ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.Б. Тухватов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Учебное пособие для вузов

Издание второе, исправленное и дополненное

Уфа
Издательство БГАУ
2012

УДК 51 (07)
ББК 22. 1 (я7)
Т91

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Башкирского государственного аграрного университета.

Автор: **М.Б. Тухватов**

Рецензенты:
Башкирский государственный университет
Д. ф. – м. н., профессор, зав. кафедрой математического моделирования С. И. Спивак
Уфимский государственный авиационный технический университет
Д. т. н., профессор, зав. каф. автоматизированные системы управления Г. Г. Куликов

Т91 Лекции по общей математике: Ч. 2: Математические модели и методы их решения.
Учебное пособие для вузов.– Уфа: БГАУ, 2012. – 667 с. ISBN 978-5-7456-0274-0

Учебное пособие является продолжением работы автора «Лекции по общей математике» для вузов. Ч. I: Множества и их отображения. Дискретная математика.

Книга написана в соответствии с новой расширенной программой по дисциплинам (разделам) математического цикла и является комплексным учебным пособием для вузов. Автором широко использована общепринятая терминология, обозначения и сокращения часто употребляемых терминов и слов.

Данная часть книги содержит два взаимосвязанных раздела: Математические модели и методы их решения. Причем эти разделы излагаются совместно для каждой группы родственных задач. Это позволяет легко комплектовать учебный материал в соответствии с программой того или иного факультета.

Объединенные разделы разбиты на главы, а главы, в свою очередь, состоят из параграфов, в которых выделены тематически значимые пункты. Каждый параграф, соответствуя определенной теме, является единицей учебного двухчасового лекционного материала.

Все темы пособия иллюстрируются большим количеством задач и примеров, как теоретического, так и практического характера. В конце каждой главы даются контрольные задачи, которые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной формы обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать математику самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

УДК 51 (07)
ББК 22. 1 (я7)

ISBN 978-5-7456-0274-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> В математике надо искать то «жемчужное зерно», которое называется моделью.
>
> Н. Н. Моисеев

Широкое проникновение математики (мт.) в другие (др.) области науки (физика, химия, биология, медицина, генетика, социология, экономика, кибернетика, экология и т.д.) является (яв-ся) общепризнанным фактом. В настоящее время этот процесс интенсивно продолжается. При этом изучаемые процессы с достаточной точностью формализуются на языке мт-ки и описываются с помощью математических моделей (ММ-й или мт-х мд-й).

По ММ имеются много оргинальных книг, но большинство из них ориентированы на предметную область, которую они моделируют. Причем методы решения этих моделей излагаются в других книгах. При такой ситуации «моделирующему», которому требуется начинать разработать модели в какой-либо области знаний, очень трудно.

В данной книге сделана попытка объединить эти разделы и изложить их с единой точки зрения, озаглавив Математические модели и Методы их решения (МР). Причем МР сами яв-ся моделями, точнее Алгоритмами – моделями, решения ММ до получения числовых результатов той же задачи. Значит, тем более целесообразно объединить ММ и МР и изложить их совместно. Кроме того, такое объединение обоих разделов позволяет легко комплектовать учебный материал в соответствии (ств.) с программой того или иного факультета.

Далее, начинающему специалисту по моделированию (мдв.) необходима некая база исходных моделей (мд.) и их основных понятий (базовое знание), т.е. «стартовая площадка», откуда можно было уверенно оттолкнуться в определенном (опрн.) направлении в ств. своей специальности, имея опрн. навыки и опыт по мдв-ю вообще. Причем базовое знание нужно как объективная необходимость потому, что одна и та же ММ может быть использована в различных областях знаний. Например (н-р, нп.), ММ движения маятника используется как законы движения поршня внутреннего сгорания и тока в замкнутом электрическом контуре, т.е. все эти процессы описываются одной и той же мт-ой мд-ю. Тогда очень важно, представить себе, что сделано в др. областях знаний и думать нельзя ли их применить имеющиеся достижения для своей специальности. Кроме того, при создании ММ-ей изучаемого процесса часто возникает объективная необходимость исследования процессов в целом как сложные системы [25, 73, 90, 94, 113, 119], или сложные системы – человек [30, 60, 65], или кибернетические системы [54, 113], или системы с неопределенными параметрами и неполной информации [7, 26, 34, 37, 82, 84, 86, 109, 122, 123]. При таких ситуациях специалист конкретной отрасли должен иметь базовое знание по мдв-ю и по другим отраслям в целостном их представлении. В связи с этим нами приведены примеры из различных отраслей, характерные для различных ситуаций. А там, где сделать это было невозможным, мы старались словесно описать их и указать необходимую литературу для дальнейшего изучения исследуемого процесса. Базовое знание нужно и для того, чтобы как говорится, не изобретать велосипед.

Поэтому в пособии сделана попытка изложения тех вопросов, которые яв-ся общими для разных специальностей, т.е. дать базовое знание. Этим положением оправдано и название книги «Лекции по <u>общей</u> математике», введенное впервые в [107].

В связи с широким применением мт-ки в др. областях науки и на практике с использованием компьютерных систем к мт-ой подготовке специалистов предъявляются большие требования во всех областях знаний. Причем применения различных разделов мт-ки быстро меняется. Так, если вчера это было сетевое планирование и логика цифровых систем, то сегодня это применение формальных грамматик в языках программирования и диалоговое общение человека с ЭВМ, завтра это будет нечеткая (небулярная) логика – теоретическая основа системологии, распознавания образов, теории принятия решений, искусственного интеллекта и т.д. В такой ситуации мт. нужна не только как метод расчета, но и как метод мышления, как язык, как средство формирования и организации понятий, как способ проектирования ММ на основе использования диалоговых систем. Такой уровень владения мт-ой требует высокой мт. культуры, освоения фундаментальных основ мт-ки в целом, постоянного использования полученных результатов на практике.

Данная книга (кратко: лекции) в опрн-й степени учитывает эти требования и яв-ся комплексным учебным пособием для вузов. Причем содержание такого пособия должно быть шире содержания конкретной программы опрн-й дисциплины мт-ки для вузов. Поэтому книга написана в ств. с расширенной программой по опрн-м дисциплинам мт-ки и весь материал расположен по главам т. о., чтобы легко было компоновать совокупность тем ств-щих той или иной конкретной программе данной специальности. А темы, выходящие за рамки конкретной программы, можно использовать в курсах по выбору или для самостоятельной работы реферативного характера, выполняемой студентом.

Лекции представляют собой обобщение многолетнего опыта работы автора в учительской, инженерно-производственной, вузовско-преподавательской деятельности, а так же постоянной индивидуальной работы с учащимися, абитуриентами, студентами с учетом результатов анализа их ошибок и успехов.

В книге широко использованы (как и в [106,107]) необходимая символика (знаки) и сокращенная запись, которые позволяют сэкономить не менее 20% бумаги требуемой для печатания книги. А др. преимущества такого сокращения см. в [107]: стр. 8, 364.

В пособии излагаются математические модели и методы их решения (ММ и МР) совместно как один раздел мт-ки, состоящий из глав (гл.), которые разбиты на параграфы. Каждый параграф (§) (ствщ-й опрн. теме) яв-ся основной единицей учебного (двухчасового лекционного) материала. Все формулы (фм.), теоремы, опр-я и т. д. обозначаются (обз.) и имеют ссылки внутри параграфа ств-но: (2), **т1**, **о5** и т. д. Если же ссылка делается на другой параграф, то через двоеточие к ней добавляются две цифры, Н-р, **о3**:2.5

означает опр.3 из гл. 2 §5, кроме того, параграф состоит из пунктов, обз-мых через 1^0, 2^0,…, которые (к-ые) могут быть с названием или без названия. В др-х классификационных целях используются обз: 1, 2,…; 1), 2),…; а), б),… Нумерация лекций – сплошная.

В пособии большое внимание уделено прикладной стороне предмета, демонстрирующей приложения многих ММ и МР в различных областях (где это возможно) науки и техники, использованы при этом различные источники [3, 18, 22, 23, 41, 46, 51, 57, 85, 89, 107, 115 и др.].

С этой же целью все темы (лекции) сопровождаются большим количеством примеров и задач, выбранных из [2, 26, 40, 44, 45, 86, 124 и др.]. Кроме того, в конце каждой гл. даются контрольные задачи для самопроверки усвоения материала (они могут быть использованы и в качестве расчетно-графических заданий для очников или как контрольные работы для заочников), которые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

При написании пособия использованы также книги [8, 11, 13, 15, 21, 32, 38, 39, 42, 55, 61, 66, 69, 71, 72, 76, 80, 81, 97, 100, 112, 117, 126, 127 и др.] для подбора материала и компановки тем лекций.

В пособии большое внимание уделено на соразмерное использование принципов наглядности, абстракции, аналогии, обобщения и создания проблемных ситуаций. Иногда даже допускались отклонения от темы, чтобы дать возможность читателю думать о неожиданных результатах мт-ки, связанных с ММ (где это возможно), н-р, см. 1^0 : 1.1 (отличие геом. Лобачевского и Евклида).

По возможности мы уделяли также внимание на воспитательную сторону и на формирование правильного мировоззрения на предмет, н-р, с помощью подбора задач и примеров, приведения цитат и афоризмов (с указанием авторов или знака NN, если имя автора не установлена), вступительной частью по разделам и т.д.

В книге нет исторического и философского материала, кроме динамики ММ и некоторых общих понятий связанных с ММ. Причем мы максимально старались избегать от общих рассуждений при изложении материала, чтобы быстрее вводить читателя в суть дела. При этом темы, которые яв-ся фундаментальными или рабочим инструментом дальнейшего изучения – старались располагать раньше, чем остальные в пределах главы.

В список литературы включены и более специальные книги (н-р, см. [1, 14, 19, 28, 33, 36, 43, 58, 65, 68, 77, 82, 87, 88, 108, 109, 110, 116, 120, 122, 125]), не претендуя на их полноту. Конкретные ссылки на них делаются в ствщ. темах с целью дальнейшего их развития и углубления для более подготовленного читателя, интересы которого учтены во всех темах, где это было возможным.

В книге учтены и интересы начинающего читателя (в качестве первоначального чтения им рекомендуем книги [22, 37, 53, 67, 78, 89, 106]), для которого во всех темах приводятся демонстрационные примеры, а в конце книги дается краткий словарь (КС) специальных терминов. КС поможет быстрее ориентироваться в новых понятиях.

Уровень изложения материала в пособии предполагает знакомства лишь с основными элементами мт-ки, н-р, в объеме [26, 53, 86, 106, 107].

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной форм обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать мт-у самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

Отметим, что математические описания любых конкретных задач представляют собой их модели. Поэтому, когда мы говорим «Математические модели и методы их решения», то имеем ввиду решение этих задач.

Следует также отметить, что многие математические модели в той или иной степени относятся к моделям задач сельского хозяйства, поэтому их можно использовать как практическом плане, так и в плане осмысления по поднятию и развития этой отрасли. При этом иногда (когда расв-ся специфические задачи) введены сокращения слов, используемые только внутри отдельного пункта, н-р, см. 1^0 и 4^0 из 5.4.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам проф. Спивак С. И. и проф. Куликову Г. Г., а также проф. Бронштейн Е. М. за ряд предложений и замечаний, способствующих значительному улучшению содержания книги.

Автор благодарит всех лиц, принявших участие в обсуждении рукописи книги. При этом особую благодарность автор выражает проф. Дусыеву В. М., проф. Габдрафикову Ф. З., доценту Лукманову Р. Л..

Все замечания по книге просим направлять по адресу:
450001, Уфа, ул. 50 лет Октября, 34, БГАУ, каф. математики.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

> Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления.
>
> Г. Лейбниц

1^0. Список основных обозначений

$x \in A$ – элемент (эл.) x принадлежит множеству (мн.) A

$x \notin A$ ($x \overline{\in} A$) – эл. x не принадлежит мн. A

$A \subset B$ – мн. A содержится в мн. B или A есть подмн-во мн-ва B

$\{x \in A : P(x)\}$ – совокупность эл-в x мн. A, для которых выполнено P(x)

$\varnothing$ – пустое мн.

$\mathcal{B}(A) = 2^A$ – совокупность всех подмн-в мн-ва A

m(A) – мера мн. A

S – универсальное мн. (совокупность подмн-в изучаемого объекта)

$A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \backslash B$ – пересечение, объединение, разность мн-в A и B

$A \square B = A \oplus B = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$ – симметрическая разность мн-в A и B

$\bar{A} = S \backslash A$ (не A) – дополнение (замыкание, отрицание) мн. A при $A \subset S$

$A \Rightarrow B$ – знак следования: из A следует B

$A \Leftrightarrow B$ (или A~B) – знак равносильности (эквивалентности): A равн. (экв.) B

$\mathcal{N}$ – мн. всех натуральных (нтр.) чисел

$Z_0 (Z_+)$ – мн. всех неотрицательных (неотц.) целых чисел

Z – мн. всех целых чисел

Q – мн. всех рациональных (рац.) чисел

R – мн. всех действительных (дсв.) чисел, числовая прямая

R_+ – мн. всех положительных (плж.) дсв. чисел

$R_1 \times R_2 = \{(x, y) : x \in R_1, y \in R_2\}$ – декартово (дек.) произведение (пзв.), в частности, $R \times R = R^2$ – числовая плоскость (пл.)

$R^n = R \times R \times \ldots \times R = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in R,\ j = \overline{1, n}\right\}$ – n-мерное линейное (векторное) пространство (пр.), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор пр-ва R^n.

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$n^o = \dfrac{n}{|n|}$ – единочное направление вектора n

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ – модуль (абсолютная величина) числа x

$[x]$ – целая часть числа x

$\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x

$[x_1, x_2] = \{x : x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ – замкнутый промежуток (отрезок, сегмент)

$]x_1, x_2[= \{x : x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, 0 < \lambda < 1\}$ – открытый промежуток (интервал)

$[x_1, x_2[$, $]x_1, x_2]$ –полуоткрытые промежутки

$[x_1,\infty[\,,]x_1,\infty[\,,]-\infty,x_2]\,,]-\infty,x_2[$ – полубесконечные (полубеск.) промежутки, лучи числовой прямой

$]-\infty,\infty[\; = R$ – бесконечный (беск.) промежуток, числовая прямая

$\operatorname{int} A(\partial A)$ – внутренность (граница) мн. А

$\inf A(\sup A)$ –нижняя (верхняя) грань чисел, входящих в мн. $A\subset R$

$f: x\to y$ –функция (фк.) f мн-ва *x* в мн. $y: y=f(x)$, $x\in X$, $y\in У$

$\min f(x)(\max f(x))$ – наименьшее (наибольшее) значение фк. *f* на отрезке [*a,в*]

$x\in[a,в]$ $x\in[a,в]$

E^n – евклидово *n*-мерное пр.

$E_+^n=\{x=(x_1,...,x_n): x_j\ge 0, j=\overline{1,n}\}$ – неотц. октант в E^n, x_j – числа

$\{x^к\}$ – последовательность (посл.) точек (векторов) $x^к=(x_1^к,...,x_n^к)\in E^m$

$\{d^к\}$ –посл. чисел $\alpha_к$

$\{e_1,...,e_n\}$ – ортонормированные (ортонор.) векторы пр. E^n , т.е. $e_1=(1,0,...,0),...$, $e_n=(0,0,...,1)$,
тогда $x=(x_1,...,x_n)=x_1e_1+...+x_ne_n$; для $E^3: x=(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{i}+x_2\bar{j}+x_3\bar{к}$

$xy=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j=x_1y_1+...+x_ny_n$ – скалярное пзв. векторов $x,y\in E^n$

$|x|=\sqrt{xx}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_j^2}$ – евклидова норма вектора $x\in E^n$

$\cos\varphi=\frac{xy}{|x||y|}=\frac{x_1y_1+...+x_ny_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}y_j^2}}$ – угол между векторами *x* и *y*

$g(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$ – расстояние от вектора *x* до вектора *y*

$x_\xi=\{y\in E^n: g(x,y)<\xi\}$ – окрестность (окр.) точки *x*

$X_\xi=\{y\in E^n: g(X,y)<\xi\}$ – окр. мн. X

$A=[a_{ij}]=(a_{ij})(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ – матрица размерности $m\times n$

A^T – транспозиция матрицы *A*

A^{-1} – матрица, обратная к квадратной матрице *A*

$D=\det A=|A|=|a_{ij}|$ – определитель (детерминант) квадратной матрицы *A*

$A\underset{лгр}{\Rightarrow}B$ – из *A*, логарифмируя, следует *B*

$A\underset{(2)\,:\,1.3}{=}B$ – *A* равен *B* в силу соотношения (стн.) (2) из гл. 1 § 3

2°. Список основных сокращений

абс.– абсолютный
алг.– алгебраический
ариф.– арифметический
беск.– бесконечный

вел.– величина
верт.– вероятность
взр. (взр-й) – возрастает (возрастающий)
в ттом. – в том и только в том

вычт. (выч.)– вычислительный (вычисление)
геом.– геометрический
гиперпл.– гиперплоскость
гл.– глава
дв.– двойственный
дек.– декартовое
диф. (диф-ма) – дифференциал (дифференцируема)
дк.– дискретный
ДП – динамическое программирование
дпн. (дпн-ны) – дополнительный (дополнительны)
др.– другие
дсв. (дсв-но) – действительный (действительно)
Д., д-во (д-ть) – доказательство (доказать)
Д. дт. – д-во достаточности
Д. нх. – д-во необходимости
дт. (дт-но) – достаточный (достаточно)
ед.– единица
зв.– зависимый
ЗПР – задача принятия решений
изб.– изображенный
ИИс – имитационное исследование
ИМ – имитационные модели
ИМв – имитационное моделирование
имт – имитационный
инп. (инпн.) – интерполяция (интерполяционная)
инт.– интеграл
ис. ин.– искусственный интеллект
исх.– исходная
и т.д.– и так далее
кас.– касательная
кв.– квадратичная
кол.– количество
коэф.– коэффициент
кр.– контрольный
крд.– координаты
КС – краткий словарь специальных терминов
кт.– критерия
к-ый (му) – который (которому)
лгр.– логарифмический
лгч.– логический
лин. – линейный
лк.– лекция
ЛКЗ – локальный коэф. замещения
лнгв.– лингвистический
ЛП – линейное программирование
ЛПР – лицо принимающее решение
мгр.– многогранник
мд. (мдв.) – модель (моделирование)
мдм. (мд-мый) – моделируемый
МДР – множество допустимых решений
мкс. (max) – максимальный (максимум)
мксз.– максимизация, максимизирующий
мкт.– многокритериальная
ММ, мт. мд.– математические модели
ММв, мт. мдв.– математическое моделирование
мн.– множество
мнм. (min) – минимальный (минимум)
мнмз.– минимизация, минимизирующий
МП – математическое программирование
МР – методы решения, методы их решения
мт. (мт-й) – математика (математический)
мтр.– метрический
муг.– многоугольник
мчл.– многочлен
наз. (наз-мый) – называется (называемый)
нач. (нач-й) – начало (начальный)
нб.– наибольший
невзр.– невозрастающий
недиф.– недифференцируемый
недт.– недостаточный
незв.– независимый
нек-ый (го) – некоторый (некоторого)
нелин.– нелинейный
ненор.– ненормированный
неогр.– неограниченный
неодн.– неоднородный
неопр. (неопр-на) – неопределенный (неопределена)
неопт.– неоптимальный
неотц.– неотрицательный
неплж.– неположительный
непр.– непрерывный
непст.– непостоянный
нерав.– неравенство
неуб.– неубывающий
неуд.– неудовлетворительный
неуп.– неупорядоченный
нецлч.– нецелочисленный
нм.– наименьший
нор.– нормированный
НП – нелинейное программирование
нп., н-р – например
нтр.– натуральный
н/х – народное хозяйство
нх.– необходимый, необходимость
О:– ответ
обз. (обзм.) – обозначается (обозначаемая)
обл.– область
огр.– ограниченный, ограничение
одн.– однородный
ОДР – область допустимых решений
окр.– окрестность

опр., опрщ-ми (мый, щий, ль) – определение, определяющими (определяемый, определяющий, определитель)
опт. (оптз.) – оптимальный (оптимизация)
ор.– ориентированный
орграф – ор. граф
орт. (ортз.) – ортогональный (ортогонализируя)
ортонор.– ортонормированный
отб.– отображение
отн.– отношение
отс. (отс-но) – относительный (относительно)
отц.– отрицательный
Парето-опт (Par) – Парето-оптимальный (Парето)
пвх.– поверхность
пер.– переменная
Пз.– постановка задачи
пзв.– произведение
пл.– плоскость
плж.– положительный
пм.– прямая
подмн.– подмножество
подпр.– подпространство
подпрг.– подпрограмма
полупл.– полуплоскость
полупм.– полупрямая
посл. (посл-но) – последовательность (последовательно)
пр., пр-во – пространство
прб.– преобразование
прг.– программа
пргв., П (ВП, ВГП, ГП, ДП, КП, ЛП, НП, ЦП) – программирование (выпуклое П, вогнутое П, геометрическое П, динамическое П, квадратичное П, линейное П, нелинейное П, целочисленное П)
прд.– предприятие
прж.– приближенный
прз-ый(во) – производственный (производство)
прл., || – параллельный
прп., ⊥ – перпендикулярный
прц.– пропорциональный
прч-ый(на, е) – предпочтительный (предпочтительна, предпочтительнее)
пст.– постоянная
пуг.– прямоугольник
пщ.– площадь
Р.– решение
рав.– равенство
рас. (расв.) – рассмотрим (рассматриваем)
расп.– распределение
расх.– расходится
рац.– рациональный
рис.– рисунок
с.– страница
САПР – система автоматизированного проектирования
св.– свойство
сд-й – следующий
сдт., сд-но – следовательно
сж.– сложение
ск.– скалярный
см.– смотрите
см.– сантиметр (с числом)
ст. – степенной
ств., ств-но(щая) – соответствие, соответственно (соответствующая)
стн.– соотношение
сущ. (сущ-но) – существует (существенно)
сущв.– существование
сх.– сходится
с/х-ый – сельскохозяйственный
табл.– таблица
т.к.– так как
ТМ – теоретические модели
т.о.– таким образом
тожд. (тожд-но) – тождество (тождественно)
тр.– транспортный
триг.– тригонометрический
ттогда – тогда и только тогда
туг., Δ – треугольник
у.– упражнение
уб.– убывающий, убывает
уд., уд-но(щий) – удовлетворяет, удовлетворительно (удовлетворяющий)
ук.– указание
умн.– умножение
уп.– упорядоченное
упл.– управление
ур.– уравнение
утв.– утверждение
фз – формализация задачи
фк.– функция
фнц.– функциональный
фм.– формула
фунд.– фундаментальный
хоз.– хозяйство
хркс., хркз. (хрк.) – характеристика, характеризуется (характер)
цлч.– целочисленный
ЦП – целочисленное программирование
част.– частности
чуг.– четырехугольник
ч.уп.– частично упорядоченное
ЭВМ – электронная вычислительная машина

экв.– эквивалентный
экн. (экнч) – экономика (экономический)
эксл.– экстремальный
эксм.– экстремум
эксп.– эксперимент
эл.– элемент
элр.– элементарный
яв., явм.– является, являющимися
яв-хся(яся, йся) – являющихся (являющаяся, являющейся)
①, ②,…, ⓐ – обз., действующие внутри д – ва теоремы, пункта и т.д.
а2 – аксиома 2
з1 – задача 1
кз3 – контрольная задача 3
зм5 – замечание 5
л4 – лемма 4
о3 – определение 3
пз4 – постановка задачи 4
п2 – пример 2
с1 – свойство 1
сл5 – следствие 5
т2 – теорема 2
у4 – упражнение 4
§ (§§) – параграф (параграфы)
5° – пункт 5
2° : 3.1 – пункт 2 из гл. 3 § 1
(3) : 2.3 – стн. (3) из гл. 2 § 3
=> (=>) – из инт-уя (по фм. (2)) следует инт. (2)
■ – конец д-ва
! – подумай сам, почему так
!! – настоятельно рекомендуем самому провести рассуждения

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ. СИСТЕМОЛОГИЯ

> Читай не затем, чтобы противоречить и опровергать, не за тем, чтобы принимать на веру… но чтобы мыслить и рассуждать.
>
> Ф. Бэкон

ЛЕКЦИЯ 1

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТИПЫ МОДЕЛЕЙ

1^0. Что такое моделирование и модель. Теория моделей. Под моделированием (мдв.) будем понимать исследование объектов (оргиналов) познания не непосредственно, а косвенным путем, при помощи анализа некоторых (нек-ых) других (др.) вспомогательных объектов. Такие вспомогательные объекты называются (наз.) моделями.

Термин «модель» широко распространен как в научном, так и в общеупотребительном языке, причем в разных ситуациях в него вкладывается различный смысл. Н-р, глобус – модель (мд.) земного шара, фотография – мд. изображенного на ней объекта, геогр. карта – мд. местности, автомобиль (выставленный на выставке) – мд., по которой (к-ой) в дальнейшем начнется массовое изготовление автомобилей. В производстве мд-ю часто наз-ют изделие, изготовленное из удобных материалов типа дерева, глины, воска, гипса и т.д., на основе к-го в дальнейшем снимается форма для воспроизведения в другом материале. Художник наз-ет мд-ю человека, с к-го он пишет картину. В естественных науках мд-ми наз-ют нек-ые вспомогательные объекты исследования, применяющиеся для анализа (познания) исходных основных объектов. Понятия мдв. и мд. см. также в КС.

Формальное опр. модели, как правило, строится на теоретико-множественном языке:

о1. Система $S \subset X \times У$ наз. математической моделью (ММ), если задано семейство задач $Д_x$, $x \in X$ со мн-ом решений $У$; для любого элемента (эл.) $x \in X$ и $y \in У$ пара (x, y) принадлежит системе S в том и только в том (в ттом) случае, если существует (сущ.) эл. $y \in У$, который (к-ый) яв-ся решением задачи $Д_x$.

Т.о. ММ есть приближенное (прж.) описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью мт-ой символики (н-р, в виде мт-их формул (фм.) или выражений). ММ – мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления (упл.). Анализ ММ позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. Приведем примеры разнообразных ММ.

Важнейшим приложением алг-ы предикатов [107] яв-ся теория моделей [35, 48, 87] (один из разделов мт-ой логики, изучающий мт-ие мд.), в к-ой под моделью понимается произвольное мн. с заданным на нем набором св-в и отн-й, а именно:

о2. Моделью M наз. любое мн. ψ с заданным на нем предикатами $p_1^{(\kappa_1)}, p_2^{(\kappa_2)}, ..., p_n^{(\kappa_n)}$:

$$M =< \psi; p_1^{(\kappa_1)}, ..., p_n^{(\kappa_n)} > .$$

Мн. ψ наз. основным мн-ом модели M, предикаты $p_1^{(\kappa_1)}, ..., p_n^{(\kappa_n)}$ – основными предикатами мд. M, а их набор $\Omega = < p_1^{(\kappa_1)}, ..., p_n^{(\kappa_n)} >$ наз. сигнатурой мд. M. Нтр-ые числа $\kappa_1, ..., \kappa_n$ обз-ют арности ств-их предикатов, а их набор $T =< \kappa_1, ..., \kappa_n >$ наз. типом модели. Понятие сигнатуры (а также инерции закон) см. в КС.

Для общности моделью будем считать также пустое мн. $\varnothing$ с системой 0-арных предикатов, т.е. истинных или ложных высказываний.

п1. Пусть N – мн. нтр. чисел. $E, S, П$ – определенные (опр-ные) на мн. N предикаты равенства, сложения (сж.) и умножения (умн.) соответственно (ств-но). Тогда модель $M =<N; E, S, П>$ яв-ся ариф-ой нтр-ых чисел. *Ее* сигнатура $\Omega = < E, S, П>$ и тип $T =<2,3,3>$.

п2. N – мн. нтр. чисел Q – предикат порядка, опр-ный на мн. N, тогда мд. $M =<N, Q>$ яв-ся упорядоченным (уп.) мн-ом нтр-ых чисел. Ее сигнатура $\Omega = <Q>$ и тип $T =<2>$, н-р, 7<9.

п3. R – мн. рац. чисел. $E, S, П$ – опрн. на R предикаты равенства, сж-ия, умн-ия ств-но. Тогда мд. $M =<R; E, S, П>$ яв-ся ариф-ой рац-ых чисел, $\Omega = <E, S, П>$ – ее сигнатура, а $T =<2,3,3>$ ее тип.

о3. Пусть задана мд. $M =< \psi; p_1^{(\kappa_1)}, ..., p_n^{(\kappa_n)} >$. Мд. $M' =<\psi'; p_1^{(\kappa_1)}, ..., p_n^{(\kappa_n)} >$ наз. подмоделью модели M (т.е. $M' \subset M$), а модель M – расширением модели M', если $\psi' \subset \psi$ и если значение истинности всякого предиката $p_i^{(\kappa_i)}$ для всякого эл. $(a_1, ..., a_{\kappa_i}) \in M'^{(\kappa_i)}$, т.е. значение истинности всказывания $p_i^{(\kappa_i)}(a_1, ..., a_{\kappa_i})$ совпадает со значением истинности этого предиката для системы $(a_1, ..., a_{\kappa_i})$, расв-ый как эл. мн. $M'^{(\kappa_i)}$.

п4. Мд. $M =<N; E; S; П>$ (см. п1) яв-ся подмоделью модели $M =<R; E; S; П>$.

Рас-ные вопросы более подробно см. в [35, 107].

Модель М, опр-ная в о2 и о3, наз. теоритической моделью (ТМ), в отличие от ММ. Основным формальным языком ТМ яв-ся язык 1-го порядка исчисления предикатов. Приведем др-ое более общее опр. ТМ [63].

о4. Модель – интерпретация формального языка. Основным формальным языком яв-ся язык L_Ω 1-го порядка (или 1-ой ступени) данной сигнатуры Ω, включающей предикатные символы $p_i, i \in I$, функциональные символы $f_j, j \in J$, и константы $c_\kappa, \kappa \in K$. Мд. языка L_Ω есть алг. система сигнатуры Ω.

Пусть Σ – нек-ое мн. замкнутых фм-л языка L_Ω. Мд. для Σ есть мд. языка L_Ω, в к-ой истинны все фм-ы из Σ. Мн. Σ наз. совместным, если оно имеет хотя бы одну мд. Класс всех мд-й для Σ обз-ся *Mod* Σ. Совместность мн-ва Σ означает, что $Mod\ \Sigma \neq \phi$. Класс *К* мд-й языка L_Ω наз. аксиоматизируемым, если сущ. такое мн. Σ замкнутых фм-л языка L_Ω, что $K = Mod\Sigma$. Мн-во *Т(К)* всех замкнутых формул языка L_Ω, истинных в каждой моделе из данного класса *К* мд-й языка L_Ω, наз. элементарной (элр.) теорией класса *К*. Т. о. класс *К* мд-й языка L_Ω аксиоматизируем тогда и только тогда (ттогда), когда *К = Mod T(K)*.

Наряду с мд-ми языка 1-го порядка рассматривают (расв.) также модели др-их типов (логики с бесконечными (беск.) фм-ми многосортной логики, логики 2-го порядка, многозначной логики, интуиционистской логики и модальной логики).

Из этих двух опр-ий (**о2** и **о4**) следует, что читатель должен избегать двух крайних представлений – для понимания ТМ слишком сложно или слишком просто. При достаточном желании можно понять и успешно использовать эти модели в своей деятельности. Сложность ТМ-ей зависит от их сигнатуры (см. КС), языка (для этого необходимо предварительно изучать нужные вышеперечисленные логики) и иметь опр-ый опыт интерпретации этих языков. В качестве примера дальше остановимся на интерпретации языка $1^{\underline{й}}$ ступени (исчисление предикатов) в связи с геом. Лобачевского.

Начало теории моделей относится к 30-м гг. 20 в., когда были доказаны следующие (сд.) две основные теоремы.

т1 (Гёделя-Мальцева). Если каждая конечная подсовокупность совокупности Т высказываний языка 1-й ступени совместима, то совместна и вся совокупность Т.

т2 (Лёвенхейма-Сколема-Мальцева). Если совокупность высказываний языка 1-й ступени сигнатуры Ω имеет беск-ую мд., то она имеет мд. любой беск-ой мощности, не меньшей мощности сигнатуры Ω (понятие мощности см. в [107]).

Отметим, что **т1**, называемая (назм.) теоремой компактности, получила широкое применение в алгебре, на основе к-ой А. И. Мальцев создал метод д-ва локальных теорем алгебры.

Основными задачами теории мд-й яв-ся изучение выразительной возможности формализованного языка и изучение классов структур, определяемых средствами этого языка.

В изучении классов мд-й выясняют число различных с точностью до изомофизма теории мд-й в расв-ой мощности и наличие специальных мд-й, н-р, простых, минимальных, насыщенных, однородных, универсальных, конструктивизируемых и т.п., и создают способы их построения.

Классич. примером применения методов теории мд-й в мт-ом анализе яв-ся работы А. Робинсона, сформировавшиеся в самостоятельную науку – нестандартный анализ; благодаря работам А. И. Мальцева и его школы развивается применение методов теории мд-й в топологич. алгебре; новейшие результаты о св-вах стабильных теорий находят использование при изучении конкретных алг-их вопросов.

Перечисленные выше проблемы встают и при изучении различных неэлементарных языков, н-р, получаемых добавлением новых кванторов, введением в рас-ие беск-ых выражений, модальностей и т.п.

Инерпретации – модели впервые были использованы в явном виде в мт-ке при д-ве непротиворечивости геом. Лобачевского [63,75]. Великий русский мт. Н. И. Лобачевский (1792–1856) в 1826 г. пятый постулат геом. Евклида «Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную» заменил его отрицанием «Через точку вне прямой на плоскости проходят две прямые, не пересекающую данную» (см. рис.1) и хотел обнаружить противоречие в системе следствий так измененной системы Евклида. Однако, развив свою систему до объема «Начал», Лобачевский не обнаружил в ней противоречий и на этом основании сделал замечательный вывод о сущв-и геометрии (назм. геом-ей Лобачевского), отличной от геом. Евклида, в к-ой пятый постулат не имеет места.

В евклидовой геом. через точку P (рис.1) проходит только одна прямая B`B, не пересекающая A'A, Прямая B'B наз. параллелью к A'A. В геом. Лобачевского через точку P (рис.1) проходят две прямые T'T и U'U, непересекающие A'A. Непересекающие прямые заполняют часть пучка с вершиной P, лежащую внутри пары вертикальных углов TPU и U'P'T' расположенных симметрично перпендикуляра (прп. $\perp$) PQ. Прямые, образующие стороны вертикальных углов, отделяют пересекающие прямые от непересекающих и сами яв-ся тоже непересекающими. Эти граничные прямые наз. параллелями в точке P к прямой A'A ств-но в двух ее направлениях: T'T параллельно (прл., $||$) A'A в направлении A'A, а U'U $||$ A'A в направлении AA'. Остальные непересекающие прямые наз. расходящимися прямыми с A`A.

Угол $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, к-ый прл-ю, в точке P образует с прп-ом $PQ, \angle QPT=\angle QPU'=\alpha,$ наз. углом прл-сти отрезка PQ = a и обз-ся через α=П(a). При $a=0$ угол $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; при увеличении a угол α уменьшается так, что для каждого заданного α, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, сущ, опр-ное значение a. Эта зв-сть наз. фк-ей Лобачевского

$$\Pi(a)=2arctg\left(e^{-\frac{a}{k}}\right), \tag{1}$$

где к – нек-ая константа, опр-щая фиксированный по вел-е отрезок. Она получила наз-ие радиуса кривизны пр-ва Лобачевского. Подобно сферич-ой геом. сущ. беск. мн-во пр-в Лобачевского, различающихся вел-ой к.

Евклидова геом. может быть получена как предельный случай геом. Лобачевского, когда обе параллели, проходящие через Р, сливаются в одну. Тогда угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при любом а. Это уславие экв-но требованию к=∞, к-ое можно получить и из. (1)

В геом. Лобачевского можно вывести триг. стн-ия на плоскости (пл.). Н-р, фм-у для площади (пщ.) σ треугольника (туг.) ABC:

$$\sigma = k^2\left(\pi - A - B - C\right),$$

для длины окружности:

$$l = 2\pi k sh\frac{r}{k}\cdot$$

Триг. фм-ы геом. Лобачевского могут быть получены из фм-л сферич-ой геом. заменой радиуса R на мнимое число ki.

В первые (1862 г.) модель (интерпретация) геом. Лобачевского была предложена Э. Бельтрами (1835–1900). Он доказал, что на пвх-ти пст-ой отц. кривизны имеет место плоская геом. Лобачевского, если прямые Лобачевского мыслить себе как геодезические линии, а движение понимать в смысле изометрического наложения пвх-ти на себя.

Этот результат был воспринят как д-во непротиворечивости геом. Лобачевского. Действительно (дсв-но), противоречию в геом. Лобачевского ств-ло бы в указанной интерпретации противоречие в теории пвх-ей евклидова пр-ва, т. е. противоречие в евклидовой геом.

Однако интерпретация Бельтрами моделирует лишь часть пл-ти Лобачевского. Первая интерпретация всей пл-ти Лобачевского была предложена Клейном (1849–1925), где прямые линии пр-ва Лобачевского реализуются хордами абсолюта (без концевых точек), а расстояния и углы выражаются с помощью двойных отн-й четверок точек (концы M, N отрезка (рис. 2) и концевые точки $\widetilde{U}$, $\tilde{T}$ хорды, на к-ой лежит отрезок) и ств-щих четверок прямых (стороны угла и проходящие через вершину касательные (мнимые) к абсолюту). Паралели через точку P к прямым MN реализуются пм-ми $P\tilde{T}$ и $P\widetilde{U}$, пересекающими пм-ю MN в точках на абсолюте. Точки абсолюта моделируют «беск-но удаленные точки», не являющиеся точками пл-ти Лобачевского.

Пуанкаре (1854–1912) предложил (1882) модель (рис. 3), где пл. Лобачевского реализуется внутренностью круга, прямые – внутренними частями окружностей, пересекающих основной круг ортогонально.

Введение тех или иных координат (крд.) позволяет получить различные аналитич. модели пл-ти Лобачевского. В 1887 г. А. Пуанкаре была предложена модель геом. Лобачевского как геом-и плоских диаметральных сечений на одной из пл-ей двуполостного гиперболоида. Указанные модели обобщаются на случай n-мерного пр-ва.

Д-во непротиворечивости геом. Лобачевского было вместе с тем д-ом незв-ти пятого постулата от остальных постулатов и аксиом Евклида. Дсв-но, если бы пятый постулат был следствием остальных постулатов и аксиом, то геом. Лобачевского была бы противоречива, т. к. содержала бы два взаимно исключающих утверждения – постулат Лобачевского и пятый постулат Евклида.

Отметим, что к выводу о сущв. новой геом. пришел также К. Гаусс (1777–1855), о чем свидетельствует его высказывания в письмах к современникам. Независимо от Н. И. Лобачевского к этому открытию пришел (1832) венгерский мт. Я. Больяй (1802–1860).

Геом. Лобачевского явилось стимулом работы по исследованию аксиоматики евклидовой геом., к-ая была завершена (1899) Д. Гильбергом (1862–1943). Первым приложением геом. Лобачевского явилось обоснование практической точности евклидовой геом. Н. И. Лобачевский применял свою геом. в мт. анализе. Переходя от одной системы крд. к другой в своем пр-ве, он нашел значения около 200 различных опрн. интегралов. А. Пуанкаре успешно применял геом. Лобачевского при разработке теории автоморфных фк-й. Значение геом. Лобачевского для космологии было выявлено А. А. Фридманом. В 1922 г. он нашел решение ур-ия Эйнштейна, из к-го следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Это заключение в последствии было подтверждено (1929) наблюдениями Э. Хаббла, обнаружившего разбегание удаленных туманностей. Метрика, найденная А. А. Фридманом, дает при фиксированном времени пр-во Лобачевского. Пр-во скоростей теории относительности яв-ся пр-ом Лобачевского. Геом. Лобачевского успехом используется при изучении столкновений элр-ых частиц и при разработке др. вопросов ядерных исследований. Зрительное (перцептивное) восприятие близких областей (обл.) пр-ва человеком порождает эффект обратной перспективы, объясняемый тем, что геом. этих областей перцептивного пр-ва близка к геом. Лобачевского с радиусом кривизны около 15 м. Создание геом. Лобачевского явилось важным этапом в развитии учения о возможных свойствах пр-ва. Особенное значение это имело для оснований мт-ки.

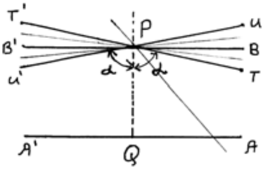


Рис. 1

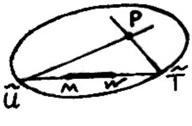


Рис. 2

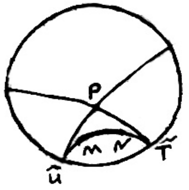


Рис.3

2^0. Основные типы моделей и возможности моделирования по отраслям. Модели можно классифицировать на основе различных характеристик (хркс.): по сферам приложения, по глубине (конструктивности, степени сложности), по характеру (хрк.) (средствам мдв-ия) моделей и т.д. Первый и второй тип моделей рас-им по ходу изложения материала. По хрк-у модели подразделяют на две основные группы: материальное (предметное) и идеальное (символическое).

Материальные модели воспроизводят основные геом., физические, динамические и функциональные хркс-ки изучаемого объекта (оргинала); н-р, автомодели, макеты городов и т.д. Частным случаем предметного мдв-ия яв-ся физическое мдв., при к-ом оригинал и модель имеют одну и ту же физическую природу, нп., в аэродинамической трубе с помощью «продувания» модели летательного аппарата воздухом в различных режимах и в измерении различных хркс-ик: сил, устойчивости, управляемости, нагревания и т.д., возникающих при обтекании модели, используются затем для подсчета хркс-ик летательного аппарата на основе теории подобия.

Другим частным случаем материального мдв. яв-ся аналоговое мдв., основанное на аналогии явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми мт. ур-ми, нп., изучение механических колебаний с помощью электрической системы, описываемой теми же диф. ур-ми.

Исследование идеальных моделей яв-ся одной из основных задач теоретического мышления. Более того, развитие любой науки можно практиковать в весьма общем, но вполне разумном смысле как теоретическое моделирование (ТМв). Причем умение строить идеальные (особенно математические – частные случаи идеальных) модели, достаточно (дт-но) точно описывающие свойства изучаемых объектов, служит признаком зрелости науки. Идеальные модели разбиваются на два подкласса: интуитивные и знаковые.

Интуитивные модели часто встречаются в тех областях науки, где познавательный процесс находится еще на начальной стадии. Н-р, в физике, несмотря на всю ее строгость, в областях, находящихся на границе возможной формализации, с успехом применяются исследования на основе интуитивных моделей. Такие модели принято наз-ть «мысленными экспериментами».

При знаковом (формализованном) мдв-нии моделями служат знаковые образования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, фм-лы, и т.д. Важнейшим видом знакового мдв. яв-ся математическое моделирование (ММв), осуществляемое средствами языка мт-ки и логики, н-р, системы алг-их и диф-ых ур-й.

Мт-ие модели могут быть аналитическими или имитационными (имт). При использовании аналитических моделей процесса функционирования эл-ов сложной системы (это понятие уточним в дальнейшем) записываются в виде нек-ых функциональных стн-й (алг-их, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий.

При использовании имитационных моделей (ИМ), в отличие от аналитических, в ЭВМ воспроизводится текущее функционирование системы в нек-ом масштабе времени, т.е. система изучается экспериментально на ЭВМ. Процесс имитации заключается в сд-ем: сначала строится ММ изучаемого объекта, затем эта модель преобразуется в программу (прг.) работы ЭВМ. В машину вводятся необходимые данные и ведется наблюдение за тем, как изменяются интересующие исследователя показатели: они подвергаются анализу, в частности статистической обработке. Имитация применяется в тех случаях, когда ММ (сд-но изучаемый объект-система) слишком сложная, н-р, если изучаемые процессы имеют нелинейный хрк-р и еще осложнены разного рода вероятностными (верт) хркс-ми, то их решить аналитически невозможно. Имитация используется и в качестве предварительного этапа, «прикидки», к-ая помогает принять решение о необходимости и возможности проведения самого реального эксперимента. К ИМ вернемся в 6.3.

С помощью статической имитации можно выявить при каких сочетаниях экзогенных (вводимых) факторов достигается опт-ый результат изучаемого процесса, установить отс-ое значение тех или иных факторов. Это полезно, н-р, при изучении различных методов и средств экономического (экнч.) стимулирования на производстве (прз.) Машинная имитация применяется также в прогнозировании, н-р, воспроизвести на ЭВМ развитие предприятия, отрасль н/х-ва на месяцы и даже на годы вперед.

С помощью динамической имитации (проигрывания динамических моделей) изучают возможные последствия крупных сдвигов в структуре н/х-ва, внедрения важнейших научно-технических достижений, принятия плановых решений.

Если имитация организуется в форме диалога человека и машины, то у экспериментатора появляется возможность, анализируя на ходу промежуточные результаты, менять те или иные управляющие параметры и тем самым – направление изучаемого процесса.

Имитация используется также в деловых играх, в которых сталкиваются различные интересы типа конкуренции на рынке. При этом управляют «проигрыванием» люди, принимающие по ходу деловой игры те или иные решения, н-р: «снизить цены», «увеличить или уменьшить выпуск продукции» и т.д. и ЭВМ показывает, у кого из «конкурирующих» сторон дело идет лучше, у кого – хуже.

Задачи, цели и возможности ММв в каждой отдельной отрасли опр-ся конкретными условиями. Н-р, для химической промышленности опр-ны сд. возможности мт. мдв-ия: предсказание влияния изменений рабочих условий, технологической схемы и производительности; быстрый расчет материального и теплового балансов, что нх-мо как для проектирования, так и для изучения ежемесячного выпуска продукции на действующем прз-ве; быстрая и надежная оптимизация режима эксплуатации; обнаружение и ликвидация узких мест; получение обширной информации о поведении всей системы; улучшение или создание новой системы автоматического регулирования при разработке системы упл-ия с использованием ЭВМ; расчет стоимостных показателей упл-ия и планирования.

При анализе электронных схем ММ включает зависимости параметров эл-ов схемы и законов их распределения от условий эксплуатации (температуры, давления и т.д.) в пределах технологического допуска. Наличие такой информации об эл-ах схемы позволяет имитировать ее испытания на модели при различных сочетаниях воздействий, изменений питающих напряжений и отклонений параметров элементов вследствие их технологического разброса. Затем проводятся мт. обработка этих многократных испытаний и делается вывод о качестве (пригодности и пр.) электронной схемы.

Метод ММв играет важную роль при решение задач связанных с автоматизацией управления (упл.). Результаты мдв-ия позволяют вскрыть закономерности процесса, опр-ть потоки упл-щей информации и обоснованно выбрать алгоритм упл-ия. Методом статистического мдв. может быть оценена эффективность различных принципов упл-ия, вариантов построения упл-щих систем, а также работоспособность и надежность упл-щей аппаратуры. Выделив информацию, доступную для упл-ия, можно перейти к рас-ию возможностей структуры системы упл-ия. Одним из возникающих при этом вопросов яв-ся оценка опт-ой централизации (децентрализации) упл-ия.

Мт-ую мд. можно использовать в качестве средства осмысления дсв-ти, что позволяет исследовать всевозможные варианты аппаратурного оформления технического процесса, изучить его основные св. в допустимых и аварийных условиях. При этом в рамках используемой модели всегда гарантируется отыскание опт-ых решений, если они требуются.

Важную роль играет ММ как средство общения. Преимущество модели перед словесными описаниями – в сжатости и точности представления заданной ситуации. Модель делает более понятной общую структуру исследуемого объекта и вскрывает важные причинно-следственные связи.

Мт-ую мд. можно использовать в качестве средства обучения и тренажа в сфере образования и профессиональной подготовки. При разработке и использовании модели экспериментатор видит и «разыгрывает» на ней реальные процессы и ситуации. Это помогает ему понять поставленную задачу, что стимулирует процесс самообучения.

На этапе проектирования важнейшее значение имеет использование ММ в качестве инструмента для анализа, оптз-и и прогнозирования поведения моделируемых объектов. А с помощью ЭВМ можно анализировать на стадии проектирования как внешнее, так и внутренние причины возникновения аварийных ситуаций. В ходе проектирования часто приходится решать одну из двух опт-ых задач: опр-ие опт-ых параметров заданного объекта или опр. опт-го варианта системы произвольной структуры.

Т.о. ММв позволяет решать (или облегчает решение) сложные задачи практики, и тем эффективнее, чем сложнее эти задачи.

3^0. Основные этапы моделирования. Примеры – экстримальные задачи. Поскольку модель отображает (воспроизводит, моделирует) оригинал, то такое отображение может быть точным или приближенным (прж.).

Модель наз. изоморфной (одинаковой по форме), если между нею и оригиналом (реальной системой) наблюдается полное поэлементное соответствие (ств.). Такое ств. имеется между негативом и полученным с него изображением, чертежом и изготовленной по нему деталью, между процессами в реальной системе и ур-ем, описывающим поведение этой системы. Однако во многих случаях изоморфные модели оказываются сложными и неудобными для практического использования, поэтому более удобны модели, которые позволяют судить только о существенных аспектах поведения реальных систем без их детализации. Примером такой модели яв-ся геогр. карта по отношению (отн.) к изображенному на ней участку земной поверхности.

Модели, отдельные эл-ты к-ых ств-ют лишь крупным частям реальной системы, а полное поэлементное соотношение (стн.) между моделью и системой отсутствует, наз. гомоморфными.

ММ могут быть (как и др. модели) как изоморфными, так и гомоморфными. Причем применяя различные способы, можно получить мн-во моделей изоморфных или гомоморфных исследуемому объекту при одинаковых этапах моделирования.

Математическое моделирование (ММв) состоит из следующих (сд.) этапов:

1. Постановка задачи. Технолог (специалист данного процесса или системы, т.е. оригинала) сформулирует общую задачу словесно с указанием желаемой цели или желаемого результата и дальнейшее изучение объекта (оригинала) поручает математику.

2. Разработка математической модели (ММ). Вводятся необходимые параметры и пер-ые, дается мт-ое описание задачи и сформулируется ММ изучаемого объекта. Если изучаемый объект простой или упрощается с помощью нек-ых преобразований (прб.), то можно использовать и известные (разработанные) ММ.

3. Выбор или разработка метода решения (МР). Если ММ достаточна (дт-на) простая, то она решается, выбирая подходящий метод из совокупности известных методов. Если же ММ сложная и не сущ. подходящий метод, то разрабатывается новый метод, т.е. алгоритм – модель и решается ММ до получения числового результата.

4. Проверка адекватности ММ и оригинала. Если ММ адекватна оригиналу, то переходим к 5-му этапу. Если нет, то корректируем задачу, уточняем ММ и переходим к 2-му этапу.

5. Печатание результатов счета и останов ЭВМ. Выдаем технологу результаты счета и рекомендации по изучаемому объекту.

Демонстрируем выше сказанное на простом примере получения опт-го размера консервной банки, указывая этапы мдв-ия.

п1а. 1. По заданной поверхности (пвх.) найти размеры консервной банки наибольшего (нб.) объема.

Р. 2. Введем параметры и пер-ые: S – данная пвх-ть, V – требуемый объем, R – радиус, H – высота банки.

Тогда $S = \pi R^2 \cdot 2 + 2\pi R \cdot H = 2\pi R^2 + 2\pi RH, V = \pi R^2 H.$

Откуда $H = \dfrac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \dfrac{S}{2\pi R} - R$ и $V = \pi R^2 \left(\dfrac{S}{2\pi R} - R\right) = \dfrac{S}{2} R - \pi R^3.$

Итак, ММ свелась к задаче: найти max V=$\dfrac{S}{2} R - \pi R^3$.

3. Чтобы найти мах V, находим производную V′ по R и приравняем ее к нулю, т.е. V′=$\dfrac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0$. Отсюда $R = \pm\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$, т.е. $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$, ибо R отц-ым быть не может. Тогда $H = \dfrac{S - 2\pi \cdot \dfrac{S}{6\pi}}{\dfrac{2\pi\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}} = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Сдт. $V = \dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

4. Для проверки адекватности ММ и оргинала установим, что найдено мах V: находим $V'' = -6\pi R.$ Т.к. $V''(R) < 0$, то найденное $V = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ яв-ся нб-им. Переходим к 5-му этапу.

5. Печатаем $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $H = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ и $V = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Рекомендация: при данном S получим V = $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ нб-им, если R и H выберем с указанными значениями.

п2а. 1. Постановка задачи. Из всех прямоугольников (пуг.) данной площади (пщ.) S найти тот, к-ый имеет наименьший (нм.) периметр.

Р. 2. Выбор ММ. Обз-им основание пуг-ка через x, тогда боковая сторона будет $\frac{S}{x}$, а периметр пуг-ка $P = 2x + \frac{2S}{x}$.

3. Выбор МР. Чтобы найти min P, находим $P' = 2 - \frac{2S}{x^2}$, $2 - \frac{2S}{x^2} = 0$, $x^2 = S$, $x = \sqrt{S}$ (корень $x = -\sqrt{S}$ лишен смысла).

4. Проверка адекватности ММ и оргинала: находим $P'' = \frac{4S}{x^3}$, $P''\left(\sqrt{S}\right) = \frac{4}{\sqrt{S}}$ >0, значит, имеет min P при x = $\sqrt{S}$. Найдем боковую сторону $\frac{S}{x} = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$, тогда $P = 4\sqrt{S}$, т.е. искомый пуг-к яв-ся квадратом.

5. Печатание результатов: $x = \sqrt{S}$, $P = 4\sqrt{S}$.

п3а. 1. В шар диаметра D вписан цилиндр нб-го объема. Найти стн-ие размеров этого цилиндра.

Р. 2. Введем параметры и пер-ые: объем цилиндра $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ от двух пер. d (диаметр основания) и h (высота). При этом $d^2 = D^2 - h^2$ (рис. 4). Сд-но, $V = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - h^2\right)h = \frac{\pi}{4}\left(D^2 h - h^3\right)$. Т.о. ММ свелась к задаче: найти max $V = f(h)$.

3. Тогда, $V' = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - 3h^2\right)$. Полагая, $V' = 0$, находим: $D^2 - 3h^2 = 0$, $h = \frac{D}{\sqrt{3}}$. В этой точке возможен экстремум (эксм.).

4. Применим второе правило для нахождения эксм-а: $V''=-\frac{3\pi}{2}h$, т.е. $V''<0$ при любом допустимом значении h, значит, в точке $h=\frac{D}{\sqrt{3}}$ фк. $V=f\left(h\right)$ имеет мкс. Найдем диаметр $d=\sqrt{D^2-h^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}D.$ При этом $V=\frac{1}{4}\pi d^2h=\frac{\pi D^3}{6\sqrt{3}}.$

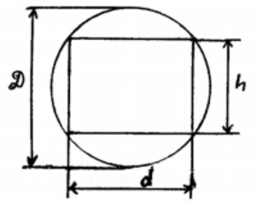


Рис. 4

Найдем отн-ие диаметра цилиндра к его высоте: $d:h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}D:\frac{D}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}:1.$

5. Печатаем: размеры цилиндра нб-го объема $V=\frac{\pi D^3}{6\sqrt{3}},$ вписанного в данный шар диаметра $D,$ находятся в стн. $d:h=\sqrt{2}:1.$

зм1. В зависимости (зв.) от сложности исследуемых систем выше приведенные основные этапы мдв. может расширяться, уточняться, добавляться новыми этапами и группироваться в части. Н-р, типовая схема этапов создания ММв-ия основных режимов производственных (прз.) систем состоит из двух частей.

К первой части относятся этапы создания модели: 1) постановка задачи; 2) декомпозиция системы; 3) мдв-ие эл-ов; 4) мдв-ие подсистем; 5) разработка общего моделирующего алгоритма; 6) испытание модели системы.

Вторая часть комплекса связана с планированием: 7) составление плана работ с моделью; 8) составление рабочих гипотез и планирование экспериментов (эксп.) по их проверке; 9) планирование оптз-ых эксп-ов.

Первая часть составляет по трудоемкости 80–90% всего комплекса работ. Поэтому для ускорения процесса мдв-ия желательно к моменту получения задания уже иметь готовые блоки – программы мдв-ия, пригодные для использования в различных моделях.

Опыт мдв-ия современных сложных технологических систем показывает, что это трудоемкий (технически и организационно) и многоэтапный процесс, длительность которого колеблется в зависимости от типа системы и различных обстоятельств от 2 до 15 лет. Более подробно об изложенных вопросах см. в [85].

4°. Причины изучения оригинала через их модели. При изучении любой науки привлекаются ММ. Для этого есть ряд причин:

Во-первых, модель проще, чем сам объект (оргинал) и отсюда практическая выгода.

Во-вторых, объект невозможно непосредственно изучать, н-р, земной шар можно изучать, представить только через модели – глобуса.

В-третьих, изучение оргинала, через его модели (мд.), т.е. через моделирование (мдв.) яв-ся методом познания объекта, позволяющим выявить сущ. факторы.

Мдв-ие как познавательный прием, как форма отражения действительности (дсв.), зародилось еще в античную эпоху одновременно с возникновением научного познания. Сейчас трудно назвать ту область науки где оно не используется.

Т.о. мт-ие мд. используются во всех науках. Но первым эта была принята в физике. Теоретическая физика – это и есть применение мт-их мд-й в физике, к-ая яв-ся частью физики и развивает всю физику, как теоретической дисциплины, так и эксп-ых исследований.

Отметим, что применение мт. методов, в част., мт-их мд-й позволяет в различных областях знаний получить как пракические, так и теоретические результаты, так, нп., применение их в экн-ке позволяет:

Во-первых, решать различные практические задачи бухгалтерского учета, складировании, проведение балансов, подсчетах эффективности производимых работ и т.д.

Во-вторых, решать оптз-ых задач, нп., при составлении планов прз-ва или перевозок, программы работы цехов, выборе кормовых рационов, раскроя материалов и т.д.

В-третьих, мт. методы и модели сами яв-ся средствами развития экнч-ой науки, в частности, социально-экономической.

ЛЕКЦИЯ 2

1.2. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. СИСТЕМОЛОГИЯ

1^0. Необходимость учета сложности систем при разработке моделей. Предмодельное исследование. При моделировании (мдв.) системы (понятие системы и сложной системы уточним ниже) выделяется определенная (опр.) часть этой системы, т.е. подсистема, к-ая интересует исследователя, и моделируется, а затем на основании полученных результатов модели (мд.) подсистема подвергается изменению. Если система дт-но сложная (т.е. степень зависимости (зв.) подсистем высокая и сложная), то изменение подсистемы может привести к катастрофическим результатам данной системы, т.е. к глобальным проблемам. Объясним это на простом примере, изложив его с основными этапами мдв-ия.

1. **п1**. Некое государство (расв-ое как система и обзм-ая через Г) имеет нек-ое количество лесных массивов (с заданными объемами древесины) и опр-ное количество деревообрабатывающих фабрик (с заданными объемами мощностей). Причем суммарный объем древесинных массивов больше суммарного объема мощностей фабрик и заданы дорожные расходы перевозки единицы объема древесины из опрн. лесного массива к опрн-ой фабрике. Требуется распределять древесины из лесных массивов по фабрикам с наименьшим дорожным расходом при перевозке древесины.

2. Для составления мт-ой мд. введем необходимые параметры и пер-ые: n – количество лесных массивов, a_j – объем (м^3) древесины на j-м массиве $(j=\overline{1,n})$; m – количество фабрик, b_i – объем (м^3) мощности i-й фабрики ($i=\overline{1,m}$), причем $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i < \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$; c_{ij} – количество (руб.) расхода, затрачиваемое для перевозки м^3 древесины из j-го массива к i-ой фабрике. Пусть x_{ij} – объем (м^3, пока неизвестный) древесины, перевозимой из j-го массива к i-ой фабрике (x_{ij} наз. планом). Тогда мт-ую мд. задачи можно сформулировать так:

Найти

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \ , \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_j \ , \ j=\overline{1,n} \ ; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ , \ i=\overline{1,m} \ ; \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ \ i=\overline{1,m} \ , \ j=\overline{1,n} \ . \tag{4}$$

3. Мт-ую мд. (1) – (4) можно решить симплекс методом (об этом см. ниже) линейного программирования (ЛП) и найти опт. решение

$x^* = (x_{11}^*,...,x_{1n}^*,x_{21}^*,...,x_{2n}^*,...,x_{m1}^*,...,x_{mn}^*)$, т.е. $x^* = \{x_{ij}^*\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$

4. В данном случае нет необходимости проверки адекватности ММ и оригинала, т.е. подсистемы (если допускать, что степень зв-сти подсистемы слабая и простая), т.к. условие нахождения опт-ой точки x* заложен в самом симплекс-методе. Переходим к 5-му этапу.

5. Печатаем $x^* = \left\{x_{ij}^*\right\}, \min \mathrm{Z}\left(x_{ij}^*\right), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Осуществляя перевозку древесины по рекомендации $x^* = \left\{x_{ij}^*\right\}$ мы дсв-но получим опт. решение $\min \mathrm{Z}\left(x_{ij}^*\right)$ мт-ой мд. (1) – (4) (к-ую назовем локальной моделью расв-ой подсистемы в отличие от глобальной модели всей системы) для оригинала п1. Но это может привести к экологическому конфликту, т.е. к нарастающему ухудшению окружающей человека естественной среды (экоцид, см. КС). Дсв-но здесь возможны сд-ие случаи:

А. Слабая зв-ть подсистемы от систем, т. е. система простая. В этом случае государство, т.е. система Г имеет много сплошных лесных массивов со св-ом восстановления и вырубка леса из фиксированных массивов окажется полезным (н-р, для увеличения с/х-ых или пастбищных угодий), не приведя к экоциду.

Б. Не слабая зв-ть подсистемы от системы. Здесь система Г имеет достаточное количество лесных массивов, но вырубка леса в нек-ых массивах, превышающих нек-го критического объёма α_j $\left(\alpha_{\mathrm{j}} \le a_j\right)$, может привести к уничтожению нек-ых ценных видов зверей или птиц и нарушить равновесие природы.

В. Сильная зв-ть подсистемы от системы, т.е. система сложная. В этом случае система Г имеет уд-ое количество лесных массивов для равновесия природы, но вырубка леса в любом массиве даже в малом объеме приводит к катастрофическим последствиям. Нарушение равновесия природы (понятие слабая, не слабая и сильная яв-ся величинами лингвистической переменной «зависимость» нечеткого мн. На уточнение этих понятий остановимся в 7.1).

Тогда, исходя из этих случаев, поступаем так:

Для случая **А** локальную модель (1) – (4) решаем и результаты решения используем без опасения от экоцида.

Для случая **Б** локальную модель (1) – (4) уточняем, заменяя фактические объемы a_j на критические объемы α_j ($\alpha_j \le a_j$), т.е. в нерав. (2) полагаем, что $a_j=\alpha_j$. Дальше поступаем как и для случая А. Здесь возможны и др. более серьёзные уточнения локальной модели.

Для случая **В** локальную модель уточнить и использовать невозможно. В этом случае можно использовать лишь глобальную модель системы, привлекая не только алг. ограничения (огр.), но диф-ые и логические огр-ия, т.е. развивая лесные насаждения, увеличивая закупку древесины из др. государств, используя заменители древесины и т.д.

Т.о. перед мдв-ем любой подсистемы приходим к объективной необходимости установить степень сложности системы, чтобы выяснить к какому случаю относится подсистема.

Исследование по установлению случаев **А**, **Б**, **В** назовем предмодельным исследованием. Предмодельное исследование даже важнее, чем само моделирование, хотя оно тоже не легкое искусство. Пренебрежение к предмодельному исследованию может привести не только к экоциду, но и к катастрофическим ситуациям. Вспомним чему привели модель сплошного освоения казахстанских целинных земель, модель создания искусственных водоемов стремлением получить нек-ой необоснованной выгоды, модель внедрения кукурузного севооборота по всей территории СССР, включая и северные районы и т.п. Не ясно ещё к чему приведет модель вмешательства в природу и активного освоения космоса. Все это яв-ся результатом игнорирования предмодельного исследования, а вместо этого принятие административно-командных решений.

Итак, реализация результатов модели любой подсистемы или системы может не наносить или наносить вред (порой катастрофический) по нарушению равновесия природы или окружающей среды. В связи с этим введем понятие критического и кризисного числа.

Степень изменения (под действием модели) природного равновесия (или окружающей среды) наз. критическим число и обз-ся через γ. В зв-ти от γ модель может оказаться вредной, если $\gamma<0$, или выгодной, если $\gamma>0$.

Предельное значение критического числа наз. кризисным числом и обз. γ_o ($\gamma\leq\gamma_o$ или $\gamma\geq\gamma_o$). Если $\gamma_o=0$, то равновесие природы не нарушается; если $\gamma_o<0$, то происходит нарушение природного равновесия, а при $\gamma<\gamma_o<0$ наступает катастрофическая кризисная ситуация, где критическая γ наз. порогом катастрофичности для расв-ой модели; если $0<\gamma_0\leq\gamma$, то происходит восстановление природного равновесия (имевшего ранее) для данной модели.

Отсюда, задачей предмодельного исследования яв-ся установление (нахождение) критического числа γ_i для модели M_i подсистемы (или системы) C_i. Пусть известно кризисное число γ_o и найдено критическое число γ для модели М. Тогда, модели при $0\leq \gamma_o< \gamma$ можно разрабатывать и смело реализовывать её результаты (случай **А**). Если $\gamma_o< \gamma\leq0$, то нх-мо разработать модель и внедрять её результаты с большой осторожностью, включая в модель поправку, н-р, как в п.1 (случай **Б**). Если же $\gamma\leq \gamma_o<0$, то разработка моделей (локальных) с критериями γ и внедрение их результатов запрещается. В этом случае нх-мо использовать глобальную модель с помощью системного анализа (см. КС) расв-ой проблемы (случай **В**).

Следует отметить, что сущ-ие и эффективно работающие модели с развитием науки и с изменением окружающей среды могут из разряда выгодного перейти в разряд вредного. И в этом случае, аналогично, предмодельного исследования, нх-мо провести тщательное исследование (аттестационное) на предмет уточнения, изменения и улучшения сущ-ей модели или ликвидации (уничтожения) модели и создание совершенно новой модели, отвечающим современным требованиям. Но этот процесс должен происходить постепенно в длительное время от 2 до 15 лет в зв-ти от сложности модели. Н-р, целесообразно было не сразу ликвидировать модель социалистической системы и перейти к рыночно-капиталистической системе, а объединение положительных сторон двух систем, создать новую модель, улучшая жизнь одних категорий людей и в то же время не ухудшая жизнь остальных категорий людей; точно также более целесообразно было не административно-командное уничтожение колхозной системы (оставив деревенских жителей на произвол судьбы, особенно трудоспособной части населения), а постепенно идти по созданию модели многоукладной системы, учитывая российские климатические условия.

