рис. 10).

3*. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (рис. 11).

4*. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (рис. 12).

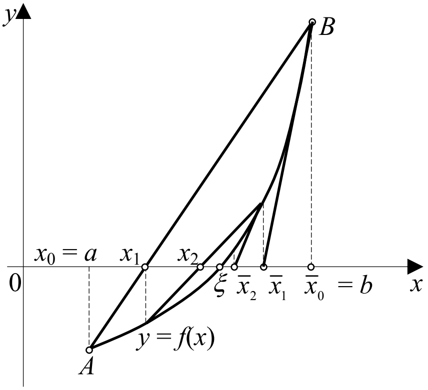


Рис. 9

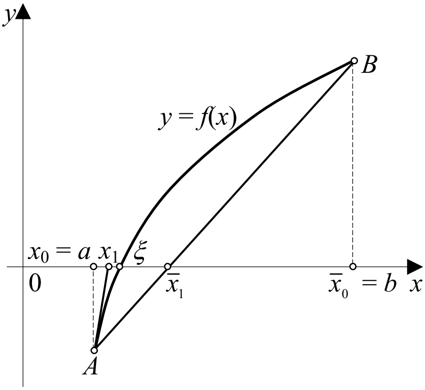


Рис. 10

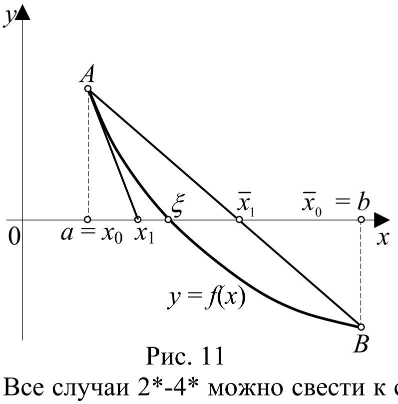


Рис. 11

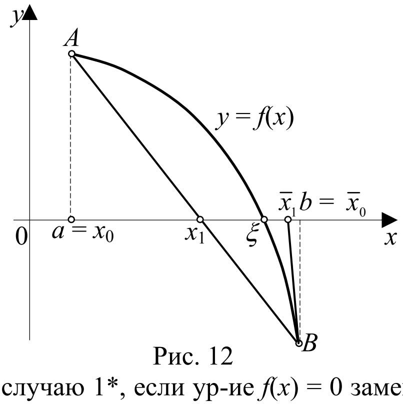


Рис. 12

Все случаи 2*-4* можно свести к случаю 1*, если ур-ие $f(x) = 0$ заменим равносильными ему ур-ми: $-f(x) = 0$ или $\pm f(-z) = 0$, где $z = -x$. Поэтому рас-им только случай 1* и используем фм-ы (5) и (8), полагая $x_0 = a$ и $\bar{x}_0 = b$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} (\bar{x}_n - x_n), \tag{10}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где $x_n < \xi < \bar{x}_n$ в силу сх-ти методов хорд и касательных. Отсюда

$$0 < \xi - x_n < \bar{x}_n - x_n, \tag{12}$$

т.е. процесс итерации можно прекратить по обнаружении условия $\bar{x}_n - x_n < \varepsilon$ и взять $\xi = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \bar{x}_n\right)$.

п9. Выч-ть с точностью 0,0005 едн-ый плж. корень ур. $f(x) = x^5 - x - 0{,}2$.

Р. Т.к. $f(1) = -0{,}2 < 0$ и $f(1{,}1) = 0{,}3105 > 0$, то $\xi \in [1;\, 1{,}1]$, где $f'(x) = 5x^4 - 1 > 0$ и $f''(x) = 20x^3 > 0$, т.е. знаки производных сохраняются. Т.к. $f'(x)f''(x) > 0$, то полагаем $x_0 = 1$, $\bar{x}_0 = 1{,}1$. Находим $f'\left(\bar{x}_0\right) = f'(1{,}1) = 6{,}3205$ и по (10) и (11) выч-им $x_1 = 1 + \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}3105 + 0{,}2} = 1{,}039$; $\bar{x}_1 = 1{,}1 - \dfrac{0{,}31051}{6{,}3205} = 1{,}051$. Выч-им $x_2 = 1{,}039 + \dfrac{0{,}0282 \cdot 0{,}012}{0{,}0595} = 1{,}04469$; $\bar{x}_2 = 1{,}051 - \dfrac{0{,}0313}{5{,}1005} = 1{,}04487$. Т.к. $\bar{x}_2 - x_2 = 0{,}00018 < 0{,}0005$, то процесс прекращаем и берем $\xi = \dfrac{1}{2}(1{,}04469 + {}$ $+ 1{,}04487) = 1{,}04478 \approx 1{,}045$ с абс-ой погр-ю, меньшей $\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}00018 + 0{,}00022 = {}$ $= 0{,}00031 < \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

зм3. Если условие (8а) не выполняется и случаи 2*-4* трудно свести к случаю 1*, то при использовании фм-л (10) и (11) в обз-ях концов отрезка надо поменять местами a и b.

п10. Комбинированным методом найти решение ур. $(x - 1)^2 = \dfrac{1}{2}e^x$.

Р. Ур. запишем в виде $f(x) = e^x - 2(x - 1)^2$. Находим $f(0) = -1 < 0$ и $f(1) = {}$ $= e \approx 2{,}7 > 0$, значит, корень $x \in [0,\, 1] = [a,\, b]$. Проверим знаки $f'(x) = e^x - {}$ $- 4(x - 1) > 0$, т.к. $e^x > 0$, $x - 1 < 0$; $f''(x) = e^x - 4 < 0$, т.е. (8а) не выполняется, имеет место случай 2*. Тогда обз-им через $0 = \bar{x}_0 = a$ и $1 = x_0 = b$. Фм-ы (10), (11) в принципе остаются без изменений.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f\left(x_n\right) - f\left(\bar{x}_n\right)}\left(x_n - \bar{x}_n\right), \qquad x_1 = 1 - \frac{2{,}718 \cdot 1}{2{,}718 + 1} = 1 - 0{,}73 = 0{,}27,$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f\left(\bar{x}_n\right)}{f'\left(\bar{x}_n\right)}, \qquad \bar{x}_1 = 0 - \frac{-1}{5} = 0{,}2.$$

Выч-ем $f(0{,}27) = 1{,}31 - 2(-0{,}73)^2 = 1{,}31 - 1{,}0658 = 0{,}2442$; $f(0{,}2) = 1{,}2214 - {}$ $- 1{,}28 = -0{,}0586$; $x_2 = 0{,}27 - \dfrac{0{,}2442}{0{,}2442 + 0{,}0586}(0{,}27 - 0{,}2) = 0{,}27 - 0{,}0565 = {}$ $= 0{,}2135$; $\bar{x}_2 = 0{,}2 - \dfrac{-0{,}0586}{4{,}414} = 0{,}2 + 0{,}0133 = 0{,}2133$. Тогда за решение ур-ия можно взять $\xi = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \bar{x}_2\right) = 0{,}2134$ с точностью 0,0001.

4°. Принцип сжатых отображений и метод итераций. Основой итерационных методов яв-ся принцип сжатых отображений.

Отб-ие A пр-ва X в себя (т.е. $z = Ax$ для любого $x, z \in X$) наз. сжимающим отб-ем (или сжатием), если сущ-ет $\alpha \in\ ]0, 1[$, такое, что для любых $x, y \in X$ выполняется нерав-во

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y). \tag{13}$$

Всякое сжимающее отб. непр-но, т.е. $Ax_n \to Ax$ при $x_n \to x$.

Точка x наз. неподвижной точкой отб-ия A, если $Ax = x$, т.е. неподвижная точка есть решение ур-ия $Ax = x$.

т3 (принцип сжатых отб-й). Всякое сжимающее отб-ие, опр-ое в полном (всякая посл-ть имеет предельную точку, т.е. фунд-ая) мтр-ом пр-ве X, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Д. Пусть x_0 – произвольная точка в X. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, …, $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$. Сначала д-ем, что посл. $\{x_n\}$ фунд-ая, т.е. $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Считая $m \ge n$, получим $\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) \le \alpha^n\rho(x_0, A^{m-n}x_0) \le \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \le$ $\le \alpha^n[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \le \alpha^n\rho(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots$ $\ldots + \alpha^{m-n-1}] = \alpha^n\rho(x_0, x_1)\dfrac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \le \alpha^n\rho(x_0, x_1)\dfrac{1}{1-\alpha} < \varepsilon$, т.к. $\alpha \in\ ]0, 1[$ и $\alpha^n \to 0$ при $n \to \infty$. Итак,

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_0, x_1)\frac{\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon. \tag{13а}$$

Значит, посл. $\{x_n\}$ фунд-ая. В силу полноты X фунд-ая посл. $\{x_n\}$ имеет предел. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда в силу непр-ти отб-ия A получим $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, т.е. сущв-ие точки x д-но. Д-ем едн-ть. Если $Ax = x$, $Ay = y$, то

$$\rho(Ax, Ay) = \rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y). \tag{13б}$$

Т.к. $\alpha \in\ ]0, 1[$, то (13а) выполняется лишь при $\rho(x, y) = 0$, т.е. $x \equiv y$ ■

Метод итерации и оценка погрешности. Пусть дано ур-ие

$$f(x) = 0, \tag{14}$$

где $f(x)$ – непр. фк-ия. Найти дсв-ые корни ур-ия (14).

Для этого заменим ур. (14) равносильным ур-ем

$$x = \varphi(x). \tag{14а}$$

Выберем каким-либо способом (н-р, грф-им) грубое зн. корня x_0 и подставим его в правую часть ур-ия (14а), тогда получим

$$x_1 = \varphi(x_0). \tag{14б}$$

Подставляя теперь в правую часть (14а) вместо x_0 число x_1, получим число $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя процесс, получим посл-ть чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Если посл. (15) сх., т.е. сущ-ет $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то, переходя к пределу в (15): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1})$ находим корень ур-ия (14а), к-ый есть решение ур. (14).

Выясним геом. смысл метода итераций. Пусть требуется решить ур. (14). Заменим его ур-ем $x = \varphi(x)$. Построим грф-и фк-й $y = x$ и $y = \varphi(x)$ (рис. 13).

Абсцисса ξ точки их пересечения будет корнем ур-ия (14). Для ее нахождения, отправляясь от нек-ой точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$, строим ломаную линию (лестницу) $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$, звенья к-ой попеременно прл-ны оси Ox и Oy, причем вершины $A_0A_1A_2\ldots$ лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины $B_1B_2\ldots$ на пм. $y = x$. Абсциссы $x_0, x_1, x_2, \ldots$ точек $A_0, A_1, A_2, \ldots$ яв-ся посл-ю прж-ия корню ξ.

Возможен также другой вид (спираль) ломаной $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$ (рис. 14). Очевидно, что решение в виде лестницы получается при $\varphi'(x) > 0$, а в виде спирали – при $\varphi'(x) < 0$. Причем в любых случаях в окрс-ти точки ξ имеем $|\varphi'(x)| < 1$, т.е. процесс итерации сх-ся.

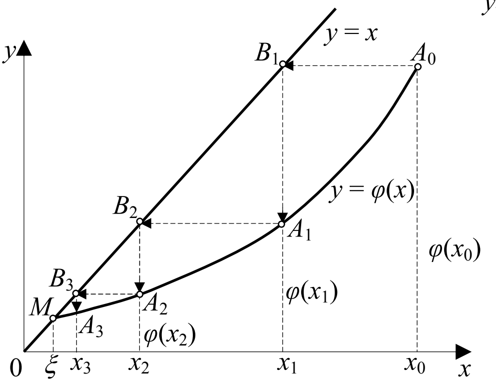


Рис. 13

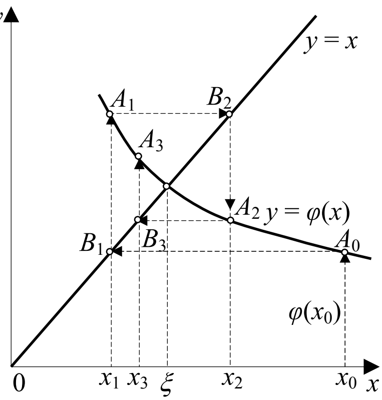


Рис. 14

Однако, если рас-ть случай $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может и расх-ся (рис. 15). Поэтому для практического применения метода итерации нх-мо выяснить дт-ый признак сх-ти итерационного процесса.

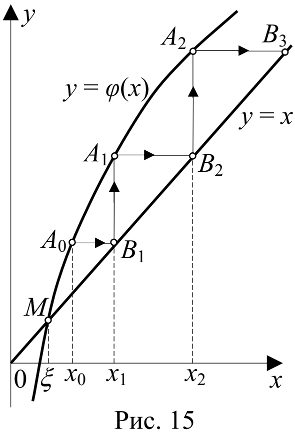


Рис. 15

т4. Пусть фк. $\varphi(x)$ опр-на и диф-ма на отрезке $[a, b]$, причем все ее зн-ия $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если сущ-ет q (н-р, $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$) такая, что

$$|\varphi'(x)| \le q < 1,\ x \in\ ]a, b[, \tag{16}$$

то: 1) процесс итерации

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots \tag{16а}$$

сх-ся незв-мо от нач-го зн-ия $x_0 \in [a, b]$;

2) предельное зн. $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ яв-ся едн-ым корнем ур-ия

$$x = \varphi(x) \tag{16б}$$

на отрезке $[a, b]$, т.е. $\xi = \varphi(\xi)$.

Д. Рас-им $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, к-ые в силу усл-й теоремы заведомо имеют смысл. Отсюда и по теореме Лагранжа имеем $x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = (x_n - x_{n+1})\,\varphi'(\bar{x}_n)$, где $\bar{x}_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Тогда по (16)

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|. \tag{16в}$$

Отсюда при $n = 1, 2, \ldots$ посл-но выводим

$$|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|;$$
$$|x_3 - x_2| \le q|x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0|. \quad (16г)$$

Рас-им ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots, \quad (16д)$$

для к-го посл-ые прж-ия x_n яв-ся $(n + 1)$-ми частными суммами, т.е. $x_n = S_{n+1}$. В силу (16г) члены ряда (16д) по абс. вел-е меньше ств-их членов геом. прогрессии со знаменателем $q < 1$, поэтому ряд (16д) сх-ся и притом абс-но. Сд-но, сущ-ет $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, причем, очевидно, $\xi \in [a, b]$.

Переходя к пределу в (16а) и в силу непр-ти $\varphi(x)$ получим

$$\xi = \varphi(\xi). \quad (16е)$$

Т.о., ξ яв-ся корнем ур-ия (16б). Другого корня на отрезке $[a, b]$ ур. (16б) не имеет. Дсв-но, если $\xi = \varphi(\xi)$ и $\bar{\xi} = \varphi\left(\bar{\xi}\right)$, то (по теореме Лагранжа) $\xi - \bar{\xi} = \varphi(\xi) - \varphi\left(\bar{\xi}\right) = \left(\xi - \bar{\xi}\right)\varphi'(C)$, где $C \in \left[\xi, \bar{\xi}\right] \Rightarrow \left(\xi - \bar{\xi}\right)(1 - \varphi'(C)) = 0$. Т.к. $1 - \varphi'(C) \ne 0$, то $\xi = \bar{\xi}$, т.е. корень ξ – едн-ый ■

Отсюда погр-ти метода можно получить из (16г): $|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+1} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \le q^{n+p-1}|x_1 - x_0| + q^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \ldots + q^n|x_1 - x_0| \le q^n|x_1 - x_0|(1 + q + \ldots + q^{p-1})$ или $|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0| \dfrac{1 - q^p}{1 - q} < \dfrac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|$, т.к. $q < 1$, то $q^p \to 0$ при $p \to \infty$.

Учитывая, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p} = \xi$, окончательно получим оценку

$$|\xi - x_n| < \frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|. \quad (17)$$

Заметим, что фм-а (17) непосредственно следует из фм-ы (13а).

Для оценки погр-ти можно дать и др. ф-у, полезную в нек-ых случаях. Пусть $f(x) = x - \varphi(x)$. Тогда $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \ge 1 - q$. Отсюда и учитывая $f(\xi) = 0$, получим

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi|\left|f'(\bar{x}_n)\right| \ge (1 - q)|x_n - \xi| \ (\bar{x}_n \in [x_n, \xi]) \Rightarrow$$

$$|x_n - \xi| \le \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1 - q}. \quad (17а)$$

Т.к. $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, то

$$|x_n - \xi| \le \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - q}. \quad (17б)$$

Используя фм-ы (17б) и (16в), получим также

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1 - q}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow \quad (17в)$$

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\,\varepsilon. \qquad (17г)$$

Т.о. процесс надо продолжать до получения нерав-ва (17г). В част., при $q = 1/2$ получим $|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, откуда имеем $|\xi - x_n| < \varepsilon$.

зм4. Сущ-ет мнение, что если $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, то $\xi = x_n$, но такое утв-ие не верно (см. рис. 16). Более того, легко показать, что если $\varphi'(x)$ близка к 1, то вел-а $|\xi - x_n|$ может быть большой, хотя $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Поэтому процесс продолжают до тех пор, пока не выполнится нерав-во (17г).

зм5. Иногда при неудачном выборе нач-го зн-ия x_0 посл-ые прж-ия $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \ldots$) могут покинуть инр-л $]a, b[$ или даже потерять смысл. Поэтому полезна др. формулировка т4, к-ую примем без д-ва.

т5. Пусть фк. $\varphi(x)$ опр-на и диф-ма на нек-ом отрезке $[a, b]$, причем ур. $x = \varphi(x)$ имеет корень, лежащий в более узком отрезке $[\alpha, \beta]$, где

$$\alpha = a + \frac{1}{3}(b - a),\ \beta = b - \frac{1}{3}(b - a). \qquad (18)$$

Тогда, если а) $|\varphi'(x)| \le q < 1$ при $x \in\ ]a, b[$; б) нач. прж-ие $x_0 \in [\alpha, \beta]$, то:

1) все посл-ые прж-ия $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in\ ]a, b[$ ($n = 1, 2, \ldots$);

2) процесс посл-ых прж-й сх., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, причем ξ – едн-ый корень на отрезке $[a, b]$ ур-ия $x = \varphi(x)$;

3) справедлива оценка $|\xi - x_n| \le \dfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$, т.е. (17).

п11. Найти дсв. корни ур. $x - \sin x = 0{,}25$ с точностью до трех значащих цифр.

Р. Ур-ие представим в виде $x = 0{,}25 + \sin x$. Построив грф-и (рис. 17) фк-й $y = x$ и $y = 0{,}25 + \sin x$, находим отрезок $[\alpha, \beta] = [1{,}1;\ 1{,}3]$, содержащий один дсв-ый корень ξ, прж-но равный $x_0 = 1{,}2$.

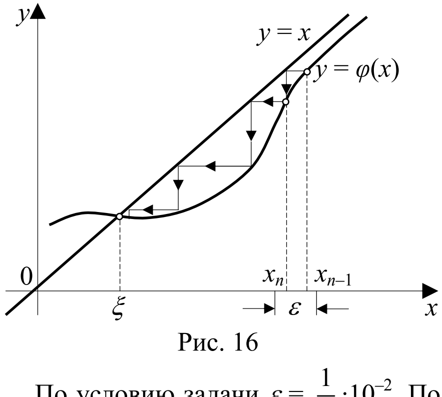


Рис. 16

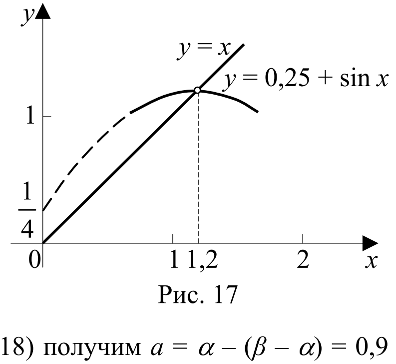


Рис. 17

По условию задачи $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$. По (18) получим $a = \alpha - (\beta - \alpha) = 0{,}9 \approx \approx \text{arc } 52°$, $b = \beta + (\beta - \alpha) = 1{,}5 \approx \text{arc } 86°$. Тогда при $x \in\ ]0{,}9;\ 1{,}5[$ имеем: $|\varphi'(x)| = \cos 52° \approx 0{,}62 = q$. Отсюда $\dfrac{1-q}{q}\,\varepsilon = 0{,}51\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-2} \approx 0{,}0025$. Теперь выч-им

$x_1 = \sin 1{,}2 + 0{,}25 = 0{,}932 + 0{,}25 = 1{,}182;$
$x_2 = \sin 1{,}82 + 0{,}25 = 1{,}175;$
$x_3 = \sin 1{,}175 + 0{,}25 = 1{,}173;$
$x_4 = \sin 1{,}173 + 0{,}25 = 1{,}172;$
$x_5 = \sin 1{,}172 + 0{,}25 = 1{,}172.$

Четвертые и пятые прж-ия совпали с точностью до четырех значащих цифр. Тогда

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_4 - x_3| = \frac{0{,}62 \cdot 0{,}001}{1-0{,}62} = 0{,}0016.$$

Т.к. предельная абс. погр-ть прж-ия корня x_n, включая погр-ть округления, не превышает $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0{,}0016 + 0{,}002 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$, то можно принять $\xi = 1{,}17 \pm 0{,}005$.

ЛЕКЦИЯ 31

10.2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1º. Метод итерации. Пусть требуется найти дсв. корни системы ур-й с заданной точностью

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Число корней и их грубые прж. зн-ия можно найти, построив кривые (1) и опр-ив крд-ты (x_0, y_0) их точек пересечения (рис. 1). Для этого систему (1) представим в виде

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi_1(x, y); \\ y = \varphi_2(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1а)$$

и построим посл-ые прж-ия по фм-ам:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (1б)$$

Если итерационный процесс (1б) сх., то сущ-ют пределы

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n,\ \eta = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

тогда, предполагая $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ непр-ми и переходя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(x_n, y_n) \Rightarrow \xi = \varphi_1(\xi, \eta),$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi_2(x_n, y_n) \Rightarrow \eta = \varphi_2(\xi, \eta),$$

т.е. предельные зн-ия ξ, η яв-ся корнями ур. (1а), сд-но, и (1). Если итерационный процесс (1б) расх-ся, то им пользоваться нельзя.

т1. Пусть в нек-ой замкнутой окрс-ти $R = \{a \le x \le A,\ b \le y \le B\}$ имеется одна и только одна пара корней $x = \xi$ и $y = \eta$ системы (1а). Если:

1) фк-и $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ опр-ны и непр-но диф-мы в R;

2) для любых $x_n, y_n \in R$;

3) в R выполнены нерав-ва $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1$, $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1$,

то процесс посл-ых прж-й (1б) сх-ся к корням $x = \xi$, $y = \eta$ системы (1а), т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Заметим, что т1 остается верной, если (3) заменить условием

4) в R выполнены нерав-ва $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1$, $\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1$.

Д-во можно провести на основе сжатых отб-й 4º: 10.1 анч-но т1, 2.

п1. Найти плж. корни с четырьмя значащими цифрами системы

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0; \\ f_2(x, y) = x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Р. Строим грф. фк-й $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ (рис. 2). Прж-но находим $x_0 = 3{,}5$; $y_0 = 2{,}2$ (взяли по абс. вел-е). Для применения метода итерации напишем (2) в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}} = \varphi_1(x, y); \\ y &= \sqrt{x + 3\lg x} = f_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{2а}$$

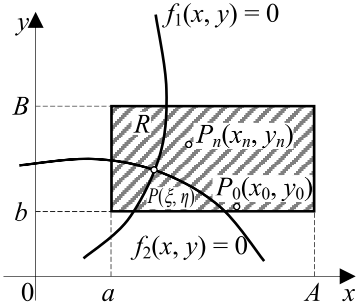


Рис. 1

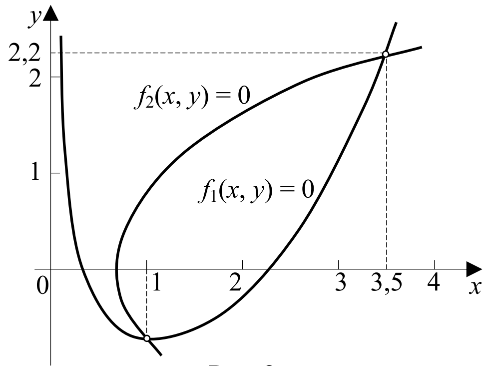


Рис. 2

Огр-ясь окрс-ю $R = \{|x - 3{,}5| \le 0{,}1,\ |y - 2{,}2| \le 0{,}1\}$, находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}},\ \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| \le \frac{2{,}3+5}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}} < 0{,}54;$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{1+\frac{3}{x}\lg e}{2\sqrt{x+3\lg x}},\ \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le \frac{1+\frac{3\cdot 0{,}43}{3{,}4}}{2\sqrt{3{,}4+3\lg 3{,}4}} < 0{,}42;$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}},\ \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le \frac{3{,}6}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}} < 0{,}27;$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0,\ \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le 0.$$ Отсюда имеем

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| < 0{,}54 + 0{,}42 = 0{,}96 < 1; \tag{2б}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 0{,}27 + 0 = 0{,}27 < 1. \tag{2в}$$

Сд-но, если $(x_n, y_n) \in R$, то итерационный процесс (2а) сх-ся. А отс-ая близость суммы (2б) к ед-е указывает на то, что итерационный процесс в данном случае сх-ся сравнительно медленно.

В табл. 1 приведены выч-ия по фм-ам:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \sqrt{\frac{x_n(y_n+5)-1}{2}};\\ y_n &= \sqrt{x_n + 3\lg x_n}. \end{aligned}\right\}$$

Таблица 1

n	x_n	y_n
0	3,5	2,2
1	3,479	2,259
2	3,481	2,260
3	3,484	2,261
4	3,486	2,261
5	3,487	2,262
6	3,487	2,262

Итак, $\xi = 3{,}487$; $\eta = 2{,}262$.

зм1. Вместо фм-ы (1б) иногда удобнее пользоваться «процессом Зейделя»:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n);\\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_{n+1}, y_n)\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

зм2. Метод итераций (1б) можно обобщать для фк-й трех и более пер-ых.

2°. Метод Ньютона. Пусть x_n, y_n – прж. корни системы ур-й

$$F(x, y) = 0,\ G(x, y) = 0. \tag{4}$$

Полагаем

$$x = x_n + h_n,\ y = y_n + k_n. \tag{4а}$$

Тогда (4) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} F(x_n + h_n, y_n + k_n) &= 0;\\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4б}$$

Отсюда по фм-е Тейлора, огр-ясь лин-ми членами, получим

$$\left.\begin{aligned} F(x_n, y_n) + h_nF_x'(x_n, y_n) + k_nF_y'(x_n, y_n) &= 0;\\ G(x_n, y_n) + h_nG_x'(x_n, y_n) + k_nG_y'(x_n, y_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4в}$$

Если Якобиан $J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F_x'(x_n, y_n) & F_y'(x_n, y_n) \\ G_x'(x_n, y_n) & G_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0$, то из (4в) находим

$$\left.\begin{aligned} h_n &= -\frac{1}{J(x_n, y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F_y'(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix} = -\frac{J_1(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)};\\ k_n &= -\frac{1}{J(x_n, y_n)}\begin{vmatrix} F_x'(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G_x'(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix} = -\frac{J_2(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)}. \end{aligned}\right\} \tag{4г}$$

Сд-но, учитывая (4а), получим

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{J_1(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)};\\ y_{n+1} &= y_n - \frac{J_2(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)}. \end{aligned}\right\} \tag{4д}$$

п2. Найти дсв. корни системы

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= 2x^3 - y^2 - 1 = 0;\\ G(x, y) &= xy^3 - y - 4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4е}$$

Р. Грфч-им способом находим грубые корни: $x_0 = 1{,}2$; $y_0 = 1{,}7$ (рис. 3). Выч-им $F(1{,}2;\ 1{,}7) = -\ 0{,}434$, $G(1{,}2;\ 1{,}7) = 0{,}1956$; $J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix}$,

$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 97{,}910,\ h_0 = -\dfrac{1}{97{,}910} \times$

$\times \begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix} = \dfrac{3{,}389}{97{,}910} = 0{,}0349,\ k_0 = -\dfrac{1}{97{,}910} \times$

$\times \begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = -\ 0{,}0390$. Отсюда по фм-е (4д)

находим $\left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349; \\ y_1 &= 1{,}7 - 0{,}0390 = 1{,}6610. \end{aligned}\right\}$ Повторяя процесс, имеем $x_2 = 1{,}2343$, $y_2 = 1{,}6615$ и т.д.

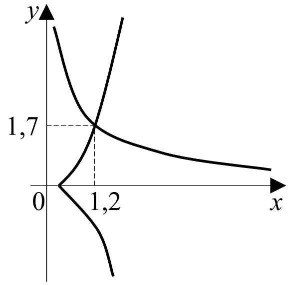


Рис. 3

3º. Метод Ньютона для случая комплексных корней. На практике (н-р, при решении лин. диф. ур-й) приходится находить комп. корни кр-ия

$$f(z) = 0, \tag{5}$$

где $f(z)$ ($z = x + iy$, $i^2 = -1$) – аналитическая фк-ия (т.е. имеющая непр. производную) в нек-ой выпуклой окрс-ти U ее изолированного корня $\zeta = \xi + i\eta$ ($f'(\zeta) \neq 0$).

Пусть z_n ($z_n \in U$) – прж. зн-ие, а $z_{n+1} = z_n + \Delta z_n$ – уточненное зн. корня. Применяя разложение в ряд Тейлора в точке z_n и считая, что $f(z_{n+1}) \approx 0$ с точностью до Δz_n^2, получим $f(z_{n+1}) = f(z_n) + \Delta z_n f'(z_n) = 0$, отсюда

$$\Delta z_n = -\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \tag{5а}$$

Тогда прж-ые зн-ия корня можно выч-ть по фм-е

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5б}$$

Для оценки погр-ти прж-го зн-ия z_n предположим, что $|f'(z_n)| \geq m_1 > 0$, $z \in U$. Тогда для данной фк-и $w = f(z)$ в дт-но малой R-окрс. корня ζ сущ-ет однозначная фк-ия $z = f^{-1}(w)$, опр-ая в нек-ой окрс. $|w| < \beta$, производная к-ой равна

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} = \frac{1}{f'(z)}. \tag{5в}$$

Предполагая, что $|f(z_n)| < \rho$, имеем

$$z_n - \zeta = f^{-1}(f(z_n)) - f^{-1}(f(\zeta)) = \int\limits_{f(\varsigma)}^{f(z_n)} \frac{d}{dt}\left[f^{-1}(t)\right]dt = \int\limits_{0}^{f(z_n)} \frac{dt}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}, \tag{5г}$$

где t – текущая точка, пробегающая прямолинейный отрезок между точками $f(\zeta) = 0$ и $f(z_n)$ (рис. 4). Т.к. $|t| < \rho$, то $|f^{-1}(t)| < R$ и сд-но, $|f'(f^{-1}(t))| \geq m_1$. Отсюда и в силу (5г) получим

$$|z_n - \zeta| \leq \int\limits_{0}^{f(z_n)} \frac{dt}{\left|f'\left(f^{-1}(t)\right)\right|} \leq \frac{|f(z_n)|}{m_1}. \tag{6}$$

Дт-ое условие сущв-ия корня ур-ия (5) вытекает из

т2. Если фк. $f(z)$ – аналитическая в замкнутой R-окрс-ти точки z_0, причем выполнены нерав-ва:

1) $\left|\dfrac{1}{f'(z_0)}\right| \le A_0$;

2) $\left|\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right| \le B_0 \le \dfrac{R}{2}$;

3) $|f''(z)| \le C$ при $|z - z_0| < R$;

4) $2A_0B_0C = \mu_0 \le 1$,

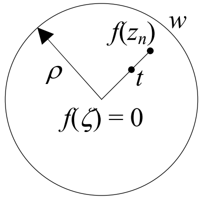


Рис. 4

то ур. (5) имеет едн-ый корень ζ в обл. $|z - z_0| \le R$ и процесс Ньютона (5б), опр-мый нач-ым прж-ем z_0, сх. к этому корню, т.е. $\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Быстрота сх-ти процесса хркз-ся оценкой

$$|\zeta - z_n| \le B_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \mu_0^{2^n - 1}. \qquad (6а)$$

п3. Прж-но найти нм-ие по модулю корни ур-ия

$$f(z) = e^z - 0{,}2z + 1 = 0. \qquad (6б)$$

Р. Находим $f'(z) = e^z - 0{,}2$. Т.к. $f'(z) = 0$ при $\tilde{z} = \ln 0{,}2 \approx -1{,}72$ и $f(-\infty) = +\infty$, $f(\tilde{z}) > 0$, $f(\infty) = \infty$, то ур. (6б) дсв. корней не имеет. За нач-ое прж-ие искомого корня примем нм-й по модулю корень z_0 ур-ия $e^z + 1 = 0$. Отсюда можно полагать $z_0 = \pi i$ и по (5б) находим $z_1 = z_0 - \dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)} = \pi i - \dfrac{0{,}2\pi i}{1{,}2} = \dfrac{5}{6}\pi i =$ $= 2{,}618i$ (ибо $f(z_0) = e^{\pi i} - 0{,}2\pi i + 1 = -0{,}2\pi i$, $f'(z_0) = e^{\pi i} - 0{,}2 = (\cos\pi + i\sin\pi) -$ $- 0{,}2 = -1 - 0{,}2 = -1{,}2$).

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = \frac{5}{6}\pi i - \frac{0{,}132 - 0{,}024i}{-1{,}868 + 0{,}5i} = 0{,}069 + 2{,}624i \text{ и т.д.}$$

В табл. 2 приведены результаты выч-й с точностью до 0,001. Здесь для выч-ия e^z при $z = x + iy$ использовали фм-у $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Таблица 2

n	z_n	e^{z_n}	$f(z_n)$	$f'(z_n)$	$\Delta z_n = -\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$
0	$3{,}142i$	-1	$-0{,}628i$	$-1{,}2$	$-0{,}524i$
1	$2{,}618i$	$-0{,}868 + 0{,}5i$	$0{,}132 - 0{,}024i$	$-1{,}068 + 0{,}5i$	$0{,}153 + 0{,}040i$
2	$0{,}153 + 2{,}658i$	$-1{,}030 + 0{,}541i$	$-0{,}061 + 0{,}009i$	$-1{,}230 + 0{,}541i$	$-0{,}044 - 0{,}012i$
3	$0{,}109 + 2{,}646i$	$-0{,}978 + 0{,}535i$	$0{,}006i$	$-1{,}178 + 0{,}535i$	$-0{,}002 + 0{,}004i$
4	$0{,}107 + 2{,}650i$	$-0{,}981 + 0{,}525i$	$-0{,}002 + 0{,}005i$	$-1{,}181 + 0{,}525i$	$-0{,}000 - 0{,}004i$
5	$0{,}107 + 2{,}646i$	$-0{,}977 + 0{,}534i$	$0{,}002 + 0{,}005i$	$-1{,}177 + 0{,}534i$	

Полагая $\zeta \approx z_5 = 0{,}107 + 2{,}646i$, имеем $f(z_5) = 0{,}002 + 0{,}005i$. Прж-но считая $m_1 = |f'(\zeta)| = \sqrt{(-1{,}177)^2 + (0{,}534)^2} \approx 1{,}3$, в силу (6) получим

$$|\zeta - z_5| \approx \frac{|f(z_0)|}{m_1} = \frac{0{,}001\sqrt{20}}{1{,}3} \approx 0{,}004.$$

Ур. (6б) имеет также сопряженный корень $\bar{\varsigma}$ = 0,107 – 2,646i. Дсв-но, имеем $f(\bar{\varsigma}) = \overline{f(\varsigma)} = 0$.

зм3. Дадим другой способ решения ур. (5). Полагая $z = x + iy$ в (5) и выделяя ее дсв-ю и мнимую части, имеем $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 0$,

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) = 0; \\ v(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Решение системы (7) см. в 1º и 2º. Заметим, что этот способ годится также и в случае неаналитичности фк-и $f(z)$.

4º. Итерационные методы решения линейных систем. Способы решения систем лин-ых ур-й делятся на две группы: 1*. Точные методы (правило Крамера, метод Гаусса и др.). 2*. Итерационные методы (Зейделя, релаксации, итерации и др.), т.е. прж-ые методы. Правило Крамера в ЭВМ не применяется, т.к. оно требует большого числа ариф-их действий. Метод Гаусса используется в ЭВМ при решении систем до порядка 10^3, а итерационные методы – до порядка 10^6. Здесь рас-им лишь группу 2*, т.к. группа 1* расв-ся в лин-ой алгебре.