В 7.4 сделана попытка анализировать выше изложенное на основе сравнительных оценок, используя весовые фк-и.

2^0. Система и сложная система. Многообразие и иерархическая упорядоченность мира. Приведем ряд понятий, нх-ых в дальнейшем.

Система – мн. эл-ов, находящихся в отн-ях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ую целостность, единство, т.е. система есть синтез эл-ов.

Есть и др. опр-ия системы: систему расв-ют как комплекс процессов и явлений, связанных между собой, т.е. как «черный ящик» с n входами и m выходами. Здесь система – объект исследования и упл-ия; расв-ют систему как инструмент, способ исследования процессов и явлений. Наблюдатель конструирует (синтезирует) систему как нек-ое абстрактное отображение реальных объектов; система есть искусственно создаваемый комплекс эл-ов (н-р, коллективов людей, технических средств, научных теорий и т.д.), предназначенный для решения сложной организационной, экнч-ой, технической задачи. Именно в этом смысле понимается система в системотехнике.

Системы делятся на материальные (н-р, железная дорога, н/х-во) и нематериальные (н-р, система ур-й, система наук). Автоматизированная система управления (АСУ) включает как материальные эл-ты (ЭВМ, документация люди), так и нематериальные (мт-ие модели, знание людей). Их называют смешанными системами.

Закономерности функционирования систем изучается общей теорией систем, оперирующей понятием абстрактной системы. Нб. значение среди абстрактных систем имеет кибернетическая система, к-ая опр-ся как мн-во взаимосвязанных эл-ов, способных воспринимать, запомнить и перерабатывать информацию, а также обмениваться информацией.

Подсистема – часть системы, которая изучается самостоятельно. Н-р, экономику можно расв-ть как подсистему общества в целом, а общественное производство (прз.) и общественное потребление – как подсистема экнки, отдельные отрасли – как подсистема общественного прз-ва и т.д., т.е. каждая подсистема яв-ся, в свою очередь, системой, к-ая может делиться на более частные подсистемы. Когда расв-ся одна подсистема то др. подсистемы яв-ся для нее средой (или внешней средой). Связи подсистемы со средой осуществляются через входы и выходы. Разделение систем на подсистемы (ствн. модели на подмодели, автономные модели) нх-мо, н-р, для практической организации упл-ия прз-ом по иерархическому принципу.

Сложная система – мн. неод-ых эл-ов, находящихся в отн-ях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ю целостность, единство. Неод-ть эл-ов сложной системы требует разных языков для их описания. Н-р, завод можно расв-ть как сложную систему, состоящую из материально-вещественной, финансовой, кадровой и др-их подсистем. Первую из них описывают на языке материально-вещественных связей (потоков сырья, продукции и т.д.), вторую – на языке финансовых категорий (денежных выплат, цен и т.п.), третью – на языке социологии, учета кадров. Набор различных языков носит название конфигуратор.

Можно и по другому расчленить систему «завод» на подсистемы: ими будут, н-р, цеха, службы, подразделения; или еще по иному – выделив вспомогательное и основное прз-во, бытовое обслуживание работников. Возможность различного (на разных основаниях) членения системы на подсистемы яв-ся, сд-но, признаком её сложности.

Сложная система обычно обладает иерархической структурой со свойством (св.) целостности, т.е. изменение в каком-либо из ее эл-ов, сказываются и на др. эл-ах, на функционировании всей системы. Отсюда необходимость системного подхода к изучению сложных систем.

Сложные системы есть всюду – в природе, технике, обществе т.е. в мире. Причем лишь иерархическая упорядоченность (уп.) мира позволяет обозреть его многообразие [113]. В его части сосуществуют, взаимодействуя, три последовательно возникшие иерархии (рис. 1): физико-биологическая (А, Б), социальная (В) и искусственно возникшая техническая иерархия (Г). На рис. 1 приведены лишь бесспорно выделяемые классы систем, составляющие иерархии, а промежуточные классы опущены.

Объединение классов систем из разных иерархий или их частей приводит к «смешанным» классам. Н-р, объединение «неживых» классов систем из физической части иерархии А с «живыми» классами систем биологической части иерархии Б приводит к смешанному классу систем, называемому экосистемами. Объединение из классов систем, принадлежащих иерархиям Б, В, Г, приводит к промыслово-хозяйственным классам и т. д.

Эмпирически установлено [113], что классы систем указанных иерархией с повышением их уровня обнаруживают следующие закономерности (рис. 2):

1*. Разнообразие (число а различных типов систем данного класса) возрастает. Так, различных типов атомов $a \approx 10^2$, различных типов неорганических молекул $a \approx 10^4$, различных типов животных $a \approx 10^6$ и т. д.

2*. Обилие или распространенность (число N однотипных систем данного вида в заданном пр-ве (н-р, на Земле или в известной нам части Вселенной)) убывает, что связано с возрастанием их размеров. В предельном случае – для уровней биологической и технической иерархии (некоторые биоценозы, биосфера, глобальные технические системы) – распространенность ствщ-их систем вырождается в единичные экземпляры. Такие системы наз-ют уникальными.

3*. Сложность (для структуры опр-ся с n эл-ми и m связями между ними, для поведения системы опр-ся характером и разнообразием реакций на внешние воздействия). Для различных типов систем и классов сложность меняется по разному. Так, н-р, биоценозы имеют от двух до тысячи ($n = \overline{1,1000}$) популяций. Замечено возрастание сложности поведения у классов систем физико-биологической иерархии, по крайней мере до уровня особи. При этом наблюдается невероятно большой скачок сложности поведения при переходе от иерархии А к иерархии Б. Только в настоящее время этот скачок постепенно заполняется классами искусственных технических систем иерархии Г.

4*. Устойчивость (способность системы противостоять внешним возмущающим воздействиям для самосохранения). От нее зависит продолжительность жизни системы, а отсюда и их распространенность. Средняя устойчивость систем имеет явную тенденцию к понижению при переходе от физико-биологической иерархии к социальной и далее к технической (см. рис. 2). Замечены две формы устойчивости систем. Для физических и простых технических систем это консервативная вещественно-энергетическая устойчивость эл-ов внутри системы, связанная с прочностью и сбалансированностью. Для более сложных систем это динамическая структурная устойчивость, сохраняемая непрерывной заменой эл-ов (на основе их избыточности) этих систем. Устойчивость физических систем уменьшается, а биологических возрастает с ростом их сложности.

5*. Эмергентность (степень несводимости свойств системы к свойствам отдельных эл-ов, из к-ых она состоит) возрастает в физико-биологической иерархии до уровня особи, а затем убывает.

6*. Неидентичность (степень отличия систем одного и того же типа (вида) друг от друга) возрастает. Так, однотипные атомы или молекулы более идентичны, чем одновидовые клетки. Последние в свою очередь идентичные особей одного вида, т. е. ареала. Неидентичность однотипных популяций и биоценозов также возрастает.

Приведенные иерархии возникали посл-но друг из друга, т.е. каждая иерархия имела свой особый класс систем, к-ый порождал сд-ую ветвь. Так, стадо породило человека, наделив его новым социальным качеством [113]. И уже в новом качестве, образуя коллектив, человек породил новую иерархию – техническую, начиная с орудий труда и кончая современными глобальными техническими средствами. При этом важно заметить, что с ростом обилия и сложности отдельных технических систем вся техническая иерархия их как бы начинает ускользать из-под контроля человечества. Угрожающим признаком этого яв-ся неконтролируемое глобальное воздействие современной техники и технологии на естественные иерархии (нижняя стрелка на рис.1), в результате к-го происходит нарастающее ухудшение окружающей человека естественной среды (экоцид), не компенсируемое иллюзорным индустриальным комфортом. Это заставляет человечество, и притом безотлагательно, посмотреть на этот мир и свою деятельность в нем сверху вниз сквозь призму трех указанных иерархий, на наших глазах вступающих в экологический конфликт (экоцид).

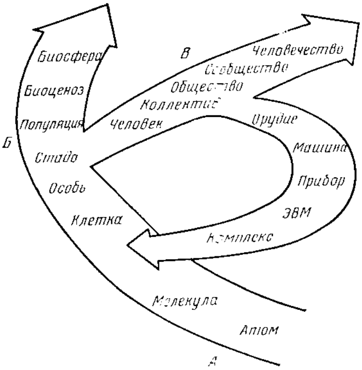


Рис. 1

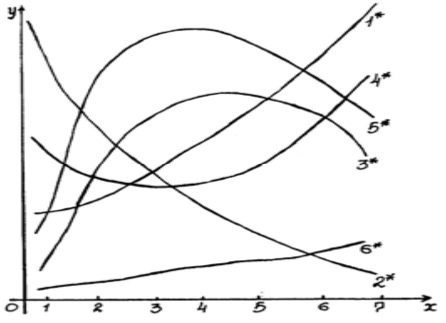


Рис. 2

На рис. 2 приведены иерархические уровни систем х = (1 – Атом, 2 – Молекула, 3 – Клетка, 4 – Особь, 5 – Популяция, 6 – Биоценоз, 7 – Биосфера) и зв-щие от них закономерности y = (1* – разнообразие, 2* – распространенность, 3* – сложность, 4* – устойчивость, 5* – эмергентность, 6* – неидентичность).

3^0. Три периода развития науки. Системология. Исследование сложных систем с помощью мт-го мдв-ия тесно связано с теорией сложных систем – системологией, для понимания к-ой рас-им возникновение трех периодов, характеризующих (хркз.) развитие науки:

1. Античный период (более 3 000 лет) с порождением наивной системологии. Этот период науки, характерен (хрк.) умозрительным подходом, оторванным от экспериментального (эксп.) подхода, а также использованием категории цели. Накопившийся к тому времени запас эмпирических знаний в земледелии, скотоводстве, примитивных ремеслах и астрономии регламентировался религией, а не наукой. Лишь землемерие и астрономия, породившие геом-ю, сами в какой-то мере пользовались ею. Все знания об эл-ах механики, не говоря уже об эл-ах химии, основывались на эмпиризме и умозрительных аналогиях, к-ые явились основой научной аргументации того времени.

Нерасчленяемость тогдашних первичных эл-ов Вселенной, н-р, земли, воды, воздуха и огня, т.е. их целостное рас-ие, диктовалось просто недостаточностью химических знаний. Наиболее развитой областью приложений мт-ки оказалась тогда теория музыки, индуцировавшая мистику чисел пифагорейцев. Категория цели использовалась повсеместно, н-р, падение камня, поднятого над землей, объяснялось его желанием вернуться на старое место. Т.о., целостное рас-ие объектов мира зародилось еще в античную эпоху одновременно с возникновением научного познания.

2. Ньютоновский период (более 300 лет), породивший физикализма. В этот период построения античной науки сменились современным естественно-научным подходом, когда, завершая усилия гениев Возрождения, Ньютон соединил эксп-ые методы с новым мт. методом анализа беск-но малых. Для продолжающего ньютоновского периода с его методологией физикализма хрк-но соединение эксп-го и умозрительного (мт-го) подходов, «изгнание» категории цели и сведение изучения целого к изучению его частей. Физикализм оказался плодотворным лишь при изучении вещественно-энергетических свойств простых систем, а использование физикализма для изучения сложных систем оказалось несостоятельным, т.к. для сложных систем определяющими (опрщ.) яв-ся не вещественно-энергетические, а структурно-поведенческие свойства.

3. Современный системный период (более 60 лет), породивший системологию – теорию сложных систем. Он возник из потребности научной атаки сложных систем. Объект исследования потребовал целостного рас-ия его частей, отказа от невозможного (н-р, для сложных уникальных систем) классического эксп-та, а также восстановления в правах категории цели. Это означало отказ от физикализма и возврат к античной методологии в форме системологии. В связи с этим античную науку можно было бы назвать наивной системологией.

Поскольку для сложных систем опрщ-ми яв-ся не вещественно-энергетические, а структурно-поведенческие качества, то последние стали основным объектом исследования системологии.

Стержневым понятием системологии яв-ся понятие сложной системы, а кибернетика исследовала отдельные качества последней, сначала управления и гомеостазиса, потом и информации, к-ая развивается теперь как научное направление, под названием информатика. Только теперь наступает период зрелого понимания кибернетикой своего предмета исследования – сложной системы – и она сама может быть отождествлена с системологией – теорией сложных систем. Тогда наряду с современным делением естественных наук по конкретным видам исследуемых систем: физика (в узком смысле), химия, биология, социология и др. – возникает параллельное деление науки на две части по методам их исследования. Это теория простых систем – физика в широком смысле со своей методологией физикализма и теория сложных систем – кибернетика в широком смысле со своей методологией системологии.

Т.о. системный период развития науки в отличие от ньютоновского характеризуется (хркз-ся) не дифференциацией, а интеграцией науки, что также сближает его с единой античной наукой периода наивной системологии. Современную и наивную системологию сближает и близость основных методов исследования в обоих направлениях: аналогии и мдв-ия. Дело в том, что, мт-ие описания связей простых систем были им столь адекватны, что могли расв-ся как «исчерпывающие» законы природы. Сложные системы не допускают таких адекватно исчерпывающих описаний. Для описания функционирования сложных систем строятся сложные мт-ие мд., учитывающие, как правило, не все богатство сущн-х связей между эл-ми системы (имт-ое мдв.) Таких моделей может быть много и каждая в отдельности не яв-ся «исчерпывающей». Поэтому любые заключения по ним о дсв-ом функционировании моделируемого оргинала напоминают заключения по аналогии, к-ые делались древними при сопоставлении двух объектов, подобных в их представлении друг другу.

В настоящее время физикализм и системология используются как две различные методологии исследования простых и сложных систем ств-но. Рас-им в чем состоит это отличие и, главное, чем оно оправдывается.

1) Умозрительность вместо экспериментальности. Новая системная методология не сводится лишь к новой классификации наук, она вкладывает новый смысл в традиционные для физикализма представления об эмпирическом (экспериментальном) и теоретическом (мт-ом) разделах традиционных естественных науках. Системология упор делает на умозрительность и силы абстракции. Сейчас для анализа сложных систем роль классического экспериментатора выполняет мт-ик, моделирующий на ЭВМ эти объекты, а роль теоретика-интерпретирующий численные эксперименты (эксп-ты) на ЭВМ эмпирик, «хорошо знающий натурный объект». Потребность такого рода умозрительном экспериментировании происходит не из-за несовершенства эксп-ных средств, как в античный период, а из-за специфики исследуемых объектов – сложных и особенно сложных уникальных систем, т.е. классический эксп-т над ними невозможен.

2) Эмергентность вместо редукционизма. Один из основных принципов физикализма – редукционизм – гласит, что целое можно изучать, расчленив его (редуцируя) на части, а затем, изучив их свойства, опр-ть св-во целого. Основным качеством сложных систем яв-ся эмергентность, отрицающая возможность применения редукционизма к сложным системам.

3) Целесообразность вместо естественности. Физикализм основывается на естественных законах природы, обнаруживаемых в результате обобщения многочисленных эксп-ов над простыми системами. Законы постулируются на основе этих эксп-ов в виде простых мт-их зв-тей. Это не имеет места для сложных систем. Простые объяснения свойств сложных систем, изложенные в мт-ой форме, могут быть получены лишь при гипотезе о целесообразном поведении сложных систем. Под поведением (функционированием) системы понимается ее действие во времени. Для опр. сложности систем опр-им акт решения как выбор альтернатив, в том числе и с помощью случайного механизма (т.е. при этом вовсе не обязателен интеллектуальный выбор). Решающей системой наз-ем систему, поведению к-ой присущ акт решения. Системы, включающие в себя в качестве хотя бы одной подсистемы решающую систему, будем называть сложными. В част. к ним относятся сами решающие системы. Системы, не способные к акту решения, будем называть простыми. Стремление системы достигнуть прч-го для нее состояния называют ее целенаправленным поведением, а это состояние – ее целью. Целями обладают лишь сложные системы.

4) Объяснение и предсказание. Физикализм, следуя редукционизму, имеет тенденцию объяснить и предсказать явления (простые системы) на данном системном уровне явления на предельно низших системных уровнях вплоть до атомного. А предсказанию физикализм придает привычный смысл, связанный с понятием физического закона, предопределяющего будущее поведение простой системы или его вероятностью.

В системологии в отличии от физикализма теория не яв-ся единственной носительницей и объяснительного и предсказательного эл-ов. Чем адекватнее сложной системе ее имитационная модель, чем выше ее предсказательные качества, но тем ниже ее объяснительные качества (модель по сложности приближается к оргиналу). Основным принципом объяснения системотологии яв-ся рекуррентный одношаговый принцип. Он состоит в принятии в качестве постулатов свойств и взаимодействий систем непосредственно нижестоящего уровня и вывода из них в виде теорем свойств систем данного уровня. «Экспериментальный» метод предсказания с помощью имт-го мдв-ия в системологии состоит в «розыгрыше» различных ситуаций в ускоренном по сравнению с реальным течением «машинного» времени. Если в памяти ЭВМ возникает «проклятие» размерности, то наряду с имитационным (имт-ым) мдв-ем для прогнозирования поведения сложных систем пользуются полуинтуитивным экспертным методом.

4^0. Законы. Формулировка принципов системологии. Оптимизационные модели. С категорией закона связано представление о его большей или меньшей всеобщности для целых классов систем. Физикализм обнаружил еще и простоту всеобщих естественных законов природы. Причина этого состоит в том, что простые системы имеют практически независимые (незв.) качества. Поэтому их портретные модели отдельных качеств простых систем им столь адекватны, что могут рас-ся как прочие законы природы. Физикализм формулирует законы природы на основе эксп-ов.

Сложные системы в отличие от простых имеют большое число сущ-но взаимосвязанных качеств. Поэтому портретные (имитационные) модели отдельных их качеств не адекватны им, а портретные модели достаточно (дт-но) большой совокупности их качеств сложны и недт-но общие. Что же можно считать законами системологии? Системология устанавливает законы, управляющие сложными системами на основе сд-их принципов.

1-й принцип (формирование законов). Постулируют осуществимые модели, а из них в виде теорем выводят законы сложных систем.

сл1.1 Законы касаются имеющих место или будущих естественных или искусственных систем. Они могут объяснить структуру и поведение первых и индуцировать построение вторых.

сл1.2 Никакие реальные явления не могут опровергнуть или подтвердить законы системологии.

2-й принцип (рекуррентного объяснения). Свойства систем данного уровня выводятся в виде теорем (объясняются), исходя из постулируемых св-в элементов – систем непосредственно нижестоящего уровня и связей между ними. Н-р, вывод св-в биоценоза из постулируемых св-в и связей составляющих его популяций, вывод св-в популяций из постулируемых св-в и связей составляющих ее особей и т.д.

сл2.1 При каждом восхождении на сд-й иерархический уровень система предшествующего уровня делится эл-ом системы сд-го уровня. Поэтому не обязательно усложнение формальной структуры последней. Такие модели должны экономно отражать принципы усложняющего поведения систем, т.е. «принципа бережливости» или принципа простоты: не следует делать посредством большого то, чего можно достичь посредством меньшего.

3-й принцип (минимаксного построения моделей). Теория должна состоять из простейших моделей систем нарастающей сложности. Каждая из них должна хотя бы минимальной (мнм.) степени отражать каждый из нарастающих (мкс.)уровней сложности поведения систем. Др-ми словами, формальная сложность системы (н-р, число описывающих ее ур-й) не должна ств-ть неформальной сложности системы (сложности ее поведения).

сл3.1 Грубая модель более сложной системы может оказаться проще более точной модели более простой системы. Это вселяет оптимизм при исследовании сложных систем.

Т.о., для построения теоретических моделей (ТМ) систем, в том числе и сложных, нх-мо знание принципов их усложняющего поведения. Пока эмпирически обнаружены сд-ие основные принципы усложняющего поведения систем:

1) вещественно-энергетического баланса (на основе законов сохранения);

2) гомеостазиса (на основе обратных связей);

3) выбора решений (на основе индуктивного поведения);

4) перспективной активности или потребного будущего (преадаптация, опережающая реакция);

5) рефлексии (опережающее отражение).

Замечено, что принципы поведения, впервые обнаруживаемые у систем данного уровня, продолжают сохраняться у всех систем более высокого уровня сложности. Однако определяющим (опрю-им) в поведении системы оказывается принципы, впервые возникший на ее уровне сложности. Так, принцип вещественно-энергетического баланса присущ системам самого низкого уровня сложности и сохраняется для всех систем вплоть до систем высших уровней сложности. Однако опрю-им он яв-ся лишь для простейших систем. Уже для так наз-ых автоматических систем опр-им оказывается принцип гомеостазиса, хотя эти системы остаются в классе простых систем, т.к. им не присущ акт решения. Принцип гомеостазиса сохраняется для всех систем, более сложных, чем автоматические.

Для решающих систем опр-им яв-ся принцип поведения, основанной на акте решения. Он же сохраняется для всех систем, превосходящих по сложности поведения решающие системы, н-р, самоорганизующиеся системы, в которых опрю-им яв-ся простейшее проявление поведения живого по сравнению с неживым в физико-биологической иерархии.

Для биосистем (таких, которые не обладают интеллектом) опр-им яв-ся принцип перспективной активности. Такого рода системы наз. предвидящими. Уровень их сложности должен превышать уровень сложности среды и они должны обладать дт-но мощной памятью (н-р, генетической), на основе к-ых, эти системы могут заранее подготовить свою реакцию на возможные будущие воздействия среды. Для особей этот принцип известен как эффект перспективной активности, для популяций – как эффект предадаптации. Четкое выделение подобного эффекта для биоценозов до сих пор не проведено [113].

Принцип рефлексии связан с поведением интеллектуальных партнеров и не имеет отн-ия к поведению систем, не обладающих интеллектом.

Принципы системологии используются в практическом и теоретическом плане:

1. Согласно 1-му принципу теория состоит из гипотез, сформулированных в виде мт-их мд-й. Выводимые из них теоремы (законы) допускают возможность сличения части следствий из них с нек-ми доступными для эксп-та характеристиками (хркс.) оргинала. Другая часть следствий может быть использована для теоретического прогнозирования ствщ-х хркс-к оргинала. Для сложных уникальных систем сличаться с теоретическими могут лишь их нецелостные хркс-ки.

2. Согласно 2-му принципу в моделях сложных систем в качестве исходных эл-ов должны расв-ся дт-но интегрированные их подсистемы с постулируемыми св. и связями между ними. Поэтому можно избегать глубоких проникновений в уровни, нижестоящие по сравнению с уровнем, непосредственно предшествующим расв-му.

3. Согласно 3-му принципу мт-ие мд. теории должны быть «простыми». Принцип содержит лишь пожелания без конкретных конструктивных предложений, кроме ссылки на принцип усложняющегося поведения как основы построения простых моделей.

5^0. Оптимизационные модели. Понятие модели оказывается основным и для эксп-та (численное мдв. на ЭВМ), и для теории (н-р, для уникальной системы). А понятие оптимизационной (оптз.) модели яв-ся основным для построения простых моделей теории. Пусть система отождествляется с n «фазовыми» координатами (крд.) x = {x_j} ($j=\overline{1,n}$) функциями (фк.) времени t, отражающими изменение ее эл-ов во времени. Пусть связь между эл-ми можно описать M зависимостями (зв.) f_i (x) = 0 ($i=\overline{1,m}$), содержащими ℓ параметров. Тогда система имеет n–m степеней свободы, а с учетом неопределенности (неопр.) параметров n–m+ℓ степеней свободы.

Здесь моделью системы наз. абстрактное образование, состоящее из n′<n крд-т $\tilde{x}$, связанных лишь $m'<m$ зависимостями (зв-ми), содержащими $\ell'<\ell$ параметров. Модель имеет $n'-m'+\ell'$ степеней свободы.

Формальное задание цели в системологии сводится к заданию «целевых» функционалов Z=F(x) и $\tilde{Z}=\tilde{F}(\tilde{x})$ для системы и модели ств-но. U_x экстремумы при ствщ-х условиях достигаются для системы x = x_0 и ее модели $\tilde{x}=\widetilde{x_0}$, к-ых назовем оптимальной (опт.) и оптимизационной (оптз.) ств-но (они яв-ся фк-ми ℓ и ℓ' параметров ств-но).

В системологии используется два подхода в приближении (прж.) модели к системе: 1) имитационный (портретный) подход применим к любым системам и состоит в прж-и модели $\tilde{x}$ к системе x за счет прж-ия n′→ n, m′→ m и ℓ'→ ℓ; 2) оптз-ый подход применим лишь к сложным системам, которые имеют цель и модель $\tilde{x}$ прж-ся к системе x только за счет ℓ'→ ℓ (мдв-ие конкретных систем см. далее).

ЛЕКЦИЯ 3

1.3. СИСТЕМА И СРЕДА. ОСНОВНЫЕ ТРУДНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1^0. Система и среда. Декомпозиция сложной системы. Фиксация системы делит мир на две части – систему и среду. При этом подчеркивают большую силу связей эл-ов внутри системы, чем с эл-ми среды. В качестве примера рас-им технологические процессы, к-ые характеризуются (хркз.) значительной сложностью из-за большого количества информации, содержащейся в промышленных системах, и во взаимном влиянии их параметров. Построение любой ММ-и для таких процессов начинают с блочного формализованного описания объектов мдв-я. Причем мт. мд-и удобно составлять по фактически сущв-им отдельным установкам и аппаратам (агрегатам), что значительно облегчает проверку их реализации на ЭВМ. Полная мд. процесса получается как комбинация вариантов мд-й отдельных блоков. А образование агрегатов (блоков) наз. агригированием.

Структура мд. промышленной системы показан на рис. 1а, где У-вектор выходов. Для опр. структуры мд. в таком виде (т. е. как преобразователь сигналов типа "черного ящика" со многими входами и выходами) нх-мо выяснить, какие именно входы и выходы объекта будут включены в его мд. Понятие структуры уточним далее. Для пердачи и получения сигналов используются коды.

Реальные технологические системы функционируют в условиях большого количества случайных факторов, источниками к-ых яв-ся воздействие внешней среды (н-р, погоды), колебания нагрузки (н-р, потребления продукции), а такие ошибки, шумы и отклонения различных величин (н-р, напряжения или силы тока), возникающие внутри системы. Объект связан на основе ингерентности со средой беск. числом связей (рис. 1б), опр-щих его состояние. В общем виде схема изображена на рис. 1в.

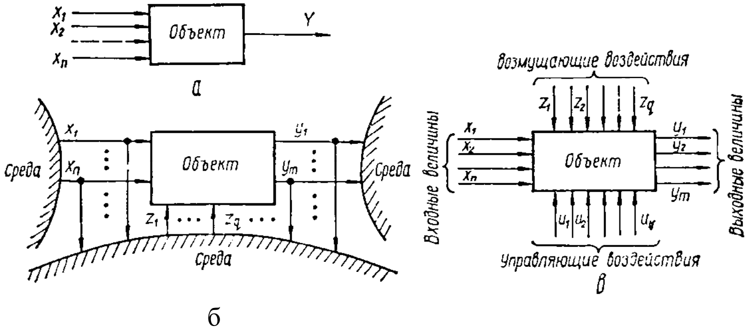


Рис. 1

Совокупность параметров среды разделяют на сд-ие группы: входные (входы) – $x_1, x_2,.., x_n$ управляющие воздействия (управления) – $u_1, u_2,.., u_k$; возмущающие воздействия (возмущения) – $Z_1, Z_2,.., Z_S$; выходные вел-ы (выходы) – $y_1, y_2..., y_m$.

Входными принято наз-ть параметры, значения которых могут быть измерены, но возможность воздействия на них отсутствует, и они не зависят от режима процесса. Входными параметрами является, н-р, контролируемый состав исходного сырья, теплоносители, поступающие в аппарат, количество и качество к-ых могут быть опр-ны, но, неподлежат изменению.

Управляющим наз. параметры, на к-ых можно оказывать прямое воздействие в ств. с выбором разработчика или предъявляемыми требованиями, что позволяет управлять процессом. Управляющими параметрами могут быт, н-р, регулируемое давление в аппарате, температура теплоносителя и т.д.

Возмущающими наз-ют параметры, значения к-ые случайным образом изменяются с течением времени и к-ые не доступны для измерения. Ими могут быть, н-р, содержания различных примесей в исходном сырье, активность катализатора, температура процесса, изменяющаяся за счет реакций и т.п.

Выходными наз-ются параметры, значения к-ых опр-ся режимом процесса. Эти параметры хркз-т его состояние как результат суммарного воздействия входных, управляющих и возмущающих параметров. Поскольку назначение выходных параметров – описывать состояние процесса, их иногда наз-ют параметрами состояния.

Почти каждая мд. представляет собой нек-ю комбинацию таких составляющих, как компоненты, параметры (переменные, функциональные зв-ти, огр-ия, целевые фк-и). Н-р, в мд. ракеты или космического корабля компонентами яв-ся такие объекты, как система тяги, система наведения, система упл-я, несущая конструкция и т.п. Обобщенная мд. города может состоять из таких компонентов, как система образования, система здравоохранения, транспортная система и т.д. В экономической модели производственной системы компонентами могут быть отдельные производственные объединения, отдельные потребители и т.п.

Описание каждого параметра (пер-ой) в модели производится стандартным образом, н-р: опр-е и символ; текстовое описание; единицы измерения; диапазон изменения; характеристики (однозначный, многозначный, параметр числовой или с кодированным значением; не регулируемая или случайная пер-ые и т.д.); место применения модели; источник параметра (пер-ой); примечания. Все перечисления хркс–ки яв–ся информацией.

Функциональные зв-ти описывают поведение параметров (пер-ых) в пределах компонентов системы или выражают стн-ия (детерминированные или стохастические) между ними. Детерминированные стн.– это тождества или ур-ия, к-ые устанавливают зв-ть между пер-ми или параметрами в тех случаях, когда процесс на выходе системы однозначно опр-ся заданной информацией на входе. Стохастические стн. представляют собой такие зв-ти, к-ые при заданной входной информации дают на выходе неопр-ый результат.

Ограничения (огр.) представляют собой устанавливаемые пределы изменения значений пер-ых или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных средств (энергии, запасов, времени и т.п.) Они могут вводиться либо разработчиком (искусственные огр.), либо самой системой вследствие присущих ей св-в (естественные огр.). Н-р, для ракеты искусственным ограничением может быть мнм-ый радиус действия или мкс-но допустимый вес. Большинство технических требований к системе представляет собой набор искусственных огр-ий.

Мт-ую структуру модели технического объекта иногда удобно описывать на языке теории графов [107], особенно при декомпозиции объекта на эл-ты. Граф служит источником информации о соподчиненности и связях эл-ов.

Формально элементом считается объект, не подлежащий дальнейшему расчислению на части (при данном рас. системы.) Сущ-ны только св-ва эл-та, опр-щие его взаимодействие с др. эл-ми системы и влияющие на св-ва систмы в целом.

В больших (сложных) системах нельзя установить непроницаемые перегородки, разграничивающие действия пер-ых различной физической природы. Н-р, практически во всех химико-тхнологических процессах нужно одновременно учитывать такие, не поддающиеся в реальных условиях разграничиванию процессы, как теплопередача, аэродинамические и гидравлические процессы, кинетику мн-ва одновременно протекающих реакций. Понятие эл-та такой системы и расчленения системы на эл-ты условны и зависит от целей анализа, т.к. каждый эл. можно рас-ть как систему.

Эл-ты могут накапливать, передавать, преобразовывать и рассеивать энергию или информацию. Типичными эл-ми яв-ся трубы, краны, теплообменники, емкости, компрессоры, двигатели, триоды, конденсаторы и пр.

Точка, в к-ой соединяются эл-ты, наз. узлом. В узлах не происходит никакого накопления, преобразования или рассеивания энергии. Узлами, н-р, яв-ся, электрические шины, патрубки и муфты для присоединения труб. При мт-ом мдв. практически каждую промышленную систему можно представить состоящей из эл-ов, узлов и подсистем.

Формально любая совокупность эл-ов данной системы может расв-ся как ее подсистема. Обычно подсистемы яв-ся нек-ми самостоятельно функционирующими частями системы. Н-р, в производственном комплексе предприятия можно выделить подсистемы, ств-щие отдельным цехам или технологическим линиям. Правильное выделение подсистем сложной системы способствует упрощению расчетов при мдв. и более наглядной интерпритации его результатов. Модель подсистемы составляется в виде структуры из мд-й эл-ов и целиком входит в полную мд. управляемой системы.

Общая идея модели отображается в виде логической структурной схемы системы. Принято строить модель по модульному принципу, т. е. в виде совокупности стандартных блоков-модулей. Такой подход дт-но эффективен, логически оправдан и может быть легко осуществлен и проверен. При этом можно строить и совершенствовать модель итерационным методом, добавляя к основной схеме блок за блоком. Построение модели из стандартных блоков дает возможность экспериментировать при ее реализации и в процессе машинной имитации.

В общем случае сложная система яв-ся многоуровневой, состоящей из взаимосвязанных эл-ов, объединенных в подсистемы различных уровней. Использование понятия многоуровневой системы сущ-но расширяет возможность формального описания и мдв-ия материального мира. При этом объекты большой сложности становятся предметом системного анализа, точного мт-го расчета.

Представление исследуемого объекта в виде многоуровневой конструкции из эл-ов обычно наз-ют структуризацией объекта. Структуризация – первый шаг на пути формального описания сложной системы. Другие нх-ые шаги связаны с формализацией эл-ов и взаимодействий между ними.

При декомпозиции сложных промышленных систем удобно расчленять их на типовые эл., в к-ых протекают сходные между собой технологические процессы. Для выделения типовых эл-ов (процессов) и опр-ия их природы используют сд-ие критерии: 1) общность мт-го описания (модели) процессов, т.е. идентичность материальных и энергетических связей. Такая общность модели учитывает физико-химические особенности процессов; 2) общность аппаратурно-технического оформления процессов, отражающая их целевое назначение и условия реализации, 3) общность особенностей автоматического упл-ия, к-ая связана с природой процессов.

Взаимодействие эл-ов в процессе функционирования сложной системы расв-ся как результат совокупности воздействий каждого эл-та на др. эл-ты. Воздействие, представленное нек-ым набором хркс-к, наз-ют сигналом. Каждый эл-т системы в общем случае может принимать входные сигналы и выдавать выходные. Сигналы передаются по каналам связи, проложенным между эл-ми сложной системы.

Совокупность алгоритмов, моделирующих (мдр) эл-ты, с учетом алгоритмов их взаимодействия опр-ет исходный мдр-щий алгоритм системы. Разрабатывают мдр-щий алгоритм так, чтобы получить оценки хрск-к системы с мкс-ой или заданной точностью. Конечные же цели мдв-ия системы в том, чтобы суммарная ошибка оценки выходных показателей системы не превосходила нек-ых наперед заданных величин. В суммарную ошибку входят ошибки случайные (из-за конечного числа реализаций на модели) и детерминированные (возникшие неточностями структурного описания элр-ых процессов). Составление алгоритма наз. алгоритмизацией.

При составлении модели, состоящей из отдельных функциональных блоков, возможны два подхода в зависимости от назначения модели:

Структурный подход – мдв-ие внутреннего механизма блока. В этом случае ММ должна отражать механизм взаимодействия узлов, эл-ов и деталей расв-го блока; мдр-ся как внутренняя структура блока, так и функционирование его эл-ов. Этот подход применяется тогда, когда задачей мдв-ия яв-ся, н-р, проверка структуры блока, правильности взаимодействия его частей и общей логики работы модели. Критерием правильности структуры блока является выполнение блоком заданной в ходе мдв-ия функции (фк).

Функциональный подход – мдв-ия фк-и блока. В этом случае блок разв-ся как «черный ящик», его внутренний механизм может не моделироваться; задается лишь передаточная фк. блока в целом. Этот подход применяется к тем блокам, внутреннее содержание к-ых не описывается данной моделью. Такие блоки расв-ся как неделимые эл-ты мдр-мой системы.

Выбор того или иного подхода к мдв-ию функциональных блоков зависит от поставленной задачи. В ряде случаев мдр-щей алгоритм оказывается настолько сложным, что приходится изменить формулировку исходной задачи мдв-ия для упрощения мт-го описания. Конечно, при этом снижается точность мт-ой модели из-за исключения части параметров или взаимодействий моделируемого объекта.

Для упрощения мт-го описания системы важную роль играет удачная декомпозиция ее на блоки. В качестве примера, рас-им нек-ой процесс А, к-ый расчленим на ряд элр-ых актов (блоков, подпроцессов) $A_i\left(i=\overline{1_j m}\right)$ так, чтобы построение мт-ой модели для каждого из них было заведомо возможно (рис. 2). Граница между ними условна и проходит «по телу» системы, рассекая многочисленные связи с циркулирующими по ним потоками информации. При технологически грамотном расчленении системы часть ее эл-ов из модели исчезает, поэтому такие эл. не оказывают значимого влияния на ход процессов, исследуемых с помощью модели. Разделение модели процесса А на блоки неоднозначно и зависит от того, какие части системы ранее анализировались автономно, от имеющихся стандартных программ, от традиций исследователя и т.п. Однако при прочих равных условиях обмен информацией между блоками должен быть по возможности мнм-ым. А удаляемые блоки должны быть несущ-ми и маловлияющими на принятый критерий интерпретации результатов мдв-ия. Правила замены блоков упрощенными эквивалентами различаются в зв-ти от характера взаимодействия блоков с оставшейся частью системы. Сказанные демонстрируем на схеме рис.2

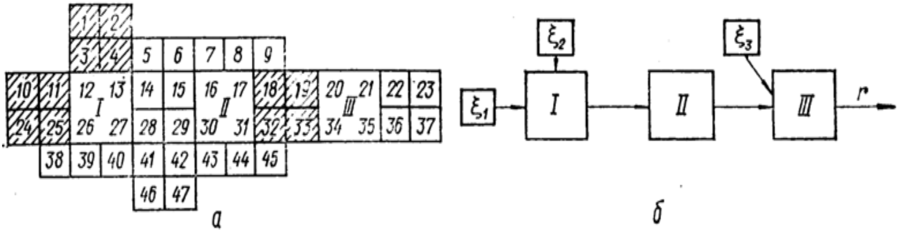


Рис. 2

При удалении оконечных эл-ов (22, 23, 36, 37 на рис. 2, а) функционирование этих эл-ов следует отразить при конструировании критерия r интерпретации результатов (рис. 2, б). Ряд эл-ов (14, 15, 28, 29) заменяется пассивными связями, транслирующими без исключения информацию, к-ой обмениваются сохранившиеся эл-ты. Нек-ая часть эл-ов заменяется внешними воздействиями, н-р, эл-ты 10, 11, 24, 25 заменены воздействием ξ_1, эл-ты

1–4 воздействием ξ_2. Возможны комбинированные замены: эл-ты 18, 19, 32, 33 заменены пассивной связью и воздействием ξ_3. Оставшиеся эл-ты группируются в блоки I, II, III. Описания этих блоков могут быть полностью воспроизведены в модели или, если это необходимо, заменены упрощенными операторами, характеризующими отдельные аспекты функционирования ств-щей части системы.

2^0. Упорядочение качеств сложных систем. По мере возрастания сложности систем у них возникают новые более эмергентные качества. При этом сохраняются качества более простых систем. В порядке возрастания активности качеств оправдано сд. их упорядочение (уп): устойчивость, помехоустойчивость, управляемость и самоорганизация. Здесь каждое последующее качество имеет смысл лишь при наличии предыдущего. Дев-но, без устойчивости из связанных между собой эл-ов невозможно сущв-ие системы. Далее, без устойчивости (сд-но, простейшего проявления сложности системы, выражающееся в акте решения) немыслимо правильная информированность системы о среде, связанная с помехоустойчивой ориентацией в ней. Также очевидно, что без наличия устойчивости и помехоустойчивости, любые активные действия системы в среде (управляемость) невозможно. И, наконец, такое качество, как самоорганизация, яв-ся результатом накопления опыта использования всех перечисленных качеств во времени, его переработки и коррекции в зависимости от изменяющегося состояния среды. Остановимся на некоторых чертах этих качеств.

Устойчивость есть первичное качество систем, т.к. без него системы как таковые не могут сущв-ть. Простые системы имеют пассивные формы устойчивости: прочность, сбалансированность, гомеостазис (возврат в равновесное состояние при выводе из него). Причем эти формы (кроме прочности) касаются поведения простых систем. Для сложных систем определяющими яв-ся активные формы устойчивости: надежность, живучесть и др., к-ые носят в основном структурный хрк-ер. Надёжность опр-ся как сохранение структуры системы, несмотря на гибель отдельных ее элементов, с помощью их замены и (или) дублирования, а живучесть как активное подавление вредных факторов. Т. о. надежность яв-ся более пассивной формой структурной устойчивости, чем живучесть.

Следует отметить, что все еще не дт-но исследованной яв-ся высшая форма структурной устойчивости сложной системы – помехоустойчивое перекодирование постоянной структуры, осуществляемое произвольными эл-ми и связями между ними, к-ая опр-ет высшую форму сложных систем, наз-мые перевоплощающимися. Примером такой системы яв-ся биоценоз, где под биоценозом нужно понимать систему, фиксирующую лишь тип связей между компонентами – «специальностями» овеществляемыми в ходе эволюции произвольными, но специализированными популяциями. Н-р, модно считать тождественными биоценозы с одними теми же связями между популяциями, когда сами популяции могут быть представлены либо сумчатыми, либо высшими млекопитающими.

Катастрофы и потенциальная приспосабливаемость жизни. Вариабельность (изменение) параметров среды требует пластичности поведения и структуры сложных систем. На уровне решающих и самоорганизующих систем их внутренняя устойчивость дополняется внешней – переходу к массовому воспроизведению, когда гибель отдельной системы компенсируется их быстрым воспроизведением в популяции. Этот универсальный тип популяционной устойчивости не требует прогнозирования катастрофических воздействий внешней среды. Он хрк-ен для одноклеточных организмов и для массового производства сравнительно простых технических систем. Однако на более высоком уровне предвидящих систем «предвиденье» катастрофических воздействии среды оказывается опр-щей особенностью, и не только предвиденье, но и активная подготовка к ним. Такие системы обладают принципиально новым типом поведения – перспективной активностью, о которой уже упоминали.

Здесь следует уточнить, что понимается под катастрофическими воздействиями среды на систему. Т.к. среда состоит из случайных факторов, то целесообразно это уточнение делать исходя из вероятностных (верт.) опр-й.

Рас-им какой либо параметр внешней среды, оказывающий сущ-ное воздействие на данную систему, н-р, температуру, к-ую можно рас-ть как случайную величину, имеющую мт-ое ожидание $\overline{\xi}$. Тогда верт-ть того, что случайная вел. ξ отклонится от своего среднего значения $\overline{\xi}$ в ту или другую сторону более чем на нек-ое фиксированное «пороговое» значение x меньше, чем больше порог x. В зв-ти от специфики системы нек-ое критическое значение порога $x = x_0$ можно считать опр-щим для отличия катастрофических воздействий на нее среды ($x > x_0$) от не катастрофических ($x \le x_0$), т.е. $P\left(\left|\xi - \overline{\xi}\right| > x_\theta\right) = P\left(x_\theta\right) \to 0$ с ростом x_0, где x_0 наз. уровнем катастроф для системы по параметру ξ среды. Если рас-ть посл-ть значений параметра ξ через интервал времени $\vartriangle t$, обеспечивающий их незв-ть, то при постоянстве распределения (расп.) случайной вел. ξ среднее время между катастрофами уровня x_0 для системы равно величине $\mathrm{T}_0 = \dfrac{\vartriangle t}{p\left(x_0\right)}$, возрастающей с ростом x_0, т. е. среднее время между катастрофами уровня x_0 растет с ростом x_0. Отсюда следует, что, если средняя продолжительность жизни системы А равна $\mathrm{T}_A << \mathrm{T}_0$, то ей бессмысленно готовиться к встрече с катастрофой уровня x_0, а если $\mathrm{T}_A > \mathrm{T}_0$, то она должна готовить себя к этой встрече.

Здесь оценка среднего времени T_A сущв-ия системы, подстраивающейся (адаптации) к не катастрофическим изменениям сущ-ных для нее параметров среды яв-ся важнейшей задачей. Можно исходить из постулата о потенциальной приспособляемости (адаптации) жизни к любым дт-но стабильным условиям среды, т.е. сущв-ие жизни ставиться в зв-ть лишь от стн-ия хрк-ных времен: средней продолжительности T_A жизни биологической системы в изменяющихся условиях (времени успешной приспособляемости) и среднем временем T_0 между катастрофами уровня x_0 в среде В (вариабельности среды $\mathrm{T}_{\text{в}} = \mathrm{T}_0$). Жизнь может сущв-ть там, где $\mathrm{T}_A << \mathrm{T}_{\text{в}}$. Если же $\mathrm{T}_A >> \mathrm{T}_{\text{в}}$, то жизнь оказалась бы прерванной с гибелью данной системы.

Воздействие на систему одного параметра среды можно обобщать на воздействие многих параметров (причин), приводящих к гибели системы.

Во всех приведенных рассуждениях не обсуждаются причины столь целесообразных адаптивных св-в жизни. Они просто постулируются, а основанием для этого яв-ся эмпирические факты. Сами же цели и целесообразности формализуются стремлением сложных систем достигнут опрн-го, в нек-ом смысле предпочтительного для них состояния. Это находит свое формальное мт. описание в терминах потенциальной эффективности и опт-сти.

3^0. Потенциальная эффективность человечества. Искусственный интеллект. Человек и человечество, как и высшие животные и их популяции, яв-ся предвидящими системами. Очевидно, что упреждающие способности особи и популяции регламентируются средними временами их жизни. Ясно, что особи не должны ориентироваться на редкие, но мощные катастрофы уровня x_0 со средним периодом T_0, соизмеримыми с геологическими периодами. Однако для популяции со средним временем жизни порядка T_0 такие катастрофы представляют прямую угрозу. Не яв-ся ли преадаптация, упомянутая в 4^0: 1.2, проявлением такого «предвидения»? Это явление состоит в резервировании популяций для своих особей бесполезных им в данной среди признаков. Однако в другой среде, возникающей после катастрофы, эти признаки оказываются жизненно полезными. Популяция людей (человечество) сейчас осознала надвигающуюся экологическую катастрофу и, видимо, начинает готовиться к ней, пытаясь, если не предотвратить, то по крайне мере смягчить ее, изменив свое «индустриальное» поведение.

Присущий предвидящим системам акт решения имеет специфическую форму – прогнозирующий стимул (блок предиктора, т. е. предвидения) вырабатывает упреждающую его реакцию (блок управления.) При этом из-за диспропорции эффективностей блоков предвидения и управления возможны две разные ситуации. Так, предвидя неизбежность смерти, человек, как правило, не может продлить свою жизнь до желаемых для него и реальных при этом пределов. Здесь блок предвидения эффектнее блока управления. В последние десятилетия в связи со второй технической революцией у всего человечества возникла противоположная диспропорция. Имея мощные технические средства воздействия на биосферу, человечество не может пока надежно научно прогнозировать результаты таких воздействий на дт-но большой период времени, т. е. несмотря на грандиозные успехи традиционных наук (физика, химия, биология и социология), человечество для решения указанной проблемы экоцида оказалось в научном плане фактически безоружным. Конечно, имеются попытки решения проблемы экоцида исходя из «здравого смысла», но они не убедительны и не перспективны.

Альтернативой создавшемуся положению может явиться только лишь ставка на создание новой фундаментальной науки – систематологии. При этом надо оценить, возможно ли решение проблемы экоцида естественным интеллектом человечества в сжатые сроки и не потребуется для этого создание искусственного интеллекта (ИИ). Здесь надо четко учесть принципиальное отличие используемой сейчас ЭВМ и тем, что можно назвать ИИ в современном его понимании. Первую можно считать Вычислителем или в лучшем случае состояние Решателем задач [36], поставленную человеком, н-р, док-во теорем, сформулированных человеком в виде гипотез при заданном им же аксиомах.

Сейчас ИИ [116,127] понимается как искусственный Исследователь неведомой человеку среды или искусственный проектировщик искусственных же систем. При этом всякий раз человек опр-ет лишь область исследования или проектирования и конечную эффективность их, но не приводит точной формулировки решаемой задачи. ИИ должен сам регулировать свои мотивации в выборе тех или иных постановок и решений задач на основе своего блока эмоций (простоты, красоты, неожиданности, комфортности и т.д.).

Теперь у читателя, после того как он постиг красивую спиральную триаду «наивная системология – физикализм – системология» может возникать вопрос: А что же дальше? По-видимому, дальше будет-то, что можно было бы назвать «детским вариантом» [113], связанным с ИИ. После создания самоорганизирующегося ИИ на дт-но продвинутой технической (а может быть, и на биологической) базе человек может задавать ему вопросы нарастающей сложности и получить ответы на них до поры до времени на понятном ему языке. И убедившись, что ИИ дает правильные ответы, человек будет иметь основания верить ИИ. Эта вера весьма укрепится, когда на вопросы людей ИИ сможет дать ответы, неведомые человечеству, и сможет еще объяснить людям, почему это так. Однако по мере возрастания сложности вопросов сначала наступит период понятных ответов с объяснениями, выходящими за пределы понимания людей, а затем и сами ответы окажутся для них невразумительными.

Описанные возможности того, что может быть после красивой триады, названы детским вариантом потому, что в нем человечество выступает перед ИИ в роли ребенка, вопрошающего родителей. Здесь интересно было бы оценить возможности детского варианта в научном плане. Это можно осуществить в рамках системологии.

Сущ-ие в рамках ситемологии теория потенциальной эффективности сложных систем любой технической и биологической природы распространяет ее предельные законы и на человечество как специфическую сложную систему, и на ИИ. Эффективность любой сложной системы огр-на ее потенциальной эффективностью. Биологические огр-ия, лимитирующие эффективность деятельности человека и человечества, яв-ся дополнительными (дпн.), не позволяющими им приблизиться к потенциальной эффективности сложных систем без таких огр-ний. Что касается ИИ, то оценка его эффективности невозможна до тех пор, пока не будут открыты дт-но глубокие предельные законы потенциальной эффективности самоорганизующихся систем. Пока же нам известны лишь предельные законы потенциальной эффективности решающих систем – простейшего класса сложных систем.

4^0. Исследования самоорганизации сложных систем. Проблемы самоорганизации сложных систем посвящено больше исследований, чем другим проблемам сложных систем. Началом этих исследований считают попытку американца Ф. Розенблата в 1957 г. построить модель физиологического восприятия – так назм-й персептрон. С тех пор развивалось целое направление распознавания образов [1, 15,28], имеющее в основном экспериментальный характер. Можно построить теорию распознавания образов и на четкой статистической основе [14], но до сих пор не установлены предельные законы распознавания для сколько-нибудь нетривиального случая.

Поэтому более широкая концепция самоорганизации исследуется до сих пор на эксп-ом уровне. При этом численное мдв. процессов самоорганизации на ЭВМ используют биологические аналогии отбора (селекции) и случайных генераций (мутации). Основными методами самоорганизации являются: Метод группового учета аргументов (МГУА) и метод эволюционного мдв-ия. Оба метода яв-ся естественной альтернативой теории самоорганизации.

Дсв-но, самоорганизация биологических систем до интеллектуального уровня возникла в ходе «слепой» эволюции, управляемой неосознанными целями. Причем целью являлось построение предельно эффективных для данных условий среды биологических систем с помощью отбора, закрепляющего полезные признаки. Имитируя мутации и отбор на полиномах, конечных автоматах и др-х мт. объектах, эти методы стремятся насколько это возможно повысить эффективность распознавания, предсказания и др-х процедур с помощью указанных мт. объектов. При этом такой вид мдв-ия тем эффективнее по сравнению с др-ми, чем нестационарнее среда. В самоорганизующих моделях их структура и поведение заранее не фиксируются (в отличие от др-х моделей), а все время обновляются в ходе эксперимента, приближаясь к предельно эффективным для данного уровня нестационарности среды. Пока оценки хода сходимости процесса самоорганизации и получаемой при этом предельной эффективности носят, как правило, эксп-ый характер. А в плане теоретических оценок делаются лишь некоторые попытки. Длительное топтание на месте теории самоорганизации, видимо, связано с наличием каких-то неясных пока принципиальных трудностей в этой области. Правда есть и др. концепции (принципиально отличных от расв-ой), к-ые приведем в 6^0.

5^0. Общая форма предельного закона. Для простых систем определяющими яв-ся законы сохранения вещества и энергии. Так, если в изолированную систему из среды регулярно через единицы времени поступают порции энергии $\vartriangle v_i$, то за n моментов времени в нее поступают $v = \vartriangle v_1 + \ldots + \vartriangle v_i + \ldots + \vartriangle v_n$ энергии, тогда общее количество энергии u, которое система может выделить в среду за то же время не может быть больше $v(u \le v)$. Общее количество энергии не возникает и не исчезает, а лишь обменивается. Закон сохранения энергии яв-ся физическим постулатом, основанном на эмпирическом опыте. Любое нарушение этого закона обнаруживает, что система имела нек-ую запасную энергию (т.е. $U > V$), к-ую она выделила в это время в среду независимо (незв.), что получила от среды. Рас-им сд. пример не физического, а системного хрк-а.

п1. Пусть сложная система регулярно через интервал единицы времени воспринимает искажаемые символы 0 или 1, причем их перепутывание в различные моменты времени происходит незв-мо друг от друга с постоянной (пст.) вероятностью (верт.) р ($0 < p < 0,5$). Системе известны v сигналов $x_1, \ldots, x_к, \ldots, x_\upsilon,$ взаимно-однозначно закодированных v посл-ти из u бинарных символов 0 и 1 (длиной u). Известно, что принятая после искажений отдельных бинарных символов посл. v образовалось из одной из υ посл-ей, закодировавших сигнал x_i, но неизвестно, какой именно. Требуется, чтобы система произвела акт решения (декодирования) – выбрать при наличии у одну из v посл-ей, кодировавшей сигнал x_i и этим указать передававшийся, по ее мнению, сигнал x_i, что может быть верным лишь с нек-ой верт-ю $P<1$.

Р. Согласно одному из предельных законов потенциальной эффективности (здесь помехоустойчивости), открытому К. Шенноном в 1948 г., имеется фундаментальная величина

$$v_0 = 2^{uc(p)}, \text{ где } c(p) = 1 + p\lg_2 p + (1-p)\lg_2(1-p),$$

такая, что при $v < v_0$ сущ-ют такие способы кодирования и декодирования, при к-ых верт-ть правильного декодирования Р с ростом u приближается к единице. Если же $v > v_0$, то при любых способах кодирования и декодирования Р с ростом u стремится к нулю.

Т. о. при заданных р и большем u система может различать $v < v_0$ сигналов, а $v > v_0$ не может. Н-р, при р=0,1 и u=100, то $v_0 = 0,3 \cdot 10^{16}$ и система может различать $v < v_0$ сигналов.

Какой бы ни была реальная сложная система, биологической или технической, если она уд-т условиям, при к-ых была построена ств-щая модель, то она не может различать больше чем v_0 сигналов (предполагается, что в систему не поступает никакая информация, кроме указанной). Такого рода общие и вместе с тем конкретные заключения трудно переоценить, если иметь в виду, что они сделаны без исследования конкретной структуры и поведения сложных (н-р, биологических) систем.

Приведенный пример используется и в теории потенциальной эффективности сложных систем. Ее основным понятием яв-ся понятие так назм-го (u , v) – обмена между системой А и средой В, где u – нек-ое количество (кол.) абстрактных ресурсов, расходуемых системой, к-ые система «платить» среде за кол-во v приобретаемых абстрактных ресурсов [113]. Так, за сохранение своей надежности на время $v = t$ система должна платить среде своими выходящими из строя эл-ми в количестве $u = n$. Для различения $v = M$ сигналов на фоне шумов среды (как в п1) система расходует часть $u=t'$ приобретенного ею во времени своей жизни ($t' < t$). Для приобретения у среды нек-го кол-ва v нх-ых системе ресурсов (н-р, порции $\mathrm{v} = n'$ собственных эл-ов) система снова расходует свой «жизненный» ресурс – часть времени жизни $u = t''(t' + t'' < t)$, н-р, в конфликтной игре со «злонамеренной» средой и т. д.

Эффективность системы всегда ограничивается предельно выгодным для нее (u, v_0) – обменом, т. е. она получает предельно большое v_0 или фиксированное v_0, тратя предельно малое u.

Величина $v = v(u,\ A,\ B)$ зависит от величины u и структур, поведений системы А и среды В. Величина v_0 опр-ся так:

Для широких классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ систем $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ и сред $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ сущ-ет фундаментальная величина

$$\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}\left(u, A_{0_1} B_0\right) = \max_{\mathrm{A} \in \mathcal{A}} \min_{\mathrm{B} \in \mathcal{B}} \mathrm{v}\left(u, A, B\right), \tag{1}$$

где A_0 и B_0 – экстремальные (опт-ные) в классах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ система и среда ств-но. В случае бесконфликтного взаимодействия системы со средой в стн. (1) не берётся второго экстремума и вместо «наихудшей» для системы среды B_0 фигурирует фиксированная среда В.

Целью системы А, обз-мой $\underline{\mathrm{A}}$ можно считать стремлением её достигнуть наилучшего для себя состояния, опрм-го выгодным $\left(u, \mathrm{v}_0\right)$ – обменом.

Взаимодействие системы со средой обычно носит стохастический хрк-р, и поэтому можно говорить лишь о верт-и $\mathrm{P}\left(u, \mathrm{v}\right)$, с к-ой имеет место $\left(u, \mathrm{v}\right)$ – обмен. Величина (вел.) $\mathrm{P}\left(u, \mathrm{v}\right)$ наз-ют эффективностью системы. Отождествляя цель системы $\underline{\mathrm{A}}$ с выгодным $\left(u, \mathrm{v}_0\right)$ – обменом, верт. $\mathrm{P}\left(u, \mathrm{v}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)$ можно считать верт-ю достижения системой своей цели. В этом случае такую верт-ть наз-ют потенциальной эффективностью системы. Иногда эффективностью системы наз-ют саму вел. v, а фундаментальную вел. v_0 – её потенциальной эффективностью.

При больших значений u, к-ым ств-ют большие значения v, имеет место сд. асимистатическое стн:

$$\mathrm{P}\left(u, \mathrm{v}\right) \approx \begin{cases} 0 \quad \text{при } \ \mathrm{v} > \mathrm{v}_0 \\ 1 \ \text{ при } \ \mathrm{v} < \mathrm{v}_0 \end{cases} \tag{2}$$

В част., для рас-го выше случая различения системой $v = \mathrm{M}$ сигналов, закодированных посл-ми длиной $u = t$, на фоне шумов верт. Р правильного декодирования, играющая роль эффективности, имеет вид:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}\left(t, \mathrm{M}\right) \approx \begin{cases} 2^{-tk\left(p_R, p\right)} \quad \text{при } \ \mathrm{M} > 2^{\mathrm{tc(p)}}, \\ 1 - 2^{-tk\left(p_R, p\right)} \quad \text{при } \ \mathrm{M} < 2^{\mathrm{tc(p)}}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathrm{k} = (x,y) = x\lg_2(x/y) + (1 - x)\lg_2[(1 - x)/(1 - y)]$ $\qquad (0 \le x, y \le 1)$
и $\mathrm{p_R}$ яв-ся решением ур-ия $\mathrm{R = C(p_R)}$, причем $\mathrm{R = (lg_2M)/t}$ и $\mathrm{C(p) = k(p;\ 0{,}5)}$.

Ясно, что n1 следует расв-ть как асимптотический случай $(t \to \infty)$ cmн. (3) и как частный случай общего стн. (2).

6^0. Другие концепции. Кроме выше приведённой концептуальной схемы (кратко назовём концепцией целесообразности), имеются и др. концепции как внутри системологии, так и в несколько расширенных рамках физикализма. Приведём основные из них.

1. Клеточные автоматы. После успешной разработки теории решающих систем, связанной с именами В.А. Котельникова, К. Шеннона и Дж. фон Неймана, в 50-е годы делается попытка теоретической атаки самоорганизующихся систем. Однако несоизмеримые трудности возникшие при переходе от исследования решающих к исследованию самоорганизующихся систем сказались и на ств-щих результатах. Если в первом случае они носили хрк-р изящных законченных аналитических теорий, во втором – это были фрагментарные исследования в виде частных примеров. Однако эти неудачные попытки привели к клеточным автоматам Дж. фон Неймана. Они были всё еще четко опр-ми детерминированными моделями, о них всё ещё доказывались труднейшие теоремы, но самое главное было не это. Расв-ые объекты были нового качества. Клеточные автоматы были системами, пр-ное перемещение эл-ов к-ых опр-лось не физическими, а логическими причинами. Это позволило с их помощью строить примеры самоорганизации в «чистом» виде и улавливать самую сущность этого явления.

2. Янус-космология. Др-им качественным скачком было помещение образований на каждую из сторон нек-ой двусторонней пвх-ти (игроки-антиподы). Их функционирование на каждой из сторон и взаимодействие, связанное с самоорганизацией, описаны в ряде работ и названы Янус-космологией. Расв-ся примеры такого функционирования и на односторонних пвх-ях. Оказалось возможным опр-ть такие симметричные правила игры между игроками-антиподами, к-ые позволили ответить на вопросы, запретные в физике. Н-р, удалось логически «объяснить» закон сохранения энергии, силовые поля и «принципиальную» стохастичность физических объектов. Все эти феномены, постулируемые физикой, объясняются в янус-космологии исходя из единой системной конструкции. При этом и живые, и неживые системы выступают лишь как различные проявления её. Т.о. янус-космология претендует на построение единой картины мира на системной основе, т. е. яв-ся антиподом физикализма.

3. Неоструктурализм. Широкая концепция, претендующая на открытие всеобщих законов, управляющих неживыми, живыми и знаковыми системами, была развита Ю. А. Урманцевым. Эти законы выводятся из всеобщей структурной хркс-ки систем Вселенной любой природы – симметрии. Это направление, наз-мое неоструктурализмом, статично, а не динамично, в нём нет поведенческого эл-та, а поэтому и телеологии. Поэтому неоструктурализм скорее физикалистская, чем системологическая концепция в том смысле, как выше была опр. системология – концепция целесообразности.

Конструктивность концепции неоструктурализма демонстрируется широкой «сводкой» констант для систем самой разнообразной природы. «Распутывание» этих констант ведётся на основе проявления симметрии в законах «золотого сечения», рядов Фибоначчи и т.д. Всё это трактуется как следствие постулируемого всеобщего структурного св-ва Вселенной – симметрии или гармонии.

4. Необихевиоризм. Сейчас в недрах физикализма намечается направление (наз-мое необихевиоризмом), к-ое пытается использовать экстремальные (эксл.) принципы физики для исследования не только простых, но и сложных систем. Здесь имеют место два варианта. Первый вариант придаёт телеологический хрк-р естественным формулировкам эксл-ых принципов физики. Н-р, принцип наименьшего (нм.) действия звучит так: «Система выбирает такую траекторию, на которой действие мнм-но», или второе начало термодинамики звучит так: «Замкнутая система стремится к состоянию с нб-ей энтропией» и т. д. Второй вариант трактует целевые функции теории сложных систем как потенциалы физики (теория простых систем) и вносит новый конструктивный эл., рекомендуя распространить физикалистический операционный принцип с простых систем на сложные, с анализа электрических сетей на анализ биологических и экнч-их систем. Однако ни первый, ни второй варианты не вносят ничего принципиально нового в концепции и аппарат физикализма сводится лишь к терминологическим новшествам. При этом оба варианта, не реформируя аппарата теоретической физики (диф-ые ур.), фактически остаются в рамках динамической процессологии, т. е. изучения поведения систем без проникновения в их дискретную структуру, отсюда и наз-ие необихевиоризма. Необихевиоризм представляется весьма продуктивной, если даже и не для продвижения в новые области, то по крайней мере для широкого и нового осмысления возможностей физикализма.

Заметим, что из всех перечисленных концепций лишь янус-космология не возводит в культ ни одного из ветвей мт-ки, хотя весьма умело использует изящные топологические конструкции типа листа Мебиуса и его многомерные обобщения. Что касается неоструктализма и необихевиоризма, то их объекты согласованы с геом-ей, теорией групп и тензорами. При этом от непр-ти деформаций своих объектов они не отказываются. Свободная от указанных ограничений комбинаторика может менее предвзято, чем др. разделы мт-ки, приступать к решению системных задач. Отметим также, что физика успешно занимается и должна впредь заниматься простыми системами, а системология – сложными. Нарушение пререгатив каждый из них приводит к неэффективным результатам для обоих сторон (примером этого может быть физикализм). Однако это не означает, что один и тот же объект не может успешно исследоваться обоими этими направлениями. Н-р, биологические системы – биофизикой и системологией.

1.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТИПЫ МОДЕЛЕЙ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое мдв. и модель. Приведите примеры конкретных моделей из различных областей.

2. Что такое мт-ая модель и как она выражается.

3. Что понимается под моделью в теории моделей. Чем отличается теоретическая мд. от мт-ой мд-ли. Приведите примеры.

4. Перечислите типы моделей и возможности мдв-ия по отраслям.

5. Приведите основные этапы мдв-ия на конкретном примере.

6. Почему оригинал изучаем через их модели.

7. Какие результаты дают использование мт-их методов в различных отраслях, н-р, в экономике.

Задание для контрольной работы: по образцу рас-ых примеров п1–п3:3^0 решить задачи 1–20, приводя ств-щие им рисунки.

1. Найти радиус и высоту цилиндра, имеющего при данном объёме V наименьшую (нм.) полную поверхность (пвх), $0: R = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}},\ H = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\pi}}.$

2. Найти наибольший (нб.) объём цилиндра, вписанного в данный конус.

$$0:\quad \mathrm{r} = \mathrm{R} - x,\ \ \mathrm{h} = \frac{H}{R}x\,,\ \ \mathrm{V} = \pi\mathrm{r}^2 = \frac{\pi\mathrm{H}}{\mathrm{R}}\left(\mathrm{R}^2x - 2\mathrm{R}x^2 + x^3\right),$$

$$\max V = V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi HR^2$$

3. Из квадратного жестяного листа со стороной а сделать коробку нб-го объёма. $0:\ \ \mathrm{V} = \left(a - 2x\right)^2\cdot x,\qquad \max\mathrm{V} = \mathrm{V}\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3.$

4. Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб для подачи воды. Какой угол α наклона боковых стенок к днищу жёлоба создаст нб-ую площадь (пщ.) поперечного сечения жёлоба?

$$0:\ \alpha = \frac{\pi}{3},\qquad s = \frac{a + 2a\cos\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha = a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right);\qquad max\,\mathrm{S} = \mathrm{S}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

5. Около данного шара описать конус нм-го объёма.

$$0:\ V\left(4R\right) = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{16R^2}{2R} = \frac{8}{3}\pi R^3.$$

6. Число 26 представить в виде суммы трёх плж. слагаемых, сумма квадратов к-ых нм-ая, если известно, что второе слагаемое втрое больше первого. 0: 4, 12, 10.

7. Число 36 представить в виде произведения (пзв.) двух сомножителей так, чтобы сумма их квадратов была нм-й. 0: $36=6 \cdot 6$

8. Число 180 представить в виде суммы трех плж. слагаемых так, чтобы два из них относились, как 1:2, а пзв-ие всех трех слагаемых было нб-им.

$$0:\ 40 + 80 + 60 = 180$$

9. Найти высоту конической воронки нб-го объема, если ее образующая равна *l*. $0: 1/\sqrt{3}$

10. Найти два числа, сумма к-ых равна 26, а произведение – наибольшее из возможных. 0: 13 и 13.

11. Найти два числа, разность к-ых равна 5, а произведение – наименьшее из возможных. 0: 2,5 и -2,5.

12. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, к-ый имеет нб-ую пщ. 0: квадрат.

13. Д-ть, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной пвх-ю нб-й объем имеет куб.

14. Д-ть, что из всех правильных прямоугольных пирамид с данный пвх-ю нб-й объем имеет тетраэдр.

15. В данный шар вписан конус нб-го объема. Найти стн-ие размеров этого конуса. 0: $h : r = 2 : \sqrt{2}$

16. При каком стн. размеров конус данного объема имеет нм-ую пвх-ть?

$$0:\ r : \mathrm{H} = \sqrt{2} : 4.$$

17. Д-ть, что из всех цилиндров данного объема нм-ую полную пвх-ть имеет тот, у к-го высота вдвое меньше диаметра основания.

18. Вокруг данной окружности описано мн-во ромбов. Найти ромб нм-ей и нб-ей пщ-ди.0: ромб нм-ей пщ.– квадрат, ромба нб-ей пщ-ди не сущ-ет.

19. Д-ть, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, правильный треугольник имеет нб-ую пщ.

20. Найти острый угол, для к-го сумма его синуса и косинуса яв-ся нб-ей из возможных. 0: 45°.

21. Разложить число а на два таких слагаемых, чтобы их пзв-ие было нб-им. 0: $a/2$.

22. При каком отн. смежных сторон параллелограмма данной пщ. S его периметр будет нм-им. 0: 1:1.

23. Найти на данной прямой точку, чтобы сумма расстояний от неё до двух данных точек была минимальна.

24. Вписать в круг прамоугольник нб-ей пщ-ди.

1.2. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. СИСТЕМОЛОГИЯ

1. Всегда ли выгодно использование результатов ММ?

2. Что такое предмодельное исследование и для чего оно нужно?

3. Что такое кризисное и критическое числа и как они используются при разработке ММ и внедрении их результатов?

4. Что такое система. Приведите различные понятия системы.

5. Приведите примеры материальных, нематериальных и смешанных систем.

6. Что понимаете под абстрактной и кибернетической системами.

7. Что такое подсистема. Приведите примеры.

8. Что такое сложная система и чем она отличается от системы. Приведите пример сложной системы.

9. Как понимаете, что сложная система обладает иерархической структурой со свойством целостности. Почему нх-мо системный подход к изучению сложных систем.

10. Объясните многообразие мира через их иерархической упорядоченности.

11. Характеризуйте закономерности иерархий с повышением их уровня (разнообразие, обилие или распространенность, сложность структуры, устойчивость, эмергентность, неидентичность).

12. По какой причине происходит нарастающее ухудшение окружающей человека естественной среды (экоцид) и есть ли выход из этой ситуации?

13. Характеризуйте три периода развития науки в отдельности.

14. Характеризуйте основные отличия системологии от физикализма (умозрительность вместе экспериментальности, эмергентность вместо редукционизма, целесообразность вместо естественности, объяснение и предсказание).

15. Характеризуйте законы физикализма.

16. На основе каких принципов и их следствий устанавливаются законы системологии?

17. Перечислите основные принципы усложняющего поведения систем.

18. Что понимаете под актом решения и для каких сложных систем он яв-ся определяющим?

19. Как используются принципы системологии.

20. Дайте понятие оптимизационной модели.

1.3. СИСТЕМА И СРЕДА. ОСНОВНЫЕ ТРУДНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Объясните понятие системы и среды на примере технологического процесса. Какие случайные факторы могут действовать на системы. Характеризуйте входные, управляющие, возмущающие, выходные параметры и приводите ств-ие примеры.

2. Что понимаете под эл-ом объекта. Приведите примеры. Как используется теория графов в структуре модели.

3. Что такое многоуровневая система и структуризация объекта.

4. Что такое декомпозиция сложных промышленных систем и как опр-ся типовые эл. Взаимодействие этих эл-ов.

5. В чем состоит различия структурного и функционального подходов при составлении моделей, состоящей из отдельных блоков.

6. Что значит удачная декомпозиция системы на блоки. Объясните это на примере.

7. Как связаны между собой новые эмергентные качества (устойчивость, помехоустойчивость, упраляемость и самоорганизация), возникшие с возрастанием сложности систем. Характеризуйте каждый из них.

8. Что такое катастрофы и потенциальная приспосабливаемость жизни.

9. Что такое потенциальная эффективность человечества и акт решения предвидящих систем с блоками предвидения и управления. Приведите примеры о диспропорциях этих блоков.

10. Для чего нужно создание искусственного интеллекта (ИИ) и что можно назвать ИИ в современном его понимании, какие его возможности.

11. Какие решенные и нерешенные проблемы знаете в области самоорганизации сложных систем.

12. Объясните общую форму предельного закона для простых систем, а также для сложных систем на конкретном примере, используя его в теории потенциальной эффективности сложных систем.

13. Характеризуйте другие концепциии (клеточные автоматы, Янус-космология, неоструктурализм, необихевиоризм) в отдельности.

14. В указанных концепциях как используется мт-ка, в частности, дк. мт-ка.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРОВНЕНИЯМ

> Понимание заключается в сведении
> одного типа реальности к другому.
> К. Леви-Стросс

ЛЕКЦИЯ 4

2.1. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ СПОСОБОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1^0. Постановки задачи. Пусть в расв-ом процессе или явлении две величины х и у связаны функциональной зв-ю $y = f(x)$, к-ая нам неизвестна. Однако известна табл. экспериментальных (эксп.) данных

$$x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n\,,$$
$$y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n\,, \qquad (1)$$

содержащая приближенные (прж.) значения величин x и y. Исходя из табл. данных (1), требуется найти формулу (фм), т.е. мт-ую мд. изучаемого процесса, прж-но представляющую фк. $f(x)$. Причем это прж. должно быть наилучшим в каком-то смысле, т.е. должно уд-ть нек-му условию. Возможна различная постановка вопроса о наилучшем прж-и фк-и. Мы рас-им нек-ые из них, в част., принцип наименьших квадратов.

Такая фм., назм. эмпирической, очень облегчает анализ изучаемой зв-ти. При этом характер (хрк.) зв-ти пер-ых x и y, т.е. вид фк-и $f(x)$, предполагается известным из каких-либо теоретических соображений и задачи подбора эмпирической фм-ы сводится к тому, чтобы опр-ть числовые значения параметров, входящих в фм-у данного вида $f(x)$.

Чаще всего при подборе эмпирических ф-л пользуются так называемым принципом наименьших (нм.) квадратов. Он основан на том, что из данного мн-ва фм. вида $y = f(x)$ наилучшим образом изображающей данные значения считается та, для к-ой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычислительных яв-ся нм-ой.

Подбор параметров фк. $f(x)$, основанной на этом принципе, наз-ют способом наименьших квадратов.

Покажем, как практически подбираются по способу нм-их квадратов коэф-ты для фк-й простейших видов типа:

1) линейная фк. вида $y = ax + b$,

2) квадратичная фк. вида $y = ax^2 + bx + c$,

3) гипербола вида $y = \dfrac{a}{x} + b$,

4) показательная фк. вида $y = b \cdot a^x$.

2^0. Линейная интерполяция по способу наименьших квадратов. Пусть задана табл. значений пер-ых и ств-щие точки вблизи прямой линии

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{matrix} \qquad (1)$$

(рис. 1). В этом случае нужно подбирать коэф-ы линейной (лин.) фк. $y = ax + b$ так, чтобы сумма S квадратов отклонений вычисленных (выч.) значений $ax_i + b$ от наблюдаемых значений y_i принимала нм-е значение. Сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right)^2$$

яв-ся фк-ей двух пер-ых a и b, поэтому она принимает минимальное (мин.) значение тогда, когда частные производные по этим пер-ым равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= 2\sum \left(ax_i + b - y_i \right) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2\sum \left(ax_i + b - y_i \right) \cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\},$$

где индекса суммы $\sum$ опущены. Отсюда получим систему.

$$\left.\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b \cdot n &= \sum y_i \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Система (2) наз.нормальной системой. Решив ее правилом Крамера или методом Гаусса, находим решение a^* и b^* и получим эмпирическую фм. $y = a^* x + b^*$.

Для проверки правильности выч-й на одном и том же графике начертим полученную фм. $y = a^* x + b^*$ и точки таб. (1). Если эти точки расположены около графика фм-ы, то выч-ия выполнены правильно.

п1. Рост производительности труда на предприятии за пять лет отражен в сд-ей таблице:

x (годы)	1	2	3	4	5
y [ср. кол. дет. за смену]	235	250	270	292	300

Полагая, что рост производительности труда следует лин-ой зв-ти $y = ax + b$, найти по этим данным параметры a и b, применив способ нм-их квадратов.

Р. Для составления нормальной системы (2) выполняем необходимое суммирование по таблице подсчетов.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	235	1	235
2	2	250	4	500
3	3	270	9	810
4	4	292	16	1164
5	5	300	25	1500
$\sum$	15	1347	55	4209

Из этих данных получим нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} 55a+15b&=4209 \\ 15a+5b&=1347 \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, опр-им: $a^{*}\approx 16{,}8$; b = 219, тогда зв-ть между пер-ми x и y прж-но выражается в виде эмпирической фм-ы $y=16{,}8x+219$.

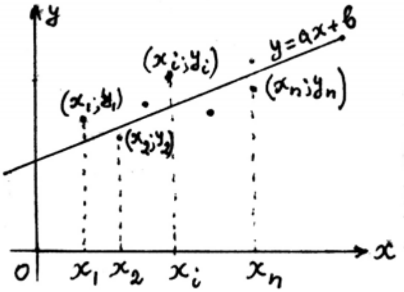


Рис. 1

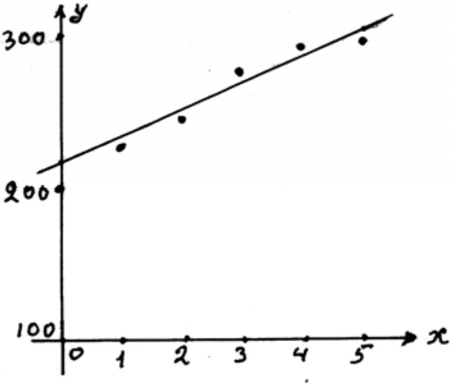


Рис. 2

Проверка осуществлена на рис. 2.

3^0. Параболическая интерполяция. В случае квадратичной фк. $f(x)=ax^2+bx+c$ расв-ем сумму $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(ax_i^2+bx_i+c-y_i\right)^2$, к-ая яв-ся фк-ей трех пер-ых a,b,c и поэтому эта сумма принимает мнм-ое значение тогда, когда частные производные по этим пер-ым равны нулю, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a}&=2\sum\left(ax_i^2+bx_i+c-y_i\right)x_i^2=0 \\ \frac{\partial s}{\partial b}&=2\sum\left(ax_i^2+bx_i+c-y_i\right)x_i=0 \\ \frac{\partial s}{\partial c}&=2\sum\left(ax_i^2+bx_i+c-y_i\right)\cdot 1=0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получим нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} a\sum x_i^4+b\sum x_i^3+c\sum x_i^2&=\sum x_i^2y_i \\ a\sum x_i^3+b\sum x_i^2+c\sum x_i&=\sum x_iy_i \\ a\sum x_i^2+b\sum x_i+cn&=\sum y_i \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Решив систему (3), получим $a^{*},b^{*},c^{*},$ откуда имеем эмпирическую фм. $y=a^{*}x^2+b^{*}x+c^{*}$.

Проверка вы-ия осуществляется аналогична 2^0.

п2. Способом нм-их квадратов найти эмпирическую фм. вида $y = ax^2 + bx + c$ для фк., заданной сд-ей таблицей:

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

Р. Для составления системы (3) вы-ем ств-ие значения степеней x_i и их произведений с y_i:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,5	0,8	0,25	0,125	0,0625	0,4	0,2
2	1,0	1,9	1,0	1,0	1,0	1,9	1,9
3	1,5	4,9	2,25	3,375	5,0625	7,35	11,025
4	2,0	8,8	4,0	8,0	16,0	17,6	35,2
5	2,5	13,9	6,25	15,625	39,0625	34,75	86,875
$\sum$	7,5	30,3	13,75	28,125	61,1875	62,0	135,2

Из этих данных получим нормальную систему

$$\left.\begin{array}{l} 61{,}1875a + 28{,}125b + 13{,}75c = 135{,}2 \\ 28{,}125a + 13{,}75b + 7{,}5c = 62{,}0 \\ 13{,}75a + 7{,}5b + 5c = 30{,}3 \end{array}\right\}$$

Решив систему, находим $a^* = 2{,}54;\ b^* = -1;\ c^* = 0{,}575.$ Тогда искомая эмпирическая фм. имеет вид:

$$y = 2{,}54x^2 - x + 0{,}575.$$

Проверка правильности вычислений осуществлена на рис. 3.

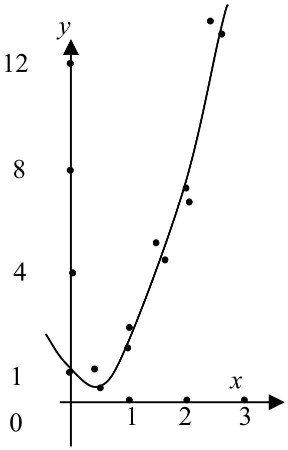


Рис. 3

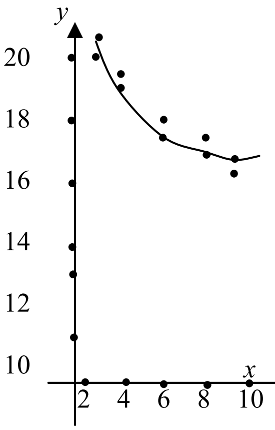


Рис. 4

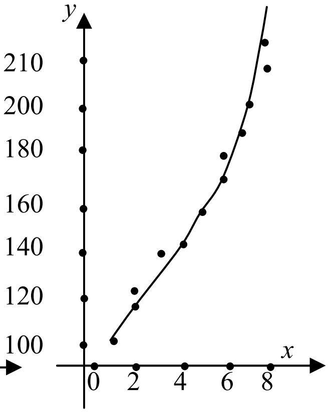


Рис.5

4^0. Гиперболическая и показательная интерполяции. При выравнивании экспериментальных (эксп.) данных по гиперболе $f(x) = \frac{a}{x} + b$ применение способа нм-их квадратов приводит к рас-ю суммы $S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i \right)^2$, являющейся фк-ей двух пер-ых параметров *a* и *b*. Тогда из

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= 2\sum \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i \right) \cdot \frac{1}{x_i} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2\sum \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i \right) \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} a\sum \frac{1}{x_i^2} + b\sum \frac{1}{x_i} &= \sum \frac{y_i}{x_i} \\ a\sum \frac{1}{x_i} + bn &= \sum y_i \end{aligned} \right\} \qquad (4)$$

Откуда опр-им a^* и b^* и получим $y = \frac{a^*}{x} + b^*$.

Гиперболическая интерполяция (инп.) может быть использована, н-р, при анализе себестоимости продукции в зависимости от размеров отрасли животноводства.

п3. Для опр-ия зависимости (зв.) себестоимости 1 ц молока от поголовья коров исходные данные приведены в табл.:

Группы колхозов по числу коров	200–300	300–500	500–700	700–900	900 и более
Среднее поголовье коров x_i сотен голов	2,5	4,0	6,0	8,0	9,5
Себестоимость 1 ц молока y_i руб.	20,0	19,0	18,0	17,5	17,0

Полагая, что зв-ть себестоимости 1 ц молока от поголовья коров следует гиперболической фк. $y = \frac{a}{x} + b$, найти по приведенным данным параметры *a* и *b,* используя способ нм-их квадратов, и проверить результаты на графике.

Р. Для составления системы (4) выполняем нх-ое суммирование по табл. подсчетов:

i	x_i	y_i	$\frac{1}{x_i}$	$\frac{1}{x_i^2}$	$\frac{y^i}{x_i}$
1	2,5	20,0	0,400	0,1600	8,00
2	4,0	19,0	0,250	0,0625	4,75
3	6,0	18,0	0,167	0,0279	3,01
4	8,0	17,5	0,125	0,0156	2,19
5	9,5	17,0	0,105	0,0110	1,79
$\sum$	30	91,5	1,047	0,2770	19,74

Из этих данных получим нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} &0{,}28a + 1{,}05b = 1974 \\ &1{,}05a + 5b = 91{,}5 \end{aligned}\right\}$$

Решив систему, находим $a^* = 11,48$ и b^*=15,89, отсюда получим ур-ие $y = \frac{11,48}{x} + 15,89,$ к-ое используется для опр-ия анализа себестоимости 1ц молока в зв-ти от поголовья коров в колхозах области.

При выравнивании опытных данных по показательной кривой $y = b \cdot a^x$ предварительно ее логарифмируем $\lg y = x \lg a + \lg b$ и рас-им сумму $S = \sum_{i=}^{n} \left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right)^2$, являющейся суммой фк-ей двух пер-вых lg$a$ и *lgb.*

Тогда из

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial \lg a} = 2\sum\left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right) \cdot x_i = 0 \\ &\frac{\partial s}{\partial \lg a} = 2\sum\left(x_i \lg a + \lg b - \lg y_i\right) 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} &\lg a \sum x_i^2 + \lg b \sum x_i = \sum x_i \lg y_i \\ &\lg a \sum x_i^2 + n \lg b = \sum \lg y_i \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Решив систему (5), находим lga^*= α и lgb^*= β, откуда опр-им $a^* = 10^\alpha$ и $b^* = 10^\beta$, тогда получим кривую $y = b^* \cdot a^{*x}$.

п4. Пусть малому предприятию А на основе рыночной экономики удалось получить рост своего дохода за 8 лет (в процентах к первому году работы) по таблице:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	120	126	136	153	171	190	204

Полагая, что рост дохода следует показательной фк. $y = b \cdot a^x$, найти по этим данным параметры a и b, используя способ нм-их квадратов.

Р. Для составления нормальной системы (4) выполняем необходимое суммирование по таблице подсчетов:

i	x_i	y_i	$\lg y_i$	x_i^2	$x_i \lg y_i$
1	1	100	2,0	1	2,0
2	2	112	2,0492	4	4,0984
3	3	126	2,0969	9	6,2907
4	4	136	2,1335	16	8,534
5	5	153	2,1847	25	10,9235
6	6	171	2,2330	36	13,398
7	7	190	2,2788	49	15,9516
8	8	204	2,3096	64	18,4768
$\sum$	36	1192	17,2857	204	79,673

Из этих данных получим нормальную систему из суммы $\sum$ табл. получим нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} 204 \lg a + 36 \lg b = 79{,}673 \\ 36 \lg a + 8 \lg b = 17{,}2857 \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы находим $\lg a^{*} = 0{,}0449$ и $\lg b^{*} = 1{,}9585$. отсюда по таблице десятичных логарифмов получим: $a^{*} = 10^{0{,}0449} = 1{,}109$; $b^{*} = 10^{1{,}9585} = 90{,}9$. тогда $y = 90{,}9 \cdot 1{,}109^{x}$.

Проверка правильности выч-й показана на рис. 5

зм1. Если для инп. вид фк-и $y = f(x)$ не задано, то ее вид иногда удается опр-ть так: на чертеж наносят точки (x_i, y_i) табл.1 и по ним устанавливают вид фк. $f(x)$. Если же вид фк. $f(x)$ по точкам $(x_{i,} y_i)$ невозможно опр-ть, то используем интерполяционные (инпн.) формулы Лагранжа или Ньютона.

Л Е К Ц И Я 5

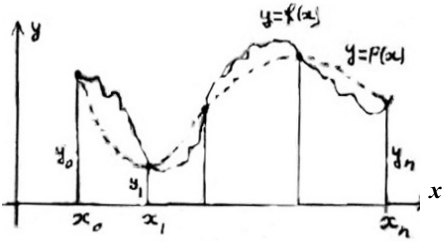
2.2 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА

1^0. Постановка вопроса. Пусть дана табл.

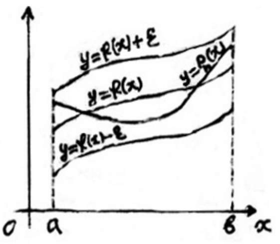
$$x_0\ x_1 \ldots\ x_i\ \ldots\ x_n,$$

$$y_0\ y_1 \ldots\ y_i \ldots y_n, \qquad (1)$$

содержащая прж-ые значения величин x и y. Во многих случаях по данным наблюдения $(x_i;\ y_i)$ табл. (1) не возможно установить вид фк. $y = f\,(x)$. При этом отпадает возможностьиспользованияспособа нм-их квадратов. В таких случаях обычно выбирают $f\ (x)$ в виде полинома $y = p(x)$ как на рис. (1), если только табличные данные не указывают на периодичность в хрк-е изменения у. Основанием к замене искомой фк-и $f\ (x)$ полиномом может служить (д-ная) Вейерштрассом



Р и с. 1



Р и с. 2

т1. Если $f(x)$ непр-на в промежутке $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ сущ-ет ств-щий многочлен (мгл) $P_n(x)$ такой, что для всех x из $[a,b]$ выполняется условие

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Д-во см в [58]. Геом-ки условие (2) означает, что график фк. $P_n(x)$ не выходит из пределов полосы (рис. 2) $f(x) - \varepsilon < P_n(x) < f(x) + \varepsilon$. При этом говорят, что фк. $P_n(x)$ в промежутке $[a,b]$ равномерно прж-ет фк-ю $f(x)$ с точностью до ε .

Способ построения мчл-ов, равномерно прж-щих данную непр. фк $f\ (x)$, был предложен в част. С.Н. Бернштейном. Любой промежуток $[a,b]$ путем лин-го преобразования $x = a + t\ (b - a)$ можно свести к промежутку [0,1]. Если $f(x)$ непр-на в [0,1], то можно подобрать по любому $\varepsilon > 0$ ств. число n такое, что полином Бернштейна $B_n(x)$ будет уд-ть условию равномерного приближения (2). Полином $B_n(x)$ опр-ся равенством

$$B_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} f\left(\frac{\kappa}{n}\right) C_n^{\kappa} x^{\kappa} \left(1 - x\ \right)^{n-\kappa} \qquad (3)$$

п1. Найти многочлен B$_2$(x) для фк. $y = \sin \pi x$ в промежутке [0,1].

Р. По (3) получим.

$$B_2(x) = \sum_{\kappa=0}^{2} \sin \frac{\kappa\pi}{2} C_2^{\kappa} x^{\kappa}(1-x)^{2-\kappa} = 2x(1-x)$$

Рас-им др. способы получения мгл-ов.

2^0. Интерполяционная формула Ланграже, и оценка ее погрешности.

Дана табл. (1). Требуется найти мчл. $L_n(x)$ степени n, принимающий в точках $x_0\, x_1 ... x_i ... x_n$ ств-но значения $y_0\, y_1 ... y_i ... y_n$:

$$L_n(x_i) = y_i, i = \overline{0,n} \qquad (4)$$

Геом. постановка вопроса (рис. 1) такова – требуется найти мгл-н, график к-го проходит через точки, крд-ы к-ых заданы табл-ей (1).

Запишем искомый мгл. (полином) в виде

$$\begin{aligned} L_n(x) &= C_0(x-x_1)...(x-x_n) + C_1(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) + \\ &+ ... + C_i(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n) + ... + C_n(x-x_0)...(x-x_{n-1}), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $c_0, c_1, ..., c_i, ..., c_n$ – неопр. коэф-ты. Полагая в (5) посл-но $x = x_0$, $x = x_1, ..., x = x_i, ..., x = x_n$, получим согласно (4) систему равенств (рав.)

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0(x_0-x_1)...(x_0-x_n), \\ y_1 &= c_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n), ..., \\ y_i &= c_i(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n), ..., \\ y_n &= (x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1}). \end{aligned} \qquad (6)$$

Из стн. (6) легко найти все

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}. \qquad (7)$$

Если обз-им через $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_0)...(x-x_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \omega'(x) &= (x-x_1)...(x-x_n) + ... + (x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n) + ... + \\ &+ (x-x_0)...(x-x_{n-1}), \end{aligned}$$

отсюда $\omega'(x_i) = (x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)$, то $c_i = \dfrac{y_i}{\omega'(x_i)}$,

Тогда, подставляя в (5) значения c_i из (7), получим

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \quad y_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x)} y_i \qquad (8)$$

Стн. (8) наз, инпн-ой фм-ой Лагранжа.

п2. Построить инпн. полином Лагранжа для фк., заданной таблицей:

x_i:	1	2	4	5
y_i:	2	1	2	3

Р. Здесь $n=3$ и в силу (7) получим

$$L_3(x)=2\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(-1)(-3)(-4)}+1\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{1\cdot(-2)(-3)}+2\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{3\cdot 2(-1)}+$$

$$+3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{4\cdot 3\cdot 1}=-\frac{1}{6}(x^3-11x^2+38x-40)+\frac{1}{6}(x^3-10x^2+29x-20)-$$

$$-\frac{1}{3}(x^3-8x^2+17x-10)+\frac{1}{4}(x^3-7x^2+14x-8)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{13}{12}x^2-\frac{11}{3}x+\frac{14}{3}.$$

Проверим правильность вычисления: $L_3(1)=2;\ L_3(2)=1;\ L_3(4)=2;\ L_3(5)=3.$

п3. Опр-ть плотность 26%-го раствора фосфорной кислоты H_3PO_4 при 20^0C, пользуясь сд-ми данными:

$x_i(\%H_3PO_4)$:	14	20	35	50
$y_i(плотности)$:	1,0764	1,1134	1,2160	1,3350

Р. Используя (8) при $n=3$, вычислим

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{\omega(26)}{(26-x_i)\omega(x_i)}=\frac{6(-9)(-24)}{-6(-21)(-36)}+\frac{12(-9)(-24)}{6(-15)(-30)}+\frac{12\cdot 6(-24)}{21\cdot 15(-15)}+\frac{12\cdot 6(-9)}{36\cdot 30\cdot 15}=$$

$=-\frac{2}{7}+\frac{24}{25}+\frac{64}{175}-\frac{1}{25}=1.$ Тогда

$L_3(26)=y=1-\frac{2}{7}0,0764+\frac{24}{25}0,1134+\frac{64}{175}0,2160-\frac{1}{25}0,3350=1,1528.$ Дсв-ое значение плотности 26% -го H_3PO_4 составляет 1,1529.

В том случае, когда инпн. полином строится для известной фк. $f(x)$, естественно поставить вопрос об оценке погрешности в инпн. фм-е Лагранжа. Рас-им разность

$$f(x)-L_n(x)=R_n(x).$$

Величину $R_n(x)$ называют остаточным членом интерполяции.

т2. Если фк. $f(x)$ в промежутке имеет непр. производные до $(n+1)$ -го порядка, то остаточный член инп-ции $R(x)$ можно представить в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (9)$$

Д-во см. в[79]. Из стн. (9) получим оценку

$$\left|R_n(x)\right|\le M_{n+1}(a,в)\frac{\left|\omega_{n+1}(x)\right|}{(n+1)!} \qquad (10)$$

где

$$M_{n+1}(a,b)=\max_{a\le x\le b} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (11)$$

a и b – нм. и нб. из $n+2$ чисел $x_i\left(i=\overline{o,n}\right)$ и x.

п4. Построить инпн. полином Лагранжа для фк. $f(x)=\ln x$ с узлами $x=2,3,4$ и оценить погрешность инпн-го полинома при $x=2,5$. Значения функции в узлах инп-ции

x	2	3	4
$f(x)$	0,6931	1,0986	1,3863

Р. Здесь $n=2$ и в силу (8) имеем

$$L_2(x)=0,6931\frac{(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)}+1,0986\frac{(x-2)(x-4)}{1\cdot(-1)}+1,3863\frac{(x-2)(x-3)}{2\cdot 1}=$$

$$=-0,4813+0,7000x-0,0589x^2 \Rightarrow L_2(2,5)=0,9106$$

Оценим погрешность: $\left|\omega_3(2,5)\right|=0,5\cdot 0,5\cdot 1,5=0,375;\ f(x)=\ln x \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\text{ тогда } M_3(2,4)=\max\frac{2}{x^3}=\frac{1}{4}$$

и в силу (10) получим

$$\left|R_3(2,5)\right|\le\frac{1}{4}\frac{0,375}{3!}=0,0156$$

На самом деле погрешность меньше

$$\ln 2,5-L_2(2,5)=0,9163-0,9106=0,0057$$

Рас-им частный случай, когда узлы инп. – равноотстоящие, так что $x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=h.$

В этом случае для уплощения полезно сделать замену $x=ht+x_0$, тогда $t_0=0, t_1=1, t_2=2,\ldots, t_n=n, x-x_i=h(t-i),\ \omega(x)=h^{n+1}\omega^*(t),$

$$\omega^*(t)=t(t-1)(t-2)\ldots(t-n),\ \omega'(x_i)=(-1)^{n-i}\,i!(n-i)!h^n$$ и фм. Лагранжа (7) запишется в виде

$$L_n(x)=L_n(ht+x_0)=t(t-1)\ldots(t-n)\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{(t-i)i!(n-i)!} \qquad (12)$$

Если потребуется для улучшения приближения повысить на единицу число узлов (а значит, и степень полинома) прибавлением нового узла, полином Лагранжа придется перевычислить заново. В этом отношении удобно пользоваться инпн. полиномом Ньютона, к-ый связан использованием конечных разностей различных порядков.

3^0. Конечные разности. Интерполяционная формула Ньютона. Пусть $y=f(x)$ – заданная фк. Обз-им через Δx приращение (шаг) аргумента *x,* будем наз-ть приращение фк. $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ первой конечной разностью функции у.

Конечной разностью n-го порядка наз. первая конечная разность первой конечной разности $(n-1)$-го порядка, т. е.

$$\Delta^n y = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right)(n = 2,3,...).$$

Так:

$$\Delta^2 y = \Delta\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] = \left[f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)\right] - \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] =$$

$$= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x),$$

$$\Delta^3 y = \Delta\left(\Delta^2 y\right) = \Delta\left[f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)\right] =$$

$$= \left[f(x+3\Delta x) - 2f(x+2\Delta x) + f(x+\Delta x)\right] - \left[f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)\right] =$$

$$= f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x) \text{ и т. д.}$$

п5. Построить конечные разности для полинома $p(x) = x^3 + 2,$ принимая шаг $\Delta x = 1$.

Р. $\Delta p(x) = (x+1)^3 + 2 - \left(x^3 + 2\right) = 3x^2 + 3x + 1,$

$$\Delta^2 p(x) = \Delta\left(\Delta p(x)\right) = 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 - \left(3x^2 + 3x + 1\right) = 6x + 6,$$

$$\Delta^3 p(x) = 6(x+1) + 6 - 6x - 6 = 6;\ \Delta^4 p(x) = 6 - 6 = 0,$$

тогда $\Delta^n p(x) = 0$ при $n > 3$.

Рас-им теперь последовательные конечные разности функции, представленный табл. способом:

Таблица 1

x	y	Пер. разн. Δy	Втор. разн. $\Delta^2 y$	Трет. разн. $\Delta^3 y$	Четв. разн. $\Delta^4 y$
x_0	Y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$	$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$
$x_1 = x_0 + h$	Y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$	$\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$	$\Delta^4 y_1 = y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1$
$x_2 = x_0 + 2h$	Y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$	$\Delta^3 y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$	$\Delta^4 y_2 = y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2$
$x_3 = x_0 + 3h$	Y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = y_5 - 2y_4 + y_3$	$\Delta^3 y_3 = y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$	

Продолжение

x	y	Пер. разн. Δy	Втор. разн. $\Delta^2 y$	Трет. разн. $\Delta^3 y$	Четв. разн. $\Delta^4 y$
$x_4 = x_0 + 4h$	Y4	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	$\Delta^2 y_4 = \Delta y_5 -$ $-\Delta y_4 = y_6 -$ $-2y_5 + y_4$		
$x_5 = x_0 + 5h$	Y5	$\Delta y_5 = y_6 - y_5$			
$x_6 = x_0 + 6h$	Y6				

Из табл. 1 легко получить общую закономерность:

$$\Delta^m y_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i y(x_k + ih) \tag{13}$$

Из (13), н-р, для $m = 4,\ k = 2,$ получим

$$\Delta^4 y_2 = (-1)^4 C_4^0 y(x_2) + (-1)^3 C_4^1 y(x_2 + h) + (-1)^2 C_4^2 y(x_2 + 2h) +$$

$$+(-1)^1 C_4^3 y(x_2 + 3h) + (-1)^0 C_4^4 y(x_2 + 4h) = y_2 - 4y_3 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} y_4 - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} y_5 +$$

$$+y_6 = y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2$$

п6. Построить конечные разности всех порядков для фк. заданной табл:

x	1	2	3	4	5	6
y	3,02	7,85	25,11	60,05	117,92	203,97

Р. По стн. (13), используя табл.1, получим

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3,02	4,83	12,43	5,25
2	7,85	17,26	17,68	5,25
3	25,11	34,94	22,93	5,25
4	60,05	57,87	28,18	
5	117,92	86,05		
6	203,97			

Из табл. видно, что разности третьего порядка $\Delta^3 y$ постоянны. Отсюда возникает вопрос о существовании полинома n-й степени $P_n(x)$ при $\Delta^n y = const,$ связанного с табл. фк-ей условием $P_n(x_i) = y(x_i).$

Плж. решение этого вопроса следует из двух сд. теорем.

т3. Если значения аргумента x яв-ся равностоящими, т.е. образуют ариф. прогрессию, то для ствщ. полинома n-й степени n-я разность яв-ся пост-ой вел-ой.

т4. (обратная). Если n-е разности табл-ой фк. пост-ны и значения незв-ой пер. образуют ариф. прогрессию, то значения табл-ой фк. совпадают на ее обл-ти опр-ия (т.е. в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$) со значениями нек-го полинома n-ой степени.

Этот полином n-й степени, наз-ый инп-ным полиномом Ньютона, будем искать в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \tag{14}$$

Коэф-ы полинома $P_n(x)$ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ опр-им так, чтобы выполнялось условие

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n} \tag{15}$$

Подставляя в (14) вместо x посл-ные значения $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, полагая в силу (15) $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1$ и т. д. и имея в виду, что $x_1 - x_0 = h, x_2 - x_0 = 2h$ и т. д., получим

$$x = x_0, P_n(x_0) = y_0 = a_0,\ a_0 = y_0;$$

$$x = x_{1,}y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_0 + a_1 h,\ a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$x = x_2, y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}2h + a_2 2h\,h,$$

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2};$$

$$x = x_3,\ y_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + +a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) =$$

$$= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}3h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}3h\,2h + a_3 3h \cdot 2h \cdot h,$$

$$a_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3 \cdot 2 \cdot h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}.$$

Продолжая аналогично, в ств. с фм. (13) имеем

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4},\ a_5 = \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}, ...,\ a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставляя эти значения коэф-ов $a_0, a_1, ..., a_n$ в (14) получим

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \tag{16}$$

Стн. (16) наз. инпн. полиномом Ньютона вперед.

зм1. Если полагать $t=\frac{x-x_0}{h}$, то $\frac{x-x_1}{h}=t-1,...,\frac{x-x_{n-1}}{h}=t-n+1$, тогда вместо (16) получим

$$P_n(x)=P_n(x_0+ht)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}t+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1)+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)...(t-n+1). \quad (17)$$

Если $y=f(x)$ - мчл. n-й степени, то $\Delta^n y_i=const$ и $\Delta^{n+1}y_i=0$ и, сд-но, фм (17) яв-ся точной. В общем случае, если $f(x)$ имеет непр. производную на отрезке $[a,b]$, включающим точки $x_0,x_1,...,x_n$ и x, то погрешность фм. (17) равна (см. (10))

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{t(t-1)...(t-i+1)}{i!}\Delta^i y_0=h^{n+1}\frac{t(t-1)...(t-n)}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi), \quad (18)$$

где $\xi\in[a,b]$. На практике пользуются более удобной прж. фм-ой

$$R_n(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}t(t-1)...(t-n). \quad (19)$$

зм2. Внешне полином Ньютона не похож на полином Лагранжа. Однако, если эти полиномы построены для одной и той же функции и одной и той же системе узлов, то в силу единственности решения инп-ной задачи они должны быть тождественно равны между собой.

п6. Построить инп-ный полином Ньютона для фк. $f(x)=\ln x$ с узлами

$$x=2,3,4.$$

Р. Находим $y=\{\ln 2,\ \ln 3,\ln 4\}=\{0,6331;1,0986;1,3863\}$, тогда

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
2	0,6931	0,4055	–0,1178
3	1,0986	0,2877	
4	1,3863		

Здесь $n=2,\ h=1$ и в силу (17) получим

$$P_2(x)=0,6931+0,4055(x-2)-\frac{0,1178}{2}(x-2)(x-3)=-0,4713+$$
$$+0,7000x-0,0589x^2.$$

Как и следовало ожидать, полином Ньютона тождественно совпадает с полиномом Лангранжа, построенный для этой фк. в п 4, отличаясь от него лишь формой записи.

п7. Построить инпн. полином Ньютона для фк. $f(x)=\ln x$ с узлами $x=2,3,4,5$ и оценить погрешность при $x=3,5$.

Р. К табл-у п6 добавим одну строку для $y_3=\ln 5=1,6094$ и получим

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	0,6931	0,4055	-0,1178	0,0532
3	1,0986	0,2877	-0,0646	
4	1,3863	0,2231		
5	1,6094			

Здесь $n = 3, h = 1$ и в силу (15) имеем

$$P_3(x) = 0,6931 + 0,4055(x-2) - \frac{0,1178}{2}(x-2)(x-3) + \frac{0,0532}{6}(x-2)(x-3)(x-4).$$

Если интерполируемая фк. диф-ма дт-ое число раз, то для оценки погрешности инпн-го полинома Ньютона применимо нерав. (10):

$$|R_3(3,5)| \le \frac{M_4(2;5)}{4!}|\omega_4(3,5)|, \omega_4(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \Rightarrow$$

$$|\omega_4(3,5)| = 1,5\cdot 0,5\cdot 0,5\cdot 1,5 = 0,5625; \text{Для (11): } M_{n+1}(a,b) = \left|\max_{a\le x\le b} f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

из $f(x) = \ln x$ находим $f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2!}{x^3}, f^{IV}(x) = -\frac{3!}{x^4},$

отсюда $M_4(2;5) = \frac{3}{8}$, тогда $|R_3(3,5)| \le \frac{3}{8}.\frac{0,5625}{4!} = 0,0088.$ На самом деле погрешность немного меньше: $\ln 3,5 - P_3(3,5) = 1,2528 - 1,2552 = -0,0024.$

п8. С какой точностью можно, интерполируя, вычислить $\sin 5^0$ и $\sin 25^0$, считая известными $\sin 0^0, \sin 15^0, \sin 30^0$ и $\sin 45^0$. С какой точностью можно вычислить при тех же условиях синус любого угла в промежутке от 0° до 45°?

Р. Положим $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$, тогда узлами инп. будут x:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1;$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}, f''(x) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{4}, f'''(x) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cos\frac{\pi x}{4},$$

$$f^{IV}(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \sin\frac{\pi x}{4}.$$

Отсюда в силу (11) $M_4(0;1) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \max_{0\le x\le 1}\sin\frac{\pi x}{4} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,2691.$

$\omega_4(x) = x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1).$ Для получения $\sin 5^0$ следует положить $x = \frac{1}{9}$; для получения $\sin 25^0$ взять $x = \frac{5}{9}$; тогда

$\left|\omega_4\left(\frac{1}{9}\right)\right| = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9} = 0,0122,$ $\left|\omega_4\left(\frac{5}{9}\right)\right| = \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9} = 0,0061.$ Отсюда в силу (10)

$\left|R_3\left(\frac{1}{9}\right)\right| \le 0,2691\frac{0,0122}{4!} = 0,0014;$ $\left|R_3\left(\frac{5}{9}\right)\right| \le 0,2691\frac{0,0061}{4!} = 0,0007.$

Итак, $\sin 5^0$ можно вычислить с погрешностью 0,0014, $\sin 25^0 - 0,0007$. Теперь в промежутке $]0,1[$ найдем абс. вел-у полинома

$$\omega(x) = x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1) = x^4 - 2x^3 + \frac{11}{9}x^2 - \frac{2}{9}x,$$

$$\omega'(x) = 4x^3 - 6x^2 + \frac{22}{9}x - \frac{2}{9},\ \omega'(x) = 0;$$

$$4x^3 - 6x^2 + \frac{22}{9}x - \frac{2}{9} = \left(4x^2 - 4x + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 0,13;\ x_3 = 0,87.$$

$$\omega''(x) = 12x^2 - 12x + \frac{22}{9},\ \omega''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{9} < 0,\ \omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{144};\ \omega''(0,13) = 1,09 > 0$$

$$\omega''(0,87) = 1,08 > 0;\ \omega(0,13) = \omega(0,87) = 0,012 \approx \frac{1}{81}.\text{Итак, } |\omega(x)| \le \frac{1}{81}.$$

Поэтому, каков бы ни был угол, не превышающий 45^0, синус угла может быть вычислен с помощью инпн-го полинома при выбранной системе узлов с погрешностью, указываемой нерав-ом

$$|R_3| \le 0,2691\cdot\frac{1}{81\cdot 4!} = 0,0015.$$

Отсюда можно делать вывод, что оценка погрешности, даваемая инпным полиномом, может быть выполнена до построения самого инпн-го полинома. Это дает возможность заранее подобрать систему узлов, а сд-но, и степень инпн-го полинома, обеспечивающую нх-ую точность.

п9. Построить инпн. полином Ньютона с целочисленными узлами, дающий значение фк. $f(x) = \lg x$ на участке $[12,13]$ с четырьмя верными десятичными знаками.

Р. Вычислим производные фк.

$$f(x): f'(x) = \frac{\lg e}{x},\ f''(x) = -\frac{\lg e}{x^2},\ f'''(x) = \frac{2!\lg e}{x^3},\ldots$$

Проверим, обеспечит ли требуемую точность лин. инп-ая (n=1). Тогда в силу (11) $M_2(12;13) = \frac{\lg e}{12^2} = 0,00302.$ Находим $\omega_2(x) = (x-12)(x-13) = x^2 - 25x + 156,$

$\omega_2'(x) = 2x - 25 = 0 \Rightarrow x = 12,5;$ $\omega_2''(x) = 2 > 0.$ Точки экстремума $x = 12,5$ уд-ет нерав-ву $|\omega_2(x)| \le |\omega_2(12,5)| = 0,25.$ Отсюда в силу (10) имеем

$$|R_2| \le 0,00302.\frac{0,25}{2!} = 0,00038.$$

Т. к. лин. инп-я не обеспечивает требуемой точности, возьмем квадратичную инп. $(n=2)$ с узлами $x_0=12, x_1=13, x_2=14.$ Тогда

$$M_3(12;14)=\frac{2\lg e}{12^3}=0,000503; \omega_3(x)=(x-12)(x-13)(x-14)=$$
$$=x^3-39x^2+506x-2184,\ \omega_3'(x)=3x^2-78x+506.$$

Из $3x^2-78x+506=0 \Rightarrow x=12,4227,$ тогда $|\omega_3(x)|\le\omega_3(12,4227)<0,3843.$ Отсюда в силу (10)

$$|R_3|\le 0,000503.\frac{0,3843}{3!}=0,000032.$$

Погрешность не превышает пяти единиц пятого десятичного знака. Сд-но, квадратичная инп. обеспечивает требуемую точность.

Составляем табл. разностей фк. $\lg x=\{\lg 12, \lg 13, \lg 14\}=\{1,07918; 1,11394; 1,14613\}.$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
12	1,07918	0,03476	-0,00257
13	1,11394	0,03219	
14	1,14613		

Здесь $n=2, h=1$ и в силу (16)

$$P_2(x)=1,07918+0,03476(x-12)-\frac{0,00257}{2}(x-12)(x-13)=$$
$$=0,46160+0,066885x-0,001285x^2.$$

4^0. Формула Ньютона для интерполирования назад. Фм-у (16) получили, где коэф-ы полинома определяли с помощью левых узлов. Фм-а, где коэф-ы полинома опр-ся с помощью правых узлов, наз. фм-ой Ньютона для инпн-ия назад, к-ая имеет вид:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\ldots(x-x_1). \quad (20)$$

Вывод фм. (20) аналогичен вывод фм. (17).

п10. построить полином Ньютона для инп-ния назад для фк. $f(x)=\lg x$ с узлами $x=12,13,14$ (см. п 9).

Р. Построим табл-у для вычисления разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
12	1,07918	0,03476	-0,00257
13	1,11394	0,03219	
14	1,14613		

Здесь $n=2, h=1$ и в силу (20) получим

$$P_2(x)=1,14613+0,03219(x-14)-\frac{0,00257}{2}(x-14)(x-13)=$$
$$=0,46160+0,066885x-0,001285x^2.$$

Как и следовало ожидать (в силу единственности решения задачи о квадратичной инп.), построенный полином тождественно совпадает с полиномом для инп-ния вперед, построенным для этой фк. в п 9.

Инп-ный полином Ньютона используется: а) для нахождения точки полинома, близкой к правому узлу; б) для приближенного интегрирования диф-ых ур-й.

5^0. Обратное интерполирование и нахождение корня уравнения. Пусть фк. $y = f(x)$ задана таблично. Задачи обратного инпн. заключается в том, чтобы по заданному значению фк. у опр-ть ствщ. значение аргумента x. Предположим, что фк. $f(x)$ монотонна и данное значение y содержится между $y_0 = f(x_1)$ и $y_1 = f(x_1)$. заменяя фк-ю у первым инпн. полиномом Ньютона, будем иметь:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1).$$

Отсюда $t = \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}t(t-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}t(t-1)\ldots(t-n+1). \qquad (*)$$

За нач-ое прж. принимаем $t^{(0)} = \dfrac{y - y_0}{\Delta y_0}$. Тогда, применяя метод интеграции, получим $t^{(m)} = \varphi\left(t^{(m-1)}\right)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Если $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$, где отрезок $[a,b]$ содержит узлы инп., и шаг h дт-но мал, то этот процесс сх-ся,

т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} t^{(m)} = t$. Тогда вместо (*) получим

$$t^{(i+1)} = t^{(0)} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}t^{(i)}\left(t^{(i)} - 1\right) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}t^{(i)}\left(t^{(i)} - 1\right)\ldots\left(t^{(i)} - n + 1\right). \qquad (21)$$

На практике процесс продолжают до получения $t \approx t^{(m)} = t^{(m+1)}$ с заданной точностью. Найдя t, опр-ем затем x из фм-ы $\dfrac{x - x_0}{h} = t$, отсюда $x = x_0 + th$.

п11. Используя значения фк. $y = \lg x + \dfrac{x}{5}$, данные в табл.

x	20	25	30
y	5,3010	6,3979	7,4771

Найти значение x такое, что $y = \lg x + \dfrac{x}{5} = 5{,}834$

Р. Составляем табл-у разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
20	5, 3010		
		1,0969	–0, 0177
25	6,3979		
		1,0792	
30	7,4771		

Принимая

$y_0 = 5{,}3010$, будем иметь $t^{\circ} = \dfrac{Y - Y_0}{\vartriangle Y_0} = \dfrac{5{,}834 - 5{,}3010}{1{,}0969} = 0{,}4869$

По (21) имеем

$$t^{(1)} = 0{,}486 - \frac{-0{,}0177}{2 \cdot 1{,}0969} \cdot 0{,}486\left(0{,}486 - 1\right) = 0{,}486 - 0{,}002 = 0{,}484$$

$$t^{(2)} = 0{,}486 - \frac{-0{,}0177}{2 \cdot 1{,}0969} \cdot 0{,}484\left(0{,}484 - 1\right) = 0{,}486 - 0{,}002 = 0{,}484$$

Отсюда принимаем $t = 0{,}484.$ Тогда

$$x = x_0 + th = 20 + 0{,}484 \cdot 5 = 22{,}42.$$

ЛЕКЦИЯ 6

2. 3. МОДЕЛИ ЗАДАЧ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ И ИХ РЕШЕНИЯ

1^0. Скорость прямолинейного движения. Если скорость материальной точки направлена по линии силы, то движение материальной точки происходит прямолинейно. Найти её скорость.

Р. Примем линию движения за ось $0x$. Тогда из второго закона Ньютона получим

$$m\frac{dV}{dt} = X, \tag{1}$$

где $\frac{dV}{dt} = a$ – ускорение, m – масса, X– величина силы.

Пусть $X = X(t)$ и $V(t_0) = V_0$. Тогда из (1) имеем:

$$m\int_{t_0}^{t} dV = \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau \Rightarrow mV\int_{t_o}^{t} = \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau \Rightarrow m\left[V(t)-V(t_0)\right] = \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$mV - mV_0 = \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau \tag{2}$$

Стн. (2) выражает закон: изменение количества движения точки за конечный промежуток времени равно импульсу действующей силы за тот же промежуток времени.

Если функция (фк.) X зависит от координат (крд.) x точки, т. е. $X = X(x)$ и движение начинается с начального перемещения $x = x_0$, то умножив (1) на dx, получим

$$m\frac{dV}{dt}dx = X(x)dx\,. \tag{3}$$

Т. к. $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}$, то из (3) следует $mVdV = X(x)dx$, тогда $m\int_{x_0}^{x} VdV = \int_{x_0}^{x} X(x)dx$, отсюда (с учётом $V_0 = V(x_0)$) получим

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X(x)dx\,\cdot \tag{4}$$

Стн. (4) показывает, что изменение кинетической энергии точки при перемещении на расстояние $x - x_0$ равно работе силы на этом участке.

п1 (Движение пули). Пуля, двигаясь со скоростью $V_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 20$ см и вылетает из нее со скоростью $V_1 = 100$ м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной (прц.) квадрату скорости движения пули, найти время Т движения пули в стене.

Р. По условию задачи имеем

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2, \qquad (5)$$

где k – коэф. прц-сти, знак «–» потому, что сопротивление стены направлено противоположно движению пули.

Дифференциальное (диф.) ур. (5) с разделяющимися пер-ми, откуда, полагая $\frac{k}{m} = k_1$, получим $\frac{dV}{V^2} = -k_1 dt \underset{инт.}{\Longrightarrow} -\frac{1}{V} = -k_1 t - c$.

Из начального условия $V = V_0$ при $t = 0$ находим $c = \frac{1}{V_0}$. Тогда

$$\frac{1}{V} = k_1 t + \frac{1}{V_0}. \qquad (6)$$

Если в стн.(6) положить $V = V_1$, то $t = T$. Тогда $\frac{1}{V_1} = k_1 T + \frac{1}{V_0}$, откуда

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right). \qquad (7)$$

В стн.(7) опр-им неизвестную k_1. Для этого стн.(6) перепишем так

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 t} \Rightarrow dx = \frac{1}{k_1}\frac{d\left(1 + k_1 V_0 t\right)}{1 + k_1 V_0 t} \underset{инт.}{\Rightarrow} \quad x = \frac{1}{k_1}\ln\left(1 + k_1 V_0 t\right) + c_1$$

При $t = 0$ имеем $x = 0$ (пуля входит в стену), тогда $c_1 = 0$. А при $t = T$ имеем $x = h$ (пуля выходит из стены) и поэтому $h = \frac{1}{k_1}\ln\left(1 + k_1 V_0 T\right)$.

Из (7) находим $V_1 = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 T}$, т. е. $1 + k_1 V_0 T = \frac{V_0}{V_1}$. Тогда $h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{V_0}{V_1}$ или $\frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V}}$.

Подставив её в (7), имеем

$$T = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V_1}}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right). \qquad (8)$$

Производя числовые выкладки, из (8) получим

$$T = \frac{0,20м}{\ln\frac{400}{100}}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{400}\right) = 0,00108с.$$

2^0. Реактивное движение. Задачи Циолковского. При движении тел с пер-ной массой (н-р, ракет) второй закон Ньютона неприменим, поскольку он распространяется только на тела с постоянной (пст.) массой. В этом случае применяется другое ур., связывающее силу с ускорением. Найдем это ур-ие.

Пусть в момент t материальная точка с массой m имеет (абсолютную) скорость v. За время Δt к ней присоединяется частица с суммарной массой Δm, имевшие до присоединения скорость u. В момент $t+\Delta t$ материальная точка будет иметь массу $m+\Delta m$ и скорость $v+\Delta v$. Количество движения системы в момент t равно $Q=mv+u\Delta m$, а в момент $t+\Delta t$ оно стало равным $Q+\Delta Q=(m+\Delta m)(v+\Delta v,)$ отсюда

$$\Delta Q = m\Delta v + (v-u)\Delta m + \Delta m \Delta v.$$

Полученное выражение разделим на Δt. Если $m=m(t)$ непр-на, то учитывая $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m\Delta v}{\Delta t}=0$ (т. к. $\Delta m \to 0$ при $\Delta t \to 0$), получим

$$\frac{dQ}{dt}=m\frac{dv}{dt}+(v-u)\frac{dm}{dt}.$$

Если равнодействующая внешних сил, приложенных к точке пер-ой массой, равна F, то в силу теоремы о количестве движения имеем

$$m\frac{dv}{dt}+(v-u)\frac{dm}{dt}=F. \tag{9}$$

Ур-ие (9) наз. ур-ем Мещерского.

Заметим, что при $\dfrac{dm}{dt}>0$ масса точки увеличивается (частицы присоединяются), а при $\dfrac{dm}{dt}<0-$ уменьшается (частицы отбрасываются). При $\dfrac{dm}{dt}=0$ масса точки пст-на, и из ур. Мещерского получим второй закон Ньютона.

Ур-ию Мещерского (из (9)$\Rightarrow m\dfrac{dv}{dt}+v\dfrac{dm}{dt}=F+u\dfrac{dm}{dt}$) можно придать вид

$$\frac{d(mv)}{dt}=F+u\frac{dm}{dt}. \tag{10}$$

В частн., при $u=0$ имеем $\dfrac{d(mv)}{dt}=F$. Если обз-им через $u_0=u-v-$ относительную (отс.) скорость, то из (9) получим

$$m\frac{dv}{dt}=F+\frac{dm}{dt}u_0. \tag{11}$$

В част., при $u_0=0$ снова получаем второй закон Ньютона.

Выражение $\frac{dm}{dt}u_0 = R$ наз. реактивной силой. Тогда из (11) $\Rightarrow$

$$m\frac{dv}{dt} = F + R. \tag{12}$$

Заметим, что точка пер-ой массы может двигаться с ускорением и при отсутствии внешних сил. Так при $F = 0$, получим

$$m\frac{dv}{dt} = R. \tag{13}$$

Величина реактивной силы $|R| = \left|\frac{dm}{dt}\right||u_0|$ прц-но изменению массы в единицу времени $\frac{dm}{dt}$ («секундной массе») и отс-ой скорости $|u_0|$.

п2 (задача Циолковского о прямолинейном движении ракеты в пустоте). Ракета с начальной массой M_0 движется прямолинейно под действием отдачи от истечения непр-ой струи газов, выбрасываемых из ракеты. Скорость u_0 истечения газов (отс-но ракеты) пст-на по величине и направлена противоположна начальной скорости ракеты v_0. Найти закон движения ракеты, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

Р. Используя ур-ие Мещерского в виде (11) при $F = 0$ и направив ось Ox в сторону нач. скорости v_0. ,получим диф. ур-ие движения ракеты в проекции на эту ось:

$$M\frac{dv}{dt} = -u_0\frac{dM}{dt}. \tag{14}$$

Здесь $\frac{dM}{dt} = \mu$ наз. «секундной массой», т.е. расход массы топлива в секунду, причем $\mu = const$ при установившемся процессе горения топлива; M – пер. масса ракеты.

Разделяя пер-ые в ур. (14), получим $dv = -u_0\frac{dM}{M}$. Откуда, инт-уя находим $v = -u_0 \ln M + c$. Из нач. условия $v = v_0, M = M_0$ при $t = 0$ находим $c = u_0 \ln M_0 + v_0$. Тогда имеем $v = -u_0 \ln M + u_0 \ln M_0 + v_0$, отсюда

$$v = u_0 \ln\frac{M_0}{M} + v_0. \tag{15}$$

Фм. (15) наз. формулой Циолковского.

Для нахождения ур-ия ракеты стн. (15) пишем в виде $\frac{dx}{dt} = u_0 \ln \frac{M_0}{M} + v_0$ и инт-уя его в предположении, что $x = 0$ при $t = 0$, получим

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{M} d\tau + v_0 t. \tag{16}$$

Если через нек-ое время после начала движения, в момент $t = t_k$, скорость, масса и пройденный путь стали равными ств-но $v = v_k$, $M = M_k$, $x = x_k$, то фм-лы (15) и (16) перепишутся так:

$$V_k = u_0 \ln \frac{M_0}{M_k} + v_0, \tag{17}$$

$$x_k = u_0 \int_0^{t_k} \ln \frac{M_0}{M_k} d\tau + v_0 t_k, \tag{18}$$

Откуда заключаем, что конечная скорость v_k не зависит от закона изменения массы, а зависит только от нач. скорости v_0 ракеты, отс-ой скорости u_0 истечения газов и отношения $\frac{M_0}{M_k}$ масс в нач-ый и конечный момент, путь же x_k зависит от закона изменения массы опрм-го скоростью сгорания топлива.

Предположим, что масса ракеты изменяется по линейному закону $M = M_0(1 - \alpha t)$, где $\alpha = const, \alpha > 0$, тогда

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{M_0(1-\alpha\tau)} d\tau + v_0 t \text{ или } x = -u_0 \int_0^t \ln(1-\alpha\tau) d\tau + v_0 t,$$

вычислив $I = \int_0^t \ln(1-\alpha\tau) d\tau = \left| \begin{array}{l} \ln(1-\alpha\tau) = z;\ d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^z dz \\ 1-\alpha\tau = e^z;\ \tau = 0, z = 0 \\ \tau = \frac{1}{\alpha}(1-e^z);\ \tau = t, z = (1-\alpha t) \end{array} \right| =$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\ln(1-\alpha t)^0} z e^z dz = \left| \begin{array}{l} u = z; dv = e^z dz \\ du = dz; v = e^z \end{array} \right| = -\frac{1}{\alpha} \left[z e^z \Big|_0^{\ln(1-\alpha t)} - \int_0^{\ln(1-\alpha t)} e^z dz \right] =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left[e^{\ln(1-\alpha t)} \ln(1-\alpha t) - e^z \Big|_0^{\ln(1-\alpha t)} \right] = -\frac{1}{\alpha} \left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t \right], \text{ получим}$$

$$x = \frac{u_0}{\alpha} \left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t \right] + v_0 t. \tag{19}$$

Если масса ракеты изменяется по показательному закону $M = M_0 e - e^{-\lambda t}$, где $\lambda = const, \lambda > 0$, то $x = u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{m_0 e^{-\lambda\tau}} d\tau + v_0 t \Rightarrow x = u_0 \lambda \int_0^t \tau d\tau + v_0 t \Rightarrow$

$$x = \frac{u_0 \lambda t^2}{2} + v_0 t. \qquad (20)$$

Отметим, что законы механики могут быть использованы для опр-ия величин космических скоростей. Опр-им первую космическую скорость v_1, т.е. скорость, нх-ую для того, чтобы ракета вращалась по круговой орбите вокруг земли в виде спутника. Для этого ее центробежная сила должна быть равна силе притяжения земли, т. е.

$$M_k \frac{v_1^2}{r} = M_k g, \qquad (21)$$

где r – радиус орбиты, т. е. расстояние от центра земли до движущегося на орбите спутника, g – ускорение силы тяжести. Если величину r полагать прж-ю равной радиусу земли $r \approx R_3 = 6400 км = 6400000$ а $g = 9{,}81 м/с \approx 10 м/с$, то

$$v_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{gR_3} = \sqrt{10 \cdot 6400000} = 8 км/с.$$

Более точно, $v_1 = 7{,}97 км/с$.

Если r значительно больше R_3, т.е. $r >> R_3$, то нх-мо учесть изменения ускорения силы тяжести с изменением высоты.

Из закона тяготения следует, что тело с массой М, отстоящее от центра земли на расстоянии r, притягивается к земле с силой $F = \gamma M M_з / r^2$, где $M_з$ – масса земли. Но т.к. в то же время $F = M g_r$, где g_r – ускорение силы тяжести на расстоянии r от центра земли, то $\gamma M M_з / r^2 = M g_2, откуда\ g_2 = \gamma M_{з.} / r^2$.

При r = R₃ имеем $g_2 = g$, сдт. $g = \gamma M_3 / R_3^2, откуда\ \gamma = \frac{gR_3^2}{M_з}\ и\ поэтому\ g_r = \frac{gR_3^2}{r^2}$.

Тогда рав-во центробежной силы и силы тяжести дает $M_k \frac{v_1^2}{r} = Mk \frac{gR_3^2}{r^2}$, откуда

$$V_1 = \sqrt{\frac{gR_3^2}{r}}. \qquad (22)$$

Из стн (22) следует, что чем больше r, т.е. чем более удален спутник от земли, тем меньше первая космическая скорость V₁, нх-ая для вращения спутника на ств-щей орбите. Так, н-р, на высоте 10000км (r=16400км.) имеем V₁= 5км/с, а на высоте 380 000 км (примерное расстояние от земли до луны) V₁= 1км /с. Т. о. для того, чтобы луна не падала на землю, дт-на скорость луны 1км/с.

Для того, чтобы ракета могла уйти из области земного притяжения она должна обладать большой скоростью, чем v_1. Эта скорость наз. второй космической скоростью (или скоростью отрыва от земли) и обз-ся через v_2. Вычислим ее. Для этого потенциальную энергию $E_n = M_k g_r r$ ракеты, находящейся на расстоянии r от цента Земли, приравняем кинетической энергии $E_k = M_k \frac{v_2^2}{2}$ ракеты, скорость к-ой равна v_2. Тогда получим $M_k \frac{v_2^2}{2} = M_k g_r r$, где $g_r = \frac{gR_3^2}{r^2}$, откуда имеем

$$v_2 = \sqrt{2g_r r} = \sqrt{2\frac{gR_3^2}{r}} = v_1\sqrt{2} \tag{23}$$

Т. о. вторая космическая скорость больше первой примерно в 1,4 раза. Поэтому на поверхности земли $v_2 = 8 \cdot 1{,}4 = 11{,}2$ км/с. На высоте 1000 км имеем $v \approx 7$ км/с, а для того, чтобы Луна вышла из пределов земного притяжения она должна иметь скорость 1,4 км/с.

Если произвести аналогичные выч-ия для опр-ия скорости v_1, нх-ся для вращения спутника по круговой орбите вокруг Луны, Марса и Венеры, а также скорости v_2 отрыва от этих небесных тел, то получим:

для Луны $v_1 \approx 1{,}7$ км/с, $v_2 \approx 2{,}4$ км/с;

для Марса $v_1 \approx 3{,}6$ км/с, $v_2 \approx 5{,}1$ км/с;

для Венеры $v_1 \approx 7{,}3$ км/с, $v_2 = 10{,}3$ км/с.

п3 (задача Циолковского о движении ракеты с учетом силы тяжести). Ракета с нач. массой M_0 движется вертикально вверх под действием силы отдачи от истечения газов. Масса M ракеты изменяется в зв-ти от времени t по закону $M = f(t)$ – закон сгорания топлива. Скорость истечения газов пст-ая (отс-но ракеты), направлена вниз и равна u_0.

Найти высоту подъема ракеты как фк-ю времени t, если нач. скорость ракеты на пвх-ти земли равна v_0.Сопротивление воздуха и изменение ускорения силы тяжести в зв-ти от высоты подъема ракеты не учитывать.

Р. Направим ось О*y* вверх. Тогда диф. ур. имеет вид

$$f(t)\frac{dv}{dt} = -u_o f'(t) - gf(t), \tag{24}$$

где $f'(t) = \frac{dM}{dt}$, – «секундная масса» . Разделив пер-ые, получим

$$dv = -gdt - u_0\frac{f'(t)}{f(t)}dt \text{, откуда } v = -gt - u_0 \ln f(t) + c$$

При t=0 масса ракеты M = *f*(0) = M₀, а скорость, $v = v_0$, тогда

$$c = u_0 \ln M_0 + v_0 \text{, сд-но, } v = -gt + u_0 \ln\frac{M_0}{f(t)} + v_0$$

Т.к. $v=\dfrac{dy}{dt}$, то $dy=\left[-gt+u_0\ln\dfrac{M_0}{f(t)}+v_0\right]dt$ и инт-уя получим

$$y=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t\ln\frac{M_0}{f(\tau)}d\tau+v_0t+c_1$$

При t=0 высота подъема y=0, тогда c$_1$=0, сд-но

$$y=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t\ln\frac{M_0}{f(\tau)}d\tau+v_0t \qquad (25)$$

В част., при изменении массы ракеты по лин. закону

$m=f(t)=m_0(1-\alpha t)$, где $\alpha = const>0$, имеет

$$y=-\frac{gt^2}{2}-u_0\int_0^t\ln(1-\alpha\tau)d\tau+v_0t$$ и, сд-но (см.(19))

$$y=-\frac{gt^2}{2}+\frac{u_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]+v_0t \qquad (26)$$

Если задать числовые значения, н-р, $v_0=0$, $u_0=2000$ м /с, $\alpha=\dfrac{1}{100}c^{-1}$, то

$$y=-\frac{gt^2}{2}+2\cdot10^5\left[\left(1-\frac{t}{100}\right)\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)+\frac{t}{100}\right].$$

В этом случае через 10с ракета поднимается на высоту 0,54 км., через 30с–на 5,65 км, через 50с–на 18,4 км.

При изменении массы ракеты по показательному закону

$M=f(t)-M_0e^{-\lambda t}$, где λ=const>0, имеет аналогично

$$y=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t\ln\frac{M_0}{M_0e^{-\lambda\tau}}d\tau+v_0t=-\frac{gt^2}{2}+u_0\lambda\frac{t^2}{2}+v_0t=\frac{u_0\lambda-g}{2}t^2+v_0t(26)$$

Отсюда находим скорость v движения ракеты до момента полного сгорания $t<t_k$:

$$v=\frac{dy}{dt}=(u_0\lambda-g)t+v_0 \qquad (27)$$

При $t<t_k$, т. е. в момент сгорания всего запаса топлива имеет:

$$v=v_k=(u_0\lambda-g)t_k+v_0, \qquad y=y_k=\frac{u_0\lambda-g}{2}t_k^2+v_0t_{k.}$$

Выч-им ускорение $\omega=\dfrac{d^2y}{dt^2}=u_0\lambda-g=const.$ Отсюда заключаем, что ракета движется с пост–ым ускорением.