Метод итерации. Пусть дана лин. система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

к-ую можно писать кратко в матричной форме

$$Ax = b. \quad (8а)$$

Предполагая, что диагональные эл. $a_{ij} \neq 0$ ($i = \overline{1,n}$), разрешим первое ур. системы (1) отс-но x_1, второе – отс-но x_2 и т.д.

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n; \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}x_{n-1}, \end{aligned}\right\} \quad (8б)$$

где $\beta_i = b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -\, a_{ij}/a_{ii}$ при $i \neq j$ и $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = \overline{1,n}$). Систему (8б) запишем в матричной форме

$$x = \beta + \alpha x, \quad (8в)$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Систему (8в) решим методом итераций по фм-е

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad (9)$$

где $x^{(0)} = \beta$.

Если сущ-ет предел $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то этот предел яв-ся решением системы (8б), сд-но, (8). В самом деле, переходя к пределу в (9), получим $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \beta +$

$+\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ или $x = \beta + \alpha x$, т.е. предельный вектор яв-ся решением системы (8в), сд-но, (8).

Для удобства стн. (9) запишем в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned} &x_i^{(0)} = \beta_i; \\ &x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \;\; (\alpha_{ii} = 0,\ i = \overline{1,n},\ k = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{9а}$$

Метод посл-ых прж-й, опр-мых фм-ой (9) или (9а) наз. методом итерации. Процесс итерации сх. тем быстрее, чем меньше α_{ii} ($i \neq j$) в (9а) или чем больше по модулю диагональные эл-ы системы (8) не диагональных (свободные члены при этом роли не играют).

п4. Методом итерации решить систему

$$\left.\begin{aligned} &4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8; \\ &0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9; \\ &0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20. \end{aligned}\right\} \tag{9б}$$

Р. Систему (9б) приведем к норм. виду (8б).

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 & x_1^{(0)} = 2 & x_1^{(1)} = 2 - 0{,}06\cdot 3 + 0{,}02\cdot 5 = 1{,}92 \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 & x_2^{(0)} = 3 & x_2^{(1)} = 3 - 0{,}03\cdot 2 + 0{,}05\cdot 5 = 3{,}19 \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 & x_3^{(0)} = 5 & x_3^{(1)} = 5 - 0{,}01\cdot 2 + 0{,}02\cdot 3 = 5{,}04 \end{array}$$

Далее выч-яем: $x_1^{(2)} = 1{,}9094$, $x_2^{(2)} = 3{,}1944$, $x_3^{(2)} = 5{,}0446$;

$x_1^{(3)} = 1{,}90923$, $x_2^{(3)} = 3{,}19495$, $x_3^{(3)} = 5{,}04485$ и т.д.

зм4. За нулевое прж. можно взять не только свободные члены, но и любой др. вектор, н-р, на основе грубой прикидки.

Сх-йся процесс итерации обладает важным св-ом самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в выч-ях не отразится на окончательном результате, т.к. ошибочное прж-ие можно расв-ть как любой нач. вектор.

зм5. Ур. (8а) можно приводить к виду (8в) и не предполагая $a_{ii} \neq 0$. Для этого (8а) пишем в виде $x = b + x - Ax = b + Ex - Ax = b + (E - A)x$. Откуда получим (8в): $x = \beta + \alpha x$. Н-р, из $1{,}02x_1 - 0{,}15x_2 = 2{,}7$ получим $x_1 = 2{,}7 - 0{,}02x_1 + 0{,}15x_2$. Тогда вместо (8б) можно взять

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{9в}$$

не предполагая, что $x_{ij} = 0$ при $i = j$ как в (8б).

Дт-ое условие сх-ти процесса итерации вытекает из сд-ей

т3. Если для приведенной системы (8б) какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше ед-ы, т.е.

$$\|\alpha\| < 1, \tag{9г}$$

то процесс итерации (9) сх-ся к едн. решению этой системы незв-мо от выбора нач-го прж-ия.

Д. Из посл-ти прж-й $x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$, $x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$, …, $x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}$, $x^{(k)} =$

$= (E + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1})\beta + \alpha^k x^{(0)} = \dfrac{E - \alpha^k}{E - \alpha}\beta + \alpha^k x^{(0)}$. Т.к. $\|\alpha\| < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k = 0$.

Тогда получим

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \frac{1}{E-\alpha}\beta = (E - \alpha)^{-1}\beta, \tag{9д}$$

т.е. итерационный процесс сх-ся. Кроме того, из (9д) получим $(E - \alpha)x = \beta$ или $x = \beta + \alpha x$, т.е. предельный вектор x яв-ся решением системы (8в), сд-но, (8). Т.к. матрица системы (8в) $E - \alpha$ – неособенная, то решение x ед-но ■

сл1. Процесс итерации для системы (8в) сх-ся, если

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \tag{10}$$

или

$$\|\alpha\|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \tag{10а}$$

$$\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2}\ . \tag{10б}$$

В част., процесс итерации сх-ся, если $|\alpha_{ij}| < 1/n$. Стн-ия (10)-(10б) яв-ся простейшими нормами матрицы α.

сл2. Для системы (8) процесс итерации сх-ся, если

$$|\alpha_{ij}| > \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \ \ (i = \overline{1,n}\,,\ i \neq j), \tag{10в}$$

$$|\alpha_{jj}| > \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \ \ (j = \overline{1,n}\,,\ j \neq i). \tag{10г}$$

Дсв-но, н-р, из (10в) имеем $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\dfrac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}}\right| < 1$.

Оценка погр-ти прж-й процесса итераций вытекает из сд-их фм-л. Пусть $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ $(k \geq 1)$ – два посл-ых прж-ия системы (8в). При $p \geq 1$ имеем

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\| + \ldots + \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\|. \tag{11}$$

Т.к. $x^{(m+1)} = \beta + \alpha x^{(m)}$, $x^{(m)} = \beta + \alpha x^{(m-1)}$, то $x^{(m+1)} = \alpha(x^{(m)} - x^{(m-1)})$, и из (11) получим:

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|\alpha\|\,\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| +$$
$$+ \ldots + \|\alpha\|^{p-1}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1-\|\alpha\|}\,\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

Отсюда, переходя к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{1-\|\alpha\|}. \tag{11а}$$

или (при $k \geq 1$)

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\,\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \tag{11б}$$

Отсюда при $\|\alpha\| \le 1/2$ получим

$$\|x - x^{(k)}\| \le \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \qquad (11в)$$

т.е. в этом случае, если $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon$, то $\|x - x^{(k)}\| < \varepsilon$.

В общем случае, если в процессе выч-й будет обнаружено, что

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{1-q}{q}\,\varepsilon, \qquad (11г)$$

где $q = \|\alpha\| \le 1$, то $\|x - x^{(k)}\| < \varepsilon$, т.е. $|x_i - x_i^{(k)}| \le \varepsilon\ (i = \overline{1, n})$.

Из (11а) можно получить погр-ть в виде

$$\|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \qquad (11д)$$

В част., если выбрать $x^{(0)} = \beta$, то $x^{(1)} = \beta + \alpha\beta$ и $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \le \|\alpha\beta\| \le \|\alpha\|\,\|\beta\|$. Сд-но,

$$\|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\|. \qquad (11е)$$

п5. Показать, что для системы

$$\left.\begin{aligned} &10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0;\\ &x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5;\\ &2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10;\\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

процесс итерации сх-ся. Сколько итераций следует выполнить, чтобы найти корни системы (12) с точностью 10^{-4}?

Р. Систему (12) приводим к виду

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 + 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4;\\ &x_2 = 0{,}5 - 0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 - 0{,}2x_4;\\ &x_3 = -0{,}5 - 0{,}1x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}05x_4;\\ &x_4 = 0{,}75 - 0{,}15x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}05x_3. \end{aligned}\quad\Bigg|\quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}3\\ -0{,}1 & 0 & 0{,}1 & -0{,}2\\ -0{,}1 & -0{,}15 & 0 & 0{,}05\\ -0{,}15 & -0{,}1 & -0{,}05 & 0 \end{pmatrix}$$

Используя, н-р, норму по (10а), получим: $\|\alpha\|_l = \max(0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}55) = 0{,}55 < 1$. Значит, процесс итерации для системы (12) сх-ся.

За нач-ое прж-ие корня x примем $x^{(0)} = \beta \begin{pmatrix} 0\\ 0{,}5\\ -0{,}5\\ 0{,}75 \end{pmatrix}$. Отсюда $\|\beta\|_l = 0 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75 = 1{,}75$. Применяя фм-у (11е), имеем $\|x - x^{(k)}\| \le \dfrac{\|\alpha\|_l^{k+1}}{1-\|\alpha\|_l}\|\beta\|_l = \dfrac{0{,}55^{k+1}\cdot 1{,}75}{0{,}45} < 10^{-4}$. Отсюда $0{,}55^{k+1} < \dfrac{45}{175}10^{-4}$ и $(k+1)\lg 0{,}55 < \lg 5 - \lg 175 - 4$, т.е. $-(k+1)0{,}25964 < 1{,}65321 - 2{,}24304 - 4 = -4{,}58983$. Сд-но, $k + 1 > \dfrac{4{,}58983}{0{,}25964} \approx 17{,}7$ и $k > 16{,}7$. Тогда можно принять $k = 17$.

Отметим, что теор-ая оценка итерации, нх-ых для обеспечения заданной точности, практически оказывается весьма завышенной.

Приведем лин. систему к виду, удобному для итерации. На ур. (8а) т3 накладывает жесткие условия на коэф-ты. Однако при $\det A \neq 0$ с помощью лин-го комбинирования ур-й системы (8) всегда можно заменить экв-ой системой $x = \beta + \alpha x$.

Дсв-но, ур. (8а) умножим на $D = A^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ – матрица с малыми по модулю эл-ми. Тогда имеем $(A^{-1} - \varepsilon)Ax = Db$ или

$$x = \beta + \alpha x, \tag{13}$$

где $\alpha = \varepsilon A$ и $\beta = Db$. Если $\|\varepsilon_{ij}\|$ дт-но малы, то очевидно, что система (13) уд-ет условиям т3.

Умн-ие на матрицу D экв-но свк-ти элр-ых прб-й над ур-ми системы. Поэтому ур-ия системы прб-ем так, чтобы нб-й по модулю коэф-т оказался диагональным.

п6. Систему

$$\left.\begin{array}{l} \text{(А) } 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0; \\ \text{(Б) } x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0; \\ \text{(В) } 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0; \\ \text{(Г) } 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \end{array}\right\} \tag{13а}$$

привести к виду, удобному для применения метода итерации.

Р. В ур-и (Г) коэф-т при x_1 больше, чем суммы модулей остальных коэф-ов, и это ур-е принимаем за ур-е I. В ур-и (Б) коэф. при x_3 больше, чем суммы модулей остальных коэф-ов, поэтому его принимаем за ур-ие III. В кач-е II берем разность (А) – (Б): $x_1 + 5x_2 + x_3 + 0{\cdot}x_4 - 1 = 0$. Осталось неиспользованным ур-ие (В). Поэтому в кач-е IV берем лин. комбинацию $2(\text{А}) - (\text{Б}) + 2(\text{В}) - (\text{Г})$: $3x + 0{\cdot}x_2 + 0{\cdot}x_3 - 9x_4 - 10 = 0$. Итак, получили

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I) } 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0; \\ \text{(II) } x_1 + 5x_2 + x_3 + 0{\cdot}x_4 - 1 = 0; \\ \text{(III) } x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0; \\ \text{(IV) } 3x_1 + 0{\cdot}x_2 + 0{\cdot}x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0{\cdot}x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 - 0{,}2x_4 - 0{,}4; \\ x_2 = 0{,}2x_1 - 0{\cdot}x_2 - 0{,}2x_3 + 0{\cdot}x_4 + 0{,}2; \\ x_3 = 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{\cdot}x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}4; \\ x_4 = 0{,}333x_1 + 0{\cdot}x_2 + 0{\cdot}x_3 - 0{\cdot}x_4 - 1{,}111, \end{array}\right\}$$

к к-ой можно применить метод итерации.

5º. Метод Зейделя и метод релаксации. Метод Зейделя яв-ся модификацией метода итерации, т.е. при выч-и $(n + 1)$-го прж-ия неизвестной x_i учитываются уже выч-ные ранее $(k + 1)$ прж-ия неизвестных $x_1, \ldots, x_{i-1}$.

Пусть дана приведенная лин. система

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n}).$$

Выберем произвольно нач-ые прж-ия $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

Далее, предполагая, что k-е прж-ия $x_i^{(k)}$ корней известны, строим $(k + 1)$-е прж-ия корней по сд-им фм-ам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что т3 сх-сти остается верной и для итерации Зейделя. Обычно метод Зейделя дает лучшую сх-ть, чем метод простой итерации, но он приводит к более громоздким выч-ям.

п7. Методом Зейделя решить систему ур-й

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{aligned}\right\}$$

Р. Приведем систему к виду (13а):

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3; \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3; \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2. \end{cases}$$

В кач-е нулевых прж-й корней возьмем $x_1^{(0)} = 1{,}2$; $x_2^{(0)} = 0$; $x_3^{(0)} = 0$. Применяя метод Зейделя, посл-но получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1{,}2 - 0{,}1\cdot 0 - 0{,}1\cdot 0 = 1{,}2; \\ x_2^{(1)} &= 1{,}3 - 0{,}2\cdot 1{,}2 - 0{,}1\cdot 0 = 1{,}06; \\ x_3^{(1)} &= 1{,}4 - 0{,}2\cdot 1{,}2 - 0{,}2\cdot 1{,}06 = 0{,}948; \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1{,}2 - 0{,}1\cdot 1{,}06 - 0{,}1\cdot 0{,}948 = 0{,}9992; \\ x_2^{(3)} &= 1{,}3 - 0{,}2\cdot 0{,}9992 - 0{,}1\cdot 0{,}948 = 1{,}00536; \\ x_3^{(3)} &= 1{,}4 - 0{,}2\cdot 0{,}9992 - 0{,}2\cdot 1{,}00536 = 0{,}999098 \end{aligned}\right\} \mathrm{II}$$

и т.д.

Таблица 2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2000	0,0000	0,0000
1	1,2000	1,0600	0,9480
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000

Результаты выч-й с точностью до четырех знаков помещены в табл. 2. Точные зн-ия корней: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Метод релаксации. Систему (8) прб-ем так: перенесем свободные члены налево и разделим первое ур. на $-a_{11}$, второе на $-a_{22}$. Тогда получим систему, приготовленную к релаксации.

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + c_1 = 0; \\ b_{21}x_1 - x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + c_2 = 0; \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots - x_n + c_n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $b_{ij} = -\,a_{ij}/a_{ii}$ $(i \neq j)$, $c_i = b_i/a_{ii}$.

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ – начальное прж. решения системы (14). Подставляя их в (14), получим невязки

$$\left.\begin{aligned} R_1^{(0)} &= c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_j^{(0)}; \\ R_2^{(0)} &= c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} b_{2j} x_j^{(0)}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n^{(0)} &= c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} x_j^{(0)}. \end{aligned}\right\} \quad (14а)$$

Если одной из неизвестных $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{(0)}$, то ствщ-ая невязка $R_s^{(0)}$ уменьшится на вел-у $\delta x_s^{(0)}$, а все остальные невязки $R_i^{(0)}$ $(i \neq s)$ увеличатся на вел-у $b_{ij}\,\delta x_s^{(0)}$. Т.о., чтобы обратить очередную невязку $R_s^{(1)}$ в нуль, дт-но вел-е $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{(0)} = R_s^{(0)}$, тогда получим

$$\begin{aligned} &R_s^{(1)} = 0; \\ &R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + b_{is}\,\delta x_s^{(0)} \text{ при } i \neq s. \end{aligned} \quad (14б)$$

Так на каждом шаге обращают в нуль мкс-ую по модулю невязку путем изменения зн-ия ств-ей компоненты прж-ия. Процесс заканчивается, когда все невязки будут равны нулю с данной точностью.

п5. Методом релаксации решить систему

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6; \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7; \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 8. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Р. Приведем систему к виду

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}6 &= 0; \\ -x_2 + 0{,}1x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}7 &= 0; \\ -x_3 + 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}8 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Выберем $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ и находим $R_1^{(0)} = 0{,}6$; $R_2^{(0)} = 0{,}7$; $R_3^{(0)} = 0{,}8$. Полагаем $\delta x_3^{(0)} = 0{,}8$ и выч-ем $R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}6 + 0{,}16 = 0{,}76$; $R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}7 + 0{,}16 = 0{,}86$; $R_3^{(1)} = R_3^{(0)} - 1\cdot 0{,}8 = 0{,}8 - 0{,}8 = 0$. Далее полагаем $\delta x_2^{(1)} = 0{,}86$ и находим $R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + 0{,}2\cdot 0{,}86 = 0{,}76 + 0{,}17 = 0{,}93$; $R_2^{(2)} = R_2^{(1)} - 1\cdot 0{,}86 = 0{,}86 - 0{,}86 = 0$; $R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + 0{,}1\cdot 0{,}86 = 0 + 0{,}09 = 0{,}09$. Теперь полагаем $\delta x_1^{(2)} = 0{,}93$ и т.д. Ств-ие выч-ия приведены в табл. 3. Суммируя все приращения $\delta_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, 3;\ k = 0, 1, \ldots)$, получим зн-ия корней $x_1 = 0 + 0{,}93 + 0{,}07 = 1{,}00$; $x_2 = 0 + 0{,}86 + 0{,}13 + 0{,}01 = 1{,}00$; $x_3 = 0 + 0{,}80 + 0{,}18 + 0{,}02 = 1{,}00$. Подставляя их в (15), убеждаемся, что система решена точно.

Таблица 3

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	0,60	0	0,70	0	0,80
	0,16	0,86	**0,16**	0,80	**– 0,80**
	0,76		0,86		0
	0,17		**– 0,86**		**0,09**
	0,93		0		0,09
0,93	**– 0,93**		**0,09**		**0,09**
	0		0,09	0,18	0,18
	0,04		**0,04**		**– 0,18**
	0,04	0,13	0,13		0
	0,03		**– 0,13**		**0,01**
0,07	0,07		0		0,01
	– 0,07		**0,01**		**0,01**
	0		0,01	0,02	0,02
	0		**0**		**– 0,02**
	0	0,01	0,01		0
	0		**–0,01**		**0**
	0		0		0
1,00		1,00		1,00	

10.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

10.1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях используются прж. методы решения ур-й?
2. Что значит отделение корней ур-ия и в чем суть грфч. решения ур-й?
3. В чем состоит суть половинного деления для уточнения прж-го корня ур-й?
4. Как осуществляется отделение корней алг-го ур-ия?
5. Приведите оценку погр-ти прж-го корня ур-й.
6. В чем состоит суть метода хорд и как устанавливают неподвижный конец итерации?
7. В чем состоит суть метода касательных и как опр-ть неподвижный конец итерации?
8. В чем заключается суть комбинированного метода хорд и касательных?
9. Как вы понимаете принцип сжатых отображений и метод итераций?
10. Как опр-ся оценка погр-ти метода итерации?
11. Как улучшить выбор нач. зн-ия x_0 с помощью сужения инр-ла $]a, b[$?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п11 решить з1-з20.

1. Отделить корни ур-ия $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Р. Опр-им инр-лы монотонности фк-и $f(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Сд-но, инр-лы монотонности $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$. При этом $f(-\infty) < 0$ (–), $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{9} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1 < 0$ (– 1); $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1 < 0$ (–), $f(\infty) > 0$ (+). Сд-но, инр-лы монотонности $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$ и $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$ не содержат корней данного ур-ия, т.к. фк. $f(x) = x^3 - x - 1$ не меняет знак на этих инр-лах, а на инр-ле $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$ расположен ее едн-ый дсв. корень. Сужаем этот инр-л. $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, $f(1) = 1 - 1 - 1 < 0$, $f(2) = = 8 - 2 - 1 > 0$. Итак, едн-ый дсв. корень лежит на отрезке $[1, 2]$.

Отделить корни ур-ия $f(x) = x^3 - x - 2 = 0$ аналитическим и грфч-им способами.

2. Отделить корни ур-ия $f(x) = \sin x - x\cos x = 0$.

Р. Фк. $f(x) = \sin x - x\cos x$ и ее производная $f'(x) = x\sin x$ непр. на всей числовой оси. Корнями ур-ия $f'(x) = x\sin x = 0$ яв-ся числа вида $x_n = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), причем при переходе через эти зн-ия производная меняет знак. Сд-но, инр-ми монотонности яв-ся $]n\pi, (n+1)\pi[$. При этом, если $n \neq 0$ и $n \neq -1$, то $f(n\pi)\,f[(n+1)\pi] = (\sin n\pi - n\pi\cos n\pi)[\sin (n+1)\pi - (n+1)\cos (n+1)\pi] = n(n+1)\pi^2\cos n\pi\cos (n+1)\pi = n(n+1)\pi^2(-1)^n(-1)^{n+1} = -n(n+1)\pi^2 < 0$, т.е. зн-ия $f(x) = \sin x - x\cos x$ на концах этих инр-лов имеют разные знаки. Сд-но, каждый из отрезков $]n\pi, (n+1)\pi[$ ($n = 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) содержит только по одному корню данного ур-ия. Инр-ми монотонности яв-ся и $]-\pi, \pi[$ с корнем $x = 0$, т.к. $f(0) = 0$.

Отделить грфч-ки корни ур-ия $f(x) = \sin x - x\cos x = 0$. Ук: $\sin x - x\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = x$.

3. Отделить корни ур-ия $x^3 + 2x - 8 = 0$.
4. Отделить корни ур-ия $3x^5 - 25x^3 + 60x - 1 = 0$.
5. Отделить корни ур-ия $2 - x = \ln x$.
6. Методом половинного деления уточнить корень кр. $x^3 - x - 1 = 0$ на отрезке $[1, 2]$.
7. Отделить корни ур-ия $\cos x = x^2$ и уточнить его методом половинного деления.
8. Отделить и уточнить методом половинного деления корни ур. $x\lg x = 1$.

В задачах 9-14 уточнить корни ур-ий с точностью 0,001 методом хорд, отделив корни для: 1* – грфч-ки, 2* – аналитически.

9. 1*. $x - \sin x = 0{,}25$. 2*. $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$.

10. 1*. $\mathrm{tg}\,(0{,}58x + 0{,}1) = x^2$. 2*. $x^3 - 6x - 8 = 0$.

11. 1*. $\sqrt{x} - \cos\,(0{,}387x) = 0$. 2*. $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.

1. 1*. $x + \lg x = 0{,}5$. 2*. $x^3 + 3x + 1 = 0$.

13. 1*. $x^2 + 4\sin x = 0$. 2*. $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$.

14. 1*. $x^2 - 20\sin x = 0$. 2*. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$.

В задачах 15-2 уточнить корни ур-й с точностью 0,001 методом касательных, отделив корни для: 1* – грфч-ки, 2* – аналитически.

15. 1*. $\mathrm{tg}\,(0{,}4x + 0{,}4) = x^2$. 2*. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$.

16. 1*. $\mathrm{tg}\,x - \dfrac{7}{2x+6} = 0$. 2*. $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.

17. 1*. $3x - \cos x - 1 = 0$. 2*. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$.

18. 1*. $\mathrm{ctg}\,1{,}05x - x^2 = 0$. 2*. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$.

19. 1*. $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$. 2*. $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

20. 1*. $x^2 + 4\sin x = 0$. 2*. $x^3 - 2x + 4 = 0$.

В задачах 21-25 комбинированным методом хорд и касательных решить ур-ия с точностью 0,001.

21. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$.

22. $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$.

23. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

24. $x^3 - 12x^2 + 6 = 0$.

25. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$.

В задачах 26-30 уточнить корни ур-й с точностью 0,001 методом итераций, отделив корни для: 1* – грфч-ки, 2* – аналитически.

26. 1*. $\ln x + (x + 1)^3 = 0$. 2*. $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$.

27. 1*. $x \cdot 2^x = 1$. 2*. $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$.

28. 1*. $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{x}$. 2*. $x^3 - 2x + 2 = 0$.

29. 1*. $x - \cos x = 0$. 2*. $x^3 + 3x - 1 = 0$.

30. 1*. $x + \lg x = 0{,}5$. 2*. $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$.

Решение типовых примеров.

31. Найти решение методом хорд с точностью 0,001 ур-й: 1*. $\mathrm{tg}\,(0{,}55x + 0{,}1) = x^2$, отделив корни грфч-ки. 2*. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$ – аналитически.

Р. 1*. Построим грф-и фк-й $y_1 = \mathrm{tg}\,(0{,}55x + 0{,}1)$ и $y_2 = x^2$ (рис. 1), составив табл-ы зн-й этих фк-й:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_2 = x^2$	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1
$0{,}55x$	0	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55
y_1	0,1	0,21	0,33	0,46	0,60	0,76

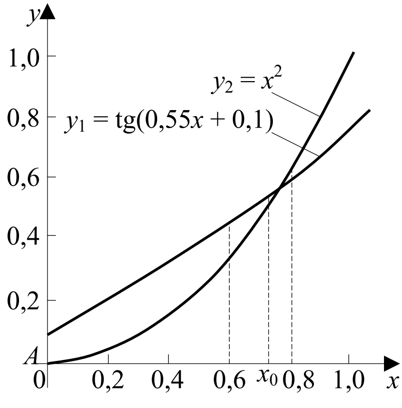


Рис. 1

Т.о., плж-ый корень ур-ия заключен в промежутке [0,6; 0,8].

Выч-им $f(0{,}6) = \mathrm{tg}\,0{,}43 - 0{,}36 = 0{,}0986 > 0$, $f(0{,}8) = \mathrm{tg}\,0{,}54 - 0{,}64 = 0{,}5994 - 0{,}64 = -\,0{,}0406 < 0$.

Находим $f'(x) = \dfrac{0{,}55}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)} - 2x$, $f''(x) = 0{,}55 \times$ $\times\, 2\cos^{-3}(0{,}55x + 0{,}1)\sin\,(0{,}55x + 0{,}1)0{,}55 - 2 =$ $= \dfrac{0{,}605\sin(0{,}55x+0{,}1)}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)} - 2 < 0$ при $x \in [0{,}6;\,0{,}8]$.

Для выч-й применяем фм-у

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b - x_n)$, где $b = 0{,}8$; $x_0 = 0{,}6$. Выч-ия удобно располагать в табл-е:

n	x_n	$0{,}8 - x_n$	$0{,}55x_n + 0{,}1$	tg $(0{,}55x_n + 0{,}1)$	x_n^2	$f(x_n)$	$f(0{,}8) - f(x_n)$	h
0	0,6	0,2	0,43	0,4586	0,36	0,0986	– 0,1392	– 0,142
1	0,742	0,058	0,5081	0,5570	0,5506	0,0064	– 0,0470	– 0,008
2	0,750	0,50	0,5125	0,5627	0,5625	0,0002	– 0,0408	– 0,0002
3	0,7502	0,0498	0,5126	0,5628	0,5628	0		

где $h = \dfrac{f(x_n)}{f(0{,}8)-f(x_n)}(b - x_n)$. О: $x = 0{,}750$.

2*. $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$. Находим $f'(x) = 3x^3 - 0{,}4x + 0{,}5$; $D = 0{,}16 - 6 < 0$. Составим табл-у знаков фк-и $f(x)$. Ур. имеет один дсв. корень $x \in [-1, 0]$. Чтобы уточнить корень, находим вторую производную $f''(x) = 6x - 0{,}4$. В промежутке $[-1, 0]$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
sign $f(x)$	–	–	+	+

выполняется нерав-во $f''(x) < 0$. Поэтому для выч-й применяем фм-у $x_{n+1} = a - \dfrac{f(a)}{f(x_n)-f(a)}(x_n - a)$, где $a = -1$, $x_0 = 0$; $f(a) = f(-1) = -1 - 0{,}2 - 0{,}5 + 1{,}5 = -0{,}2$. Выч-ия запишем в табл.:

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$0{,}2\,x_n^2$	$0{,}5x_n$	$f(x_n)$	$f(x_n) + 0{,}2$	$x_n - a$	h
0	0	0	0	0	0	1,5	1,7	1	– 0,118
1	– 0,882	– 0,6861	0,7779	0,1556	– 0,441	0,2173	0,4173	0,118	– 0,057
2	– 0,943	– 0,8386	0,8892	0,1778	– 0,4715	0,0121	0,2121	0,057	– 0,054
3	– 0,946	– 0,8466	0,8949	0,1790	– 0,473	0,0014	0,2014	0,054	– 0,054
4	– 0,946								

где $h = \dfrac{f(a)}{f(x_n)-f(a)}(x_n - a)$. О: $x \approx -0{,}946$.

32. Найти решение методом касательных с точностью 0,001 ур-й: 1*. tg $(0{,}55x + 0{,}1) = x^2$, отделив корни грфч-ки. 2*. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$ – аналитически (см. з31).

Р. 1*. В з31 отделили один из корней $x \in [0{,}6;\ 0{,}8]$. Уточним этот корень методом касательных. Т.к. $f(0{,}6) = 0{,}0986 > 0$, $f(0{,}8) = -0{,}0406 < 0$, $f''(x) < 0$, то за нач. прж-ие берем $x_0 = 0{,}8$, $x_n = 0{,}6$; поэтому выч-ия производим по фм-е $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$. Предварительно найдем $f'(0{,}8) = $

$= \dfrac{0{,}55}{\cos^2(0{,}44+0{,}1)} - 2\cdot 0{,}8 = \dfrac{0{,}55}{0{,}7356} - 1{,}6 = -0{,}8523$. Тогда $x_1 = 0{,}8 - \dfrac{-0{,}0406}{-0{,}8523} = 0{,}8 - 0{,}0476 = $
$= 0{,}7524$. Составим табл-у:

x_n	x_n^2	$0{,}55x_n + 0{,}1$	tg $(0{,}55x_n + 0{,}1)$	$f(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{-0{,}8523}$
0,8	0,64	0,54	0,5994	– 0,0406	0,0476
0,7524	0,5661	0,5138	0,5643	– 0,0018	0,0021
0,7503	0,5630	0,5127	0,5630	– 0,0000	0

О: $x \approx 0{,}750$.

2*. В з31 установили, что ур-ие имеет дсв. корень $x \in [-1, 0]$. Уточним этот корень методом касательных. Т.к. $f(-1) = -0{,}2 < 0$, $f(0) = 1{,}5 > 0$ и $f''(6x - 0{,}4) < 0$ при $x \in [-1, 0]$, то за нач. прж-ие принимаем $x_0 = -1$. Поэтому для выч-й применяем фм-у $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Находим $f(x) = f(-1) = (-1)^3 - 0{,}2(-1)^2 + 0{,}5\cdot(-1) + 1{,}5 = -1 - 0{,}2 - 0{,}5 + 1{,}5 = -0{,}2$. $f'(-1) = (3x^2 - 0{,}4x + 0{,}5)_{x=-1} = 3 + 0{,}4 + 0{,}5 = 3{,}9$. Тогда имеем $x_1 = -1 - \dfrac{-0{,}2}{3{,}9} = -1 + 0{,}051 = -0{,}949$ и т.д. Для результата составим табл-у:

x_n	x_n^2	$\left(x_n^3\right)$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h=\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
– 1	1	– 1	– 0,2	3,9	– 0,051
– 0,949	0,9006	– 0,8547	– 0,0093	3,5814	– 0,0026
– 0,9464	0,8957	– 0,8477	– 0,0004	3,5657	– 0,00001

О: $x \approx -0{,}946$.

33. Комбинированным методом хорд и касательных с точностью 0,001 найти решение ур-ия $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$.

x	$-\infty$	$-2/3$	2	$+\infty$
sign $f(x)$	–	+	–	+

Р. Отделим корни аналитически. Находим $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2/3$, $x_2 = 2$. Составим табл-у знаков фк-и. Итак, ур-ие имеет три дсв-ых корня: $x_1 \in\ ]-\infty, -2/3[$, $x_2 \in\ ]-2/3, 2[$, $x_3 \in\ ]3, \infty[$. Уменьшим промежутки, содержащие корни, до длины, равной 1. Значит, $x_1 \in [-2, -1]$, $x_2 \in [1, 2]$, $x_3 \in [2, 3]$.

Уточним корни комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x_1 \in [-2, -1]$, $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 8 > 0$; $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, $f''(x) = 6x - 0{,}4 < 0$ при $x \in [-2, -1]$. Поэтому полагаем $x_0 = -2$, $\bar{x}_0 = -1$, $f'(-2) = 12 + 8 - 4 = 16$ и используем фм-ы:

x	– 2	– 1	0	1	2	3
sign $f(x)$	–	+	+	+	–	+

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_1 = -2 - \frac{-1}{16} = -2 + 0{,}06 = -1{,}94 \text{ и т.д.;} \\ \bar{x}_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n) \Rightarrow \bar{x}_1 = -2 - \frac{-1}{8+1}(-1+2) = -2 + 0{,}11 \cdot 1 = -1{,}89. \end{aligned}\right\}$$

Выч-ия производим в табл.:

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	h_{1n}
	$\bar{x}_n$		$\bar{x}_n^2$	$\bar{x}_n^3$	$f(\bar{x}_n)$			h_{2n}
0	– 2	1	4	– 8	– 1	16	9	– 0,06
	– 1		1	– 1	8			– 0,11
1	– 1,94	0,5	3,7636	– 7,3014	– 0,0686	15,0508	0,7331	– 0,0045
	– 1,89		3,5721	– 6,7513	0,6645			– 0,0047
2	– 1,9355	0,0002	3,7462	– 7,2507	– 0,0011	–	–	–
	– 1,9353		3,7454	– 7,2484	– 0,0020			–

где $h_{1n} = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $h_{2n} = \dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n)$. О: $x \approx -1{,}935$.

2. $x_2 \in [1, 2]$, $f(1) = 2 > 0$, $f(2) = -1 < 0$, $f''(x) = 6x - 4 > 0$ при $x \in [1, 2]$. Поэтому полагаем $x_0 = 1$, $\bar{x}_0 = 2$, $f'(x_n) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = -5$ и используем фм-ы:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{2}{-5} = 1 + 0{,}4 = 1{,}4 \text{ и т.д.;} \\ \bar{x}_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n) \Rightarrow \bar{x}_1 = -1 - \frac{2}{-1-2}(2-1) = 1 + 0{,}7 = 1{,}7. \end{aligned}\right\}$$

Выч-ия производим в табл.:

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	h_{1n}
	$\bar{x}_n$		$\bar{x}_n^2$	$\bar{x}_n^3$	$f(\bar{x}_n)$			h_{2n}
0	1	1	1	1	2	– 5	– 3	– 0,4
	2		4	8	– 1			– 0,7
1	1,4	0,3	1,96	2,744	0,224	– 3,72	– 0,891	– 0,060
	1,7		2,89	4,913	– 0,667			– 0,075
2	1,46	0,015	2,1316	3,1121	0,0089	– 3,4452	– 0,0511	– 0,0025
	1,475		2,1756	3,2090	– 0,0422			– 0,0026
3	1,4625	0,0001	2,1389	3,1282	0,0004			
	1,4626		2,1392	3,1288	0			

где $h_{1n} = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $h_{2n} = \dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$ $(\bar{x}_n - x_n)$. О: $x \approx 1{,}463$.

3. $x_3 \in [2, 3]$, $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 4 > 0$, $f''(x) = 6x - 4 > 0$ при $x \in [2, 3]$. Поэтому полагаем $x_0 = 2$, $\bar{x}_0 = 3$, $f'(x_n) = f'(3) = 11$ и используем фм-ы:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n) \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{-1}{4-(-1)}(3-2) = 2 + 0{,}4\cdot 1 = 2{,}2 \text{ и т.д.;} \\ \bar{x}_{n+1} &= x_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{4}{11} = 3 - 0{,}36 = 2{,}64 \text{ и т.д.} \end{aligned}\right\}$$

Выч-ия производим в табл., обз-ив $h_{1n} = \dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$ $(\bar{x}_n - x_n)$, $h_{2n} = \dfrac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$.

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2 / $\bar{x}_n^2$	x_n^3 / $\bar{x}_n^3$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	$f'(x_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	2	1	4	8	– 1	5	11	– 0,20
	3		9	27	4			0,36
1	2,2	0,44	4,84	10,648	– 0,832	1,7325	6,3488	– 0,126
	2,64		6,9696	18,3997	– 0,9005			0,142
2	2,326	0,172	5,4103	12,8430	– 0,2816	0,3971	4,728	– 0,122
	2,498		6,2400	15,5875	0,1155			0,024
3	2,448	0,026	5,9927	14,6701	– 0,1073	0,1125	4,4661	– 0,0248
	2,474		6,1207	15,1426	0,0052			0,0012
4	2,4728	0						
	2,4728							

О: $x_3 \approx 2{,}473$.