При $u_0\lambda-g<0$ движения замедленное, при $u_0\lambda-g>0$ движение ускоренное, при $u_0\lambda-g=0$ равномерное со скоростью v_0.

В случае $u_0\lambda - g < 0$ скорость точки обратится в нуль, т.е. $v = 0$, тогда из (27) следует, что $t = \dfrac{v_0}{g - u_0\lambda}$. Подставив его в (26) получим *max* высоту

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2\left(g - u_0\lambda\right)}.$$

После сгорания всего топлива движение ракеты продолжается по закону:

$$S = -\frac{gt^2}{2} + V_k t + y_k$$

Нб-е удаление S$_{max}$ ракеты от высоты $y = y_k$ из условия $s' = 0$ в стационарной точке $t = \dfrac{V_k}{g}$:

$$S_{max} = \frac{V_k^2}{2g} + y_k.$$

Мкс. высоту y_{max} подъема ракеты от пвх-ти земли находим по фм-е $y_{\max} = S_{\max} + Y_k = \dfrac{v_k^2}{2g} + 2y_k$. Заменяя v_k и Y_k их выражениями через u_0, λ и t_k находим:

$$y_{\max} = \frac{\left(u_0\lambda - g\right)^2 t^2}{2g} k + \left(u_0\lambda - g\right) t_k^2 + 2v_0 t_k = \frac{1}{2g}\left(u_0^2\lambda^2 - g^2\right) t_2^2 + 2v_0 t_k.$$

п4. Найти скорость v_k многоступенчатой ракеты в конце выведения спутника на орбиту, если скорость истечения реактивной струи пст-на и вел-на ее равна u$_0$, угол наклона направления скорости к горизонту – $\theta(t)$ и аэродинамическое сопротивление – X(t).

Р. Пусть ω (t) общий вес ракеты, тогда $\dfrac{d\omega}{dt}$-скорость изменения веса ракеты (весовой расход топлива), а реактивная тяга равна $P = -\dfrac{u_0}{g_0}\dfrac{d\omega}{dt}$,

где g$_0$ – ускорение силы тяжести на пвх-ти земли (уск. на высоте h обз-им через g$_h$).

Диф. ур-ие движение ракеты в проекции на касательную к ее траектории получим в виде

$$\frac{\omega}{g_0}\frac{dv}{dt} = P - X - \frac{\omega}{g_0} g_h \sin\theta,$$

отсюда, деля обе части на $\dfrac{\omega}{g_0}$ и заменяя p его выражением, следует

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u_0}{\omega}\frac{d\omega}{dt} - g_0\frac{x}{\omega} - g_h \sin\theta. \qquad (28)$$

В момент t=0 скорость ракеты $v=0$,а в момент выведения ракеты на орбиту t = t$_k$ скорость ракеты $v = v_k$,тогда инт-уя получим

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} u_i \ln\frac{\omega_{oi}}{\omega_{ki}} - g_0 \int_0^{t_k} \frac{x}{\omega}\, dt - \int_0^{t_k} g_h \sin\theta dt, \tag{29}$$

где n-число ступеней ракеты, а $u_i, \omega_{oi}, \omega_{ki}$ – ств-но скорость истечения струи, начальный и конечный вес для каждой отдельной ступени.

3^0. Радиоактивный распад. Радиоактивным распадом наз. самопроизвольные превращения ядер атомов некоторых эл-ов в ядра других эл-тов, сопровождающиеся альфа, -бета и гамма-излучением. Радиоактивный распад носит статистический хрк-р: ядро атомов распадается не одновременно все сразу, а в течение всего времени сущв-ия данного изотопа (вещества). При этом установлено, что кол-во атомов, распадающихся на ед-у времени пст-на для каждого изотопа отс-но нераспавщихся атомов и обз-ся через λ . Тогда

$$dN = -\lambda N dt, \tag{30}$$

где знак «–» показывает, что число N нераспавшихся атомов уменьшается. Из (30) следует $\frac{dN}{N} = -\lambda dt,$ получим $\ln N = -\lambda t + \ln C \Rightarrow \ln\frac{N}{c} = -\lambda t \Rightarrow N = ce^{-\lambda t}$.

Если $N = N_0$ при t = 0, то С = N_0, сд-но:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{31}$$

Время Т, в течение к-го распадается половина кол-ва атомов изотопа, наз. периодом полураспада этого изотопа. Т для различных изотопов различны, н-р, для радия Т = 1590 лет, для урана Т = 4,6 млрд. лет, для радиактивного кобальта Т = 5,3 года, для радона Т =3,82 суток.

Между Т и λ и легко установить связь. К моменту t =Т имеем N=$\frac{N_0}{2}$,

тогда из (31) получим $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\lambda T} = 2 \underset{\text{лгр}}{\Rightarrow} \mathrm{T} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}$

или

$$\lambda \approx \frac{0,693}{\mathrm{T}} = \frac{\ln 2}{\mathrm{T}}.$$

Это позволяет выразить N не через λ , а через Т :

$$N = N_0 e^{-\frac{t\ln 2}{T}}.$$

Так н-р, для радия, период полураспада к-го Т = 1590 лет, имеем

$$N = N_0 e^{-\frac{t\ln 2}{1590}} = N_0 e^{-0,00044t}.$$

Отсюда можно получить часть распада атомов скажем через 200 лет:

$$N_{t=200} = N_0 e^{-0,088} = 0,915 N_0 \text{ атомов.}$$

4^0 Ионизация газа. Под действием пст-го излучения в газовой среде происходит процесс ионизации (образование электрически заряженных частиц-атомов), при к-ом за одну секунду образуется q плж-ых и столько же отц-ых ионов в данном объеме газа. Вследствие того, что плж. и отц. ионы снова соединяются между собой, кол-во их убывает. Принимая, что из общего кол-ва n плж-ых ионов в каждую секунду соединяется часть, прц-ая квадрату их кол-ва, найти зв-сть кол-ва ионов n от времени t .

Р. Согласно условию задачи получим ур-ие

$$dn = q\,dt - \alpha n^2 dt, \tag{32}$$

где α – коэф. прц-сти, зв-й от природы и состояния газа; знак «–» берется потому, что при объединении плж. и отц. ионов, их число убывает.

Разделив пер-ые, из (32) получим $\frac{1}{\alpha}\frac{dn}{n^2-\frac{q}{\alpha}}+dt=0,$

откуда, инт-уя, имеем $\frac{1}{2\sqrt{\alpha q}}\ln\frac{n-\sqrt{\frac{q}{\alpha}}}{n+\sqrt{\frac{q}{\alpha}}}+t=\frac{1}{2\sqrt{\alpha q}}\ln c,$ отсюда

$$\frac{n-\sqrt{\frac{q}{\alpha}}}{n+\sqrt{\frac{q}{\alpha}}}=ce^{-2\sqrt{2\alpha t}}\ \text{или}\ n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\frac{e^{\sqrt{\alpha q}\,t}+ce^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}{e^{\sqrt{\alpha q}\,t}-ce^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}.$$

Т. к. n = 0 при t = 0,то c =—1. Тогда число ионов в зв-ти от t, принимает вид

$$n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}th\left(\sqrt{\alpha q t}\right). \tag{33}$$

5^0. Поток научной информации. При исследовании роста информационных потоков в науке, т. е. числа научных публикаций, исходят из допущения, что скорость роста $\frac{dy}{dt}$ прц-на достигнутому уровню y числа публикаций. Найти фк-ю $y=f(t)$.

Р. Согласно условию задачи получим ур-ие,

$$\frac{dy}{dt}=ky(k>0), \tag{34}$$

где к-коэф, прц-сти характеризует (в среднем) отклики на публикации в той или иной области знания.

Из (34) получим $\frac{dy}{У}=kdt\underset{инт.}{\Rightarrow}\ln У=kt+\ln c$ *или* $\ln\frac{У}{c}=kt\Rightarrow У=ce^{kt}.$

Опр-им с. Пусть при $t = 0$ имеем $y = a$ – начальный уровень развития науки, тогда $c = a$, сд-но,

$$y = ae^{kt}. \qquad (35)$$

Отметим, что при k = 0,07 получим удвоение уровня примерно за 10 лет. При резком изменении внешних условий (война, землетрясение) фм-й (34) нельзя пользоваться, а надо вводить сдерживающий фактор и вместо нее взять

$$\frac{dy}{dt} = ky(b-y)\,(k>0, 0<y<b), \qquad (36)$$

где b – мкс-но возможное значение y. Из (36) получим

$$\frac{dy}{y(b-y)} = k\,dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \int\frac{dy}{y(b-y)} = kt + c. \text{ Т. к.}$$

$\int\frac{dy}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy = \frac{1}{b}\left[\ln y - \ln(b-y)\right] = \frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}$, то решение ур-ия за пишется в виде

$$\frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y} + \frac{1}{b}\ln a = кt \quad \text{или} \quad \frac{1}{b}\ln\frac{ay}{b-y} = кt,$$

где положено $c = -\frac{1}{в}\ln a.$ потенцируя полученные решения, имеем

$$\frac{ay}{b-y} = e^{вкt} \Rightarrow ay = (b-y)\,e^{вкt} \Rightarrow y(a+e^{bkt}) = be^{вкt} \Rightarrow y = \frac{be^{вкt}}{a+e^{вкt}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{b}{1+ae^{-bкt}} \qquad (37)$$

Кривая (37) наз. Логистической кривой. В начале, когда $y << b$, она практически совпадает с экспонентой $y = be^{bкt}$. Прямые $y = b$ и $y = 0$ служат асимптотами логистической кривой. Точка $M\left(\frac{\ln a}{bк}, \frac{b}{2}\right)$ яв-ся точкой перегиба (см. рис.1, где принято $a = b = 1$).

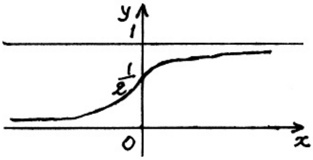


Рис. 1

6^0. Химическая реакция. Если x – количество (кол.) вещества С, в к-ое переходит каждое из двух веществ А и В, то при пст-тве температуры и соблюдении нек-ых др. условий полагают, что скорость реакции $\frac{dx}{dt}$ прц-на:

1) в случае перехода вещества А в вещество С – оставшемуся кол-ву вещества А, что приводит к диф. ур-ю

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x), \qquad (38)$$

где а – нач. кол-во вещества А, а к - коэф. прц-сти, $к > 0$.

2) в случае перехода двух веществ А и В в вещество С – произведению реагирующихся масс, что приводит к диф. ур-ю

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \tag{39}$$

где $а$ *и* $в$ – нач. кол-ва. веществ А и В, а $к$ – коэф. прц-сти., $к > 0$

В обоих случаях имеем одно и то же нач. условие: $x = 0$ при t = 0.

Р. Из (38) получим $\dfrac{dx}{a-x} = -kdt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(x-a) = -kt + \ln C \Rightarrow \ \ln\dfrac{x-a}{c} = -kt \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a + Ce^{-kt}$ Из нач. условия опр-ем, что $C = -a$, сд-но, част. решение имеет вид.

$$x = a\,(1-e^{-kt})\,. \tag{40}$$

При $t \to \infty$ из (40) следует, что $x \to a$.

Во втором случае из (39) имеем $\dfrac{dx}{(x-a)(x-b)} = kdt$. Замечая, что $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = -\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}\right)$ и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{x-a}{x-b} = -kt + \frac{1}{b-a}\ln C \Rightarrow \frac{1}{b-a}\ln\frac{x-a}{x-c}\times\frac{1}{C} = -kt \Rightarrow \frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t}\,.$$

Из нач. условия находим $C = \dfrac{a}{b}$, тогда

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}\,. \tag{41}$$

Отсюда получим част. решение: $x = ab\dfrac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}$.

Предложим, что $b > a$, тогда $x \to a$ при $t \to \infty$.

Если $a > b$, то, переписав (41) в виде $\dfrac{x-b}{x-a} = \dfrac{b}{a}e^{-k(a-b)t}$, заключаем, что $x \to b$ при $t \to \infty$.

Этот же результат можно было получить и из частного решения, если переписать его в форме: $x = ab\dfrac{e^{-k(a-b)t}-1}{be^{-k(a-b)t}-a}$.

2.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

2.1. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ СПОСОБОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое интерполяция (инп.) и как получаются эмпирические формулы?
2. Какие виды знаете о наилучшем приближении (прж) фк-и?
3. Объясните лин. интерполяцию по способу нм-их квадратов.
4. Объясните: а) параболическую интерполяцию
   б) гиперболическую интерполяцию
   в) показательную интерполяцию
5. Как проверяется правильность выч-й при интерполяции?

Задание для кр. работы: в задачах 1–20 по заданной табл. и фк-и опр-ть способом нм-их квадратов нормальную систему и найти эмпирическую фм., ств-щую заданной фк. Делайте проверку, построив на одном чертеже полученную линию и данные точки.

1	x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	
	y_i	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9	$y = ax + b$
2	x_i	–2	–1	1	3	4	5		
	y_i	–1	–2	0	–1	2	1		„
3	x_i	–1	0	1	2	3	4	5	
	y_i	–1	–1,5	0,5	–0,5	0	1,5	1,5	„
4	x_i	1	2	3	4	5	6	7	
	y_i	–1	1	–0,5	1	2	1	2	„
5	x_i	–1	1	2	3	4	5	6	
	y_i	–0,5	–1,5	0	1,5	0	1,5	2,5	„
6	x_i	0	2	4	6	8	10		
	y_i	0	0,5	1,5	3,5	7	15		$y = ax^2 + bx + c$
7	x_i	0	0,5	1	2	3	4	5	
	y_i	5,5	1	–1	–1	–3	–4	0	„
8	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	5	1	–3	–4	–2	–1	3,5	„
9	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	2	0	–2	–4	–3	–1	2	„
10	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	y_i	5	2	–4	–4	–2,5	–1	3	„
11	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_i	7	6	3	3	2,8	2,6	2,4	$y = \frac{a}{x} + b$

12	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_{i}	6,5	6	4	2,8	2,8	2,6	2,4	„
13	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_{i}	9	4,5	3,5	3,2	2,7	2,5	2,6	„
14	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_{i}	8	5,5	3,4	3,1	2,6	2,6	2,4	„
15	x_i	0,5	1	2	3	4	5	6	
	y_{i}	6	6	3,3	3,2	2,6	2,5	2,5	„
16	x_i	–3	–2	–1	0	1	2		
	y_{i}	0,37	0,76	1,4	3,1	5,9	12,1		$y = b\cdot a^x$
17	x_i	–3	–2	–1	0	1	2		
	y_{i}	0,36	0,77	1,3	3,2	5,8	12,2		„
18	x_i	–3	–2	–1	0	1	2		
	x_i	0,35	0,78	1,2	3,3	5,7	12,3		„
19	x_i	–3	–2	–1	0	1	2		
	y_{i}	0,35	0,79	1,1	3,4	5,6	12,4		„
20	x_i	–3	–2	–1	0	1	2		
	y_{i}	0,34	0,8	1,0	3,5	5,5	12,5		„

21. Для прогнозирования урожайности озимой пшеницы по ур-ию показательной кривой на примере ее динамического ряда, представленного в табл.1, найти эмпирическую фм. способом нм-их квадратов. Правильность выч-й проверить на графике и делать вывода о урожайности на конец сд-ей пятилетки. О: $a^* = 1,029$ и $b^* = 20,4$; 20,42 ц – ср. урожай за последние 5 лет; $\overline{y} = 20,4\left(1,029\right)^5 = 23,5$ ц – примерная урожайность на сд-ей пятилетки

Таблица 1

Номер года x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Урожай с 1 га $y_{\text{i, ц}}$	19,8	18,4	17,1	14,7	16,9	13,7	21,8	20,8	23,3	22,5

22. Способом нм-их квадратов найти эмпирическую фм. виды $y = \dfrac{a}{x} + b$ для фк., заданной таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
yi :	3,6	2,3	2,2	1,9	2,0

О: $a^* = 2,1;\ b = 1,4.$ Ук: сделайте проверку на графике.

23. Способы нм-их квадратов найти эмпирическую фм. вида $y = ax + b$ для фк., заданной таблицей:

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9

Выч-ия производить с точностью до 0,01. Результаты выч-й проводить на графике. О: $a = 0,24$; $b = 0,01$.

24. Пусть фк-я задана таблицей:

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	0	0,5	1,5	3,5	7	15

Способом нм-их квадратов найти эмпирическую формулу вида $y = ax^2 + bx + c$ на основе этих данных. Результаты проверить на графике.

2.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит постановка задачи инпн-ния и теорема Вейерштрасса.
2. Приведите полином Бернштейна.
3. Как получается инпн-ная фм. Лагранжа и оценка ее погрешности.
4. Какой вид имеет фм. Лагранжа для равноотстоящих узлов.
5. Как получаются конечные разности фк-и.
6. Приведите инпн-ную фм. Ньютона вперед.
7. Приведите инпн-ную фм. Ньютона назад.

Задание для кр. работы: в задачах 1–20 построить инп-ный полином Р (x) для фк-и f (x) или y_i в промежутке $[a,b]$ шагом h или в узлах x_i, найти Р (c) и оценку погрешности.

№ задач	Вид полинома	$f(x)$ или y	$[a,b],h$ или x	c
1	Лагранжа	25, –8, –15, –23	–2, 1, 2, 4	0
2	Лагранжа	$\sin \pi x$	$0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3	Лагранжа	10, 16, 4	1, 3, 6	2

Продолжение

№ задач	Вид полинома	$f(x)$ или y	$[a,b],h$ или x	c
4	Лагранжа	e^x	0, 1, 3	2
5	Лагранжа	$\cos x$	$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right], \frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{9}$
6	Лагранжа	$\ln x$	$[1;2]$ 0,5	1,3
7	Ньютона (вперед)	13, 20, 6, 31, 35	$[0,4]$, 1	17
8	Ньютона (назад)	,,	,,	33
9	Ньютона (вперед)	$\sin x + x^2$	$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right], \frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{9}$
10	Ньютона (назад)	$\cos x + x^2$	$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right], \frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{18}$
11	Ньютона	e^x	$[1,4]$, 1	1,5
12	Ньютона	e^x	$[0,3]$, 1	2,5
13	Ньютона	2^x	$[1,4]$, 1	1,5
14	Ньютона	2^x	$[0,3]$, 1	2,5
15	Ньютона	e^x	[1,4], 1	2,5
16	Ньютона	$\lg x$	$[0,3]$, 1	0,5
17	Ньютона	$\ln x$	$[1,2]$, 0,5	1,3
18	Ньютона	$\cos x + x$	$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right], \frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{9}$
19	Ньютона	$\ln\cos\frac{x}{e^2}$	$[40,43]$, 1	40,5
20	Ньютона	$\ln\sin\frac{x}{e^2}$	$[12,15]$, 1	14,5
21	Ньютона (вперед)	$\sin x$	$[26^\circ,28^\circ]$, 1°	26°15'

Р. Для решения 21 составляем табл-у разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
26°	0,43837	1562	–14
27°	0,45399	1548	
28°	0,46947		

Здесь $h=1^\circ=60'$, $t=\frac{26^\circ15'-26^\circ}{60'}=\frac{1}{4}$. Применяя формулу (16), находим

$$P_2(x)=0,43837+0,01562t-\frac{0,00014}{2!}t(t-1)=0,43837+0,01569t-0,00007t^2.$$

Отсюда $\sin 26^\circ15'=0,43837+0,01569\cdot\frac{1}{4}-0,0000\cdot\frac{1}{16}=0,44229.$

Для оценки погрешности используем фм-у (18) и учитывая, что если $y=\sin x=\sin\frac{\pi}{180}\alpha$ ($x-$ градусное, α – радианное измерения), то $\left|y^{(n)}\right|\le 1$, будем иметь: $\left|R_2\right|\le\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{31}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3=\frac{7}{128}\cdot\frac{1}{57,33^3}\approx\frac{1}{4}\cdot 10^{-6}.$

Т. о., все приведенные знаки $\sin 26^\circ15'$ – верные.

22. Пользуясь таблицей

x	$y=shx$	Δy	$\Delta^2 y$
2,0	3,63	2,32	1,65
2,5	6,05	3,97	
3,0	10,02		

прж-но вычислить корень ур. $sh\,x=5$.

Р. $t^{(0)}=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}=\frac{5-3,63}{2,32}=0,59;$

$$t^{(1)}=t^{(0)}-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y}t^{(0)}\left(t^{(0)}-1\right)=0,59+\frac{1,65}{2\cdot 2,32}\cdot 0,59\cdot 0,41=0,68;$$

$$t^{(2)}=t^{(0)}-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y}t^{(1)}\left(t^{(1)}-1\right)=0,59+\frac{1,65}{2\cdot 2,32}0,68\cdot 0,32=0,67.$$

Пользуясь последним значением, имеем:

$$x=x_0+th=2+0,67\cdot 0,5=2,34.$$

23. Пользуясь инпн. полиномом Ньютона (вперед) для фк. $y=\sin x+x^2$ в сегменте $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ шагом $h=\frac{\pi}{12}$ прж-но вычислить корень ур. $y=\sin x+x^2=1,130.$ $O:0,698$.

2.3. МОДЕЛИ ЗАДАЧ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ИХ РЕШЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно изменение кол-ва движения точки?
2. Чему равно изменение кинетической энергии точки?
3. Почему второй закон Ньютон неприменим при реактивном движении тел?
4. Приведите ур-ие Мещерского и получите от него ур. Ньютона.
5. В чем состоит задачи Циолковского о прямолинейном движении ракеты в пустоте. Приведите фм-у Циолковского.
6. Чему равны первая и вторая космические скорости?
7. В чем состоит задача Циолковского о движении ракеты с учетом силы тяжести. Приведите ств-щие фм. задачи.
8. Сформулируйте и решите задачу:
   а) Радиоактивного распада.
   б) Ионизация газов.
   в) Потока научной информации.
   г) Химической реакции.

Задание для кр. работы: по образцу рас-ых примеров в1^0–6^0 решить задачи 1–20, приводя ств-ие им рисунки при нх-ти.

1. Пуля, двигаясь со скоростью $v = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 20$ см и вылетает из нее со скоростью $\upsilon_1 = 100$ м/с. Полагая силу сопротивления стены прц-ой квадрату скорости движения пули, найти время Т движения пули в стене**.** О: Т =0,00108 с.

2 (Охлаждение тела). Пусть в нач-ый момент тело массы m с пст-ой теплоемкостью S имеет температуру θ_0. Температура окружающей среды пст-на и равна $\theta_c (\theta_0 > \theta_c)$. Найти закон охлаждения тела, принимая, что тепло отданное телом за беск-но малый промежуток времени dt, прц-но разности температур тела и окружающей среды, а также длительности промежутка (закон Ньютона). Делать числовой расчет для конкретных данных: $\theta_c = 20^\circ C$ и тело охлаждается от $\theta_0 = 100^\circ C$ до $\theta_1 = 60^\circ C$ за время $t_1 = 10$ мин. Найти θ. Через сколько времени температура тела понизится до $25\,^\circ C$. $O : \theta = 20 + 80(\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}, t = 40$ мин. Ук: $dQ = -\alpha(\theta - \theta_c)dt$, а с другой стороны – $Q = ms(\theta - \theta_c) \Rightarrow dQ = msd\theta$, тогда $msd\theta = -\alpha(\theta - \theta_c)dt$. Отсюда $\theta - \theta_c = ce^{\frac{-\alpha t}{ms}}$, т. к. $\theta = \theta_c$ при $t = 0$, то $c = \theta_0 - \theta_c$, отсюда $\theta = \theta_c = (\theta_0 - \theta_c)e^{-\frac{\alpha t}{ms}}$. Коэф. α задается непосредственно, либо дпн-ым условием, н-р, условием $\theta = \theta_1$ при $t = t_1$, тогда $\theta_1 - \theta_c = (\theta_0 - \theta_c)e^{\frac{-\alpha t_1}{ms}} \Rightarrow e^{\frac{-\alpha}{ms}} = \left(\frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_0 - \theta_c}\right)^{\frac{1}{t_1}}$, отсюда $\theta = \theta_c + (\theta_0 - \theta_c)\left(\frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_0 - \theta_c}\right)^{\frac{t}{t_1}}$.

3 (Нагревание слитка). Стальной слиток с темп-ой θ_a перед прокаткой помещен в печь, темп-а к-ой равномерно повышается в течение часа от θ_a до θ_b. Найти закон нагревания слитка, если при разности темп-р печи и слитка в T градусов он нагревается со скоростью kT град/мин.

Вычислить темп-у через $t = 60$ мин. Ук: Пусть q – темп. печи в момент времени t. Тогда $\theta = \delta - T$ – темп. слитка. Из условия задачи можно найти закон изменения темп-ы печи $q = At + B$, где постоянные A и B опр-ся из условий: ${}^{q}\!/_{t=0} = \theta_a, {}^{\theta}\!/_{t=60} = \theta_b$ и равны, ств-но, $A = \dfrac{\theta_b - \theta_a}{60}$ и $B = \theta_a$, т. е.

$$q = \frac{\theta_b - \theta_a}{60} t + \theta_a.$$

По условию задачи $\dfrac{d\theta}{dt} = kT.$ т. к. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}(q - T) = \dfrac{d}{dt}(AT + B - T) = A - \dfrac{dT}{dt}$, то $A - \dfrac{dT}{dt} = kT$ или $\dfrac{dT}{dt} + kT - A = 0 \Rightarrow \dfrac{dt}{kT - A} + dt = 0 \underset{инт.}{\Rightarrow} \dfrac{1}{k}\ln(kT - A) + t = \dfrac{1}{k}\ln C$ или $kT - A = ce^{-kT}$. Из нач. условия ${}^{T}\!/_{t=0} = 0$ находим $C = -A,$ сд-но, $T = \dfrac{A}{k}(1 - e^{-kt})$. Т. к. $T = q - \theta = AT + B - \theta$, то $\theta = At + B - T = AT + B - \dfrac{A}{k}(1 - e^{-kt})$ или $\theta = \theta_a + \dfrac{\theta_b - \theta_a}{60k} t - \dfrac{\theta_b - \theta_a}{60k}(1 - e^{-kt}),$ т. е. $\theta = \theta_a - \dfrac{\theta_b - \theta_a}{60k}(1 - e^{-kt} - kt)$.

$$O: \theta = \theta_b - \frac{\theta_b - \theta_a}{60k}(1 - e^{-60k}).$$

4 (Поглощение света при прохождении через воду). Поглощение светового потока тонким слоем воды прц-но толщине слоя и потоку, подающему на его пвх-ть. Зная, что при прохождении через слой толщиной 2 м поглощается $\dfrac{1}{3}$ первоначального светового потока, опр-ть, какой процент его дойдет до глубины 12 м. $O: Q_1 = Q_0(\dfrac{2}{3})^6 \approx 0,0878 Q_0$, т. е. составляет 8, 78 % первоначального потока. Ук: если $Q(Q_0)$ – световой поток (нач.), h – глубина поглощения света, то $dQ = -kQdh \Rightarrow Q = ce^{-kh}$, т. к. $Q = Q_0$ при $h = 0$, то $C = Q_0$, тогда $Q = Q_0 e^{-kh}$. При $h = 2$ имеем $Q = \dfrac{2}{3} Q_0$, тогда $\dfrac{2}{3} Q_0 = Q_0 (e^{-k})^2 \Rightarrow (\dfrac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$, отсюда $Q = Q_0 (\dfrac{2}{3})^{\frac{h}{2}}$.

5 (Вентиляция цеха). В помещении цеха вместимостью 10 800 м^3 воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, в количестве $a\ м^3/мин$. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одна и та же (смещение чистого воздуха с загрязненным происходит немедленно), рассчитать, какова должна быть мощность вентиляторов, чтобы по истечении 10 мин содержание углекислоты не превышало 0,06%.

$O: x-0,04=0,08e^{-\frac{at}{10800}}$, где $a-$ мощности вентиляторов, тогда $a=1500\dfrac{м^3}{мин}$, при $x=0{,}06,\ t=10$. Ук: $x(\%)$ – содержание углекислоты в момент t, за время dt вентиляторы доставили 0,0004adt м^3 углекислоты, а ушло из помещения $x\%adt$ м^3 $=0,01xadt$ м^3 углекислоты, если $q=-10800\cdot 0{,}01\,dx$ – уменьшение углекислоты в помещении, что получим $(0,01x-0,0004)adt=\ -10800\cdot 0,01dx \Rightarrow$

$-\dfrac{adt}{10800}=\dfrac{dx}{x-0,04}\Rightarrow x-0,04=ce^{-\frac{at}{10800}}$. Т. к. $x=0{,}12$ при $t=0$, то $c=0,08$, тогда $x-0,04=0,08e^{-\frac{at}{10800}}$, отсюда, полагая $x=0,06;\ t=10,$ найдем a.

6 (Истечение жидкости из сосуда). Пусть сосуд с поперечным сечением $S=S(h)$, где h – высота, наполнен жидкостью до уровня H. В дне сосуда имеется отверстие площади W, через к-ое жидкость вытекает. Опр-ть время t, за к-ое уровень жидкости понизится от нач. положения H до произвольного h, и время T полного опорожнения сосуда. При этом будем считать, что скорость v изменения количества (объема) жидкости в сосуде яв-ся известной фк-ей $v=v(h)$ от уровня h жидкости в сосуде (напора).

Р. Пусть в момент времени t высота жидкости в сосуде равна h. Количество жидкости dV, вытекающее из сосуда за время dt от момента t до $t+dt$, можно подсчитать как объем цилиндра с пщ-ю ω и высотой $\upsilon(h)$, т. е. $dV=\omega\nu(h)dt$. С другой стороны, вследствие утечки жидкости уровень h понизится на dh, т. е. $dV=-S(h)dh$ (знак «–» берется потому, что $dh<0$). Тогда

$$w\nu(h)dt=-S(h)dh \text{ или } dt=-\frac{S(h)}{w\nu(h)}dh \underset{\text{инт.}}{\Longrightarrow}$$

$$t=-\frac{1}{w}\int_H^h\frac{S(h)}{\nu(h)}dh=\frac{1}{w}\int_h^H\frac{S(h)}{\nu(h)}dh$$, отсюда при полном опорожнении сосуда

$h=0$, получим $T=\dfrac{1}{w}\displaystyle\int_0^H\frac{S(h)}{\nu(h)}dh$.

Если истечение происходит через малое отверстие или через короткий патрубок, то по закону Торичелли $v=\mu\sqrt{2gh}$, где g – ускорение силы тяжести, а μ – эмпирический коэф. (коэф-т расхода). В этом случае полученные фм. имеют вид

$$t=\frac{1}{w\mu\sqrt{2g}}\int_h^H\frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh,\ T=\frac{1}{w\mu\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh \qquad (1)$$

Пример. Круглый цилиндрический бак с вертикальной осью, диаметром D и высотой H наполнен водой. Опр-те время опорожнения бака через круглое отверстие a в дне бака (рис. 1).

$D=1$ м; $H=1{,}5$ м; $a=0{,}05$ м; коэф. расхода $\mu=0{,}62$ (для воды)

$O:T=356$ с = 5 мин. 56 с. Ук:

$$S(h)=\frac{\pi D^2}{4},w=\frac{\pi a^2}{4},T=\frac{D^2}{a^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{dh}{\sqrt{h}}=\frac{2D^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}$$

7. Найти решение задачи 6^* при данных: $D=2$ м; $H=4$ м; $a=0{,}05$ м; $\mu=0{,}62$.

8. Опр-ть время опорожнения заполненной керосином железнодорожной цистерны длины L и диаметра D через короткий сливной патрубок в нижней части цистерны пщ. поперечного сечения к-го w (рис. 2).

Р. Т.к. $S(h)=2xL=2L\sqrt{R^2-(h-R^2)}=2L\sqrt{(D-h)h}$, то

$$T=\frac{2L}{w\mu\sqrt{2g}}\int_0^D\frac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}=\frac{4LD\sqrt{D}}{3w\mu\sqrt{2g}} \text{ в силу (1).}$$

Пример. Найти решение задачи при данных: $L=12$ м, $D=2{,}6$ м, $w=0{,}01$ м^2 и коэф. расхода $\mu=0{,}6$ (керосин). $O:T=2520$ с = 42 мин.

9. Найти решение задачи 8 при данных: $L=10$ м, $D=2{,}6$ м, $w=0{,}005$ м^2, $\mu=0{,}6$.

10. Опр-ть время опорожнения заполненного водой резервуара с диаметром D_1 верхнего (большого) основания, D_2 – нижнего и высотой H через круглое отверстие диаметром a в дне резервуара (рис. 3).

Р. Т.к. $D=D_2+x=D_2+(D_1-D_2)\dfrac{h}{H}$, то

$$S(h)=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi}{4}\left[D_2+(D_1-D_2)\frac{h}{H}\right]^2, \text{ тогда в силу (1)}$$

$$T=\frac{1}{a^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{\left[D_2+(D_1-D_2)\frac{h}{H}\right]^2}{\sqrt{h}}dh=\frac{2\sqrt{H}}{15a^2\mu\sqrt{2g}}\left(3D_1^2+4D_1D_2+8D_2^2\right).$$

Пример. Найти решение задачи при данных: $D_1 = 0,8$ м, $D_2 = 0,3$ м, $H = 1$ м, $a = 0,03$ м и $\mu = 0,62$ (вода). $O: T = 194$ с $= 3$ мин. 14 с.

11. Найти решение задачи 10^* при данных: $D_1 = 1$ м, $D_1 = 0,4$ м, $H = 2,25$ м, $a = 0,05$ м и $\mu = 0,62$.

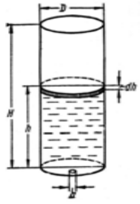


Рис. 1

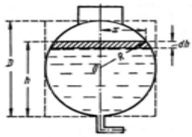


Рис. 2

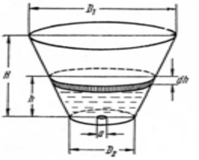


Рис. 3

12 (Очищение газа). Для очистки газа от некоторой газообразной же примеси его пропускают через скруббер (сосуд, содержащий тот или иной поглотитель). Количество газообразной примеси, поглощаемое тонким слоем поглотителя при установившемся режиме аппарата, пропорционально концентрации примеси, а также толщине и площади поперечного сечения слоя. Скруббер имеет форму конуса с радиусом основания R и высотой H. Газ поступает через вершину конуса. Найти зависимость концентрации газообразной примеси в скруббере как фк-ю расстояния слоя от вершины конуса, если концентрация примеси в поступающем газе равна $a\%$, а в выходящем $b\%$. $O: q = a(\frac{b}{a})^{\frac{h^3}{H^3}}$.

Ук: Пусть $q\%$ – концентрация примеси, h – расстояние слоя от вершины конуса, $r = \frac{Rh}{H}$ – радиус сечения тонкого слоя конуса, тогда $dq = kq\pi\frac{R^2}{H^2}h^2dh \Rightarrow q = ce^{k\pi R^2h^3/(3H^2)}$. Т. к. $q = a$ при $h = 0$, то $c = a$, тогда $q = ae^{k\pi R^2h^3/(3H^2)}$. Опр-им k из условия $q = b$ при $h = H$. Имеем $b = ae^{k\pi R^2H^3/(3H^2)}$, откуда лучше опр-ть не k, а выражение, содержащее k: $e^{k\pi R^2/(3H^2)} = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{H^2}}$, тогда $q = a(\frac{b}{a})^{h^3/H^3}$. Начертить скруббер с принятыми параметрами.

13. Найти решение аналогичной задачи (см. 12) для скруббера, имеющего форму шара радиуса R. $O: q = a(\frac{b}{a})^{h^2(3R-h)/(4R^3)}$. Ук: $dq = kq\pi z^2dh$, где $z = R^2-(h-R)^2$ (см. рис. 2), отсюда $dq = kq\pi\left[R^2-(h-R)^2\right]dh \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln\frac{q}{c} = k\pi\left[R^2h - \frac{(h-R)^3}{3}\right]$.

Для опр-ия c и k используем условия $q = a$ при $h = 0$, $q = b$ при $h = 2R$. Имеем $\ln\frac{a}{c} = \frac{k\pi R^3}{3}, \ln\frac{b}{c} = k\pi(2R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{5k\pi R^3}{3}$, тогда $\ln\frac{b}{c} - \ln\frac{a}{c} = \ln\frac{b}{a} = \frac{4k\pi R^3}{3}$, откуда $k\pi = \frac{3}{4R^3}\ln\frac{b}{a}$. Находим также разность $\ln\frac{q}{c} - \ln\frac{a}{c} = \ln\frac{q}{a} =$ $= k\pi\left[R^2 h - \frac{(h-R)^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right] = k\pi(Rh^2 - \frac{h^3}{3})$, отсюда, подставляя выражение $k\pi$, получим $\ln\frac{q}{a} = \frac{3}{4R^3}\cdot\frac{h^2(3R-h)}{3}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow \ln\frac{q}{a} = \ln(\frac{b}{a})^{h^2(3R-h)/(4R^3)}$; откуда получим решение задачи.

14. Найти кривые, у к-ых подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания. $O\colon y = ce^{\frac{x}{y}}$. Ук: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, $x - x_0 = x + y$ – по условию, $\kappa = y^1 \Rightarrow \frac{y}{y^1} = x + y \Rightarrow$ $ydx = (x + y)dy$, $x = yZ$

15. По какой пвх-ти вращения надо отшлифовать зеркало рефлектора, чтобы все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке О на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси (рис. 4)?

$$O : y^2 + Z^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right).$$

Ук: пусть α – угол, образованный с осью Оx и касательной АТ в точке М ($x;y$) кривой, а по условию задачи $\angle$SMT= α. С другой стороны $\angle$OMA=$\angle$SMT, как углы падения и отражения, поэтому $\angle$OMA=α, тогда $AO = OM$. Отрезок АО = АР – ОР = $\frac{y}{y^1} - x$, а ОМ=$\sqrt{x^2 + y^2}$, отсюда получим $\frac{y}{y^1} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $ydx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = o.$ Подстановкой $x = yZ$,

$ydZ = \sqrt{Z^2 + 1}\ dy$ или $\frac{dZ}{\sqrt{Z^2 + 1}} = \cdot\frac{dy}{y} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $\ln(Z + \sqrt{Z^2 + 1} = \ln y - \ln C \Rightarrow$

$Z + \sqrt{Z^2 + 1} = \frac{y}{C}$ или $\left(\frac{y}{C} - Z\right)^2 = Z^2 + 1 \Rightarrow \frac{y^2}{C^2} - \frac{2yZ}{C} = 1$. Возвращаясь к пер. x, получим $y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$, представляющий собой семейство парабол с параметром $p = C$ и вершиной, лежащей на расстоянии $\frac{C}{2}$ слева от нач. крд-т. Сд-но, пвх-ми вращения яв-ся параболоиды вращения, тогда заменяя y^2 через $y^2 + Z^2$, получим решение задачи.

Пример. Если задать диаметр зеркала d и глубину h, то можно опр-ть С, положив $x+\frac{c}{2}=h,\quad y=\frac{d}{2}$. Тогда получим $c=\frac{d^2}{8h}$, отсюда $y^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$ – ур. параболы, $y^2+Z^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$ – ур. параболоиды.

16 (Переходный процесс в электрической цепи). В цепи с индуктивностью происходит переходный процесс. Индуктивность L и активное сопротивление R постоянны. Напряжение U=f(t) и нач-ый ток i_0 заданы. Найти зависимость тока i от времени t. В част. рас-ть случай, когда $U=U_0=const$. $0: i=e^{-Rt/L}\left[i_0+\frac{1}{L}\int\limits_0^t f(r)e^{R\tau/L}dr\right]$, $i=\frac{U_0}{R}+\left(i_0-\frac{U_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$.

Ук: Т.к. ток i в цепи изменяется со временем, то вследствие наличия индуктивности L возникает э.д.с. самоиндукции $e_L=-L\frac{di}{dt}$. По закону Кирхгофа падение напряжения цепи Ri равно сумме э.д.с. $U-L\frac{di}{dt}$, т. е. $U-L\frac{di}{dt}=Ri$ или $L\frac{di}{dt}+Ri=U$, отсюда, заменяя U на $f(t)$, получим $\frac{di}{dt_x}+\frac{R}{L}i=\frac{f(t)}{L}$ (учитывая, что из $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left[y_\circ+\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)e^{-\int_{x_0}^{x}p(u)du}dt\right]$ при нач. условии $y(x_0)=y_0$), отсюда удщим нач. условию $i=i_0$ при $t=0$, получим частное решение $i=e^{-Rt/L}\left[i_0+\frac{1}{L}\int\limits_0^t f(\tau)e^{R\tau/L}d\tau\right]$ и при $f(t)=U_0=const$ $\quad i=\frac{U_0}{R}+\left(i-\frac{U_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$.

Отсюда $e^{-Rt/L}\to_0$ при $t=\infty$, тогда ток опр-ся по закону Ома: $i=\frac{U_0}{R}$.

Если положить, $i_\circ=0$, то получим фор-лу для тока при замыкании цепи: $i=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$. Откуда видно, что ток i после включения батареи нарастает до значения U_0/R, опрм-го законом Ома, т.к. ток $\frac{U_0}{R}e^{-Rt/L}$, назмый экстратоком замыкания, очень быстро убывает и становится неощутимым.

Если положить $U_0 = 0$, то получим фор-лу затухающего тока при размыкании цепи: $i = i_0 e^{-Rt/L}$. Этот ток, проходящий в цепи, когда в ней снято напряжение, под действием одной лишь электродвижущей силы самоиндукции, наз**.** экстратоком размыкания. С возрастанием t он стремится к нулю. Постоянную величину L/R наз-ют постоянной времени цепи.

Рас-ные вопросы очень важны в тех случаях, когда замыкание и размыкание быстро следует одно за другим, н-р, при телеграфировании.

17. Найти решение задачи 16, когда напряжение источника тока изменяется по синусоидальному закону $U = E\sin\omega t$ (н-р, случай подключения RL – цепи к сети пер-го тока).

$$O: i = \left(i_0 + \frac{\omega LE}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)e^{-Rt/L} + \frac{RE}{\omega^2 L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LE}{\omega^2 L^2 + R^2}\cos\omega t.$$

Т.к. множитель $e^{-RT/L}$ быстро убывает при возр. t, то получим ток, наз-мой установившимся $i = \frac{RE}{\omega^2 L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LE}{\omega^2 L^2 + R^2}\cos\omega t.$

Ук: Т.к. $\int\limits_0^t e^{Rt/L}\sin w\tau d\tau = e^{Rt/L}\left(\frac{RL}{w^2L^2+R^2}\sin wt - \frac{wl^2}{w^2L^2+R^2}\cos wt\right) + \frac{wL^2}{w^2L^2+R^2}$,

то из $i = e^{-Rt/L}\left(i + \frac{E}{L}\int\limits_0^t e^{Rt/L}\sin w\tau d\tau\right)$ получим ответ.

18 (Скольжение веревки). Веревка лежит на столе (рис. 5), причем один из ее концов перекинут через гладкий блок на высоте a над столом. В нач. момент кусок веревки длиной $2a$, весит свободно по другую сторону блока. Найти скорость υ движения этого конца в зависимости от пути S, если сопротивление трения при движении принято равным квадрату скорости, а нач. скорость равна нулю. Д-ть, что движение равномерно ускоренное.

$$O: \upsilon = \sqrt{\frac{2g}{3}(s - 2a)}\,.$$

Ук: Если выбрать блок в качестве точки отсчета пути и направить ось Os вниз, то второй закон Ньютона $m\frac{d\upsilon}{dt} = F$ в нашем случае приводит к

диф. ур-ю $(S+a)\frac{d\upsilon}{dt} = (S-a)g - \vartheta^2$, где g – ускорение силы тяжести. Т.к. $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \vartheta\frac{d\vartheta}{dS}$, то $(S+a)\vartheta\frac{d\vartheta}{ds} + \vartheta^2 = (S-a)g \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dS} + \frac{1}{S+a}\vartheta = \frac{g(S-a)}{S+a}\vartheta^{-1}$**.** Это ур. Бернулли $(n = -1)$. Полагаем $\vartheta = uZ$, тогда $u'Z + uZ + \frac{uZ}{S+a} =$

$= \frac{g(S-a)}{(S+a)uZ} \Rightarrow u'Z + u\left(Z - \frac{Z}{S+a}\right) = \frac{g(S-a)}{(S+a)uZ}$; $\frac{dZ}{dS} = \frac{Z}{S+a} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} Z = \frac{1}{S+a}$, то

$$\frac{du}{dS}\cdot\frac{1}{S+a}=\frac{g(S-a)}{(S+a)u\cdot\dfrac{1}{S+a}}\Rightarrow udu=g\left(S^2-a^2\right)dS\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}u=\sqrt{2g\left(\frac{S^3}{3}-a^2S\right)+C},$$

т.е. $\vartheta=uZ=\dfrac{1}{S+a}\sqrt{2g\left(\dfrac{S^3}{3}-a^3S\right)+C}$ Т.к. $S=2a$ при $\upsilon=0$, то $C=-4ga^3/3$.

Тогда $\upsilon=\dfrac{1}{S+a}\sqrt{\dfrac{2g}{3}\left(S^3-3a^2S-2a^3\right)}=\dfrac{1}{S+a}\sqrt{\dfrac{2g}{3}(S-2a)(S+a)^2}$ т.е. $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2g}{3}(S-2a)}$. Это выражение возведем в квадрат и диф-уя по t, убедимся, что $\dfrac{d^2S}{dt^2}=\dfrac{g}{3}=const.$

19. Составить ур. кривой, проходящей через точку $A(a,a)$ и обладающей св-ом: если в любой точке $M(x,y)$ кривой с ординатой PM провести до пересечения с осью O_y в точке T, то плщ. трапеции $OTMP$ есть вел. постоянная, равная a^2 (рис. 6). $O: y=\dfrac{2a^2}{3x}+\dfrac{x^2}{3a}.$

Ук: $S=\dfrac{OT+PM}{2}$. OP – пщ. трапеции. т.к. $OT=y-xy'$, $PM=y$, $OP=x$, то $(2y-xy')x=2a^2$ или $y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{2a^2}{x^2}\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}y=\dfrac{2a^2}{3x}+Cx^2.$

20. Пщ. треугольника, образованного радиусом – вектором OM любой точки $M(x,y)$ кривой, касательной MP в этой точке и осью O_x, равна 2. Кривая проходит через точку $M(2:-2)$. Найти ее ур. (рис. 7). $O: 3y^2+2xy-4=0.$

Ук: $S=\dfrac{1}{2}OP.$ MN – пщ. треуг. Т. к. $MN=y,$ $OP=x-\dfrac{y}{y'}$, то $\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)y=4$ или $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=-\dfrac{4}{y^2}\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}x=y\left(\dfrac{2}{y^2}+C\right).$

21. Составить ур. кривой проходящей через нач. крд-т, зная, что середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox находится на параболе $y^2=ax.$

Р. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка кривой. Точка P пересечения нормали в точке M кривой с осью Ox имеет крд-ы $x+yy'$ и O, т.е. $P(x+yy';0)$, а середина отрезка MP в точке $N\left(x+\frac{yy'}{2},\frac{y}{2}\right)$. Т. к. N лежит на параболе $y^2=ax$, то $\frac{y^2}{4}=a\left(x+\frac{yy'}{2}\right)$ или $y'-\frac{1}{2a}y=-\frac{2x}{y}$. Это ур. Бернулли $(n=-1)$.

По логике $y=UV$, получим $u'v+u'v'-\frac{1}{2a}uv=-\frac{2x}{uv}\Rightarrow u'v+u\left(v'-\frac{v}{2a}\right)=-\frac{2x}{uv}$.

Находим решение $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{2a}\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dx}{2a}\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}\ln v=\frac{x}{2a}\Rightarrow v=l^{\frac{x}{2a}}$. Тогда

$$\frac{du}{dx}e^{\frac{x}{2a}}=-\frac{2x}{u\cdot e^{\frac{x}{2a}}}\Rightarrow udu=-2xe^{-\frac{x}{a}}dx\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}\frac{u^2}{2}=2a(x+a)e^{-\frac{x}{a}}+\frac{C}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=\sqrt{4a(x+a)e^{-\frac{x}{a}}+C}\Rightarrow y=uv=e^{\frac{x}{2a}}\sqrt{4a(x+a)e^{-\frac{x}{a}}+C},$$

отсюда, используя нач. условия $y_{(0)}=0$, имеем $C=-4a^2$. Тогда

$$y^2=4a(x+a)-4a^2e^{\frac{x}{a}}\Rightarrow y^2=4ax+4a^2\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right).$$

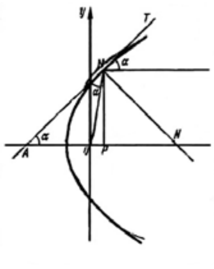


Рис. 4

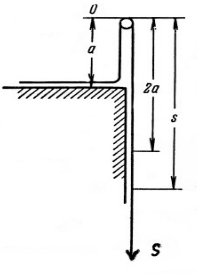


Рис. 5

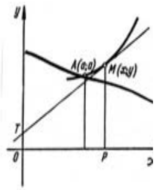


Рис. 6

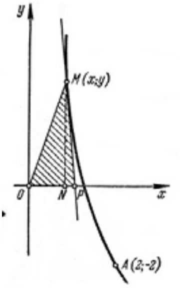


Рис. 7

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ЛП И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

> Этика, гигиена духовной жизни и познание мира сейчас должны быть не лозунгом, а результатом глубокого понимания мира и законов. Сейчас главное – научиться соединять противоположные понятия: идеализм и материализм, религию и науку, логику и интуицию, высокую духовность и практицизм, совмещать постоянную любовь к миру и людям с повседневными эмоциями. Пока мы не снимем эти противоречия, нет надежды на полное познание мира.
>
> NN

ЛЕКЦИЯ 7

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛП И ФОРМУЛИРОВКА ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1^0. Роль математики и моделирования в различных областях. В связи со сплошной компьютеризацией во всех областях актуальным становится вопрос эффективного их использования. А это возможно лишь широким применением мт-ки и мдв-ия для анализа изучаемого процесса с использованием ЭВМ (компьютера) начиная с простых вычислений (выч.) табличных данных до диалоговых общений человека с ЭВМ. Сейчас можно однозначно утверждать, что нет такой отрасли, где не применялись бы мт-ка и модели для исслования изучаемого процесса с использованием ЭВМ. Демонстрируем сказанное в конкретной области, н-р, в экономических (экнч.) исследованиях.

Применение мт-их методов, в част., мт-их моделей в экнч-их исследованиях привлекают как специалистов-экономистов, так и широкий круг общественности. В чем причина?

Во-первых, мт. методы дают возможность решать различные практические задачи бухгалтерского учета, как задачи проведения балансов, складировании, подсчетах эффективности производимых работ, распределения ресурсов и т.д.

Во-вторых, мт. модели используются для решения оптимизационных (оптз.) задач, н-р, при составлении планов производства (прз.) или перевозок, программы работы цехов, кормовых рационов, раскрое материала и т.д.

В-третьих, мт. методы и модели сами яв-ся мощным средством (методом) для познания мира, для изучения его закономерностей (н-р, открытия планеты Нептун, электронных волн и позитрона, сделанные сначала математически «на кончике пера», лишь потом подтвердились экспериментально) и тем самым для развития науки, в част., экнч-ой.

В-четвертых, мт-ка совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ум, приучает человека рассуждать логически, воспитывает у него точность, обстоятельность аргументации. Причем мт-ка яв-ся единственным предметом для тренировки ума, как физические снаряды для тренировки тела.

2^0. Экстремальные задачи. Метод Лагранжа. Введение в математическое программирование. Задачи на максимум (мкс, max) и минимум (мнм, min) встречаются еще в школе. Рассмотрим для примера две планиметрические задачи.

з1. Найти на данной прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была мнм-на (рис. 1).

з2. Вписать в круг прямоугольник наибольшей (нб.) площади (пщ) (рис. 2).

Первая задача – это задача на мнм., вторая – на мкс. Слово maximum по латыни означает «наибольшее», слово minimum – «наименьшее» (нм.). Оба эти понятия – мкс. и мнм.– объединяются единым термином экстремум (от латинского extremum, означающего «крайнее».), а иногда употребляют слово оптимальный (опт.), от латинского optimus, что означает наилучший, совершенный. То, з1 и з2 – это экстремальные (эксл.) задачи, или задачи оптимизации (оптз.). Теорию задач на отыскание нб-их и нм-их величин называют или теорией эксл. задач, или теорией оптз., или теорией опт-го управления (упл.), если задача связана с практическими приложениями.

Задачи з1, з2 сформулированы словесно, без формул. Эксл. задачи, возникающие в естественных науках или на практике, обычно ставятся именно так – словесно, в содержательных терминах той области, где данная задача возникла. Чтобы можно было воспользоваться теорией, нх-им перевод задач на мт-ий язык. Этот перевод наз. формализацией или моделированием (мдв.).

Одна и та же задача может быть формализована разными способами, и простота решения зачастую сильно зависит от того, насколько удачно она формализована.

Формализуем з1. Направим ось Ох по заданной прямой, а ось Оу проведем через точку А (о, а) и точка В (d, b) лежит на пл. xOy. Пусть С (х, у) – искомая точка (рис.1). Тогда приходим к сд. задаче: найти

$$\min f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

по всем $x \in R$.

Формализация з2. Пусть окружность описывается ур-ем $x^2 + y^2 = r^2$. Направим оси Ох и Оу параллельно (прл.) сторонам прямоугольника (пуг.) и обз-им через (х, у) крд-ы вершины пуг-ка, лежащей в первом квадранте (рис.2). Тогда пщ. пуг-ка равна 4ху и получим задачу: найти max $f(x, y) = 4xy$ при условиях

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,\ f_2(x, y) = x \geq 0,\ f_3(x, y) = y \geq 0.$$

Любая формализованная задача устроена аналогично. Она включает в себя сд. элементы: фк-ю f: $x \to R$ (x – обл. опр-ия фк. f) и ограничение (огр.), т.е. подмн. $C \subset X, где C = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ для з2. Т.о., формализовать эксл. задачу – это значит точно описать ее эл-ты: *f*, *x* и С. Фк. *f* наз. целевой фк-ей, С – мн-ом допустимых решений.

Точки $x \in C$ наз. допустимыми. Если $C = X = R$, то задача наз. задачей без огр-й (см. з1).

Задачу на max всегда можно свести к задаче на min, заменив задачу $\max f(x),\ x \in C,$ задачей $\min \widetilde{f}(x), x \in C,$ где $\widetilde{f}(x) = -f(x)$. Аналогично задачу на min можно свести к задаче на max. Поэтому в дальнейшем, задачи на max и min будем писать только для задачи на max. Если нх-мо исследовать обе задачи, то будем писать $extrf(x), x \in C$.

Допустимая точка x^* наз. абсолютным (или глобальным) минимумом (максимумом) задачи, если $f(x) \geq f(x^*)$ $(f(x) \leq f(x^*))$ для любых $x \in C$. Абсолютный (абс.) $\min(\max)$ будем наз-ть решением задачи. Величина $f(x^*)$, где x^* – решение задачи, наз. эксл. значением задачи. Эту велечину будем обз-ть $Z_з$ или $Z_{\min}\left(Z_{\max}\right)$, или Z^*.

В з1 абс-ый мнм. x^*, определяющий (опр.) искомую точку $C^* = (x^*, 0)$, характеризуется, (хркз.) как известно из геом, тем, что острые углы, образованные отрезками AC^* и C^*B с осью O_x, равны (угол падения равен углу отражения). Тогда min значения задачи $Z_{\min} = \sqrt{(a+b)^2 + d^2}$.

В з2 искомым пуг-ом яв-ся квадрат (д-те это сами!!) что ств-ет решению $x^* = \frac{r}{\sqrt{2}},\ y^* = \frac{r}{\sqrt{2}},\ Z_{\max} = 2r^2$.

Кроме глобальных эксм-ов рас-им локальные эксм. Точка x^* наз. локальным минимумом (максимумом), если $x^* \in C$ и сущ-ет $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой точки $x,$ для к-ой $\| x - x^* \| < \delta$ выполняется нерав-во $f(x) \geq f(x^*)\left(f(x) \leq f(x^*)\right),$ т.е. если точка x^* есть локальный эксм., то сущ-ет окрестность U такая, что $extrZ = f(x),\ \ x \in C \bigcap U$.

Теория эксл. задач дает правила нахождения решений эксл. задач. Обычно эти правила выделяют нек-ое подмн. точек, среди к-ых должно содержаться решение задачи. Это мн. точек наз. критическими точками. После нахождения всех критических точек выделяют из них решения. Н-р, найдем критические точки, локальные и абс-ые эксм. в сд. задаче.

з3. найти $extrf(x) = x^3\left(x^2 - 1\right), -1 \leq x \leq 2$ (рис. 3)

Р. Абс-ый эксм. в задаче может достигаться на концах отрезка или во внутренней точке. Если эксм. достигается во внутренней (стационарной) точке, то в этой точке производная должна равняться нулю, т.е.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}\right\}.$$

Т.о., имеем 5 критических точек: $x_1 = -1, x_2 = -\sqrt{3/5},\ x_3 = 0,\ x_4 = \sqrt{3/5},$ $x_5 = 2,$ из к-ых точки x_2, x_3, x_4 яв-ся стационарными. Из графика фк. $f\left(см.рис.3\right)$ видно, что $x_1, x_4 -$ $loc\min,$ $x_2, x_5 - loc\max,$ $x_4 - abs\min,$ $x_5 - abs\max$ с ств-ми эксл. значениями: $Z_{x_1} = 0. Z_{x_4} = -\dfrac{6}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}},\ Z_{x_2} = \dfrac{6}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}},$ $Z_{x_5} = 24,$ из них $Z_{\min} = -\dfrac{6}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}},\ Z_{\max} = 24 - абс.$ эксл. значения.

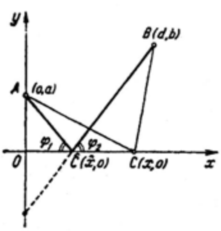


Рис. 1

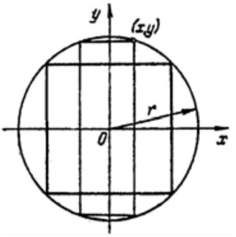


Рис. 2

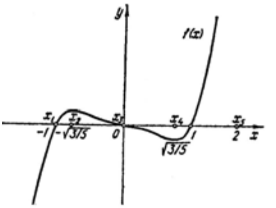


Рис. 3

Оптз. или эксл. задачи наз. неразрешимой, если она не имеет опт-го решения. В част., задача мнмз. (мксз) $\left(f, x, c\right)$ будет неразрешимой, если целевая фк. $f\left(x\right)$ не ограничена снизу (сверху) на допустимой мн. С

Решить опт. задачу – значит либо найти ее опт. решение, либо установить неразрешимость этой задачи.

Методы решения оптз-ых задач, в к-ых целевая фк. представляет собой функционал на нек-ом мн-ве фк-й или вектор – функций, расв-ся в вариационном исчислении и в теории опт-го упл-ия.

Рас-им задачи упл-ия и планирования, сводящихся к ОПТЗ. задачам сд-го вида: Найти

$$\max Z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \tag{1}$$

при условиях

$$\varphi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0, i = \overline{1, m} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n} \tag{3}$$

где фк. $f\left(x_1, ..., x_n\right)$ наз. показателем качества или целовой фк-ей; условия (2), (3) представляют собой огр-ия задачи С. Если $\varphi_i\left(x_1, ..., x_n\right) = 0,$ то вместо нее можно взять $\begin{cases} \varphi_i\left(x_1, ..., x_n\right) \le 0 \\ -\varphi_i\left(x_1, ..., x_n\right) \le 0 \end{cases}$

Мт. дисциплина, занимающаяся изучением задач вида (1) – (3) и разработкой методов их решения при различных допущениях отс-но фк-й f и $\{\varphi_i\}$ наз. математическим программированием (МП).

Основная особенность задач МП, отличающая их от условных эксл. задач классического анализа, состоит в том, что эксл. точки могут оказаться на границе обл. С. Классические же методы диф. исчисления разработаны для отыскания эксл-х точек внутри обл. опр-ия фк. Если бы мы были уверены, что эксл. точка задачи (1)-(3) находится внутри обл. С, то для ее решения использовали бы метод Лагранжа, суть к-го заключается в сд-ем:
Находим $\max F(x_1...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,...,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,...,x_n)+...+\lambda_m\varphi_m(x_1,..,x_n)$ при $\frac{\partial F}{\partial x_j}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}=0\left(j=\overline{1,n},i=\overline{1,m}\right)$, из $n+m$ ур-й опр-ем $n+m$ неизвестных $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$, отсюда находим $\max f(x_1,...,x_n)$. Однако для задачи (1)-(3) такой информацией не располагаем, поэтому не используем метод Лагранжа.

В зв-ти от вида целевой фк. и огр-й МП делится на линейное программирование (ЛП) и нелинейное программирование (НП)

В ЛП фк. f и $\varphi_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ зависят от пер. $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ лин-но.

В НП фк. f и $\{\varphi_i\}$ зв-ят от пер. $\{x_j\}$ нелин-но. В свою очередь НП делится на: Выпуклое программирование (ВП), где надо найти max вогнутой фк. f на выпуклом мн-ве С (н-р, квадратическое программирование (прг.)) и Невыпуклое программирование (НВП), к-ое изучено мало (н-р, целочисленное прг.).

В зв-ти от определенности (опр.) или случайности исходных данных МП делится на: Детерминированное прг. (н-р, ЛП, НП) и Стохастическое (вероятностное) прг. к-ое в основном сводится к использованию ВП, а нек-ые Стохастические задачи (н-р, матричные игры, задачи планирования с неопределенным (неопр.) спросом) можно свести к задачам ЛП.

Одним из способов классификации МП яв-ся:

Одношаговое (стационарное) прг. (н-р, транспортная задача, задачи о диете и выпуске продукции) в к-ом, н-р, объем выпуска продукции остается постоянным (пст) в течение опр-го отрезка времен.

Многошаговые (Динамическое) программирование (ДП), н-р, обучение в процессе работы, в к-ом основную роль играет планирование во времени.

Задачи МП можно классифицировать и по др. принципу, используя стандартов. Целочисленное прг-ие: многие нелинейные, невыпуклые задачи МП могут быть сведены к задачам ЛП с дополнительным (дпн) требованием целочисленности решения. Сюда относятся комбинаторные задачи, коммивояжера.

Непрерывные (непр) прг. где исходные данные МП принимают непр-ые значения.

В ряде случаев целовая фк. f или (и) огр-ия $\{\varphi_i\}$ зависят от одного или нескольких параметров, в этом случае имеем дело с параметрическим прг-ем.

Если число пер-ых велико и не умещается в оперативную память ЭВМ, то нам на помощь приходит Блочное прг.

3^0. Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Сд-ую эксл. задачу будем наз-ть основной задачей ЛП в конической форме: найти

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , i = \overline{1,m} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \tag{6}$$

где $m < n, a_{ij}, b_i, c_j -$ постоянные (пст), причем $b_i \geq 0,$ иначе i -ое огр-ие можно умн-ть на (-1); вел-ы c_j наз-ют иногда каэф-ми стоимости. Если задача не в конической форме, то ее можно привести к этой форме. Н-р, если в системе (5) есть неравенство, то ее можно сделать равенством, вводя дпн-ю плж. пер-ую; если нек-ые x_j неплж., то их можно исключить, или выразить через $x_j = x_j'' - x_j'$, где $x_j'' \geq 0, x_j' \geq 0$.

Как будет показано далее, при исследовании задач ЛП могут встретиться сд-ие случаи:

1*. Система условий задачи противоречивы, т.к. ств-щая пеопр-ая система (5) не имеет неотрицательных (неотц.) решений.

2*. Система (5) имеет неотц. решения, но max (min) целевой фк-и (4) равен $\infty(-\infty)$, т.е. обл. опр-ия не огр-на.

3*. Значение max (min) целевой фк. на мн-ве неотц. решений системы (5) конечно.

Для задач ЛП, связанных с реальными практическими проблемами, обычно имеет место третий случай. Поэтому, если имеет место случай 3*, методом ЛП мы должны получить решения задачи, а если имеет место 1* или 2*, то, выяснив это, прекращать счет.

Теперь сформулируем постановку нек-ых задач ЛП и составим их мт. модели.

4^0. Модель процесса производства для конкретной задачи. Основная таблица моделирования. Сформулируем конкретную задачу.

п1. Предположим, что мебельная фабрика выпускает только два вида изделий: серванты 120 руб. за штуку и шифоньеры по 100 руб. В распоряжении предприятия имеется 120 м^3 фанеры, 81 м^3 досок и резерв труда в 560 рабочих смен.

Учитывая нормы расходов материала и труда (табл.1) надо составить опт-ый (в смысле стоимости выпущенной продукции) план выпуска продукции так, чтобы полностью использовать все рабочее время.

Таблица 1

Стоимости изделий	120	100
Изделия Фонды (ресурсы)	Серванты	Шифоньеры
Фанера (120 м^3)	0,4	0,3
Доски (81 м^3)	0,3	0,1
Труд (560 раб. смен)	2	1

Р. Если решить задачу методом перебора, то будет очень много вариантов. Поэтому целесообразно получить мт-ую мд. задачи, а затем решить полученную мд.

Для этого обз-им через x_1 – кол. выпущенных сервантов, x_2 – кол. шифоньеров, а вектор (x_1, x_2) наз. планом выпуска продукции. Тогда, нам нх-мо мкс-ть фк-ю, наз-мой целевой фк-ей:

$$\max Z = 120x_1 + 100x_2$$

при огр-ях

$$\left.\begin{aligned} &0,4x_1 + 0,3x_2 \le 120 \\ &0,3x_1 + 0,1x_2 \le 81 \\ &2x_1 + x_2 = 560 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Мт-ю мд. задачи можно решить графически или симплекс методом (их рас-им далее) и получить решение: $x_1 = 240;\ x_2 = 80$, тогда $\max Z = 120 * 240 + 100 * 80 = 36800$ руб.

Приведенную задачу можно обобщать для произвольного числа изделий и ресурсов, используя основную табл. 2 мдв-ия.

Таблица 2

С – стоимость		c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	Кол. ресурс b
№	Продукт издел. А В фонд. ресурсы	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	
1	B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
2	B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
	⋮	…	…	…	…	…	…	⋮
i	B_i	a_{i1}	a_{i2}	…		…	a_{in}	b_i
	⋮	..	..	..	..	..	..	..
m	B_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mi}	…	a_{mn}	b_m
кол. издел.	a	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n	–
план	x	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	–

Параметры из табл. 2 для задачи п1 ств-то означают: $n = 2$, $А_1$ – серванты, $А_2$ – шафоньеры; $m = 3$, $В_1$ – фанера, $В_2$ – доски, $В_3$ – труд, $b_1 = 120, b_2 = 81, b_3 = 560; a_{11} = 0,4; a_{12} = 0,3;...; a_{32} = 1$.