34. Найти один из корней методом итераций с точностью 0,001 ур-й:

1*. $2x + \lg(2x + 3) = 1$, отделив корни грфч-ки. 2*. $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$ – аналитически.

Р. 1*. Ур-ие представим в виде $\lg(2x + 3) = 1 - 2x$ и построим грф-и фк-й: $y = \lg(2x + 3)$ и $y = 1 - 2x$ (рис. 2). Из грф-а видно, что ур-ие имеет один корень, лежащий в промежутке [0; 0,5]. Для уточнения его методом итераций приведем ур-ие к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$ при $x \in [0; 0{,}5]$. Для этого фк-ю $\varphi(x)$ будем искать из стн-ия $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{k}$, считая, что $|k| \geq Q/2$, где $Q = \max|f'(x)|$; число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке [0; 0,5].

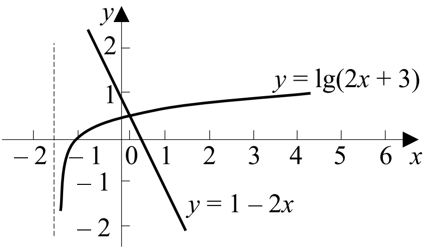


Рис. 2

Найдем: $f(x) = 2x + \lg(2x + 3) - 1$, $f'(x) = 2 + \dfrac{0{,}8686}{2x+3}$; $Q = \max\limits_{[0;0,5]} f'(x) = 2 + \dfrac{0{,}8686}{2\cdot 0+3} \approx 2{,}2895$, $f'(x) > 0$ при $x \in [0; 0{,}5]$. Примем $k = 2$, тогда $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{2} = x - x - \dfrac{\lg(2x+3)}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg(2x + 3)$, т.е. $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg(2x + 3) \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg(2x_n + 3)$. Отсюда, приняв $x_0 = 0$, находим $x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg 3 = 0{,}2614$ и т.д. Выч-ия расположим в табл-е:

n	x_n	$2x_n + 3$	$\lg(2x_n + 3)$	$(1/2)\lg(2x_n + 3)$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	35228	0,5469	0,2734
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304			

О: $x \approx 0{,}230$.

x	$-\infty$	-1	0	∞
sign $f(x)$	–	–	+	+

2*. Из $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$ находим $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7$, $D = 16 - 21\cdot 4 < 0$. Составим табл-у. Ур-ие имеет дсв-ый корень $x \in [-1, 0]$. Приведем ур-ие к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$.

Т.к. $Q = \max\limits_{[-1,0]} |f'(x)| = f'(-1) = 3 + 4 + 7 = 14$, то можно взять $k = 10$. Тогда $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{10} = x - 0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 - 0{,}7x - 0{,}3 = -0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}3$. Итак, имеем $x = -0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}3$ $\Rightarrow x_{n+1} = -0{,}1\,x_n^3 + 0{,}2\,x_n^2 + 0{,}3x_n - 0{,}3$. Отсюда при $x_0 = 0$ получим $x_1 = -0{,}3$, $x_2 = -0{,}1(-0{,}3)^3 + 0{,}2(-0{,}3)^2 + 0{,}3(-0{,}3) - 0{,}3 = -0{,}3693$и т.д. Выч-ия располагаем в табл-е:

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\varphi(x_n)$
0	0	0	0	– 0,3
1	– 0,3	0,09	– 0,027	– 0,3693
2	– 0,3693	0,1364	– 0,0504	– 0,3785
3	– 0,3785	0,1433	– 0,0542	– 0,3795
4	– 0,3795	0,1440	– 0,0546	– 0,3796
5	– 0,3796			

О: $x \approx 0{,}380$.

10.2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самопроверки

1. Как найти число корней системы ур-й и их прж. зн-ия?
2. В чем заключается условие сх-ти посл-ых прж-й в итерационном процессе?
3. В чем состоит суть метода Ньютона?
4. Как обобщается метод Ньютона для случая комплексных корней?
5. Какие вы знаете способы решения систем лин. ур-й и какие их хрк-ые возможности?
6. Приведите дт-ое условие сх-ти итерационного процесса.
7. Какими фм-ми оцениваются погр-ти итерационного процесса?
8. Чем отличается метод Зейделя от простого итерационного метода?
9. В чем заключается суть метода релаксации?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п5 решить з1-з28.

В задачах 1-20 решить с точностью 0,001 систему нелин-ых ур-й: 1* методом итераций, 2* методом Ньютона.

1. 1*. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0{,}4) = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$

2. 1*. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}6x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$

3. 1*. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0{,}1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4. 1*. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5; \\ 2x - \sin(y - 0{,}5) = 1. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

5. 1*. $\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0{,}3) = x^2; \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

6. 1*. $\begin{cases} \cos(x + 0{,}5) + y = 0{,}8; \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}3x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

7. 1*. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

8. 1*. $\begin{cases} 2y - \cos(x+y) = 0; \\ x + \sin y = -0{,}4. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}5x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

9. 1*. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0{,}7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

10. 1*. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5; \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

11. 1*. $\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0; \\ xy^3 - y - 4 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0; \\ x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{cases}$

12. 1*. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0; \\ 2x^2 + 3xy + y^2 - 3 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}2) = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

13. 1*. $\begin{cases} \sin x = y + 1{,}32; \\ \cos y = x - 0{,}85. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}5x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

14. 1*. $\begin{cases} x^7 - 5x^2y^4 + 1510 = 0; \\ y^5 - 3x^4y - 105 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

15. 1*. $\begin{cases} \ln x - y + 1{,}2 = 0; \\ \sin x - y^2 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}2x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

16. 1*. $\begin{cases} 1/x^2 - y - 1 = 0; \\ x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

17. 1*. $\begin{cases} x^3 - 5xy + 1{,}09 = 0; \\ e^x - y^2 - 0{,}011 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}4x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

18. 1*. $\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0; \\ \cos x - y + 0{,}5 = 0. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

19. 1*. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0{,}4. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}1x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

20. 1*. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) - xy = 0; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

В задачах 21-28 решить с точностью 0,001 систему лин. ур-й: 1* методом итераций, 2* методом Зейделя.

21. 1*. $\begin{cases} 0{,}34x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08; \\ 0{,}71x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}18x_3 = 0{,}17; \\ 1{,}17x_1 - 2{,}35x_2 + 0{,}75x_3 = 1{,}28. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 3{,}75x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 = 0{,}75; \\ 2{,}11x_1 - 0{,}11x_2 - 0{,}12x_3 = 1{,}11; \\ 0{,}22x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}81x_3 = 0{,}05. \end{cases}$

22. 1*. $\begin{cases} 0{,}21x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}75x_3 = 0{,}11; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}11x_3 = 2{,}00; \\ 3{,}01x_1 - 0{,}33x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}13. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 0{,}13x_1 - 0{,}14x_2 - 2{,}00x_3 = 0{,}15; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}77x_3 = 0{,}11; \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 = 0{,}12. \end{cases}$

23. 1*. $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 - 0{,}15x_3 = 1{,}00; \\ 1{,}11x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}75x_3 = 0{,}13; \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}17. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 0{,}92x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}62x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}24x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 = 0{,}62; \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 - 0{,}67x_3 = 0{,}88. \end{cases}$

24. 1*. $\begin{cases} 1{,}24x_1 - 0{,}87x_2 - 3{,}17x_3 = 0{,}46; \\ 2{,}11x_1 - 0{,}45x_2 + 1{,}44x_3 = 1{,}50; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}35. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 0{,}64x_1 - 0{,}83x_2 + 4{,}2x_3 = 2{,}23; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 = 1{,}71; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}54. \end{cases}$

25. 1*. $\begin{cases} 0{,}32x_1 - 0{,}42x_2 + 0{,}85x_3 = 1{,}32; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}43x_2 - 0{,}58x_3 = -0{,}44; \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 = 0{,}64. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 = 0{,}58; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}78x_3 = 0{,}66; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}92. \end{cases}$

26. 1*. $\begin{cases} 0{,}62x_1 - 0{,}44x_2 - 0{,}86x_3 = 0{,}68; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 = 1{,}24; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 - 0{,}62x_3 = 0{,}87. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 = 3{,}14; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17; \\ 3{,}44x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 = 1{,}83. \end{cases}$

27. 1*. $\begin{cases} 0{,}46x_1 + 1{,}72x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44; \\ 1{,}53x_1 - 2{,}32x_2 - 1{,}83x_3 = 2{,}83; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}86x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 2{,}47x_1 + 0{,}65x_2 - 1{,}88x_3 = 1{,}24; \\ 1{,}34x_1 + 1{,}17x_2 + 2{,}54x_3 = 2{,}35; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}73x_2 - 1{,}08x_3 = 3{,}15. \end{cases}$

28. 1*. $\begin{cases} 4{,}24x_1 + 2{,}73x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}87; \\ 2{,}34x_1 + 1{,}27x_2 + 3{,}15x_3 = 2{,}16; \\ 3{,}05x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}63x_3 = -1{,}25. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} 0{,}34x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08; \\ 0{,}71x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}18x_3 = 0{,}17; \\ 1{,}17x_1 - 2{,}35x_2 + 0{,}75x_3 = 1{,}28. \end{cases}$

Решение типовых примеров

29. Решить с точностью 0,001 систему лин-х ур-й:

1*. $\begin{cases} \sin(x - 0{,}6) - y = 1{,}6; \\ 3x - \cos y = 0{,}9 \end{cases}$ методом итераций; 2*. $\begin{cases} \sin(2x - y) - 1{,}2x = 0{,}4; \\ 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 = 1 \end{cases}$ методом Ньютона.

Р. 1*. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y = \sin(x - 0{,}6) - 1{,}6; \\ x = \dfrac{1}{3}\cos y + 0{,}3. \end{cases}$ Отделим корни грф-ки (рис. 3). Из грф-ка получаем грубое решение системы $x \in\ ]0;\ 0{,}3[$, $y \in\ ]-2{,}2;\ -1{,}8[$.

Убедимся, что метод итераций сх-ся. Для этого ур-е запишем в виде

$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) = \dfrac{1}{3}\cos y + 0{,}3; \\ y = \varphi_2(x, y) = \sin(x - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$ Т.к. $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \cos(x - 0{,}6)$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\dfrac{1}{3}\sin y$, $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0$,

то в обл. D имеем $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| = |\cos(x - 0{,}6)| \le \cos 03 = 0{,}2955 < 1$. $\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| =$

$= \left|-\dfrac{1}{3}\sin\varphi\right| < \left|\dfrac{1}{3}\sin(-1{,}8)\right| < 1$. Т.о., условия выполняются. За нач. прж-ия принимаем $x_0 = 0{,}15$; $y_0 = -2$. Выч-ем по фм-е

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cos y_n + 0{,}3; \\ y_{n+1} = \sin(x_n - 0{,}6) - 1{,}6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}\cos(-2) + 0{,}3 = -\dfrac{0{,}4161}{3} + 0{,}3 = 0{,}1616; \\ y_1 = \sin(0{,}15 - 0{,}6) - 1{,}6 = -0{,}435 - 1{,}6 = -2{,}035 \end{cases}$$

и т.д. Выч-ия располагаем в табл.:

n	x_n	y_n	$x_n - 0{,}6$	$\sin(x_n - 0{,}6)$	$\cos y_n$	$(1/3)\cos y_n$
0	0,15	– 2	– 0,45	– 0,4350	– 0,4161	– 0,1384
1	0,1616	– 2,035	– 0,4384	– 0,4245	– 0,4477	01492
2	0,1508	– 2,0245	– 0,4492	– 0,4342	– 0,4382	– 0,1461
3	0,1539	– 0,0342	– 0,4461	– 0,4313	– 0,4470	– 0,1490
4	0,1510	– 2,0313	– 0,4490	– 0,4341	– 0,4444	– 0,1481
5	0,1519	– 2,0341	– 0,4481	– 0,4333	– 0,4469	– 0,1490
6	0,1510	– 2,0333	– 0,449	– 0,4341	– 0,4462	– 0,1487
7	0,1518	– 2,0341	– 0,4487	– 0,4340	– 0,4469	– 0,1490
8	0,1510	– 2,0340				

О: $x \approx 0{,}151$; $y \approx -2{,}034$.

2*. Отделение корней производим грф-ки (рис. 4). Для построения грф-ов фк-й составим сд. табл-у зн-й фк-й y_1 и y_2, входящих в первое и второе ур-ия:

x	– 1,1	– 1	– 0,8	– 0,6	– 0,2	– 0,4	0	0,2	0,4	0,5
x^2	1,21	1	0,64	0,36	0,04	0,16	0	0,04	0,16	0,25
$0{,}8x^2$	0,97	0,8	0,51	0,29	0,032	0,13	0	0,032	0,13	0,2
$1 - 0{,}8x^2$	0,03	0,2	0,49	0,71	0,97	0,87	1	0,97	0,87	0,8
$\dfrac{1 - 0{,}8x^2}{1{,}5}$	0,02	0,13	0,33	0,47	0,65	0,58	0,67	0,65	0,58	0,53
y_2	± 0,14	± 0,36	± 0,57	± 0,69	± 0,81	± 0,76	± 0,82	± 0,81	± 0,76	± 0,73
$1{,}2x$	– 1,32	– 1,2	– 0,96	– 0,72	– 0,24	– 0,48	0	0,24	0,48	0,6
$0{,}4 + 1{,}2x$	– 0,92	– 0,8	– 0,56	– 0,32	0,16	– 0,08	0,4	0,64	0,88	1
$2x - y$	– 1,17	– 0,93	– 0,59	– 0,33	0,16	– 0,08	0,41	0,69	2,06 1,08	0,57
y_1	– 1,03	– 1,07	– 1,01	– 0,87	– 0,56	– 0,72	– 0,41	– 0,29	– 1,26 – 1,28	– 0,57

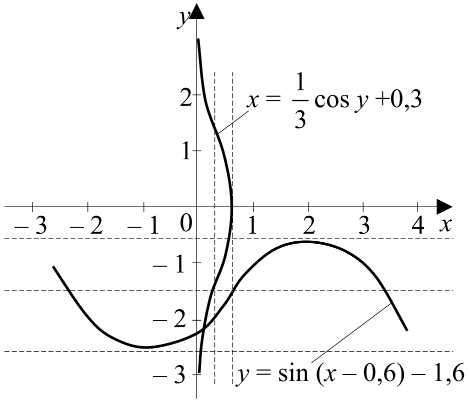


Рис. 3

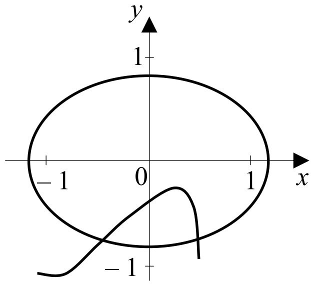


Рис. 4

Зн-ия x берем из сд-их условий: из первого ур-ия имеем $-1 \le 1{,}2x + 0{,}4 \le 1 \Rightarrow -1{,}16 \le x \le$ $\le 0{,}5$ (1). Из второго ур-ия $-\sqrt{1{,}25} \le x \sqrt{1{,}25} \Rightarrow -1{,}12 \le x \le 1{,}12$ (2). Из (1) и (2) получим $-1{,}12 \le x \le 0{,}5$. Система имеет два решения. Уточним одно из них, принадлежащее обл-и D: $0{,}4 < x < 0{,}5$, $-0{,}76 < y < -0{,}73$.

За нач-ое прж-ие примем $x_0 = 0{,}4$, $y_0 = -0{,}75$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= \sin(2x-y) - 1{,}2x - 0{,}4; \\ G(x,y) &= 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F(0{,}4;-0{,}75) = 0{,}1198; \\ G(0{,}4;-0{,}75) = -0{,}282. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x = 2\cos(2x-y) - 1{,}2; \\ G'_x = 1{,}6x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(0{,}4;-0{,}75) = -1{,}1584; \\ G'_x(0{,}4;-0{,}75) = 0{,}64. \end{cases} \begin{cases} F'_y = -\cos(2x-y); \\ G'_y = 3y. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F'_y(0{,}4;-0{,}75) = -0{,}0208; \\ G'_y(0{,}4;-0{,}75) = -2{,}25. \end{cases} \Delta_n = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1{,}1534 & -0{,}0208 \\ 0{,}64 & -2{,}25 \end{vmatrix} = 2{,}6197,\ \Delta_{h_n} = 0{,}2701;$$

$\Delta_{k_n} = 0{,}0440$, $h_n = \dfrac{\Delta_{h_n}}{\Delta_n} = 0{,}10$; $k_n = \dfrac{\Delta_{k_n}}{\Delta_n} = 0{,}17$ и т.д. Выч-ия располагаем в табл.:

n	x_n / y_n	$0{,}8\,x_n^2$ / $1{,}5\,y_n^2$	$2x_n - y_n$	$\sin(2x_n - y_n)$ / $\cos(2x_n - y_n)$	$F(x_n, y_n)$ / $G(x_n, y_n)$	$F_x'(x_n, y_n)$ / $G_x'(x_n, y_n)$	$F_y'(x_n, y_n)$ / $G_y'(x_n, y_n)$	Δ_n	Δ_{h_n} / Δ_{k_n}	h_n / k_n
0	0,4	0,128	0,55	0,9988	0,1198	– 1,1584	– 0,0208	2,6197	0,2701	0,10
	0,75	0,8438		0,0208	– 0,0282	0,64	– 2,25		0,0440	0,017
1	0,50	0,2	0,733	0,9869	– 0,0131	– 1,523	0,1615	3,2199	– 0,0193	– 0,0060
	– 0,733	0,8059		– 0,1615	0,059	0,8	– 2,199		0,0794	0,0247
2	0,4940	0,1952	1,6963	0,9921	– 0,0007	– 1,4502	0,1251	2,9827	– 0,0080	– 0,0027
	– 0,7083	0,7525		– 0,1251	– 0,0523	0,7904	– 2,1249		– 0,0764	– 0,0256
3	0,4913	0,1931	1,7165	0,9894	– 0,0002	– 1,4904	0,1452	3,1673	– 0,0003	– 0,0001
	– 0,7339	0,8079		– 0,1452	0,0010	0,7861	– 2,2017		0,0013	0,0004
4	0,4912									
	– 0,7335									

О: $x \approx 0{,}491$; $y \approx -0{,}734$.

30. Привести к виду, пригодному для метода итераций, системы

1*. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$ 2*. $\begin{cases} (1)\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0{,}6; \\ (2)\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -0{,}7; \\ (3)\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2{,}6. \end{cases}$

Р. По (10в) для лин-ой системы процесс итерации сх-ся, если $|a_{ij}| > \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$, $i \neq j$. По (10) процесс итерации сх-ся, если $\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1$ (см. также (10а), (10б)). Для 1* стн-ие (10в) выполняется. Тогда можно писать в виде $\left. \begin{aligned} x_1 &= 0{,}25 - 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3; \\ x_2 &= 1 - 0{,}25x_1 - 0{,}25x_3; \\ x_3 &= 4 - 0{,}25x_1 - 0{,}25x_2. \end{aligned} \right\}$ Стн. (10) также выполняется, значит, систему можно решить методом итерации, как в п4 из 4°: 10.2.

2*. Т.к. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$, то задача разрешима. Для ур. (1) коэф. при x_2 уд-ет $3 > 1 + 1 = 2$, значит, это ур. можно взять в кач-е второго ур-ия.

За первое ур-ие берем $3(2x_1 + x_2 - x_3) = -0{,}7 \cdot 3$. За третье ур-ие берем

$$\left. \begin{aligned} &(1')\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0{,}5; \\ &(2')\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0{,}6; \\ &(3')\ -2x_1 + x_2 + 9x_3 = 8{,}5. \end{aligned} \right\} \quad + \begin{array}{c} 3(2x_1 + x_2 - x_3) = -0{,}7 \cdot 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2{,}6 \\ \hline 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0{,}5 \end{array} \quad + \begin{array}{c} 2(x_1 + 3x_2 + x_3) = 0{,}6 \cdot 2 \\ -3(2x_1 + x_2 - x_3) = -0{,}7 \cdot (-3) \\ 2(x_1 - x_2 + 2x_3) = 2{,}6 \cdot 2 \\ \hline -2x_1 + x_2 + 9x_3 = 8{,}5 \end{array}$$

Для полученной системы условие (10в) выполняется.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0{,}0714 - 0 \cdot x_1 - 0{,}2857x_2 + 0{,}1428x_3; \\ x_2 &= 0{,}2 - 0{,}3333x_1 - 0 \cdot x_2 - 0{,}3333x_3; \\ x_3 &= 0{,}94444 + 0{,}2222x_1 - 0{,}1111x_2 - 0 \cdot x_3. \end{aligned} \right\}$$

Условие (10) выполняется, значит, процесс итерации сх-ся. Решение находим анч-но п4 из 4°: 10.2.

11. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

> Труд составляет самую крепкую и надежную связь между тем человеком, который трудится, и тем обществом, на пользу которого направлен этот труд.
>
> Д. Писарев

ЛЕКЦИЯ 32

11.1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1°. Интегрирование методами прямоугольников и трапеций. Выч-ие опрн-го инт-а по фм-е Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ на практике не всегда возможно. Если первообразная $F(x)$ не может быть найдена или фк. $f(x)$ задана грф-ки или таблично, то для выч-ия инт-а прибегают к прж-ым фм-ам с какой угодно точностью.

Один из методов прж-го интв-ия, так назм-ый метод прямоугольников (пуг.), основан на самом опр-и инт-а: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ (а) при $\max \Delta x_i \to 0$, где $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ есть инт-ая сумма, ствщ-ая нек-му разбиению отрезка $[a, b]$ и опр. выбору точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ на отрезке. Отсюда следует, что если отрезок $[a, b]$ разбить на дт-но большое число дт-но малых частей, то получаемая при этом инт. сумма будет произвольно мало отличаться от инт-а. Т.о., в этом случае инт. сумму можно принять в кач-ве прж-го зн-ия инт-а, т.е. $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ (б). При этом предел (а) не зв-т от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ на отрезках разбиения. Поэтому отрезок $[a, b]$ разобьем на равные части $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, а вместо точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ возьмем левые (или правые) концы отрезков разбиения, тогда, обз-ая $y_i = f(x_i)$, вместо (б) получим

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \qquad (1)$$

или

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_1, y_2, \ldots, y_n). \qquad (2)$$

Левая часть фм-ы (1) представляет собой пщ. ступенчатой фигуры (состоящей из пуг-ов), заштрихованной на рис. 1. Правая часть фм-ы (2) – пщ. ступенчатой фигуры, верхняя граница к-ой изб-на пунктиром.

Фм-ы (1) и (2) наз-ют фм-ми пуг-ов. Эти фм. тем точнее, чем больше число разбиений n.

Поступаем так же, как и в предыдущем случае, но инт-ую сумму составляем (рис. 2) так: $S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots$ $\ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$, где $\frac{y_{i-1} + y_i}{2}$ есть середина стягивающей хорды (лин-ая инп-ия). Тогда инт-л прж-но выразится сд-ей фм-ой:

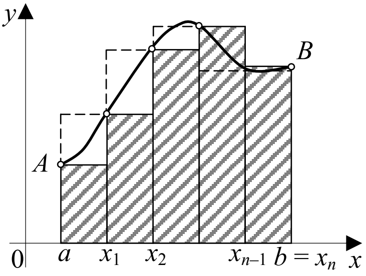


Рис. 1

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n, \tag{3}$$

к-ая наз. фм-ой трапеций.

Вел-а R_n наз. оценкой погр-ти прж-ой фм-ы. Если подынт-ая фк. $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непр. вторую производную, то имеет место

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \tag{4}$$

где $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} \|f''(x)\|$.

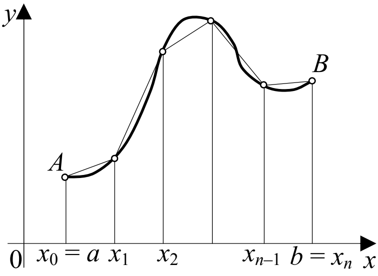


Рис. 2

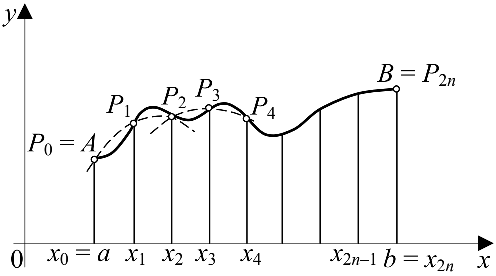


Рис. 3

2º. Формула парабол (Симпсона). Значительное повышение точности прж-ых фм-л достигается при повышении порядка инп-и, на к-ой основан метод Симпсона. Разделим отрезок $[a, b]$ на четное число $2n$ равных частей (рис. 3). Пусть точки деления будут: $a = x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$, а $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ – ств. зн-ия подынт-ой фк-и на отрезке $[a, b]$. Произведем квч. инп-ию данной подынт-ой фк-и на отрезке $[x_0, x_2]$ по узлам x_0, x_1, x_2. Заменим для этого фк-ю $y = f(x)$ на указанном участке инпн-ым полиномом Ньютона с узлами x_0, x_1, x_2 (3°: 9.2): $P_2(x) = Y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$, где $\Delta y_0 = y_1 -$ $- y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$. Имея в виду, что $x_1 = x_0 +$

$+ h$, где $h = \dfrac{b-a}{2n}$, получим $P_2(x) = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2h^2}[(x - x_0)^2 - (x - x_0)h]$.

Отсюда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot h\cdot\frac{4h^2}{2} =$$

$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 2y_1 + y_2).$$

Анч-но, инт-уя подынт. фк-ю на участке $[x_2, x_4]$ с узлами x_2, x_3, x_4 и т.д., найдем систему

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2);\\
&\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4);\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).
\end{aligned}\right\}$$

Суммируя эти фм-ы, окончательно получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})] \quad (5)$$

Стн-ие (5) наз. фм-ой парабол (Симпсона).

Геом-ки сущность метода парабол заключается в том, что дуга $P_0P_1P_2$ грф-а подынт-ой фк-и прж-но заменяется дугой параболы с вертикальной осью, к-ая проходит через точки $P_0P_1P_2$. Анч-ая замена делается и на остальных участках. Т.о., пщ. криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3) прж-но заменяется суммой пщ-ей параболических трапеций $x_0P_0P_2x_2$, $x_2P_2P_4x_4$ и т.д.

Если подынт-ая фк. $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непр. четвертую производную, то для оценки погр-ти фм-ы (5) имеет место фм-а

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4, \quad (6)$$

где $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)|$.

зм1. Сравнивая между собой оценки (4) и (6), имеем, что с увеличением n оценки погр-ти фм-ы трапеций уменьшатся прц-но вел-е $1/n^2$, т.е. метод парабол сх. быстрее, а техника выч-й одинаковы для обоих методов.

3°. Оценка погрешностей и построение вычислительных схем. При решении любой вычт-ой задачи с помощью прж-ых фм-л нх-мо учитывать как погр-ть самой фм-ы (н-р, фм-л трапеций и парабол), так и погр-ть, возникающую при выч-ях по этой фм-е с прж-ми исх. данными. В этих оценках используются зн-ия мкс-ов ств-их производных. Однако отыскание этих зн-й может оказаться технически трудным, а если подынт. фк-ия задана не аналитическим врж-ем, а таблицей, – вообще невозможным.

Эту трудность можно преодолеть, если использовать фм-у $\Delta^n y = f^{(n)}(\xi)h^n$ (см. (11а) из 1°: 9.2). Тогда вместо (4) и (6) получим фм-ы

$$|R_n| \le \frac{(b-a)\max\left|\Delta^2 y\right|}{12} \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right), \tag{7}$$

$$|R_n| \le \frac{(b-a)\max\left|\Delta^4 y\right|}{180} \quad \left(h = \frac{b-a}{2n}\right), \tag{8}$$

врж-ные через мкс-мы ств-их разностей.

Другим удобным способом оценки точности результата прж-го интв-ия яв-ся кр-ный просчет по той же фм-е, но с уменьшенным в два раза n отрезков разбиения (см. п3). Надобность в оценке погр-ти при этом отпадает.

Обз-им через J зн-ие инт-а, выч-ное по одной из фм-л (3) или (5). Тогда в силу фм-ы (16) из 3°: 9.1 погр-ей суммы для фм-ы трапеций получим

$$\Delta(J) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\Delta(y) + (n-1)\Delta(y) + \frac{1}{2}\Delta(y)\right) = (b-a)\Delta(y),$$

где $\Delta(y)$ – погр-ть зн-й подынт-ой фк-и. Анч-но для фм. (5) получим

$$\Delta(J) = \frac{b-a}{6n}[2\Delta(y) + 2(n-1)\Delta(y) + 4n\Delta(y)] = \frac{b-a}{6n}[6n\Delta(y)] = (b-a)\Delta(y).$$

Т.о., в обоих случаях погр-ть выч-й оценивается фм-ой

$$\Delta(J) = (b-a)\Delta(y). \tag{9}$$

Фм. (9) позволяет заранее опр-ть число запасных знаков, с к-ми следует вести выч-ия по рабочим фм-ам в ств-и с точностью самих фм-л.

Выч-ия прж-го зн-ия опрн-го инт-а по любому из приведенных методов следует производить по опрн-ой прг-ме (таблице).

п1. Методом трапеций выч-ть инт. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с двумя верными десятич. знаками.

Р. Выбор шага опр-им, исходя из фм-ы (4). Имеем $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = -2\cdot\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$ и на отрезке $0 \le x \le 1$ $|f''(x)| = \left|-2\cdot\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right| < 2|1-3x^2| \le 4$.

По условию задачи, погр-ть не должна превысить 0,005. Отсюда в силу (4) имеем $\frac{1}{12n^2}\cdot 4 \le 0{,}005$ или $n^2 \ge \frac{200}{3}$ $\Rightarrow n > 8{,}16$. Удобно взять $n = 10$, тогда шаг $h = 0{,}1$. В силу фм-ы (9) погр-ть выч-й будет значительно меньше погр-ти фм-ы, если ординаты y_k будут выч-ны с точностью до трех десятич. знаков. Табл. расчета теперь примет вид:

k	x_k	x_k^2	$1+\ x_k^2$	$y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$	
0	0	0	1	1	
1	0,1	0,01	1,01		0,990
2	0,2	0,04	1,04		0,962
3	0,3	0,09	1,09		0,917
4	0,4	0,16	1,16		0,862
5	0,5	0,25	1,25		0,800
6	0,6	0,36	1,36		0,735
7	0,7	0,49	1,49		0,671
8	0,8	0,64	1,64		0,610
9	0,9	0,81	1,81		0,552
10	1	1	2	0,5	
				1,5	7,099

Из табл. в силу фм-ы (3) получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1(0{,}5\cdot 1{,}5 + 7{,}099) = 0{,}1\cdot 7{,}849 = 0{,}785.$$

Для сравнения найдем зн-ие заданного инт-а по фм-е Ньютона-Лейбница (с четырьмя верными десятич. знаками):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$$

Т.о., в данном случае фм-а трапеций дала результат более точный, чем это следует из фм-ы (4). Точными оказались все три десятич. знака.

Выбор шага исходя из допустимого зн-ия погр-ти для метода параболы выполняется по фм-е (6) анч-но п1 для метода трапеций.

п2. Методом парабол найти прж. зн-ие инт-а $\int_0^{0,8} f(x)dx$, если подынт-ая фк-я задана табл-й:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	1,000	– 50	99	0	– 5
0,1	0,9950	– 149	99	5	4
0,2	0,9801	– 248	94	1	– 4
0,3	0,9553	– 342	93	5	– 1
0,4	0,9211	– 435	88	6	0
0,5	0,8776	– 523	82	6	
0,6	0,8253	– 605	76		
0,7	0,7648	– 681			
0,8	0,6967				

Здесь шаг опр-ся шагом табл-ы и равен $h = 0{,}1$. Бланк расчета составлен так:

k	x_k	y_k		
		$k = 0$ и $k = 8$	нечетные k	четные k
0	0	1,000		
1	0,1		0,9950	
2	0,2			0,9801
3	0,3		0,9553	
4	0,4			0,9211
5	0,5		0,8776	
6	0,6			0,8253
7	0,7		0,7648	
8	0,8	0,6967		
		1,6967	3,5927	2,7265

Из этой табл. в силу фм-ы (5) при $2n = 8$ получим

$$\int_0^{0,8} f(x)dx \approx \frac{1}{30}(1,6967 + 4\cdot 3,5927 + 2\cdot 2,7265) = 0,7174.$$

Для оценки погр-ти результата воспользуемся фм-ми (8) и (9). Зн-ия подынт-ой фк-и взяты с четырьмя верными десятич. знаками, т.е. $\Delta(y) \le 0,00005$. В силу (9) в данном случае погр-ть выч-й меньше погр-ти исх. данных. Из табл. разностей следует далее, что третьи разности практически пст-ны, а сд-но, четвертые разности в табл. состоят из одних неверных цифр. Четвертые разности следует считать равными нулю, откуда в ств-и с фм-ой (8) следует, что с точностью до четырех десятич. знаков погрешность фм-ы парабол в данном случае равна нулю. Т.о., получили зн-ие искомого инт-а с четырьмя верными десятич. знаками. Тогда max $|\Delta^4 y| = 5$ и в силу (8) получим

$$\Delta(0,7174) \le \frac{0,8\cdot 5}{180} < 0,03$$

ед-ц четвертого десятич. знака.

п3. Методом парабол выч-ть инт-л $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ с пятью верными десятич. знаками.

Р. Возьмем шаг $h = 0,1$. Тогда $2n = 20$. Бланк расчета имеет вид:

k	x_k	x_k^2	Значения $y_k = e^{-x_k^2}$		
			$k = 0$ и $k = 20$	нечетные k	четные k
0	0	0	1		
1	0,1	0,01		0,99005	
2	0,2	0,04			0,96079
3	0,3	0,09		0,91393	
4	0,4	0,16			0,85214
5	0,5	0,25		0,77880	
6	0,6	0,36			0,69768
7	0,7	0,49		0,61263	
8	0,8	0,64			0,52729
9	0,9	0,81		0,44486	
10	1,0	1,00			0,36788
11	1,1	1,21		0,29820	
12	1,2	1,44			0,23693
13	1,3	1,69		0,18452	
14	1,4	1,96			0,14086
15	1,5	2,25		0,10540	
16	1,6	2,56			0,07730
17	1,7	2,89		0,05558	
18	1,8	3,24			0,03916
19	1,9	3,61		0,02705	
20	2,0	4	0,01832		
			1,01832	4,41102	3,90003

В силу фм-ы (5) $\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \dfrac{1}{30}$ (1,01832 + 4·4,41102 + 2·3,90003) = 0,88208.

Для оценки точности полученного результата выполним кр-ный просчет с удвоенным шагом h = 0,2. Зн-ия y_k берем из основного бланка, последнего столбца через одно и получим числа, приведенные в табл-е. Отсюда в силу (5)

1	0,96079	0,85214
	0,69768	0,52729
	0,36788	0,23693
	0,14086	0,07730
0,01832	0,03916	
1,01832	2,20637	1,69366

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{15}(1{,}01832 + 4\cdot 2{,}20637 + 2\cdot 1{,}69366) = 0{,}88207.$$

В силу (6) погр-ть ф-ы парабол прц-на $1/n^4$. При увеличении шага вдвое n уменьшается в два раза, а сд-но, погр-ть увеличивается в 16 раз. Для сравнения результатов выч-й с шагом h = 0,1 и h = 0,2 нх-мо фактическое отк. разделить на 16 – 1 = 15. Отсюда следует, что в данном случае погр-ть фм-ы (5) меньше ед-цы отброшенного десятич. знака.

Оценим теперь погр-ть, возникающую при выч-ях по фм. (5). Т.к. здесь приходится расв-ть сумму большого числа слагаемых, то оценка погр-ти (9), основанная на фм-е (16) из 3°: 9.1 оказывается сильно завышенной. Более точную оценку погр-ти получим, исходя из фм-ы (17а) из 3°: 9.1 при большом числе слагаемых (n > 10), имеющих одинаковую погр-ть. Тогда в силу фм-л (17а) и (21а) из 3°: 9.1 для погр-ти выч-й по фм-е (5) получим:

$$\Delta(J) = \frac{(b-a)\sqrt{18n}}{6n}\,\Delta(y). \tag{9а}$$

В расв-мом случае фм. (9а) дает $\Delta(J) = \dfrac{2\cdot 180}{60}\cdot 0{,}00005 < 0{,}0003$.

Т.о., нашли зн-ие инт-а $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ с пятью верными десятич. знаками.

4°. Интегрирование с помощью рядов. Оценка погрешностей. Пусть требуется выч-ть инт. $\int_a^b f(x)dx$. Предположим, что подынт. фк-я разложена в ряд $f(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x) + R_{n+1}(x)$, где $R_{n+1}(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ Если оценка ε дана, то

$$|R_{n+1}(x)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Из (10) получим $\int_a^b R_{n+1}(x)dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$. Тогда имеем прж. рав-во

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b u_1(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx \tag{11}$$

с точностью $\varepsilon(b-a)$. При этом по ε опр-ся число членов ряда, чтобы обеспечить эту точность.

Приведем часто используемые разложения фк-й в степенные ряды:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{11а}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (11б)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (11в)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \text{ при } |x| < 1 \quad (11г)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ при } -1 < x \le 1 \quad (11д)$$

п4. Выч-ть инт. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью 0,001.

Р. В (11а) вместо x, подставив $-x^2$, получим $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$ $\ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$ Тогда $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots\right)dx =$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \ldots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \ldots,$$

т.к. $\frac{1}{1320} = 0{,}00076 < 0{,}001$, то по признаку Лейбница частичная сумма ряда не превосходит абс. вел-ны первого из отброшенных членов, т.е. $|R_{n+1}(x)| < u_{n+1}(x)$, тогда

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}747.$$

Заметим, что иногда приходится разлагать в степенной ряд лишь нек-ую часть подынт-ой фк-и.

п5. Выч-ть инт. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до трех десятич. знаков.

Р. Используя (11б), получим $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx \approx \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right)dx =$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{1}{35280}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7.$$

По условию, $\varepsilon = 0{,}0005$, тогда $\frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 = 0{,}000497 < 0{,}0005$, значит, дт-но взять два члена сумм, т.е. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = 0{,}758.$

зм2. Для разложения подынт-ой фк-и можно использовать и инпн-ые фм-ы Лагранжа, Ньютона, Гаусса и т.д. Их можно найти в [17].

ЛЕКЦИЯ 33

11.2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Общие замечания. Метод степенных рядов. Методы решения диф-ых ур-й первого порядка основаны главным образом на сведении их к ур-ям с разделяющимися пер-ми с последующим интв-ем. О таких диф. ур-ях говорят, что они решаются в квадратурах. Ур-ие второго порядка обычно стараются привести к ур-ю первого порядка. Если полученные ур. решаются в квадратурах, то решение исх-го ур-ия пишут в виде инт-ов.

Если инт-ы не врж-ся (не берутся) в элр-ых фк-ях, то их находят прж-но. Однако типы диф-ых ур-й, допускающих решение в квадратурах (точно или прж-но), невелико. Кроме того, сущ-ют диф. ур-ия, к-ые не сводятся к квадратурам. Поэтому разработаны прж. методы решения диф. ур-й. Причем их можно разбить на два класса: аналитические прж. методы (н-р, методы степенных рядов, посл-ых прж-й и др.), численные (табличные) методы (Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса, Крылова и др.).

Метод степенных рядов (неопр-ых коэф-ов). Этот метод удобен для интв-ия лин-ых диф. ур-й с пер. коэф-ми, к-ые, вообще говоря, не сводятся к квадратурам.

Рас-им для опрс-ти лин. ур-ие второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x). \tag{1}$$

с нач. условиями

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0. \tag{1а}$$

Если коэф-ы $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $q(x)$ непр-ы в окрс-ти точки $x = 0$, то сущ-ет едн. решение ур-ия (1), удщ-е нач. условиям (1а). Предположим, что эти коэф. разлагаются в ряд Маклорена:

$$p_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ p_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\ ,\ q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\ . \tag{1б}$$

Решение ур-ия (1) будем искать в виде ст-го ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ . \tag{1в}$$

с неопр. коэф-ми $\{c_j\}$. Диф-уя (1в), получим

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}\ ,\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}\ . \tag{1г}$$

Подставив врж-ия (1б)-(1г) в (1), получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\ . \tag{1д}$$

Отсюда, приравнивая коэф-ы левой и правой частей при одинаковых ст-ях x, получим систему

$$\begin{array}{c|r} x^0 & 2c_2 + c_1a_0 + c_0b_0 = q_0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_2 + 2c_2a_0 + c_1a_1 + c_1b_0 + c_0b_1 = q_1, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3c_3a_0 + 2c_2a_1 + c_1a_2 + c_2b_0 + c_1b_1 + c_0b_2 = q_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2} + Q(c_{n+1}, c_n, \ldots, c_1, c_0) = q_n, \end{array}\Bigg\} \tag{1е}$$

где $Q(c_{n+1}, c_n, \ldots, c_1, c_0)$ означает лин. фк-ю аргументов $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$.

Как видно из системы (1е), каждое ее последующее ур. содержит один лишний коэф. по сравнению с предыдущим. Поэтому все коэф-ы c_i могут быть посл-но врж-ны через c_0 и c_1, к-ые опр-ся из нач. условий:

$$c_0 = y(0) = y_0,\ c_1 = y'(0) = y'_0. \tag{1ж}$$

Подставив найденные коэф. $\{c_j\}$ в (1в), получим решение (1).

Возникает вопрос: будет ли ряд (1в) с коэф-ми, полученными из системы (1е), схм-ся и дает ли он решение ур-ия (1). Ответ дает сд. теорема, к-ую примем без д-ва.

т1. Если ряды (1б) сх-ся при $|x| < R$, то построенный ст. ряд (1в) сх-ся в той же обл-и и служит решением ур-ия (1).

зм1. Если не даны нач. условия (1а), то, считая c_0 и c_1 произвольными пст-ми, получим общее решение в виде (1в).

зм2. Обычно конкретное врж. для c_n в (1в) бывает трудно найти. Поэтому на практике огр-ся нахождением нескольких первых коэф-ов разложения (1в), получая т.о. прж. решение.

зм3. Метод неопр-ых коэф-ов применим и при решении нелин-ых ур-й, но это может привести к громоздким выч-ям коэф-ов. Поэтому в таком случае используют метод посл-го диф-ия, описанного в 2º.

зм4. Метод неопр. коэф-ов применим к ур-ям любого порядка k. При этом все коэф. c_n, начиная с c_k, будут врж-ся через $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, к-ые опр-ся с помощью нач-ых условий

$$c_0 = y_0,\ c_1 = y'_0,\ c_2 = \frac{y''_0}{2!},\ \ldots,\ c_{k-1} = \frac{y_0^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

зм5. Если нач. условия (1а) заданы в точке $x = x_0$ и в окрс-ти этой точки фк-и $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $q(x)$ могут быть разложены в ряд Тейлора по ст-ям $(x - x_0)$, то решение ищем в виде

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n . \tag{1и}$$

Процесс отыскания коэф-ов ничем не отличается от описанного выше.

зм6. Для одн-го лин. ур-ия, т.е. при $q(x) = 0$ правые части (1д) равны нулю.

п1. Методом ст-ых рядов решить ур-ие $y'' - xy = 0$.

Р. Полагаем $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots + c_nx^n + \ldots$ Тогда

$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots,$

$y'' = 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3x + 4\cdot 3c_4x^2 + 5\cdot 4c_5x^3 + \ldots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \ldots$

Подставляя их в исх. ур-ие и группируя по степеням x, получим $2\cdot 1\cdot c_2 +$ $+ (3\cdot 2c_3 - c_0)x + (4\cdot 3c_4 - c_1)x^2 + (5\cdot 4c_5 - c_2)x^3 + (6\cdot 5c_6 - c_3)x^4 + \ldots + [n(n-1)c_n -$ $- c_{n-3})x^{n-2} + \ldots = 0.$

Отсюда с учетом зм6 получим $c_2 = 0$, $c_3 = \dfrac{c_0}{2\cdot 3}$, $c_4 = \dfrac{c_1}{3\cdot 4}$, $c_5 = \dfrac{c_2}{4\cdot 5} = 0$,

$c_6 = \dfrac{c_3}{5\cdot 6} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$. Вообще, $c_{3n} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6 ... (3n-1)(3n)}$,

$c_{3n+1} = \dfrac{c_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 ... (3n)(3n+1)}$, $c_{3n+2} = 0$.

Отсюда общее решение можно записать в виде

$$y = c_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)(3n)}+\ldots\right]+$$

$$+\,c_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots(3n)(3n+1)}+\ldots\right].$$

п2. Решить ур. $y'' - xy' + y = 1 - \cos x$ с нач. условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Р. Возьмем $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Разложим $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} - \ldots$ Запишем

$$\begin{array}{r|l} 1 & y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + \ldots, \\ -x & y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + 6c_6x^5 + 7c_7x^6 + 8c_8x^7 + \ldots, \\ 1 & y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + 30c_6x^4 + 42c_7x^5 + 56c_8x^6 + \ldots \end{array}$$

Ств-но, умн-ив их на $1, -x, 1$ и подставив в исх. ур-ие, получим

$$(c_0 + 2c_2) + 6c_3x + (-c_2 + 12c_4)x^2 + (-2c_3 + 20c_5)x^3 + (-3c_4 + 30c_6)x^4 +$$

$$+ (-4c_5 + 42c_7)x^5 + (-5c_6 + 56c_8)x^6 = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots$$

Отсюда, приравнивая коэф-ы правых и левых частей рав-ва при пер-ых, получим

x^0	$c_0 + 2c_2 = 0$	$c_0 = y_0 = 0$, $c_1 = y'_0 = 1$
x	$6c_3 = 0$	$c_3 = c_5 = \ldots = c_{2n+1} = 0$
x^2	$-c_2 + 12c_4 = \dfrac{1}{2}$	$c_2 = 0$
x^3	$-2c_3 + 20c_5 = 0$	$c_4 = \dfrac{1}{24}$
x^4	$-3c_4 + 30c_6 = -\dfrac{1}{24}$	$c_6 = \dfrac{1}{360}$
x^5	$-4c_5 + 42c_7 = 0$	$c_8 = \dfrac{11}{40320}$
x^6	$-5c_6 + 56c_8 = \dfrac{1}{720}$	
. . . .		

Тогда искомое решение имеет вид $y = x + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{360} + \dfrac{11x^8}{40320} + \ldots$

зм7. Если для ур-ия (1) точка $x = 0$ особая (н-р, как для ур. Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \Rightarrow y'' + \dfrac{1}{x}y' + \left(1-\dfrac{m^2}{x^2}\right)y = 0$), то решение ищем в виде обобщенного ст. ряда $y = x^{\alpha}(c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots)$. Решения ур. Бесселя см. в [19].

2°. Метод последовательного дифференцирования. Пусть дано ур-ие

$$y^{(n)} = \varphi(x, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

с нач. условиями при $x = x_0$

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \qquad (2а)$$

Частное решение $y = f(x)$ будем искать в виде

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots \qquad (2б)$$

В силу нач-ых условий (2а) разложение (2б) должно иметь вид

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots \qquad (2в)$$

Остается найти зн-ия производных $f^{(n)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$, … Для нахождения $f^{(n)}(x_0)$ используем (2) при $x = x_0$, т.е. получим

$$y_0^{(n)} = f^{(n)}(x_0) = \varphi\left(x_0 y_0 y_0' \ldots y_0^{(n-1)}\right).$$

Для нахождения $f^{(n+1)}(x_0)$ и последующих продиф-ем ур-ие (2) по x.

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}. \qquad (2г)$$

Из (2г) при $x = x_0$ получим $y_0^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x_0)$.

Диф-ие (2г) еще раз по x дает возможность опр-ть $f^{(n+2)}(x_0)$ и т.д. Т.о., путем посл-го диф-ия мы можем продолжить ряд Тейлора (2в) как угодно далеко и получить решение ур-ия (2) с желаемой точностью.

п3. Методом посл-го диф-ия найти частное решение ур-ия $y'' + a^2y = 0$ при нач-ых условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = a$.

Р. Из ур-ия находим, что при $x = 0$ $y_0'' = 0$. Далее определяем: $y^{III} + a^2y^{I} = 0$ $\Rightarrow$ $y_0^{III} = -a^3$, $y^{IV} + a^2y^{II} = 0 \Rightarrow y_0^{IV} + a^2y^{II} = 0 \Rightarrow y_0^{IV} = 0$, $y_0^{V} + a^2y^{III} = 0$ $\Rightarrow$ $y_0^{V} = a^5$, …, вообще, $y_0^{(2n)} = 0$, $y_0^{(2n+1)} = (-1)^n a^{2n+1}$, откуда получим частное решение $y = \dfrac{ax}{1!} - \dfrac{a^3x^3}{3!} + \dfrac{a^5x5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{a^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, или $y = \sin ax$.

Метод посл-го диф-ия можно использовать и для решения систем диф-ых ур-й. Пусть требуется решить систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z); \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

с нач. условиями $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

Напишем ряд Тейлора для обеих фк-й:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \ldots \\ z(x) &= z_0 + z'(x_0)(x - x_0) + \frac{z''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3а}$$

Коэф-ы $y'(x_0)$, $z'(x_0)$ находим из (3) при подстановке в нее $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Вторые производные находим, продиф-ав оба ур-ия системы (3а) и подставляя в них $x = x_0$ и т.д.

п4. Найти решение системы $y' = x + z^2$, $z' = y$ при $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Р. Из данной системы находим: $y'(0) = 1$, $z'(0) = 0$. Диф-уя систему, имеем $y'' = 1 + 2zz'$, $z'' = y' \Rightarrow y''(0) = 1$, $z''(0) = 1$. Далее находим $y''' = 2(z')^2 + 2zz'$, $z''' = y'' \Rightarrow y'''(0) = 2$, $z'''(0) = 1$. Откуда получим частное решение системы: $y(x) = x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{2x^3}{3!} + \ldots$, $z'(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

3°. Метод последовательных приближений (Пикара). Этот итерационный метод возник в связи в д-ом теоремы сущв-ия и едн-ти решения диф-ых ур-й, к-ую приведем без д-ва.

т2. Если фк. $f(x, y)$ непр-на в обл., содержащей точку $P_0(x_0, y_0)$, то ур. $y' = f(x, y)$ имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$. Это решение едн., если непр-на еще частная производная $\dfrac{\partial f(x)}{\partial y}$.

Пусть дано ур-ие

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

с нач. условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{4а}$$

Ур-ие (4) с учетом (4а) можно писать в виде

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx . \tag{4б}$$

Интн-ое ур-ие (4б) будем решать посл. прж-ми

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx ; \\ y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx . \end{aligned} \tag{4в}$$

В силу т1: 5.18 посл. $\{y_n\} = \{y_n(x)\}$ сх. при $n \to \infty$ к решению $y = y(x)$ ур-ия (4), причем $y(x_0) = y_0$.

п5. Методом Пикара найти частное решение ур-ия $y' = x + y$ при $y(0) = 1$.

Р. Запишем ур-ие в виде $y = 1 + \int\limits_0^x (x + y)dx$. Используя (4в), находим $y_1 =$

$= 1 + \int\limits_0^x (x+1)dx = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $y_2 = 1 + \int\limits_0^x \left(x+1+x+\dfrac{x^2}{2} \right) dx = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$,

$y_3 = 1 + \int\limits_0^x \left(x+1+x+x^2+\dfrac{x^3}{6} \right) dx = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{24}$, $y_4 = 1 +$

$+ \int\limits_0^x \left(x+1+x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{24} \right) dx = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{120}$. Точное решение имеет вид $y = 2e^x - x - 1 = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{360} + \ldots$

Зм8. Метод Пикара легко может быть перенесен на системы ур-ий и на ур-ия высших порядков.

4°. Метод Эйлера. Найти прж. решение ур-ия

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

с нач. условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{5а}$$

Выберем число h настолько малым, чтобы для любого $x \in\ ]x_0, x_1[$, где $x_1 = x_0 + h$, зн-ия y мало отличалось от y_0 (фк-ия y непр-на). Тогда можно записать ур-ие касательной в точке (x_0, y_0):

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0).$$

Для конца участка $x_1 = x_0 + h$ получим $y(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) = y_0 + hy'_0 = y_1$. Точно так же для $x = x_2 = x_0 + 2h$ можно написать $y_2 = y_1 + hy'_1$ и т.д. $y_{k+1} = y_k + hy'_k$, где $y'_k = f(x_k, y_k)$. Откуда получим схему метода Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_k &= hy'_k; \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k. \end{aligned}\right\} \tag{5б}$$

Т.о., метод Эйлера состоит в посл-ом выч-и разностей искомой фк-и.

Геом-й смысл метода Эйлера (рис. 1) заключается в том, что интн. кривая заменяется ломаной.

зм9. Фм-у (5б) можно получить и исходя из др-х соображений. Ур. (5) напишем в виде

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx. \tag{5в}$$

Если в точке $x = x_k$ полагать $f(x_k, y(x_k)) = f(x_k, y_k) = y'_k$ и $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx = x_{k+1} - x_k = h$, то получим $y_{k+1} = y_k + hy'_k$, т.е. (5б).

Метод Эйлера прост, но точность его невелика. Поэтому на практике используется

Уточненный метод Эйлера. Суть его состоит в сд-ем. Сначала выч-ем вспомогательные зн. искомой фк-и $y_{n+1/2}$ в точках $x_{n+1/2} = x_n + \dfrac{h}{2}$ по фм-е

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{1}{2}hf_n = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n).$$

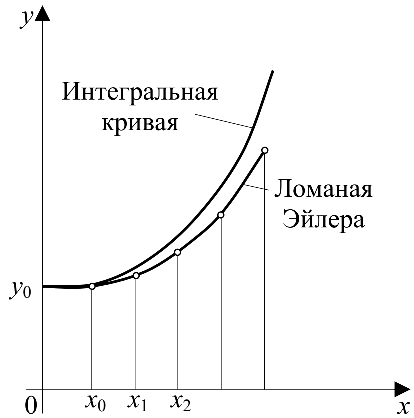


Рис. 1

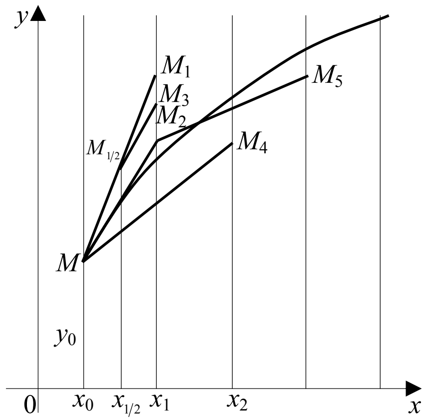


Рис. 2

Далее находим зн-ие правой части ур-ия (5) в ср. точке $f_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ и затем полагаем

$$y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1/2}\,. \tag{5г}$$

Фм. (5г) представляет собой уточненный метод Эйлера, геом-й смысл к-го состоит (рис. 2) в том, что из точки $M(x_0, y_0)$ получаем для $x = x_{1/2}$ точки $M_{1/2}$. Для $x = x_1$ способ Эйлера дал бы точку M_1, находящуюся на касательной к интн. кривой в точке M. Уточненный способ состоит в том, что из точки M проводится отрезок $MM_2 \parallel M_{1/2}M_3$ в ств-и с угловым коэф-ом в точке $M_{1/2}$. Точка M_2, к-ая получена по уточненному способу Эйлера, находится ближе к истинной кривой, чем точка M_1. В дальнейшем для получения каждой сд-ей точки проводится отрезок над участком длины $2h$ параллельно направлению, к-ое опр-ся зн-ем производной в ср-е этого участка: MM_4, M_2M_5.

Метод Эйлера-Коши. Опр-ем вспомогательную вел-у

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{6}$$

Затем прж-ия искомого решения $y(x)$ находим по фм-е

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right)\right]. \tag{6а}$$

Метод Эйлера-Коши также точнее метода Эйлера.

п1. Методом Эйлера найти решение ур. $y' = 2xy$ при $y(0) = 1$ на участке [0, 1], принимая $h = 0{,}1$.

Р. Схема и результаты выч-й даны в табл. 1. По нач. данным заполнена первая строка в столбцах 1* и 2*. Затем из ур. $y'_0 = 2x_0y_0$ вычисляется y' для первой строки столбца 4* и значение $\Delta y_0 = hy'_0$ для столбца 3* между первой и второй строкой. Теперь можно заполнять вторую строку в столбце 2*: $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, затем вторую строку в столбце 4* и т.д.

Таблица 1

1*	2*	3*	4*	5*	6*
x	y	Δy	y'	$y = e^{x^2}$	y
0,0	1,00	0,00	0,1	1,00	1,00
0,1	1,00	0,02	0,2	1,01	1,01
0,2	1,02	0,04	0,4	1,04	1,04
0,3	1,06	0,06	0,6	1,09	1,09
0,4	1,12	0,09	0,9	1,17	1,16
0,5	1,21	0,12	1,2	1,28	1,26
0,6	1,33	0,16	1,6	1,43	1,39
0,7	1,49	0,21	2,1	1,63	1,57
0,8	1,70	0,27	2,7	1,90	1,80
0,9	1,97	0,35	3,5	2,25	2,12
1,0	2,32			2,72	2,53

Таблица 2

1*	2*	3*	4*
x	y	Δy	y'
0	1,00	0,00	0
0,05	1,00	0,01	0,1
0,1	1,01	0,04	0,2
0,2	1,04	0,08	0,4
0,3	1,09	0,14	0,7
0,4	1,18	0,18	0,9
0,5	1,27	0,26	1,3
0,6	1,44	0,34	1,7
0,7	1,61	0,46	2,3
0,8	1,90	0,60	3,0
0,9	2,21	0,80	4,0
1,0	2,70		

В столбце 5* приведено зн-ие точного решения $y = e^{x^2}$ с точностью до двух знаков. Сравнение результатов показывает, что отн. погрешность при $x = 1$ ($y(1) = 2{,}32$) составляет 14% ($y(1) = e^{x^2} = 2{,}72$), т.е. довольно сущ-на.

В столбце 6* приведен результат выч-й методом Эйлера с шагом $h = 0{,}05$ (зн-ия фк-и в промежуточных точках 0,05; 0,15 и т.д. в таблице не указаны). Здесь отн. ошибка при $x = 1$ ($y(1) = 2{,}53$) составляет уже 7%.

п2. Уточненным методом Эйлера решить п1.

Р. Выч-ия приведены в табл. 2. По $y' = 2xy$ заполняется столбец 4*. Затем для 3* столбца находим $\Delta y = hy' = 0{,}2y'$. Выч-ем сд-й $y_{i+1} = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$ и т.д.

Уточненный метод Эйлера дает при $x = 1$ вел-у $y = 2{,}70$. Сравнение с точным решением (см. столбец 5* табл. 1) показывает, что относительная ошибка составляет здесь только 0,7%.

Метод Эйлера для решение систем диф. ур-й. Метод Эйлера применим и для интв-ия систем диф. ур-й и ур-й высших порядков. Последние предварительно приводятся к системе диф. ур-й в норм. форме. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(xyz); \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(xyz) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

с нач. условиями

$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0. \tag{7a}$$

Как указывалось выше, решение диф. ур-я первого порядка сводится к выч-ю разностей Δy, а в случае системы – разностей Δy и Δz.

Последние могут быть выч-ны по фм-ам

$$\left.\begin{aligned}\Delta y_k &= y'_k h = hf_1(x_k, y_k, z_k),\\ \Delta z_k &= z'_k h = hf_2(x_k, y_k, z_k),\end{aligned}\right\} \qquad (7б)$$

откуда получим прж-ия искомых решений $y(x)$, $z(x)$:

$$\left.\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n,\\ z_{n+1} &= z_n + \Delta z_n.\end{aligned}\right\} \qquad (7в)$$

п3. Методом Эйлера найти решение ур-я Бесселя (с индексом $m = 0$) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ с нач. условиями $x_0 = 1$, $y_0 = 0{,}765$; $y'_0 = -\,0{,}440$ на участке [1,0; 1,5].

Р. Данное ур-е приведем к системе двух ур-й: $\begin{cases} y' = z;\\ x' = -\dfrac{z}{x} - y\end{cases}$ с нач. условиями $x_0 = 1$, $y_0 = 0{,}765$; $z_0 = -\,0{,}440$.

По (7в) находим Δy_0, Δz_0, затем y_1, z_1. Снова по (7б) – разности Δy_1 и Δz_1 и т.д.

Результаты выч-й приведены в табл. 3. Точное зн. решения для $x = 1{,}5$ с четырьмя знаками равно $J_0(1{,}5) = 0{,}5118$. Т.о., отн. ошибка составляет 0,8%.

Таблица 3

x	y	Δy	$y' = z$	Δz	$z' = -\dfrac{z}{x} - y$
1,0	0,765	– 0,044	– 0,440	– 0,032	– 0,325
1,1	0,721	– 0,047	– 0,472	– 0,029	– 0,292
1,2	0,674	– 0,050	– 0,501	– 0,026	– 0,256
1,3	0,624	– 0,053	– 0,527	– 0,022	– 0,218
1,4	0,571	– 0,055	– 0,549		
1,5	0,516				

5°. Метод Рунге-Кутта. Идея этого метода имеет много общего с идеей метода Эйлера и яв-ся одним из наиболее употребительных методов повышенной точности.

Пусть требуется решить диф. ур-е (задача Коши).

$$y' = f(x, y) \qquad (8)$$

с нач. условием

$$y(x_0) = y_0. \qquad (8а)$$

Представим искомое решение $y(x)$ задачи Коши (8), (8а) в окрс-ти каждой точки $x = x_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) по фм-е Тейлора

$$y(x) = y_n + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots, \qquad (8б)$$

где коэф-ты $\dfrac{d^k y}{dx^k} = \dfrac{d^k y(x_n)}{dx^k}$ выч-ся в точке $x = x_n$ непосредственно по правой части ур. (8) с использованием условия (8а).

Точность искомого решения зависит от кол-ва взятых членов в разложении (8б). Так если члены удержим до h порядка включительно, то приходим к методу Эйлера. В методе Рунге-Кутта огр-ются четырьмя или пятью членами разложения, т.е. удерживаются члены со степенями h^3 или h^4 включительно.

Рас-им метод Рунге-Кутта с точностью третьего порядка, взяв

$$y(x) \approx y_n + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}. \qquad (8в)$$

Полагаем

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \qquad (8г)$$

где

$$\Delta y_n = h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3}. \qquad (8д)$$

Вел-ы Δy_n представляем с помощью лин-ых комбинаций вида

$$\Delta y = \alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 + \delta k_4, \qquad (8е)$$

где α, β, γ, δ – неопр. коэф-ты, а k_1, k_2, k_3, k_4 – числа, опр-ые рав-ми:

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = hf(x_n, y_n),\\ &k_2 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),\\ &k_3 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),\\ &k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned}\right\} \qquad (8ж)$$

Эти числа имеют простой геом. смысл. Пусть кривая MCM_1 (см. рис. 3) есть решение задачи Коши (8), (8а), B и G – точки пересечения кас-ой к MCM_1 в точке M с ординатами AC и N_1M_1. Тогда с точностью до множителя $h = x_{n+1} - x_n$ число k_1 есть угловой коэф. кас-ой к кривой MCM_1 в точке M, k_2 – угловой коэф. кас-ой к кривой в точке B (BF – отрезок этой кас-ой).

Проведем через точку M прямую, прл-ю BF, и отметим точки пересечения D и E с ординатами AC и N_1M_1. Тогда k_3 и k_4 будут угловыми коэф-ми кас-ых к кривой в точках ств-но D и E.

Коэф-ы α, β, γ, δ опр-ем так: если полагать $y(x + h) = y(x) + \Delta y$, то можно д-ть (см. [43]), что $\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. Схема выч-й приведена в табл. 4, для к-ой берем $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

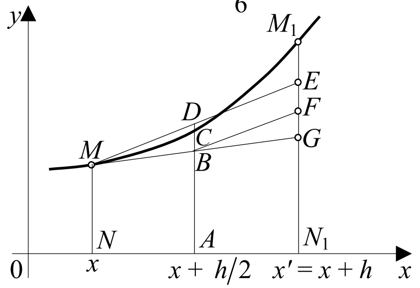


Рис. 3

Таблица 4

x	y	$k_j = h\cdot f(x, y)$
x_0	y_0	k_1
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1$	k_2
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_2$	k_3
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$	

п4. Составить табл-у зн-й фк-и y,опр-мой ур-ем $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, при нач-ом зн-и $y(0) = 1$ в промежутке [0, 1] с шагом $h = 0{,}2$ (точное реш. $y = \sqrt{2x+1}$).

Р. Найдем число $k_1 = h{\cdot}f(x, y) = 0{,}2{\cdot}\left(1 - \dfrac{2\cdot 0}{1}\right) = 0{,}2$;

$k_2 = h\cdot f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}\right) = 0{,}2{\cdot}f(0{,}1;\ 1{,}1) = 0{,}2{\cdot}\left(1{,}1 - \dfrac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836$;

$k_3 = h\cdot f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}\right) = 0{,}2{\cdot}f(0{,}1;\ 1{,}0918) = 0{,}1817$;

$k_4 = h{\cdot}f(x_n + h, y_n + k_3) = 0{,}2f(0{,}2;\ 1{,}1817) = 0{,}1686$.

Отсюда $\Delta y = \dfrac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832$.

Т.о., $y_1 = 1 + 0{,}1832$ при $x = 0{,}2$. Анч-но находим y_2 и т.д. Процесс выч-й ведем по такой схеме (табл-е):

i	x	y	$f(x, y)$	$k_j = h{\cdot}f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	
2	0,1	1,1	0,0918	0,1838	0,1832
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	0,1584
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	
2					
3					
4					
1					

Из табл. получаем $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1832 + 0{,}1584 = 1{,}3416$.

Заметим, что все пять знаков чисел $y_1 = 1{,}1832$ и $y_2 = 1{,}3416$ верны, если сравнить с точным решением $y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y_1(0{,}2) = 1{,}18322$, $y_2(0{,}2) =$ $= 1{,}34164$.

п5. Методом Рунге-Кутта решить ур. $x^2y' - xy = 1$ при нач. условии $y(1) = 0$ в промежутке [1, 2] с шагом $h = 0{,}2$ [точное реш. $y = (x^2 - 1)/(2x)$].

Р. Здесь $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Найдем числа:

$k_1 = hf(x, y) = 0{,}2{\cdot}\left(\dfrac{0}{1} + \dfrac{1}{1^2}\right) = 0{,}2$;

$k_2 = h\ f\left(x + \dfrac{h}{2}, y + \dfrac{k_1}{2}\right) = 0{,}2{\cdot}\left(\dfrac{0{,}1}{1{,}1} + \dfrac{1}{1{,}1^2}\right) = 0{,}18$;

$$k_3 = h\,f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}09}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}1^2}\right) = 0{,}18;$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) = 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}18}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}2^2}\right) = 0{,}17.$$

Сд-но, $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}18$, т.е. $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}18 = 0{,}18$.

Находим: $k_1 = hf(x, y) = 0{,}2\left(\frac{0{,}18}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}2^2}\right) = 0{,}17;$

$$k_2 = h\,f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}26}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}3^2}\right) = 0{,}15;$$

$$k_3 = h\,f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}25}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}3^2}\right) = 0{,}15;$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) = 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}33}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}4^2}\right) = 0{,}14.$$

Сд-но, $\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}15$, т.е. $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}18 + 0{,}15 = 0{,}33$ и т.д.

Метод Рунге-Кутта для решения систем диф. ур-й. Пусть дана система $y' = f(x, y, z)$, $z' = \varphi(x, y, z)$ при нач. условиях $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$. Как и в случае одного ур-ия, опр-ем прл-но числа λ_n и μ_n:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ \mu_n &= \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$\begin{array}{l|l} k_1 = hf(x_n, y_n, z_n), & l_1 = h\varphi(x_n, y_n, z_n), \\ k_2 = h\,f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_1}{2}, z_n+\frac{l_1}{2}\right), & l_2 = h\,\varphi\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_1}{2}, z_n+\frac{l_1}{2}\right), \\ k_3 = h\,f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_2}{2}, z_n+\frac{l_2}{2}\right), & l_3 = h\,\varphi\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_2}{2}, z_n+\frac{l_2}{2}\right), \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3). & l_4 = h\varphi(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3). \end{array} \tag{9а}$$

Тогда получим

$$y_{n+1} = y_n + \lambda_n,\ z_{n+1} = z_n + \mu_n. \tag{9б}$$

п6. Решить систему $y' = \frac{z-y}{x}$, $z' = \frac{z+y}{x}$ при нач. условиях: $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ и найти зн-ия искомых фк-й в точке $x = 1{,}2$.

Р. Выберем шаг $h = 0{,}2$ и найдем $k_1 = 0$, $l_1 = \frac{1+1}{1}0{,}2 = 0{,}4$;

$$k_2 = \frac{1+0{,}2-1}{1{,}1}\cdot 0{,}2 = 0{,}03636,\ l_2 = \frac{1+0{,}2+1}{1{,}1}\cdot 0{,}2 = 0{,}4;$$

$k_3 = \dfrac{1}{1,1}(1 + 0,2 - 1 - 0,01818)\cdot 0,2 = 0,03306$, $l_3 = \dfrac{1}{1,1}(1 + 0,2 + 1 +$
$+ 0,01818)\cdot 0,2 = 0,40331$;

$k_4 = \dfrac{1}{1,2}(1 + 0,40331 - 1 - 0,03306)\cdot 0,2 = 0,06171$, $l_4 = \dfrac{1}{1,2}(1 + 0,40331 +$
$+ 1 + 0,03306)\cdot 0,2 = 0,40606$.

Выч-им $\lambda_0 = \dfrac{1}{6}[0 + 2(0,03636 + 0,03306) + 0,06171] = 0,03343$,

$\mu_0 = \dfrac{1}{6}[0,4 + 2(0,4 + 0,40331) + 0,40606] = 0,40211$.

По (9б) находим искомый результат: $y_1 = y_0 + \lambda_0 = 1 + 0,03343 = 1,03343$, $z_1 = z_0 + \mu_0 = 1 + 0,40211 = 1,40211$. В табл. 5 приведены результаты выч-й.

Таблица 5

n	x_n	y_n	z_n	$f(x, y, z) = \dfrac{z-y}{x}$	$\varphi(x, y, z) = \dfrac{z+y}{x}$	k_i	l_i	λ_n	μ_n
0	1,0 1,1 1,1 1,2	1,00000 1,00000 1,01818 103306	1,00000 1,20000 1,20000 1,40331	0,00000 0,18180 0,16529 0,30854	2,00000 2,00000 2,01653 2,03031	0,00000 0,03636 0,03306 0,03171	0,40000 0,40000 0,40331 0,40606	0,03343	0,40211
	1,2	1,03343	1,40211						

зм10. Методом Рунге-Кутта можно пользоваться и при решении обыкновенных диф. ур-й высших порядков. Для этого они приводятся к системе диф. ур-й и решаются, как было описано выше или по сд-ей схеме.

Пусть требуется найти решение ур-ия $y'' = f(x, y, y')$ при нач. условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Опр-им добавочные слагаемые

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3); \\ \lambda' &= \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}\right\} \qquad (9в)$$

где

$$\begin{array}{l|l} k_1 = \dfrac{h^2}{2} f\left(x_n, y_n, \dfrac{v_{1n}}{2}\right), & v_{1n} = v_1 = hy',\ y' = y'(x_n), \\ k_2 = \dfrac{h^2}{2} f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{v_{1n}}{2} + \dfrac{k_1}{4}\right), & v_{1n} = v_{1n} + k_1, \\ k_3 = \dfrac{h^2}{2} f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{v_{1n}}{2} + \dfrac{k_1}{4}\right), & v_{1n} = v_{1n} + k_2, \\ k_4 = \dfrac{h^2}{2} f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + v_{1n} + k_3\right). & v_{1n} = v_{1n} + 2k_3. \end{array}$$

Выч-ия удобно вести по табл. 6.