Отметим, что из табл.2 a_{ij} означает затраты i-го вида ресурсов $\left(c' = \overline{1,m}\right)$ на производство (прз.) ед-ы продукта j-го вида $\left(j = \overline{1,n}\right)$ Параметры x_{ij} и $c_{ij,}$ записанные в этой же клетке, и $\left\{a_j\right\}$ строки a объясним далее. $\left\{x_j\right\}$ строки x означает план задачи.

5°. Модель процесса производства в общем виде. Использую основную табл. 2 сформулируем сд. задачу.

з1. Пусть номенклатура выпускаемой предприятием (прд.) продукции состоит из n наименований. Обз-им через a_{ij} затраты i-го вида ресурсов $\left(i = \overline{1,m}\right)$ на прз-во ед-ы продукции j-го вида $\left(j = \overline{1,n}\right)$, через $в_i$ – полные объемы ресурсов, c_j – прибыль, получаемую прд-ем при изготовлении и реализации единицы j-го вида продукта, α_j и β_j – наперед задаваемые нижняя и верхняя границы выпуска j-го вида продукции, x_j – план выпуска j-й продукции.

Требуется составить такой план выпуска продукции, к-ый приносил бы нб-ую прибыль прд-ю.

Мт-ая мд. сформулированной задачи имеет вид (см. табл. 2):

$$\max Z = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \qquad (1')$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \qquad (2')$$

$$\alpha_1 \le x_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le x_2 \le \beta_2, ..., \alpha_j \le x_j \le \beta_j, ..., \alpha_n \le x_n \le \beta_n \qquad (3')$$

Модель $(1') - (3')$ можно записать кратко, выделив, выделив j-й столбец и i-ю строку

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \text{ , } i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j \text{ , } j = \overline{1,n} \tag{3}$$

6$^{\text{o}}$. Задача о кормовом рационе. Определение наилучшего состава смеси. Для лучшего понимания задачи о «смесях» начнем со сд-ей простой задачи.

з2. (Задача о кормовом рационе). По заданному ассортименту продуктов при известном содержании в каждом из них питательных веществ и известной стоимости продуктов составить кормовой рацион, уд-й потребностям с мнм-ми затратами. Вводить параметры и сформулировать мд. задачи.

Р. Пусть (см. табл. 2) имеется n различных продуктов и m питатель. веществ (жиров, белков, углеводов, витаминов и т. д.). Обз-им через a_{ij} (в весовых ед-ах) содержание i-го питательного вещества $\left(i = \overline{1,m}\right)$ в ед-е веса j-го продукта $\left(j = \overline{1,n}\right)$, $в_i$ (в весовых ед-ах) – мнм. суточная потребность в i-ом питательном веществе, c_j – стоимость ед-ы веса j-го продукта, x_j – суточное потребление j-го продукта.

Тогда мт. модель задачи имеет вид:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge в_i \text{ , } i = \overline{1,m} \tag{5}$$

$$x_j \ge 0 \text{ , } j = \overline{1,n} \tag{6}$$

Отметим, что точно так же сформулируется задача о выборе диеты. Теперь сформулируем з2 в общем виде для произвольной «смеси».

з3. (Задача о смесях). Имеется n компонентов, при сочетании к-ых в различных пропорциях образуются различные смеси. В состав каждого компонента входят m веществ. Обз-им через a_{ij} и $в_i$ кол-во i-го вещества $\left(i = \overline{1,m}\right)$, к-ое входит в состав ед-ы j-го компонента $\left(j = 1,n\right)$ и, ств-но, в ед-у смеси. Предполагается, что смесь $в_i$ зависит от a_{ij} линейно, т. е. если смесь состоит из x_1 единицу 1-го компонента, x_2 единиц 2-го компонента и т. д., то $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ ① (b_i есть в то же время кол. i-го вещества). Заданы n чисел c_j, характеризующих (хркз.) цену, вес, калорийность и т.д. ед-ы j-го компонента, и m чисел b_i, указывающих мнм-но нх-ое содержание i-го вещества в смеси. Требуется опр-ть состав смеси (т. е. числа $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$), для к-ой суммарная характеристика (хркс.) (цена, вес, и т. д.) окажется наилучшей.

Р. Из равенства (1) и условия обязательного мнм-го содержания каждого из веществ в смеси получим (см. з2 и табл. 2) систему нерав-в: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,$. $i=\overline{1,m}.$ Кроме того, очевидно, $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}.$ При этих условиях найдем $\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$

Т.о. мт. модель задачи имеет вид

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i=\overline{1,m} \tag{5'}$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,n} \tag{6'}$$

зм1. Кроме огр-ий $(5')$, по содержанию отдельных веществ в смеси, в задаче могут быть огр-ия по имеющимся запасам отдельных компонентов или по предельным кормам их включения в смесь. Могут задаваться также пропорции, в к-ых нек-ые из компонентов должны входить в состав смеси.

зм2. Если известны условия изготовления компонентов с учетом имеющихся для этой цели ресурсов, то возникает более сложная объединенная задача составления опт-ой смеси, для к-ой будут с нб-им эффектом использованы ресурсы в прз-ве компонентов. Так, н-р, при составлении рациона кормления можно опр-ть опт-ую структуру посевов, обеспечивающих кормление имеющегося поголовья скота наилучшим образом. Ресурсами в данном случае служат участки земли, на к-ых выращиваются различные компоненты, включаемые в рацион.

Отметим так же, что задача о «смесях» может быть, как на нахождение min, так и max целевой фк.

п2. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 4000 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг – бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин $A-2:3:5:2,$ бензин $B-3:1:2:1$ и бензин $C-2:2:1:3.$

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина хркз-ся числами: 120 руб, 100 руб. и 150 руб.

1) Опр-ть план смешания компонентов, при к-ом будет достигнута мкс-ая стоимость всей продукции.

2) Опр-ть опт. план смешания из условия мкс-го использования кампонентов.

Р. 1) По аналогии табл. 2, учитывая пропорции компонентов получения бензинов различных сортов, составляем табл-у

$$\begin{array}{ccccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & c & x \\ A & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} & \frac{2}{12} & 120 & x_1 \\ B & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 100 & x_2 \\ C & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 150 & x_3 \\ a & 400 & 250 & 350 & 100 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \max Z = 120x_1 + 100x_2 + 150x_3 \\ \left.\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{12}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 \le 400 \\ \text{II} & \frac{3}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 \le 250 \\ \text{III} & \frac{5}{12}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \le 350 \\ \text{IV} & \frac{2}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{8}x_3 \le 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\frac{4}{12}x_1 & -\frac{7}{8}x_3 \le 100 \\ \frac{1}{12}x_1 & -\frac{1}{8}x_3 \le 150 \\ \frac{1}{12}x_1 & -\frac{5}{8}x_3 \le 150 \\ \frac{2}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{8}x_3 \le 100 & \end{array}\right\}$$

Из II вычитав III, получим $\frac{5}{8}x_3 \le 0$, тогда $x_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{12}x_1 \quad \le 150 \\ \frac{2}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 \le 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x_1 = 600$ с учетом целевой фк., а $x_2 = 0$.

Т.о. бензин А в кол-ве 600 тыс. л, не использованные полуфабрикаты $a_1 = 300, a_2 = 100, a_3 = 100$, к-ых опр-ем по 1-ой строке табл.

2) $\max Z = x_1 + x_2 + x_3$; из последних неравенств находим $x_2 = 700$, т.е. бензин B в кол-ве 700 тыс. л., остаются неиспользованными $a_1 = 100$, $a_2 = 150$, $a_3 = 150$, к-ых опр-ем по 2^{й} строке табл.

7^0. Оптимальный раскрой. Используя обз-ия табл. 2, сформулируем

з4 (Задача о «раскрое»). На раскрой (распил обработку) поступает m различных материалов в кол. b_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$. Требуется изготовить из них S различных изделий в кол-ве, пропорциональном (прц.) числам: $a_1, a_2, \ldots, a_к, \ldots$, a_s. Каждая единица i-го материала может быть раскроена n различными способами, причем использование j-го способа $\left(j = \overline{1, n}\right)$ дает $a^i_{jк}$ ед-ц к-го изделия. Найти план распила, обеспечивающий мкс. число комплектов.

Р. Обз-им через x^i_j количество (план) единиц i-го материала, раскрываемых по к-му способу и x-мкс. число комплектов. Тогда мт. модель задачи имеет вид

$$maxZ = x \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} x_j^i = b^i, i=\overline{1,m}\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_j^i a_{j\kappa}^i = a_\kappa x, k=\overline{1,s}\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$x_j^i \geq 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n} \qquad (9)$$

В част., когда на обработку поступает материал только одного образца (т.е m=1) в количестве в ед., то модель имеет вид

$$max\text{Z} = x \qquad (7')$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} x_i = b\\&\sum_{j=1}^{n} a_{j\kappa} x_j = a_\kappa x, k=\overline{1,s}\end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,n} \qquad (9')$$

п3. Для изготовления брусьев трех размеров 0,6 м; 1,5 м; и 2,5 м в стн. 2:1:3 на распил поступают бревна длиной в 3м. Опр-ть план распила, обеспечивающий мкс. число комплектов.

Р. Прежде всего опр-им всевозможные способы распила бревен, указав сколько ств-их брусьев при этом получается.

Способы распила (к)	Получаемые брусья			Кол. бревен, расп-ых по j-му способу
	0,6	1,5	2,5	
1	5	–	–	x_1
2	2	1	–	x_2
3	–	2	–	x_3
4	–	–	1	x_4

Пусть поступает на распил b бревен, т.е $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b$ и найти $max\text{Z} = x$ с учетом число брусьев каждого размера уд-щего условию комплектности: $5x_1 + 2x_2 = 2x$, $x_2 + 2x_3 = 1x$; $x_4 = 3x$, а из последнего рав-ва имеем $x = \frac{1}{3}x_4$. Тогда мт. модель имеет вид

$$max\text{Z} = \frac{1}{3}x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b$$

$$5x_1 + 2x_2 - \frac{2}{3}x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,4}$$

После решения ее симплексным методом получим опт. решение $X_{опт}\left(\frac{4}{39},\frac{5}{39},0,\frac{10}{13}\right)$ и $Z_{мах}=\frac{10}{39}$. Т.о., 10,2 % общего числа поступивших бревен следует распиливать по 1-му способу, 12,8 % – по 2-му способу и 77 % – по 4-му способу, 3-й способ распили применять не следует.

8^0. Транспортная задача. Пусть имеется m складов (в i-м складе содержится b_i ед. товаров) и n магазинов (j-му магазину требуется a_j ед. товаров), причем $\sum_{i=1}^{m} b_i=\sum_{j=1}^{n} a_j$. Пусть c_{ij} –стоимость перевозки ед-ы товара из i-го склада к j-му магазину, x_{ij} –кол-во ед. товара, перевозимое из i-го склада к j-му магазину.

Требуется товар в складах распределить по магазинам так, чтобы общий расход был мнм-ым.

Р. Мт-ю мд. задачи легко получить из табл. 2, если все клетки a_{ij} дпн-но заполнить числами x_{ij}, c_{ij} $\left(i=\overline{1,m}; i=\overline{1,n}\right)$ и пологать, что магазину A_j требуется a_j ед. товара а в B_i складе содержится b_{ij} ед. товаров. Тогда выделив клетку x_{ij}, c_{ij}, столбец $j(b)$ и строку $i(a)$, получим

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}&=b_i, i=\overline{1,m}\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}&=a_j, j=\overline{1,n}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$x_{ij}\geq 0, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \tag{12}$$

9^0. Задача о назначении. На заводе имеется m мест на работы $P_1, P_2, ..., P_m$ и n кандидатов $K_1, K_2, ..., K_n$ на эти должности $(m\leq n)$. Пусть c_{ij} – неотц. число, оценивающее производительность канд. K_j на работе P_i Нх-мо распределить людей так, чтобы мкс-ть эффективность, измеряемую суммой производительностей.

Р. В табл. 2 дт-но полагать, что $\{b_j\}=1, \{a_j\}=1, B_i=P_i, A_j=K_j$,

а $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если канд. } K_j \text{ занял работу } P_i,\\ 0, & 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$

Тогда мт. модель задачи имеет вид:

$$maxZ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,m}, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1,\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\,. \tag{15}$$

10^0. Задача коммивояжера или о бродячем торговце. Имеется $n+1$ городов и задана матрица $C = \left[c_{ij}\right]$ расстояний между этими городами. Выехав из исходного города Γ_0, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в город Γ_0. В каком порядке следует объезжать города, чтобы пройденное суммарное расстояние было мнм-ым?

Р. Пологаем: $\{b_i\} = 1, \{a_j\} = 1, \mathrm{A}_j = \Gamma_j, \mathrm{B}_i = \Gamma_i; i, j = \overline{0,n}.$ Введем пер-ые

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } \Gamma_i \text{ переезжает в город } \Gamma_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда мт. модель задачи имеет вид:

$$\min Z = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \\ &\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1; i, j = \overline{0,n}, i \ne j; \\ &x_{ij} = 0 \text{ или } 1; u_i, u_j - \text{целые числа} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Отметим, что к описанной модели сводятся также задачи по опр-ию маршрутов развозки готовой продукции потребителям, сборка писем из городских почтовых ящиков в узел связи и т.д.

ЛЕКЦИЯ 8

3.2. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ ЛП

1^0. Линейные системы. Независимость векторов. Ранг матрицы. Изучим систему m лин-ых ур-й с n пер-ми:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

или кратко

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}. \quad (1')$$

Рас-им матрицы системы (1'):

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}b_m \end{pmatrix},$$

тогда стн. (1) можно писать в матричном виде

$$AX=B \quad (1'')$$

Наряду с системой(1) рас-им, ств-щую ей, одн. систему:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{in}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

или в матричном виде

$$AX=0 \quad (2')$$

Матрица A наз. основной матрицей, $\tilde{A}$ – расширенной матрицей.

Решением системы ур-й (1) наз. совокупность таких чисел $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, к-ые обращают все ур-я системы (1) в тождества.

Если система лин-ых ур-й имеет хотя бы одно решение, то она наз. совместной. В противном случае наз. несовместной, т. е. когда одно из ур-й системы яв-ся противоречивым.

Совместная система, имеющая единственное решение наз. определенной (опр.), а система, имеющая более одного решения,– неопределенной (неопр.).

Н-р, система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ совместная и опр-я, т. к.имеет одно решение $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, -1)$.

Система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_3 = 0 \end{cases}$ совместная и неопр-я, т. к.имеет два и более решений: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0), (-5,2,1), (5,-2,-1)$ и т.д.

Система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 0 = 4 \end{cases}$ несовместная, т. к. второе ур. системы яв-ся противоречивым.

Две системы лин-ых ур-й наз. эквивалентными (экв.), если любое решение каждой из них яв-ся одновременно решением и другой системы. Две произвольные несовместные системы считаются экв-ми. Ясно, что матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ экв-ых систем, так же экв-ты, т. е. $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ (вместо знака $\sim$ можно употреблять знак $\Leftrightarrow$).

Экв-ми или элементарными (элр.) преобразованиями (прб.) матрицы яв-ся сд-ие операции: 1) умн-ие всех эл-ов некоторой строки матрицы на число $\lambda \neq 0$; 2) прибавление к эл-ам некоторой строки матрицы ствщ-х эл-ов другой строки, умножив на произвольное число α; 3) перемена местами строк матрицы. В результате этих элр. прб-й получим экв. матрицы $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

Столбцы – векторы матрицы A обз-им через $A_1, A_2, ..., A_n$, тогда вектор B можно выразить, как лин. комбинации этих векторов:

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n \qquad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ наз. коэф-ми лин-ой комбинации.

о1. Система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ наз. лин-но независемой (незв.), если рав-во

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n = 0 \qquad (4)$$

выполняется ттогда, когда все $\alpha_i = 0\left(i = \overline{1,n}\right)$, т. е. система (2) имеет только нулевое решение.

Ели же рав. (4) выполняется, когда не все α_i равны нулю, то система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ наз. лин-но зависимой (зав.). Понятие лин-ой зв-ти векторов экв-но понятию лин-ой комбинации (3) векторов.

п1. Показать, что ортонормированная система векторов $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, $\bar{k} = (0,0,1)$ лин. незв-ма.

Р. $\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha_1\cdot1+\alpha_2\cdot0+\alpha_3\cdot0=0\\\alpha_1\cdot0+\alpha_2\cdot1+\alpha_3\cdot0=0\\\alpha_1\cdot0+\alpha_2\cdot0+\alpha_3\cdot1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha_1=0,\\\alpha_2=0,\\\alpha_3=0,\end{matrix}$

т.е. векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ лин. незв-мы. Аналогично система векторов $e_1=(1,0,...,0)$, $e_2=(0,1,...0),...,e_n=(0,...,0,1)$ лин. неизв-ма. Т.о. столбцы (строки) ед. матрицы $E=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ лин. незв-мы, причем опр-ль

$$|E|=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1\neq0.$$

п2. Д-ть, что система векторов (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) лин. зв-ма.

Р. $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha_1\cdot1+\alpha_2\cdot0+\alpha_3\cdot0+\alpha_4\cdot1=0\\\alpha_1\cdot0+\alpha_2\cdot1+\alpha_3\cdot0+\alpha_4\cdot1=0\\\alpha_1\cdot0+\alpha_2\cdot0+\alpha_3\cdot1+\alpha_4\cdot1=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\alpha_1=-1,&\alpha_4=1,\\\alpha_2=-1,&\alpha_4=1,\\\alpha_3=-1,&\alpha_4=1,\end{matrix}$

отсюда по o1 данная система векторов лин. зв-ма, тогда $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, т.е. верно и стн. (3).

о2. Рангом матрицы А размерности $m\times n$ наз. число r $(r\leq\min(m,n))$, равное мкс. числу лин-но незв-ых столбцов этой матрицы. При этом лин. незвые столбцы наз. базисными столбцами матрицы.

Отсюда получим сд-ие св-ва ранга матрицы:

с1. От транспонирования матрицы ранг ее не изменится, т.к. от транспонирования величина опр-ля не меняется. Поэтому верно утв-ие: мкс. кол-во лин. незв-ых столбцов равно мкс. числу лин. незв-ых строк. Значит, все утв. для столбцов, верны и для ее строк. Причем лин. незв. строки наз. базисными строками матрицы.

с2. Если один из столбцов матрицы А яв-ся лин. комбинацией др-их столбцов, то его можно вычеркнуть из этой матрицы, не меняя ее ранга. В част., можно вычеркнуть нулевого столбца.

с3. Ранг матрицы не изменится, если прибавим к одному столбцу другого столбца, умножив на произвольное число. В част., можно отбрасывать множитель эл-ов данного столбца.

с4. Ранг матрицы не изменится от перестановки столбцов матрицы.

Минор M_r матрицы А, находящийся на пересечении базисных столбцов и строк наз. базисным минором, опр-ль к-го отличен от нуля, т.е. $\left|м_r\right| \neq 0$ (см. п1). Отсюда получим другое опр. ранга марицы.

о2'. Рангом матрицы наз. наивысшей порядок r отличных от нуля миноров этой матрицы, т.е. $\left|м_r\right| \neq 0, \left|м_{r+1}\right| = 0, \left|м_{r=2}\right| = 0, \ldots$

п3. Найти ранг матрицы А= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(A_1 A_2 A_3 A_4\right)$.

Р. Последний столбец яв-ся лин. комбинацией третьего столбца $\left(A_4 = 2A_3\right)$, поэтому его можно вычеркнуть. Покажем, что остальные столбцы лин. незв-мы.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{matrix}$,значит, r=3. Причем $\left|м_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (см.п8).

2^0. Теорема обазисном миноре и теорема Кронекора-Капелле.

т1. (о базисном миноре). Любой столбец матрицы А яв-ся лин-ой комбинацией ее базисных столбцов.

Д. Пусть базисный минор расположен в первых r строках и первых r столбцах. И пусть $1 \le k \le m, 1 \le s \le n.$ Рас-им опр-ль r+1порядка матрицы А

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r}a_{1s} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r}a_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{z1}a_{z2}\ldots a_{zr}a_{zs} \\ a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kr}a_{ks} \end{vmatrix}$$

Если $k \le r,$ то D=0, т.к. имеются одинаковые строки. Аналогично, D=0 при $s \le r.$ Если $k > r$ и $s > r,$ то D=0 как минор r+1-го порядка матрицы ранга r. Сд-но, D=0 при любых значениях k и s.

Тогда, разложив опр-ль D по последней строке, получим рав-во

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kr}A_{kr} + a_{ks}A_{ks} = 0 \qquad (5)$$

Алг. дополнения $A_{k1,}\ A_{k2,}\ A_{kr,}\ A_{ks}$ не зависят от k, т.к. они образуются с помощью эл-ов a_{ij} при $i \le r.$ Поэтому можно ввести обз-ия

$A_{k1}=c_1, A_{k2}=c_2,..., A_{kr}=c_r, A_{ks}=c_s$. Подставляя их в (5) при $k=\overline{1,m}$ получим систему

$$\left.\begin{aligned} c_1a_{11}+c_2a_{12}+...+c_ra_{1r}+c_sa_{1s}=0\\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+...+c_ra_{2r}+c_sa_{2s}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ c_1a_{m1}+c_2a_{m2}+...+c_ra_{mr}+c_sa_{ms}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Число $c_s=A_{ks}\neq 0$ т.к. A_{ks} есть базисный минор матрицы А.

Разделив каждое из равенств (6) на c_s и обз-ив через $\alpha_i=-\frac{c_i}{c_s}$, получим

$$\left.\begin{aligned} a_{1s}=\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{12}+...+\alpha_ra_{1r}\\ a_{2s}=\alpha_1a_{21}+\alpha_2a_{22}+...+\alpha_ra_{2r}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{ms}=\alpha_1a_{m1}+\alpha_2a_{m2}+...+\alpha_ra_{mr} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Т.к. s любой $(1\le s\le n)$, значит любой столбец матрицы A яв-ся лин-ой комбинацией ее базисных столбцов.

Аналогично можно д-ть, что любая строка матрицы A яв-ся лин. комбинацией ее базисных строк.

Из т1 получим сд-ие следствия.

сл1. Нх-ым и дт-ым условием того, что опр-ль п-го порядка равен нулю, т.е. $D=0$, яв-ся, чтобы опр-ль имел хотя бы одного столбца, к-ый есть лин. комбинация других столбцов.

сл2. Опр-ль $D=0$ ттогда, когда между его столбцами сущ-ет лин-ая зв-сть.

Обз-им через $r(A)$ и $r(\tilde{A})$ ранги основной матрицы A и расширенной матрицы $\tilde{A}$ и сформулируем теорему Кронекора-Капелли:

т2. Для того чтобы система лин. ур-й была совместна, нх-мо и дт-но, чтобы ранги основной и расширенной матрицы были одинаковы, т.е. $r(A)=r(\tilde{A})$.

Д. Нх-ть. Пусть система (1) совместна и $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ некоторое ее решение. Тогда имеет места рав-ва:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j=b_i\ ,\ i=\overline{1,m}\,.$$

Но тогда последний столбец расширенной матрицы $\tilde{A}$ лин-но выражается через остальные, т.е. его можно вычеркнуть без изменения ранга матрицы $\tilde{A}$, а тогда $\tilde{A}$ переходит в A, значит, $r(A)=r(\tilde{A})$.

Дт-ть. Пусть $r(A)=r(\widetilde{A})$. Покажем, что система (1) совместна. Рас-им r базисных столбцов матрицы A, они будут базисными столбцами и для $\widetilde{A}$. Тогда последний столбец $\widetilde{A}$ будет выражаться как лин. комбинация базисных столбцов матрицы A. Коэф-ты лин-ой комбинации обз-им через $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Тогда выполняются рав-ва:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i\ ,\ i=\overline{1,m}\,. \tag{8}$$

Значит, система (8) уд-ет значениям $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,...,x_n=\alpha_n$, т.е. система (1) совместна▪

Из т2 следует, что одн. система (2) всегда совместна, т.к. $r(A)=r(\widetilde{A})$.

3^0. Решение линейных систем методом Жордана-Гаусса. Рас-им лин. систему, когда число ур-й и пер-ых равны, т.е. $m=n$.

п4.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1-x_2+x_3=3 \\ \text{II} & x_1+3x_2-2x_3=1 \\ \text{III} & x_2+2x_3=8 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Р. Каждая посл. итерация начинается с выбора ключевого элемента (эл.). Причем в качестве ключевого эл. удобно выбирать эл-т $a_{ij}=1$, находящийся на пересечении столбца и строки, содержащих нулевые эл. (если $a_{ij}\neq 1$, то, все эл. строки *i* разделив на a_{ij}, получим $a'_{ij}=1$), н-р, выбираем $a_{21}=1$. Далее эквивалентно (экв.) переобразуя систему (9), все эл-ы столбца $j=1$ обращаем в нули, кроме эл-та $a_{21}=1$. Для этого строку II умн-ем на -2 и складываем со строкой I, записывая сумму вместо I строки, т.е. II (-2) + I $\doteq$ I, а на III строке столбца $j=1$ имеем готовый нуль. В дальнейшем при выборе ключевого эл. II строка не участвует.

Итак, получим сд. экв-ую систему:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -7x_2+5x_3=1 \\ \text{II} & x_1+3x_2-2x_3=1 \\ \text{III} & x_2+2x_3=8 \end{array}\right\}$$

В качестве ключевого эл. выбираем $a_{32}=1$ и из III·7 + I $\doteq$ I, III (–3) + II $\doteq$ II получим сд. экв. систему:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 19x_3=57 \\ \text{II} & x_1\quad -8x_3=-23 \\ \text{III} & x_2+2x_3=8 \end{array}\right\}$$

I строку делим на ключевой эл. $a_{13}=19$ и результат записываем вместо I строки, т.е. I : 19 $\doteq$ I. Теперь вычисляем $I\cdot 8+II\doteq II$, $I(-2)+III\doteq III$ и получим

$$\left.\begin{array}{r} x_3=3 \\ x_1\qquad =1 \\ x_2\quad =2 \end{array}\right\},$$

т.е. система имеет решение: $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)$.

Изложенный результат удобно получить по табл. 1 Жордана-Гаусса, где b-столбец свободных членов, $\sum$ – сумма по строкам.

Таблица 1

№ итерации	x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
исходная система	2	–1	1	3	5	I
	$\boxed{1}$	3	–2	1	3	II
	0	1	2	8	11	III
1	0	–7	5	1	–1	I
	1	3	–2	1	3	II
	0	$\boxed{1}$	2	8	11	III
2	0	0	$\boxed{19}$	57	76	I
	1	0	–8	–23	–30	II
	0	1	2	8	11	III
3	0	0	1	3	4	I
	1	0	0	1	2	II
	0	1	0	2	3	III

Откуда получим решение $x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

зм1. Для удобства вычислений нх-мо использовать в виде шаблона строку ключевого эл., умн-ив на ствщ. число, н-р, для $a_{21}=1$ имеем:

$$II(-2)+I=\left\{\begin{array}{c} (-2,-6,4,-2,-6) \\ +\ \underline{(2,-1,1,3,5)} \\ (0,-7,5,1,-1) \end{array}\right\}\doteq I,$$ далее в выборе ключевого эл. строка $i=2$ не участвует. Для $a_{32}=1: III\cdot 7+I=\left\{\begin{array}{c} (0,7,14,56,77) \\ +\ \underline{(0,-7.5,1,-1)} \\ (0,0,19,57,76) \end{array}\right\}\doteq I$ и т.д. Для $a_{13}=19$ сначала вычислим $I:19=(0,0,1,3,4)\doteq I,$ затем находим $I\cdot 8+III=\left\{\begin{array}{c} +\,(0,0,8,24,32) \\ \underline{(1,0,-8,-23,-30)} \\ (1,0,0,1,2,) \end{array}\right\}\doteq II$ и т.д. Причем каждый раз после прб-ия

строки нх-мо проверить: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_{ij} = \sum_{i}$ и убедиться, что строки вычислены правильно. Шаблон строку особенно выгодно использовать тогда, когда размерность mxn задачи большая.

Теперь найдем общее решение одн. системы (2). Пусть система (2) совместна нетривиально, т.е. имеет не нулевое решение, и матрица имеет ранг r. Допустим, что базисный минор M_r матрицы A расположен в ее левом верхнем углу (если не так, то перестановкой строк и столбцов всегда можно добиться этого), тогда система (2) приводится к виду.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{r2}x_r = -a_{r2+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\} \qquad (10)$$

где $x_1,\ldots,x_r$ наз. главными неизвестными, а $x_{r+1},\ldots,x_n$ – свободными.

Придадим $x_{r+1},\ldots,x_n$ совершенно произвольные значения $c_{r+1},\ldots,c_n$. Тогда система превращается в r ур-ий для r неизвестных $x_1,\ldots,x_r$ с опр-ем $\Delta \neq 0$. Эту систему можно решить методом Жордана-Гаусса (см. п4).

Заметим, что кол-во произвольных постоянных (пст.) в правой части системы (10) равно $n-r$. Эти пст. можно выбирать как $n-r$ незв-ых векторов, н-р, $(c'_{r+1}, c'_{r+2},\ldots,c'_n) = (1,0,\ldots,0)$, $(c^2_{r+1}, c^2_{r+2},\ldots,c^2_n) = (0,1,\ldots,0)$, …, $(c^{n-r}_{r+1}, c^{n-r}_{r+2},\ldots,c^{n-r}_n) = {}$ $= (0,0,\ldots,1)$. Тогда получим $n-r$ лин-но незв-ых решений системы. Эта совокупность наз. фундаментальной (фунд.) системой решений системы (10).

Т.о всякая мкс. лин. незв. система решений одн-ой лин. системы (2) наз. ее фунд-ой системой решений. Причем система (2) может обладать многими фунд. системами решений, т.к. $n-r$ незв-ых векторов можно выбрать по разному, н-р, еще $(1,0,\ldots,0),(1,1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1)$.

Если обз-им фунд. систему решений через $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(n-r)}$, то их лин. комбинация будет также решением, к-ое назовем общим решением системы (2) и обз-им через

$$x = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_{n-r} x^{(n-r)}, \qquad (11)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ – произвольные пст.

Найдем общее решение системы (1). Пусть система совместна с матрицей А ранга r. Аналогично (10) приведем ее к виду:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r2}x_r = b_m - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Находим решение $x^{(0)}$ системы (12) при $(c_{r+1},c_{r+2},...,c_n)=(0,0,...,0)$, к-ое наз. частным решением общей лин. системы (1). Тогда общим решением (12), сд-но (1) будет

$$x = x^{(0)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_{n-r} x^{(n-r)} \tag{13}$$

Дсв-но, непосредственной проверкой (1) устанавливаем, что

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum a_{ij} (x_j^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k x_j^{(k)}) = \sum a_{ij} x_j^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k \cdot 0 = b_i .$$

п5. Найти общее и фунд-ые решения системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Р. $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + 5x_5 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для нахождения фунд. систему решений свободным пер-ым по очередно дадим значения (1,0), (0,1) и получим векторы $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда общее решение можно писать в виде: $x = \alpha_1, x^{(1)} + \alpha_2 x^2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

или $\begin{cases} x_1 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ x_2 = -2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \alpha_2 \end{cases}$, к-ое можно было получить сразу из (14).

п6. Найти общее и фунд-ые решения системы:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4&=4\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4&=2 \end{aligned}\right\}$$

Р.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
2	7	3	1	6	19
3	5	2	2	4	16
9	4	$\boxed{1}$	7	2	23
–25	–5	0	–20	0	–50
–15	$\boxed{-3}$	0	–12	0	–30
9	4	1	7	2	23
0	0	0	0	0	0
5	1	0	4	0	10
–11	0	1	–9	2	–17

Откуда получим общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} x_2&=\quad -5x_1-4x_4\\ x_3&=2+11x_1+9x_4 \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

Чтобы получить фунд. систему решений ств. одн-ой системы $\left(\{b_i\}=0\right)$ полагаем $(x_1,x_4)=(1,0),(x_1,x_4)=(0,1)$ и получим $x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-5\\11\\0\end{pmatrix}, x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\-4\\9\\1\end{pmatrix}$.

Отсюда получим общее решение одн. системы $\tilde{x}=\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2x^{(2)}$. Далее находим частное решение неодн. системы $\left(\{b_i\}\neq 0\right)$, пологая $(x_1,x_4)=(0,0):x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$. Тогда общим решением данной неодн. системы яв-ся

$$x = x^{(0)} + \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -5\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ 2 + 11\alpha_1 + 9\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = -5\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ x_3 = 2 + 11\alpha_1 + 9\alpha_2 \\ x_4 = \alpha_2 \end{cases},$$

к-ое можно было получить сразу из (15).

п7. Решить систему: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$

Р. $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$

откуда получим, что $r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 3$, то по т2 система не совместна.

Метод Жордана-Гаусса можно использовать и при нахождении ранга матрицы.

п8. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (см. п3).

Р. Используя метод Жордана-Гаусса столбцам и строкам матрицы А,

находим $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

откуда $r = 3$, т.к. опр-ль $|E_3| = 1 \neq 0$.

4^0. Умножение матриц. Обратная матрица. Матричное уравнение.

Произведением матриц. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ наз. матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} \, c_{12} \\ c_{21} \, c_{22} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}, s$ – кол. столбцов матрицы А и кол. строк матрицы В должны совпадать, причем $AB\neq BA$, н-р, $AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&3\end{pmatrix}$ и $BA=\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&7\end{pmatrix}$, т.е. $AB\neq BA$.

Если дана квадратная матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ и $\det A\neq 0$, то сущ-ет обратная матрица A^{-1} такая, что $A^{-1}A=AA^{-1}=E$. Обратную матрицу находим методом Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&1&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&1&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\0&1&0&\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\0&0&1&\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{array}\right),\text{ отсюда } \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}.$$

п9. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Р. Находим $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&0&-1\end{vmatrix}=1+4-2=3\neq 0;$ если $\Delta=0,$ то A^{-1} не сущ-ет.

Вычисляем

$$B^{*}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&\boxed{-1}&1&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&0&1&1&2&0\\0&1&-1&0&-1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&2&0\\0&1&-1&0&-1&0\\0&0&\boxed{-3}&-2&-4&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\2&4&-1\end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\2&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$

Рас-им матричное ур. AX=B, где A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix}, \det A \neq 0.$ Найдем ее решение, умножив AX=B на A^{-1} слева: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$, т.к. $A^{-1}AX = EX = X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$. Находим $A^{-1}B$ методом Жордана-Гаусса из B*=AB=$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right).$$

Если же XA=B, то ее умножаем на A^{-1} справа $XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$, тогда

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} в_{11} & в_{12} & в_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 1 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 1 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

п10. Найти решение ур-ия $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Р. $B^* = AB = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку.

п11. Найти решение матричного ур-ия: X$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Р. B*=BA=$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 3 & -2 \\ -5 & 6 & 5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -4 & -2 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right),$

$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Проводите проверку решения.

п12. Решить как матричное ур. систему: $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=2\\ 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4=3\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-1\\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4=5\end{cases}$

Р. Из матричного вида $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&3&4&2\\2&3&4&1\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\5\end{pmatrix}$ находим

$$B^*=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&1&2\\2&3&4&2&3\\2&3&4&1&-1\\1&4&3&2&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&1&2\\0&-1&0&0&-1\\0&-1&0&-1&-5\\0&2&1&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&0&-1&-4\\0&0&1&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&4\\0&0&1&0&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&4\\0&0&1&0&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&4\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=1\\x_3=-3\\x_4=4\end{array}$$

Делайте проверку умн-ем матрицы на матрицу.

5^0. Установление независимости векторов методом Жордана-Гаусса. Т.к. понятия незв-ти векторов и ранга матрицы из этих векторов равносильны, то для установления незв-ти их можно использовать метод Жордана-Гасса.

п13. Д-ть зависимость векторов: $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1),(см.п2)$.

Р. $A=\begin{pmatrix}1001\\0101\\0011\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1000\\0101\\0011\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1000\\0100\\0011\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1000\\0100\\0010\end{pmatrix}$, откуда D=0, тогда в силу сл1, векторы лин. зависимы.

п14. Показать, что фк. $f_1=3x_1-4x_2+5x_3, f_2=2x_1-3x_2-6x_3, f_3= =x_1-x_2+3x_3$ образуют незв. систему.

Р. $0=\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3$ и покажем, что $\alpha=\beta=\gamma=0$. Из $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=$ $=\alpha(3x_1-4x_2+5x_3)+\beta(2x_1-3x_2-6x_3)+\gamma(x_1-x_2+3x_3)=(3\alpha+2\beta+\gamma)x_1+$ $+(-4\alpha-3\beta-\gamma)x_2+(5\alpha-6\beta+3\gamma)x_3\Rightarrow\begin{cases}3\alpha+2\beta+\gamma=0\\-4\alpha-3\beta-\gamma=0\\5\alpha-6\beta+3\gamma=0\end{cases}$ и $D=\begin{vmatrix}3&2&1\\-4&-3&-1\\5&-6&3\end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix}3&2&1\\-1&-1&0\\-4&-12&0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=4(3-1)=8\neq0$, а $D_1=D_2=D_3=0$. Тогда $\alpha=\beta=\gamma=0$

зм2. Для установления лин-ой незв-ти f_1, f_2, f_3 дт-но было найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Т.к. $D \neq 0$, то $r = 3$, значит f_1, f_2, f_3 лин-но незв-ы.

п14. Показать, что фк. $f_1 = x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4$, $f_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4$, $f_3 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4$, $f_4 = x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 13x_4$ образуют лин. зв. систему. Выразить одну из фк-й через остальных.

Р. $f_4 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ или $x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 13x_4 = \alpha\left(x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4\right) +$

$$\beta\left(2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4\right) + \gamma\left(x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4\right) = \left(\alpha + 2\beta + \gamma\right)x_1 +$$

$$+\left(4\alpha + \beta - 3\gamma\right)x_2 + \left(\alpha - \beta + 2\gamma\right)x_3 + \left(-2\alpha + 3\beta - \gamma\right)x_4 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + \beta - 3\gamma = -3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 10 \\ -2\alpha + 3\beta - \gamma = -13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 1 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{array}$$

отсюда получим $f_4 = 2f_1 - 2f_2 + 3f_3$.

Заметим, что задачу можно было решить с установлением лин-но зв-ых столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_4 = 2f_1 - 2f_2 + 3f_3$$

6^0. Выпуклые множества. Линейные неравенства и задача ЛП. Выпуклой комбинацией точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ наз. точка

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n,$$

где $\alpha_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Мн. $C \subset R^n$ назовем выпуклым, если оно вместе с любыми своими точками A_1 и A_2 содержит их произвольную выпуклую комбинацию

$$A = \alpha A_1 + \left(1 - \alpha\right) A_2, \text{где } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Примерами выпуклых мн-в яв-ся само пр. R^n, круг, куб. Мн-во точек, составляющих границу круга (окружность), не яв-ся выпуклым. Выпуклое мн. обязательно должно содержать отрезок, соединяющий любые две его точки.Мн-ва, изображенные на рис.4, a,b – выпуклые, а мн-ва на рис.4, c,d не яв-ся выпуклыми.

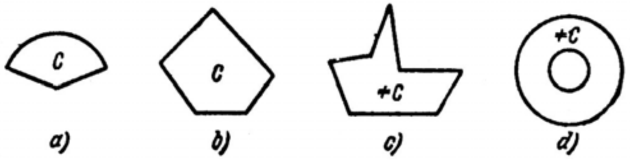


Рис. 4

Если С – выпуклое мн., то в нем содержится любая выпуклая комбинация произвольного числа его точек, т. е., если $A_1, A_2, A_3 \in C,$ то $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \in C.$ Н-р $C = [1,4]$ – выпуклое мн. и $1,2,3,4 \in C,$ тогда $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2} \in C, \sum \frac{1}{4} = 1.$

Это можно обобщать в виде сд-ей

т3. Любая точка отрезка, соединяющего две точки из R^n яв-ся выпуклой комбинацией этих точек.

Д. Обз-им расв-ые точки через U и V. Пусть точка W лежит на отрезке $[U,V]$. Этот отрезок параллелен (прл.) прямой, опр-мой вектором $U - V$ (рис. 5). По правилам сж-ия векторов имеем при нек-ом $0 \le \alpha \le 1 : V + \alpha(U - V) = W$ или $\alpha U + (1 - \alpha)V = W.$ Последнее рав. выражает точку W в виде выпуклой комбинации U и V∎

Верна и обратная теорема, к-ую приведем без д-ва.

т4 (обратная к т3). Любая точка, к-ую можно представить в виде выпуклой комбинации двух точек из R^n, лежит на отрезке, соединяющем эти точки.

Точка А выпуклого мн. $C \subset R^n$ наз. крайней, если не сущ-ет двух различных точек A_1 и A_2, принадлежащих С, таких, что

$$A = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2, \text{ где } 0 < \alpha < 1.$$

Каждая точка границы круга яв-ся его крайней точкой. Выпуклое мн. не содержащее ни одной граничной точки, не может иметь и крайних точек. Крайними точками треугольника яв-ся его вершины.

Размерность выпуклого мн. M равна мнм. числу ρ линейно незв-ых векторов $X_1, X_2, ... X_\rho$ таких, что M содержится в совокупности точек $X = X_0 + \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i X_i,$ где $X_0 \in M$; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\rho$ – произвольное числа. Н-р, выпуклое мн. M, огр-ое условием $x_1+x_2\le 1$ имеет размерность $\rho=2,$ т.к. любую точку $X\in M$ можно представить $X=X_0+\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j},$ где $X_0=(0,0)\in M, X_1=\bar{i}=(1,0), X_2=\bar{j}=(0,1).$

Выпуклой оболочкой $C(S)$ любого мн. S наз. совокупность всевозможных выпуклых комбинаций $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\left|\alpha_j\ge 0,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1\right),$ составленных из точек $\{A_j\}$ мн-ва S. Выпуклая оболочка $C(S)$ яв-ся нм-им выпуклым мн-ом, содержащим S. Н-р, если S состоит из восьми вершин куба, то $C(S)$ совпадает со всем кубом; если S – окружность, то $C(S)$ – полный круг.

Если мн. S состоит из конечного числа точек, его выпуклая оболочка $C(S)$ наз. выпуклым многогранником (мгр.). Н-р, куб, являющийся выпуклой оболочкой своих восьми вершин,– выпуклый мгр-к.

Мн. векторов S наз. конусом, если для каждого вектора $U\in S$ вектор $\alpha U\in S$ при $\alpha\ge 0$. Примерами конусов яв-ся все пр-во, начало крд. и мн. S, изображенное (изб.) на рис. 6. Отметим, что любой конус содержит начало крд., т. к., в част., $\alpha=0$.

Конус, являющийся выпуклым мн-ом, наз. выпуклым. Конус, изб-ый на рис. 6., не яв-ся выпуклым. Выпуклой будет лишь та часть этого конуса, расположенная на первом квадранте.

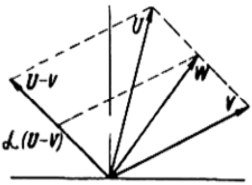


Рис. 5

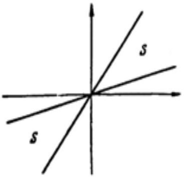


Рис. 6

Симплексом наз. n-мерный мгр., имеющий в точности $n+1$ вершин. Границы симплекса содержит симплексы низших порядков, называемые гранями. Число таких граней размерности к равно $C_{n+1}^{\kappa+1}$. Симплексом нулевой размерности яв-ся точка, одномерным симплексом – отрезок, двумерным – треугольник (туг.) и трехмерным – тетраэдр.

Уравнение симплекса, отсекающего на крд-ых осях единичные отрезки, имеют вид: $\sum_{j=1}^{n}x_j=1,$ где $x_j\ge 0$. При $n=3$ получаем туг., с вершинами $(1,0,0),$ $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.

Огр-ое мн. М, состоящее из точек $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in R^n$, для к-ых

$$\left(A_i,X\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, i=\overline{1,s}, \tag{16}$$

$$\left(A_i,X\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=\overline{s+1,n} \tag{17}$$

наз. выпуклым многогранным мн-ом (далее слово выпуклое опустим).

Условие с номером $i_0^{'}$ системы (16), (17) наз. жестким огр-ем, если крд-ты любой точки $X\in M$ уд-ют ему как точному рав.

Условие с номером i_0^1 системы (16), (17) наз. нежестким огр-ем, если сущ-ет точка $X_0\in M,$ крд-ты к-ой уд-ют этому ур. как строгому нерав. Н-р, каждое из ограничений – неравенств $\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ -x_1-x_2\le -1 \end{cases}$, задающие мн. М яв-ся жестким, т.к. эта система экв-на одному рав. $x_1+x_2=1$. Причем верна

т5. Размерность ρ мгр-го мн-ва М равна $\rho=n-r$ (r-ранг системы жестких огр-й, задающих М)

п15. Мгр-ное мн. $M\subset R^3$ задается сд. огр-ми:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&\le 5 && (i=1)\\ -x_1-x_2\qquad&\le -3 && (i=2)\\ -2x_2-x_3&\le -2 && (i=3)\\ x_1+x_2-10x_3&\le 20 && (i=4)\\ x_2+x_3&=1. && (i=5)\end{aligned}$$

Опр-ть, какие из огр-й $\left(i=\overline{1,5}\right)$ яв-ся жесткими и какова размерность ρ мн. М.

Р. Ясно, что огр. $i=5$ жесткое. Складывая нерав. $i=1$ и $i=2$, получим $2x_2+x_3\le 2,$ что вместе с огр. $i=3$ дает $2x_2+x_3=2,$ т.е. условие $i=3$ также жесткое. Системе $\begin{cases} 2x_2+x_3=2 \\ x_2+x_3=1 \end{cases}$ уд-ет точка $\left(x_1,1,0\right)$, к-ая при подстановке в огр-ия $i=1$ и $i=2$ дает $x_1\le 2$ и $-x_1\le -2,$ что экв-но $x_1=2$. Получения точка $\left(2,1,0\right)$ обращает условие $i=4$ в строгое нерав. Итак, жесткими яв-ся условия $i=1,2,3,5,$ а условие $i=4$ нежесткое.

Для опр-ия размерности ρ дт-но заметить, что ранг системы условий $i=1,2,3,5$ равен 3, тогда по т5 имеем $\rho=3-3=0.$ Мн. М состоит из одной точки $X=\left(2,1,0\right)$.

Теперь рас-им систему лин. нерав-в с двумя пер-ми:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & x \ge 0 \\ b) & y \ge 0 \\ c) & x + y \ge 1 \\ d) & x - y \ge 1 \\ e) & -x + 2y \le 0 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Полуплоскости (полупл.) решений каждого из нерав-в изображены на рис. 7 с помощью стрелок, проведенных от граничных прямых внутрь ств-их полупл-ей. Мн-ом решений нерав-в (18) яв-ся совокупность точек, ограниченная линиями со штриховкой, представляющая собой выпуклую многогранную область С нерав-ми (18) $b, d, e.$ Нерав-ва (18) a, c яв-ся лишними, но этот факт удалось выяснить лишь после ств-го исследования.

Отметим, что мн-во решений системы нерав. может быть и пустым, н-р:

$$\left.\begin{array}{l} x+y \le 1 \\ 2x+2y \ge 3 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Начертите график системы нерав. (19) и убедитесь, что $C = \varnothing$.

Пусть теперь требуется найти $\min \mathrm{Z} = 2x + 2y$ при огр-ях (18) Для этого на рис.8 проведена пунктиром прямые $2x + 2y = a$ при $a = 12, 6$ и 2. Откуда получаем решения задачи $\Lambda\Pi : \left(x^*, y^*\right) = \left(1, 0\right)$, $\min \mathrm{Z} = \mathrm{Z}^* = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$, т.е. из $3^0 : 3{,}1$ имеем случай 3^*.

Подобным же образом на мн. С можно найти min или *max* любой другой целевой фк. Для этого нужно нанести прямую, ств-ую нек-му частному значению целевой фк., и затем перемещать ее прл-но самой себе в ств-ем направлении до получения min или max. Передвигать прямую следует до тех пор, пока пересечение этой прямой с С либо выродится в точку (см. случай 3^* из $3^0 : 3.1$), либо совпадает с граничной линией (найти $\min \mathrm{Z} = 2x - 2y$ на С рис. 8; в этом случае решением яв-ся любая точка этой границы, н-р, $\mathrm{Z}^* = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$ при $\left(1, 0\right), \mathrm{Z}^* = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$ при $\left(2, 1\right)$, $\mathrm{Z}^* = 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ при $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$); либо выяснится неогр-сть целевой фк (найти $\max \mathrm{Z} = 2x + 2y$ на С рис 8; в силу неогр-ти С сверху получит $\mathrm{Z}^* = \infty$, т.е имеем случай 2^* из $3^0 : 3.1$)

Пусть требуется найти max или $\min \mathrm{Z} = 2x + 2y$ на С огр-й (19); в силу $C = \varnothing$ задача $\Lambda\Pi$ не имеет решения, т.е. имеем случай 1^* из $3^0 : 3.1$.

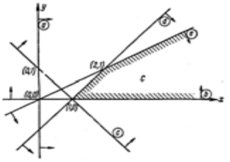


Рис. 7

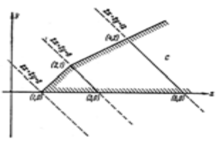


Рис. 8

ЛЕКЦИЯ 9

3.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛП

1^0. Классификация моделей задачи ЛП. Модель задачи ЛП может быть задана в одной из сд. форм.

Каноническая	Стандартная	Общая
1) ОГРАНИЧЕНИЯ		
Уравнения	Неравенства	Ур-ия и нерав-ва
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}$	$\sum a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix}\le\\ =\\ \ge\end{Bmatrix} b_i \quad i=\overline{1,n}$
2) УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ		
Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$	Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$	Часть переменных $x_j \ge 0, j=\overline{1,s},\ s \le n$
3) ЦЕЛЬ ЗАДАЧИ $\left(Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$		
max Z	*max* Z или *min* Z	*max* Z или *min* Z

При решении моделей задач ЛП очень важно умение привести их из одной формы к другому. Поэтому приведем демонстрационные примеры.

п1. Привести к канонической форме модель задачи ЛП:

$$\min Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\ge 2\\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 6\\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &\le 4 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

Преобразуем огр-ия путем введения балансовых (дополнительных) перых (x_5, x_6, x_7), включая целевую фк. в состав огр-й:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 2\\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 &= 6\\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_7 &= 4\\ Z + 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0 \qquad (3')$$

Нерав-ми $(3')$ не охвачены пер-ые x_3, x_4, к-ые наз. «произвольными». Для приведения этих пер. к условиям неотц-ти сущ-ет два приема:

Первый прием. Пологаем $x_3 = x_3' - x_4''$, $x_4 = x_4' - x_4''$, где $x_3' \geq 0$, $x_3'' \geq 0$, $x_4' \geq 0$, $x_4'' \geq 0$. В результате получим задачу, содержащую не 7, а 9 пер-ых. Этот прием приводит к более сложным выч-ям в дальнейшем.

Второй прием, более сложный на нач-ом этапе, зато упрощает дальнейшие расчеты, т. к. он связан с уменьшением как числа пер-ых, так и числа ур-й. Здесь произвольные пер. x_3, x_4 исключаем по табл.1 методом Жордана-Гаусса (см. 3^0: 3.2)

Таблица 1

№ итераций	Z	X$_1$	X$_2$	X$_3$	X$_4$	X$_5$	X$_6$	X$_7$	*b*	∑
Исходная система $(2')$	0	2	–1	3	①	0	0	0	4	9
	0	1	2	3	2	0	0	0	6	14
	0	3	–1	–2	1	–1	0	0	2	2
	0	5	3	1	0	0	1	0	6	16
	0	–2	1	–3	–2	0	0	1	4	–1
	1	2	1	–3	2	0	0	0	0	3
I	0	2	–1	3	1	0	0	0	4	9
	0	–3	4	–3	0	0	0	0	–2	–4
	0	1	0	–5	0	–1	0	0	–2	–7
	0	5	3	①	0	0	1	0	6	16
	0	2	–1	3	0	0	0	1	12	17
	1	–2	3	–9	0	0	0	0	–8	–15
II	0	–13	–10	0	①	0	–3	0	–14	–39
	0	12	13	0	0	0	3	0	16	44
	0	26	15	0	0	$\boxed{-1}$	5	0	28	73
	0	5	3	①	0	0	1	0	6	16
	0	–13	–10	0	0	0	–3	$\boxed{1}$	–6	–31
	1	43	30	0	0	0	9	0	46	129
Исключение пер. x_6 и графическое реш. задачи										
III	0	–1	3	0	①	0	0	0	2	5
	0	4	$^{13}/_3$	0	0	0	$\boxed{1}$	0	$^{16}/_3$	$^{44}/_3$
	0	6	$^{-20}/_3$	0	0	$\boxed{-1}$	0	0	$^{4}/_3$	$^{-1}/_3$
	0	1	$^{-4}/_3$	①	0	0	0	0	$^{2}/_3$	$^{4}/_3$
	0	–1	3	0	0	0	0	$\boxed{1}$	10	13
	1	7	–9	0	0	0	0	0	–2	–3

После II итерации из 4-го и 1-го ур-й получим:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_6 \\ x_4 &= -14 + 13x_1 + 10x_2 + 3x_6 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Остальные ур. и фк-я Z не зв-т от этих пер-ых:

$$\min \mathrm{Z} = -43x_1 - 30x_2 - 9x_6 + 46 \qquad (1')$$

$$\left.\begin{array}{l} 12x_1 \ +13x_2 \qquad\quad +3x_6 \qquad\ = 16 \\ 26x_1 \ +15x_2 - x_5 + 5x_6 \qquad\ = 28 \\ -13x_1 - 10x_2 \qquad -3x_6 + x_7 = -6 \end{array}\right\} \qquad (2'')$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0 \qquad (3'')$$

и, наконец, из (1^1) получим (см. $1^0 : 3.\ 1)$:

$$\max\ Z_1 = -\min Z = 43x_1 + 30x_2 + 9x_6 - 46 \qquad (1'')$$

Итак, задача (1"), (2"), (3") имеет канический вид. И решив ее $\left(x_1^*, x_2^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*\right)$, а затем подставив их в ур. (4) находим окончательное решение $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*\right)$ и вычисляем max Z_1 по (1"). Решение см. в п 11.

п2. Привести сд. каноническую форму задачи ЛП к задаче однородными огр-ми в виде системы нерав-в.

$$\max Z = 2x_1 - x_2 \quad + 3x_4 + 2x_5 + 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad\quad -2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \qquad = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad\qquad\quad + x_5 \ = 6 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\quad +3x_4 \qquad\qquad = 4 \end{array}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Р. Прежде всего приведем систему орг-й задачи к единичному базису по табл. 2, записав целевую фк. как ур-ие: $Z - 2x_1 + x_2 - 3x_4 - 2x_5 = 4$

Таблица 2

№ итераций	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Σ
исходная система	0	$\boxed{1}$	0	-2	2	-3	2	0
	0	2	1	4	0	1	6	14
	0	-1	2	0	3	0	4	8
	1	-2	1	0	-3	-2	4	-1
I	0	1	0	-2	2	-3	2	0
	0	0	$\boxed{1}$	8	-4	7	2	14
	0	0	2	-2	5	-3	6	8
	1	0	1	-4	1	8	8	-1
II	0	1	0	-2	2	-3	2	0
	0	0	1	8	-4	7	2	14
	0	0	0	$\boxed{-18}$	13	-17	2	-20
	1	0	0	-12	5	-15	6	-15
III	0	1	0	0	${}^{5}/_{9}$	${}^{-10}/_{9}$	${}^{16}/_{9}$	${}^{10}/_{3}$
	0	0	1	0	${}^{16}/_{9}$	${}^{-5}/_{9}$	${}^{26}/_{9}$	${}^{46}/_{9}$
	0	0	0	1	${}^{-13}/_{18}$	${}^{17}/_{18}$	${}^{-1}/_{9}$	${}^{10}/_{9}$
	1	0	0	0	${}^{-11}/_{3}$	${}^{-11}/_{3}$	${}^{14}/_{3}$	${}^{-5}/_{3}$

После III итерации система ур-й оказалась разрешенной отс-но пер-ых x_1, x_2, x_3. Одновременно эти пер. исключены из целевой фк. Тогда из первых трех строк получим

$$x_1+\frac{5}{9}x_4-\frac{10}{9}x_5=\frac{16}{9}\Rightarrow\frac{5}{9}x_4-\frac{10}{9}x_5\le\frac{16}{9}\Rightarrow 5x_4-10x_5\le 16$$

$$x_2+\frac{16}{9}x_4-\frac{5}{9}x_5=\frac{26}{9}\Rightarrow\frac{16}{9}x_4-\frac{5}{9}x_5\le\frac{26}{9}\Rightarrow 16x_4-5x_5\le 26$$

$$x_3-\frac{13}{18}x_4+\frac{17}{18}x_5=-\frac{2}{18}\Rightarrow-\frac{13}{18}x_4+\frac{17}{18}x_5\le-\frac{2}{18}\Rightarrow-13x_4+17x_5\le-2\,.$$

Отсюда и из 4$^{\text{й}}$ строки имеем

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{16}{9}-\frac{5}{9}x_4+\frac{10}{9}x_5\\x_2&=\frac{26}{9}-\frac{16}{9}x_4+\frac{5}{9}x_5\\x_3&=-\frac{2}{18}+\frac{13}{18}x_4-\frac{17}{18}x_5\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\max\mathrm{Z}=\frac{11}{3}x_4+\frac{11}{3}x_5+\frac{14}{3}\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&5x_4-10x_5\le 16\\&16x_4-5x_5\le 26\\&-13x_4+17x_5\le-2\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$x_4\ge 0,\quad x_5\ge 0\tag{8}$$

зм1. Приведенный способ уменьшает числа пер-ых и позволяет решать задачу графическим способом (см. ниже), но требует предварительных выч-й. Сущ-ет и другой способ перехода от рав-в к нерав-ам. Так рав. $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ можно писать в виде двух нерав-в: $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i$ и $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i$, т.е. $-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le -b_i$. Но этот способ увеличивает число огр-й.

2^0. Основные понятия и свойства решений задач ЛП. Рас-им различные виды записи канонической модели задачи ЛП:

$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$	$\max Z=CX$	$\max Z=CX=f\left(X\right)$	(9)
$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ \ i=\overline{1,m}$	$AX=b$	$\sum_{j=1}^{n}x_jA_j=A_0$	(10)
$x_j\ge 0, j=\overline{1,n},$	$X\ge 0,$	$X\ge 0.$	(11)

где C = (c$_1$, c$_2$, …, c$_n$) – вектор-строка, $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ – вектор-столбец, $A=\left(a_{ij}\right)$– матрица ($i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$), $b=\left(b_1,b_2,...,b_m\right)$– вектор-столбец, O – n – мерный нулевой вектор, A_j – j -й столбец матрицы $\left(a_{ij}\right), A_0=b.$

Дадим нх-ые в дальнейшем опр-ия.

о1. Планом задачи ЛП наз. вектор $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, уд-й условиям (10) и (11).

о2. План $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ наз. опорным, если векторы A_j, входящие в разложение $A_o=\sum\limits_{j=1}^{n}x_jA_j$ с плж. коэф-ми x_j, яв-ся лин-но незв-ми. Непосредственно из опр-ия опорного плана следует, что число его плж-ых компонент не может превышать m, т. е. $X=\left(x_1,x_2,...,x_k,\underbrace{o,...,o}_{n-k}\right)$, $k\le m$.

о3. Опорный план наз. невырожденным, если он содержит ровно m плж-ых компонент, т. е. $X=\left(x_1,x_2,...,x_m,\underbrace{0,...,0}_{n-m}\right)$, в противном случае опорный план наз. вырожденным.

о4. Оптимальным планом или решением задачи ЛП наз. план, доставляющий мкс-ое (или мин-ое) значение целевой фк. $f\left(X\right)$.

о5. Фк. $f\left(x\right)$, опрн-я в n-мерном пр-ве и принимающая дсв-ые значения, наз. лин-ым функционалом, если для любых векторов U, V из этого пр-ва и скаляров α,β имеет место стн-ие

$$f\left(\alpha U+\beta V\right)=\alpha f\left(U\right)+\beta f\left(V\right).$$

Очевидно, что лин. форма (9) яв-ся лин-ым функционалом.

Приведем основные св. решений задач ЛП.

т1. Мн. K всех планов задачи ЛП выпукло.

Д. Покажем, что выпуклая комбинация любых двух планов задачи также яв-ся ее планом, тогда K будет выпуклым мн-ом $\left(\text{см.}6^{\circ}:3.2\right)$. Пусть X_1 и X_2 два плана задачи, т. е. $X_1,X_2\in K$. Тогда $AX_1=b$ для $X_1\ge 0$ и $AX_2=b$ для $X_2\ge 0$. Пусть $X=\alpha X_1+\left(1-\alpha\right)X_2$ при $0\le\alpha\le 1$– произвольная выпуклая комбинация X_1иX_2. Ясно, что $X\ge 0$. И X яв-ся планом, т. к. $AX=A\left[\alpha X_1+\left(1-\alpha\right)X_2\right]=\alpha AX_1+\left(1-\alpha\right)AX_2=\alpha b+b-\alpha b=b$, т. е. $X\in K$.

Подобным же образом док-ся, если огр-ия имеют вид нерав. $AX\le b$.

Т. к. K опр-ся конечной совокупностью лин-ых огр-ий (10) и (11), его граница (если K не пусто) состоит из кусков нескольких гиперплоскостей. K может быть либо пустым мн-ом, либо выпуклым мгр-ом, либо выпуклой мгр-ой областью уходящей в беск-ть.

Если K – выпуклый мгр-к, задача обладает планом, при чем опт-ое значения лин-ой формы конечно.

Если K – неогр. мгр-ая обл., то задача обладает планом, но значение max (min) совпадает с $\infty(-\infty)$.

На практике задачи ЛП обладают всегда планом. В силу m1 задача, обладающая более чем одним планом имеет беск-ое мн. планов.

Отметим, что любая точка выпуклого мгр-ка может быть представлена в виде некоторой выпуклой комбинации его крайних угловых точек. Поэтому, если K– мгр-к, отыскание оптимума лин-ой формы сводится к перебору его крайних точек, это устанавливается сд. теоремой.

т2. Лин. форма (9) задачи ЛП достигает своего max в крайней точке выпуклой обл. K, являющейся мн-ом планов этой задачи. Если лин. форма принимает max значение более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, яв-йся выпуклой лин. комбинацией этих точек.

Д. По предположению, K– выпуклый мгр-к и, сд-но, имеет конечное число крайних точек. Н-р, в двумерном пр-ве K имеет вид, как на рис. 1.

Обз-им крайние точки K через $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p$, а опт-й план через X_0. Тогда $f(X_0) \ge f(X)$ для всех X из K. Если X_0 – крайняя точка, первую часть теоремы можно считать док-ой. Предположим, что X_0 не яв-ся крайней точкой (как показано на рис.1), тогда X_0 можно представить в виде выпуклой комбинации крайних точек K, т. е. $X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{X}_i$, где $\alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$. Тогда, поскольку $f(x)$ – лин-ый функционал, получаем

$$f(X_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \overline{X}_i\right) = a_1 f\left(\overline{X}_1\right) + a_2 f\left(\overline{X}_2\right) + \ldots + a_p f\left(\overline{X}_p\right) = M, \tag{12}$$

где M – $max\, f(X)$ для всех X из K.

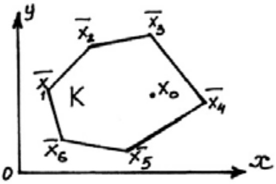


Рис. 1

Поскольку $\alpha_i \ge 0$, сумма (12) не уменьшится, если вместо каждого $f\left(\overline{X}_i\right)$ подставим мкс-ю из величин $f\left(\overline{X}_i\right)$. Пусть. $f\left(\overline{X}_m\right) = \max_i f\left(\overline{X}_i\right)$ Отсюда, учитывая рав. $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, получаем

$$f(X_0) \le \alpha_1 f\left(\overline{X}_m\right) + \alpha_2 f\left(\overline{X}_m\right) + \ldots + \alpha_p f\left(\overline{X}_m\right) = f\left(\overline{X}_m\right).$$

Т.к., по предположению, $f(X_o) \ge f(X)$ для всех X на K, то

$$f(X_o) = f\left(\overline{X}_m\right) = M .$$

Итак, сущ-ет крайняя точка $\overline{X_m}$, в к-ой лин. форма достигает max.

Для док-ва второй части теоремы допустим, что $f(X)$ принимает мкс-ое значение более чем в одной точке, н-р, в $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_q$. Тогда $f\left(\overline{X}_1\right) = f\left(\overline{X}_2\right) = ... = f\left(\overline{X}_a\right) = M$. Если X яв-ся нек-ой выпуклой комбинацией точек $\overline{X_i},\ i = \overline{1,q}$, т.е. $X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{x_i}$, где $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$, то

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{X_i}\right) = \alpha_1 f\left(\overline{X}_1\right) + \alpha_2 f\left(\overline{X}_2\right) + ... + \alpha_q f\left(\overline{X}_q\right) = M \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = M,$$

т.е. лин. фк. f(X) достигает *max* в произвольной точке X, яв-йся выпуклой лин. комбинацией угловых точек $\overline{X}_1\ \ \overline{X}_2\ \ \ldots,\ \overline{X}_q$ ∎

С помощью очевидных изменений док-во теоремы переносится на тот случай, когда лин. форму $f(X) = CX$ надо мнмз-ть.

Согласно т2, поиски опт-го плана задачи ЛП можно ограничить перебором конечного числа крайних точек К.

Напомним, что планом задачи наз. такой вектор с неотц. компонентами, X=(x_1, x_2,…, x_n), что $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = A_o$.

Пусть найдена система К линейно незв-ых векторов A_1,…,$A_к$, лин. комбинация к-ых с неотц. коэф-ми совпадает с A_o , тогда верно

т3. Если известно, что система векторов A_1, A_2,…, $A_к$ лин. незв-ма и такова, что
$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = A_o,$$
где все $x_i \geq 0$, то точка $X = \left(x_1, x_2, ..., x_k, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-к} \right)$ яв-ся крайней точкой выпуклого мн-ва планов К.

Д. Предположим противное, что X не яв-ся крайней точкой. В таком случае, поскольку X – план, то его можно записать в виде выпуклой комбинации двух др. точек X_1 и X_2 из К, т.е.

$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$, где $0 < \alpha < 1$. Т.к. компаненты векторов X_1, X_2, неотц-ны, $0 < \alpha < 1$ и последние п-к компонент вектора X – нули, то ств-щие компоненты векторов X_1 и X_2 также равняются нулю, т.е. $X_1 = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ ...,\ x_k^{(1)},\ 0,\ 0\ ...,\ 0\right)$, $X_2 = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ ...,\ x_k^{(2)},\ 0,\ 0,\ ...,\ 0\right)$.