Таблица 6

x	y	$hy' = v_1$	$k = \frac{h^2}{2} f\left(x, y, \frac{v_1}{2}\right)$	Добавочное слагаемое
x_0	y_0	v_{10}	k_1	$\lambda = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{v_{10}}{2} + \frac{k_1}{4}$	$v_{10} + k_1$	k_2	
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{v_{10}}{2} + \frac{k_1}{4}$	$v_{10} + k_2$	k_3	$\lambda' = \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + h$	$y_0 + v_{10} + k_3$	$v_{10} + 2k_3$	k_4	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + v_{10} + k$	$v_{11} = v_{10} + \lambda'$		

6°. Метод Адамса. Пусть требуется найти решение ур-ия

$$y' = f(x, y) \tag{10}$$

с нач. условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{10а}$$

Одним из разностных методов прж-го решения этой задачи яв-ся метод Адамса, суть к-го состоит в том, что, взяв нек-ый шаг h, находят каким-либо способом, исходя из нач. данных (10а), сд-ие зн-ия искомой фк-и $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),\ y_2 = y(x_0 + 2h),\ y_3 = y(x_0 + 3h). \tag{10б}$$

Эти три зн-ия можно получить любым методом, обеспечивающим нужную точность: с помощью разложения решения в ст. ряд, методом Рунге-Кутта и т.д., но не методом Эйлера ввиду его недостаточной точности. С помощью чисел x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3 выч-ют вел-ы

$$q_0 = h\cdot y'_0 = h\cdot f(x_0, y_0),\ q_1 = h\cdot f(x_1, y_1),\ q_2 = h\cdot f(x_2, y_2),\ q_3 = h\cdot f(x_3, y_3). \tag{10в}$$

Далее составляют табл-у конечных разностей вел-н y и q:

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
…	…	…	…	…	…	…

Зная числа в нижней косой строке, по фм-е Адамса находят

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0,$$

а затем и вел-у $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Зная теперь y_4, выч-ют $q_4 = h\cdot f(x_4, y_4)$, после чего можно написать сд-ю косую строку:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3,\ \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2,\ \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1.$$

Новая косая строка позволяет выч-ть по фм-е Адамса зн-ие

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1,$$

а сд-но, $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ и т.д.

п7. Методом Адамса найти зн-ие $y(0{,}4)$ с точностью до 0,01 для диф-го ур-ия $y' = x^2 + y^2$ при $y(0) = -1$.

Р. Найдем первые четыре члена разложения решения данного ур-ия в ряд Маклорена в окрс-ти точки $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots$$

Исходя из $y(0) = -1$, зн-ия $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ находим, посл-но диф-руя данное ур-ие:

$$y' = x^2 + y^2;\ y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1;$$
$$y'' = 2x + 2yy';\ y''(0) = 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1 = -2;$$
$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'';\ y'''(0) = 2 + 2\cdot(-1)^2 + 2°(-1)\cdot(-2) = 8.$$

Т.о., получили

$$y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots$$

Выч-им $y(x)$ в точках $x_1 = -0{,}909$, $y_2 = -0{,}829$, $y_3 = -0{,}754$. Составим табл-у:

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0 0,1 0,2 0,3 0,4	– 1 – 0,909 – 0,829 – 0,754	0,091 0,080 0,075	0,1 0,083 0,072 0,065	– 0,017 – 0,011 – 0,07	0,006 0,004	– 0,002

Отсюда получим

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 =$$
$$= 0{,}065 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}007) + \frac{5}{12}\cdot 0{,}004 + \frac{3}{8}\cdot(-0{,}002) = 0{,}062.$$

Сд-но,

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 \approx -0{,}754 + 0{,}062 = -0{,}692 \approx -0{,}69.$$

11.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

11.1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Когда возникает нх-сть выч-ия опрн-го инт-а численными методами?
2. В чем состоит суть интв-ия методами пуг-ов и какова его геом. инпц-ия?
3. Как получается интв-ие методом трапеций и какова его геом. инпц-ия?
4. В чем заключается суть интв-ия методом парабол и какова его геом. инпц-ия?
5. Приведите оценку погр-ей и выч-ых схем численного интв-ия.
6. в чем состоит суть интв-ия с помощью рядов?

Задание для кр. работы: по образцу п1-п5 решить з1-з27.

В задачах 1-27 выч-ть инт-л по фм-е: 1) трапеций с тремя десятич. знаками; 2) Симпсона при $n = 8$ и оценить погр-ть результатов, составив табл-у конечных разностей.

1. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$, 2) $\displaystyle\int_{1,2}^{2}\frac{\lg(x+2)}{x}dx$.

2. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2,7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$, 2) $\displaystyle\int_{1,6}^{2,4}(x+1)\sin x dx$.

3. 1) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,2}^{1}\frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x^2+1}dx$.

4. 1) $\displaystyle\int_{0,2}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,6}^{1,4}\frac{\cos x}{x+1}dx$.

5. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$.

6. 1) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,2}\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$.

7. 1) $\displaystyle\int_{1,4}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$.

8. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2,4}\frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos x}{x+2}dx$.

9. 1) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}(2x+0,5)\sin x dx$.

10. 1) $\displaystyle\int_{0,6}^{1,5}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$, 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{0,8}\frac{\mathrm{tg}(x^2+0,5)}{1+2x^2}dx$.

11. 1) $\int\limits_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, 2) $\int\limits_{0,18}^{0,98}\frac{\sin x}{x+1}dx$.

12. 1) $\int\limits_{0,5}^{1,3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, 2) $\int\limits_{0,2}^{0,18}\sqrt{x+1}\cos\left(x^2\right)dx$.

13. 1) $\int\limits_{2,2}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$, 2) $\int\limits_{1,4}^{3}x^2\lg x dx$.

14. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$, 2) $\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{\lg\left(x^2+2\right)}{x+1}dx$.

15. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$, 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\cos\left(x^2\right)}{x+1}dx$.

16. 1) $\int\limits_{1,6}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$, 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6}\left(x^2+1\right)\sin(x-0,5)dx$.

17. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$, 2) $\int\limits_{0,6}^{1,4}x^2\cos x dx$.

18. 1) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$, 2) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{\lg\left(x^2+3\right)}{2x}dx$.

19. 1) $\int\limits_{1,4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$, 2) $\int\limits_{2,5}^{3,3}\frac{\lg\left(x^2+0,8\right)}{x-1}dx$.

20. 1) $\int\limits_{3,2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$, 2) $\int\limits_{0,5}^{1,2}\frac{\operatorname{tg}\left(x^2\right)}{x+1}dx$.

21. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,7}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$, 2) $\int\limits_{1,3}^{2,1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x}}dx$.

22. 1) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$, 2) $\int\limits_{0,2}^{1,0}(x+1)\cos\left(x^2\right)dx$.

23. 1) $\int\limits_{2,1}^{3,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$, 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2}\frac{\sin\left(x^2-0,4\right)}{x+2}dx$.

24. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,5}\frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$, 2) $\int\limits_{0,15}^{0,63}\sqrt{x+1}\lg(x+3)dx$.

25. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{1,2x^2+0,5}}$, 2) $\int\limits_{1,2}^{2,8}\frac{\lg\left(1+x^2\right)}{2x-1}dx$.

26. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$, 2) $\int\limits_{0,6}^{0,72}\left(\sqrt{x}+1\right)\operatorname{tg}2x dx$.

27. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$, 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$.

28. Решение типового варианта:

$$1)\ I=\int\limits_{0,7}^{1,3}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}};\ 2)\ I=\int\limits_{1,2}^{1,6}\frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}dx.$$

Р. Для достижения заданной точности опр-им n так, чтобы $\frac{b-a}{12n^2}M_2<$ $<0,0005$ (а). Здесь $a=0,7$; $b=1,3$; $M_2\geq\max\limits_{[0,7;1,3]}|f''(x)|$, где $f(x)=1\Big/\sqrt{2x^2+0,3}$.

Находим $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{(2x^2+0,3)^3}}$, $f''(x)=\frac{8x^2-0,6}{\sqrt{(2x^2+0,3)^5}}$; $\max\limits_{[0,7;1,3]}|f''(x)|<$

$<\frac{8\cdot 1,3^2-0,6}{\sqrt{(2\cdot 0,7^2+0,3)^5}}\approx 6,93\approx 7=M_2$. Тогда нерав-во (а) примет вид $\frac{0,6^2\cdot 7}{12n^2}<$ $<0,0005$, откуда $n^2>252$, т.е. $n>16$; возьмем $n=20$. Выч-им инт. по фм-е $J=h[(y_0+y_{20})+y_1+y_2+\ldots+y_{19}]$, где $h=(b-a)/n=0,6/20=0,003$, $y_i=y(x_i)=$ $=1\Big/\sqrt{2x_i^2+0,3}$, $x_i=0,7+ih$ $(i=\overline{0,20})$. Все расчеты приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	x_i	x_i^2	$2x_i^2+0,3$	$\sqrt{2x_i^2+0,3}$	y_0, y_{20}	$y_1+y_2+\ldots+y_{18}+y_{19}$
0	0,7	0,49	1,28	1,1314	0,88386	
1	0,73	0,5329	1,3658	1,1686		0,85572
2	0,76	0,5776	1,4552	1,2063		0,82898
3	0,79	0,6241	1,5482	1,2443		0,80366
4	0,82	0,6724	1,6448	1,2825		0,77973
5	0,85	0,7225	1,7450	1,3210		0,75700
6	0,88	0,7744	1,8488	1,3597		0,73546
7	0,91	0,8281	1,9562	1,3986		0,71501
8	0,94	0,8836	2,0672	1,4378		0,69551
9	0,97	0,9409	2,1818	1,4771		0,67700
10	1,00	1,0000	2,3000	1,5166		0,65937
11	1,03	1,0609	2,4218	1,5562		0,64259
12	1,06	1,1236	2,5472	1,5960		0,62657
13	1,09	1,1881	2,6762	1,6356		0,61140
14	1,12	1,2544	2,8088	1,6759		0,59669
15	1,15	1,3225	2,9450	1,7161		0,58272
16	1,18	1,3924	3,0848	1,7564		0,56935
17	1,21	1,4641	3,2282	1,7967		0,55658
18	1,24	1,5379	3,3752	1,8372		0,54431
19	1,27	1,6129	3,5258	1,8777		0,53253
20	1,30	1,6900	3,6800	1,9187	0,52129	
Σ					1,40515	12,77022

Из табл. 1 получим $I = 0{,}03\left(\dfrac{1{,}40515}{2} + 12{,}77022\right) = 0{,}40418 \approx 0{,}404$.

О: $I \approx 0{,}404$;

2) по условию $2m = n = 8$, поэтому $h = (b - a)/n = (1{,}6 - 1{,}2)/8 = 0{,}05$. Выч-им по фм-е $J = \dfrac{h}{3}[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]$, где $y_i =$ $= y(x_i) = \dfrac{\sin(2x_i - 2{,}1)}{x_i^2 + 1}$, $x_i = 1{,}2 + ih$ ($i = \overline{0{,}8}$). Все выч-ия приведены в табл. 2.

Таблица 2

i	x_i	$2x_i - 2{,}1$	$\sin(2x_i - 2{,}1)$	$x_i^2 + 1$	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
Σ					0,3713	0,8305	0,6368

Из табл. 2 получим $I \approx \dfrac{0{,}05}{3}(0{,}3714 + 4 \cdot 0{,}8305 + 2 \cdot 0{,}6368) = \dfrac{0{,}05}{3} \cdot 4{,}9670 \approx$ $\approx 0{,}08278$.

Для оценки точности полученного результата составим табл-у конечных разностей фк-й до разностей четвертого порядка (табл. 3).

Таблица 3

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	– 0,0047	0,0003	– 0,0001
1	0,1520	0,0262	– 0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	– 0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	– 0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	– 0,0038	0,0003	– 0,0001
5	0,2312	0,0098	– 0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	– 0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Т.к. $\max|\Delta^4 y_i| = 0{,}0001$, то в силу (8) $R_{ост} < \dfrac{(b-a)\cdot\max|\Delta^4 y_i|}{180} \approx$

$\approx \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003$.

Выч-ия производились с четырьмя значащими цифрами, а поэтому вел-а остаточного члена на погр-ть не влияет. Погр-ть выч-й можно оценить из стн-ия $\Delta I = (b - a)\Delta y \le 0{,}4 \cdot 0{,}0001 < 0{,}00005$. Значит, полученные четыре десятич. знака верны. О: $I \approx 0{,}0828$.

11.2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях используются прж. методы решения диф-ых ур-й?
2. В чем состоит суть метода ст-ых рядов (неопр-ых коэф-ов)?
3. В чем заключается суть метода посл-го дифв-ия?
4. Как возник метод посл-ых прж-й (Пикара) и в чем его суть?
5. В чем состоит суть метода Эйлера и уточненного метода Эйлера?
6. В чем заключается суть метода Эйлера-Коши?
7. Приведите рабочие фм. метода Рунге-Кутта и табл-у для выч-й.
8. Приведите рабочие фм. метода Адамса и табл-у для выч-й.

Задание для кр. работы: по образцу п1-п7 решить задачи 1-25.

В задачах 1-25, используя метод Эйлера с уточнением, составить табл-у прж-ых зн-й инт-а диф-го ур-ия $y' = f(x, y)$, удщ-го нач. условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0{,}1$. Все выч-ия вести с четырьмя десятич. знаками.

1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$, $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$, $\quad x \in [1{,}8; 2{,}8]$.

2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$, $\quad y_0(1{,}6) = 4{,}6$, $\quad x \in [1{,}6; 2{,}6]$.

3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$, $\quad y_0(0{,}6) = 0{,}8$, $\quad x \in [0{,}6; 1{,}6]$.

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$, $\quad y_0(0{,}5) = 0{,}6$, $\quad x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$, $\quad y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $\quad x \in [1{,}7; 2{,}7]$.

6. $y' = x + \cos\frac{y}{2{,}25}$, $\quad y_0(1{,}4) = 2{,}2$, $\quad x \in [1{,}4; 2{,}4]$.

7. $y' = x + \cos\frac{y}{e}$, $\quad y_0(1{,}4) = 2{,}5$, $\quad x \in [1{,}4; 2{,}4]$.

8. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$, $\quad y_0(0{,}8) = 1{,}4$, $\quad x \in [0{,}8; 1{,}8]$.

9. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$, $\quad y_0(1{,}2) = 2{,}1$, $\quad x \in [1{,}2; 2{,}2]$.

10. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$, $\quad y_0(2{,}1) = 2{,}5$, $\quad x \in [2{,}1; 3{,}1]$.

11. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$, $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$, $\quad x \in [1{,}8; 2{,}8]$.

12. $y' = x + \sin\frac{y}{3}$, $y_0(1{,}6) = 4{,}6$, $x \in [1{,}6; 2{,}6]$.

13. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0{,}6) = 0{,}8$, $x \in [0{,}6; 1{,}6]$.

14. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0{,}5) = 0{,}6$, $x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

15. $y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$, $y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $x \in [1{,}7; 2{,}7]$.

16. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2{,}8}}$, $y_0(1{,}4) = 2{,}$, $x \in [1{,}4; 2{,}4]$.

17. $y' = x + \sin\frac{y}{e}$, $y_0(1{,}4) = 2{,}5$, $x \in [1{,}4; 2{,}4]$.

18. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$, $y_0(0{,}8) = 1{,}3$, $x \in [0{,}8; 1{,}8]$.

19. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$, $y_0(1{,}1) = 1{,}5$, $x \in [1{,}1; 2{,}1]$.

20. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$, $y_0(0{,}6) = 1{,}2$, $x \in [0{,}6; 1{,}6]$.

21. $y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$, $y_0(0{,}5) = 1{,}8$, $x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

22. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}5}}$, $y_0(0{,}2) = 1{,}1$, $x \in [0{,}2; 1{,}2]$.

23. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$, $y_0(0{,}1) = 0{,}8$, $x \in [0{,}1; 1{,}1]$.

24. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$, $y_0(0{,}5) = 0{,}6$, $x \in [0{,}5; 1{,}5]$.

25. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$, $y_0(1{,}2) = 1{,}4$, $x \in [1{,}2; 2{,}2]$.

26. Решение типового варианта:

$$y' = x + \sin\frac{y}{2{,}25},\ y_0(1{,}4) = 2{,}2,\ x \in [1{,}4; 2{,}4].$$

Метод Эйлера с уточнением заключается в том, что каждое зн. $y_{k+1} = y(x_{k+1})$, где $y(x)$ – искомая фк., а $x_{k+1} = x_0 + h(k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, опр-ся сд-им образом: за нач. прж-ие берется $y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k)$, где $f(x, y) = y'(x, y)$; найденное зн. $y_{k+1}^{(0)}$ уточняется по фм-е

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right],\ (i = 1, 2, \ldots).$$

Уточнение продолжают до тех пор, пока в пределах требуемой точности два посл-ых прж-ия не совпадут.

Все описанные выч-ия удобно производить, составив сд-ие табл-ы:

1) основную табл-у, в к-ой записывается ответ примера (табл. 4);

2) табл-у, в к-ой выполняется процесс посл-ых пр-й (табл. 5);

3) вспомогательную табл-у, в к-ой выч-ся зн-ия фк-и $f(x_k, y_k)$ (табл. 6).

Таблица 4

k	x_k	y_k	$f_k = f(x_k, y_k)$	hf_k
0	1,4	2,2	2,2292	0,2229
1	1,5	2,4306	2,3821	0,2382
2	1,6	2,6761	2,5281	0,2528
3	1,7	2,9357	2,6648	0,2665
4	1,8	3,2084	2,7895	0,2790
5	1,9	3,4929	2,8998	0,2900
6	2,0	3,7876	2,9936	0,2994
7	2,1	4,0908	3,0696	0,3070
8	2,2	4,4006	3,1268	0,3127
9	2,3	4,7152	3,1654	0,3165
10	2,4	5,0328		

Таблица 5

$k+1$	x_{k+1}	y_k	i	$y_{k+1}^{(i)}$	f_k	$f_{k+1}^{(i)}$	$f_k + f_{k+1}^{(i)}$	$\frac{1}{2}\left(f_k + f_{k+1}^{(i)}\right)$
1	1,5	2,2	0	2,4229	2,2292	2,3805	4,6097	0,2305
			1	2,4305		2,3820	4,6112	0,2306
			2	2,4306		2,3821	4,6113	0,2306
2	1,6	2,4306	0	2,6688	2,3821	2,5268	4,9089	0,2454
			1	2,6760		2,5280	4,9101	0,2455
			2	2,6761		2,5281	4,9102	0,2455
3	1,7	2,6761	0	2,9289	2,5281	2,6641	5,1922	0,2596
			1	2,9357		2,6648	5,1929	0,2596
4	1,8	2,9357	0	3,2022	2,6648	2,7892	5,4540	0,2727
			1	3,2084		2,7895	5,4543	0,2727
5	1,9	3,2084	0	3,4874	2,7895	2,8998	5,6893	0,2845
			1	3,4929		2,8998	5,6893	0,2845
6	2,0	3,4929	0	3,7829	2,8998	2,9939	5,8937	0,2947
			1	3,7876		2,9936	5,8934	0,2947
7	2,1	3,7886	0	4,0870	2,9936	3,0700	6,0636	0,3032
			1	4,0908		3,0696	6,0632	0,3032
8	2,2	4,0908	0	4,3978	3,0696	3,1273	6,1969	0,3098
			1	4,4006		3,1268	6,1964	0,3098
9	2,3	4,4006	0	4,7133	3,1268	3,1658	6,2926	0,314
			1	4,7152		3,1654	6,2922	0,3146
10	2,4	1,7152	0	5,0517	3,1654	3,1866	6,3520	0,3176
			1	5,0328		3,1863	3,6517	0,3176

Таблица 6

k	x	y	$\frac{y}{2{,}25}$	$\sin\frac{y}{2{,}25}$	$y' = x + \sin\frac{y}{2{,}25}$
0	1,4	2,2	0,9778	0,8292	2,2292
1	1,5	2,4229	1,0768	0,8805	2,3805
	1,5	2,4305	1,0802	0,8820	2,3820
	1,5	2,4306	1,0803	0,8821	2,3821
2	1,6	2,6688	1,1861	0,9268	2,5268
	1,6	2,6760	1,1893	0,9280	2,5280
	1,6	2,6761	1,1894	0,9281	2,5281
3	1,7	2,9289	1,3017	0,9641	2,6641
	1,7	2,9357	1,3048	0,9648	0,6648
4	1,8	3,2022	1,4232	0,9892	2,7822
	1,8	3,2084	1,4260	0,9895	2,7895
5	1,9	3,4874	1,5500	0,9998	0,8998
	1,9	3,4929	1,5524	0,9998	0,8998
6	2,0	3,7829	1,6813	0,9939	0,9939
	2,0	3,7876	1,6834	0,9936	2,9936
7	2,1	4,0870	1,8164	0,9700	3,0700
	2,1	4,0908	1,8181	0,9696	0,0696
8	2,2	4,3978	1,9546	0,9273	3,1273
	2,2	4,4006	1,9558	0,9268	3,1268
9	2,3	4,7133	2,0948	0,8658	3,1658
	2,3	4,7152	2,0956	0,8654	3,1654
10	2,4	5,0317	2,2363	0,7866	3,1866
	2,4	5,0328	2,2368	0,7863	3,1863

Ответом яв-ся зн-ия $y_k(x)$, полученные в табл. 4.

В задачах 27-51, используя метод Адамса со вторыми разностями, составить табл-у прж-ых зн-й инт-а диф-го ур-ия $y' = f(x, y)$, удщ-го нач. условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$. Все выч-ия вести с четырьмя десятич. знаками. Нач. отрезок опр-ть методом Рунге-Кутта.

27. $y' = \frac{\sin y}{1{,}5 + x} - 0{,}25y^2$, $y(0) = 0$.

28. $y' = 1 - (x - 1)\sin y + 2(x + y)$, $y(0) = 0$.

29. $y' = 1 - \sin(0{,}75x - y) + \frac{1{,}75y}{x - 1}$,

30. $y' = \cos(x - y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x}$, $y(0) = 0$.

31. $y' = 1 + 0{,}2y\sin x - y^2$, $y(0) = 0$.

32. $y' = \cos(x + y) + 0{,}5(x - y)$, $y(0) = 0$.

33. $y' = \frac{\cos x}{x + 1} - 0{,}5y^2$, $y(0) = 0$.

34. $y' = (1 - y^2)\cos x + 0{,}6y$, $y(0) = 0$.

35. $y' = 1 + 0{,}4y\sin x - 1{,}5y^2$, $y(0) = 0$.

36. $y' = \dfrac{\cos x}{x+2} + 0{,}3y^2$, $y(0) = 0$.

37. $y' = \cos(1{,}5x + y) + (x - y)$, $y(0) = 0$.

38. $y' = 1 - \sin(x + y) + \dfrac{0{,}5y}{x+2}$, $y(0) = 0$.

39. $y' = \dfrac{\cos y}{1{,}5 + x} + 0{,}1y^2$, $y(0) = 0$.

40. $y' = 0{,}6\sin x - 1{,}25y^2 + 1$, $y(0) = 0$.

41. $y' = \cos(2x + y) + 1{,}5(x - y)$, $y(0) = 0$.

42. $y' = 1 - \dfrac{0{,}1y}{x+2} - \sin(2x + y)$, $y(0) = 0$.

43. $y' = \dfrac{\cos y}{1{,}25 + x} - 0{,}1y^2$, $y(0) = 0$.

44. $y' = 1 + 0{,}84y\sin x - 2y^2$, $y(0) = 0$.

45. $y' = \cos(1{,}5x + y) + 1{,}5(x - y)$, $y(0) = 0$.

46. $y' = 1 - \sin(2x + y) + \dfrac{0{,}3y}{x+2}$, $y(0) = 0$.

47. $y' = \dfrac{\cos y}{1{,}75 + x} - 0{,}5y^2$, $y(0) = 0$.

48. $y' = 1 + (1 - x)\sin y - (2 + x)y$, $y(0) = 0$.

49. $y' = (0{,}8 - y^2)\cos x + 0{,}3y$, $y(0) = 0$.

50. $y' = 1 + 2{,}2\sin x + 1{,}5y^2$, $y(0) = 0$.

51. $y' = \cos(x + y) + 0{,}75(x - y)$, $y(0) = 0$.

52. Решение типового варианта.

$$y' = 1 + 0{,}2y\sin x - 1{,}5y^2 = f(x, y);\ y(0) = 0,\ x \in [0, 1],\ h = 0{,}1.$$

1. Опр-им зн-ия $y_1 = y(0{,}1)$, $y_2 = y(0{,}2)$ (нач-ый отрезок) методом Рунге-Кутта. При этом зн-ия $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, где $x_{i+1} = x_i + h$, находятся по фм-ам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ \Delta y_i = \frac{h}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\ k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

Все выч-ия будем располагать в табл. 7.

2. Выч-ие последующих зн-й $y_i = y(x_i)$, где $x_i = x_0 + ih$ ($i = 3, 4, \ldots$), производим по фм-е Адамса со вторыми разностями

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-1},\ \text{где } q_i = hf(x_i, y_i).$$

Выч-ия производим в табл-ах 8, 9, 10. Табл. 8 содержит окончательные зн-ия $y(x_i)$ и зн-ия конечных разностей, имеющихся в выч-ой фм-е.

Таблица 7

x	$y(x)$	$\sin x$	$0{,}2y\sin x$	$-1{,}5y^2$	$f(x, y)$	$hf(x, y)$	Δy
0	0	0	0	0	1	0,1	0,1000
0,05	0,05	0,0500	0,0005	– 0,0038	0,9967	0,0997	0,1994
0,05	0,0498	0,0500	0,0005	– 0,0037	0,9968	0,0997	0,1994
0,10	0,0997	0,0998	0,0020	– 0,0149	0,9871	0,0987	0,0987
							0,5979·(1/6) = 0,0996
0,10	0,0996	0,0998	0,0020	– 0,0149	0,9871	0,0987	0,0987
0,15	0,1490	0,1494	0,0045	– 0,0333	0,9712	0,0971	0,1942
0,15	0,1482	0,1994	0,4444	– 0,0329	0,9715	0,0972	0,1944
0,20	0,1968	0,1987	0,4478	– 0,0581	0,9497	0,0950	0,0950
							0,5823·(1/6) = 0,0970
0,20	0,1966	0,1987	0,0078	– 0,0580	0,9498		

Таблица 8

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$q_i = hf_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$
0	0	0	0,1000	0,10000	– 0,00129	– 0,00244
1	0,1	0,0996	0,9871	0,09871	– 0,00373	– 0,00204
2	0,2	0,1966	0,9498	0,09498	– 0,00577	– 0,00154
3	0,3	0,2887	0,8921	0,08921	– 0,00731	– 0,00088
4	0,4	0,3742	0,8190	0,08190	– 0,00819	– 0,00035
5	0,5	0,4518	0,7371	0,07371	– 0,00854	0,00008
6	0,6	0,5210	0,6517	0,06517	– 0,00846	0,00049
7	0,7	0,5818	0,5671	0,05671	– 0,00797	0,00067
8	0,8	0,6343	0,4874	0,04874	– 0,00730	–
9	0,9	0,6792	0,4144	0,04144	–	–
10	1,0	0,7173	–	–	–	–

В табл. 9 выполняются расчеты, ствщ-ие фм-е Адамса со вторыми разностями.

Таблица 9

i	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0,1966	0,28870	0,37418	045178	0,52102	0,58177	0,63428	0,67924
q_i	0,09498	– 0,08921	– 0,08190	– 0,07371	0,6517	0,05671	0,04874	0,04144
$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	– 0,00186	– 0,00288	– 0,00366	– 0,00410	– 0,00427	– 0,00423	– 0,00398	– 0,00365
$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	– 0,0102	– 0,00085	– 0,00064	– 0,00037	– 0,00015	0,00003	0,00020	0,00028
y_{i+1}	0,28870	0,37418	0,45178	0,52102	0,58177	0,63428	0,67924	0,71731

В табл. 10 производится выч-ие зн-й фк-и $y' = f(x_i, y_i) = 1 + 0{,}2y_i\sin x_i - 1{,}5y_i^2$.

Таблица 10

x_i	y_i	$0{,}2\sin x_i$	$0{,}2y_i\sin x_i$	$-1{,}5y_i^2$	$f(x_i, y_i)$
0,3	0,2887	0,0591	0,0171	– 0,1250	0,8921
0,4	0,3742	0,0779	0,0292	– 0,2102	0,8190
0,5	0,4518	0,0959	0,0433	– 0,3062	0,7371
0,6	0,5210	0,1129	0,0588	– 0,4071	0,6517
0,7	0,5818	0,1288	0,0749	– 0,5078	0,5671
0,8	0,6343	0,1435	0,0910	– 0,6036	0,4874
0,9	0,6792	0,1567	0,1064	– 0,6920	0,4144

Ответом яв-ся зн-ия фк-и $y(x_i)$, полученные в табл. 8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании данных пособий, состоящих из пяти частей, мы старались избегать двух крайностей – излишней абстракции (как это делают Н. Бурбаки) и недопустимого упрощения (как математика (**мт.**) для финансистов, экономистов, работников естественных наук и т.д.) и старались целостно изложить мт-ку, как сложную систему, учитывая запросы и подготовленного, и менее подготовленного читателя (более подробно см. Часть 3: предисловие-аннотация; сокращения слов см. и в Списке основных сокращений 2°).

Любая наука-учение, в том числе и мт-ка, существует (**сущ.**) и развивается с одной единственной целью – помочь людям в понимании законов мира, чтобы они жили в нормальных условиях и развивались как физически, так и интеллектуально, помогали друг другу и природе, устанавливали порядок в своем доме, стране и во всем мире.

В мт-ке, как и во всех других (**др.**) науках, с этой целью в настоящее время в теоретическом смысле решен ряд серьезных специфических вопросов и проблем для каждой отдельно взятой науки.

Однако, к сожалению, сама по себе мт-ка ничего не дает, если не связать ее с др. науками, учитывая закономерности всего мира (солнечной системы, природы и социальной системы), признавая плюрализм – право на существование (**сущв.**) разнообразных природных и технологических объектов и различных социальных систем, учитывая осложнение процессов во всем мире.

Действительно (**дсв.**), в последние годы во всем мире ситуации катастрофически ухудшаются: **а.** Постоянно происходят аварии на атомных и гидроэлектростанциях, воздушном и железнодорожном транспорте, пожары на огромных территориях, разрушительные ветры и потопы, жертвами которых (**к-ых**) становятся сотни и тысячи людей; **б.** В социальной системе положение еще хуже: происходит присваивание кучками людей народного богатства, несправедливость в оплате труда, злоупотребление – коррупция и использование незаслуженных льгот, пренебрежительное отношение к людям и их запросам, безответственное отношение чиновников к своим обязанностям и лавинообразное возрастание беспорядков в стране; **в.** Не лучше обстоят дела и в отношениях между странами: нет взаимопонимания и справедливого мирного решения возникших разногласий. Иногда дело доходит до прямой интервенции отдельных стран в другие. Так, США и НАТО присвоили себе право диктовать и указывать свои порядки, интенсивно стали расширять пространство (заполняя хорошо вооруженными солдатами) своего влияния на др. страны.

Описанная ситуация в отдельных странах и в мире так продолжаться не должна, надо изменить взгляд на мир и направить ситуацию по правильному, справедливому и оптимально развивающемуся пути.

А. Для этого этика и гигиена духовной жизни сейчас должны быть не лозунгом, а результатом глубокого понимания мира и его законов. Сейчас главное – надо научиться соединять противоположные понятия: социализм и капитализм, идеализм и материализм, религию и науку, логику (мт-ку) и интуицию, официальную и народную медицины, духовный и материальный миры, Восточную и Западную философии, высокую нравственность-духовность и практицизм, совмещать постоянную любовь к миру и людям с повседневными эмоциями ■ (знак ■ – конец утверждения (**утв.**) А, к-ый используем и далее).

Но понять закономерности мира и использовать их на практике не так просто. Прежде всего, надо выяснить философскую сторону: мир подчинен двум антагонистическим, но взаимодополняющим силам (закон о единстве и борьбе противоположностей), например (**н-р**), близко – далеко, вверх – вниз, день – ночь, заряд положительный – отрицательный, темно – светло, тепло – холод и т.д., к-ые на Востоке называют Инь и Ян.

Философия Востока учит, что в мире все сводится к двум началам – либо Инь, либо Ян – центробежной или центростремительной силам. Центростремительная сила сжимает и производит звук, тепло и свет; центробежная сила расширяет, она является (**яв-ся**) источником тишины, спокойствия, холода и темноты. Инь и Ян всегда и везде сосуществуют одновременно, всегда стремятся к взаимному равновесию, к-ое по своей природе недостижимо, ибо сущность Жизни – в постоянстве изменений.

Сложность в понимании законов мира и использовании их на практике может возникать и при неправильном толковании этих законов и отсюда в ошибочном использовании их на практике. При исследовании (**иссл.**) законов мира человек вполне может ошибиться, так как (**т.к.**) в повседневной жизни мы используем лишь малую толику того, что вложила в нас Природа. В подтверждение сказанного приведем несколько примеров: **1*.** Как снять блокировку А. Эйнштейна или почему не сущ-ет замедление времени? Кризис в физике обозначился уже более ста лет назад, но проявился благодаря тому, что многие проекты, родившиеся из заблуждений теории относительности Эйнштейна, не получили должного подтверждения, и более чем на сто лет затормозил развитие физики – постулат о постоянстве скорости света.

Начиная с 1881 г. многим ученым оставался лишь один шаг к открытию теоретически предсказанного природного явления – СЖИМАНИЯ СТОЯЩИХ ВОЛН. Ближе всего к открытию был Герц, к-ый экспериментально обнаружил сущв-ие электромагнитных стоящих волн. Для открытия эффекта СЖИМАНИЯ ему оставалось менее чем полшага, но вскоре он заболел и скоропостижно ушел из этого мира. И только в 1981 г. (через 100 лет) после проведения знаменитого эксперимента А. Майкельсон (из города Балтийск) наконец-то сложил в движущейся системе прямую и отраженную волны и обнаружил закономерность: при увеличении скорости уменьшается длина стоящей волны (стоящая волна сжимается, то есть (**т.е.**) действует центростремительная сила – Ян). Это открытие противоречило столпам современной физики: преобразованиям (**прб.**) Лоренца и теории Эйнштейна. Именно в этот момент было положено начало работе по снятию с науки так называемой (**назм.**) блокировки Эйнштейна, именно в этот момент постулат о постоянстве скорости света начал терять ВЛАСТЬ над МИРОМ. В дальнейшем в 1990 годах вместо прб-й Лоренца были выдвинуты новые прб-ия координат, названные (**назн.**) «преобразованиями Иванова» и позволяющие легализовать наличие межзвездной среды (эфира), прямое измерение скорости света в одном направлении как альтернативы постулату о постоянстве скорости света и выяснить, что развиваемая концепция не нуждается в гипотезе ЗАМЕДЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ. **2*.** Почему при достаточном развитии в отдельности всех наук (в том числе мт-ки) происходит катастрофическое ухудшение (как уже говорилось выше) в социальной системе отдельно взятых стран и во всем мире в целом? Этот вопрос напрямую связан с вопросом о моделировании, точнее, предмодельного иссл-ия. Как было указано в 1°: 1.2, 6°: 6.3 Части 4, в настоящее время очень важно «предмодельное» иссл-ие как перед созданием новой модели, так и при планировании ликвидации или обновлении старой модели. Но это можно делать только на государственном (**госн.**) уровне, т.к. низовые уровни не могут брать на себя ответственность за выполнение такой работы в связи с научной серьезностью этой проблемы и недостатка денежных средств. Это дсв-но так. Вспомним создание за один год во всей стране модели колхозного строя, ликвидацию церквей, мечетей (что оскорбило веру народа), а затем через 70 лет административно-командным решением уничтожение моделей колхозного (в т.ч. совхозного) строя без мысли об обновлении или о направлении их по многоукладному руслу. Если бы провели предмодельное иссл-ие (с учетом местных условий и соблюдением принципы постепенности, многоукладности и т.д.) прежде чем принять такие необоснованные (порой даже абсурдные) решения, не имели бы такие катастрофические результаты. Конечно, поставленный вопрос полностью решить невозможно, можно лишь держать ситуацию под контролем, постепенно улучшая ее и ликвидируя заведомо худшие ее варианты, к к-ым еще вернемся.

Нельзя думать, что нет хороших, прогрессивных начинаний, умных, справедливых решений и энергичных действий по осуществлению плюрализма, многоукладности и мирного, согласованного сосуществования и развития на основе взаимопомощи, т.е. по реализации утв-й А. Приведем несколько примеров, подтверждающих их. **1°.** В феврале 1960 г. в Китае произошла медицинская революция: 70 тыс. врачей, практиковавших западные методы, получили указания изучать и применять традиционную (народную) медицину. И наконец произошло соединение официальной и народной медицины. **2°.** Можно ли объективно соединить социализм (плановую систему) и капитализм (рыночную систему)? Прежде всего, отметим, что олигархов бояться не стоит (не все олигархи плохие, среди них есть только плохие богачи), они имеют такие же права на сущв-ие и развитие, как и остальные люди страны, лишь бы подчинялись основным законам и платили налоги на основе принципа «коридора». Некоторые из них могут даже занимать важные высокие посты, если работают в интересах народа и процветания страны в целом. Мы убеждены, что соединить социализм (**соц.**) и капитализм (**кап.**) не только можно, а объективно нужно в современных условиях. Только надо взять положительные (**плж.**) стороны соц-а и кап-а, создав новую социальную систему, назм-ую планово-рыночной системой. Но при этом планово-рыночная система должна учитывать местные условия (климатические, обычаи и менталитет народа, семейное и общинное хозяйство) и иметь различные виды в зависимости от местных условий. Т.е. производитель выпускает продукты или товары, обеспечивает себя и продает излишки без посредников. Сравнение за последние 20 лет сущв-ния кап-а и соц-а показало преимущество последнего по многим позициям. Об этом говорит и тот факт, что начиная с 1991 г. во всех республиках СССР производилось крупное международное социологическое иссл-ие «Барометр новых демократий», а в августе 1996 г. были опубликованы доклад и результаты иссл-я. В этом докладе сказано: «В бывших советских республиках практически все опрошенные плж-но оценивают прошлое и никто не дает плж-ых оценок нынешней экономической (**экнч.**) системе». Плж. оценки советской экнч. системе дали в России 72%, в Белоруссии – 88% и на Украине – 90%. Но обратного перехода в соц-м в данный момент не существует. Поэтому соц-м и кап-м должны соединиться и мирно, согласованно сущв-ть, работать и развиваться на благо всего народа и страны в целом.

Теперь рассмотрим (**рас.**) общие закономерности мира в сегодняшнем представлении (к сожалению, мы пока не знаем, из каких видов материй состоит среда нашего обитания – ВСЕЛЕННАЯ; как осознать физическую сущность собственного «Я», мы абсолютно ничего не знаем ни о Душе, ни о материи, из к-ой она состоит, ни о среде ее пребывания; откуда и с какой целью появляются НЛО и т.д.) и вопрос их использования на практике при удовлетворении жизненных потребностей.

Б. 1°. Каждый объект мира подчинен и регулируется, руководится АБСОЛЮТОМ – БОГОМ из неведомого нам центра с помощью некой центральной силы и в то же время каждый объект автономен со своим абсолютом и центральной силой, н-р, ГОЛОВА человека есть центр-абсолют, она руководит всем организмом (сердце, желудок, почки, печень и т.д.) при помощи центральной силы (нервная система, кровеносные сосуды). Это относится и к соцн. системам: н-р, центральное упл. эфн-е, чем местное муниципальное самоупл-ие.

2°. Мир бесконечен во времени, по протяженности, по количеству Галактик и т.д., но в тоже время конечен в окружающей нас среде, по количеству необходимых человеку объектов (нефть, газ, полезные ископаемые, лес, с/х-ые угодья и т.д.). Поэтому их надо беречь, они принадлежат народу.

3°. В мире раз и навсегда установлен строгий порядок во всем с соблюдением чистоты окружающей среды. Нельзя пытаться изменить этот порядок и тем более недопустимо вмешиваться установлением каких-либо своих порядков или загрязнять среду (н-р, в данное время десятки тысяч тонн гаек, болтов и т.д. летают по земной орбите, тем самым создавая большую опасность для мира).

4°. Сущв-ие и развитие социальной системы в конкретной стране подчинены климатическим, природным и культурным условиям (н-р, в России 7 месяцев в году зима и потребление энергии для жизни в 4 раза больше, чем в юго-западных странах, где круглый год лето; количество запасов энергоносителей и полезных ископаемых; менталитет и обычаи народа; религия и уровень образования, здоровья; философия жизни и питания и т.д.), откуда следует, что у каждой страны есть свой путь развития и свой образ жизни в соответствии с местными условиями, незв-мо от МВФ и ВТО.

5°. Сущв-ие и развитие противоположных понятий и систем, перечисленных в утв-ях А, подчинены принципам плюрализма, поэтому они должны мирно и согласованно работать, соблюдая справедливость и помогая друг другу. Дсв-но, российская семейная и общинная система не хуже западной рыночной системы, а может, даже лучше, если учесть местные условия (это подтверждает и результат Великой Отечественной войны). Или, н-р, почему официальная медицина считает себя единственной законной и не признает народную, а между тем, народная медицина лечит даже безнадежных (по мнению официальных врачей) больных.

6°. В природе все объекты подчинены принципам равновесия и равноправности перед общими законами сущв-ия и развития, установления строгого порядка и его сохранения в обитаемой среде. Точно так же социальные системы в отдельно взятой стране и во всем мире (с учетом отношений между странами) должны подчиняться принципам равноправности и справедливости, работать мирно и согласованно, развиваться, помогая друг другу и соблюдая строгий порядок в своем доме, стране, космосе и во всем мире. Если этот закон нарушит какая-либо страна, это пойдет цепной реакцией, и центростремительная сила прежде всего будет направлена туда, где был нарушен закон, а далее процесс может нарастать лавинообразно, что приведет к катастрофе во всем мире – к концу света ■

Теперь возникает вопрос, как использовать закономерности 1°-6° из Б на практике с целью ликвидации, по возможности, возникших трудностей а, б, в; реализации утв-й А; улучшения жизни народа, создавая рабочие места и элементарный порядок в среде обитания? Здесь возможно множество различных задач, и методы их решения также различны. Мы предлагаем весовой метод решения пока лишь одной задачи, как способ количественного анализа сложных систем (см. Часть 4: 7.4). Для этого на основе закономерностей 1°-6°, расв-мых как исх-ые пж-ия $\Pi = \{\Pi_i\}$ сформулируем осн. кт-и $K = \{k_j\}$ как задачу «Улучшение жизни народа с привлечением сил и ученых всех наук, с признанием сосущв-ия всех соцн. систем на основе равноправия, справедливости и установления в стране строгого порядка».

К. $\boldsymbol{k_1}$. Учитывая наши климатические, природные и культурные условия, мы должны идти своим путем, самостоятельно, независимо от МВФ (главное его требование – снижать дефицит гос. бюджета, не считаясь с жертвами). В трудные моменты разумно «брать в долг у будущего года», у самого себя, чем у МВФ, к-ый затягивает на шее должника петлю. В годы Великой депрессии Президент Рузвельт заявил, что в условиях кризиса сводить бюджет без дефицита – преступление против народа. Еще хуже для нас связь с ВТО. Ведь тогда Россия будет обязана снять все таможенные барьеры и прекратить всякие дотации общественным предприятиям. Значит, все производство должно будет остановиться – дешевле покупать, чем производить свое. Это очень опасно для народа и страны: лавинообразно возрастет безработица, а покупательская способность многих граждан нулевая.

$\boldsymbol{k_2}$. Настало время поднять с/х-во, дальше откладывать нельзя. В российских условиях семейное и общинное хозяйства более выгодны, чем западные рыночные хозяйства. Поэтому срочно надо восстановить колхозы и совхозы на базе общественной (крупные холдинги в руках гос-ва, небольшие общины и т.д.) или частной (фермеры, семейные или родственные коммуны) собственности. При этом надо восстановить и семейные хозяйства, обеспечив их по сходной цене мини-тракторами и др. с/х машинами, мини-маслозаводами, мельницами и пекарнями. Н-р, Лукашенко восстановил «хозяйства семейного типа» – и Белоруссия добилась удивительных успехов: рост промышленного производства составил в 1997 г. 18%, зарплату всем платили вовремя, налоги собирались исправно, дефицита бюджета нет.

$\boldsymbol{k_3}$. Центральное управление и руководство для любой социальной системы очень важно и объективно нх-мо для создания общего порядка в среде обитания, контроля их взаимодействий и для оперативного реагирования центральной силы при необходимости. Поэтому деление территории на муниципальные (кроме административных) и передачи власти местному самоуправлению в корне неправильно. Это создает местные кланы, вседозволенность, несоблюдение режима работы, безответственное отношение к своим обязанностям. В результате всего этого создаются лавинообразные беспорядки и никто ни за что не отвечает. А жаловаться некуда, просто нет такого административного органа. Между тем, работу «местного самоуправления» выполняли бы руководители административного деления более компетентно и эффективно, как было раньше.

$\boldsymbol{k_4}$. Советский строй, корнями уходящий в культуру России, по своему типу относится к общинным цивилизациям (в отличие от рыночной цивилизации Запада). Этим были обусловлены главные черты хозяйства (**хоз.**), странные или даже неправильные для взгляда марксиста и либерала. Поэтому нам нельзя даже прислушиваться к замечаниям критиков советского строя о его нерентабельности (если хоз. были нерыночными, их цель – не прибыль, а чтобы все были сыты) и неэффективности (само понятие эффективность (**эфс.**) придумали недавно, а до этого тысячи лет вели хоз-во и следовали простым житейским меркам), чего критики объяснить не могут применительно к нашему типу хоз-ва. Почему финский фермер, к-го нам ставят в пример, эффективный (**эфн.**), а колхозник нет? Ведь колхозник имел в 10 раз меньше тракторов на 1000 га, чем европейский фермер, и всю последнюю советскую пятилетку давал пшеницу с себестоимостью 92-95 руб. за тонну. А себестоимость финского фермера 482 доллара за тонну. Почему же один и тот же продукт производить вдесятеро дороже – это эфн-о? При сравнении кап-ма и соц-ма по эфс-ти надо задать условие. Поэтому Фернан Бродель формулировал это так: «Кап-м вовсе не мог бы сущв-ть без услужливой помощи – помощи чужого труда». К этому факту можно приложить для сравнения столь же очевидный факт: «Советский строй мог сущв-ть без услужливой помощи чужого труда». Согласно самому абсолютному критерию – выживаемости, можно сделать вывод: в условиях, когда страна не получает услужливой помощи чужого труда, советское хоз-во эфн-е кап-ой экн-ки.

$\boldsymbol{k_5}$. Исходя из предыдущего пункта, мы не должны забывать преимущества советского строя (а по возможности возвращаться к некоторым его эл-ам), а именно, что в СССР всякое производство (**прз**.) было выгодным, всякий клочок земли использовался. Росло общее недовольство тем, что бюрократические нормы мешают работать. Это значит, что для обеспечения труда сырьем и инструментами находили средства. Денег хватало и на вполне сносное потребление, и на огромную по масштабам науку (одну из двух имевшихся в мире научных систем, охватывающих весь фронт фундаментальной науки), и на военный паритет с Западом и даже на дорогостоящие проекты века. Никому и в голову не могло прийти (цитируем книгу, выпущенную в 2010 г.), что «шахтеры могут голодать, а академики кончать с собой из-за того, что голодают их подчиненные – ученые-ядерщики». И при всем этом за 1980-1985 гг. ежегодные капиталовложения в СССР выросли на 50% (а на Западе совсем не выросли). Мы еще питаемся остатками советского «жира».

$\boldsymbol{k_6}$**.** Из пункта 5° ясно, что положение очень тревожное и катастрофическое, поэтому ученые любой науки (в том числе и мат-ки) сейчас должны заниматься (кроме своей специфической науки) спасением страны от катастрофы и направлением ее по правильному пути развития с учетом местных условий и общинного хоз-ва, наиболее подходящего для России. Другого выхода нет и это надо делать сейчас, не откладывая на потом, иначе будет поздно.

$\boldsymbol{k_7}$**.** В настоящее время самое главное – это установление справедливости и строгого порядка в своем доме-стране: народные богатства (нефть, газ, полезные ископаемые и т.д.) должны принадлежать народу и находиться в руках гос-ва, точно так же выпуск и продажа вино-водочных и табачных изделий; строго соблюдать принцип «коридора» по оплате труда, доступности и получения образования и медицинской помощи, по правилам дорожного движения и т.д. Пора наконец-то энергично избавиться от коррупции, злоупотребления служебным положением, пренебрежительного отношения чиновников к людям и их запросам, безответственного отношения к своим обязанностям; каждый из нас должен соблюдать строгий порядок в своем доме, в среде обитания, стране и неукоснительно держать этот порядок на должном уровне, приучая к этому своих детей.

Для удобства обозрения с оптз. направлением исслм-ой задачи «Улучшения жизни народа с привлечением сил и ученых всех наук, с признанием сосущв-ия всех соцн. систем на основе равноправия, справедливости и установления в стране строгого порядка» осн. кт-и рас-им как вектор $\{k_j\} = K = x = \{x_j\}$ и будем добиваться мкс-го зн-ия его крд-т, расв-ая задачу

$$y = f(x_1, \ldots, x_7). \tag{1}$$

Если же $k_j \in [\alpha_j, \beta_j]$ – нек-ая шкала, то получим задачу

$$y^* = f(x_1^*, \ldots, x_7^*)\ [x_j^* = \max k_j, j = \overline{1, 7}\ ], \tag{1*}$$

где x_1^* – учитывая местные условия, страна должна идти своим путем, незв-мо от МВФ и ВТО;

x_2^* – поднять с/х-во в различной форме на основе общс-ой и частной собственности;

x_3^* – центральное упл. эфн-е, чем местное муниципальное упл., где возрастают беспорядки;

x_4^* – когда страна не получает услужливой помощи чужого труда, сов. хоз-во эфн-е кап-ой экн-ки;

x_5^* – при соц-е всякое прз. было выгодным, всякий клочок земли использовался;

x_6^* – улучшить жизнь народа, привлекая силы и ученых всех наук с учетом местных условий;

x_7^* – главное сейчас – установить порядок, справедливость в своем доме, стране и во всем мире.

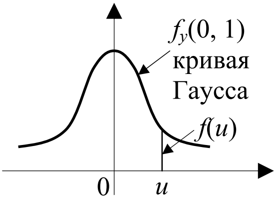
Заметим, что стн. (1) яв-ся качн. мд-ю $\widetilde{S}_k$, а (1*) – колн. мд-ю S_k (см. 7.4: [52]). Названия пер-ых $\{x_j\}$ задачи (1) такие же, как и пер-ых $\{x_j^*\}$ задачи (1*).

ПРИЛОЖЕНИЯ [математико-статистические таблицы (T_i)]

Таблица 1

Значения функции плотности стандартной нормальной величины $U = N(0, 1)$:

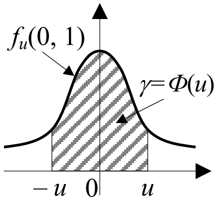
$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} .$$



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3639	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значение функции Лапласа $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2/2}dt$ **или значение вероятности**: $\gamma = P(|N(0, 1)| < u)$.



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0238	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9189	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	8488	9500	9512	9523	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	99915	99917	99920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9938	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	0,999936	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,5	0,999994	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5,0	0,99999994	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблица 3

Таблица значений функции $P_k(a) = \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	01044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Таблица 4

Таблица значений функции $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m e^{-a}}{m!}$

зм1. Для $k > 28$, $a > 9$ см. табл. 19.

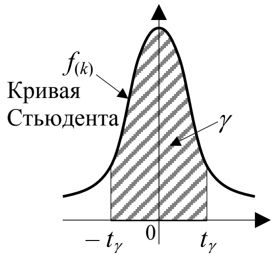
k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996400	0,992074	0,985612	0,976885
3	0,999996	0,999943	0,999734	0,999224	0,998248	0,996642
4	1,000000	0,999998	0,999984	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,986542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,091579	0,040428	0,017352	0,007295	0,003019	0,001234
2	0,238105	0,124652	0,061970	0,029636	0,013754	0,006232
3	0,433472	0,265026	0,151205	0,081765	0,042380	0,021228
4	0,628839	0,440493	0,285058	0,172991	0,099632	0,054963
5	0,785132	0,615960	0,445681	0,300708	0,191236	0,115690
6	0,889326	0,762183	0,606304	0,449711	0,313374	0,206780
7	0,948866	0,866628	0,743981	0,598714	0,452961	0,323896
8	0,978636	0,931806	0,847239	0,729091	0,592548	0,455652
9	0,991867	0,968172	0,916077	0,830496	0,716625	0,587408
10	0,997159	0,986305	0,957380	0,901479	0,815887	0,705988
11	0,999084	0,994547	0,979909	0,946650	0,888077	0,803008
12	0,999726	0,997981	0,991173	0,973000	0,936204	0,875773
13	0,999923	0,999202	0,996372	0,987188	0,965820	0,926149
14	0,999979	0,999774	0,998600	0,994282	0,982744	0,958533
15	0,999994	0,999931	0,999491	0,997593	0,991770	0,977964
16	0,999998	0,999980	0,999825	0,999041	0,996283	0,988894
17	0,999999	0,999994	0,999943	0,999637	0,998407	0,994680
18	0,999999	0,999998	0,999982	0,999869	0,999351	0,997573
19	0,999999	0,999999	0,999994	0,999955	0,999748	0,998943
20	1,000000	0,999999	0,999998	0,999985	0,999907	0,999560
21		1,000000	0,999999	0,999995	0,999967	0,999824
22			0,999999	0,999998	0,999989	0,999932
23			1,000000	0,999999	0,999997	0,999974
24				0,999999	0,999999	0,999990
25				1,000000	0,999999	0,999996
26					1,000000	0,999998
27						0,999999
28						1,000000

Таблица 5

Значения t_γ, определяемые уравнением
$$P = (|t(k) < t_\gamma|) \geq \gamma$$

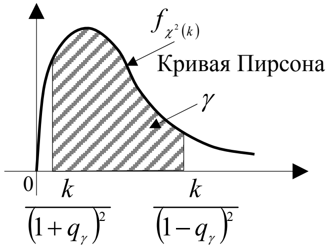


k \ γ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4303	6,965	9,925	31,598
3	765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	741	941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	727	920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	718	906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	711	896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	706	889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	703	883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	700	879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	697	876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	695	873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	694	870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	692	868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	691	866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	690	865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	689	863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	688	862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	688	861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	687	860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	686	859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	686	858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	685	858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	685	857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	684	856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	684	856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	684	855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	683	855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	683	854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	683	854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	681	851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	679	848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	674	842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 6

Значения q_γ, определяемые уравнением

$$P\left(\frac{k}{(1+q_\gamma)^2} < \chi^2(k) < \frac{k}{\max^2(0,(1-q_\gamma))}\right) = \gamma$$



k \ γ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,568	906	1,602	2,946	6,923				
2	367	473	0,678	1,125	2,086	3,400	5,857	8,500	
3	290	370	482	0,730	1,270	1,932	3,000	4,200	9,00
4	248	306	398	563	0,941	1,382	2,056	2,700	5,00
5	221	277	348	475	738	1,104	1,594	2,00	3,80
6	200	251	308	416	623	0,918	1,306	1,650	3,00
7	185	232	290	380	576	800	1,143	1,393	2,50
8	173	216	269	354	516	713	0,986	1,225	2,05
9	162	202	252	329	476	650	889	1,094	1,75
10	153	192	239	304	442	596	814	0,980	1,50
12	140	176	218	276	388	527	700	840	1,30
14	130	162	290	252	357	468	620	740	1,14
16	122	150	188	236	325	422	564	671	1,02
18	115	143	177	223	297	390	500	600	0,92
20	108	136	168	210	282	370	480	567	85
25	096	122	148	187	247	317	408	485	70
30	0,088	111	137	172	226	281	369	425	60
35	085	101	127	156	207	261	347	400	56
40	076	095	119	146	193	342	312	375	52
50	068	084	105	133	174	212	270	311	45
60	062	077	095	122	155	193	242	283	40
70	057	072	088	112	145	180	222	250	37
80	054	067	082	103	138	167	200	236	35
90	051	063	078	0%	131	151	192	220	32
100	048	060	074	092	125	146	184	200	30

Таблица 7

Доверительные границы p_2 и p_1 для параметра p при $\gamma = 0{,}95$

m \ $n-m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,975	842	708	602	522	459	410	369	336	308
	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
1	987	906	806	716	641	579	527	483	445	413
	013	008	006	005	004	004	003	003	003	002
2	992	932	853	777	710	651	600	556	518	484
	094	068	053	043	037	032	028	025	023	021
3	994	947	882	816	755	701	652	610	572	538
	194	147	118	099	085	075	067	060	055	050
4	995	957	901	843	788	738	692	651	614	581
	284	223	184	157	137	122	109	099	091	084

Таблица 8

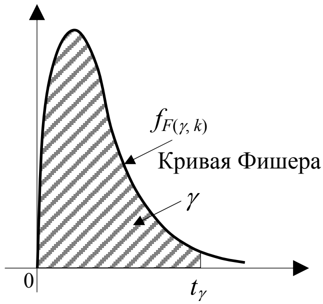
Значения χ^2_γ, определяемые уравнением

$$P\left(\chi^2(k) < \chi^2_\gamma\right) = \gamma$$

k \ γ	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,5
14	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	52,6
26	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица 9

Значения f_γ, определяемые уравнением
$P(F(l, k) < f_\gamma) = \gamma = 0{,}95$

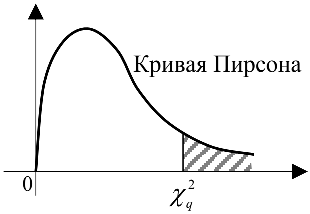


k \ l	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	249,00	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,33	3,51	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	237	2Л5	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Таблица 10

Значения верхнего q% предела χ_q^2 в звс-ти от вер-ти

$$P\left(\chi^2 > \chi_q^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\chi_q^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$



и числа n степеней свободы χ^2-распределения

Число степеней свободы k	Вероятность $P\left(\chi^2 > \chi_q^2\right)$							
	0,99	**0,98**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5,	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5
	0,20	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,Э
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54	57,5	59,7

Таблица 11

Таблица значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	92392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Таблица 12

Таблица значения функции $K(\lambda)$ Колмогорова

λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$
0,28	0,000001	0,86	0,549744	1,44	0,968382	2,02	0,999428
0,29	0,000004	0,87	0,564546	1,45	0,970158	2,03	0,999474
0,30	0,000009	0,88	0,579070	1,46	0,971846	2,04	0,999516
0,31	0,000021	0,89	0,593316	1,47	0,973448	2,05	0,999552
0,32	0,000046	0,90	0,602270	1,48	0,974970	2,06	0,999588
0,33	0,000091	0,91	0,620928	1,49	0,956412	2,07	0,999620
0,34	0,000171	3,92	0,634286	1,50	0,977782	2,08	0,999650
0,35	0,000303	0,93	0,647338	1,51	0,979080	2,09	0,999680
0,36	0,000511	0,94	0,660082	1,52	0,980310	2,10	0,999705
0,37	0,000826	0,95	0,672516	1,53	0,981476	2,11	0,999728
0,38	0,001285	0,96	0,684636	1,54	0,982578	2,12	0,999750
0,39	0,001929	1,97	0,696444	1,55	0,983622	2,13	0,999770
0,40	0,002808	3,98	0,702814	1,56	0,984610	2,14	0,999790
0,41	0,003972	3,99	0,719126	1,57	0,985544	2,15	0,999806
0,42	0,005476	1,00	0,730000	1,58	0,985426	2,16	0,999822
0,43	0,007377	1,01	0,740566	1,59	0,987260	2,17	0,999838
0,44	0,009730	1,02	0,750826	1,60	0,988048	2,18	0,999852
0,45	0,012590	1,03	0,760780	1,61	0,988791	2,19	0,999864
0,46	0,016005	1,04	0,770434	1,62	0,989492	2,20	0,999874
0,47	0,020022	1,05	0,779794	1,63	0,990154	2,21	0,999886
0,48	0,024682	1,06	0,788860	1,64	0,990777	2,22	0,999896
0,49	0,030017	1,07	0,797636	1,65	0,991304	2,23	0,999904
0,50	0,036055	1,08	0,806128	1,66	0,991917	2,24	0,999912
0,51	0,042814	1,09	0,814342	1,67	0,992438	2,25	0,999920
0,52	0,050306	1,10	0,822282	1,68	0,992928	2,26	0,999926
0,53	0,058534	1,11	0,829950	1,69	0,993389	2,27	0,999934
0,54	0,067497	1,12	0,837356	1,70	0,993823	2,28	0,999940
0,55	0,077183	1,13	0,844502	1,71	0,994230	2,29	0,999944
0,56	0,087577	1,14	0,851394	1,72	0,994612	2,30	0,099949
0,57	0,098656	1,15	0,858038	1,73	0,994972	2,31	0,999954
0,58	0,110395	1,16	0,864442	1,74	0,995309	2,32	0,999958
0,59	0,122760	1,17	0,870612	1,75	0,995625	2,33	0,999962
0,60	0,135718	1,18	0,876548	1,76	0,995922	2,34	0,999965
0,61	0,149229	1,19	0,882258	1,77	0,996200	2,35	0,999968
0,62	0,163225	1,20	0,887750	1,78	0,996460	2,36	0,999970
0,63	0,177753	1,21	0,893030	1,79	0,996704	2,37	0,999973
0,64	0,192677	1,22	0,898104	1,80	0,996932	2,38	0,999976
0,65	0,207987	1,23	0,902972	1,81	0,997146	2,39	0,999978
0,66	0,223637	1,24	0,907648	1,82	0,997346	2,40	0,999980
0,67	0,239582	1,25	0,912132	1,83	0,997533	2,41	0,999982
0,68	0,255780	1,26	0,916432	1,84	0,997707	2,42	0,999984
0,69	0,272189	1,27	0,920556	1,85	0,997870	2,43	0,999986
0,70	0,288765	1,28	0,924505	1,86	0,998023	2,44	0,999987
0,71	0,305471	1,29	0,928288	1,87	0,998145	2,45	0,999988
0,72	0,322265	1,30	0,931908	1,88	0,998297	2,46	0,999988
0,73	0,339113	1,31	0,935370	1,89	0,998421	2,47	0,999990
0,74	0,355981	1,32	0,938682	1,90	0,998536	2,48	0,999991
0,75	0,372833	1,33	0,941848	1,91	0,998644	2,49	0,999992
0,76	0,389640	1,34	0,944872	1,92	0,998745	2,50	0,9999925
0,77	0,406472	1,35	0,947756	1,93	0,998837	2,55	0,9999956
0,78	0,423002	1,36	0,950512	1,94	0,998924	2,60	0,9999974
0,79	0,439505	1,37	0,952142	1,95	0,999004	2,65	0,9099984
0,80	0,455857	1,38	0,955650	1,96	0,999079	2,70	0,9999990
0,81	0,472041	1,39	0,958040	1,97	0,999149	2,75	0,9999994
0,82	0,488030	1,40	0,960318	1,98	0,999213	2,80	0,9999997
0,83	0,503808	1,41	0,962486	1,99	0,999273	2,85	0,99999982
0,84	0,519366	1,42	0,964552	2,00	0,999329	2,90	0,99999990
0,85	0,534682	1,43	0,966516	2,01	0,999380	2,95	0,99999994
						3,00	0,99999997

Таблица 13

Критические точки распределения Кочрена
(k – число степеней свободы, l – количество выборок)

Уровень значимости α = 0,01

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7007	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
1	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости α = 0,05

l \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,83,42
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	0530
4	9005	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4504
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3,462	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
1	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1016	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0067
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0C04	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0162	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблица 14

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,U
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,8S
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,71
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,06
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица 15

Критические точки распределения F Фишера-Снедекора
(k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	49,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	0,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,9S	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,10
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3 89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,15

Уровень значимости $\alpha = 0,05$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,02	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

$Q(F|v_1 v_2) = 0{,}01$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6157	6209	6261	6313	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,42	99,43	99,45	99,47	99,48	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,87	26,69	26,50	26,32	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,20	14,02	13,84	13,65	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,72	9,55	9,38	9,20	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,56	7,40	7,23	7,06	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,31	6,16	5,99	5,82	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63,	6,37	6,03	5,67	5,52	5,36	5,20	5,03	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,96	4,81	4,65	4,48	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,56	4,41	4,25	4,08	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,05	4,74	4,40	4,25	4,10	3,94	3,78	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	4,01	3,86	3,70	3,54	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,30	3,96	3,82	3,66	3,51	3,34	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,14	3,80	3,66	3,51	3,35	3,18	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,52	3,37	3,21	3,05	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,41	3,26	3,10	2,93	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,46	3,31	3,16	3,00	2,83	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,23	3,08	2,92	2,75	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,15	3,00	2,84	2,67	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,09	2,94	2,78	2,61	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	3,03	2,88	2,72	2,55	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,98	2,83	2,67	2,50	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,93	2,78	2,62	2,45	2,26
24	7,82	5,61	1,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,89	2,74	2,58	2,40	2,21
25	7,77	5,57	1,68	4,18	3,85	3,63	3,32	2,99	2,85	2,70	2,54	2,36	2,17
26	7,72	5,53	1,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,81	2,66	2,50	2,33	2,13
27	7,68	5,49	1,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,78	2,63	2,47	2,29	2,10
28	7,64	5,45	1,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,75	2,60	2,44	2,26	2,06
29	7,60	5,42	1,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,73	2,57	2,41	2,23	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,70	2,55	2,39	2,21	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,52	2,37	2,20	2,02	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,35	2,20	2,03	1,84	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	2,19	2,03	1,86	1,66	1,38
∞	6,63	4,61	5,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	2,04	1,88	1,70	1,47	1,00

$Q(F \mid \nu_1, \nu_2) = 0{,}05$													
ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	245,9	248,0	250,1	252,2	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,46	19,48	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,70	8,66	8,62	8,57	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,86	5,80	5,75	5,69	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,62	4,56	4,50	4,43	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,94	3,87	3,31	3,74	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,51	3,44	3,38	3,30	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,22	3,15	3,08	3,01	2,93
9	5,12	4,26	3,S6	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	3,01	2,94	2,86	2,79	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,85	2,77	2,73	2,62	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,72	2,65	2,57	2,49	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,62	2,54	2,47	2,38	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,53	2,46	2,38	2,30	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,46	2,39	2,31	2,22	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,40	2,33	2,25	2,16	2,07
16	4,44	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,35	2,2R	2,19	2,11	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,31	2,23	2,15	2,06	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,27	2,19	2,11	2,02	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,23	2,16	2,07	1,98	1,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,20	2,12	2,04	1,95	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,18	2,10	2,01	1,92	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,15	2,07	1,98	1,89	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,20	2,13	2,05	1,96	1,86	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,76	2,62	2,51	2,36	2,18	2,11	2,03	1,94	1,84	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,09	2,01	1,92	1,82	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,07	1,99	1,90	1,80	1,69
27	4,21	3,35	2,46	2,73	2,57	2,45	2,31	2,13	2,06	1,97	1,88	1,79	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	2,04	1,96	1,87	1,77	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,10	2,03	1,94	1,85	1,75	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	2,01	1,93	1,84	1,74	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,92	1,84	1,74	1,64	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,84	1,75	1,65	1,53	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,75	1,66	1,55	1,43	1,25
∞	7,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,75	1,67	1,57	1,46	1,32	1,00

Таблица 16

Таблица значений $Z_\gamma = Z(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,703	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,103
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 17

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 18

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 19

Таблица значений $Q(m, a) = 1 - R(m, a) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

зм2. Вер-ть $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ можно найти по фм-е (см. T_4):

$$P(m, a) = Q(m-1, a) - Q(m, a),\ m > 0;\ P(0, a) = 1 - Q(0, a).$$

зм3. Если у числа в табл. 19 показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени ближайшего вышестоящего числа, у к-го он имеется. Н-р, $Q(33, 19) = 1{,}2067 \cdot 10^{-3}$; $R(2, 7) = 1 - Q(2, 7) = 1 - 9{,}7036^{-1} = 1 - 0{,}97036 = 0{,}02964$.