Поскольку X_1 и X_2 яв-ся планами, то $AX_1 = b$ и $AX_2 = b$ или в векторной форме: $x_1^{(1)} A_1 + x_2^{(1)} A_2 + ... + x_k^{(1)} A_k = A_0$ и $x_1^{(2)} A_1 + x_2^{(2)} A_2 + ... + x_k^{(2)} A_k = A_0$, откуда имеем: $\left(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}\right) A_1 + \left(x_2^{(1)} - x_2^{(2)}\right) A_2 + ... + \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)}\right) A_k = 0$. Т.к. векторы $A_1, A_2, ..., A_k$ лин. незв-ы, то $x_1^{(1)} - x_1^{(2)} = 0, ..., x_k^{(1)} - x_k^{(2)} = 0$ (см. $_0$1 из

3^0:3.1), т.е. $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}, i = \overline{1,k}$. Итак, Х невозможно представить в виде выпуклой лин. комбинации двух различных точек обл. К. Сд-но, Х – крайняя точка К.

т4. Если $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – крайняя точка К, то векторы, ств-щие плж-ым x_i, образуют лин. незв-ую систему.

Д. Пусть не равным нулю яв-ся первые к компонент вектора Х, так что $\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = A_0$. Допустим противное, что система $A_1, A_2, \ldots, A_к$ лин. зв-ма. Тогда сущ-ет лин-я их комбинация $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_к A_к = 0$ ①, где хотя бы один $\alpha_i \neq 0$, а по условию теоремы $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = A_0$ ②.Умн-им ① на нек-ое $\alpha > 0$ и прибавим, вычтем из рав.

②: $\sum_{i=1}^{k} x_i A_i + \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = A_0$, $\sum_{i=1}^{k} x_i A_i - \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = A_0$. Т.о. система ур-й ② имеет два решения:

$$X_1 = (x_1 + \alpha\alpha_1, x_2 + \alpha\alpha_2, ..., x_k + \alpha\alpha_k, 0, ..., 0)$$

$$X_2 = (x_1 - \alpha\alpha_1, x_2 - \alpha\alpha_2, ..., x_k - \alpha\alpha_k, 0, ..., 0)$$

(заметим, что они могут и не быть планами). Поскольку все $x_i > 0, \alpha$ можно выбрать настолько малым, чтобы первые к компонент X_1 и X_2 приняли плж. значения. Тогда X_1 и X_2 станут планами. Но $X = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2$, что противоречит предположению о том, что Х – крайняя точка, значит, система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_к$ лин. незв-ма.

сл1. Каждой крайней точке из К ств-ет m лин-но незв-ых векторов из данной системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Д. Теорема **т4** утв-ет, что имеется $k \leq m$ незв-ых векторов. При $k = m$ следствие д-но. Пусть $k < m$ и сущ-ет не более r-к таких векторов $A_{k+1}, ..., A_r$, что $A_1, ..., A_k, A_{k+1}, ..., A_r$ – это лин-но незв-ая система. Если $r < m$, то остальные $n - r$ векторов зависят от $A_1, ..., A_r$ в силу теоремы о базисном миноре (см. $2^0 : 3.2$). Но это противоречит предположению о сущ. m лин. незв-ых векторов в данной системе $A_1, A_2, ..., A_n$. Поэтому $r = m$.

Итак, каждой крайней точке $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ств-ет m лин. незв-ых векторов $A_1, A_2, ..., A_m$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i + \sum_{i=k+1}^{m} o.A_i = A_o$$

Док-ые теоремы могут быть объединены в сд-ем утв.:

т5. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ яв-ся крайней точкой K m тогда, если плж. компоненты x_j яв-ся коэф-ми при лин. незв-ых векторах A_j в разложении $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = A_o$.

Из этой теоремы, в част., вытекает, что совокупность опорных планов задачи ЛП совпадает с системой крайних точек мн-ва *K*, порождаемых условиями данной задачи.

Из результатов выше изложенного следует, что

1) сущ-ет такая крайняя точка *K*, в к-ой лин. форма задачи достигает оптимума$\left(\max\right)$;

2) каждый опорный план ств-ет крайней точке *K*;

3) с каждой крайней точкой *K* связаны *m* лин. незв-ых векторов из данной системы *n* векторов.

Отсюда следует, что нх-мо исследовать лишь крайние точки K, т. е. только опорные планы, каждый из к-ых опр-ся системой m лин. незв-ых векторов. Поскольку в данной системе n векторов содержится не больше чем C_n^m систем, каждая из которых состоит из m лин. незв-ых векторов, величина C_n^m яв-ся верхней границей числа опорных планов задачи. При больших *m* и *n* все опорные планы проверить долго, поэтому надо осуществить уп-ый переход от одного опорного плана к другому и такой схемой яв-ся симплексный метод. При этом через конечное число шагов (обычно между *m* и 2*m*) достигается max лин-ой формы.

Если задача не обладает планами или если ее лин. форма не огр-на на мн. *K*, то симплексный метод позволяет установить это за конечное число шагов. С помощью симплекс метода можно решать любые задачи ЛП.

3^0. Опорный план и отыскание оптимального плана. Прежде чем изложить симплексный метод рас-им построение опорных планов. Предположим, что известен опорный план, для опр-сти, пусть этими векторами будут первые *m* векторов системы $A_1, A_2, ..., A_n$. Опорный план имеет вид $X = \left(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0\right)$. Тогда

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_o, \qquad (13)$$

где все $x_i \geq 0$. Нх-мо, исходя из известного опорного плана, опр-ть новый опорный план.

Поскольку векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ лин. неозв-мы, они образуют базис в *m*-мерном пр-ве. Поэтому каждый из данных *n* векторов $\left\{A_j\right\}$ можно выразить в виде лин-ой комбинации векторов базиса (см. **т1** из 2^0.3.2.), т. е. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i = A_j, j = \overline{1,n}.$

Предположим, что для нек-го вектора, не входящего в базис, скажем A_{m+1}, хотя бы один из коэф-ов $x_{i,m+1} > 0$ в

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + ... + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1.} \qquad (14)$$

Умн-им (14) на величину $\theta\left(\theta > 0\right)$ и вычтем из (13):

$$\left(x - \theta x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \theta x_{2,m+1}\right) A_2 + ... + \left(x_m - \theta x_{m,m+1}\right) A_m + \theta P_{m+1} = A_0. \qquad (15)$$

Вектор $x' = (x_1 - \theta x_{1,m+1,}, x_2 - \theta x_{2,m+1}, ..., x_m - \theta x_{m,m+1}, \theta)$ в случае неотц-ти своих компонентов яв-ся планом (здесь и далее нулевые компоненты вектора x' опускаем). Поэтому надо опр-ть такое $\theta > 0$, что

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0 \qquad (16')$$

для всех $x_{i,m+1} > 0$. Из $(16^')$ имеем $\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \geq \theta$ и, сд-но, любое θ, для к-го $0 < \theta \leq \min \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$, где *min* берется по тем *i*, для к-ых $x_{i,m+1} > 0$, опр-ет в ств. с (15) нек-ый план задачи.

Но опорный план имеет m компонентов, поэтому по крайней мере один из компонентов X' обратим в нуль, для этого положим

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}, \qquad (16)$$

т.е. пусть этот компонент стоит на первом месте и $x_{1,m+1} > 0$. Тогда получим новый план

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + ... + x_m' A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

где $x_i' = x_i - \theta_0 x_{i,m+1} \left(i = \overline{2,m} \right), \quad x'_{m+1} = \theta_0$.

Если все $x_{i,m+1} \leq 0$, то нельзя выбрать плж-ое θ, к-ое исключало бы по крайней мере один из векторов $A_1, ..., A_m$ из базиса. В этом случае задача не имеет опт-го плана.

Покажем, что $X' = \left(x_2', ..., x_m', x'_{m+1} \right) -$ крайняя точка, для этого дт-но д-ть, что система векторов $A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ лин. незв-ма. Допустим противное, что они лин. зв-мы, тогда найдутся числа d_i такие, что

$$d_2 A_2 + d_3 A_3 + ... + d_m A_m + d_{m+1} A_{m+1} = 0, \qquad (17)$$

где хотя бы одно $d_i \neq 0$, Т.к. система $A_1, A_2, ..., A_m$ лин. незв-ма, то любая ее подсистема $A_2,...,A_m$ лин. независима, отсюда следует, что $d_{m+1} \neq 0$. Тогда из (17) имеем

$$e_2 A_2 + e_3 A_3 + ... + e_m A_m = A_{m+1}, \qquad (18)$$

где $e_i = -\frac{d_i}{d_{m+1}}$. Стн. (18) вычтем из (14), тогда получим

$$x_{1,m+1} A_1 + (x_{2,m+1} - e_2) A_2 + (x_{3,m+1} - e_3) A_3 + ... + (x_{m,m+1} - e_m) A_m = 0 \qquad (18')$$

Т.к. $A_1, A_2, ..., A_m$ лин. незв-мы, то все коэф-ы (18) должны быть равны нулю. Но по предположению $x_{1,m+1} > 0$. Полученное противоречие док-ет, что $A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ лин. незв-мы.

Для продолжения процесса получения новых опорных планов нх-мо представить любой вектор не входящий в новой базис $A_2,\dots,A_m,A_{m+1}$, в виде лин-ой комбинации векторов этого базиса. Из (14) получаем

$$A_1=\frac{1}{x_{1,m+1}}\left(A_{m+1}-x_{2,m+1}A_2-\dots-x_{m,m+1}A_m\right). \qquad (19)$$

Пусть

$$A_j=x_{1j}A_1+x_{2j}A_2+\dots+x_{mj}A_m \qquad (20)$$

нек-ый вектор, не входящий в новый базис. Поставив тогда выражение (19) для A_1 в (20), получим

$$A_j=(x_{2j}-\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}x_{2,m+1})A_2+\left(x_{2j}-\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}x_{3,m+1}\right)A_3+\dots+\left(x_{mj}-\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}x_{m,m+1}\right)A_m+\frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}A_{m+1} \quad (21)$$

Чтобы реализовать построение опорного плана для конкретного примера с помощью Жорданово-Гауссовой табл. целесообразно полагать $A_0=b=\{b_i\}$, $A_i=x_i=b_i$, $A_j=x_j$, $x_{ij}=a_{ij}$, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$ Тогда фм-ла (16) принимает вид

$$\theta=\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}}=\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}},\frac{b_2}{a_{21}},\dots,\frac{b_m}{a_{m1}}\right\}=\theta_0 \qquad (22)$$

для плж-ых a_{i1} при $m+1=1$. А стн. (21) на табл. реализуется методом Жордана –Гаусса.

п3. Для сд-ей системы ур-й при исходном опорном плане ввести вектор A_1 в базис для получения другого опорного плана.

$$\begin{aligned}3x_1-x_2+2x_3+x_4\qquad &=7\\ 2x_1-4x_2\qquad +x_5\qquad &=12\\ -4x_1-3x_2+8x_3\qquad +x_6 &=10\end{aligned}$$

Р. За исходный опорный план принимаем $x_1=x_2=x_3=0,$ $x_4=7,\ x_5=12,\ x_6=10,$ тогда $7A_4+12A_5+10A_6=A_0$, Разложив A_1 по векторам базиса, получим $3A_4+2A_5-4A_6=A_1$, отсюда по (15) находим $(7-3\theta)A_4+$ $+(12-2\theta)A_5+(10+4\theta)A_6+\theta A_1=A_0$, т.к. в силу (22). $\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{i1}}=$ $=\left\{\frac{7}{3},\frac{12}{2}\right\}=\frac{7}{3}$, то подставив ее в предыдущее рав., исключив A_4, опр-ем новый опорный план

$$\frac{22}{3}A_5+\frac{58}{3}A_6+\frac{7}{3}A_1=A_0,\ \text{т.е. } X'=\left(\frac{7}{3},0,0,0,\frac{22}{3},\frac{58}{3}\right).$$

Если ввести вектор A_2, то $-A_4-4A_5-3A_6=A_2$, $(7+0)A_4+$ $+(12+40)A_5+(10+30)A_6+\theta P_2=P_{0,}$ здесь при любом $\theta>0$ получается план. Поскольку все $x_{i2}<0$, мы здесь не можем получить новый опорный план.

Все приведенные результаты, а также вычисления по (21) легко получить по табл. 3, используя введенные обз. и метод Жордана-Гаусса.

Таблица 3

i	Базис	$A_0=b$	x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$	x$_5$	x$_6$	Σ
1	x_4	7	$\boxed{3}$	-1	2	1	0	0	12
2	x_5	12	2	-4	0	0	1	0	11
3	x_6	10	-4	-3	8	0	0	1	12
1	x_1	$^{7}/_{3}$	1	$^{-1}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	$^{1}/_{3}$	0	0	4
2	x_5	$^{22}/_{3}$	0	$^{-10}/_{3}$	$^{-4}/_{3}$	$^{-2}/_{3}$	1	0	3
3	x_6	$^{58}/_{3}$	0	$^{-13}/_{3}$	$^{32}/_{3}$	$^{4}/_{3}$	0	1	28

$$\theta=\min\left\{\frac{7}{3},\frac{12}{2}\right\}=\frac{7}{3}$$

$$X'=\left(\frac{7}{3},0,0,0,\frac{22}{3},\frac{58}{3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_2&=-\frac{1}{3}A_1-\frac{10}{3}A_5-\frac{13}{3}A_6\\
A_3&=\frac{2}{3}A_1-\frac{4}{3}A_5+\frac{32}{3}A_6\\
A_4&=\frac{1}{3}A_1-\frac{2}{3}A_5+\frac{4}{3}A_6
\end{aligned}\right\}$$

или через введенные обз-ия получим:

$$\left.\begin{aligned}
x_2&=-\frac{1}{3}x_1-\frac{10}{3}x_5-\frac{13}{3}x_6=-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}-\frac{10}{3}\cdot\frac{22}{3}-\frac{13}{3}\cdot\frac{58}{3}=-109\\
x_3&=\frac{2}{3}x_1-\frac{4}{3}x_5+\frac{32}{3}x_6=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{22}{3}+\frac{32}{3}\cdot\frac{58}{3}=198\\
x_4&=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_5+\frac{4}{3}x_6=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{22}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{58}{3}=\frac{185}{3}
\end{aligned}\right\}$$

Возникает вопрос, как выбирать наилучший вектор A_j для введения в базис, чтобы число итераций было как можно меньше при решении задачи. Для этого изложим процесс отыскания опт-го плана.

Предположим, что задача ЛП обладает планами и каждый опорный план не вырожден и пусть известен один из опорных планов $X_0=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$ и ств. векторы $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ лин. незв-мы.

Тогда имеем

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \tag{23}$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_mc_m = \mathrm{Z}(x_0) \tag{24}$$

где все $x_i > 0$, c_i-коэф. лин-ой формы (9). Т.к. векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ лин. незв-мы, то любой вектор A_j можно выразить через них:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj} \cdot A_m = A_j, j = \overline{1,n}. \tag{25}$$

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \ldots + x_{mj}c_m = Z_j, j = \overline{1,n}. \tag{26}$$

т6. Если для нек-го вектора A_j выполняется условие $Z_j - c_j < 0,$ то план x_0 не яв-ся опт-ым и можно построить такой план x, для к-го выполняется нерав. $z(x) > z(x_0)$.

Случай 1. Если верхняя граница $\mathrm{Z}(X)$ конечна, то можно построить новый опорный план, связанный с большим значением лин-ой формы по сравнению с предыдущим.

Случай 2. Если верхняя граница $\mathrm{Z}(X)$ беск., то может быть найден новый план, состоящей в точности $m+1$ плж-ых компонент и ств-й сколь угодно большему значению лин-ой формы задачи.

Д. В обоих случаях сначала, умножая (25) и (26) на $\theta > 0$ и вычитая результаты ств-но из (23) и (24), получим

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)A_1 + \left(x_2 - \theta x_{mj}\right)A_2 + \ldots + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)A_m + \theta A_j = A_0, \tag{27}$$

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)C_1 + \left(x_2 - \theta x_{2j}\right)C_2 + \ldots + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)C_m + \theta C_j = Z(x_0) - \theta\left(Z_j - C_j\right). \tag{28}$$

В стн. (28) к обоим частям прибавлена величина θC_j для $j = \overline{1,n}.$ В (27) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ плж-ны, поэтому всегда можно выбрать такое $\theta > 0$, чтобы все коэф. при векторах $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_m,\ \mathrm{A}_j$ были неотц-ми, т.е. получить новый план задачи: $X = \left(x_1 - \theta x_{1j},\ x_2 - \theta x_{2j},\ \ldots,\ x_m - \theta x_{mj},\ \theta,\ 0,\ \ldots,\ 0\right)$, к-му согласно (28) ств-ет значение лин-ой фк. $Z(X) = Z(X_0) - \theta\left(Z_j - C_j\right)$. Т. к. по условию теоремы $Z_j - C_j < 0$ и $\theta > 0,$ то $Z(X) > Z(X_0)$, т. е. в обоих случаях можно получить новый план, связанный с увелеченным значением лин-ой формы.

Д-во в случае 1 проводится так: если для фиксированного J по крайней мере один из $x_{ij} > 0\left(i = \overline{1,m}\right)$, нм-ая величина θ, для к-ой все коэф. (27) остаются неотц-ми, опр-ся стн-ем

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}, \tag{29}$$

где min, берется по всем $x_{ij} > 0$. Т. к задача невырожденная, т. е. все опорные планы содержат m плж-ых компонент min в стн. (29) будет достигаться при единственном i. Это значение $\theta = \theta_0$ поставив в (27) и (28) один коэф. обратим в нуль и получим новый опорный план, базис к-го состоит из A_j и $(m-1)$ векторов первоначального базиса. С новым базисом проводится те же операции, что и с предыдущими. Если снова одна из разностей $Z_j - C_j < 0$ и ств-щее $x_{ij} > 0$, можно перейти к другому опорному плану с еще большим значением лин-ой формы. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет все $Z_j - C_j \geq 0$ (процесс закончен), либо для нек-ой разности $Z_j - C_j$ окажутся все $x_{ij} \leq 0$.

Д-во в случае 2 проводится сд-ем образом: если на нек-ом шаге для какого-либо j разность $Z_j - C_j < 0$ и все $x_{ij} \leq 0$, то θ не имеет верхней границы и лин. форма может быть сделана сколь угодно большой. В этом случае для любого $\theta > 0$ все коэф. (27) плж-ны. Т. о. имеем план, состоящий из $m+1$ плж-ых компонент. Если выбирать θ дт-но большим, то лин. форма окажется сколь угодно большой, т. е. $Z(X) = \infty$

сл2. Если для нек-го плана x_0 разложения всех векторов $A_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ в данном базисе уд-ют условию $Z_j - C_j \geq 0$, то план X_0 яв-ся опт-ым.

Значения $Z_j - C_j$ наз. оценками плана.

Для задачи ЛП (9)-(11), заключающейся в отыскании $\min Z$, верна

т7. Если для нек-го вектора A_j выполняется условие $Z_j - C_j > 0$, то план X_0 не яв-ся опт-ым и можно построить такой план X, для к-го выполняется нерав. $Z(X) < Z(X_0)$ (и здесь имеет место два случая, как в т 6).

Д-во аналогично док-ву **т 6**, причем в случае 2 имеем $\min Z = -\infty$.

сл3. Если для нек-го плана X_0 разложение всех векторов $A_j(j = \overline{1n})$ в данном базисе уд-ют условию $Z_j - C_j \leq 0$, то план X_0 яв-ся опт-ым.

На практике при выборе вектора A_k, включаемого в базис, лин. форму записываем в виде ур-ия в табл. вместе с остальными огр-ми, над эл-ми к-ой осуществляем преобразования методом Жордана-Гаусса и выбираем К такое, что

$$\min_j\left(Z_j - C_j\right) = Z_k - C_k < 0. \qquad (30)$$

п4. Для сд. задачи ЛП при исходном опорном плане опр-ть вектор A_k, к-го следует включить в базис для получения другого опорного плана.

$$\max Z = -x_2 + 3x_3 - 2x_5$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + 2x_5 \qquad = 7 \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad = 12 \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 \qquad + 8x_5 + x_6 = 10 \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{j} \geq 0, \mathrm{j} = \overline{1,6}\,.$$

Р. В состав огр-й включаем рав. $\mathrm{Z} + \mathrm{x}_2 - 3\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_5 = 0$, записываем в табл. 4 (используя введенные в п 3 обз-ия) и реализуем метод Жордана-Гаусса.

Таблица 4

I	Базис	$A_0 = b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\sum$
1	x_1	7	1	3	–1	0	2	0	12
2	x_4	12	0	–2	$\boxed{4}$	1	0	0	15
3	x_6	10	0	–4	3	0	8	1	18
4	Z	0	0	1	–3	0	2	0	0
1	x_1	10	1	$\boxed{{}^{5}/_{2}}$	0	${}^{1}/_{4}$	2	0	${}^{63}/_{4}$
2	x_3	3	0	${}^{-1}/_{2}$	1	${}^{1}/_{4}$	0	0	${}^{15}/_{4}$
3	x_6	1	0	${}^{-5}/_{2}$	0	${}^{-3}/_{4}$	8	1	${}^{27}/_{4}$
4	Z	9	0	${}^{-1}/_{2}$	0	${}^{3}/_{4}$	2	0	${}^{45}/_{4}$
1	x_2	4	${}^{2}/_{5}$	1	0	${}^{1}/_{10}$	${}^{4}/_{5}$	0	${}^{63}/_{10}$
2	x_3	5	${}^{1}/_{5}$	0	1	${}^{3}/_{10}$	${}^{2}/_{5}$	0	${}^{69}/_{10}$
3	x_6	11	1	0	0	${}^{-1}/_{2}$	10	1	${}^{45}/_{2}$
4	Z	11	${}^{1}/_{5}$	0	0	${}^{4}/_{5}$	${}^{12}/_{5}$	0	${}^{72}/_{5}$

Исходный базис $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_4, \mathrm{x}_6)$ $\min\limits_{\mathrm{j}}(\mathrm{Z}_\mathrm{j} - \mathrm{C}_\mathrm{j}) = \mathrm{Z}_3 - \mathrm{C}_3 = -3$, $\mathrm{x}_3 = \mathrm{A}_3$

$$\theta = \min\left\{\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right\} = 3$$

строку i=2 делим на 4 и реализуем метод Жордана-Гаусса $\mathrm{X}^1 = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_6)$ – новый базис. Процесс повторяем для $\min\limits_{\mathrm{j}}(\mathrm{Z}_\mathrm{j} - \mathrm{C}_\mathrm{j}) = \mathrm{Z}_2 - \mathrm{C}_2 = -\frac{1}{2}$, $\theta = \min\left\{10 : \frac{5}{2}\right\} = 4$ и $\mathrm{x}_2 = \mathrm{A}_2$ включаем в сд. новый базис и т.д. до получения $\mathrm{Z}_\mathrm{j} - \mathrm{C}_\mathrm{j} \geq 0$. В результате получаем $\max \mathrm{Z} = -4 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 11 = 11$, $\mathrm{x}_{\text{опт}} = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$.

Теоремы m5 – m7 (с использованием на практике (22) и (30)) при допущении невырожденности планов позволяют решить любые задачи ЛП. Если невырожденность нарушается, может оказаться, что среди m компонент x_i одна или несколько равны нулю. В этом случае θ_0 может оказаться равным нулю и значение лин-ой формы при переходе к новому опорному плану не изменится, тогда через нескольких шагов возможен возврат к старому базису, т.е. получается цикл.

В процессе выч-й явление вырожденности проявляется в том, что опорный план связан с меньшим, чем m, числом плж-ых компонентов x_i и (или) $\theta_0 = \min\limits_j \frac{x_i}{x_{ij}}$ для $x_{ij} > 0$ ств-ет более чем одному i. Если такое i не единственно, нек-ые из x_i в новом плане будут равны нулю. Способы устранения вырожденности не стоит включить в симплексный метод, т.к. на практике цикл встречается очень редко в задачах ЛП. Поэтому воздержимся от рас-ия этого вопроса, отсылав читателя в $[17,128]$.

4^0. Графический метод решения модели задач ЛП. Решим практические примеры, используя результаты, выше изложенных материалов.

п5. Построить область (обл.) решений системы нерав-в

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_2 \le 6 & (i=1) \\ 9x_1 + 4x_2 \le 56 & (i=2) \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4 & (i=3) \end{cases}$$

Р. Обл-ю решения лин-го нерав-ва с двумя пер-ми яв-ся полупл-ть, лежащая по одну сторону от граничной прямой (пм.) данные нерав. строим (см.рис.2) как в 6°.3.2. Обл-ю решения системы трех нерав-в служит туг-к, огр-ный данными тремя граничными прямыми, с вершинами, явм-ся точками пересечения этих прямых. В результате найдем три вершины: F(-2,2), C(4,5) и Q(8,-4).

п5а. Построить обл. допустимых решений (ОДР) системы нерав-в, указанных в п1.

Р. Допустимыми наз. решения, в к-ых значения всех пер-ых неот-ны, т.е. $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$. Для опр-ия области допустимых решений нх-мо, кроме упомянутых выше трех граничных прямых, учесть еще две граничные прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Ств-ие им полупл-ти лежит справа от оси ординат и над осью абсцисс. Т.о. из предыдущей области (туг-ка) выделяется ее часть, расположенная в I квадрате (рис. 2). Ее полностью опр-ет пять вершин: A(0,4/5), B(0,3), C(4,5), D(56/9,0), E(4,3;0).

п6. Построить ОДР ур-й

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 9 \\ -3x_1 + x_3 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_4 - 3x_5 - x_6 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 - 2x_6 = -1 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Р. При графическом нахождении ОДР системы ур-й кол-во свободных пер. должно быть равно $n - m = 2$ (здесь $n = 6$, $m = 4$), к-ых находим приведением системы к единичному базису по табл. 5 методом Жордана-Гаусса. При этом в качестве ключевого эл. выбираем $a_{ij} = 1$ такое, чтобы на i-й строке и j-го столбца были как можно больше нулей (см. 3^0: 3.2).

Таблица 5

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	в	Σ
Исходн. система	–2	1	1	1	1	–1	9	10
	–3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	3	2
	3	0	0	2	–3	–1	5	6
	1	1	0	0	3	–2	–1	2
I	1	$\boxed{1}$	0	1	0	–1	6	8
	–3	0	1	0	1	0	3	2
	3	0	0	2	–3	–1	5	6
	1	1	0	0	3	–2	–1	2
II	1	1	0	1	0	–1	6	8
	–3	0	1	0	1	0	3	2
	3	0	0	2	–3	–1	5	6
	0	0	0	$\boxed{-1}$	3	–1	–7	–6
III	1	1	0	0	3	–2	–1	2
	–3	0	1	0	1	0	3	2
	3	0	0	0	3	$\boxed{-3}$	–9	–6
	0	0	0	1	–3	1	7	6
IV	–1	①	0	0	1	0	5	6
	–3	0	①	0	1	0	3	2
	–1	0	0	0	–1	①	3	2
	1	0	0	①	–2	0	4	4

После четырех итераций метода Жордана-Гаусса получим систему ур-ий, разрешенную отс-но базисных пер-ых x_2, x_3, x_6, x_4:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 5 \\ -3x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 3 \\ -x_1 \qquad\qquad\qquad - x_5 + x_6 &= 3 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 - 2x_5 \qquad &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1 + x_5 &\le 5 \\ -3x_1 + x_5 &\le 3 \\ -x_1 - x_5 &\le 3 \\ x_1 - 2x_5 &\le 4 \end{aligned}\right\}$$

ОДР системы нерав-в, построенная в пл-ти x_10x_5 (рис. 3), служит одновременно обл-ю допустимых значений свободных пер-ых исходной системы ур-й. Т. к. любая пара свободных пер. однозначно опр-ет решение системы, то построенную обл-ю наз-ют также обл. допустимых решений системы ур-й. Построенная на рис. 3 обл. с вершинами A(1,6), B(0,3), O(0,0) и C(4,0) оказалось неогр-ой. Причем 3-е нерав., сд-но, и 3-е ур. оказалось лишним.

п7. Записать систему нерав-в по обл-ти ее допустимых решений изб-ой на рис. 4.

Р. Запишем сначала ур-я граничных прямых, как прямых, проходящих через дв. точки. Так, н-р, для пм. AB получим $\dfrac{x_2-2}{5-2}=\dfrac{x_1-1}{2-1}$, или, после упрощений $3x_1 - x_2 = 1$. Полупл-ть, опрм-я граничной пм. AB, должна включать весь чуг. АВСД, в част. точку Д(5,1), тогда $3\cdot 5-1=14>1$, отсюда $3x_1-x_2\geq 1$.. Аналогично найдем остальные три нерав. Окончательно получим сд. систему нерав-в:

$$\left.\begin{array}{l}3x_1-x_2\geq 1\\ -x_1+3x_2\leq 13\\ 2x_1-x_2\leq 9\\ x_1+4x_2\geq 9\end{array}\right\}$$

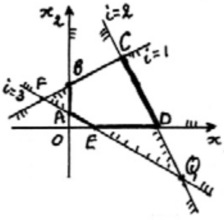


Рис. 2

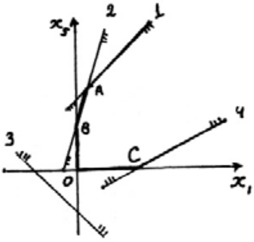


Рис. 3

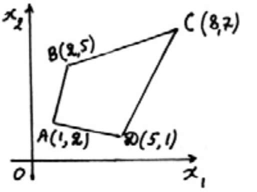


Рис. 4

п8. Решить графически сд. задачу ЛП:

$$Z=4x_1+2x_2\ \text{(max)}$$

$$\left.\begin{array}{l}2x_1+3x_2\leq 18\\ -x_1+3x_2\leq 9\\ 2x_1-x_2\leq 10\end{array}\right\}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Р. Построим ОДР системы нерав-в, как в п5а, и получим выпуклый пятиугольник (рис. 5). В той же системе крд. построим нормаль $N=(4,\ 2)$ к линиям уровня $4x_1+2x_2=Z$ при $Z=0$. Перемещая эту прямую параллельно (прл.) самой себе в направлении вектора N до тех пор, пока она будет сохранять общие точки с ОДР, найдем, что в крайнем возможном положении линия уровня пройдет через точку $X_{\text{опт}}$. Этому положению линии уровня ств-ет $Z=Z_{\max}$. Для нахождения крд-т точки $X_{\text{опт}}$ совместно решаем систему ур-й граничных прямых

$$\left.\begin{array}{l}2x_1+3x_2=18\\ 2x_1-x_2=10\end{array}\right\}$$

В результате получим искомое опт. решение $X_{опт}=(6,\ 2)$ Подставляя $x_1^*=6$ и $x_2^*=2$ в фк. Z, найдем $Z_{\max}=28$.

зм2. Точку $X_{\text{опт}}$ можно найти и без построения нормали N. Для этого пологаем в целевой фк. $Z=a$ и прямую $4x_1+2x_2=a$ перемещаем прл-но самой себе до возможной крайней точки $X_{\text{опт}}$.

п9. Решить графически задачу ЛП (см. п13, п16): $\max Z = 2x_1 + 4x_2$ при условиях $3x_1 + 2x_2 \geq 11$, $-2x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 - 3x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Р. В первом этапе построим ОДР как и в предыдущей задаче. В результате получим неорг. муг-ю обл., показанную на рис.6. На втором этапе решения при прл-ом перемещении линии уровня устанавливаем, что такое перемещение можно производить неогр-но, т.е. $Z_{\max} \to \infty$. В таком случае говорят, что задача ЛП не имеет решения из-за неогр-ти целевой фк. Заметим, что если при тех же исходных данных задачи требовалось бы найти $\min Z = 2x_1 + 4x_2$, то получили бы опт. решение задачи в точке A(3, 1).

п10. Решить графически задачу ЛП, заданную в канонической форме:

$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \qquad (\max)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \;-x_2 \;+3x_3 -18x_4 \;+2x_5 \;= -4 \\ 2x_1 \;-x_2 \;+4x_3 -21x_4 \;+4x_5 \;= 22 \\ 3x_1 -2x_2 +8x_3 -43x_4 +11x_5 = 38 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Р. Прежде всего перейдем от канонической к стандартной модели (как это делали в **п** 2.), исключив базисные пер. тогда вместо ур-й получим систему нерав-в. Одновременно базисные пер. исключаем и из целевой фк, записав ее в виде ур-ия $Z - 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0$ и включив в число огр-й. Преобразования коэф-ов огр-й осуществляем на табл.6 методом Жордана-Гаусса

Таблица 6

N итераций	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	в	Σ
Исх. система	0	$\boxed{1}$	–1	3	–18	2	–4	–17
	0	2	–1	4	–21	4	22	10
	0	3	–2	8	–43	11	38	15
	1	–2	1	–1	3	–4	0	–2
I	0	1	–1	3	–18	2	–4	–17
	0	0	①	–2	15	0	30	44
	0	0	1	–1	11	5	50	66
	1	0	–1	5	–33	0	–8	–36
II	0	1	0	1	–3	2	26	27
	0	0	1	–2	15	0	30	44
	0	0	0	$\boxed{1}$	–4	5	20	22
	1	0	0	3	–18	0	22	8
III	0	①	0	0	1	–3	6	5
	0	0	①	0	7	10	70	88
	0	0	0	①	–4	5	20	22
	1	0	0	0	–6	–15	–38	–58

Из III итерации табл. 6 получим экв. задачу ① – ③ к исходной

$$x_j \geq 0,\, j=\overline{1,5} \qquad\qquad Z = 6x_4 + 15x_5 - 38(\max) \qquad \textcircled{2}$$

$$\left.\begin{array}{llr} x_1 & +x_4-3x_5 & =6 \\ \quad x_2 & +7x_4+10x_5 & =70 \\ \qquad x_3 & -4x_4+5x_5 & =20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{array}\right\} \textcircled{1} \left.\begin{array}{r} x_4 - 3x_5 \leq 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20 \end{array}\right\} \textcircled{3}$$

Теперь задачу ②, ③ решаем как в **п8**, т. е. построим ОДР и нормаль № (2, 5) к линиям уровня $6x_4 + 15x_5 - 38 = Z$ при $Z = -38$. Перемещая эту прямую параллельно самой себе находим точку $X_{\text{опт}}$, к-ой ств-ет $Z = Z_{\max}$ (рис. 7). Для нахождения крд-т точки $X_{\text{опт}}$ решаем систему $\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$. В результате получим $X_{\text{опт}} = \left(2, \frac{28}{5}\right)$. Подставляя $x_4^* = 2$ и $x_5^* = \frac{28}{5}$ в фк. Z из ② находим $Z_{\max} = 58$. Из ① вычисляем $x_1 = \frac{104}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тогда исходная задача имеет решение $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right) = \left(\frac{104}{2}, 0, 0, 2, \frac{28}{5}\right)$ и здесь

$$z_{\max} = 2 \cdot \frac{104}{5} - 0 + 0 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{28}{5} = 58.$$

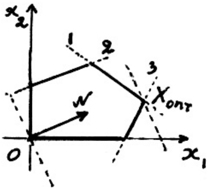


Рис. 5

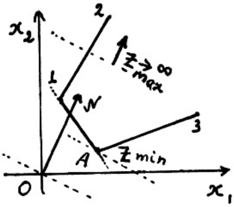


Рис. 6

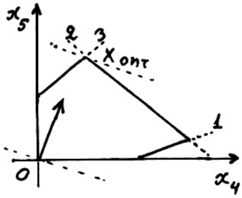


Рис. 7

пII. Решить графически задачу ЛП, заданную в общей форме (см. **п1.**)

$$\min Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{lr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 & \leq 4 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \qquad (3)$$

Р. Прежде всего из общей формы переходим к канонической, путем введения балансовых пер-ых $(x_5,\ x_6,\ x_7)$, включая целевую фк. в число огр-й в виде условий $(2')$ **п1.**

Далее исключаем произвольные пер. x_3, x_4 по табл. 1. методом Жордана-Гаусса.

После II итерации из 4-й и 1-й строки табл.1 получим:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 6-5x_1-3x_2-x_6 \\ x_4 &= -14+13x_1+10x_2+3x_6. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Остальные ур. и фк. Z не зависят от пер-ых x_3 и x_4. Для графического решения задачи осуществляем еще III итерацию табл.1, включив пер-ю x_6 в базис, тогда вместо Z и (4) получим

$$\min Z = -7x_1+9x_2-2 \tag{$1'$}$$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 2+x_1-3x_2 \\ x_3 &= \frac{2}{3}-x_1+\frac{4}{3}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{$4'$}$$

при этом должно выполняться условие: $x_3 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$. Для этого, полученные из (4'), нерав-ва

$$\left.\begin{aligned} -x_1+3x_2 &\le 2 \\ x_1-\frac{4}{3}x_2 &\le \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1+3x_2 &\le 2 \\ 3x_1-4x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(i=1) \\ &(i=2) \end{aligned}$$

исследуем вместе с остальными огр-ми, к-ые получаем из III итерации табл.1

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,\ x_7 \ge 0 \quad \max Z' = -\min Z = 7x_1-9x_2+2 \qquad ②$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+\frac{13}{3}x_2 \qquad +x_6 \qquad = \frac{16}{3} \\ 6x_1-\frac{20}{3}x_2-x_5 \qquad = \frac{4}{3} \\ -x_1+3x_2 \qquad\quad +x_7 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_6 = \frac{16}{3}-4x_1-\frac{13}{3}x_2 \\ x_5 = -\frac{4}{3}+6x_1-\frac{20}{3}x_2 \\ x_7 = 10+x_1-3x_2 \end{array}\right\} ① \left.\begin{array}{l} 4x_1+\frac{13}{3}x_2 \le \frac{16}{3} \\ 6x_1-\frac{20}{3}x_2 \ge \frac{4}{3} \\ -x_1+3x_2 \le 10 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} 12x_1+13x_2 \le 16 \\ 9x_1-10x_2 \ge 2 \\ -x_1+3x_2 \le 10 \end{array}\right\} ③ \quad \begin{array}{l} (i=3) \\ (i=4) \\ (i=5) \end{array}$$

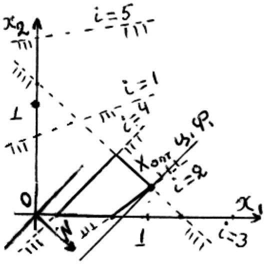


Рис. 8

Построим ОДР системы нерав-в $i=\overline{1,5}$ на рис. 8, откуда видно, что огр-я $i=5$ и $i=1$ оказываются лишними. В той же системе крд. строим нормаль N к линиям уровня $7x-9x_2+2=Z$ при $Z=$ 2. Перемещая эту пм. прл-но самой себе в направлении N, находим $X_{опт}$, решив систему ур-й граничных прямых $i=3$ и $i=2: 12x_1+13x_2=16$

и $3x_1 - 4x_2 = 2,$ откуда $x_1 = \frac{30}{29},\ x_2 = \frac{8}{29}.$ Тогда, используя ($4'$) и ① , получим $x_4 = \frac{64}{29},\ x_3 = 0,\ x_6 = 0,\ x_5 = \frac{88}{29},\ x_7 = \frac{296}{29}.$ Итак, $\max Z' = 7\cdot\frac{30}{29} - 9\cdot\frac{8}{29} +$ $+2 = \frac{196}{29},$ отсюда $\min Z = -\frac{196}{29}$ при $X_{опт} = \left(x_1,\ x_2,\ x_3\ x_{4,}\ x_5,\ x_6,\ x_7\right) = \left(\frac{30}{29},\ \frac{8}{29},\ 0,\ \frac{64}{29},\ \frac{88}{29},\ 0,\ \frac{296}{29}\right)$ (см. **п14**).

зм3. Если условие $n - m = 2$ не выполняется, то задачу ЛП графическим методом решать не можем. Есть и второй графический способ решения (см. [17]). задач ЛП с помощью совместного построения огр-й и целевой фк. в $(m+1)$ – мерном пр-ве, н-р, в трехмерном при $m = 2$ и n>2.

Рас-им задачу ЛП в канонической форме

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \text{(min)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

Обз-им вектор – столбцы огр-й через $P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = \overline{1,n}$ и $P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Отсюда, присоединив вектор $C = \left(c_1, ..., c_n\right)$, получим $P_j^1 = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \\ cj \end{pmatrix}, j = \overline{1,n}$ и

$P^1{}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \alpha \end{pmatrix}$, где α – любое число.

Пусть C – выпуклый конус в $(m+1)$ – мерном пр-ве. Прямую в этом пр-ве обз-им через B, первые m компоненты к-ой равны $b_1, b_2, \ldots, b_m$, а последняя $P_0^1 = \left(b_1, ..., b_m, \alpha\right)$. Задача состоит в отыскании наинизшей точки пм-й B, принадлежащей C, т. е. такой точки B, лежащей в конусе C, $(m+1)$-я крд-та к-ой мнм-на, иначе найти $\min \alpha$.

Метод выч-й состоит в сд-ем. Допустим, что из векторов P_1^1, P_2^1, ..., P_n^1 первые m векторов P_1^1, P_2^1, ..., P_m^1 линейно незв-ы и m-мерный конус Д, порождаемый этими векторами, содержит точку пм-й В. Это допущение равносильно утв-ю, что m векторов яв-ся базисом нек-го плана исследуемой задачи. Такими векторами могут быть как заданные, так и искусственные. Гиперплоскость (гиперпл.), содержащая Д, делит остающиеся векторы $P_j^1\left(j=\overline{m+1,n}\right)$ на две группы. Одна из этих групп состоит из тех векторов, к-ые расположены по ту же сторону гиперпл-ти, что и плж. направление $(m+1)$-й крд-ой оси. Вторая группа содержит все векторы, лежащие ниже гиперпл-ти. Любой из них можно соединить с гиперпл-ю, содержащей Д, отрезком, прл-ым $(m+1)$-й крд-ой оси.

Пусть $P^1{}_k$ – вектор, к-му отвечает нб-й из таких отрезков. Это ств-ет выбору вектора, для к-го $z_k-c_k=\max\limits_j\left(z_j-c_j\right)>0$. Вектор P_k^1 и опр-ная подсистема из m-1 векторов P_1^1, P_2^1, ..., P_m^1 обладают тем св-ом, что образуемый ими m-мерный конус содержит точку пм-й В, причем эта точка расположена ниже пересечения Д с В. Т.о., исключенный вектор заменяется вектором P_k^1, и процесс продолжается до получения опт-го плана. Поясним сказанное на сд-ем примере при $m=2$ и $n=4$.

пIIа. $\min Z=5x_1+3x_2+4x_3+6x_4$

$$\left.\begin{aligned}x_1+3x_2+5x_3=6x_4&=3\\6x_1+4x_2+2x_3+x_4&=2\end{aligned}\right\},\quad x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

Р. Имеем $P_1^1=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}$, $P_2^1=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$, $P_3^1=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$, $P_4^1=\begin{pmatrix}6\\1\\6\end{pmatrix}$, $P_0^1=\begin{pmatrix}3\\2\\\alpha\end{pmatrix}$. Изб-им их на рис. 8а. Поскольку пм. В пересекает конус С, задача обладает планами. Векторы P_1^1 и P_4^1 лин. незв-ы, т. к. из $\alpha_1P_1^1+\alpha_2P_4^1=0\Rightarrow\alpha_1=0,\ \alpha_2=0.$ Тогда вектор P_0 можно выразить плж-ой комбинацией P_1 и P_4, к-ых берем в качестве первого базиса и опр-ем, двумерный конус Д, образованный векторами P_1^1 и P_4^1 (рис. 8б). Точка P_2^1, лежащая ниже гиперпл-ти, содержащей Д, отстоит от нее на расстоянии z_2-c_2. Точка P_3^1 расположена также ниже этой гиперпл-ти и отстоит от нее на расстоянии z_3-c_3. Поскольку $z_2-c_2=-3>-4=z_3-c_3$, то в базис следует ввести вектор P_2. Из рис. 8б видно, что P_0 можно выразить плж-ой комбинацией векторов P_2 и P_4 и нельзя выразить плж. комбинацией P_2 и P_1, т.к. P_0 не содержится в конусе, образованного векторами P_1 и P_2. Сд-но, вводя в базис P_2 и исключая из него вектор P_4, получим новый базис, состоящий из P_2 и P_4. Проведя для базиса $(P_2,\ P_4)$ аналогичные исследования, введем в него вектор P_3 и исключим вектор P_4. Этот последний базис $(P_2,\ P_3)$ ств-ет опт. плану, найдем его:

$$P_2x_2 + P_3x_3 = P_0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{7},\ x_3 = \frac{3}{7},\ \text{т.е. } x^0 = \left(0,\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7}\right),\ \text{к-му}$$

ств-ет $Z_{\min} = \frac{18}{7}$.

Заметим, что за первоначальный базис можно было взять сразу векторы $(P_2,\ P_3)$, т.к. они лин. незв-ы и P_0 содержится в конусе, образованного векторами P_2, и P_3, а точки P_2' и P_3' лежат ниже конуса C. Тогда решение задачи получили бы сразу.

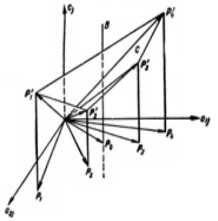


Рис. 8а

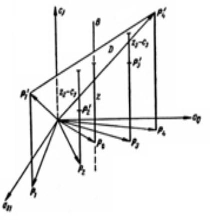


Рис. 8б

Отметим также, что при решении задачи на max нх-мо найти наивысшей точки пм-й B, принадлежащей C, т.е. найти maxα.

Решение этого же примера симплекс-методом приведено на табл. 6а, выбрав ключевой столбец $\max\left(Z_j - C_j\right) = \begin{Bmatrix} -3 \\ 7 \end{Bmatrix} = -21$ и ключевую строку

$$\theta_l = \min_j \frac{x_j}{x_{ij}} = \min\left\{\frac{3}{3}, \frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2}$$ с ключевым эл-ом $\boxed{4}$.

Таблица 6а

i	C	Базис	A_0	5	3	4	6	Σ
				A_1	A_2	A_3	A_4	
1	–	–	3	1	3	5	6	18
2	–	–	2	6	$\boxed{4}$	2	1	15
m+1			0	–5	–3	–4	–6	–18
m+2			5	7	7	7	7	33
1	–	–	$^3/_2$	$^{-7}/_2$	0	$\boxed{^7/_2}$	$^{21}/_4$	$^{27}/_4$
2	3	A_2	½	$^3/_2$	1	½	¼	$^{15}/_4$
m+1			$^3/_2$	$^{-1}/_2$	0	$^{-5}/_2$	$^{-21}/_4$	$^{-27}/_4$
m+2			$^3/_2$	$^{-7}/_2$	0	$^7/_2$	$^{21}/_4$	$^{27}/_4$
1	4	A_3	$^3/_7$	–1	0	1	$^3/_2$	$^{27}/_{14}$
2	3	A_2	$^2/_7$	2	1	0	$^{-1}/_2$	$^{39}/_{14}$
m+1			$^{18}/_7$	–3	0	0	$^{-3}/_2$	$^{-27}/_{14}$
m+2			0	0	0	0	0	0

Из табл. 6а имеем $X^0 = \left(0,\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ 0\right),\ Z_{\min} = \frac{18}{7}$

5^0. **Симплексный метод. Демонстрационные примеры.** Симплексный метод яв-ся основным методом решения модели задач ЛП. Его наз-ют также методом последовательного улучшения плана. Рас-им задачу для max Z и изложим выше приведенные теории в виде случаев, удобных для практического использования.

Пусть Х-некоторый опорный план задачи ЛП (9)-(11) с базисом $Б_X$ и пусть заполнена таблица после ч-й итерации, тогда возможные в свою очередь четыре случая:

А. Все оценки $Z_j - C_j \geq 0$; тогда опорный план x_r полученный после четвертой итерации, является решением задачи. Здесь в свою возможны три случая:

Аа. если среди оценок опт-го плана нулевые только оценки, ств-ие базисным вектором, то опт. план $X_{опт}$ единственный;

Аб. если же нулевые оценки ств-ей вектору не входящему в базис, то опт. план $X_{0пт}$ не единственный. Дсв-но, пусть некоторому A_{m+1}, не входящему в базис, ств-ет оценка $Z_{m+1} - C_{m+1}$=0. Включим этот вектор в базис и по $\theta_{0,\text{m+1}}$, какой-то вектор исключим из базиса. В результате получим новый опорный план, к-му ств-ет то те значение лин-ой фк, что и в первоначальном опт. плане, т.е. лин. фк-я достигает оптимума в двух угловых точках мгр-ка решений, но тогда по **т1** она достигает его в любой точке явй-ся выпуклой линией комбинацией этих угловых точек. Т. о., в этом случае задача ЛП обладает беск мн-ом опт-ых планов. Такой случай получил название альтернативного оптимума. Общее решение получим по формуле $X_{опт} = tX'_{опт} +$ $+\left(-t\right)X''_{опт}$, где $0 \leq t \leq 1$, $x^{'}_{опт}$, $x^{'}_{опт}$ – крайние точки обл. решений;

Ав. если обл. неогр-на и среди мн-ва опт-ых решений только одно совпадает с вершиной обл., скажем $x^{'}_{опт}$. Тогда на «опт-ой» граничной прямой находим еще одно опт. решение $x''_{опт}$ и общее решение опр-ем по фм-е $x_{опт} = (1-t)x^{'}_{опт} + tx''_{опт}$, где $0 \leq t \leq \infty$.

Б. Если для нек-го $Z_J - C_J < 0$ все эл. $x_{ij} < 0,$; то лин. форма задачи не огр-на т.е $Z_{\max} = \infty$...

В. Если для нек-ой строки i все эл. $x_{iJ} \leq 0$ и, $b_i > 0$, то задача несовместна, т.е не имеет решения. Н-р ур. $-2_{x_1} - x_2 - 0 \cdot x_3 = 3$ несовместно, т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Тогда система огр-й, в к-ой входит это ур. несовместна, сд-но, задача ЛП не имеет решения.

Г. Если в каждом j-м столбце, для к-го $Z_j - C_j < 0$, имеется хотя бы один эл. $x_{ij} > 0$, то в базис вводится вектор $A_к$ при min $\min_j(Z_j - C_j) = Z_к - C_к$; если при этом мнм-ых оценок несколько, то в базис прежде всего включают вектор, к-му ств-ет max C_j; А из базиса исключается вектор A_l при

$\min \frac{x_i}{x_{ij}} = \theta_l$ (параметры A_k, A_l, x_i, $x_{ij;}$ удобно на табл. обз-ть ств-но, через x_k, x_l, $\mathrm{b_i}$, $\mathrm{a_{ij}}$; аналогично обз-им и др. параметры, н-р $x_i' = x_{i0}' = b_i',$; $z_i - c_i = x_{m+1}i = a_{m+1}{}'$ и. т. д.) В этом случае находим новый опорный план X_{r+1} для к-го $\max Z(X_{r+1}) > \max Z(X_r)$, с помощью преобразования (прб.) каждого эл-та табл. по фм-ам:

$$\left.\begin{aligned} x_{ij}' &= x_{ij} - \frac{x_{li}}{x_{lk}} x_{ik},\ i \neq l \\ x_{li}^{'} &= \frac{x_{li}}{x_{lk}},\ i = l \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где $x_i' = x_{i0}'$, $z_0' = x_{m+1,0}'$, $z_j' - c_j = x_{m+1,i}'$,

Прб-ия, осуществляемые фм-ми (31), экв-ны прб-ям по методу Жордана-Гаусса, где за ключевой эл-т принимается хек.

зм4. При решении задачи ЛП по min Z опорный план X_r является решением, если все $Z_j - C_j \le 0$. Ключевой столбец набирается по фм. $\max\limits_j \left(Z_j - C_j\right) > 0$. Остальные процедуры симплексной итерации осуществляется как по max Z случаев А, Б, В, Г.

Приведем демонстрационные примеры, пологая, что $x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right)$, если нет специальных оговорок отс-но их.

п12. Решить симплекс методом задачу ЛП, заданную в стандартной форме

$$Z = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3\left(\max\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\le 54 \\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\le 63 \\ x_2 \qquad\quad &\le 5 \end{aligned}\right\}$$

Р. Введем дополнительные пер. $y_j \ge 0,\ i = \overline{1,3}$ и получим

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 + y_1 = 54 \\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 + y_2 = 63 \\ x_2 + y_3 = 5 \end{cases}$$

$Z = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3$, ее запишем в виде ур. $Z - 9x_1 - 14x_2 - 5x_3 + 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 = 0$. Все ур-ия записываем в табл. 7. Строка $m+1$ наз. индексной строкой. Из индексной строки по фм. (30): $\min\limits_j\left(Z_j - C_j\right) = \min\{-9, -14, -5\} = -14$ выбираем к-й $(k = 2)$ столбец, к-ый наз. ключевым столбцом. Из ключевого столбца по фм. (29): $\theta_l = \min\limits_i \frac{x_i}{x_{ij}} =$ $= \min\left\{\frac{54}{4}, \frac{63}{5}, \frac{5}{1}\right\} = 5$ выбираем l – ю$(l = 3)$ строку, к-ая наз. ключевой строкой. Их обводим тонкими линиями. Эл-т, находящийся на пересечении ключевого столбца и ключевой строки наз. ключевым эл-ом. Если ключевой эл $a_{lk} = 1$, то при преобразовании табл. 7 ключевая строка переписывается без изменения. Если же $a_{lk} \neq 1$, то все эл-ты ключевой строки делим на a_{lk}. Затем все эл. ключевого столбца (кроме a_{lk}) обращаем в нули методом Жордана–Гаусса. Итерацию продолжаем до тех пор, пока не будет все $Z_j - C_j \geq 0$.

Таблица 7

i	C	Базис	b	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\sum$
1	0	y_1	54	9	4	4	1	0	0	72
2	0	y_2	63	9	5	5	0	1	0	83
3	0	y_3	5	0	1	0	0	0	1	7
m+1		z_0	0	-9	-14	-5	0	0	0	-28
1	0	y_1	34	9	0	4	1	0	-4	44
2	0	y_2	38	9	0	5	0	1	-5	48
3	14	x_2	5	0	1	0	0	0	1	7
m+1		z_1	70	-9	0	-5	0	0	14	70
1	9	x_1	$^{34}/_9$	1	0	$^{4}/_9$	0	0	$^{-4}/_9$	$^{44}/_9$
2	0	y_2	4	0	0	1	-1	1	-1	4
3	14	x_2	5	0	1	0	0	0	1	7
m+1		z_2	104	0	0	-1	1	0	10	114
1	9	x_1	2	1	0	0	$^{5}/_9$	$^{-4}/_9$	0	$^{28}/_9$
2	5	x_3	4	0	0	1	-1	1	-1	4
3	14	x_2	5	0	1	0	0	0	1	7
m+1		z_3	108	0	0	0	0	1	9	118

Из табл. 7 при каждой итерации получаем: $Z_1 = 14 \cdot x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 14 \cdot 5 = 70$, $Z_2 = 9x_1 + 14x_2 + 0 \cdot y_2 = 9 \cdot \frac{34}{9} + 14 \cdot 5 = 104$, $Z_3 = Z_{\max} = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 9 \cdot 2 + 14 \cdot 5 +$ $+ 5 \cdot 4 = 108$, $X_{опт} = (2,\ 5,\ 4)$, к-ые записаны в ств-их клетках табл. 7.

п13. Решить симплекс методом задачу (при $Z_{\max} = \infty$) ЛП, заданную в **п9**.

$$\text{Р. } \max Z = 2x_1 + 4x_2 \quad \left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 11 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right. \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} &\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ &3x_1 + 2x_2 - y_1 = 11 \\ &-2x_1 + x_2 + y_2 = 2 \\ &x_1 - 3x_2 + y_3 = 0 \\ &z - 2x_1 - 4x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Записывая исходные данные на табл. 8 и преобразуя их методом Жордана-Гаусса, получим сд. решение задачи.

Таблица 8

i	c	Базис	$в$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Σ
1	0	y_1	11	3	2	–1	0	0	15
2	0	y_2	2	–2	1	0	1	0	2
3	0	y_3	0	1	–3	0	0	1	–1
m+1		Z_0	0	–2	–4	0	0	0	–6
1	0	y_1	7	7	0	–1	–2	0	11
2	4	x_2	2	–2	1	0	1	0	2
3	0	y_3	6	–5	0	0	3	1	5
m+1		Z_1	8	–10	0	0	4	0	2
1	2	x_1	1	1	0	$^{-1}/_7$	$^{-2}/_7$	0	$^{11}/_7$
2	4	x_2	4	0	1	$^{-2}/_7$	$^{3}/_7$	0	$^{36}/_7$
3	0	y_3	11	0	0	$^{-5}/_7$	$^{11}/_7$	1	$^{90}/_7$
m+1		Z_2	18	0	0	$^{-10}/_7$	$^{8}/_7$	0	$^{124}/_7$

Из табл. 8 имеем, что $Z_j - C_j = -\dfrac{10}{7} < 0$ и все эл. j-го столбца $x_{ij} < 0$, тогда согласно случая Б получаем $\max Z = \infty$, $x_{\text{опт}} = (\infty, \infty)$ (см. рис. 6).

зм4а. В табл. 8 пологаем, что $y_1 = 11$ как и для остальных базисных пер. ($y_2 = 2, y_3 = 0$). Такое «нарушение» исправится в ходе итерационного процесса симплекс-метода за счет коэф. $a_{13} = -1$ при y_1.

п14. Решить симплекс-методом задачу ЛП, заданную в п1 общей форме (см. также **п11**).

Р. Преобразуем огр-ия введением балансовых пер-ых (x_5, x_6, x_7), включая целевую фк. в состав огр-й. Для приведения произвольных пер. x_3, x_4 к условиям неотц-ти исключаем их по табл. 1. Из результатов III итерации табл. 1, реализовав симплексную итерацию по max Z на табл. 9, получим решение задачи.

$$\min Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_7 = 4 \\ Z + 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{табл.1}]{}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,\ x_7 \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} -x_1 + & 3x_2 & +x_4 & & & & = \ 2 \\ x_1 - & 4/3\,x_2 & +x_3 & & & & = 2/3 \\ 4x_1 + & 13/3\,x_2 & & & +x_6 & & =16/3 \\ 6x_1 - & 20/3x_2 & & -x_5 & & & = 4/3 \\ -x_1 + & 3x_2 & & & & +x_7 & = \ 10 \\ 1\ \ +7x_1 & -9x_2 & & & & & = -2 \end{array}\right\} \qquad (32)$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,7} \qquad (32a)$$

$$\min Z = -7x_1 + 9x_2 - 2 \qquad (32б)$$

Из (32б) получим:

$$\max Z = -\min Z = 7x_2 - 9x_2 + 2 \qquad (32в)$$

На табл. 9 получено решение задачи (32), (32а), (32в) с умн-ем последней строки (32) на –1.

Таблица 9

i	c	Базис	b	7	–9	0	0	0	0	0	Σ
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
1	0	x_4	2	–1	3	0	1	0	0	0	5
2	0	x_3	$^{2}/_{3}$	1	$^{-4}/_{3}$	1	0	0	0	0	$^{4}/_{3}$
3	0	x_6	$^{16/}{}_{3}$	4	$^{13}/_{3}$	0	0	0	1	0	$^{44}/_{3}$
4	0	x_5	$^{4}/_{3}$	6	$^{-20}/_{3}$	0	0	–1	0	0	$^{-1}/_{3}$
5	0	x_7	10	–1	3	0	0	0	0	1	13
m+1	0	z_0	2	–7	9	0	0	0	0	0	4
1	0	x_4	$^{20}/_{9}$	0	$^{17}/_{9}$	0	1	$^{-1}/_{6}$	0	0	$^{89}/_{18}$
2	0	x_3	$^{4}/_{9}$	0	$^{-2}/_{9}$	1	0	$^{1}/_{6}$	0	0	$^{25}/_{18}$
3	0	x_6	$^{40}/_{9}$	0	$^{79}/_{9}$	0	0	$^{2}/_{3}$	1	0	$^{134}/_{9}$
4	7	x_1	$^{2}/_{9}$	1	$^{-10}/_{9}$	0	0	$^{-1}/_{6}$	0	0	$^{-1}/_{18}$
5	0	x_7	$^{92}/_{9}$	0	$^{17}/_{9}$	0	0	$^{-1}/_{6}$	0	1	$^{233}/_{18}$
m+1		z_1	$^{32}/_{9}$	0	$^{11}/_{9}$	0	0	$^{-7}/_{6}$	0	0	$^{65}/_{18}$
1	0	x_4	$^{8}/_{3}$	0	$^{5}/_{3}$	1	1	0	0	0	$^{19}/_{3}$
2	0	x_5	$^{8}/_{3}$	0	$^{-4}/_{3}$	6	0	1	0	0	$^{25}/_{3}$
3	0	x_6	$^{8}/_{3}$	0	$^{29}/_{3}$	–4	0	0	1	0	$^{28}/_{3}$
4	7	x_1	$^{2}/_{3}$	1	$^{-4}/_{3}$	1	0	0	0	0	$^{4}/_{3}$
5	0	x_7	$^{32}/_{3}$	0	$^{5}/_{3}$	1	0	0	0	1	$^{43}/_{3}$
m+1		z_2	$^{20}/_{3}$	0	$^{-1}/_{3}$	7	0	0	0	0	$^{40}/_{3}$
1	0	x_4	$^{64}/_{29}$	0	0	$^{49}/_{29}$	1	0	$^{-5}/_{29}$	0	$^{137}/_{29}$
2	0	x_5	$^{88}/_{29}$	0	0	$^{158}/_{29}$	0	1	$^{4}/_{29}$	0	$^{279}/_{29}$
3	–9	x_2	$^{8}/_{29}$	0	1	$^{-12}/_{29}$	0	0	$^{3}/_{29}$	0	$^{28}/_{29}$
4	7	x_1	$^{30}/_{29}$	1	0	$^{13}/_{29}$	0	0	$^{4}/_{29}$	0	$^{76}/_{29}$
5	0	x_7	$^{296}/_{29}$	0	0	$^{48}/_{29}$	0	0	$^{-5}/_{29}$	1	$^{369}/_{29}$
m+1		z_3	$^{196}/_{29}$	0	0	$^{199}/_{29}$	0	0	$^{1}/_{29}$	0	$^{396}/_{29}$

Т. о. $\max Z' = \dfrac{196}{29}$, тогда $\min Z = -\dfrac{196}{29}$, $X_{опт} = \left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, x_7\right) = \left(\dfrac{30}{29},\ \dfrac{8}{29},\ 0,\ \dfrac{64}{29},\ \dfrac{88}{29},\ 0,\ \dfrac{296}{29}\right)$(см. **п11**). Опт. план единственный в силу $Z_3' - C_3' = x_{m+1,3} = \dfrac{199}{29} \neq 0$, $Z_6' - C_6' = X_{m+1,6} = \dfrac{1}{29} \neq 0$ (см. вариант Аа).

Теперь эту же задачу решим по *min* Z на симплексной табл. 10, т. е. задачу (32), (32а), (32б). Здесь опорный план X_r яв-ся решением задачи, если все $Z_j - C_j \leq 0$. А ключевой столбец выбирается по фм. $\max\limits_j \left(Z_j - C_j\right) > 0$. Остальные процедуры симплексной итерации осуществляются как по $\max \mathrm{Z}$.

Таблица 10

i	C	Базис	b								$\sum$
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
1	0	x_4	2	–1	3	0	1	0	0	0	5
2	0	x_3	$^{2}/_{3}$	1	$^{-4}/_{3}$	1	0	0	0	0	$^{4}/_{3}$
3	0	x_6	$^{16}/_{3}$	4	$^{13}/_{3}$	0	0	0	1	0	$^{44}/_{3}$
4	0	x_5	$^{4}/_{3}$	6	$^{-20}/_{3}$	0	0	–1	0	0	$^{-1}/_{3}$
5	0	x_7	10	–1	3	0	0	0	0	1	13
m+1		z_0	2	7	–9	0	0	0	0	0	–4
1	0	x_4	$^{20}/_{9}$	0	$^{17}/_{9}$	0	1	$^{-1}/_{6}$	0	0	$^{89}/_{18}$
2	0	x_3	$^{4}/_{9}$	0	$^{-2}/_{9}$	1	0	$^{1}/_{6}$	0	0	$^{25}/_{18}$
3	0	x_6	$^{40}/_{9}$	0	$^{79}/_{9}$	0	0	$^{2}/_{3}$	1	0	$^{134}/_{9}$
4	7	x_1	$^{2}/_{9}$	1	$^{-10}/_{9}$	0	0	$^{-1}/_{6}$	0	0	$^{-1}/_{18}$
5	0	x_7	$^{22}/_{9}$	0	$^{17}/_{9}$	0	0	$^{-1}/_{6}$	0	1	$^{233}/_{18}$
m+1		z_1	$^{-32}/_{9}$	0	$^{-11}/_{9}$	0	0	$^{7}/_{6}$	0	0	$^{-65}/_{18}$
1	0	x_4	$^{8}/_{3}$	0	$^{5}/_{3}$	1	1	0	0	0	$^{19}/_{3}$
2	0	x_5	$^{8}/_{3}$	0	$^{-4}/_{3}$	6	0	1	0	0	$^{25}/_{3}$
3	0	x_6	$^{8}/_{3}$	0	$^{29}/_{3}$	–4	0	0	1	0	$^{28}/_{3}$
4	7	x_1	$^{2}/_{3}$	1	$^{-4}/_{3}$	1	0	0	0	0	$^{4}/_{3}$
5	0	x_7	$^{32}/_{3}$	0	$^{5}/_{3}$	1	0	0	0	1	$^{43}/_{3}$
m+1		z_2	$^{-20}/_{3}$	0	$^{1}/_{3}$	–7	0	0	0	0	$^{-10}/_{3}$
1	0	x_4	$^{64}/_{29}$	0	0	$^{49}/_{29}$	1	0	$^{-5}/_{29}$	0	$^{137}/_{29}$
2	0	x_5	$^{88}/_{29}$	0	0	$^{158}/_{29}$	0	1	$^{4}/_{29}$	0	$^{279}/_{29}$
3	0	x_2	$^{8}/_{29}$	0	1	$^{-12}/_{29}$	0	0	$^{3}/_{29}$	0	$^{28}/_{29}$
4	7	x_1	$^{30}/_{29}$	1	0	$^{13}/_{29}$	0	0	$^{4}/_{29}$	0	$^{76}/_{29}$
5	0	x_7	$^{296}/_{29}$	0	0	$^{49}/_{29}$	0	0	$^{-5}/_{29}$	1	$^{369}/_{29}$
m+1		z_3	$^{-196}/_{29}$	0	0	$^{199}/_{29}$	0	0	$^{-1}/_{29}$	0	$^{-396}/_{29}$

Как следовало ожидать получили тот же результат:

$$X_{опт} = \left(\frac{30}{29}, \frac{8}{29}, 0, \frac{64}{29}, 0, \frac{296}{29}\right), \text{ откуда } \min Z = -7 \cdot \frac{30}{29} + 9 \cdot \frac{8}{29} - 2 = -\frac{196}{29}.$$

п15. Решить графически и симплекс методом задачу ЛП, заданную в канонической форме

$$\max Z = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \ (X_{опт} \text{ единственный}) \qquad (33а)$$

$$\min Z = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \ (X_{опт} \text{ не единственный}) \qquad (33б)$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 37 \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11 \\ 3x_2 + 4x_2 - x_7 = 19 \end{array}\right\} \qquad (33в)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,7} \qquad (33г)$$

Р. Аналогичную задачу по $\max Z$ решили в п. 2, 10 графическим способом по табл. 2, 6. В данной задаче базисные пер. x_3, x_4, x_5 можно исключить из целевой фк. по табл. 11 одной итерацией (что равносильно трем итерациям табл. 2), вычитая три первые строки с индексной строки, где целевая фк. записана в виде ур-я: $Z - x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 88$. В результате придем к задаче, содержащей только две пер. x_1 и x_2

Таблица 11

i	C	Базис	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Σ
1	-1	x_3	2	-2	1	1	0	0	0	0	2
2	-1	x_4	37	-1	5	0	1	0	0	0	42
3	-1	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
4	0	x_6	11	3	-4	0	0	0	1	0	11
5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	-1	25
m+1		Z_0	88	-1	3	1	1	1	0	0	93
1	0	x_3	2	-2	1	1	0	0	0	0	2
2	0	x_4	37	-1	5	0	1	0	0	0	42
3	0	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
4	0	x_6	11	3	-4	0	0	0	1	0	11
5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	-1	25
m+1		Z_3	0	-3	-4	0	0	0	0	0	-7

Из табл. 11, отбрасывая базисные пер. $x_j \left(j = \overline{3,7}\right)$, получим задачу, экв-ую к задаче (33а)-(33г):

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2, \qquad (34а)$$

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 . \qquad (34б)$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 37, \\ 5x_1 + x_2 \leq 49, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19. \end{array}\right\} \qquad (34в)$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \qquad (34г)$$

Построим ОДР системы нерав-в (34в) и получим выпуклый муг-к (рис. 9). В этой же системе крд. построим нормаль $\bar{C} = (3,\ 4)$ к линиям уровня $3x_1 + 4x_2 = Z$ при $\mathrm{Z} = 0$. Перемещая эту пм. прл-но самой себе в направлении вектора $\overline{C}$ до крайней точки ОДР, получим точку $X_{\text{опт}}$, к-ой ств-ет $Z_{\max} = Z(X_{\text{опт}})$. Для нахождения крд-т точки $X_{\text{опт}}$, совместно решаем систему ур-й граничных пм.: $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 = 37 \\ 5x_1 + x_2 = 49 \end{cases}$ Откуда получим $x_1 = 8,\ x_2 = 9.$

Подставив их в систему (33в), находим остальные крд. точки $x_{\text{опт}} : x_3 = 9,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 23,\ x_7 = 41.$ Итак, $x_{\text{опт}} = (8,\ 9,\ 9,\ 0,\ 0,\ 23,\ 41)$, к-ой ств-ет $Z_{\max} = 8 - 3 \cdot 9 - 9 + 88 = 60$ или по (34а) получим $Z_{\max} = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 = 60.$ Здесь $x_{\text{опт}}$ единственный (рис. 9).

Для получения $\min Z$ прямую $3x_1 + 4x_2 = Z$ можно перемещать параллельно самой себе в направлении $\overline{C}^{1'} = -\overline{C} = (-3, -4)$ до крайних точек А и Е (рис. 9) и найти $x'_{\text{опт}}$ и $x''_{\text{опт}}$. Крд-ы их находим, решив системы $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 19 \\ -2x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$ откуда $x_1 = 1, x_2 = 4.$ Тогда из (33в) получим $x_3 = 0,$ $x_4 = 18,\ x_5 = 40,\ x_6 = 24,\ x_7 = 0,$ т.е. $x'_{\text{опт}} = (1,\ 4,\ 0,\ 18,\ 40,\ 24,\ 0)$. Аналогично из $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 19 \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases}$ и (33в) имеем: $x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 11,\ x_4 = 37,\quad x_5 = 23,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,$ т. е. $x''_{\text{опт}} = (5,\ 1,\ 11,\ 37,\ 23,\ 0,\ 0)$. Тогда общее решение имеет вид:

$$x_{\text{опт}} = tx'_{\text{опт}} + (1-t)x''_{\text{опт}} = t\,(1, 4, 0, 18, 40, 24, 0)+(1-t)(5, 1, 11, 37, 23, 0, 0)$$

$$\text{или } x_{\text{опт}} = (5-4t,\ 1+3t,\ 11-11t,\ 37-19t,\ 23-17t,\ 24t,\ 0),\quad 0 \le t \le 1.$$

Придавая параметру t любые числовые значения от 0 до 1, будем получать различные опт. решения задачи, при любом из к-ых

$Z_{\min}$= 19 Н-р, при $t = 0$ $x_{\text{опт}} =$ (5, 1, 11, 37, 23, 0, 0), к-ой ств-ет

$Z_{\min} = 5 - 3 \cdot 1 - 11 - 37 - 23 + 88 = 19$ или по (34б) получим

$Z_{\min} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 19$. Т.о. $x_{\text{опт}}$ имеет беск. мн. решений (рис. 9).

Теперь задачу решим симплекс методом по $\max Z$ на табл. 12, включив целевую фк. в число огр-й в виде ур-я: $Z - x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 88.$ Причем в силу случая Аа симплекс метода оценки $Z_j - c_{j,}$ ств-ие базисным векторам, должны равняться нулю, т.е. нх-мо исключить коэф-ты базисных пер-х из индексной строки. Для этого в качестве исходной информации табл. 12 используем результаты табл. 11, т. е. решим задачу (34а), (33в).

Из табл. 12 получаем $X_{\text{опт}} = (8,\ 9,\ 9,\ 0,\ 0,\ 23,\ 41)$, к-ой ств-ет по (34а) $Z_{\max} = 3\cdot 8 + 4\cdot 9 = 60$ или по (33а). $Z_{\max} = 8 - 3\cdot 9 - 9 + 88 = 60.$ Причем нулевые оценки опт-го плана ств-ет только базисным векторам, тогда в силу случая Аа план $X_{\text{опт}}$ единственный.

зм5. Если же попытаемся решать задачу (33а), (33в), то на табл. 13а после первой же итерации оценки $Z_j - C_j$ окажутся неотц-ми, сд-но, процесс симплекс метода продолжать не можем, хотя и опт-ое решение не получено, т. к. не все оценки, ств-ие базисным векторам, не равны нулю, т. е. не выполняется условие случая Аа. В таких ситуациях в индексную строку вводим еще строку $m+2$, где в ств-их столбцах пишем суммы коэф-ов огр-й этих столбцов с обратным знаком (см. табл. 13). Дальнейший процесс не отличается от процесса симплекс метода. Лишь ключевой столбец выбирается по строкам $m+1$ и $m+2$: $\min\limits_j\left(Z_j - C_j\right) = \min\begin{Bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -8 \end{Bmatrix} = Z_1 - C_1$ и т. д. Причем в конце решение все эл. строки $m+2$ окажутся равными нулю, а нулевые строки табл. можно вычеркнуть.

Таблица 12

	i	C	Базис	b	3	4	0	0	0	0	0	$\sum$
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	1	0	x_3	2	– 2	1	1	0	0	0	0	2
	2	0	x_4	37	– 1	5	0	1	0	0	0	42
	3	0	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
	4	0	x_6	11	3	– 4	0	0	0	1	0	11
	5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	– 1	25
	$m+1$	$Z_j - C_j$		0	– 3	– 4	0	0	0	0	0	– 7
I	1	4	x_2	2	–2	1	1	0	0	0	0	2
	2	0	x_4	27	9	0	–5	1	0	0	0	32
	3	0	x_5	47	7	0	–1	0	1	0	0	54
	4	0	x_6	19	–5	0	4	0	0	1	0	19
	5	0	x_7	11	11	0	–4	0	0	0	–1	17
	$m+1$	$Z_i - C_i$		8	–11	0	4	0	0	0	0	1
II	1	4	x_2	4	0	1	$^{3}/_{11}$	0	0	0	$^{-2}/_{11}$	$^{56}/_{11}$
	2	0	x_4	18	0	0	$^{-19}/_{11}$	1	0	0	$^{9}/_{11}$	$^{199}/_{11}$
	3	0	x_5	40	0	0	$^{17}/_{11}$	0	1	0	$^{7}/_{11}$	$^{475}/_{11}$
	4	0	x_6	24	0	0	$^{24}/_{11}$	0	0	1	$^{-5}/_{11}$	$^{294}/_{11}$
	5	3	x_1	1	1	0	$^{-4}/_{11}$	0	0	0	$^{-1}/_{11}$	$^{17}/_{11}$
	$m+1$	$Z_j - C_j$		19	0	0	0	0	0	0	–1	18

Продолжение

	i	*C*	Базис	*b*	3	4	0	0	0	0	0	∑
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
		4	x_2	8	0	1	$^{-1}/_{9}$	$^{2}/_{9}$	0	0	0	$^{82}/_{9}$
		0	x_7	22	0	0	$^{-19}/_{9}$	$^{11}/_{9}$	0	0	1	$^{199}/_{9}$
III		0	x_5	26	0	0	$^{26}/_{9}$	$^{-7}/_{9}$	1	0	0	$^{262}/_{9}$
		0	x_6	34	0	0	$^{11}/_{9}$	$^{5}/_{9}$	0	1	0	$^{331}/_{9}$
		3	x_1	3	1	0	$^{-5}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	0	0	0	$^{32}/_{9}$
	m+1	$Z_j - C_j$		41	0	0	$^{-19}/_{9}$	$^{11}/_{9}$	0	0	0	$^{361}/_{9}$
	1	4	x_2	9	0	1	0	$^{5}/_{26}$	$^{1}/_{26}$	0	0	$^{133}/_{13}$
	2	0	x_7	41	0	0	0	$^{17}/_{26}$	$^{19}/_{26}$	0	1	$^{564}/_{13}$
IV	3	0	x_3	9	0	0	1	$^{-7}/_{26}$	$^{9}/_{26}$	0	0	$^{131}/_{13}$
	4	0	x_6	23	0	0	0	$^{23}/_{26}$	$^{-11}/_{26}$	1	0	$^{318}/_{13}$
	5	3	x_1	8	1	0	0	$^{-1}/_{26}$	$^{5}/_{26}$	0	0	$^{119}/_{13}$
	m+1	$Z_j - C_j$		60	0	0	0	$^{17}/_{26}$	$^{19}/_{26}$	0	0	$^{798}/_{13}$

Из табл. 13 получаем: $X_{опт} = \left(8,\ 9,\ 0,\ 0,\ 23,\ 41\right)$, $Z_{\max} = -8 - 3 \cdot 9 - -9 + 88 = 60$, к-ое содержится в клетках b и m+1 и последней итерации табл. 13. Причем в силу случая Аа план $X_{опт}$ единственный.

Таблица 13а

i	*C*	Базис	*в*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	∑
1	–1	x_3	2	–2	1	1	0	0	0	0	2
2	–1	x_4	37	–1	5	0	1	0	0	0	42
3	–1	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
4	0	x_6	11	$\boxed{3}$	–4	0	0	0	1	0	11
5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	–1	25
m+1	$Z_j - C_j$		88	–1	3	1	1	1	0	0	93
1	–1		$^{28}/_{3}$	0	$^{-5}/_{3}$	1	0	0	$^{2}/_{3}$	0	$^{28}/_{3}$
2	–1	x_4	$^{122}/_{3}$	0	$^{11}/_{3}$	0	1	0	$^{1}/_{3}$	0	$^{137}/_{3}$
3	–1	x_5	$^{92}/_{3}$	0	$^{23}/_{3}$	0	0	1	$^{-5}/_{3}$	0	$^{113}/_{3}$
4	1	x_1	$^{11}/_{3}$	1	$^{-4}/_{3}$	0	0	0	$^{1}/_{3}$	0	$^{11}/_{3}$
5	0	x_7	8	0	8	0	0	0	-1	-1	14
m+1	$Z_j - C_j$		$^{275}/_{3}$	0	$^{5}/_{3}$	1	1	1	$^{1}/_{3}$	0	$^{290}/_{3}$

Таблица 13

i	C	Базис	*b*	1	–3	–1	–1	–1	0	0	Σ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	–1	x_3	2	–2	1	1	0	0	0	0	2
2	–1	x_4	37	–1	5	0	1	0	0	0	42
3	–1	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
4	0	x_6	11	3	–4	0	0	0	1	0	11
5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	–1	25
m+1	$Z_j - C_j$		88	–1	3	1	1	1	0	0	93
m+2			–118	–8	–7	–1	–1	–1	–1	–1	–136

Продолжение

i	C	Базис	*b*	1	–3	–1	–1	–1	0	0	Σ
				x₁	x₂	x₃	x₄	x₅	x₆	x₇	
1	–1	x_3	$^{28}/_3$	0	$^{-5}/_3$	1	0	0	$^{2}/_3$	0	$^{28}/_3$
2	–1	x_4	$^{122}/_3$	0	$^{11}/_3$	0	1	0	$^{1}/_3$	0	$^{137}/_3$
3	–1	x_5	$^{92}/_3$	0	$^{23}/_3$	0	0	1	$^{-5}/_3$	0	$^{113}/_3$
4	1	X_1	$^{11}/_3$	1	$^{-4}/_3$	0	0	0	$^{1}/_3$	0	$^{11}/_3$
5	0	x_7	8	0	8	0	0	0	–1	–1	14
m+1	$Z_j - C_j$		$^{275}/_3$	0	$^{5}/_3$	1	1	1	$^{1}/_3$	0	$^{290}/_3$
m+2			$^{-266}/_3$	0	$^{-53}/_{13}$	–1	–1	–1	$^{5}/_3$	1	$^{-320}/_3$
1	–1	x_3	11	0	0	1	0	0	$^{11}/_{24}$	$^{-5}/_{24}$	$^{49}/_4$
2	–1	x_4	37	0	0	0	1	0	$^{19}/_{24}$	$^{11}/_{24}$	$^{157}/_4$
3	–1	x_5	23	0	0	0	0	1	$^{-17}/_{24}$	$^{23}/_{24}$	$^{97}/_4$
4	1	x_1	5	1	0	0	0	0	$^{1}/_6$	$^{-1}/_6$	6
5	–3	x_2	1	0	1	0	0	0	$^{-1}/_8$	$^{-1}/_8$	$^{7}/_4$
m+1	$Z_j - C_j$		90	0	0	1	1	1	$^{13}/_{24}$	$^{5}/_{24}$	$^{375}/_4$
m+2			–71	0	0	–1	–1	–1	$^{-13}/_{24}$	$^{-29}/_{24}$	$^{-303}/_4$
1	–1	x_3	16	0	0	1	0	$^{5}/_{23}$	$^{7}/_{23}$	0	$^{403}/_{23}$
2	–1	x_4	26	0	0	0	1	$^{-11}/_{23}$	$^{26}/_{23}$	0	$^{636}/_{23}$
3	0	x_7	24	0	0	0	0	$^{24}/_{23}$	$^{-17}/_{23}$	1	$^{582}/_{23}$
4	1	x_1	9	1	0	0	0	$^{4}/_{23}$	$^{1}/_{23}$	0	$^{235}/_{23}$
5	–3	x_2	4	0	1	0	0	$^{3}/_{23}$	$^{-5}/_{23}$	0	$^{113}/_{23}$
m+1	$Z_j - C_j$		85	0	0	1	1	$^{18}/_{23}$	$^{16}/_{23}$	0	$^{2035}/_{23}$
m+2			–42	0	0	–1	–1	$^{6}/_{23}$	$^{-33}/_{23}$	0	$^{-1039}/_{23}$
1	-1	x_3	9	0	0	1	$^{-7}/_{26}$	$^{9}/_{26}$	0	0	$^{131}/_{13}$
2	0	x_6	23	0	0	0	$^{23}/_{26}$	$^{-11}/_{26}$	1	0	$^{318}/_{13}$
3	0	x_7	41	0	0	0	$^{17}/_{26}$	$^{19}/_{26}$	0	1	$^{564}/_{13}$
4	1	x_1	8	1	0	0	$^{-1}/_{26}$	$^{5}/_{26}$	0	0	$^{119}/_{13}$
5	-3	x_2	9	0	1	0	$^{5}/_{26}$	$^{1}/_{26}$	0	0	$^{133}/_{13}$
m+1	$Z_j - C_j$		69	0	0	1	$^{5}/_{13}$	$^{14}/_{13}$	0	0	$^{929}/_{13}$
m+2			–9	0	0	–1	$^{7}/_{26}$	$^{-9}/_{26}$	0	0	$^{-131}/_{13}$
1	–1	x_3	9	0	0	1	$^{-7}/_{26}$	$^{9}/_{26}$	0	0	$^{131}/_{13}$
2	0	x_6	23	0	0	0	$^{23}/_{26}$	$^{-11}/_{26}$	1	0	$^{318}/_{13}$
3	0	x_7	41	0	0	0	$^{17}/_{26}$	$^{19}/_{26}$	0	1	$^{564}/_{13}$
4	1	x_1	8	1	0	0	$^{-1}/_{26}$	$^{5}/_{26}$	0	0	$^{119}/_{13}$
5	–3	x_2	9	0	1	0	$^{5}/_{26}$	$^{1}/_{26}$	0	0	$^{133}/_{13}$
m+1	$Z_j - C_j$		60	0	0	0	$^{17}/_{26}$	$^{19}/_{26}$	0	0	$^{798}/_{13}$
m+2			0	0	0	0	0	0	0	0	0

Наконец, решим задачу (33б), (33в) на табл. 14, когда $X_{опт}$ не единственный. Здесь ключевой столбец выбирает по фор-е: $\min_j\left(Z_j - C_j\right) =$ $= \max\left\{-1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\right\} = 3 = Z_2 - C_2$ и т.д. так поступаем в каждой итерации, пока не получим $\mathrm{Z_j - C_j \le 0}$ для всех j.

Таблица 14

i	C	Базис	b	1	–3	–1	–1	–1	0	0	$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	–1	x_3	2	–2	$\boxed{1}$	1	0	0	0	0	2
2	–1	x_4	37	–1	5	0	1	0	0	0	42
3	–1	x_5	49	5	1	0	0	1	0	0	56
4	0	x_6	11	3	–4	0	0	0	1	0	11
5	0	x_7	19	3	4	0	0	0	0	–1	25
$m+1$	$Z_j - C_j$		88	–1	3	1	1	1	0	0	93
1	–3	x_2	2	–2	1	1	0	0	0	0	2
2	–1	x_4	27	9	0	–5	1	0	0	0	32
3	–1	x_5	47	7	0	–1	0	1	0	0	54
4	0	x_6	19	–5	0	4	0	0	1	0	19
5	0	x_7	11	$\boxed{11}$	0	–4	0	0	0	–1	17
$m+1$	$Z_j - C_j$		82	5	0	–2	1	1	0	0	87
1	–3	x_2	4	0	1	${}^{3}/_{11}$	0	0	0	${}^{-2}/_{11}$	${}^{56}/_{11}$
2	–1	x_4	18	0	0	${}^{-19}/_{11}$	1	0	0	${}^{9}/_{11}$	${}^{199}/_{11}$
3	–1	x_5	40	0	0	${}^{17}/_{11}$	0	$\boxed{1}$	0	${}^{7}/_{11}$	${}^{475}/_{11}$
4	0	x_6	24	0	0	${}^{24}/_{11}$	0	0	1	${}^{-5}/_{11}$	${}^{294}/_{11}$
5	1	x_1	1	1	0	${}^{-4}/_{11}$	0	0	0	${}^{-1}/_{11}$	${}^{17}/_{11}$
$m+1$	$Z_j - C_j$		77	0	0	${}^{-2}/_{11}$	1	1	0	${}^{5}/_{11}$	${}^{872}/_{11}$
1	–3	x_2	4	0	1	${}^{3}/_{11}$	0	0	0	${}^{-2}/_{11}$	${}^{56}/_{11}$
2	–1	x_4	18	0	0	${}^{-19}/_{11}$	$\boxed{1}$	0	0	${}^{9}/_{11}$	${}^{199}/_{11}$
3	–1	x_5	40	0	0	${}^{17}/_{11}$	0	1	0	${}^{7}/_{11}$	${}^{475}/_{11}$
4	0	x_6	24	0	0	${}^{24}/_{11}$	0	0	1	${}^{-5}/_{11}$	${}^{294}/_{11}$
5	1	x_1	1	1	0	${}^{-4}/_{11}$	0	0	0	${}^{-1}/_{11}$	${}^{17}/_{11}$
$m+1$	$Z_j - C_j$		37	0	0	${}^{-19}/_{11}$	1	0	0	${}^{-2}/_{11}$	${}^{397}/_{11}$
1	–3	x_2	4	0	1	${}^{3}/_{11}$	0	0	0	${}^{-2}/_{11}$	${}^{56}/_{11}$
2	–1	x_4	18	0	0	${}^{-19}/_{11}$	1	0	0	${}^{9}/_{11}$	${}^{199}/_{11}$
3	–1	x_5	40	0	0	${}^{17}/_{11}$	0	1	0	${}^{7}/_{11}$	${}^{475}/_{11}$
4	0	x_6	24	0	0	${}^{24}/_{11}$	0	0	1	${}^{-5}/_{11}$	${}^{294}/_{11}$
5	1	x_1	1	1	0	${}^{-4}/_{11}$	0	0	0	${}^{-1}/_{11}$	${}^{17}/_{11}$
$m+1$	$Z_j - C_j$		19	0	0	0	0	0	0	–1	18

Из табл. 14 имеем: $X^1_{\text{опт}} = (1,4,0,18,40,24,0), Z_{\min} = 19$. Причем в силу случая Аб $X'_{\text{опт}}$ не единственный и $X''_{\text{опт}}$ получено на табл. 14а

Таблица 14а

i	C	Базис	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\sum$
1	–3	x_2	4	0	1	$^3/_{11}$	0	0	0	$^{-2}/_{11}$	$^{56}/_{11}$
2	–1	x_4	18	0	0	$^{-19}/_{11}$	1	0	0	$^9/_{11}$	$^{199}/_{11}$
3	–1	x_5	40	0	0	$^{17}/_{11}$	0	1	0	$^7/_{11}$	$^{475}/_{11}$
4	0	x_6	24	0	0	$^{24}/_{11}$	0	0	1	$^{-5}/_{11}$	$^{294}/_{11}$
5	1	x_1	1	1	0	$^{-4}/_{11}$	0	0	0	$^{-1}/_{11}$	$^{17}/_{11}$
$m+1$	$Z_j - C_j$		19	0	0	0	0	0	0	–1	18
	–3	x_2	1	0	1	0	0	0	$^{-1}/_8$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$
	–1	x_4	37	0	0	0	1	0	$^{19}/_{24}$	$^{11}/_{24}$	$^{157}/_4$
	–1	x_5	23	0	0	0	0	1	$^{-17}/_{24}$	$^{23}/_{24}$	$^{97}/_4$
	–1	x_3	11	0	0	1	0	0	$^{11}/_{24}$	$^{-5}/_{24}$	$^{49}/_4$
	1	x_1	5	1	0	0	0	0	$^1/_6$	$^{-1}/_6$	6
$m+1$	$Z_j - C_j$		19	0	0	0	0	0	0	–1	18

Из табл. 14а получим $x''_{\text{опт}} = (5,\ 1,\ 11,\ 37,\ 23,\ 0,\ 0)$, $z_{\min} = 19$. Тогда $x_{\text{опт}} = tx'_{\text{опт}} + (1-t)x''_{\text{опт}} = t(1,\ 4,\ 0,\ 18,\ 40,\ 24,\ 0) + (1-t)(5,\ 1,\ 11,\ 37,\ 23,\ 0,\ 0)$ или $x_{\text{опт}} = (5-4t,\ 1+3t,\ 11-11t,\ 37-19t,\ 23-17t,\ 24t,\ 0)$, $0 \le t \le 1$. Придавая параметру t любые числовые значения от 0 до 1, получим различные опт. решения, при любом из к-ых $z_{\min} = 19$.

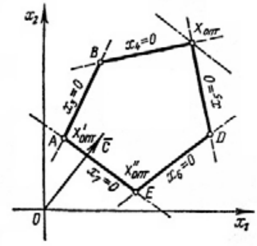


Рис. 9

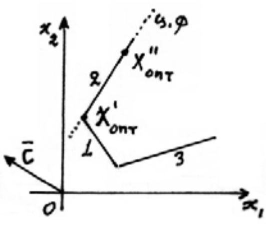


Рис. 10

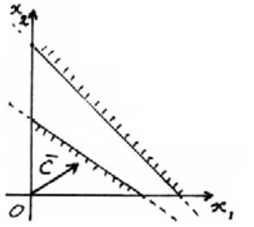


Рис. 11

п16. Решить графически и симплекс методом задачу ЛП (см. **п9**, **п13**):

$$z = -2x_1 + x_2 (\max)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\ge 11 \\ -2x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 - 3x_2 &\le 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

или в кононич. форме

$$z = -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 (\max)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 11 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}$$

Р. При целевой фк. $\max Z = 2x_1 + 4x_2$ эта задача была решена графически и симплекс методом в п9 и п13. А теперь опт. значение целевой фк. совпадает $2^м$– огр-ем, как показано на рис. 10. Поэтому крд-ы точки $x'_{опт}$ находим из $\left.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}\right| \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4$, отсюда $x_3 = 0,\ x_4 = 0$. Подставив $x_1 = 1,\ x_2 = 4$ в $3^е$–ур-е находим $x_5 = 11$. Тогда $x'_{опт} = (1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 11)$. Для нахождения $x''_{опт}$ все три огр. умн-им на какое-то число $\alpha(н-р, \alpha = 7)$, тогда $x''_{опт} = (7, 28, 0, 0, 77)$. Откуда, в силу случая Ав, получим общее решение $x_{опт} = (1-t)x'_{опт} + tx''_{опт} = (1-t)(1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 11) + t(7,\ 28,\ 0,\ 0,\ 77)$ или $x_{опт} = (1+6t,\ 4+24t,\ 0,\ 0,\ 11+66t),\ 0 \le t \le \infty$. $z_{\max} = z(x'_{опт}) = 2, z_{\max} = z(x''_{опт}) = 14$, т. е. $z(x''_{опт}) = 7z(x'_{опт})$. Сд-но, $z_{\max} = z(x) \to \infty$ при $t \to \infty$, что видно и из рис. 10.

Теперь задачу решим симплекс методом на табл. 15, привлекая строку $m+2$, как на табл. 13. Выбираем ключевой столбец $\min\limits_j (Z_j - C_j) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ и ключевую строку $\theta_1 = \min\limits_i \frac{x_i}{x_{ij}} = \min\left\{\frac{11}{2}, \frac{2}{1}\right\} = 2$, а ключевой эл-т обводим квадратом и получим $\boxed{1}$, затем используем метод Жордана-Гаусса и так продолжаем до получения $z_j - c_j \ge 0$ на m+1 строке и $z_j - c_j = 0$ на m+2 строке.

Из табл. 15 получим $x'_{опт} = (1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 11)$, $z_{\max} = z(x'_{опт}) = 2$. Из этой же табл. видно, что все эл. x_3-го столбца отц-ны $(x_{j3} < 0)$, тогда $z_{\max} = \infty$ в силу случая Б.

Кроме того нулевая оценка ств-ет вектору (x_3-го столбца), не входящему в базис, то опт. план не единственный согласно случая Аб. План $x''_{опт}$ можно найти, умн-ив на произвольное число α все три огр-ия последней итерации табл. 15. Н-р, для $\alpha = 7$ получим $x''_{опт} = (7,\ 28,\ 0,\ 0,\ 77)$. При этом обл. неогр-на, а вершиной опт-ых решений совпадает только $x^1_{опт}$, тогда в силу случая Ab общее решение имеет вид

$$x_{опт} = (1-t)x'_{опт} + tx''_{опт} = (1-t)(1,\ \ 4,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 11) + t(7,\ \ 28,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 77) =$$

$$= (1+6t, 4+24t, 0, 0, 11+66t),\ 0 \le t \le \infty,$$

$$Z_{\max} = Z(x_{пт}) = -2(1+6t) + 4 + 24t = 2 + 12t \to \infty \text{ при } t \to \infty.$$

Таблица 15

i	C	Базис	b	-2	1	0	0	0	$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	x_3	11	3	2	–1	0	0	15
2	0	x_4	2	–2	$\boxed{1}$	0	1	0	2
3	0	x_5	0	1	–3	0	0	1	–1
$m+1$	Z_j-c_j		0	2	–1	0	0	0	1
$m+2$			–13	–2	0	1	–1	–1	–16
1	0	x_3	7	$\boxed{7}$	0	–1	–2	0	11
2	1	x_2	2	–2	1	0	1	0	2
3	0	x_5	6	–5	0	0	3	1	5
$m+1$	Z_j-c_j		2	0	0	0	1	0	3
$m+2$			–13	–2	0	1	–1	–1	–16
1	–2	x_1	1	1	0	$^{-1}/_7$	$^{-2}/_7$	0	$^{11}/_7$
2	1	x_2	4	0	1	$^{-2}/_7$	$^{3}/_7$	0	$^{36}/_7$
3	0	x_5	11	0	0	$^{-5}/_7$	$^{11}/_7$	$\boxed{1}$	$^{90}/_7$
$m+1$	Z_j-c_j		2	0	0	0	1	0	3
$m+2$			–11	0	0	$^{5}/_7$	$^{-11}/_7$	–1	$^{-90}/_7$
1	–2	x_1	1	1	0	$^{-1}/_7$	$^{-2}/_7$	0	$^{11}/_7$
2	1	x_2	4	0	1	$^{-2}/_7$	$^{3}/_7$	0	$^{36}/_7$
3	0	x_5	11	0	0	$^{-5}/_7$	$^{11}/_7$	1	$^{90}/_7$
$m+1$	Z_j-c_j		2	0	0	0	1	0	3
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0

п17. Графически и симплекс методом убедиться, что сд. задача не имеет решения: Найти $\max Z = 3x_1 + 2x_2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 6$, $x_1 + x_2 \ge 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Р. Построив огр-ия на рис. 11, убеждаемся, что ОДР пусто, т.е. задача не имеет решения.

Теперь убедимся в этом, используя симплекс метод. Вводив балансовые пер. x_3, x_4, задачу напишем на табл. 16 и реализуем симплекс метод.

Таблица 16

i	c	Базис	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum$
1	0	x_3	6	$\boxed{2}$	3	1	0	12
2	0	x_4	4	1	1	0	–1	5
$m+1$	Z_j-c_j		0	–3	–2	0	0	–5
$m+2$			–10	–3	–4	–1	1	–17

Продолжение

i	c	Базис	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum$
1		x_1	3	1	$^{3}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	0	6
2		x_4	1	0	$^{-1}/_{2}$	$^{-1}/_{2}$	$\boxed{-1}$	–1
$m+1$	$Z_j - c_j$		9	0	$^{5}/_{2}$	$^{3}/_{2}$	0	13
$m+2$			–1	0	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	1	1
1		x_1	3	1	$^{3}/_{2}$	$^{1}/_{2}$	0	6
2		x_4	1	0	$^{-1}/_{2}$	–12	–1	–1
$m+1$	$Z_j - c_j$		9	0	$^{5}/_{2}$	$^{3}/_{2}$	0	13
$m+2$			0	0	0	0	0	0

Из табл. 16 видно, что для $i = 2$ все $x_{ij} \le 0$ $\left(0 \cdot x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 1,\right.$ что невозможно при $x_j \ge 0,\ \ \left. j = \overline{1,4}\right)$, тогда в силу случая В задача не имеет решения.

зм6. При решении задач на $\max Z$ в табл. 13, 15, 16 на $m+2$ строке в ств-их столбцах написали суммы коэф-ов огр-ий этих столбцов с обратным знаком и пишем без обратного знака для решения задач на $\min Z$, т.к. ключевой столбец в этом случае выбирается по формуле $\max\limits_j \left(Z_j - c_j\right) = \max\limits_j \begin{Bmatrix} x_{m+1,j} \\ x_{m+2,j} \end{Bmatrix}$.

ЛЕКЦИЯ 10

3.4. МЕТОД ИСКУСТВЕННОГО БАЗИСА. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛП

В данной лекции изложим различные варианты усовершенствования и использования симплекс-метода. Это позволит выбирать подходящий вариант симплекс-метода при решении конкретных задач, учитывая их особенности.

1^0. Метод искусственного базиса и метод полного исключения. Как видели в 5^0:3.3 для решения задач ЛП симплекс-методом система огр-й должна иметь единичную матрицу. Так если задач ЛП задана в стандартной форме, то система огр-й $AX \leq A_0$ при $A_0 \geq 0$ легко приводится к системе рав-в, которая содержит единичную матрицу. Если задача задана в общей или канонической форме, то огр-ия можно привести к системе рав-в, содержащей единичную матрицу (см. п1,2 и табл.1,2 из 1^0:3.3), использовав метод Жордана-Гаусса. Дадим еще один метод для этой цели.

Найти min $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ при огр-ях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq о,\ j=\overline{1,n}.$$

где $b_i \geq 0$ и система огр-й не содержит единичной матрицы. Для получения единичной матрицы к каждому рав. прибавим по одной пер. $x_{n+i} \geq 0$ $(i=\overline{1,m})$, к-ые назовем искусственными, и рас-им расширенную задачу:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad +x_{n+2} \qquad = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad +x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j=\overline{1,n+m}.$$

Расширенную задачу иногда наз-ют М-задачей.

Вел. М предполагается дт-но большим плж. числом, если задача решается на отыскание мнм-го значения целевой фк, и дт-но малым отц. числом, если находится мкс-ое значение целевой фк. Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ (для удобства в симплексной табл. их по прежнему обз-им через $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$), ств-ие искусственным пер-ым, образуют искусственный базис.

Для отыскания опт. плана исходной задачи используют сд-ую

т1а. Если в опт. плане $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n,0,...,0)$ расширенной задачи искусственные пер. $x_{n+i}=0(i=\overline{1,m})$, то план $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ яв-ся опт. планом исходной задачи.

Д. Пусть план $\overline{X}$ – опт. план расширенной задачи, тогда план X – план первоначальной задачи, при этом $\overline{Z}(\overline{x}) = Z(x)$, т.к. план $\overline{X}$ от плана X отличается m последними компонентами, равными нулю.

Д-ем, что план X – опт. план исходной задачи. Допустим, что X не яв-ся опт. планом. Тогда сущ-ет такой опт. план $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, для к-го $Z(x^*) <$ $Z(x)$. Отсюда для вектора $\overline{X^*}=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,0,...,0)$, являющегося планом расширенной задачи, получаем $\overline{Z}\left(\overline{X}^*\right)=Z\left(x^*\right)<Z\left(x\right)=\overline{Z}\left(\overline{x}\right)$, т.е. $\overline{Z}\left(\overline{x^*}\right)<$ $\overline{Z}\left(\overline{x}\right)$. Т.о., план $\overline{x}$ расширенной задачи не яв-ся опт. планом, что противоречит условию теоремы■

зм1. Для отыскания опт. плана расширенной задачи применяется симплексный метод с составлением симплексных таблиц с добавлением m+2 строки (см. зм.5 из 5^0:3.3) для опр-ия вектора, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по (m+2)-й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания опт-го плана продолжают по (m+1)-й строке.

зм2. Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в к-ом каждое из искусственных пер. $x_{n+i}=0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она не совместна), то опт. решение расширенной задачи содержит по крайней мере одно $x_{n+i} > 0$.

п1. $Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4\ (\max)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,4}.$$

Р. Переходим к расширенной задаче:

$$\overline{Z}=5x_1+3x_2+4x_3-x_4-Mx_5-Mx_6(\max)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5 \qquad &=3 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4 \qquad +x_6 &=3 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,6}$$

Приравняя свободные пер. нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, получаем первоначальный опорный план $\overline{x_0}=(0,0,0,3,3)$. Составим симплексную табл.1, записывая на (m+1)-й строке ур. $Z-5x_1-3x_2-4x_3+x_4+0\cdot M+0\cdot M=0$, т.к. в опт. плане $x_5 = x_6 = 0$. А на (m+2)-й строке в ств-их столбцах напишем суммы коэф-ов огр-й этих столбцов с обратными знаками. И на табл.1 реализуем итерационный процесс симплексного метода, выбрав ключевого столбца по $\min\limits_{j}(Z_j - C_j) = \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ и ключевой строки по $\min\limits_{i} \dfrac{x_i}{x_{ij}} = \dfrac{3}{3} = 1$ и т.д.

Таблица 1

i	*C*	*Базис*	*b*	*5*	*3*	*4*	*-1*	*-M*	*-M*	$\sum$
				X$_1$	X$_2$	X$_3$	X$_4$	X$_5$	X$_6$	
1	–M	x$_5$	3	1	$\boxed{3}$	2	2	1	0	12
2	–M	x$_6$	3	2	2	1	1	0	1	10
m+1	Z_j-C_j		0	–5	–3	–4	1	0	0	–11
m+2			–6	–3	–5	–3	–3	–1	–1	–22
1	3	x$_2$	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	4
2	–M	x$_6$	1	$\boxed{4/3}$	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	2
m+1	$Z_j – C_j$		3	–4	0	-2	3	1	0	1
m+2			–1	–4/3	0	1/3	1/3	2/3	–1	–2
1	3	x$_2$	3/4	0	1	$\boxed{3/4}$	3/4	1/2	–1/4	7/2
2	5	x$_1$	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4	3/2
m+1	Z$_j$ – C$_j$		6	0	0	–3	2	–1	3	7
m+2			0	0	0	0	0	0	0	0
	4	x$_3$	1	0	4/3	1	1	2/3	–1/3	14/3
	5	x$_1$	1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3	8/3
m+1			9	0	4	0	5	1	2	21

Из табл.1 в четвертой итерации находим опт-ый план исходной задачи: x = (1,0,1,0), при этом плане Z_{max} (x) = 9. Причем в силу случая Аа из 5^0:3.3 опт. план X единственный.

зм3. На (m+2)-й строке в столбцах, ств-их искусственным пер-ым, можно писать нули, т.к. эти пер. обязательно исключаются из базиса (см. т1а). Тогда столбцы искусственных пер-ых можно вообще вычеркнуть из табл. Можно вычеркнуть также столбец пер-го, вошедшего в базис, если этот базис через несколько итераций не будет заменяться новым базисом другого столбца. Вычеркиваются и нулевые строки. Все это сущ-но сократит процесс выч-ия в табл.

зм4. Вектор-столбец A_j= (0,…,0,–1,0,…,0)не яв-ся вектором единичной матрицы и нельзя его вычеркнуть, т.к. он будет участвовать в дальнейших итерациях симплекс-метода. Нельзя вычеркнуть также столбцы $\{A_к\}$ единичной матрицы балансовых пер-ых $\{x_к\}$ пока они не окажутся базисными пер-ми, н-р, см. п14 из 5^0 : 3.3.

Метод искусственного базиса яв-ся простым и легко реализуемым вариантом симплексного метода, но при этом сущ-но возрастает число пер-ых. Поэтому часто используют и метод полного исключения пер-ых, с к-ым уже сталкивались при рас-нии п2 и табл. 2 из 1^0:3.3. Суть метода покажем на

п2.
$$Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \,(\max)$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}\,.$$

Р. Запишем условие задачи в табл. 2 и, используя метод полного исключения, включим в базис сначала вектор A_2, а затем векторы A_1 и A_4, т.к. этим векторам в целевой фк. ств-ют самые большие коэф. Ключевые эл. выбираем по $\min\limits_j \frac{x_i}{x_{ij}} = \Theta_{oj}$ $(j = 2,1,4)$ так, чтобы свободные члены были неотц-ми, т.е. $A_0 = b \geq 0$. Пер-ые x_2, x_1 и x_4, ств-ие векторам A_2, A_1 и A_4 исключаем и из целевой фк., включив ее в число огр-й в виде ур-я: $Z - 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$.

Таблица 2

i	*C*	*Базис*	*b*	*3*	*4*	*1*	*2*	*-1*	$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	–	–	5	1	$\boxed{2}$	–3	1	–5	1
2	–	–	8	2	3	–5	2	–7	3
3	–	–	6	3	1	–2	6	2	16
m+1			0	–3	–4	–1	–2	1	–9
I	4	x_2	5/2	1/2	1	–3/2	1/2	–5/2	1/2
	–	–	1/2	$\boxed{1/2}$	0	–1/2	1/2	1/2	3/2
	–	–	7/2	5/2	0	–1/2	11/2	9/2	31/2
m+1			10	-1	0	–7	0	–9	–7
II	4	x_2	2	0	1	–1	0	–3	–1
	3	x_1	1	1	0	–1	1	1	3
	–	–	1	0	0	2	$\boxed{3}$	2	8
m+1			11	0	0	–8	1	–8	–4
III	4	x_2	2	0	1	–1	0	–3	–1
	3	x_1	2/3	1	0	–5/3	0	1/3	1/3
	2	x_4	1/3	0	0	$\boxed{2/3}$	1	2/3	8/3
m+1			32/3	0	0	–26/3	0	–26/3	–20/3
IV	4	x_2	5/2	0	1	0	3/2	-2	3
	3	x_1	3/2	1	0	0	5/2	2	7
	1	x_3	1/2	0	0	1	3/2	1	4
m+1			15	0	0	0	13	0	28

После включения в базис пер-ых x_2, x_1, x_4 начинаем осуществлять процедуры симплекс-метода (см. III итерацию табл. 2) и продолжаем до получения решения $\text{X}_{опт}$ задачи.

Из табл. 2 видно, что оценка $\text{Z}_j - C_j = 0$ ств-ет вектору A_5, не входящему в базис, то в силу случая Аб план $\text{X}_{опт}$ – не единственный. Дсв-но, из табл. 2 имеем: $\text{X}'_{опт} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $\text{Z}'_{\max} = 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 15$. Теперь, начиная с III итерации табл. 2, составим табл. 2а, включив вектор A_5 в базис, и получим: $\text{X}''_{опт} = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$. Тогда общее решение имеет вид

$$\text{X}_{опт} = t(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) + (1-t)(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} + t, \frac{7}{2} - t, \frac{1}{2}t, 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t), 0 \le t \le 1.$$

Придавая периметру t любые числовые значения от 0 до 1, получим различные опт. решения задачи, при любым из к-ых $\text{Z}_{\max} = 15$. Н-р, при t=0 имеем $\text{X}_{опт} = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, к-ой ств-ет $\text{Z}_{\max} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 15$. Т.о. $x_{опт}$ имеет беск-ое мн. решений.

Таблица 2а

	i	*C*	*Базис*	*b*	*3*	*4*	*1*	*2*	*-1*	$\sum$
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
III	1	4	x_2	2	0	1	–1	0	–3	–1
	2	3	x_1	2/3	1	0	–5/3	0	1/3	1/3
	3	2	x_4	1/3	0	0	2/3	1	$\boxed{2/3}$	8/3
	m+1			32/3	0	0	–26/3	0	–26/3	–20/3
IV	1	4	x_2	7/2	0	1	2	9/2	0	11
	2	3	x_1	1/2	1	0	–2	–1/2	0	–1
	3	–1	x_5	1/2	0	0	1	3/2	1	4
	m+1			15	0	0	0	13	0	28

Для сравнения метода полного исключения с методом искусственного базиса п2 решим этим методом на табл. 3, учитывая зм3.

Р. Прежде всего переходим к расширенной задаче:

$$\overline{\text{Z}} = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - My_1 - My_2 - My_3 \left(\max\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 + y_1 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 + y_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + y_3 = 6 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right), \ y_к \ge 0 \ \left(K = \overline{1,3}\right).$$

Аналогично п1 заполним табл. 3 исходной информацией, учитывая зм3, и реализуем симплекс-метод.

Таблица 3

	i	*C*	*Базис*	*b*	*3*	*4*	*1*	*2*	*-1*	$\sum$
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	–M	y_1	5	1	2	–3	1	–5	1
	2	–M	y_2	8	2	3	–5	2	–7	3
	3	–M	y_3	6	3	1	–2	$\boxed{6}$	2	16
	m+1	$Z_j - C_j$		0	–3	–4	–1	–2	1	–9
	m+2			–19	–6	–6	10	–9	10	–20
I	1	–M	y_1	4	1/2	$\boxed{11/6}$	–8/3	0	–16/3	–5/3
	2	–M	y_2	6	1	8/3	–13/3	0	–23/3	–7/3
	3	2	x_4	1	1/2	1/6	–1/3	1	1/3	8/3
	m+1	$Z_j - C_j$		2	–2	–11/3	–5/3	0	5/3	–11/3
	m+2			–10	–3/2	–9/2	7	0	13	4
II	1	–M	y_1	24/11	3/11	1	–16/11	0	–32/11	–10/11
	2	–M	y_2	2/11	$\boxed{3/11}$	0	–5/11	0	1/11	1/11
	3	2	x_4	7/11	5/11	0	–1/11	1	9/11	31/11
	m+1	$Z_j - C_j$		10	–1	0	–7	0	–9	–7
	m+2			–2/11	–3/11	0	5/11	0	–1/11	–1/11
III	1	4	x_2	2	0	1	–1	0	-3	–1
	2	3	x_1	2/3	1	0	–5/3	0	1/3	1/3
	3	2	x_4	1/3	0	0	$\boxed{2/3}$	1	2/3	8/3
	m+1	$Z_j - C_j$		32/3	0	0	–26/3	0	–26/3	–20/3
	m+2									
IV	1	4	x_2	5/2	0	1	0	3/2	–2	3
	2	3	x_1	3/2	1	0	0	5/2	2	7
	3	1	x_3	1/2	0	0	1	3/2	1	4
	m+1	$Z_j - C_j$		15	0	0	0	13	0	28

Из табл. 3 видно, что план $X_{опт}$ не единственный в силу случая Аб и получаем: $X'_{опт} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Из III итерации табл. 3 составим табл. 3а, включив вектор A_5 в базис вместо A_4.

Таблица 3а

	1	4	x_2	2	0	1	–1	0	–3	–1
	2	3	x_1	2/3	1	0	–5/3	0	1/3	1/3
	3	2	x_4	1/3	0	0	2/3	1	$\boxed{2/3}$	8/3
	m+1	$Z_j - C_j$		32/3	0	0	–26/3	0	–26/3	–20/3
I	1	4	x_2	7/2	0	1	2	9/2	0	11
	2	3	x_1	1/2	1	0	–2	–1/2	0	–1
	3	–1	x_5	1/2	0	0	1	3/2	1	4
	m+1	$Z_j - C_j$		15	0	0	0	13	0	28

Из табл. 3а получим $X''_{\text{опт}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$, тогда общее решение имеет вид $X = t(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) + (1-t)(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} + t, \frac{7}{2} - t, \frac{1}{2}t, 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t)$, $0 \le t \le 1$ и $Z_{\max} = 15$ при любых $t \in [0,1]$.

Из табл. 2,2а и табл. 3,3а видно, что если реализовать метод искусственного базиса с учетом зм3, то сущ-но можно сократить объем выч-й. Однако для конкретных задач, в зв-ти от их структуры, более выгодным может оказаться метод полного исключения пер-ых.

п3. Найти min Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases} \qquad x_j \ge 0\ (j=\overline{1,3}).$$

Р. Вводив балансовые пер. x_4, x_5 и искусственную пер. y, задач напишем в виде min Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + My$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + y = 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0\ (j=\overline{1,5}),\ y \ge 0.$$

Учитывая зм4, 5 из 5^0:3.2 и зм3, 4 на табл. 4 реализуем симплекс метод

Таблица 4

i	*C*	*Базис*	*b*	*-1*	*-2*	*1*	*0*	*0*	$\sum$
				x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$	x$_5$	
1	0	x$_4$	6	–1	$\boxed{4}$	–2	1	0	8
2	0	x$_5$	6	1	1	2	0	–1	9
3	M	y	4	2	–1	2	0	0	7
m+1	$Z_j - C_j$		0	1	2	–1	0	0	2
m+2			16	2	4	2	1	–1	24
1	–2	x$_2$	3/2	–1/4	1	–1/2	1/4	0	2
2	0	x$_5$	9/2	5/4	0	5/2	–1/4	–1	7
3	M	y	11/2	$\boxed{7/4}$	0	3/2	1/4	0	9
m+1	$Z_j - C_j$		-3	3/2	0	0	–1/2	0	–2
m+2			10	3	0	4	0	–1	16
1	–2	x$_2$	16/7	0	1	–2/7	2/7	0	23/7
2	0	x$_5$	4/7	0	0	$\boxed{10/7}$	–3/7	–1	4/7
3	–1	x$_1$	22/7	1	0	6/7	1/7	0	36/7
m+1	$Z_j - C_j$		–54/7	0	0	–9/7	–5/7	0	–68/7
m+2			4/7	0	0	10/7	–3/7	–1	4/7
1	–2	x$_2$	12/5	0	1	0	1/5	–1/5	17/5
2	1	x$_3$	2/5	0	0	1	–3/10	–7/10	2/5
3	–1	x$_1$	14/5	1	0	0	2/5	3/5	24/5
m+1	$Z_j - C_j$		–36/5	0	0	0	–11/10	–9/10	46/5
m+2									

Из табл.4 видно, что план $X_{опт}$ единственный в силу случая Аа и имеем $X_{опт}=(\frac{14}{5},\frac{12}{5},\frac{2}{5},0,0)$, к-ой ств-ет $Z_{\min}=-\frac{36}{5}$.

п4. $\max Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \qquad x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,3}) \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 5, \end{cases}$$

Р. Переходим к расширенной задаче:

$$\max \ \overline{Z} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - My_1 - My_2 - My_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 \qquad\qquad =1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad +y_2 \qquad =2, \qquad x_j \geq 0\,(j=\overline{1,3}), \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \qquad +y_3 =5, \qquad y_k \geq 0 (k=\overline{1,3}). \end{cases}$$

Исходную информацию напишем в табл. 4а и реализуем итерации симплексного метода.

Таблица 4а

	i	C	Базис	b	2	-1	3	Σ
					x_1	x_2	x_3	
	1	–M	y_1	1	$\boxed{1}$	–2	1	1
	2	–M	y_2	2	1	1	1	5
	3	–M	y_3	5	3	–6	3	5
	m+1	$Z_j - C_j$		0	–2	1	–3	–4
	m+2			–8	–5	7	–4	–10
I	1	3	x_1	1	1	–2	1	1
	2	–M	y_2	1	0	$\boxed{3}$	0	4
	3	–M	y_3	2	0	0	0	2
	m+1	$Z_j - C_j$		2	0	–3	–1	–2
	m+2			–3	0	–3	1	–5
II	1	2	x_1	5/3	1	0	$\boxed{1}$	11/3
	2	–1	x_2	1/3	0	1	0	4/3
	3	–M	y_3	2	0	0	0	2
	m+1	$Z_j - C_j$		3	0	0	–1	2
	m+2			–2	0	0	1	–1
III	1	3	x_3	5/3	1	0	1	11/3
	2	–1	x_2	1/3	0	1	0	4/3
	3	–M	y_3	2	0	0	0	2
	m+1	$Z_j - C_j$		14/3	1	0	0	17/3
	m+2			–11/3	–1	0	0	–14/3

Из табл. 4а видно, что искусственная пер. y_3 не исключается из базиса (см. векторы A_1 и A_3 из итераций II, I) и $y_3 = 2$, тогда в силу зм2 задача не обладает планами (т.е. не совместна). Это видно и из 3-го огр-ия (0 = 2) II итерации, т.е. не выполняется m2 (Кронекора-Капелле) из 2^0: 3.2.

При реализации симплексного метода из симплексной табл. получаем и обратную матрицу коэф-ов огр-й исходной задачи, что аналогично решению матричного ур-ия (см. 4^0:3.2) методом Жордана-Гаусса, где вместо единичной матрицы получаем решение задачи, как в матричном ур. Демонстрируем это на сд-ем

п5. Найти $\min \mathrm{Z} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \quad +2x_5 \qquad = 7, \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad =12, \quad x_j \geq 0\ (j = \overline{1,6}) \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 \quad + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

Р. Исходный базис состоит из векторов A_1, A_4, A_6, к-му ств-ет план X=(x_1, x_4, x_6) = (7,12,10). Исходную информацию напишем на табл. 5 и, опр-ив ключевой эл. по фм-ам $\max\limits_j \left(\mathrm{Z}_j - C_j\right) = \mathrm{Z}_3 - C_3 = 3 > 0$,

$\min\limits_i \dfrac{x_i}{x_{ij}} = \left\{\dfrac{12}{4}, \dfrac{10}{3}\right\} = \dfrac{12}{4}$, реализуем итерационный процесс симплексного метода, написав $\{A_j\}$ вместо $\{x_j\}$ прежних табл.

Таблица 5

	i	*C*	*Базис*	*A_0=b*	*0*	*1*	*-3*	*0*	*2*	*0*	$\sum$
					A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
I	1	0	A_1	7	1	3	–1	0	2	0	12
	2	0	A_4	12	0	–2	$\boxed{4}$	1	0	0	15
	3	0	A_6	10	0	–4	3	0	8	1	18
	m+1			0	0	–1	3	0	–2	0	0
II	1	0	A_1	10	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	0	63/4
	2	–3	A_3	3	0	–1/2	1	1/4	0	0	15/4
	3	0	A_6	1	0	–5/2	0	–3/4	8	1	27/4
	m+1			–9	0	1/2	0	–3/4	–2	0	–45/4
III	1	1	A_2	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0	63/10
	2	–3	A_3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0	69/10
	3	0	A_6	11	1	0	0	–1/2	10	1	45/2
	m+1			–11	–1/5	0	0	–4/5	–12/5	0	–72/5

Из табл. 5 имеем: $X^0 = X_{опт} = (0,4,5,0,0,11)$, к-му ств-ет $Z_{\min} = -11$; в силу случая Аа план $X_{опт}$ единственный. Из этой же табл. получаем по I

$$B = (A_2A_3A_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и по III } B^{-1} = (A_1A_4A_6) = (x_1x_4x_6)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

где $BB^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $X^0 = B^{-1}b = (x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (4,5,11)$,

$C^0 = (c_2, c_3, c_6) = (1,-3,0)$, откуда $C^0X^0 = (1,-3,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = -11$.

Здесь указанные матрицы используем в теории двойственности, к изложению к-ой приступаем.

2^0. Понятие двойственности и классификация моделей двойственных задач ЛП. С каждой задачей ЛП тесно связана другая лин. задача, назм-ая двойственной. Первоначальная задача наз. исходной.

Связь исходной и двойственной (дв.) задач состоит в том, что коэф-ты C_j функции цели исходной задачи яв-ся свободными членами системы огр-й дв-ой задачи, свободные члены B_i системы огр-й исходной задачи служат коэф-ми функции цели дв-ой задачи, а матрица коэф-ов системы огр-й дв-ой задачи яв-ся транспонированной матрицей коэф-ов системы огр-й исходной задачи. Решение дв-ой задачи может быть получено из решения исходной и наоборот. Модели дв-ых задач ЛП может быть задана в одной из сд. форм (см. 1^0: 3.3).

Несимметричные задачи

Исходная (каноническая форма) задача	Двойственная задача
$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j (Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j)$	$g_{\min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i (g_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, j = \overline{1,m}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_i), j = \overline{1,n}$
$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$	y_i – произвольные

Симметричные задачи

Исходная (стандартная) задача

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \, (Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i), i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$$

Двойственная задача

$$g_{\min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \left(g_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j), j = \overline{1,n}$$

$$y_i \ge 0, j = \overline{1,m}$$

Общая форма модели (см. [45])

Исходная задача

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,l}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{l+1,m}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,s}$$

x_j – произвольные, $j = \overline{s+1,n}$

Двойственная задача

$$g_{\min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,l}$$

y_i – произвольные, $i = \overline{l+1,m}$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, j = \overline{1,s}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, j = \overline{s+1,n} \, .$$

п6. Построить дв. задачу к сд-ей, заданной в форме общей модели:

$$\min Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 \qquad -4x_5 \ge 8 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Р. Прежде всего нх-мо упорядочить запись исх. задачи. Т.к. целевая фк. мнмз-ся, то нерав-ва должны быть записаны с помощью знака «$\ge$»

$$\min Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_1) \;\; x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ (y_2) - 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge -4 \\ (y_3) \;\; x_1 \qquad\quad + 3x_3 \qquad -4x_5 \ge 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\max g = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1 \\ -2y_1 - 3y_2 \qquad = -2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1 \\ 3y_1 + y_2 \qquad\quad = -1 \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1 \end{array}\right\}$$

$y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_1$ – *произвольная*

Второе и четвертое огр-ия выражены в виде рав-в, т.к. ств-ие им пер. x_2 и x_4 не подчинены условиям неотц-ти. Условия неотц-ти в дв-ой задаче наложены только на пер. y_2 и y_3 им ств-ют в исх. задаче огр-ия в виде нерав-в.

п6а. Показать, что дв. задачи по отношению к полученной в задаче п6 будет совпадать с исходной.

п7. Построить дв. задачу к сд-ей, заданной в канонической форме:

$$\max Z = \quad -2x_2 \qquad + x_4 + 3x_5$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad + 3x_4 + x_5 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

Р. Дв. задачу можно построить двумя способами: I следуя общему правилу, II отбрасывая в первом и втором ур-ях базисные пер. x_1 и x_3. Результат будет одинаковым, дсв-но:

$$\text{I} \min g = 8y_1 + 6y_2, \qquad \left.\begin{aligned} y_1 \qquad &\geq 0 \\ -2y_1 + y_2 &\geq -2 \\ y_2 &\geq 0 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 - 2y_2 &\geq 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{II} \max Z = -2x_2 + x_4 + 3x_5 \qquad \left.\begin{aligned} -2x_2 + 3x_4 + x_5 &\leq 8 \\ x_2 + x_4 - 2x_5 &\leq 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$\min g = 8y_1 + 6y_2 \qquad \left.\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\geq -2 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 - 2y_2 &\geq 3 \end{aligned}\right\} \qquad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

3^0. Несимметричные двойственные задачи. Теорема двойственности. В несимметричных дв. задачах система огр-й исходной задачи задается в виде рав-в, а дв-ой – в виде нерав-в, причем в последней пер-ые могут быть и отц-ми. Для простоты док-в постановку задачи условимся записывать в матричной форме. Дополнительные сведения по матрицам см. 1^o – 5^o: 3.2, 2^o: 3.3.

Исходная задача. Найти вектор-столбец $X = (x_{1,} x_{2\ldots,} x_n)$, мнмз-щий лин. форму

$$Z = CX \tag{1}$$

при условиях

$$AX = b \tag{2}$$

и

$$X \geq 0 \tag{3}$$

При такой постановке задачи ЛП предполагается, что число строк m матрицы A меньше числа её столбцов n, т.е. m<n.

Дв. задача. Найти вектор-строку $У = (y_1, y_2,\ldots, y_m)$ мксз-щий лин. форму

$$g = Уb \tag{4}$$

при условии

$$УA \leq C, \tag{5}$$

где пер-ые могут быть и отц-ми. В обоих задачах $b = (b_1, b_2,\dots, b_m)$ – вектор-столбец, а С = $(c_1, c_2,\dots, c_n)$ – вектор-строка в исх. задаче и вектор-столбец в дв. задаче, А = (a_{ij}) – матрицы коэф-ов.

Нерав. (s) можно представить так: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ или $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \le c_i$,

где $A' = \left(a_{ji}\right)$ – транспонированная матрица к матрице А.

т1 (двойственности). Если из двух задач (исходной и дв-ой) одна обладает опт-ым планом, то и другая имеет решение, причем эксл. значения лин-ых форм равны, т.е.

$$\min Z = \max g$$

Если лин. форма одной из задач не огр-на (для исходной – снизу, для дв-ой – сверху), то др. задача не имеет ни одного плана.

Д. Пусть исх. задача имеет опт. план и симплекс-методом получили окончательный базис $(A_1\ A_2\dots\ A_m) = B$. Последняя симплексная табл. содержит векторы исходной системы $A_1A_2\dots A_m\dots A_{m+1}\dots A_n$, разложенные по векторам окончательного базиса (см. 3^0: 3.3), т.е. $A_j = Bx_j$. Обз-им через $\overline{X} = (x_1,\dots,x_{m,}x_{m+1,\dots,}x_n)$ матрицу, составленную из коэф-ов окончательной симплексной табл. Поскольку окончательный базис содержит первые m векторов, то

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 10\dots ox_{1,m+1\dots}x_{1n} \\ 01\dots ox_{2,m+1\dots}x_{2n} \\ 00\dots 1x_{m,m+1\dots}x_{mn} \end{pmatrix}$$

Опт. план совпадает с вектором $X^0 = B^{-1}b$, причем имеют место сд-ие стн-ия:

$$A = B\overline{X},\ B^{-1}A = \overline{X} \qquad (6)$$

$$b = BX^0,\ B^{-1}b = X^0 \qquad (7)$$

$$\min \mathrm{Z} = C^0 X^0 \qquad (8)$$

$$\mathrm{Z} = C^0 \overline{X} - C \le 0, \qquad (9)$$

где $C^0 = (c_1, c_2,\dots, c_m)$ – вектор-строка. Согласно (4) и результатам 3.3 $z = (c^0x_1 - c_1, c^0x_2 - c_2,\dots, c^0x_n - c_n) = (z_1 - c_1, z_2 - c_2,\dots, z_n - c_n)$ – вектор, компоненты к-го неплж-ны, поскольку они совпадают с вел-ми $z_j - c_j$, ств-ми опт-му плану. Здесь О яв-ся п-мерным нулевым вектором.

Пусть $У^0 = (y_1^0, y_2^0,\dots, y_m^0)$ опр-ся из стн-ия

$$У^0 = C^0 B^{-1}$$

Тогда согласно (6) и (9) имеем

$$У^0 A - C = C^0 B^{-1} A - C = C^0 \overline{X} - C \le O$$

или

$$У^0 A \le C.$$

Т.о., вектор У^0 яв-ся планом дв-ой задачи, поскольку он уд-ет ее условиям (5). При этом ств. значение лин. формы дв-ой задачи (4) равно У^0*b*. Учитывая, далее, стн-ия (7) и (8), получаем

$$У^0 b = C^0 B^{-1} b = C^0 X^0 = \min \mathrm{Z} \tag{10}$$

Сд-но, значение лин. формы дв-ой задачи, ств-щее плану У^0, совпадает с мнм-ым значением лин-ой формы исходной задачи.

Теперь покажем, что У^0 яв-ся опт-ым планом дв-ой задачи.

Для любого n-мерного вектора X, уд-го условиям (2) и (3), и любого m-мерного вектора У, уд-го условиям (5), получаем

$$УAX = Уb = g(У) \tag{11}$$

и

$$УAX \le CX = \mathrm{Z}(X). \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), приходим к нерав-у

$$g(У) \le \mathrm{Z}(X), \tag{13}$$

справедливому для любых *У* и *X*, явх-ся планами дв-ой и исходной задач ств-но. Отсюда следует, что эксл-ые значения (1) и (4) связаны стн-ем

$$\max g(У) \le \min \mathrm{Z}(X). \tag{14}$$

Для плана дв-ой задачи у^0 согласно (10) имеем

$$g(У^0) = Уb = \min \mathrm{Z}(X) \tag{15}$$

Т.о., лин. форма дв-ой задачи достигает на плане У^0 мкс-го значения, откуда, учитывая (15) имеем

$$\max g = \min \mathrm{Z} \tag{16}$$

Полученные результаты справедливы, когда исх. задача обладает опт-ым планом. Аналогично можно показать, что если дв. задача имеет решения, то исх. задача также обладает решением и опять имеет место (16). Первая часть теоремы доказана (док-во проверено для случая, когда каждый план исх. задачи невырожден. Это условие гарантирует достижение опт-го плана с помощью симплексного метода).

Для док-ва второй части теоремы заметим, что в случае неогр-ти лин. формы исх. задачи из (13) следует, что $g(У) \le -\infty$. Это выражение лишено смысла; сд-но, дв. задачи не имеет решений.

Аналогично предположим, что лин. форма дв-ой задачи не огр-на сверху. Тогда из (13) получаем, что $\mathrm{Z}(x) \ge +\infty$. Это выражение также лишено смысла, поэтому исх. задача не имеет решений.

Суть док-ва т1 демонстрируем на сд-ем

п8. Найти $\min \mathrm{Z} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad +2x_5 \qquad = 7, \\ \quad -2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad = 12, \\ \quad -4x_2 + 3x_3 \qquad +8x_5 + x_6 = 10, \end{cases} \qquad x_j \ge 0\left(j = \overline{1,6}\right).$$

Здесь (см. п5) $C=(0,1,-3,0,2,0), b=(7,12,10)$;

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1\end{pmatrix},\ A^1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -4\\ -1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Дв. задача. Найти $\max g=7y_1+12y_2+10y_3$ при условиях

$$\begin{cases} y_1 \le 0\\ 3y_1-2y_2-4y_3 \le 1\\ -y_1+4y_2+3y_3 \le -3\\ y_2 \le 0\\ 2y_1+8y_3 \le 2\\ y_3 \le 0\end{cases}$$

Окончательный базис, ств-й решению исходной задачи, полученному симплексным методом в п5 состоит из векторов A_2, A_3, A_6, т.е.

$B=\left(A_2A_3A_6\right)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Ств-им решением X^0 яв-ся

$$X^0=B^{-1}b=\left(x^0{}_2,x^0{}_3,x^0{}_6\right)=(4,5,11),$$

$$C^0=\left(c_2,c_3,c_6\right)=(1,-3,0),$$

и мнм. значение лин. формы равно

$$C^0X^0=(1,-3,0)\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 11\end{pmatrix}=-11.$$

Из окончательной симплексной табл. 5 (III итерация) получаем

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0\\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 10 & 1\end{pmatrix}.$$

Вектор Z для опт-го плана равен

$$Z = C^0\overline{X} - C = (1,-3,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 10 & 1 \end{pmatrix} - (0,1,-3,0,2,0)$$

или

$$Z = \left(-\frac{1}{5}, 0, 0, -\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}, 0\right) \le 0.$$

Компоненты Z содержатся в $(m+1)$-й строке III итерации табл. 5, т.е. совпадает с $Z_j - C_j$.