зм4. При $a > 20$ вер-ть $Q(m, a)$ выч-ем по прж. фм-е:

$$Q(m, a) \approx 1 - \Phi^*\left(\frac{m + 0{,}5 - a}{\sqrt{a}}\right),\ R(m, a) \approx \Phi^*\left(\frac{m + 0{,}5 - a}{\sqrt{a}}\right).$$

m	$a = 0{,}1$	$a = 0{,}2$	$a = 0{,}3$	$a = 0{,}4$	$a = 0{,}5$
0	$9{,}5163^{-2}$	$1{,}8127^{-1}$	$2{,}5918^{-1}$	$3{,}2968^{-1}$	$8{,}9347^{-1}$
1	$4{,}6788^{-3}$	$1{,}7523^{-2}$	$3{,}6936^{-2}$	$6{,}1552^{-2}$	$9{,}0204^{-2}$
2	$1{,}5465^{-4}$	$1{,}1485^{-3}$	$3{,}5995^{-3}$	$7{,}9263^{-3}$	1,4388
3	$3{,}8468^{-5}$	$5{,}6840^{-5}$	$2{,}6581^{-5}$	$7{,}7625^{-4}$	$1{,}7516^{-3}$
4		$2{,}2592^{-6}$	$1{,}5785^{-5}$	$6{,}1243^{-5}$	$1{,}7212^{-4}$
5				$4{,}0427^{-6}$	$1{,}4166^{-5}$
6					$1{,}0024^{-6}$
m	$a = 0{,}6$	$a = 0{,}7$	$a = 0{,}8$	$a = 0{,}9$	
0	$4{,}5119^{-1}$	$5{,}0341^{-1}$	$5{,}5067^{-1}$	$5{,}9343^{-1}$	
1	1,2190	1,5580	1,9121	2,2752	
2	$2{,}3115^{-2}$	$3{,}4142^{-2}$	$4{,}7423^{-2}$	$6{,}2857^{-2}$	
3	$3{,}3581^{-3}$	$5{,}7535^{-3}$	$9{,}0799^{-3}$	1,3459	
4	$3{,}9449^{-4}$	$7{,}8554^{-4}$	1,4113	$2{,}3441^{-3}$	
5	$3{,}8856^{-5}$	$9{,}0026^{-5}$	$1{,}8434^{-4}$	$3{,}4349^{-4}$	
6	$3{,}2931^{-6}$	$8{,}8836^{-6}$	$2{,}0747^{-5}$	$4{,}3401^{-5}$	
7			$2{,}0602^{-6}$	$4{,}8172^{-6}$	
m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
0	$6{,}3212^{-1}$	$8{,}6466^{-1}$	$9{,}5021^{-1}$	$9{,}8168^{-1}$	$9{,}9326^{-1}$
1	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
2	$8{,}0301^{-2}$	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
3	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
4	$3{,}6598^{-3}$	$5{,}2653^{-2}$	1,8474	3,7116	5,5951
5	$5{,}9418^{-4}$	1,6564	$8{,}3918^{-2}$	2,1487	3,8404
6	$8{,}3241^{-5}$	$4{,}5338^{-3}$	3,3509	1,1067	2,3782
7	1,0219	1,0967	1,1905	$5{,}1134^{-2}$	1,3337
8	$1{,}1252^{-6}$	$2{,}3745^{-4}$	$3{,}8030^{-3}$	2,1363	$6{,}8094^{-2}$
9		$4{,}6498^{-5}$	1,1025	$8{,}1322^{-3}$	3,1828
10		$8{,}3082^{-6}$	$2{,}9234^{-4}$	2,8398	1,3695
11		1,3646	$7{,}1387^{-5}$	$9{,}1523^{-4}$	$5{,}4531^{-3}$
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			$3{,}4019^{-6}$	$7{,}6328^{-5}$	$6{,}9799^{-4}$
14				1,9932	2,2625
15				$4{,}8926^{-6}$	$6{,}9008^{-5}$
16				1,1328	1,9869
17					$5{,}4163^{-6}$
18					1,4017
m	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	$9{,}9752^{-1}$	$9{,}9909^{-1}$	$9{,}9966^{-1}$	$9{,}9988^{-1}$	$9{,}9995^{-1}$
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950

m	*a* = 6	*a* = 7	*a* = 8	*a* = 9	*a* = 10
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	54435	6,6718
9	8,3924–2	1,6950^{-1}	2,8338^{-1}	4,1259^{-1}	5,4207^{-1}
10	4,2621	9,8521^{-2}	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	8,8275^{-3}	2,7000	6,3797^{-2}	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	7,3851^{-2}	1,3554
14	1,4004	5,7172^{-3}	1,7257	4,1466	8,3458^{-2}
15	5,0910^{-4}	2,4066	8,2310^{-3}	2,2036	4,8740
16	1,7488	9,5818^{-4}	3,7180	1,1106	2,7042
17	5,6917^{-5}	3,6178	1,5943	5,3196^{-3}	1,4278
18	1,7597	1,2985	6,5037^{-4}	2,4264	7,1865^{-3}
19	5,1802^{-6}	4,4402^{-5}	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	9,3968^{-5}	4,3925^{-4}	1,5883
21		4,5263^{-6}	3,3407	1,7495	6,9965^{-4}
22		1,3543	1,1385	6,6828^{-5}	2,9574
23			3,7255^{-6}	2,4519	1,2012
24			1,1722	8,6531^{-6}	4,6949^{-5}
25				2,9414	1,7680
26					6,4229^{-6}
27					2,2535

m	*a* = 11	*a* = 12	*a* = 13	*a* = 14	*a* = 15
0	9,9998^{-1}	9,9999^{-1}			
1	9,9980	9,9992	9,9997^{-1}	9,9999^{-1}	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	9,9996^{-1}
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,6761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
15	9,2604^{-2}	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	6,2966^{-2}	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	6,9833^{-2}	1,1736	1,8053
19	9,2895^{-3}	2,1280	4,2669	7,6505^{-2}	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	8,2972^{-3}
21	2,2519	6,0651^{-3}	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	7,6225^{-3}	1,6712	3,2744
23	4,6386^{-4}	1,4729	3,9718	9,3276^{-3}	1,9465
24	1,9871	6,8563^{-4}	1,9943	5,0199	1,1165
25	8,2050^{-5}	3,0776	9,6603^{-4}	2,6076	6,1849^{-3}
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	5,5836^{-5}	2,0435	6,3513^{-4}	1,7158
28	4,6847^{-6}	2,2616	8,9416^{-5}	2,9837	8,6072^{-4}
29	1,6882	8,8701^{-6}	3,7894	1,3580	4,1845

m	$a = 11$	$a = 12$	$a = 13$	$a = 14$	$a = 15$
30		3,3716	1,5568	$5{,}9928^{-5}$	1,9731
31		1,2432	$6{,}2052^{-6}$	2,5665	$9{,}0312^{-5}$
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				$4{,}3154^{-6}$	1,7356
34				1,6968	$7{,}2978^{-6}$
35					2,9871
36					1,1910

m	$a = 16$	$a = 17$	$a = 18$	$a = 19$	$a = 20$
0					
1					
2	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$			
3	9,9991	9,9996	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	$9{,}9998^{-1}$
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	$8{,}9227^{-2}$	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	$9{,}5272^{-2}$	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	$6{,}8260^{-2}$	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	$7{,}3126^{-2}$	1,1218
26	$7{,}4589^{-3}$	1,5174	2,8234	4,8557	$7{,}7887^{-2}$
27	4,1051	$8{,}8335^{-3}$	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334
29	1,1312	2,7272	$5{,}9443^{-3}$	1,1850	2,1818
30	$5{,}6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6{,}9819^{-3}$	1,3475
31	2,7620	$7{,}4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8{,}0918^{-3}$
32	1,3067	3,7453	$9{,}6975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	$6{,}0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	$8{,}6644^{-5}$	2,4767	$6{,}3674^{-4}$	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8{,}0366^{-4}$
36	$4{,}9772^{-6}$	1,8025	$5{,}7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	2,0599	$7{,}9123^{-6}$	2,6684	$8{,}0154^{-5}$	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	$5{,}3365^{-6}$	1,7797	$5{,}3202^{-5}$
40			2,3030	$8{,}0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5{,}4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603

Таблица 20

Значения гамма-функции $\Gamma(p)$ (при $1 \leq p \leq 2$)

p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,76	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	9799
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000

Таблица 21

Таблица значений величины $e^{-\lambda}$

1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,000000	0,904837	0,0818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,367879	0,332871	0,301194	0,272532	0,246597	0,223130	0,201897	0,182684	0,165299	0,149569
2	0,135335	0,122456	0,110803	0,100259	0,090718	0,082085	0,074274	0,067206	0,060810	0,055023
3	0,049787	0,045049	0,040762	0,036883	0,033373	0,030197	0,027324	0,024724	0,022371	0,020242
4	0,018316	0,016573	0,014996	0,013569	0,012277	0,011109	0,010052	0,009095	0,008230	0,007447
5	0,006738	0,006097	0,005117	0,004992	0,004517	0,004087	0,003698	0,003346	0,003028	0,002739
6	0,002479	0,002243	0,002029	0,001836	0,001662	0,001503	0,001360	0,001231	0,001114	0,001008
7	0,000912	0,000825	0,000747	0,000676	0,000611	0,000553	0,000500	0,000453	0,000410	0,000371
8	0,000335	0,000304	0,000275	0,000249	0,000225	0,000203	0,000184	0,000167	0,000151	0,000136
9	0,000123	0,000112	0,000101	0,000091	0,000083	0,000075	0,000068	0,000061	0,000055	0,000050
10	0,000045	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Таблица 22

Таблица числа комбинаций из N эл-ов по n (бином-ые коэф-ты)

$$C_N^n = \binom{N}{n} = \binom{N}{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

n \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2		1	3	4	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	1330	1540	1771
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	5985	7315	8855
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	20349	26334	33649
6						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	54264	74613	100947
7							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280	170544	245157
8								1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	203490	319770	490314
9									1	10	55	220	715	2002	5005			48620	92378	167960	293930	497420	817190
10										1	11	66	286	1001	3003					184756	352716	646646	1144066
11											1	12	78	364	1365							705432	1352078
12												1	13	91	455								
13													1	14	105								
14														1	15								
15															1								
$\sum C_N^n$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	39203	65536	155382	262144	616666	1048576	2449868	4194304

Таблица 23

Равномерно распределенные случайные числа

$x_i = \overline{0,9}$ с $p_i = 0,1$

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
22	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	28	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	67	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	04	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	57	01	77	67	14	90	56	88	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	46	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	83

Таблица 24

Нормально распределенные случайные числа
$a = 0, \sigma^2 = 1$

0,464	0,137	2,455	– 0,323	– 0,068	0,296	– 0,288	1,298
0,060	– 2,256	– 0,531	– 0,194	0,543	– 1,558	0,187	– 1,190
1,486	– 0,354	– 0,634	0,697	0,926	1,375	0,785	– 0,963
1,022	– 0,472	1,279	3,521	0,571	– 1,851	0,194	1,192
1,394	– 0,555	0,046	0,321	2,945	1,974	– 0,258	0,412
0,906	– 0,513	– 0,525	0,595	0,881	– 0,934	1,579	0,161
1,179	– 1,055	0,007	0,769	0,971	0,712	1,090	– 0,631
– 1,501	– 0,488	– 0,162	– 0,136	1,033	0,203	0,448	0,748
– 0,690	0,756	– 1,618	– 0,345	– 0,511	0,051	– 0,457	– 0,218
1,372	0,225	0,378	0,761	0,181	– 0,736	0,960	– 1,530
– 0,482	1,678	– 0,057	1,229	– 0,486	0,856	– 0,491	– 1,983
– 1,376	– 0,150	1,356	– 0,561	– 0,256	– 0,212	0,219	0,779
– 1,010	0,598	– 0,918	1,598	0,065	0,415	– 0,169	0,313
– 0,005	– 0,899	0,012	– 0,725	1,147	– 0,121	1,096	0,181
1,393	– 1,163	– 0,911	1,231	– 0,199	– 0,246	1,239	– 2,574
– 1,787	– 0,261	1,237	1,046	– 0,508	– 1,630	–0,146	– 0,392
– 0,105	– 0,357	– 1,384	0,360	– 0,992	– 0,116	– 1,698	– 2,832
– 1,339	1,827	– 0,959	0,424	0,969	– 1,141	– 1,041	0,362
0,041	0,535	0,731	1,377	0,983	– 1,330	1,620	– 1,040
0,279	– 2,056	0,717	– 0,873	– 1,096	– 1,396	0,047	0,089
– 1,805	– 2,008	– 1,633	0,542	0,250	– 0,166	0,032	0,079
– 1,186	1,180	1,114	0,882	1,265	– 0,202	0,151	– 0,376
0,658	– 1,141	1,151	– 1,210	– 0,927	0,425	0,290	– 0,902
– 0,439	0,358	1,939	0,891	– 0,227	0,602	0,873	– 0,437
– 1,399	– 0,230	0,385	– 0,649	– 0,577	0,237	– 0,289	0,513
0,199	0,208	– 1,083	– 0,219	– 0,291	1,221	1,119	0,004
0,159	0,272	– 0,313	0,084	– 2,828	– 0,439	– 0,792	1,275
2,273	0,606	0,606	– 0,747	0,247	1,291	0,063	– 1,793
0,041	– 0,307	0,121	0,790	– 0,584	0,541	0,484	– 0,986
– 1,132	– 2,098	0,921	0,145	0,446	– 1,661	1,045	– 1,363
0,768	0,079	– 1,473	0,034	– 2,127	0,665	0,084	– 0,880
0,375	– 1,658	– 0,851	0,234	– 0,656	0,340	– 0,086	– 0,158
– 0,513	– 0,344	0,210	– 0,736	1,041	0,008	0,427	– 0,831
0,292	– 0,521	1,266	– 1,206	– 0,899	0,110	– 0,528	– 0,813
1,026	2,990	– 0,574	– 0,491	– 1,114	1,297	– 1,433	– 1,345

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.

2. **Белько И.В.**, **Свирид Г.П.** Теория вероятностей и математическая статистика (примеры и задачи). – Минск: ООО «Новое знание», 2007. – 251 с.

3. **Бочаров П.П.**, **Печинкин А.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с.

4. **Бухараев Р.Г.** Основы теории вероятностных автоматов. – М.: Наука, 1985, 288 с.

5. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

6. **Вентцель Е.С.**, **Овчаров Л.А.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 368 с.

7. **Волков Е.А.** Численные методы. – М.: «Лань», 2007. – 256 с.

8. **Володин Б.Г.**, **Ганин М.П.** и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под общей редакцией профессора А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632 с.

9. **Вуколов Э.А.**, **Ефимов А.В.** и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1984. – 608 с.

10. **Гаек Я.**, **Шидак З.** Теория ранговых критериев. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

11. **Гермейер Ю.Б.** Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.

12. **Гмурман В.Е.** Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. – М.: Высшая школа, 1966. – 380 с.

13. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975. – 333 с.

14. **Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1965. – 400 с.

15. **Голенко Д.И.** Статистические методы в экономических системах. – М.: Статистика, 1970. – 204 с.

16. **Гутер Р.С.**, **Овчинский Б.В.** Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

17. **Демидович Б.П.**, **Марон И.А.** Основы вычислительной математики. – М.: Физматгиз, 1963. – 660 с.

18. **Джонсон Н.**, **Лион Ф.** Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1981. – 520 с.

19. **Дубров А.М.** Последовательный анализ в статистической обработке информации. – М.: Статистика, 1976. – 160 с.

20. **Дубров А.М.** Математико-статистическая оценка эффективности в экономических задачах. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 176 с.

21. **Дюге Д.** Теоретическая и прикладная статистика. – М: Наука, 1972. – 384 с.

22. **Ермаков С.М.**, **Бродский В.З.**, **Жиглявский А.А.** и др. Математическая теория планирования эксперимента. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

23. **Ермаков С.М.**, **Жиглявский А.А.** Математическая теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

24. **Захаров В.К.**, **Севастьянов Б.А.**, **Чистяков В.П.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 160 с.

25. **Зельдович Я.Б.**, **Мышкис А.Д.** Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1972. – 592 с.

26. **Иванова В.М.**, **Калинина В.Н.** и др. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1981. – 371 с.

27. **Кендалл М.**, **Моран П.** Геометрические вероятности, – М.: Наука, 1972. – 192 с.

28. **Кибзун А.И.**, **Горяинова Е.Р.**, **Наумов А.В.** Теория вероятностей и математическая статистика (базовый курс с примерами и задачами). – М.: Физматлит, 2005. – 232 с.

29. **Кобринский Н.Е.** Информационные фильтры в экономике. – М.: Статистика, 1978. – 288 с.

30. **Коваленко И.Н.**, **Филиппова А.А.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1973. – 368 с.

31. **Колемаев В.А.**, **Староверов О.В.**, **Турундаевский В.Б.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.

32. **Колмогоров А.Н.**, **Журбенко И.Г.**, **Прохоров А.В.** Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982. – 160 с.

33. Колчин В.Ф., **Севастьянов Б.А.**, **Чистяков В.П.** Случайные размещения. – М.: Наука, 1976. – 224 с.

34. Королев В.Ю. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Проспект, 2006. – 160 с.

35. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

36. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 500 с.

37. Лоули Д., **Максвелл А.** Факторный анализ как статистический метод. – М.: Мир, 1967. – 144 с.

37а. Лопатников Л.И. Краткий экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1979. – 359 с.

38. Маринеску И., **Мойнягу Ч.** и др. Основы математической статистики и ее применение. – М.: Статистика, 1970. – 224 с.

39. Невельсон М.Б., **Хасьминский Р.З.** Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.

40. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

41. Норкин С.Б., **Берри Р.Я.** и др. Элементы вычислительной математики. – М.: Высшая школа, 1966. – 208 с.

42. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Том 1. – 456 с.; том 2. – 576 с.

43. Положий Г.Н., **Пахарева Н.А.** и др. Математический практикум. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 с.

44. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М., 1971. – 192 с.

45. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1975. – 424 с.

46. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Пер. с англ. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 272 с.

47. Смирнов Н.В., **Дунин-Барковский И.В.** Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1965. – 512 с.

48. Тухватов М.Б. Весовые методы в математическом программировании. – Ташкент: ФАН, 1981. – 160 с.

49. Тухватов М.Б. Задачи и принципы построений АСУ ВУЗ Деп. 20.08.82 г. № 399-82. – 160 с.

50. Тухватов М.Б. Лекции по математике (для поступающих в вузы и самообразования). – Уфа: БГАУ, 1995. – 640 с.

51. Тухватов М.Б. Лекции по общей математике. Часть 1: Множества и их отображения. Дискретная математика. – Уфа: БГАУ, 2002. – 396 с.

52. Тухватов М.Б. Лекции по общей математике. Часть 2: Математические модели и методы их решения. – Уфа: БГАУ, 2006. – 667 с.

53. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.

54. Федосеев В.В., **Гармаш А.Н.** и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

55. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Том 1. – 499 с.; том 2. – 752 с.

56. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

56а. Чепалыга А.Л., **Чепалыга Г.И.** Регионы России: справочник. – М.: Дашков и К°, 2008. – 100 с.

57. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 627 с.

58. Шиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. – М.: Наука, 1969. – 344 с.

59. Яглом А.М., **Яглом И.М.** Вероятность и информация. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

60. Яковлев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Дашков и К°, 2008. – 184 с.

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ (КС)

Автокод – простой язык программирования (пргв.), ориентированный на конкретную ЭВМ. Такие языки используются в операционных системах ЭВМ (см. КС), трансляторах (см. КС) и нек-ых прикладных программах (прг.).

Автоматизация программирования – выполнение трудоемкой операции составления прг-м для ЭВМ не вручную (программистами), а непосредственно на самой машине. Для этого применяются особые прг. работы ЭВМ, в част., трансляторы, с помощью к-ых алгоритм, записанный в общем машинно-независимом языке пргв-ия, переводится на понятный данной ЭВМ язык целиком (при этом получается так наз-мая «рабочая прг.»), и интерпретаторы (см. КС), «переводящие» на язык машины каждое указание посл-но, шаг за шагом.

Автоматизированная система обработки данных (АСОД) – система обработки данных, основанная на использовании ЭВМ, в отличие от систем, где обработка ручная. Возможны два принципа организации такой обработки (инф-ия собирается и обрабатывается): 1) для решения каждой задачи; 2) для решения различных задач с использованием общих нормативно-справочных (условно-постоянных) данных. В этом случае система наз. интегрированной (см. Интегрированная система обработки данных).

Автоматизированная система плановых расчетов (АСПР) – система, предназначенная для составления государственных (госн.) планов развития н/х-ва на основе экн-мт. методов и ЭВМ. Пока это преимущественно прямые плановые расчеты, но постепенно растет и доля расчетов по экн-мт. моделям, в том числе оптз-ых.

АСПР яв-ся человеко-машинной системой (см. КС), т.е. на любом этапе решения плановой задачи можно вмешаться в его ход, скорректировать, сопоставить с реальными экн. данными и т.д.

В перспективе АСПР должна стать основой, центральной подсистемой Общегос-ой автз. системы сбора, обработки инф-и для учета, плн-ия и упл-ия (ОГАС, см. КС).

Автоматизированная система управления (АСУ) – система упл-ия, в к-ой применяются современные автч-ие средства обработки данных и экн-мт. методы для решения основных задач упл-ия производственно-хозяйственной деятельностью. АСУ есть человеко-машинная система (см. КС), в к-ой рутинные, повторяющиеся операции выполняет машина, а главное (творческое) решение всегда остается за человеком. Этим АСУ отличаются от автоматических (автч.) систем, к-ые действуют самостоятельно, по установленной для них прг-ме, без вмешательства человека.

Отличие АСУ от обычной, неавтоматизированной, но также использующей ЭВМ системы, показано на рис. 1 а, б, где а – неавтоматизированная, б – автоматизированная, I – управляющий центр, II – управляемая система (прз-во), III – контроль; пунктирная стрелка – канал непосредственного упл-ия ЭВМ нек-ми технологическими процессами (бывает не во всех АСУ). Стрелками обз-ны потоки инф-и.

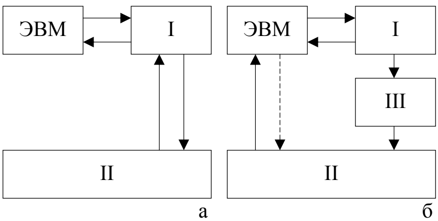


Рис. 1

АСУ подразделяются на мн-во видов и типов. Из них отметим два класса: системы организационного (административного) упл-ия и системы упл-ия технологическими процессами.

Системы организационного упл-ия делятся на три вида в зв-ти от уровня: н/х-во в целом, отрасль, предприятие (объединение). Далее см. 1[*].

Агрегат – любая выделенная совокупность (свк.) от неструктурированной (мн-во, конгломерат) до высокоорганизованной системы. Этот термин в экн-ке понимается как продукт укрупнения инф-и. Такие общеэкн-ие показатели, как свк-ый общс-ый продукт, конечный продукт, национальный доход, тоже наз-ют агрегатами.

Адекватность модели – ее ств-ие моделируемому (мдм.) объекту или процессу. Это в какой-то мере условное понятие, т.к. полного ств-ия модели (мд.) реальному объекту быть не может: иначе это была бы не мд., а сам объект. При моделировании (мдв.) имеется в виду адекватность не вообще, а по тем св-ам мд-и, к-ые для иссл. считаются сущв-ми.

Проблема адекватности имеет особое зн. для имитационных (имт-х) мд-ей. Их логические (лгч.) эл-ты должны ств-вать лгч-им эл-ам реальной системы, мт-й аппарат – представлять реали-

[*] Лопатников Л.И. Краткий экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1979. – 358 с.

зуемые им фк-и, а вер-ные хркс-ки – отражать вер-ый хрк. реальной системы. Оценки адекватности имт-ой мд. состоит из двух частей: 1) адекватности принципиальной структуры мд-и, т.е. ее замысла (см. Верификация модели); 2) достоверности ее реализации (см. Валидация имитационной модели).

Трудность измерения экнч-их вел-н осложняет проблему адекватности экнч-их мд-ей.

Байесовский подход – направление в науке об управлении (упл.), основанное на принципе мкс-го использования имеющейся инф-и, ее непр-го пересмотра и переоценки. Такой пересмотр трактуется как обучение, и сам процесс упл-ия при байесовском подходе понимается как процесс обучения (адаптации).

Подход назван по теореме Байеса (из теории вер-ей): $P(A/B) = \dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$, где $P(A/B)$ – условная вер-ть события (сб.) A при условии, что сб. B произошло, $P(B/A)$ – условная вер-ть сб. B при условии, что сб. A произошло, $P(A)$ и $P(B)$ – безусловные вер-ти сб-й A и B. Эта теорема расв-ся как лгч. основа пересмотра суждений в зв-ти от дсв-но происходящих сб-й, т.е. для обучения на базе опыта и, сд-но, пст-ой корректировки стратегий упл-ия.

Байесовский подход находит применение при решении задач рсп-ия капитальных вложений, упл-ия запасами, организации выборочного (вбрч.) контроля качества и т.д.

Байт – основная единица (ед.) инф-и в современных электронных машинах. Цифровая ЭВМ оперирует им как одним целым при вводе, передаче с одного устройства на другое, хранении и обработке данных. Б. представляет собой строку из восьми двоичных символов, т.е. содержит 8 бит (см. КС) инф-и. Этого кол-ва дт-но для любой ВМ, чтобы написать в двоичном коде все буквы алфавита, все цифры и ряд специальных знаков: точку, запятую, плюс, минус, вопросительный знак и т.д. Так что каждый Б. выражает либо две цифры, либо одну букву или знак. Из Б-ов составляют машинные слова, к-ые обычно имеют размер 4-8 букв, ств-но 8-16 цифр. Из слов составляются записи, из записей – массивы инф-и.

Миллион Б-ов наз. мегабайтом и записывается Мбайт, тысяча байтов – килобайт (Кбайт). Сущ-ет системы ЭВМ, в к-ых байт состоит не из 8 бит, а из иного их числа (н-р, пяти).

Балансовый метод – принятый в практике н/х-го планирования (плн.) метод взаимного сопоставления ресурсов (материальных, трудовых, финансовых) и потребностей в них. План производства (прз.) отдельных видов продукции на предварительном этапе рассчитывается исходя из оценки потребностей в них, т.е. составляются частные балансы.

Современной ступенью развития балансового метода яв-ся межотраслевой баланс (см. КС), увязывающий не только прз-во и распределение (рсп.) отдельных ресурсов, но и взаимное их сочетание в рамках н/х-ва. В баланс н/х-ва включаются: баланс общс-го продукта и его использования, баланс трудовых ресурсов, их рсп-ия и использования, баланс прз-ва национального дохода, сводная таблица и целевая система частных балансов, в том числе баланс основных фондов, баланс доходов и расходов населения и др.

Балльные оценки – шкалы (см. КС).

Белман принцип оптимальности – важнейшее положение динамического программирования (ДП), к-ое гласит: оптимальное (опт.) поведение обладает тем св-ом, что каковы бы ни были первоначальные состояние (сст.) и решение (т.е. «управление»), последующие решения должны составлять опт. поведение отс-но сст-ия, получающегося в результате первого решения. Этот принцип можно выразить и рассуждая от противного: если не использовать наилучшим образом то, чем мы располагаем сейчас, то и в дальнейшем не удастся наилучшим образом распорядиться тем, что могли бы иметь.

Сд-но, если имеется опт. траектория, то и любой ее участок представляет собой опт. траекторию. Этот принцип позволяет сформулировать эффективный метод решения широкого класса динамических (днмч.) задач. Его особенности в том, что решение начинается с конца (цели) траектории исследуемого (исслм.) объекта и поэтапно продолжается в обратном порядке к ее началу, т.е. по принципу: конец $\rightarrow$ начало и затем начало $\rightarrow$ конец.

Бит (англ. bit, сокращенно от binary digit, т.е. двоичная единица) – единица (ед.) инф-и, как бы инф-ный атом. Он может быть представлен одной из двух цифр двоичной системы счисления – 0 или 1 и означает такое кол. инф-и, к-ое содержится в ответе типа «да» ил «нет» на какой-либо поставленный вопрос о св-ах объекта.

Бод – единица скорости передачи инф-и, исчисляется как 1 бит в секунду.

Валидация имитационной модели – проверка ств-ия данных, получаемых в процессе ее машинной имт-и, реальному ходу явлений, для описания к-ых создана мд. Производится тогда, когда экспериментатор убедился на предшествующей стадии (верификации) в правильности структуры (логики) мд-и. Состоит в том, что выходные данных после расчета на ЭВМ сопоставляются стсч-ми сведениями о мд-мой системе.

Валовая продукция – статистический (стсч.) показатель, хркз-й объем продукции н/х-ва, сфер и отраслей экн-ки, объединений и предприятий в денежном выражении. Исчисляется главным образом по заводскому методу (в нек-ых отраслях – по валовому обороту) как сумма пзв-й цен на объемы продукции.

В.П. содержит большой повторный счет и непригодна в качестве показателя оценки деятельности прд-й, но (несмотря на эти недостатки) она делает выгодным выпуск более материалоемких и дорогих изделий, и она нх-ма для ряда общеэкнч-ых расчетов.

В сумме В.П. отраслей материального прз-ва составляет (валовый) свк-ый общс-ый продукт.

В.П. – один из основных показателей межотраслевого баланса (см. КС). Для отрасли это общий ценностный объем произведенной продукции. Если расв-ть его с точки зрения рсп-ия продукта (т.е. по строкам баланса), то В.П. – сумма промежуточного и конечного продуктов данной отрасли. Если же расв-ть этот показатель с точки зрений затрат на прз-во продукции (т.е. по столбцам баланса), то В.П. образует сумму текущих материальных затрат, амортизации и чистой продукции.

В сумме В.П. всех отраслей, исчисленная как по строкам, так и по столбцам, дает один результат – общий объем свк-го общс-го продукта: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$ (обз-ия см. Межотраслевой баланс, КС).

Векторная оптимизация – решение задач стч-го пргв-ия, в к-ых кт-й опт-сти представляет сбой вектор, компонентами к-го яв-ся в свою очередь различные несводимые друг к другу кт-и опт-сти подсистем, входящих в данную систему, н-р, кт-и разных социальных групп в социально-экнч. плн-и. При этом задача оптз-и сущ-но видоизменяется, н-р, по сравнению со «скалярной оптз-ей», когда требуется найти эксм. целевой фк-и при данных огр-ях. Следует отличать также векторные задачи оптз-и от многокритериальных и многоэкстремальных задач мтч-го прг-ия.

Есть разные подходы к векторным задачам. Кт-и, н-р, ранжируют по важности, выделяют один из них в кач-е главного (тогда уровень остальных фиксируется как дпн-ые огр-ия) и т.п. Можно придерживаться принципа опт-сти по Парето (см. КС). При этом принимают, что если улучшение какого-то показателя (кт-ия) потребует ухудшения хотя бы одного из остальных, опт-м достигнут. В др-их случаях задачу векторной оптз-и сводят к задаче теории игр. оптз-ия по одному из кт-ев наз. субоптимизацией.

Верификация имитационной модели – проверка ств-ия ее поведения предположениям экспт-ра (см. машинная имитация). Когда мд. организована в вычт-ю прг-у для ЭВМ, то сначала исправляют ошибки в ее записи на алгоритмическом языке, а затем переходят к верификации. Это первый этап дсв-ой подготовки к имт-му эксп-ту. Подбираются нек-ые исходные данные, для к-ых могут быть предсказаны результаты расчета. Если окажется, что ЭВМ выдает противоречащие ожидающимся при формировании мд-и данные, значит, мд. неверна. В обратном случае переходят к сд. этапу проверки работоспособности мд-и – ее валидации (см. КС).

Временной ряд (или ряд динамики, или динамический ряд) – ряд последовательных (посл.) значений (зн.), хркз-их изменение показателя во времени.

Изучение В.Р. яв-ся важной обл-ю для иссл-ия экнч-ой динамики. Они разделяются, во-первых, на интервальные (хркз-ие опр. периоды) и моментные ряды (данные к-ых хркз-ют вел-у явления по состоянию на опр-ые даты), во-вторых, на эволютарные процессы, содержащие тренд (см. КС), и стационарные процессы, не содержащие его.

Основные понятия анализа В. (динамических) Р-ов: тренд, или длительная, «вековая» тенденция; лаг (см. КС), или запаздывание одного явления по отношению к другому, связанному с ним; периодические колебания (сезонные, циклические и др.). Для выявления тенденций, лагов, колебаний и на этой основе анализа и прогнозирования экнч-их явлений применяется ряд методов математико-статистической (мт-стсч.) обработки В.Р. Среди них экстраполяция (эстп.) – продолжение ряда на будущее по выявленной закономерности его развития, выравнивание рядов для устранения слн-ых отк-й и анализ автокорреляций.

Ген – материальный носитель наследственности, единица наследственного материала, определяющая формирование элементарного признака в живом организме.

Генная инженерия – конструирование новых сочетаний генов.

Генофонд – генный фонд (ресурсы, запасы генов).

Глобальное моделирование (или моделирование (мдв.) глобального развития) – новая обл. иссл-й, посвященная разработке моделей (мд.) наиболее масштабных социальных, экнч-их и экологических процессов, охватывающих земной шар. Н-р, под руководством амер. экнст-а В. Леонтьева по поручению одного из исследовательских (исст.) центров ООН была разработана экн-мт. мд. мировой экн-ки. Она делит мир на 15 регионов, взаимосвязанных экспортом-импортом по 43 секторам экнч-ой деятельности. С ее помощью анализируются возможные варианты перспектив развития мира. Известен ряд мд-й, разработанных по заказу так назм-го Римского клуба. Они обратили внимание мировой общс-ти на остроту экологических проблем.

Глобальное мдв. начинает развиваться и в России. Н-р, экнс-ты сотрудничают в этой обл-ти с Международным институтом прикладного системного анализа (ИСА) в Вене.

Глобальный критерий оптимальности в экономике – степень достижения общей цели развития прз-ва, опр-ной основным экнч-им законом развития. Эта цель – максимальное (мкс.) удовлетворение (уд.) постоянно растущей потребности (птб.) членов общества. Раз известна цель, то степень достижения ее и будет мерилом успешности развития, т.е. глобальным критерием (кт.). Тот вариант плана, то хоз-ное решение, к-ое обеспечивает мкс. приближение к намеченной цели, должно быть признано наилучшим, опт-ым. Однако чтобы из мн-ва вариантов плана выбрать наилучший, цель общества следует конкретизировать, т.е. выразить ее в численных результатах. Надо знать, в каких единицах можно выразить птб-и и что такое «максимальное» уд-ие.

Для решения этого вопроса экономисты-математики выдвинули и подвергают иссл-ям несколько вариантов. Подробнее см. сноску 1*.

Гомеостаз – устойчивое состояние (сст.) равновесия системы в ее взаимодействии со средой. Это понятие пришло в экн-у из биологии, где оно применялось для хркс-ки физиологических процессов, н-р, поддержание пст-ой температуры ($t°$) тела незв-мо от $t°$ окружающей среды.

В экн-мт. трактовке есть различные мнения. В одних случаях гомеостазом (гомеостазисом) считают неизменность сущ-ных параметров системы незв-мо от влияний внешней среды (как $t°$ тела в приведенном примере). В др. случаях учитывается, что экнч. системы изменяют свою структуру – они относятся к классу самоорганизующихся систем, а значит, и состав сущ-ных параметров. Сд-но. дело не в неизменяемости экнч-их параметров, а в неизменяемости стн-ия системы со средой.

Система экнч-го плн-ия должна быть гомеостатической, т.е. обладать способностью быстро реагировать на изменения спроса и предложения, внешнеторговой конъюнктуры и т.д. и восстанавливать, т.о., равновесие в н/х-ве.

Государство – основная политическая орг-ия общества, осуществляющая его упл-ие, охрану его экнч-ой и соц-ой структуры.

Г. обладает монополией на принуждение всего населения в рамках опр-ой территории, правом на осуществление от имени всего общества внутр. и внеш. политики, исключительно правом издания законов и правил, обязательных для всего населения, правом взимания налогов и сборов.

Г. обусловлено в конечном счете хрк-ом прз-ых отн-ий и способом прз-ва в целом, оно яв-ся надстройкой над экнч-им базисом.

Важное зн. имеет различение Г. с точки зрения сущ-щего в них политич. режима, под к-ым понимают систему методов осуществления гос-ой власти, степень реализации демократич. прав и свобод личности, отн-ие гос-ой власти к правовым основам собственной деятельности, стн-ие официальных конституц. и правовых форм с реальной политич. жизнью.

В.И. Ленин писал: «Государство есть машина для угнетения одного класса другим, машина, чтобы держать в повиновении одному классу прочие подчиненные классы».

Динамические модели межотраслевого баланса – частный случай динамических моделей (ДМ) экн-ки, основанные на принципе межотраслевого баланса, в к-ый дополнительно (дпн.) вводятся ур-ия, хркз-ие изменения отраслевых связей во времени на основе отдельных показателей, н-р, капитальных вложений и основных фондов (что позволяет создать преемственность между балансом отдельных периодов).

Единообразного метода решения этой задачи пока нет. В принципе она может решаться сд-щим образом (при условии, что в динамической межотраслевой модели, как и в статическом межотраслевом балансе, связи принимаются лин-ми). В отличие от ур-й статического межотраслевого баланса, где конечный продукт каждой отрасли представлен одним слагаемым, здесь он распадается на два: фонд накопления и фонд непроизводственного (непрз.) потребления.

Система ур-й в этом случае записывается так:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + M_i + w_i \ (i = \overline{1,n}\,, j = \overline{1,n}\,),$$

где M_i – часть продукции i-й отрасли, идущая в фонд накопления, w_i – часть продукции i-й отрасли, выделяемая на непрз-ое потребление (остальные обз. см. Межотраслевой баланс). Такие мд. с разделением конечного продукта наз-ся «моделями леонтьевского типа». Далее см. сноску 1*.

Динамические модели (ДМ) экономики – мд-и, описывающие экн-у в развитии (в отличие от статических, хркз-их ее состояние в опр-ый момент). Они нх-мы для того, чтобы на их основе прогнозировать развитие экн-ки, рассчитывать планы и программы.

Мд. яв-ся динамической (днмч.), если как минимум одна ее пер-я относится к периоду времени, отличному от времени, к к-му отнесены др. пер-ые.

Сущ-ет два подхода к построению ДМ: 1) конструктивный или оптимизационный (оптз.), исходящий из признания принципиальной возможности упл-ия экнч-им процессом. Он состоит в выборе из числа возможных траекторий (путей) экнч-го развития оптимальной (опт.), т.е. наилучшей траектории; 2) описательный, дескриптивный, смысл к-го заключается в иссл-и равновесия в экнч-ой системе. Переходя к экнч-ой динамике (днм.), в этом случае используют понятие «равновесная траектория» (т.е. уравновешенный сбалансированный экнч-й рост), к-ая представляет сбой результат взаимодействия мн-ва ячеек экнч-ой системы (см. Равновесный сбалансированный рост).

В общем мт-ом виде ДМ сводятся к описанию сд-их экнч-их явлений: начального состояния экн-ки, технологических способов прз-ва (каждый «способ» говорит о том, что из набора продуктов x можно в течение единицы времени произвести набор продуктов y), а также кт-ия опт-сти.

С точки зрения теор-го анализа большое зн. приобрели ДМ фон Неймана и так наз-мые теоремы о магистралях. А практическое применение ДМ-ей находится еще в начальной стадии: расчеты по мд-и, хотя бы сколько-нибудь приближающейся к реальности, чрезвычайно сложны. Здесь пока разрабатывают лишь многоотраслевые (многосекторные) ДМ развития экн-ки, основанные на мт-их закономерностях развития отдельных отраслей и их взаимоотношений (см. Динамические модели межотраслевого баланса).

Для мт-го описания ДМ используются системы лин. диф-ых ур-й (в моделях с непр-ым временем), разностных ур-й (в моделях с дк-ым временем), а также системы алг-их ур-й.

Имитационная модель – численная экн-мт. мд. изучаемой системы, предназначенная для использования в процессе машинной имитации. Она яв-ся по существу прг-ой для ЭВМ, а эксп-т над ней состоит в нбл-и за результатами расчетов по этой прг-ме при различных задаваемых зн-ях экзогенных (выводимых) пер-ых (см. КС).

Интерпретатор – машинная прг., позволяющая посл-но переводить алгоритм, записанный на общем машинно-независимом языке прг-ия, на язык, понятный данной машине, т.е. одно указание (или инструкцию) за другим (в отличие от транслятора (см. КС), к-ый переводит прг-у целиком, после чего начинается решение задачи). Поэтому И. удобны для работы на ЭВМ в режиме диалога с человеком.

Исследование операций – прикладное направление кибернетики, используемое для решения практических организационных (в том числе экнч-их) задач и яв-ся комплексной научной дисциплиной. Главный метод И.О. – системный анализ (см. КС) действий (операций) и объективная (в част., кол-ная) сравнительная оценка возможных результатов этих действий.

Н-р, расширение выпуска продукции на заводе требует одновременного и взаимосвязанного решения мн-ва частных проблем: реконструкция прд-ия, заказ оборудования, изменения системы оперативно-производственного плн-ия и диспетчерования, организационной перестройки, перемещения руководящих работников и т.д. При анализе возможных последствий принимаемых решений нх-мо учитывать такие факторы, как неопр-сть, слн-сть и риск. К решению столь сложных задач привлекают экнс-ов, мт-ов, стс-ков, инженеров, социологов, психологов и др., поэтому одной из особенностей И.О. считают его междисциплинарный, комплексный хрк.

И.О. прежде всего предназначено для предварительного колн-го обоснования принимаемых решений, к-ые могут реализоваться многими способами (их наз-ют стратегиями или альтернативами). Кроме того, И.О. позволяет сравнить возможные варианты (альтернативы) организации операции, оценить возможное влияние на результат отдельных факторов, выявить «узкие места» и т.д. Т.о., сущность задач И.О. – поиск рационального использования имеющихся ресурсов для реализации поставленной цели.

Колн. методы И.О. строятся на основе достижений экн-мт. и мт-стсч. дисциплин (теория массового обслуживания, опт-го пргв-ия, см. КС). Разные мт. методы (мт. пргв-ие, диф-ые и разностные ур-ия, теория графов, Марковские процессы, теория игр, теория стсч-их решений, теория распознавания образов и ряд др.) применяются (в тех или иных комбинациях) при решении различных классов задач (н-р, задачи управления запасами, рсп-ия ресурсов и назначения, задачи массового обслуживания, замены оборудования, упорядочения и согласования, задачи поиска и др.).

В настоящее время в обл. И.О. работают сотни исст-их учреждений и групп в десятках стран, организованы общества И.О., объединяемые международной федерацией (ИФОРС).

Качество – филос. категория, выражающая неотделимую от бытия объекта его сущн-ю опр-сть, благодаря к-ой он яв-ся именно этим, а не иным объектом. К. отражает устойчивое взаимоотн-ие эл-ов объекта, к-ое хркз-ет его специфику, дающую возможность отличить один объект от др-их. Вместе с тем, К. выражает и то общее, что хркз-ет весь класс одн-ых объектов. По Аристотелю, качество – хркс-ка бытия объекта.

Категория К. выражает опр-ую ступень познания человеком объективной реальности. Познание идет от К. к кол-ву и далее их единству – мере. Любой предмет представляет собой единство К. и кол-ва. Переход кол-ных изменений в качественные яв-ся одним из осн. законов диалектики, согласно к-му изменение К. объекта происходит тогда, когда накопление кол-ных изменений достигает опр-го предела. Этот закон вскрывает наиболее общий механизм развития.

Качество жизни – соцч. категория, выражающая качество (кач.) уд-ния материальных и культурных потребностей людей (кач. питания, модность одежды, комфорт жилища, кач. здравоохранения, образования и воспитания, сферы обслуживания, окружающей среды, структуры досуга, степень уд-ия потребностей в содержательном общении, знаниях, творческом труде, уровень стрессовых сст-й, структуры расселения и др.).

Неуклонный подъем жизненного уровня нар. масс приводит к повышению К.ж. человека. К.ж. наряду с укладом и уровнем жизни опр-ет условия образа жизни людей.

Компилятор (один из видов трансляции) – прг., позволяющая автч-ки переводить прг-у с алгоритмического языка высокого уровня на язык, понятный данной ЭВМ.

Корреляционный анализ в экономике. Корреляционный (крцн.) анализ – ветвь мт-ой стс-ки, изучающая взаимосвязь между изменяющимися вел-ми (корреляция (крц.) – стн-ие, от лат. слова correlatio). Взаимосвязь может быть полная (т.е. фнц-ая), тогда коэф. крц-и равен ед-це (+ 1, если пер-ые одновременно взр-ют или уб-ют, и – 1, если при взр-и одной пер-ой др-я уб-ет). Если взаимосвязь совсем отсутствует, тогда коэф. равен нулю. Примерами фнц-ой связи служат выпуск и птбл-ие продукции, когда она дефицитна: во сколько раз больше выпуск, во столько раз больше продажа (все распродается, ничего не остается в запасе).

Возможен и промежуточный случай, когда звс-ть связанных вел-н неполная, поскольку она связана с влиянием посторонних, дпн-ых факторов. Известно, что, н-р, в ср-ем производительность труда рабочих тем выше, чем больше их стаж. Однако бывает, и нередко, что молодой рабочий (из-за влияния таких дпн. факторов, как образование, здоровье и пр.) работает лучше пожилого. Чем больше влияние этих дпн-ых факторов, тем меньше связь между стажем и выработкой, и наоборот. В таком случае коэф. крц-и r занимает промежуточной положение между нулем и ед-й (т.е. $0 < r < 1$) в зв-ти от тесноты взаимосвязи. Именно такие взаимосвязи изучает крцн. анализ. Причем связь между двумя пер-ми наз. парной крц-ей, а между многими – множественной (многомерной) крц-ей.

Расв-мые связи мт-ки описываются крцн-ми ур-ми, наз-ми ур-ми регрессии (рег.). Н-р, простейшим крцн. ур-ем яв-ся ур-ие прямой вида $y = ax + b$. При фнц. связи такая прямая точно ств-ла бы дсв-ым зн-м зв-ой пер-ой и графически она проходила бы все нблм-ые точки (x_i, y_i). А при крц-и точки нбл-й (x_i, y_i) расположены не по прямой, а в виде «облачка» около этой прямой. Эта прямая находится (опр-ся) методом нм-их кв-ов.

Особенно широко применяется К.А. в теории прз-ых фк-й, в разработке разного рода нормативов на прз-ве, а также в анализе спроса и птбл-ия.

Лаг (временной лаг) – экономический показатель, отражающий отставание или опережение во времени одного экономического (экнч.) явления по сравнению с другим, связанным в ним явлением. Н-р, капиталовложения (кптв.) в промышленности дают отдачу не сразу, а через несколько лет, когда будут построены и освоены новые производства (прз.). Поэтому, изучая влияние кптв-й на развитие хоз-ва, приходится относить это влияние не на ближайший год, а на третий, четвертый и т.д. Подобные явления отражаются в экн-мт. мд-х, в машинной имитации через так наз-мые распределенные лаги различных видов. В мд-и с распределенным лагом результат расв-ся не как фк-я затрат нек-го опр-го года, а как слн. фк-я посл-ти ряда лет прошлого периода:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\tau} w_i x_{t-i} + u_t,$$

где y_t – результат в году t, x_{t-i} – затраты в году $t-i$, τ – мкс-ый срок запаздывания, w_i – весовые коэф., хркз-ие сравнительное зн-ие отдельных лет для результата, u_t – ошибка ур-ия (помехи).

Наиболее явно выделяются лаги при анализе циклических (в том числе сезонных) явлений (работ).

Важными видами лагов яв-ся: 1) инвестиционный лаг, хркз-й время оборота прз-ых кптв-й (включая вложения в оборудование); 2) строительный лаг, хркз-й средний срок строительства прз-го объекта.

В целях упрощения во многих динамических мд-ях (см. КС) лаг принимается равным плановому интервалу – одному году. Однако это весьма далекое от адекватности допущение.

Маркетинг – система упл-ия деятельностью фирмы по разработке, прз-ву и сбыту товаров или предоставлению услуг на основе изучения рынка и реальных запросов и птб-ей покупателя.

М. представляет интерес для специалистов по причинам: во-первых, поскольку их надо знать в условиях расширения международной торговли как методы, к-ми руководствуются контрагенты; во-вторых, поскольку они могут быть полезны и при решении собственных проблем с плн-ем ассортимента товаров, воздействием на рынок птб-ей и т.д.

При иссл-и и прогнозировании рынка широко применяются экн-мт. методы, мт. стс-ка, экнч-ие экспт-ы (н-р, «пробные продажи»), изучение «жизненного цикла» изделий, социологические опросы и т.д.

Машинная имитация (или имитация на ЭВМ) – экспериментальный (экспл.) метод изучения экн-ки и др. процессов с помощью ЭВМ. Процесс имитации заключается в сд-ем: сначала строится мт. модель изучаемого объекта (см. Имитационная мд.), затем эта мд. прб-ся в прг-му работы ЭВМ. В машину вводятся нх-ые данные и ведется нбл-ие за тем, как изменяются интересующие исст-ля показатели, к-ые подвергаются анализу, в част., стсч-ой обработке.

М.И. применяется в тех случаях, когда мд. (а значит, отражаемая система, процесс) слишком сложна, чтобы можно было использовать обычные аналитические методы решения (если изучаемые процессы имеют нелин. хрк-р и еще осложнены всякого рода вер-ными хркс-ми). М.И. используется и тогда, когда реальный экнч-й эксп-т по тем или иным соображения невозможен или слишком сложен. Еще более ценна ее роль предварительного этапа, «прикидки», к-ая помогает принять решение о нх-сти и возможности проведения самого реального эксп-та.

С помощью стсч-ой имитации можно выявить, при каких сочетаниях экзогенных (выводимых) факторов достигается опт-ый результат изучаемого процесса, установить отс-ое зн. тех или иных факторов. Это полезно, н-р, при изучении различных методов и средств экн-го стимулирования на прз-ве. М.И. применяется также в прогнозировании, позволяет создавать на ЭВМ варианты развития прд-ия отрасли, н/х-ва на месяцы и даже на годы вперед. С помощью проигрывания ДМ (динамической имитации) изучают возможные последствия крупных сдвигов в структуре н/х-ва, внедрения важнейших научно-технических достижений, принятия плановых решений.

Если имитация организуется в форме диалога человека и машины, то, анализируя промежуточные результаты, можно менять те или иные управляющие параметры и тем самым – направление изучаемого процесса, улучшать его мд.

За рубежом в последнее время широко применяется имитация экнч-их процессов, в к-ых сталкиваются различные интересы типа конкуренции и на рынке. При этом управляют «проигрыванием» люди, принимающие по ходу деловой игры те или иные решения, н-р: «снизить цены», «увеличить или уменьшить выпуск продукции» и т.д., и ЭВМ показывает, у кого из «конкурирующих» сторон дело идет лучше, у кого – хуже.

Т.о., М.И. экнч-их процессов есть по существу эксп-т, но не в реальных, а в искусственных условиях. Разрабатываются методы плн-ия (имитационного) эксп-та, проверки имитационной мд-и (она распадается на валидацию (см. КС) и верификацию (см. КС)), методы анализа фк-и отклика и т.д. Для реализации имитационных мд-ей на ЭВМ используются специальные «имитационные языки», н-р, «ДИНАМО» и «СТИМУЛА».

Мегабайт – миллион байтов. Обз. Мбайт.

Межотраслевой баланс (МОБ) – каркасная мд. экн-ки, таблица, в к-ой показываются многообразные натуральные и стоимостные связи в н/х. Анализ МОБ дает комплексную хркс-у процессов формирования и использования совокупного общественного (общс.) продукта в отраслевом разрезе.

Объясним это на примере стоимостного баланса. В основу его схемы положено разделение совокупного продукта на две част (играющие различную роль в процессе общс-го воспроизводства): промежуточный и конечный продукт. Все н/х-во представлено в виде свк-ти n отраслей, при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

Принципиальна схема МОБ приведена в табл. 1 и состоит из 4-х квадрантов: I квадрант хркз-ет текущие прз-ые птбл-ие, где x_{ij} представляют собой вел-ы межотраслевых потоков продукции (i и s номера производящих и потребляющих отраслей). Во II квадранте представлена конечная продукция (потребление и накопление) всех отраслей $\{Y_i\}$ материального прз-ва, т.е. он хркз-ет отраслевую материальную структуру птбл-ия и накопления по отраслям прз-ва и птб-лям. III квадрант также хркз-ет национальный доход. но со стороны его стоимостного состава как сумму оплаты туда и чистого дохода отраслей, а также включает в себя амортизационные расходы отраслей. IV квадрант МОБ находится на пересечении столбцов II квадранта (конечной продукции) и строк III квадранта (условно чистой продукции) и отражает конечное рсп-ие и использование национального дохода, а также содержит амортизационные расходы.

Таблица 1

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	I	…	II	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	III	v_n	IVI	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Если обз-ть кол. продукции одной отрасли, нх-ой для прз-ва ед-цы продукции др. отрасли, через a_{ij} ($a_{ij} = x_{ij}/X_j$), а через x_j – объем продукции отрасли-потребителя, то межотраслевой поток продукции отраслей i и j составит $a_{ij}x_j$, где a_{ij} наз. коэф-ми прямых затрат.

Для расчета стоимостного баланса, построенного по указанной схеме, применяется экн-мт. модель, к-ая представляет собой систему лин. ур-й:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i \; (i = \overline{1, n}) \quad (1)$$

или в матричной записи

$$AX + Y = X, \quad (2)$$

где X – вектор-столбец объемов прз-ва, Y – то же конечного продукта, $A = (a_{ij})$ – матрица коэф-ов прямых затрат. Эту систему принято наз. ур-ем Леонтьева.

В ур-и (2) за неизвестное принимается или X, или Y, что зв-т от постановки задачи. Процесс ее решения связан с расчетом коэф-ов полных затрат $\{b_{ij}\}$ продукции i отрасли на ед-цу продукции j отрасли (если обз-им $B = (b_{ij})$, то ее можно найти так: $B = (E - A)^{-1}$, где E – ед. матрица, а – 1 – знак обращения матрицы. Т.е. B можно получить из (2)).

Включив их в ур. (2) и прб-уя, получим:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_i \quad (3)$$

или в матричной форме

$$X = BY, \quad (4)$$

Итак, решив ур-ие (2), можно найти Y через X, а в ур-и (4) получим решение отс-но X через Y. Если известны коэф. b_{ij}, можно делать расчеты различных вариантов планового баланса, исходя из заданного кол. конечного продукта общс-го прз-ва. Это – наиболее важная задача плн-ия. Выбор из ряда вариантов МОБ на плановый период одного «наилучшего» в принципе позволил бы оптз-ть план, однако методы оптз-и МОБ пока разработаны недостаточно.

На практике плн-ия применяется не только стсч-й стоимостный баланс, хркз-ный выше, но и динамические, натуральные, натурально-стоимостные балансы и др. виды МОБ.

МОБ баланс входит составной частью в баланс н/х-ва страны.

Неопределенность в системе – ситуация, когда отсутствует полностью или частично инф-ия о возможных состояниях системы и внешней среды, т.е. когда в системе происходят те или иные непредсказуемые события. Это неизбежный спутник больших (сложных) систем; чем сложнее система, тем большее зн-ие приобретает фактор неопределенности в ее поведении (развитии).

Неопределенность (неопр.) – фундаментальное (фунд.) понятие кбр-ки. Мера неопр-сти наз. энтропией (см. КС).

В экнч-ой системе роль фактора неопр-сти особенно возрастает в настоящее время из-за ускорения научно-технического прогресса, к-ый учесть в плн-и прз-ва невозможно из-за увеличения эластичности (подвижности) птбл-ия в связи с изменением жизни, когда промышленности приходится часто и быстро перестраивать прз-во. Кроме того, неопр-ть создается хрк-ом инф-и об экнч-их процессах: ее неизбежной неточностью, запаздыванием, искажением и т.д.

Общегосударственная автоматизированная система сбора и обработки информации (ОГАС) – система для учета, плн-ия и упл-ия н/х-ом на базе общегосударственного банка данных, где все основные органы упл-ия яв-ся и вкладчиками, и получателями инф-и.

ОГАС предназначена ств-ть наиболее рациональной иерархической структуре организации н/х-ва, обеспечивать возможность быстрого автч-го обмена инф-ей между прд-ми, объединениями, отраслевыми органами упл-ия. Для этого нх-мо предусмотреть их организационное, методологическое и техническое единство, т.е. совместимость. В част., для обеспечения инфн-го единства систем, входящих в ОГАС, создается Единая система (ЕС) классификации и кодирования, унифицирование системы документации, совершенствуются показатели и формы стс-ки.

Основу ОГАС составляет ее низовое звено – автоматизированные системы упл-ия прд-ми, стройками, объединениями.

Олигархия – политическое и экнч. господство (или правление) небольшой группы лиц, обладающих чрезвычайным влиянием в обществе (финансовым, экнч-им, политическим и др.).

Операционная система ЭВМ – набор прг-ных и технических средств, организующих автч-ое прохождение задач на машине. Она организует все мт. вычт-ое хоз-во для решения данной задачи: вовлекает в процесс выч-й прг-мы внутреннего мт-го обеспечения, согласует быстро и медленно действующие части машины.

Н-р, ОС ЕС ЭВМ включает упл-щие прг. (упл-ие задачами, данными и др.) и обрабатывающие прг-мы, к-ые делятся на два вида: трансляторы (незв-ых языков, н-р, АЛГОЛ, КОБОЛ и др., см. КС) и сервисные (т.е. обслуживающие) прг-мы (редактирование, сортировка, объединение данных, а также копирование, перемещение, печать, запись стандартных меток и пр.).

Эти прг. записываются на магнитных дисках, поэтому сокращенно пишут ДОС ЕС ЭВМ (дисковая ОС).

Оптимальное программирование состоит из экнч-их дисциплин, использующих мт-ку (опт. плн-ие, методы регулирования хоз-ной деятельности, расчета опт-ых цен и т.д.) и мтч-го пргв-ия, применяемого как в экн-ке, так и за ее пределами.

Оптимальность по Парето. Итальянский экн-ст В. Парето более полувека назад мтч-ки сформулировал один из кт-ев опт-сти, предназначенный для проверки, улучшает ли предложенное изменение в экн-ке общий уровень благосостояния.

Кт-й Парето формулируется просто: «Следует считать, что любое изменение, к-ое никому не причиняет убытков и к-ое приносит нек-ым людям пользу (по их собственной оценке), яв-ся улучшением».

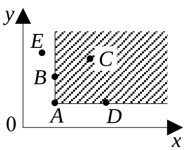


Рис. 2

О. по П. применяется при решении задач, когда оптз-ия означает улучшение одних показателей при условии, чтобы др. не ухудшались. Кт-й Парето не применим к весьма распространенным ситуациям, при к-ых экнч-ая мера, приносящая пользу одним, в то же время приносит ущерб др-м.

На рис. 2 показано точкой *A* исх. состояние системы. Улучшают его лишь те решения, к-ые приводят систему в любую точку, лежащую в заштрихованной обл-и и на ее границах (н-р, точки *B*, *C*, *D*). Решение, обз-ное точкой *E*, не уд-ет требованию Парето, т.к. значительный рост уд-ия птб-ей членов группы y здесь достигается за счет снижения благосостояния членов группы x. Ств-но, если нельзя увеличить выпуск какого-то продукта без одновременного уменьшения выпуска другого продукта – такое состояние прз-ва опт-но по Парето. С этим понятием связано важное направление иссл-й – векторная оптз-ия (см. КС).

План эксперимента – 1. Свк-сть зн-й упл-мых пер-ых (факторов) эксперимента (эксп.). Если каждый из k факторов (фкт.) имеет n зн-й, то полный факторный (фктн.) план составит n^k иссл-мых точек, образующих факторную решетку. Н-р, при $k = 7$ и $n = 2$ число точек составит $2^7 = 128$. Полные фктн. планы имитационных (имт.) эксп-ов (ради точности результатов расчет в каждой точке повторяется многократно) требует очень больших выч-й. Для их сокращения применяются различные неполные фктн. планы (н-р, планы типа латинских и греко-латинских кв-ов, ротатабельные планы и др.). Различия между ними состоят в правилах, по к-ым отбираются точки. Они строятся т.о., чтобы получить надежные результаты с меньшим числом исп-й и позволяют отсеивать менее значимые фкт., отбирая те из них, к-ые в нб-ей степени воздействуют на отклик (реакцию).

2. Порядок обхода точек плана, т.е. самого проведения эксп-та. В эксп-ах, предназначенных для отыскания опт-ых условий протекания нек-го процесса, применяются планы иссл-ия пвх-сти отклика (реакции), основанные на методе наискорейшего подъема (при мксз-и), посл-ые планы и др.

Планирование эксперимента – мт-стсч. дисциплина, изучающая методы рациональной организации (орг.) эксп-ых иссл-й, начиная от опт-го выбора иссл-мых фкт-ов и опр-ия плана эксп-та в ств-и с его целью до методов анализа результатов. Основными понятиями теории П.Э., имеющими значение для машинной имт-и (как экспл-го способа иссл-ия экн-ки), яв-ся: упл-яемый фактор (экзогенная или входная пер-я), отклик (реакция), план эксп-та, имт-ая модель и др.

Поскольку в имт-ых эксп-ах не бывает неуправляемых фкт-ов (что сущ-но искажает реальные условия, в к-ых такие фкт. неизбежны), то в имт-ую мд. вводятся слн. экзогенные пер. При этом эксп-т сводится к серии (выборке) проигрываний мд-и на ЭВМ. Плн-ие эксп-та позволяет получать достоверные результаты с нм-им кол-ом таких проигрываний, т.е. нм-ми затратами машинного времени ЭВМ.

Равновесие – такое состояние экнч-ой системы, к-ое хркз-ся равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Р. экнч-ой системы расв-ся двояко: как стсч-ое (т.е. положение равновесия) и днмч-ое (т.е. уравновешенный, или сбалансированный, процесс развития).

В экн-мт. работах Р. часто связывают с понятием опт-ма. Однако Р. при плн-и общс-го прз-ва есть нх-ое, но недт-ое условие опт-сти. Н-р, предположим, что в хоз-ве спрос на текстильные изделия полностью уд-ся ресурсами хлопка. Равновесие налицо. Но это состояние не будет опт-ым, когда есть дешевые синтетические материалы.

Понятие Р. (в более широком смысле) тесно связано с понятием устойчивости системы (см. также Гомеостаз). Состояние Р. в этом смысле хркз-ся тем, что ни один экнч-й агент не заинтересован в его изменении.

Равновесный сбалансированный рост – понятие, не имеющее пока единого опр-ия. По мнению ряда ученых, это такой рост экн-и, при к-ом темп прироста запасов всех продуктов на протяжении расв-го промежутка времени – постоянный (пст.). При этом они разграничивают понятие сбалансированного (сбл.) роста без равновесия, т.е. с избыточными запасами, и собственно равновесного роста.

Однако др. экнс-ы полагают, что важны не одинаковые темпы развития отраслей или секторов экн-ки, а внутренняя согласованность этих темпов друг с другом. В этом представлении понятия сбл-го и равновесного совпадают.

Рейдерство – криминальный предел собственности, т.е. недружественное поглощение по низким ценам по сравнению с рыночными предприятиями или имуществом (см. газету КП от 27.06.2008).

Репрезентативность информации – ее представительность. В вбрч. методе стс-ки это ств-ие хркс-к вбр-и хркс-ам гнр. свк-ти. Проще: если вбр-а репрезентативна, то по ее св-ам можно судить о гнр. свк-ти; если вбр-а произведена неправильно, то говорят об ошибке репрезентативности.

Система – множество эл-ов, находящихся в отн-иях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ную целостность, единство. Это опр. не единственное. Есть десятки опр-й понятия «система», к-ые делятся на три группы:

1. Систему расв-ют как комплекс процессов и явлений, а также связей между ними, сущ-щий объективно, незв-мо от нбл-ля. Его задача состоит в том, чтобы выделить систему от окружающей среды, т.е. как мнм. опр-ть ее входы и выходы (тогда она расв-ся как черный ящик

(см. КС)), а как мкс. – подвергнуть анализу ее структуру (произвести структуризации), выяснить механизм функционирования и, исходя из этого, воздействовать на нее в нужном направлении. Здесь система – объект иссл-ия и упл-ия.

2. Систему опр-ют как инструмент, способ иссл-ия процессов и явлений. Нблт-ль конструирует (синтезирует) систему как нек-ое абстрактное отб-ие реальных объектов, т.е. система расв-ся как модель. Говоря о синтезе системы, в таких случаях имеют в виду формирование макромодели (расв-ся снаружи), анализ же системы совпадает с микромоделированием (расв-ся изнутри) отдельных эл-ов и процессов.

3. Систему представляют как некий компромисс между двумя первыми группами. Система здесь – искусственно создаваемый комплекс эл-ов (н-р, коллективов людей, технических средств, научных теорий и т.д.), предназначенный для решения сложной оргн-ой, экнч-ой, технической задачи. Сд-но, здесь нблт-ль не только выделяет из среды систему, но и создает, синтезирует ее. Система яв-ся реальным объектом и одновременно – абстрактным отб-ем связей дсв-сти. Именно в этом смысле понимает систему системотехника.

Системный анализ – 1. Научная дисциплина, разрабатывающая общие принципы иссл-ия сложных систем с учетом их системного хрк-ра и яв-ся как бы дальнейшим развитием идей кибернетики, относящиеся так назм-ым системам, к-ые изучаются любой наукой. При изучении действующих, развивающихся систем (н-р, любой экнч-й объект) системное иссл-ие может иметь два аспекта – генетический и функциональный, т.е. изучение системы в развитии и изучение ее реального действия, функционирования.

2. Методология иссл-ия объектов посредством представления их в качестве систем и анализа этих систем. В этом смысле С.А. представляет собой весьма эффективное средство решения сложных, обычно недостаточно четко сформулированных проблем в науке, на прз-ве и в др. обл-ях. При этом любой объект расв-ся не как единое, неразделимое целое, а как система взаимосвязанных составных эл-ов, их св-в, качеств. Н-р, в экн-ке отдельные стороны, хркз-ие данный экнч-й процесс, расв-ся как эл-ты системы, изучается их взаимосвязь.

Сложная система – множество разнородных эл-ов (т.е. подсистем, описываемых разными языками), находящихся в стн-ях и связях друг с другом, к-ое образует целостность, единство. Н-р, завод можно расв-ть как С.С., состоящую из материально-вещественной, финансовой, кадровой и др-х подсистем. Первую из них описывают на языке материально-вещественных связей (потоков сырья, продукции и т.д.), вторую – на языке финансовых категорий (денежных выплат, цен и т.д.), третью – на языке социологии, учета кадров.

Можно и по-другому расчленить систему «завод» на подсистемы: цехи, службы, др. подразделения; или еще по-иному – выделив вспомогательное и основное прз-во, бытовое обслуживание работников. Возможность различного (на разных основаниях) членения системы на подсистемы яв-ся, сд-но, признаком ее сложности.

Транслятор – специальная машинная прг., к-ая переводит на ЭВМ прг-у решения задачи, записанную в обычном алгоритмическом машинно-независимом языке пргв-ия (н-р, Алгол, Кобол и т.д.) на тот язык, к-ый понятен данной машине. См. также Компилятор (КС).

Тренд – длительная («вековая») тенденция изменения экнч-их показателей. Когда строятся экн-мт. модели прогноза, тренд оказывается первой, основной составляющей прогнозируемого временного ряда, на к-ую уже накладываются др. составляющие, н-р, сезонные колебания.

Файл – массив данных.

Фобия – навязчивое состояние страха, результат психоза.

…фобия – последняя составная часть сложных слов, означающая боязнь, нетерпимость. Н-р, клаустрофобия – боязнь замкнутого пространства.

Человеко-машинная система (или система «человек-машина») – система, состоящая из людей и техники, причем все ее эл-ты – и человек, и машина – взаимно дополняют друг друга, используя, т.о., преимущества и того, и др-го. Основное преимущество человека – в его творческом разуме, умении подходить к решаемым задачам нестандартно, эвристически. Но человек уступает машине в быстродействии, способности точно выполнять однообразные выч-ия. Примеры человеко-машинных систем: рабочий и его станок, летчик и самолет, АСУ прд-ем и т.д.

«Черный ящик» – кибернетическое понятие, с помощью к-го пытаются справиться с трудностью изучения сложных систем. Представление системы в виде «Ч.Я.» означает, что при настоящем уровне наших знаний мы не можем проникнуть внутрь данной системы (или подсистемы) и разобраться, каковы внутренние закономерности, прб-щие входы в выходы. Однако мы можем изучить зв-ть изменений на выходе от изменений на входе. Стсч-й многократный учет таких изменений позволяет открыть закономерности взаимозависимости между поведением входов и выходов и предвидеть поведение системы в будущем, а также упл-ть ею.

Чистая продукция – часть валового продукта (см. КС), к-ая остается при вычитании из него материальных затрат. Т.о., под ней понимается стоимость, вновь созданная в процессе прз-ва (обычно в расчете на год). Ч.П. в МОБ (см. КС) фиксируется в III квадранте. Для отрасли она – разность между валовой продукцией и материальными затратами, включая амортизационные отчисления. Т.о., чистая продукция отрасли состоит из оплаты труда и чистого дохода (прибыли) отрасли. В сумме чистая продукция отраслей образует чистый продукт н/х-ва, т.е. национальный доход.

Шкалы – система чисел или иных эл-ов, принятых для оценки или измерения каких-либо вел-н. Ш. в кибернетике (кбр.) и общей теории систем используются для оценки и выявления связей и отн-й между эл-ми систем. Особенно широко используются Ш. в роли кт-ев качества фнцр-ия систем, в част., кт-ев опт-сти при решении экн-ст. задач.

Эвристика – в широком смысле слова раздел психологии, изучающий природу мыслительных операций человека при решении им различных задач; в узком смысле – приемы и методы поиска решения задач и выводы док-в, основанные на учете опыта решения сходных задач в прошлом, накоплении опыта, учете ошибок, а также интуиции. Н-р, шахматист действует на основании опыта и интуиции.

Изучение проблем Э. связано с более общей проблемой создания так назм-го искусственного интеллекта (иск. инт.) или мыслящих ЭВМ. Иссл-ия в этом направлении показали, во-первых, что создание иск. инт-а – задача намного более сложная, чем это представлялось на первых порах; во-вторых, позволили выработать нек-ые весьма эффективные методы решения сложных вычт-ых задач.

Один из распространенных эвристических (эврч.) методов – метод иерархически направленного перебора возможных шагов к решению, при к-ом отбрасываются заведомо ненужные варианты и сущ-но сокращается их число. Методы эврч-го пргв-ия используются при решении задач распознавания образов, автч-го поиска инф-и (в информационно-поисковых системах), для игры ЭВМ в шахматы и т.д. Разрабатываются также эврч-ие методы решения экнч-их задач. Кроме того, перспективно соединение точных алгоритмических методов с эврч-ми. В таких случаях модели наз-ют эвроритмическими, или алгоритмо-эвристическими.

Эврч-ие прг-мы не предназначены для получения точных численных решений, их главная задача – опр-ие стратегии поиска прж-ых решений. Для решения многих задач (в том числе экнч-их) особая точность и не нужна, т.к. их инф-я прж-на.

Экзогенные величины (переменные) – внешние по отн-ю к моделируемой системе (модели). Н-р, если составляется модель н/х-ва, то экзогенными факторами будут: изменения внешне-политических обязательств, задачи укрепления обороны, численность населения, климатические условия и др. Чаще всего Э.В. учитывают как ограничения модели.

Противоположный термин: эндогенные вел-ы, возникающие в пределах самой мд-мой системы. Разделение это в значительной мере произвольно.

При использовании мд-й в экнч-их расчетах вел-ы (параметры) подразделяют на экзогенные, или входные (известные, рассчитываемые вне мд-и) и эндогенные, или выходные (неизвестные, опр-мые в процессе решения экнч-ой задачи).

Экономико-математическая модель – мт. описание исслм-го экнч-го процесса или объекта. В самой общей форме мд. – условный образ объекта иссл-ия, сконструированный для упрощения (с учетом сущ-ых св-в) этого иссл-ия.

Мд-и могут быть более или менее точные, более или менее простые и сложные, материальные (н-р, автомодели, макеты городов и т.д.) и знаковые (н-р, графические, мт-ие и др.).

Важнейшим средством иссл-ия экн-ки стала экн-мт. мд. Мд. может отражать внутреннюю структуру объекта, а если она неизвестна, то лишь его поведение (см. Черный ящик).

Большое значение в экн-ке имеют оптз-ые мд. Они представляют собой системы равенств, неравенств (огр-ия) и целевой фк-и (наз-мой кт-ем опт-сти). Н-р, сформулируем и приведем мд. процесса прз-ва: найти max $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = \overline{1,m}$, $\alpha_j \le x_j \le \beta_j$, $j = \overline{1,n}$.

Экономико-математические исследования в СССР. Развитие любой науки (в том числе и экнч-ой) должно опираться на предыдущий уровень ее развития. Поэтому мы не должны забывать исторические факты и достижения советских ученых, заслуги к-ых отмечены международными премиями.

Первым достижением в развитии экн-мт. иссл-й явилась разработка советскими учеными межотраслевого баланса (МОБ) прз-ва и рсп-ия продукции в н/х-ве страны за 1923-1924 хоз-ный год. В основу методологии их иссл-ия положены мд-и воспроизводства К. Маркса. Эта работа нашла международное признание и предвосхитила развитие за рубежом метода «затрата-выпуск».

В это же время советский экн-ст Г.А. Фельдман предложил ряд мд-ей анализа и плн-ия синтетических показателей развития экн-ки. Этим самым были заложены основы теории экнч-го роста.

В работе Л.В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» (1939 г.) были впервые изложены принципы новой отрасли мт-ки, к-ая позднее получила наз-ие лин-го пргв-ия, т.е. эти были заложены основы фундаментальной для экн-ки теории опт-го рсп-ия ресурсов. Одновременно другой советский экн-ст В.В. Новожилов пришел к анч-ым выводам отс-но рсп-ия ресурсов. Он выработал понятие опт-го плана н/х-ва, в част., понятие «дифференциальных затрат н/х-ва по данному продукту».

Большой вклад в разработку экн-мт. методов внес академик В.С. Немчинов: он создал ряд новых моделей МОБ, в том числе мд. экнч-го района.

В 1965 г. академикам Л.В. Канторовичу, В.С. Немчинову и проф. В.В Новожилову за научную разработку метода лин-го пргв-ия и экнч-их мд-ей была присуждена Ленинская премия. В 1975 г. Л.В. Канторович был также удостоен Нобелевской премии.

В 1950-1960 гг. развернулась широкая работа по составлению отчетных, а затем и плн-ых МОБ н/х-ва СССР и отдельных республик. За цикл иссл-й по разработке методов анализа и плн-ия межотраслевых связей и отраслей структуры н/х-ва, построению плановых и отчетных МОБ академику А.Н. Ефимову (рук. работы), Э.Ф. Баранову, Л.Я. Бери, Э.Б. Ершову, Ф.Н. Клоцвогу, В.В. Коссову, Л.Е. Минцу, С.С. Шаталину, М.Р. Эйдельману в 1968 г. была присуждена Государственная премия СССР.

Экономико-математические методы – обобщающее наз-ие комплекса экнч-их и мтч-их научных дисциплин, введенное академиком В.С. Немчиновым. Ее можно представить в виде сд-ей схемы.

0. Принципы экн-мт. методов: теория экн-мт. мдв-ия, включая экн-стсч-ое; теория оптз-и экнч-их процессов.

1. Мтч. экономия и эконометрия: теория экнч-го роста (мд-и макроэкономической динамики), теория прз-ых фк-й, межотраслевые балансы (стсч-ие и днмч-ие), национальные счета, интегрированные материально-финансовые балансы, анализ спроса и птбл-ия, региональный и пространственный анализ, глобальное мдв-ие и др.

3. Методы принятия опт-ых решений, включая иссл-ие операций; мтч-ое пргв-ие: лин-ое, нелин-ое, дк-ое (цлч-ое), блочное, стохастическое и др.; сетевые методы плн-ия и упл-ия, программно-целевые методы плн-ия и упл-ия, теория упл-ия запасами, теория МД, теория игр, теория расписаний, теория решений и др.

4. Экн-мт. методы, специфические для централизованно планируемой экн-ки: теория опт-го фнцр-ия экн-ки, опт. плн-ие: н/х-ое – перспективное и текущее, отраслевое и региональное; теория опт-го ценообразования; экн-мт. мд-и внешней торговли, экн-мт. мд-и материально-техн. снабжения и др.

5. Экнч. кбр-ка: системный анализ экн-ки, теория экнч-ой инф-и, включая экнч. семиотику; теория АСУ.

6. Методы экспл-го изучения экнч-их явлений: методы машинной имт-и, деловые игры, методы реального экнч-го эксп-та.

Отметим, что в экн-мт. методах применяются различные разделы мт-ки, мтч-ой стс-ки, мтч-ой логики, вычт-ая мт-ка, теория алгоритмов и др. смежные дисциплины.

Энтропия – мера неопределенности системы (см. КС). Так энтропия $H(\alpha)$ опыта α исходов $\{A_i\}$ с вер-ми $p(A_i)$, вносящими неопр-сти $\{-p(A_i)\lg p(A_i)\}$ ($i = \overline{i,k}$), опр-ся по фм-е:

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{k} p(A_i)\lg p(A_i),$$

причем вместо десятичного $\lg x$ можно взять логарифм с любым основанием, н-р, $\lg_2 x$, $\ln x$ и др.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

ТУХВАТОВ Миндигали Бадрединович
профессор, доктор технических наук

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 3

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

Учебное пособие для вузов

Сдано в набор 25.12.2008 г. Подписано в печать 30.03.2009 г. Формат $60\times90^{1}/_{16}$
Бумага и печать офсетная. Гарнитура Times New Roman
Печ. листов 40. Усл. печ. л. 40. Тираж 200 экз. Заказ № 72. Цена договорная

Отпечатано в типографии ПЛ-1 г. Уфы
450001, Уфа, бульвар Х. Давлетшиной, 3