В 4^0:3.2 говорилось, что решение ур-й методом полного исключения приводит к обращению матрицы, составленной из векторов базиса, ств-го этому решению, причем обратная матрица образуется на месте единичной матрицы. Это же св-во справедливо и для задач ЛП, решаемых симплексным методом. Если матрица А коэф-в исх. задачи содержит ед-ю матрицу или заполняется ею, то в каждой итерации матрица обращенного базиса образуется на месте столбцов единичной матрицы. В нашем примере матрица А содержит ед-ю матрицу, столбцами к-ой яв-ся векторы A_1, A_4, A_6, сд-но, в окончательной табл. (III итерация табл. 5) эти столбцы преобразуются в матрицу B^{-1}. В этих столбцах помещаются векторы X_1, X_4, X_6 и, сд-но,

$$B^{-1} = (X_1, X_4, X_6) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было док-но, опт-ым планом дв-ой задачи яв-ся:

$$Y^0 = C^0B^{-1} = (1,-3,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

Подставляя этот план в условие дв-ой задачи, получаем $У^0$ $A \le C$:

$$\left(-\frac{1}{5},-\frac{4}{5},0\right)\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 & 8 & 1\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \text{т.е.}$$

$$-\frac{1}{5} \le 0,\ 1 \le 1,\ -3 \le -3,\ -\frac{4}{5} \le 0,\ -\frac{2}{5} \le 2,\ 0 \le 0.$$

Значение дв-ой лин. формы равно

$$У^0 b = \left(-\frac{1}{5},-\frac{4}{5},0\right)\begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix} = -11.$$

Если матрица А содержит единичную матрицу, то нет нх-ти опр-ть значения составляющих опт-го плана дв-ой задачи умн-ем C^0 B^{-1}. Имеем $y^0 = C^0 B^{-1} = C^0\left(x_1 x_4 x_6\right) = \left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)^*$. Но по опр-ю Z_j имеем $c^0 x_1 = z_1$, $c^0 x_4 = z_4$, $c^0 x_6 = z_6$. В (m+1)-й строке табл. 5 (III итерация) каждому x_j ств-ет эл. $z_j - c_j$. Заметим, что c_j=0 для j=1, 4, 6, сд-но, $y_1^0 = z_1$, $y_2^0 = z_4$, $y_3^0 = z_6$, т.е. получаем $(y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$.

Если вектору, входящему в ед-ю матрицу, ств-ет $c_j \ne 0$, то для получения y_i^0 нх-мо к ств-ей вел-е разности $z_j - c_j$, расположенной в (m+1)-й строке окончательной табл., прибавить c_j.

Док-ая т1 позволяет при решении одной из дв-ых задач найти опт-ый план другой. Покажем это на

п9. Исходная задача. Найти $\min Z = x_2 - x_4 - 3x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 \qquad = 1 \\ \quad -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \qquad = 2 \\ \quad 3x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 = 5 \end{cases} \qquad x_j \ge 0\left(j = \overline{1,6}\right)$$

здесь матрица-строка $C = (0,1,0,-1,-3,0)$, матрица-столбец

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дв. задача. Найти $\max g = y_1 + 2y + +5y_3$ при условиях

$$\begin{cases} y_1 \le 0 \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le 1 \\ y_2 \le 0 \\ -y_1 + 2y_2 \le -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \le -3 \\ y_3 \le 0 \end{cases}$$

Решение исходной задачи находим симплексным методом (табл. 6).

Таблица 6

	i	*C*	*Базис*	*A₀*	*0*	*1*	*0*	−1	−3	0	Σ
					A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
I	1	0	A_1	1	1	2	0	–1	$\boxed{1}$	0	4
	2	0	A_3	2	0	–4	1	2	–1	0	0
	3	0	A_6	5	0	3	0	0	1	1	10
	m+1	$Z_j - C_j$		0	0	–1	0	1	3	0	3
II	1	–3	A_5	1	1	2	0	–1	1	0	4
	2	0	A_3	3	1	-2	1	$\boxed{1}$	0	0	4
	3	0	A_6	4	–1	1	0	1	0	1	6
	m+1	$Z_j - C_j$		–3	–3	–7	0	4	0	0	–9
III	1	-3	A_5	4	2	0	1	0	1	0	8
	2	-1	A_4	3	1	-2	1	1	0	0	4
	3	0	A_6	1	–2	$\boxed{3}$	–1	0	0	1	2
	m+1	$Z_j - C_j$		–15	–7	1	–4	0	0	0	–25
IV	1	–3	A_5	4	2	0	1	0	1	0	8
	2	–1	A_4	11/3	–1/3	0	1/3	1	0	2/3	16/3
	3	1	A_2	1/3	–2/3	1	–1/3	0	0	1/3	2/3
	m+1	$Z_j - C_j$		–46/3	–19/3	0	–11/3	0	0	–1/3	–77/3

Из табл. 6 имеем $x^0=\left(0,1/3,0,11/3,4,0\right)$ при к-ом $\mathrm{Z}_{\min}=-46/3$. В последний базис входят векторы A_5,A_4,A_2, значит $B=\left(A_5A_4A_2\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -4\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Обратная матрица B^{-1} образована из коэф-ов, стоящих в столбцах A_1,A_3,A_6 IV-й итерации: $B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}, C^0=\left(-3,-1,1\right)$. Тогда $y^0=C^0B^{-1}=$

$=\left(-3,-1,1\right)\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}=\left(-19/3,-11/3,-1/3\right)$, компоненты к-ых можно было получить и из $\left(m+1\right)$-й строки IV итерации табл. 6 прибавлением ств-но c_j. При этом плане $g_{\max}=-\frac{19}{3}-\frac{11}{3}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot 5=-\frac{46}{3}$, т.е. $\min \mathrm{Z}=\max g$.

4^0. Симметричные двойственные задачи. В симметричных дв. задачах система огр-й как исходной, так и дв-ой задач задается нерав-ми, причем на дв-ые пер. налагаются условия неотц-ти. Теорема дв-ти верна и здесь.

Исходная задача. Найти вектор-столбец $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ мнмз-й лин. форму

$$\mathrm{Z}=CX$$

при условиях

$$AX\geq A_0, X\geq 0$$

Дв. задача. Найти вектор-строку $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ мксз-й лин. форму

$$g=YA_0$$

при условиях

$$YA\leq C, Y\geq 0.$$

Систему нерав-в с помощью дополнительных (балансовых) пер-ых можно прб-ть в систему ур-й, поэтому всякую пару симметричных дв. задач можно преобразовать (прб-ть) в пару несимметричных, для к-ых теорема дв-ти уже д-на.

Используя симметричность, можно выбрать задачу, более удобную для решения, что упрощает выч-ия.

п10. Найти min $\mathrm{Z}=x_1+2x_2+3x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3\geq 2\\ x_1-x_2-4x_3\leq -3\\ x_1+x_2-2x_3\geq 6\\ 2x_1+x_2-2x_3\geq 3,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x_1+2x_2-x_3\geq 2\\ -x_1+x_2+4x_3\geq 3\\ x_1+x_2-2x_3\geq 6\\ 2x_1+x_2-2x_3\geq 3,\end{cases}$$

$$x_j\geq 0 \quad (j=\overline{1,3}). \qquad x_j\geq 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

Дв. задача. Найти max $g = 2y_1+3y_2+6y_3+3y_4$ при огр-ях

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2 \qquad\qquad y_i \ge 0 \ (i=\overline{1,4}\,) \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \le 3, \end{cases}$$

Для решения дв-ой задачи нх-мо вести три балансовые пер. и ее первая симплексная таблица содержит четыре строки и восемь столбцов (см. табл. 7).

Таблица 7

	i	C	*Базис*	A_0	*2*	*3*	*6*	*3*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
					A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
I	1	0	A_5	1	2	–1	$\boxed{1}$	2	1	0	0	6
	2	0	A_6	2	2	1	1	1	0	1	0	8
	3	0	A_7	3	–1	4	–2	–2	0	0	1	3
	m+1	$Z_j - C_j$		0	–2	–3	–6	–3	0	0	0	–14
II	1	6	A_3	1	2	–1	1	2	1	0	0	6
	2	0	A_6	1	0	$\boxed{2}$	0	–1	–1	1	0	2
	3	0	A_7	5	3	2	0	2	2	0	1	15
	m+1	$Z_j - C_j$		6	10	–9	0	9	6	0	0	22
III	1	6	A_3	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0	7
	2	3	A_2	1/2	0	1	0	–1/2	–1/2	1/2	0	1
	3	0	A_7	4	3	0	0	3	3	–1	1	13
	m+1	$Z_j - C_j$		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0	31

Из табл. 7 видно, что опт-ый план дв-ой задачи $Y^0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, к-ой ств-ет $g_{\max} = \frac{21}{2}$. По III итерации находим $B = (A_3\, A_2\, A_7) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C^0 = (6, 3, 0)$, по векторам A_5, A_6, A_7 из III итерации имеем $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $X^0 = C^0B^{-1} =$

$= (6, 3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0)$, компоненты к-ой можно получить и из (m+1) строки III итерации $x_1^0 = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$, $x_2^0 = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}$, $x_3^0 = 0 + 0 = 0$, $\min Z = \frac{21}{2}$.

Для решения исходной задачи нх-мо ввести четыре дополнительные пер. и после преобразования системы – одну искусственную, т.е. исходная симплексная табл. будет состоять из шести строк и девяти столбцов (см.[55], стр. 91).

Однако, учитывая зм3 из 1^0:3.4 число строк и столбцов можно сократить (табл. 8), но и тогда вычислительные процедуры громоздкие, чем по табл. 7.

Таблица 8

i	*C*	*Базис*	A_0	*1*	*2*	*3*	*0*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	0	A_4	2	$\boxed{2}$	2	–1	–1	0	0	0	4
2	0	A_5	3	–1	1	4	0	–1	0	0	6
3	0	A_6	6	1	1	–2	0	0	–1	0	5
4	0	A_7	3	2	1	–2	0	0	0	–1	3
m+1	$Z_j - C_j$		0	–1	–2	–3	0	0	0	0	–6
m+2			14	4	5	–1	–1	–1	–1	–1	18
	1	A_1	1	1	1	–1/2	–1/2	0	0	0	2
2	0	A_5	4	0	2	7/2	–1/2	–1	0	0	8
3	0	A_6	5	0	0	–3/2	1/2	0	–1	0	3
4	0	A_7	1	0	–1	–1	$\boxed{1}$	0	0	–1	–1
m+1	$Z_j - C_j$		1	0	–1	–7/2	–1/2	0	0	0	–4
m+2			10	0	1	1	1	–1	–1	–1	10
1	1	A_1	3/2	1	1/2	–1	0	0	0	–1/2	3/2
2	0	A_5	9/2	0	$\boxed{3/2}$	3	0	–1	0	–1/2	15/2
3	0	A_5	9/2	0	1/2	–1	0	0	–1	1/2	7/2
4	0	A_4	1	0	–1	–1	1	0	0	–1	–1
m+1	$Z_j - C_j$		3/2	0	–3/2	–4	0	0	0	–1/2	9/2
m+2			9	0	2	2	–1	–1	–1	0	11
1	1	A_1	0	1	0	–2	0	1/3	0	–1/3	–1
2	2	A_5	3	0	1	2	0	–2/3	0	–1/3	5
3	0	A_6	3	0	0	–2	0	1/3	–1	$\boxed{2/3}$	1
4	0	A_4	4	0	0	1	1	–2/3	0	–4/3	4
m+1	$Z_j - C_j$		6	0	0	–1	0	–1	0	–1	3
m+2			3	0	0	–2	0	1/3	–1	2/3	1
1	1	A1	3/2	1	0	–3	0	1/2	–1/2	0	–1/2
2	2	A2	9/2	0	1	1	0	–1/2	–1/2	0	11/2
3	0	A7	9/2	0	0	–3	0	1/2	–3/2	1	3/2
4	0	A4	10	0	0	–3	1	0	–2	0	6
m+1	$Z_j - C_j$		21/2	0	0	–4	0	–1/2	–3/2	0	9/2
m+2			0	0	0	0	0	0	0	0	0

Из табл. 8 имеем $X^0 = (\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0)$, $\min Z = \frac{21}{2}$. При нахождении В, C^0, B^{-1}, $У^0$ полученные результаты нх-мо умн-ть на –1, т.к. в исходной информации единичная матрица взята с обратным знаком

$$E = (-1)(A_4A_5A_6A_7) = (-1)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Тогда имеем:

$$B = (A_1A_2A_7A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$ причем

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \quad C^0 = (1, 2, 0, 0).$$ Отсюда получим

$$У_1^0 = C^0B^{-1} = (1, 2, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0),$$

тогда $Y^0 = -Y_1^0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, компоненты к-ых можно получить и из (m+1)-й строки последней итерации табл. 8, умн-ив на –1,

$$\max g = 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{21}{2},$$

т.е. $\max g = \min Z$.

Итак, в этом примере решить дв. задачу по табл. 7 гораздо проще, чем решить исх. задачу по табл. 8.

При этом прежде чем записать дв. задачу для данной исходной, систему огр-й исх-й задачи нх-мо привести к ств-му виду, н-р, рас-им

п11. Найти $\min Z = 2x_1 + x_2 + 5x_5$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \qquad x_j \ge 0 (j = \overline{1,3}). \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6, \end{cases}$$

Р. Исх. задача: $\min Z = 2x_1 + x_2 + 5x_5$ при огр-ях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \qquad x_j \ge 0 (j = \overline{1,3}). \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6, \end{cases}$$

Дв. задача: Найти $\max g = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1 \qquad y_i \ge 0 (i = \overline{1,3}). \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5, \end{cases}$$

Далее задачу решить самим аналогично п10.

5

5^0. Вторая и третья теоремы и геометрическая интерпретация двойственности. Без док-ва приведем две теоремы, результаты к-ых будут использованы в дальнейшем.

т2 (о дополнительной нежесткости). Для того, чтобы два допустимых решения X^* и $У^*$ пары дв-ых задач были их опт. решениями, нх. и дт., чтобы они уд-ли систем ур-й

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, j = \overline{1,n}; \tag{17}$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_{\ j} - b_i \right) = 0, i = \overline{1,m} \text{ , т.е.} \tag{18}$$

Если при подстановке компонентов опт-го плана в систему орг-й исходной задачи i-е огр. обращается в нерав-во, то i-й компонент опт-го плана дв-ой задачи равен нулю.

Если i-й компонент опт. плана дв-ой задачи плж-ен, то i-е огр. исх. задачи уд-ся ее опт-ым решением как строгое рав.

Эта теорема позволяет:

а) установить опт-ть решения одной задачи по св-ам решения дв-ой;

б) найти опт. решения одной задачи по решению дв-ой.

Теорема верна для симметричной дв. пары. Для задач в канонической и общей форме стн-ия (17) и (18) верны только для огр-й в виде нерав-в и для неотц. пер-ых.

п12. Путем графического анализа дв. задачи решить сд. задачу

$$\max Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_1)\,4x_1 \qquad\quad + x_3 + x_4 = 16 \\ (y_2)\,6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{array}\right\} \quad x_j \geq 0\left(j = \overline{1,4}\right).$$

Р. Напишем дв. задачу:

$$\min g = 16y_1 + 4y_2 - 16$$

$$\left.\begin{array}{r} 4y_1 + 6y_2 \geq 5 \\ -4y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \end{array}\right\}$$

Графический анализ этой задачи показан на рис. 1. Обл. оказалась неогр-ой и расположенной в IV квадранте (т.к. условия неотц-ти на y_1 и y_2 не налагаются). Опт. решение $y^* = (\frac{13}{8}, -\frac{1}{4})$ и $g_{\min} = 9$. Этим решением 3-е и 4-е нерав-ва уд-ся как строгие нерав-ва: $\frac{13}{8} - (-\frac{1}{4}) = \frac{15}{8} > 1$ и $\frac{13}{8} + (-\frac{1}{4}) = \frac{11}{8} > 1$, отсюда на основании т2 имеем $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Тогда из исходной системы получим $4x_1 = 16$, откуда $x_1^* = 4$, и $6x_1^* - 4x_2 = 4$, $x_2^* = 5$. Сд-но, опт. решение исх. задачи (рис. 2) $x^* = (4, 5, 0, 0)$. При этом $Z_{\max} = 5 \cdot 4 + 5 - 16 = 9 = g_{\min}$, чем подтверждается правильность выч-й.

п13. Дан вектор X=(3,0,1,3). Опр-ть, яв-ся ли он опт. решением сд-ей задачи:

$$\max Z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_1)\;\; 3x_1 - x_2 \qquad\quad +2x_4 \leq 15 \\ (y_2)\;\; x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4 \\ (y_3)\;\; \qquad x_2 + 3x_3 \;\; - x_4 \geq 0 \end{array}\right\}, \qquad x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

Р. Подставив вектор X = (3, 0, 1, 3) в исх. задачу, получим: $Z_{\max} = 6 + 4 - 18 = -8$, при огр-ях $9 + 2 = 11 \leq 15$, $3 - 1 - 6 = -4 \geq -4$, $3 - 3 = 0 \geq 0$, к-ые выполняются. Для проверки опт-сти этого вектора решим дв. задачу, используя т2: $\min g = 15y_1 - 4y_2 + 0 \cdot y_3$

$$\left.\begin{array}{r} 3y_1 + y_2 \qquad \geq 2 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -1 \\ -y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{array} \left|\; \left.\begin{array}{r} 3y_1 + y_2 \qquad = 2 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 > -1 \\ -y_2 + 3y_3 = 4 \\ 2y_1 - 2y_2 - y_3 = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3y_1 + y_2 \qquad = 2 \\ -y_2 + 3y_3 = 4 \\ 2y_1 - 2y_2 - y_3 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 2 \\ y_3^* = 2 \end{array}\right.$$

Т.о., $y^* = (0,2,2)$, $g_{\min} = 15 \cdot 0 - 4 \cdot 2 = -8 = Z_{\max}$, значит, вектор $X^* = (3,\ 0,\ 1,\ 3)$ яв-ся опт. решением исх. задачи.

т3 (об оценках). Значения пер-ых y_i^* в опт. решении дв-ой задачи численно равны частным производным $\dfrac{\partial Z_{\max}}{\partial a_{i0}}$ для исх. задачи.

Из этой теоремы, при малых изменениях $\triangle a_{i0}$, вытекает прж. рав-во

$$\triangle Z = У^* \triangle a_0 = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \triangle a_{i0}. \tag{19}$$

При более значительных изменениях свободных членов можно пользоваться сд-ем оценочным нерав-ом:

$$У_1^* \triangle a_0 \le \triangle Z_{\max} \le У^* \triangle a_0,$$

где $У_1^*$ – опт. решение дв. задачи при измененных значениях $a_0 + \triangle a_0$.

В случае, когда $У_1^* = У^*$, получим точное рав. (см.[45]):

$$\triangle Z_{\max} = У^* \triangle a_0$$

п14. Для сд-ей задачи ЛП

$$\min Z = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &\ge 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &\ge 2 \end{aligned}\right\} \qquad x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$$

опр-ть пределы возможных изменений свободного члена $a_{10} = 1$, при к-ых изменения $Z_{\min}$ может быть опр-но по точной фм-е $\triangle Z_{\min} = a_{01}^* \triangle a_{10}$.

Р. Напишем дв. задачу и получим ее графическое решение

$$\max g = y_1 + 2y_2$$

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 + 3y_2 &\le 9 \\ y_1 \ + y_2 &\le 8 \\ y_1 \ - y_2 &\le 4 \end{aligned}\right\} \qquad y_i \ge 0, i = 1,2$$

Графическое решение получено на рис. 3 из $\left.\begin{aligned} -2y_1 + 3y_2 &= 9 \\ y_1 + \ y_2 &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 3, \\ y_2 &= 5 \end{aligned}$

Т.о., $У^* = (3,5)$, $g_{\max} = 13$

Далее решить задачу самим. $O: x_1 = \dfrac{1}{5},\ x_2 = \dfrac{7}{5},\ x_3 = 0;$ $\quad -\dfrac{4}{3} \le \Delta a_{01} \le 2.$

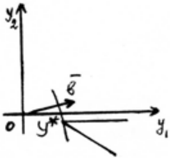


Рис. 1

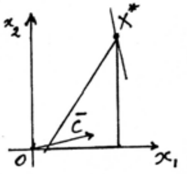


Рис. 2

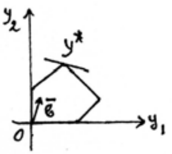


Рис. 3

п14а. Оценить изменение опт-го значения целевой фк. При новом значении вектора огр-й $a_0^1 = (4,12,2)$ для задачи:

$$\min Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \end{array}\right\} \qquad x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Ук: из условия задачи $\vartriangle a_0 = (-1,2,0)$, тогда $\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \end{array}\right\}$,

откуда $\max g = 4y_1 + 12y_2 + 2y_3$.

О: $У^* = (0,3;1,5;0,7)$, отсюда $\vartriangle Z_{\min} = У^* \vartriangle a_0 = 2,7$.

6^0. Экономическая интерпретация двойственных задач. Исследуем экономическую (экнч.) интерпретацию планирования производства (прз.) (см. 4^0, 5^0:3.1) и дв-ой ей задачи. Исх. задача заключается в мксз-ции

$$CX \qquad \text{т.е.} \ \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при огр-ях

$$\text{AX} \leq b, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq b_i, i = \overline{1,m};$$

$$\text{X} \geq 0, \qquad x_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

где a_{ij} число ед. i-го ресурса, требуемого для прз-ва единицы j-го вида продукции, b_i – запасы i-го ресурса, c_j – величина дохода, приходящегося на ед-у j-го вида продукции. Ств-ая дв. задача состоит в мнмз-ции

$$Yb \qquad \text{т.е.} \ \min g = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

при орг-ях

$$УA \geq C, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1,n};$$

$$У \geq 0, \qquad y_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

В то время как физическая интерпретация исх-й задачи ясна, смысл дв-й задачи не столь очевиден. Возникает вопрос, как интерпретировать лин. формулу и условия дв-й задачи. Лучше всего на этот вопрос можно ответить с помощью формулировки исх-й и дв-й задач в терминах размерностей.

Исх. задачи заключается в мксз-ции

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix}\textit{доход от единицы}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix} = \text{доход}$$

при огр-ях

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix}\textit{затраты } i\textit{-го ресурса на производство}\\ \textit{единицы продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\textit{запас}\\ i\textit{-го ресурса}\end{pmatrix}, i=\overline{1,m}$$

$$\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix} \ge 0, j=\overline{1,n}\ .$$

Дв. задача сводится к мнмз-ции

$$\sum_{i=1}^{m} (\text{запас } i\text{-го ресурса})\ y_i = (?)$$

при огр-ях

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix}\textit{затраты } i\textit{-го ресурса}\\ \textit{на производство}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix} y_i \ge \begin{pmatrix}\textit{доход от продукции}\\ j\textit{-го вида}\end{pmatrix},\ j=\overline{1,n}$$

$$y_i \ge 0, i=\overline{1,m}\ .$$

Очевидно, что размерности условий дв-ой задачи будут совпадать, если y_i совпадет со стоимостью единицы i-го ресурса. Дв. задачи тогда состоит в мнмз-ции

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix}\textit{запас}\\ i-\textit{го ресурса}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{стоимость единиц}\\ i-\textit{го ресурса}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textit{общая стоимость}\\ \textit{всех ресурсов}\end{pmatrix}$$

при огр-ях

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix}\textit{затраты } i\textit{-го ресурса}\\ \textit{на производство}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{стоимость единицы}\\ i-\textit{го ресурса}\end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix}\textit{доход от продукции}\\ j\textit{-го вида}\end{pmatrix}, j=\overline{1,n}.$$

$$\begin{pmatrix}\textit{стоимость} & \textit{единицы}\\ i\textit{-го} & \textit{ресурса}\end{pmatrix} \ge 0, i=\overline{1,m}.$$

Т.о., задачи дв-ой пары могут быть сформулированы так:

Исходная задача. Сколько единиц x_j при $j=\overline{1,n}$ каждого вида продукции нужно выпустить при данном доходе c_j от ед-ы продукции j-го вида и данном предельном потреблении каждого из имеющихся ресурсов b_j, при $i=\overline{1,m}$, чтобы получить от всего прз-ва мкс-ю прибыль?

Двойственная задача. Какую цену y_i следует назначить единице каждого из ресурсов, чтобы при заданных кол-ах ресурсов b_i и заданных величинах дохода c_j на ед-у от прз-ва каждого вида продукции мнмз-ть общую стоимость затрат?

Пер-ые у$_i$ наз. по разному: учетными, неявными или фиктивными ценами.

п15. Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В и Г) используется три вида сырья (I, II, III). Ресурсы сырья, нормы его расхода на ед-у продукции и получаемая прибыль от ед-ы продукции заданы в табл. 9.

Таблица 9

Сырье	Нормы расхода				Ресурсы
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль	7,5	3	6	12	

1. Опр-ть опт. план выпуска продукции из условия мксз. прибыли.

2. Сформулировать экономически, записать и решить дв. задачу.

3. Опр-ть изменения мкс-ой прибыли при изменении ресурсов: I на + 40, II на – 30, III на + 50. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное влияние.

4. Опр-ть нормы заменяемости ресурсов.

5. Сопоставить оценку затрат и прибыли по опт. плану и каждому виду продукции в отдельности.

6. Оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы на ед-у к-го ств-но равны 2, 4, 2 и прибыль равна 15.

Р.1. Мт. модели исх-ой и дв-ой задачи имеет вид:

$$\max Z = 7{,}5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \qquad \min g = 2400\,y_1 + 1200\,y_2 + 3000\,y_3$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 4x_4 & \le 2400 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 & \le 1200 \\ 3x_1 \qquad + 6x_3 + x_4 & \le 3000 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} 2y_1 + y_2 + 3y_3 & \ge 7{,}5 \\ y_1 + 5y_2 & \ge 3 \\ 0{,}5y_1 + 3y_2 + 6y_3 & \ge 6 \\ 4y_1 \qquad + y_3 & \ge 12 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \qquad\qquad y_i \ge 0, i = \overline{1,3}.$$

2. Сформируем экономически приведенные модели.

Исх. задачи заключается в мксз-ции

$$\sum_{j=1}^{4}\begin{pmatrix}\textit{доход от единицы}\\ \textit{продукции } j\textit{ - го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции } j\textit{ - го вида}\end{pmatrix} = \text{доход}$$

при орг-ях

$$\sum_{j=1}^{4}\begin{pmatrix}\textit{затраты } i\textit{ - го ресурса}\\ \textit{на производство единицы}\\ \textit{продукция } j\textit{ - го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции}\\ j\textit{-го вида}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\textit{запас}\\ i\textit{-го ресурса}\end{pmatrix},\ i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix}\textit{количество единиц}\\ \textit{продукции } j\textit{-го вида}\end{pmatrix} \ge 0,\ j = \overline{1,4}$$

Дв. задача состоит в мнмз-ции

$$\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}\text{запас}\\ i\text{-го ресурса}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{стоимость единицы}\\ i\text{-го ресурса}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{общая}\quad\text{стоимость}\\ \text{всех}\quad\text{ресурсов}\end{pmatrix}$$

при огр-ях

$$\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}\text{затраты } i\text{-го ресурса}\\ \text{на производство}\\ \text{продукции } j\text{-го вида}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{стоимость}\\ \text{единицы}\\ i\text{ - го ресурса}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\text{доход от}\\ \text{продукции}\\ j\text{ - го вида}\end{pmatrix},\ j=\overline{1,4}$$

$$\begin{pmatrix}\text{стоимость единицы}\\ i\text{ - го ресурса}\end{pmatrix}\geq 0,\ i=\overline{1,3}.$$

Решение исх. задачи приведено на табл. 10

Таблица 10

i	*C*	*Базис*	*в*	*15/2*	*3*	*6*	*12*	*0*	*0*	*0*	Σ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	x_5	2400	2	1	1/2	$\boxed{4}$	1	0	0	4817/2
2	0	x_6	1200	1	5	3	0	0	1	0	1210
3	0	x_7	3000	3	0	6	1	0	0	1	3011
m+1	$Z_j - C_j$		0	–15/2	–3	–6	–12	0	0	0	57/2
1	12	x_4	600	1/2	1/4	1/8	1	1/4	0	0	4817/8
2	0	x_6	1200	1	5	$\boxed{3}$	0	0	1	0	1210
3	0	x_7	2400	5/2	–1/4	47/8	0	–1/4	0	1	19271/8
m+1	$Z_j - C_j$		7200	–3/2	0	–9/2	0	3	0	0	7197
1	–3	x_4	550	11/24	1/24	0	1	1/4	–1/24	0	13241/24
2	–1	x_3	400	1/3	5/3	1	0	0	1–6	0	1210/3
3	0	x_7	50	13/24	–241/24	0	0	–1/4	–47/24	1	943/24
m+1	$Z_j - C_j$		9000	0	15/2	0	0	3	3/2	0	9012

Из табл.10 видно, что задача имеет и другое решение в силу случая Аб из 5^0: 3.3. Это решение найдено на табл. 11.

Таблица 11

i	*C*	*базис*	*в*	*15/2*	*3*	*6*	*12*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	12	x_4	550	11/24	1/24	0	1	1/4	–1/24	0	13241/24
2	6	x_3	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0	1210/3
3	0	x_7	50	$\boxed{13/24}$	–241/24	0	0	–1/4	–47/24	1	943/24
m+1			9000	0	15/2	0	0	3	3/2	0	9012
1	12	x_4	6600/13	0	111/13	0	1	6/13	21/13	–11/13	6740/13
2	6	x_3	4800/13	0	102/13	1	0	2/13	20/13	–8/13	4929/13
3	15/2	x_1	1200/13	1	–241/13	0	0	–6/13	–47/13	24/13	943/13
m+1			9000	0	15/2	0	0	3	3/2	0	9012

Т.о., из табл. 10, 11 получим $X^* = (0, 0, 400, 550)$, $x_5^* = x_6^* = 0$ и $x_7 = 50$ или $X^* = (92,\ 0,\ 369,\ 507), x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$; $Z_{\max} = 9000$.

Из этих же табл. по индексной строке берем решение дв-ой задачи $y^* = (3,\ \frac{3}{2},\ 0), g_{\min} = 2400 \cdot 3 + 1200 \cdot \frac{3}{2} = 9000$.

3. Используя фм-у (19), получим изменение мкс-ой прибыли при изменении ресурсов:

$$\vartriangle Z_1 = 3 \cdot 40 = 120,\ \vartriangle Z_2 = \frac{3}{2}(-30) = -45,\ \vartriangle Z_3 = 0 \cdot 50 = 0,$$

$$\vartriangle Z_{\max} = y^* \cdot \vartriangle a_0 = (3,\ \frac{3}{2},\ 0)\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} = 7{,}5\ .$$

4. О: для 1ед. III рес. –0,25 I рес. и –1,96 II рес.

5. О: затраты составляют: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 0 = 12$, прибыль 18 сд-но, выгодно.

6. Вводить в план пятого вида продукции Д и полученную задачу решить самим.

7^0. Двойственный симплексный метод. Симметричные двойственные задачи ($Z_{\min}$=CX; AX $\geq b$; X $\geq$ 0; $g_{\max}$=Уb; УA $\leq$ C; У $\geq$ 0) удобно представлять с помощью табл.12. Условия исходной задачи получаются путем скалярного умн-я строк матрицы A на строку $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; скалярные пзв-ия столбцов A на столбец $У = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ дают условия дв-ой задачи. Обычно нерав-ва в условиях задачи путем введения дополнительных неотц. пер-ых преобразуют в рав-а. Причем дпн. пер. вводятся в исх. задачу со знаком минус, а в дв. задачу – со знаком плюс. Коэф-ты лин. формы, связанные с этими пер-ми, принимаются равными нулю. Результирующая табл. для исх-й задачи содержит отц-ю ед-ю матрицу, а для дв-й задачи – плж. ед-ю матрицу. Сд-но, завершающая симплексная табл. одной из этих задач будет содержать также опт-ый план другой задачи.

Поскольку условия исх. задачи содержит ед-ю матрицу, взятую со знаком минус, компоненты решения дв. задачи совпадают с ств-ми вел-ми Z_j окончательной табл., взятыми с обратным знаком. Н-р, см. п10 и табл.8.

Учитывая табл.12, переход к дв-ой задаче не обязателен, ибо в столбцах записана исх. задача, а в строках – дв-ая. Причем оценками плана исх. задачи яв-ся c_j, а оценками дв. задачи – b_i, Решим дв. задачу, учитывая оценки $в_i$, по симплексной табл., в к-ой записана исх. задача, и найдем опт-ый план дв-ой задачи (по (m+1)-й строке последней итерации симплексной табл.), а вместе с ним и опт-ый план исх. задачи. Этот метод носит наз-ие двойственного симплексного метода.

Таблица 12

(≥ 0)	$x_1 \ldots x_j \ldots x_n$	$\geq$
y_1 $\vdots$ y_i $\vdots$ y_m	$a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn}$	b_1 $\vdots$ b_i $\vdots$ b_m
$\leq$	$c_1 \ldots c_j \ldots c_n$	max min

Дв-ым симплексным методом можно решать задачи ЛП, системы огр-ой к-ых при плж-ом базисе содержит свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить кол-во прб-й системы огр-й, а также размеры симплексной табл.

Дв-ый симплексный метод отличается от симплексного метода тем, что прежде всего избавляемся от отц-ых $b_i = x_i < 0$. Для этого по i-й строке находим столбцов, для к-ых $x_{ij} < 0$ (если не содержится $x_{ij} < 0$, то лин. форма дв-ой задачи не огр-на, а исх. задача не имеет решений), вычисляем $\theta_{0j} = \min \frac{x_i}{x_{ij}} \geq 0$ и опр-ем вектор–столбец, ств-ий max $\theta_{0j}(Z_j - C_j)$ при решении исх. задачи на min и $\min \theta_{oj}(Z_j - C_j)$ при решении исх. задачи на max. Этот вектор и включаем в базис исх. задачи. Вектор, к-ой нх-мо исключить из базиса исх. задачи, опр-ся ключевой строкой.

Если $\theta_{0j} = \min \frac{x_i}{x_{ij}} = 0$, т.е. $x_i = 0$, то x_{ij} берется за ключевой эл-т только в том случае, если $x_{ij} > 0$. Такой выбор ключевого эл-та на данном этапе не приводит к увеличению кол-ва отц-ых компонент вектора X. Процесс продолжаем до получения $X \geq 0$; при этом находим опт-ый план дв. задачи, сд-но, и опт. план исх. задачи.

В процессе выч-ий по алгоритму дв. симплексного метода условие $Z_j - C_j \leq 0$ можно не учитывать до исключения всех $x_i < 0$, затем опт-ый план находится обычным симплексным методом. Это удобно использовать, если все $x_i < 0$. Тогда для перехода к плану исх. задачи за одну итерацию нх-мо опр-ть θ_{0j} не по мнм-у, а по мак-му, т.е. $\theta_{0j} = \max \frac{x_i}{x_{ij}} > 0$.

п16. Найти min $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Р. Умножим первое нерав. на –1 и прб-ем нерав-ва в ур-я:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \quad\;\; = -4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \quad - x_5 = 5, \end{cases} \qquad x_j \geq 0\ (j = \overline{1,5}\,).$$

Откуда имеем: max $g = -4y_1 + 5y_2$.

Составим симплексную табл.13, выбрав за базис A$_4$ и A$_5$. т.к. $b_1 = x_1 = -4$, то просматриваем коэф-ы строки $i = 1$. Среди них при отц-ых коэф-ов, стоящие в столбцах, ств-их векторам A$_1$, A$_2$, A$_4$. Имеем:

$$\theta_{01} = \min\left(\frac{-4}{-1}, \frac{5}{1}\right) = 4, \qquad \theta_{01}\,(Z_1 - C_1) = 4 \text{ x } 2 = 8,$$

$$\theta_{02} = \min\left(\frac{-4}{-1}\right) = 4, \qquad \theta_{02}\,(Z_2 - C_2) = 4 \text{ x } (-1) = -4,$$

$$\theta_{04} = \min\left(\frac{-4}{-1}\right) = 4, \qquad \theta_{04}\,(Z_4 - C_4) = 4 \text{ x } 0 = 0.$$

Исх. задача решается на отыскание min Z, поэтому в базис исх. задачи надо включить вектор, к-му ств-ет max $\theta_{0j}(Z_j - C_j)$ = max (8, –4, 0) = 8, т.е. вектор A$_1$ с ключевым эл-ом –1, вектор A$_4$ исключаем из базиса.

Начиная с II итерации табл. 13 (т.к. все $x_i > 0$) опт-ый план находим обычным симплексным методом.

Таблица 13

i	*C*	*Базис*	$A_0 = b$	–2	1	5	0	0	∑
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	0	A$_4$	–4	$\boxed{-1}$	–1	1	–1	0	–6
2	0	A$_5$	5	1	–5	1	0	–1	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	2	–1	–5	0	0	–4
1	–2	A$_1$	4	1	1	–1	1	0	6
2	0	A$_5$	1	0	–6	$\boxed{2}$	–1	–1	–5
m+1	$Z_j - C_j$		–8	1	–3	–3	–2	0	–16
1	–2	A$_1$	9/2	1	–2	0	–1/2	–1/2	7/2
2	5	A$_3$	1/2	0	–3	1	1/2	–1/2	–5/2
m+1	$Z_j - C_j$		–13/2	0	–12	0	–7/2	–3/2	–47/2

Из табл. 13 имеем $X^0 = (\frac{9}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $Z_{\min} = -\frac{13}{2}$. Опт-ый план дв. задачи находим из (m+1)-й строки Ш итерации, умн-ив ств-ие эл-ты на –1:

$$У^0 = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right), \text{ тогда } g_{\max} = -4 \cdot \frac{7}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{13}{2}.$$

У^0 можно найти и как в п10: $B = (A_{1,}\ A_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, где

$BB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ = –E. Тогда $Y_1^0 = C^0 B^{-1} = (-2, 5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = (-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$,

отсюда $Y^0 = -Y_1^0 = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

п17. Найти min Z = $3x_1 + 2x_2 - 4x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7 \end{cases} \quad x_j \geq 0\ (j = \overline{1,3}).$$

Р. Умн-ем нерав-ва системы огр-й на –1 и переходим к ур-ям:

$$\begin{cases} -\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ + x_4 = -4 \\ -\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -7 \end{cases} \quad x_j \geq 0\ (j = \overline{1,5}\ )$$

Отсюда получим max $g = -\ 4y_1 - 7y_2$.

Составим симплексную табл. 14, выбрав за базис A_4 и A_5. Т. к. все $x_i < 0$, то ключевую строку выбираем по $\Theta_{0i} = \max \dfrac{x_i}{x_{ij}} > 0$, просматривая столбцов с эл-ми $x_{ij} < 0$. Тогда имеем:

$$\Theta = \max\left(\frac{-4}{-1}, \frac{-7}{-3}\ \right) = 4, \qquad \Theta_{01}\,(Z_1 - C_1) = 4\,(-3) = -12,$$

$$\Theta = \max\left(\ \frac{-4}{-1}, \frac{-7}{-1}\right) = 7, \qquad \Theta_{02}\ (Z_2 - C_2) = 7\,(-2) = -14.$$

Исх. задача решается на отыскание min Z, тогда в базис исх. задачи надо включить вектор, к-му ств-ет max Θ_{oji} (Z_j – Cj) = max (–12, –14) = –12,т.е. вектор А, с ключевым эл-ом –1, вектор A_4 исключаем из базиса. Такой выбор ключевого эл-та позволил во второй итерации перейти к опорному плану исх. задачи и в дальнейшем решать задачу обычным симплексным методом.

Таблица 14

i	*C*	*Базис*	*в*	*3*	*2*	*-4*	*0*	*0*	$\sum$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	0	A_4	–4	$\boxed{-1}$	–1	2	1	0	–3
2	0	A_5	–7	–3	–1	4	0	1	–6
m+1	$Z_j - C_j$		0	–3	–2	4	0	0	–1
1	3	A_1	4	1	1	–2	–1	0	3
2	0	A_5	5	0	$\boxed{2}$	–2	–3	1	3
m+1	$Z_j - C_j$		12	0	1	–2	–3	0	8
1	3	A_1	3/2	1	0	–1	1/2	–1/2	3/2
2	2	A_2	5/2	0	1	–1	–3/2	1/2	3/2
m+1	$Z_j - C_j$		19/2	0	0	–1	–3/2	–1/2	13/2

Опт. план исх. задачи $X_{опт}$ (3/2, 5/2, 0), $Z_{\min} = \dfrac{19}{2}$. Т. к. исх. задача содержит плж. ед-ю матрицу, то из последней итерации табл. 14 по (m+1)-й строке получим У$^0 = (-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2})$, тогда $g_{\max} = -4\,(-\frac{3}{2})\,-7\,(-\frac{1}{2}) = \frac{19}{2}$. К этому же результату приходим так: $B = (A_1,\ A_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = E, тогда $Y^0 = C^0B^{-1} = (3,\ 2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2})$.

п18. Найти max Z = $2x_1 + 4x_2$ при огр-ях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad x_j \geq 0\ (j = 1,2)\ \text{(см. п9, 13, 16 из 3.3)}$$

Р. Из $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq -11 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -11 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 0, \end{cases} \quad x_j \geq 0\ (j = \overline{1,5})$

Составим симплексную табл.15, выбрав за базис A_3, A_4 и A_5. Т.к. $x_1 = -11$, то просматриваем отц-ые коэф-ы строки $i = 1$, к-ым ств-ют векторы A_1, A_2. Тогда имеем:

$$\theta_{01} = \min\left(\frac{-11}{-3}, \frac{0}{1}\right) = 0\,,\ \theta_{01}\left(Z_1 - C_1\right) = 0(-2) = 0,$$

$$\theta_{02} = \min\left(\frac{-11}{-2}, \frac{2}{1}\right) = 2\,,\ \theta_{02}\left(Z_2 - C_2\right) = 2(-4) = -8.$$

Исх. задача решается на отыскание max Z, тогда в базис исх. задачи включаем вектор, к-му ств-ет min $\theta_{0j}\left(Z_j - C_j\right) = \min(0_1 - 8) = -8$, т.е. вектор A_2 с ключевым эл-ом 1, вектор A_4 исключаем из базиса.

Таблица 15

i	*C*	*Базис*	*в*	*2*	*4*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	0	A_3	–11	–3	–2	1	0	0	–15
2	0	A_4	2	–2	$\boxed{1}$	0	1	0	2
3	0	A_5	0	1	–3	0	0	1	–1
m+1			0	–2	–4	0	0	0	–6
1	0	A_3	–7	$\boxed{-7}$	0	1	2	0	–11
2	4	A_2	2	-2	1	0	1	0	2
3	0	A_5	6	-5	0	0	3	1	5
m+1			8	–10	0	0	4	0	2

Продолжение

i	*C*	*Базис*	*в*	*2*	*4*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
				A₁	*A₂*	*A₃*	*A₄*	*A₅*	
1	2	A₁	1	1	0	–1/7	–2/7	0	11/7
2	4	A₂	4	0	1	–2/7	3/7	0	36/7
3	0	A₅	11	0	0	–5/7	11/7	1	90/7
m+1			18	0	0	–10/7	8/7	0	124/7

Из табл.15 имеем, что $Z_3 - C_3 = -\dfrac{10}{7}$ и все x_{i3}<0, тогда согласно случая Б получаем max Z = ∞ и дв. задача не имеет решений.

Если на симплексной табл.16 реализовать дв. задачу

Найти min g = $-11y_1+2y_2+0\cdot y_3$ при огр-ях

$$\begin{cases}-3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 2\\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \qquad = 2\\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 \qquad -y_5 = 4,\end{cases} \text{ то}$$

в исходной же табл.16 обнаружим, что $Z_1 - C_1 = 11 > 0$ и все эл. $x_{i1} < 0$, тогда по случаю Б имеем min $g = -\infty$ и исх. задача не имеет решений.

Таблица 16

i	*C*	*Базис*	*в*	*–11*	*2*	*0*	*0*	*0*	$\sum$
				A₁	*A₂*	*A₃*	*A₄*	*A₅*	
1	0	A₄	2	–3	–2	1	–1	0	–3
2	0	A₅	4	–2	1	–3	0	–1	–1
m+1	$Z_j - C_j$		0	11	–2	0	0	0	9

ЛЕКЦИЯ 11

3.5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Значительная часть задач, относящихся к задачам ЛП требует целочисленного (цлч.) решения. К ним относятся задачи, у к-рых пер-ые вел. означают кол-во единиц (ед.)неделимой продукции, н-р, распределения производственных (прз.) заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по прз-ву неделимой продукции. Кроме того нередко встречаются и задачи, требующие частичного (не полностью) цлч-го решения. Все эти задачи составляют раздел МП под названием цлч-ое ЛП (ЦП).

Если единица расв-ой задачи ЦП составляет малую часть всего объема прз-ва, то опт. решение находят обычным симплексным способом. В противном случае округление может привести к решению, далекому от опт-го цлч-го решения. Поэтому здесь, кроме симплекс-метода, применяются и методы отсекающих гиперплоскостей, н-р, метод Гомори.

Особую разновидность задач с неделимостью составляют цлч-ые транспортные (тр.) задачи, в к-ых цлч-ть решения автоматически обеспечиваются при цлч-ти исходных данных. Данный раздел начнем с анализа и решения таких задач.

1^0. Транспортные задачи и методы их решения. Тр-ые задачи ЛП широко применяются как в теоретических разработках, так и в практике планирования различных экономических (экнч.) процессов. Особо важное значение она имеет при решении вопросов рационализации поставок важнейших видов промышленной и с/х-ой продукции, а также опт-го планирования грузопотоков и работы различных видов тр-та.

Приведем постановку задачи и ее мт-ю модель (см. 8^0: 3.1).

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков B_i в количестве $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ ед. ств-но, нх-мо доставить к потребителям A_j в кол. a_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ ед. Известна стоимость c_{ij} перевозки ед-ы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Требуется составить план перевозок так, чтобы общий расход был мнм-ым.

Обз-им через x_{ij} кол-во груза, запланированного к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда условие задачи можно записать в виде таб. 1, к-ую назовем матрицей планирования (см. также таб. 2 из 4^0 : 3.1).

Таблица 1

Потребители A_j B_i		A_1	A_2	. . .	A_n
Поставщики	Потребности a_j b_i запасы	a_1	a_2	. . .	a_n
B_1	b_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	. . .	x_{1n} c_{1n}
B_2	b_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	. . .	x_{2n} c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .
B_m	b_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	. . .	x_{mn} c_{mn}

Из табл. 1 получим мт-ую модель задачи:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= b_i, \quad i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= a_j, \quad j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Если в модели (1)–(3) имеет место условие $\sum b_i = \sum a_j$ ($\sum b_i > \sum a_i$ или $\sum b_i < \sum a_j$), то модель наз. закрытой (открытой).

Для закрытой модели тр-ой задачи верна

т1. Любая тр. задача, у к-ой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет решение.

Д. Для этого, нх-мо показать, что при заданных условиях сущ-ет хотя бы один план задачи и лин. фк-я на мн-ве планов огр-на.

Пусть $\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = M > 0.$ Тогда вел-ы $x_{ij} = \frac{b_i a_j}{M}(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ яв-ся планом, т.к. они уд-ют системе огр-й (2):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i \cdot a_j}{M} = \frac{b_i}{M}\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{b_i}{M} \cdot M = b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i \cdot a_j}{M} = \frac{a_j}{M}\sum_{i=1}^{m} b_i = \frac{a_j}{M} \cdot M = a_j.$$

Выберем из значений c_{ij} нб-шее $c' = \max c_{ij}$ и заменим в лин-ой фк. (1) все коэф. на c', тогда, учитывая (2), получим

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \le c'\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c'\sum_{j=1}^{n} a_j = c'M.$$

Выберем из значений c_{ij} нм-шее $c'' = \min c_{ij}$ и заменив в лин. фк. (1) все коэф. на c'', учитывая (2), получим

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \ge c''\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c''\sum_{j=1}^{n} a_j = c''M.$$

Объединяя два последних нерав-ва в одно двойное, имеем

$$c''M \le Z \le c'M,$$

т.е. лин. фк-я огр-на на мн-ве планов тр. задачи∎

Рассмотрим закрытую тр. задачу, т.е. задачу (1)–(3) с условием

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{4}$$

Тогда задача (1)–(3) содержит mn неизвестных и m+n ур-й, связанных стн-ем (4). Если сложить почленно ур-я отдельно подсистемы (2), то получим два одинаковых ур-ия (в табл. 1 такое сж. равнозначно ств-но почленному сж-ю столбцов и почленному сж. строк).

Наличие в системе огр-ий двух одинаковых ур-ий говорит об ее лин-й зависимости (зв.). Если одно из этих ур-й отбросить, то в общем случае система огр-ий должна содержать m+n-1 линейно неизв-ых ур-й, сд-но, невырожденный опорный план тр-ой задачи содержит m+n-1 плж-ых компонент или перевозок.

Т.о., если каким-либо способом получен невырожденный опорный план тр-ой задачи, то в матрице (x_{ij}) $\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$ значений его компонент (табл. 1) плж-ми яв-ся только m+n-1, а остальные равны нулю. При этом заполненные клетки наз-ся занятыми, а неиспользованные (т.е. содержимое к-ых равно нулю) клетки – свободными (или незанятыми). Занятие клетки ств-ют базисным пер-ым, и для невырожденного опорного плана их кол-во равно m+n-1. Если огр-ия тр. задачи записаны в виде (2), (3), то, как известно, базисным пер., включенным в опорный план, ств-ет система лин. незв-ых векторов. Опорность плана при записи условий тр-й задачи в виде таблицы (табл. 1) заключается в его ацикличности, т.е. в табл. нельзя построить замкнутый цикл, все вершины к-го лежат в занятых клетках.

Первоначальный опорный план тр-ой задачи, как задачи ЛП, можно построить ранее рас-ми схемами (способами), однако это сопряжено с большими выч-ми. Сущ-ет несколько простых схем построения первоначального опорного плана тр-й задачи, к-ые рас-им на примерах.

а. Схема северо-западного угла. Пусть условия тр. задачи заданы в табл. 1а. Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, начинаем уд-ие потребностей первого потребителя A_1 за счет поставщика B_1, в случае не уд-ия , за счет поставщика B_2 и так далее; аналогично уд-ем потребности второго потребителя A_2 за счет оставшихся поставщиков B_i и т.д. Процесс продолжим до уд-ия потребителей последнего потребителя A_5 (табл. 1а).

Таблица 1а

A_j a_j B_i b_i	A_1 200	A_2 200	A_3 100	A_4 100	A_5 250
B_1 100	⌊10 100	⌊7	⌊4	⌊1 100	⌊4
B_2 250	⌊2 100	⌊7 150	⌊10	⌊6	⌊11
B_3 200	⌊8	⌊5 50	⌊3 100	⌊2 50	⌊2
B_4 300	⌊11	⌊8	⌊12	⌊16 50	⌊13 250

Проверим, яв-ся ли план, построенный в табл. 1а, опорным. Видим, что, начиная от занятой клетки A_1B_1 (а также, начиная от любой занятой клетки A_jB_i) вернуться в нее, двигаясь по занятым клеткам, невозможно. Сд-но, план яв-ся опорным. В то время план невырожденный, т.к. содержит точно m+n-1=4+5-1=8 занятых клеток.

Найдем общую стоимость составленного плана из табл. 1а:

$Z= 100\cdot10+100\cdot2+150\cdot7+50\cdot5+100\cdot3+50\cdot2+50\cdot16+250\cdot3=6950$ (ед. стоимости).

б. Схема минимальной стоимости. Из всей табл. стоимостей выбираем нм-ю c_{ij} и в клетку, к-ая ей ств-ет, помещаем число $\alpha = \min(b_i, a_j)$. Затем из рас-ия исключаем строку, b_i или столбец a_j ств-но α , или же исключаем строку b_i и столбец a_j , если $b_i = a_j$. Из оставшейся части табл. стоимостей снова выбираем нм-ю c'_{ij} и поступаем аналогично c_{ij} и т.д. Процесс распределения запасов продолжаем, пока все запасы не будут распределены, а потребности уд-ны. Составим с помощью этой схемы опорный план на табл. 1б уже рас-ой задачи.

Таблица 1б

A_j a_j B_i b_i	A_1 200	A_2 200	A_3 100	A_4 100	A_5 250
B_1 100	⌊10	⌊7	⌊4	⌊1 100	⌊4
B_2 250	⌊2 200	⌊7 50	⌊10	⌊6	⌊11
B_3 200	⌊8	⌊5	⌊3	⌊2	⌊2 200
B_4 300	⌊11	⌊8 150	⌊12 100	⌊16	⌊13 50

Как видим из табл. 1б, план не содержит замкнутых циклов, сд-но, яв-ся опорным. Причем состоит из семи плж-ых перевозок, значит, он вырожденный. Т.о., план яв-ся вырожденным опорным планом. Определим его стоимость:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300 \text{ ед.}$$

Стоимость плана перевозок значительно меньше, сд-но, ближе к опт-у.

в. Схема двойного предпочтения. Если табл. стоимостей велика, то перебор всех эл-в затруднителен. В этом случае используют схему двойного предпочтения, су-ть к-го заключается в сд-ем.

В каждом столбце отмечают знаком V клетку с нм-ей стоимостью (если нм-ая стоимость содержится в нескольких клетках, то отмечают все ств-ие клетки этого столбца). Затем то же проделывают в каждой строке. В результате нек-ые клетки имеют отметку VV. В них находится мн-ая стоимость как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают мкс-но возможные объекты перевозок, каждый раз исключая из рас-ия ств-ие столбцы м строки. Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченным знаком V. В оставшейся части табл. перевозки распределяют по нм-ей стоимости. Составим с помощью этой схемы опорный план на табл. 1в уже рас-ой задачи.

Таблица 1в

A_j a_j B_i b_i	A_1 200	A_2 200	A_3 100	A_4 100	A_5 250
B_1 100	⌊10	⌊7	⌊4	VV ⌊1 100	⌊4
B_2 250	VV ⌊2 200	⌊7	⌊10 50	⌊6	⌊11
B_3 200	⌊8	V ⌊5	V ⌊3	⌊2	VV ⌊2 200
B_4 300	⌊11	V ⌊8 200	⌊12 50	⌊16	⌊13 50

План, полученный в табл. 1в яв-ся вырожденным опорным планом. Найдем его стоимость:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4250 \text{ ед.}$$

Т.о. нм-ю стоимость имеет опорный план, полученный схемой двойного предпочтения, сд-но, он наиболее близок к опт. плану. Но это не всегда так. Иногда более выгодным может оказаться схема мнм-ой стоимости в зв-ти от структуры данных задачи.

Теперь рас-им методы решения тр-ых задач.

1. Распределительный метод. Он яв-ся простейшим вариантом симплексного метода и основан на применении двух действий – сложения и вычитания, суть к-го объясним на

п1. Пусть однородный продукт, сосредоточенный в m=3 складах (B_1, B_2,B_3) = (А,Б,В) в кол. $b_i (i = \overline{1,3})$ ед. ств-но, нх-мо доставить по n=4 магазинам

(A_1,A_2,A_3,A_4) = (1,2,3,4) в кол. $a_j\,(j=\overline{1,4})$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го склада к j-му магазину. Предварительно получив первоначальный опорный план по схеме северо-западного угла из табл. 2, составить план перевозок так, чтобы общий расход был мнм-ым.

Таблица 2

A_j a_j \ B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	⌊1	⌊2	⌊3	⌊1
Б 400	⌊2	⌊4	⌊1	⌊3
В 200	⌊2	⌊1	⌊4	⌊2

Таблица 2а

A_j a_j \ B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	⌊1 300	⌊2 100	⌊3	⌊1 0
Б 400	⌊2	⌊4 250	⌊1 150	⌊3
В 200	⌊2	⌊1	⌊4	⌊2 200

Р. Используя схему северо-западного угла в табл. 2 получим опорный план. Найдем его стоимость:

$$Z_0 = 300\cdot1 + 100\cdot2 + 250\cdot4 + 150\cdot1 + 200\cdot2 = 2050 \text{ ед.}$$

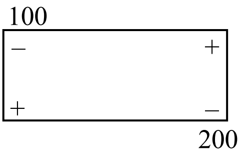
Для каждой свободной клетки проведем замкнутую ломаную линию, состоящую их горизонтальных и вертикальных отрезков прямых, причем одна из вершин этой ломаной находится в самой свободной клетке, а все др. величины находятся в занятых клетках. Такая замкнутая ломаная наз. циклом или контуром.

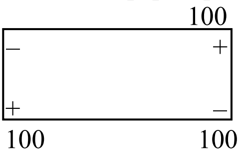
Занятые клетки ств-ют базисным пер-ым, и для невырожденного опорного плана их кол-во равно m+n-1. Всякий план тр-ой задачи, содержащий более m+n-1 занятых клеток, не яв-ся опорным, т.к. ему ств-ет лин. зв-я система векторов. При таком плане в табл. всегда можно построить замкнутый цикл, с помощью к-го уменьшают и число занятых клеток до m+n-1. Если же кол-во заполненных клеток меньше числа m+n-1, в свободные клетки с мнм-ми значениями стоимости перевозки следует вписать нули (и их считать занятыми), н-р, в табл. 2а занятых клеток 5<m+n-1=3+4-1=6, поэтому в клетку А4 пишем нуль.

Число вершин у ломаных всегда четное. Сами вершины разделим на два вида: плж-ые и отц-ые. Направление обхода надо взять опр-ой, н-р, против часовой стрелки. Вершину в свободной клетке всегда считаем плж-ой, а знаки остальных вершин чередуются. Тарифы C_{ij}, относящиеся к отц. вершинам, считаем отц-ми, к плж. вершинам – плж-ми. Написав эти тарифы по замкнутому циклу, находим их суммы и среди них выбираем нм. число, в ств. к-ый опр-ем клетку и для этой клетки перераспределяем опорный план. Так из табл. 2а для свободной клетки получим:

А3: 3-2+4-1=2
Б1: 2-4+2-1=-1
Б4: 3-1+2-4=0
В1: 2-2+1-1=0
В2: 1-2+1-2=-2
В3: 4-2+1-2+4-1=4.

Клетка В2 имеет нм. число и её план перераспределяем:





Результаты перераспределения плана запишем в табл. и находим

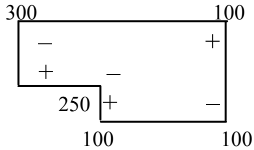
$$Z_1=300\cdot1+100\cdot1+250\cdot4+150\cdot1+100\cdot1+100\cdot2=1850 \text{ ед.}$$

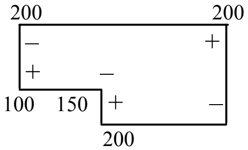
A_j a_j / B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	300 ⌊1	⌊2	⌊3	100 ⌊1
Б 400	⌊2	250 ⌊4	150 ⌊1	⌊3
В 200	⌊2	100 ⌊1	⌊4	100 ⌊2

Проверяем условие m+n-1=6, к-ое выполняется. Организуем вторую итерацию аналогично первой. Затем третью и т.д. до получения не отц-ых сумм тарифов по замкнутым контурам.

А2: 2-1+2-1=2
А3: 3-1+4-1+2-1=6
Б1: 2-4+1-2+1-1=-3
Б4: 3-4+1-2=-2
В1: 2-2+1-1=0
В3: 4-1+4-1=6.

Перераспределение производим по клетке Б1:



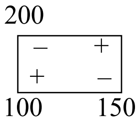


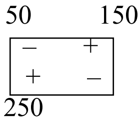
Результаты анализа клетки Б1 запишем в сд-ю табл.:

A_j a_j / B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	200 ⌊1	⌊2	⌊3	200 ⌊1
Б 400	100 ⌊2	150 ⌊4	150 ⌊1	⌊3
В 200	⌊2	200 ⌊1	⌊4	⌊2

$Z_2=200\cdot1+200\cdot1+100\cdot2+150\cdot4+150\cdot1+200\cdot1$ =1550 ед., проверяем m+n-1=6.

А2: 2-1+2-4=-1 Перераспределяем планы А2:
А3: 3-1+2-1=3
Б4: 3-1+1-2=1
В1: 2-1+4-2=3
В3: 4-1+4-1=6
В4: 2-1+1-2+4-1=3.





Перераспределение плана клетки А2 наносим в сд. табл.:

A_j a_j / B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	50 ⌊1	150 ⌊2	⌊3	200 ⌊1
Б 400	250 ⌊2	⌊4	150 ⌊1	⌊3
В 200	⌊2	200 ⌊1	⌊4	⌊2

Из этой табл. находим стоимость плана $Z_3=50\cdot1+150\cdot2+200\cdot1+250\cdot2+150+1+200\cdot1=1400$ ед.

Проверим m+n-1=6 и выч-им:
А3: 3-1+2-1=3
Б2: 4-2+1-2=1
Б4: 3-1+1-2=1
В1: 2-1+2-1=2
В3: 4-1+2-1+2-1=5
В4: 2-1+2-1=2

Т. к. среди сумм тарифов по замкнутым контурам нет отц-ых чисел, то получен опт-ый план: X*= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}; x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}; x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = (50, 150, 0, 200; 250, 0, 150, 0; 0, 200, 0, 0), Zmin=1400.

2. Симплексный метод решения транспортных задач. Рас-ный n1 решим симплекс-методом, написав её мт-ю модель.

п2. Найти

$$\min Z=x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+x_{14}+2x_{21}+4x_{22}+x_{23}+3x_{24}+2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}, \qquad (5)$$

при огр-ях

$$\left.\begin{array}{lllll}
(y_1) & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & =400 \\
(y_2) & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & =400 \\
(y_3) & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & =200 \\
(y_4) & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & =300 \\
(y_5) & \quad x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{32} & =350 \\
(y_6) & \qquad x_{13} & \qquad +x_{23} & \qquad +x_{33} & =150 \\
 & \qquad\quad x_{14} & \qquad\quad +x_{24} & \qquad\quad +x_{34} & =200,
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}. \qquad (7)$$

Отметим, что уравнения системы (6) лин. зв-ы, поэтому одно ур-ие (н-р, последнее ур.) можно отбросить. Дсв-но, вместо последнего ур-ия можно взять ур-ие (складывая последние четыре эр.):

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1000,$$

откуда, вычитав сумму первых трёх ур-й, получим: 0+0+…+0=0, т.е. последнее ур. можно просто вычеркнуть.

Учитывая это, сформулируем мт-ю модель дв-ой задачи:

$$\max y = 400y_1+400y_2+200y_3+300y_4+350y_5+150y_6 \qquad (5')$$

$$\left.\begin{array}{llllll}
y_1 & & & +y_4 & & \leq 1 \\
y_1 & & & & +y_5 & \leq 2 \\
y_1 & & & & \quad +y_6 & \leq 3 \\
y_1 & & & & & \leq 1 \\
 & y_2 & & +y_4 & & \leq 2 \\
 & y_2 & & & +y_5 & \leq 4 \\
 & y_2 & & & \quad +y_6 & \leq 1 \\
 & y_2 & & & & \leq 3 \\
 & & y_3 & +y_4 & & \leq 2 \\
 & & y_3 & & +y_5 & \leq 1 \\
 & y_3 & & & +y_6 \quad \leq 4 & \\
 & & y_3 & & & \leq 2
\end{array}\right\} \qquad (6')$$

$$y_i\,(i=\overline{1.6}) - \text{произвольные}. \qquad (7')$$

Найдём опорный план исх. задачи по схеме мнм-ой стоимости (табл.3) и решим её симплекс-методом (табл. 4)

Таблица 3

A_j / a_j / B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200
А 400	$\lfloor 1$ 300	$\lfloor 2$	$\lfloor 3$	$\lfloor 1$ 100
Б 400	$\lfloor 2$	$\lfloor 4$ 150	$\lfloor 1$ 150	$\lfloor 3$ 100
В 200	$\lfloor 2$	$\lfloor 1$ 200	$\lfloor 4$	$\lfloor 2$

Из табл. 3 получим стоимость плана: Z_0=300·1+100·1+150·4+150·1+ +100·3+200·1=1650, что сущ-но меньше стоимости z_0=2050, найденный по схеме северо-западного угла. Проверяем условие m+n–1=6, к-ое выполняется, значит, найден невырождённый опорный план. Используя его, составим табл.4 согласовав систему с этим опорным планом. Для этого систему ур-й исх. задачи решим отн-но базисных пер. $x_{11}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}$:

$$\min z = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{21} \qquad - x_{31} \qquad &= 100\\
-x_{12} - x_{13} \quad + x_{21} \qquad + x_{24} + x_{31} \qquad + x_{34} &= 100\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 200\\
x_{11} \qquad + x_{21} \qquad + x_{31} \qquad &= 300\\
x_{12} \qquad + x_{22} \qquad - x_{31} \quad - x_{33} - x_{34} &= 150\\
x_{13} \qquad + x_{23} \qquad + x_{33} \qquad &= 150
\end{aligned}\right\}$$

В табл. 4 сначала исключает эти базисные пер. из индексной строки (т. е. целевой фк.), а затем решаем задачу симплекс-методом. При этом для удобства выч-й кр. сумму $\sum$ проверяем без учёта столбца “*в*”.

Из табл. 4 получим опт-ый план задачи:

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{32}) = (50, 150, 200, 250, 150, 200),$$

$$x_{13} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = x_{34} = 0,\ z_{\min} = 1400\,.$$

Заметим, что, решив этот пример распределительным методом получили такой же ответ. Однако решение его симплекс-методом гораздо сложнее.

Таблица 4

i	с	Базис	в	1	2	3	1	2	4	1	3	2	1	4	2	Σ
				X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
1	1	X_{14}	100		1	1	1	-1				-1				1
2	3	X_{24}	100		-1	-1		$\boxed{1}$			1	1			1	2
3	1	X_{32}	200									1	1	1	1	4
4	1	X_{11}	300	1				1				1				3
5	4	X_{22}	150		1				1			-1		-1	-1	-1
6	1	X_{23}	150			1				1				1		3
m+1	z_i–c_j		0	-1	-2	-3	-1	-2	-4	-1	-3	-2	-1	-4	-2	-26

Продолжение

i	c	Базис	в	1	2	3	1	2	4	1	3	2	1	4	2	Σ
				X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
			100	-1	-1	-2	0	-3	-4	-1	-3	-3	-1	-4	-2	-25
			400	-1	-4	-5	0	0	-4	-1	0	0	-1	-4	1	-19
			600	-1	-4	-5	0	0	-4	-1	0	1	0	-3	2	-15
			900	0	-4	-5	0	1	-4	-1	0	2	0	-3	2	-12
			1500	0	0	-5	0	1	0	-1	0	-2	0	-7	-2	-16
	$z_i – c_j$		1650	0	0	-4	0	1	0	0	0	-2	0	-6	-2	-13
1	1	X_{14}	200				1				1				1	3
2	2	X_{21}	100		-1	-1		1			1	1			1	2
3	1	X_{32}	200									1	1	1	1	4
4	1	X_{11}	200	1	1	1					-1				-1	1
5	4	X_{22}	150		$\boxed{1}$				1			-1		-1	-1	-1
6	1	X_{23}	150			1				1				1		3
m+1	$z_i – c_j$		1550	0	1	-3	0	0	0	0	-1	-3	0	-6	-3	-15
1	1	X_{14}	200				1				1				1	3
2	2	X_{21}	250			-1		1	1		1			-1		1
3	1	X_{32}	200									1	1	1	1	4
4	1	X_{11}	50	1		1			-1		-1	1		1		2
5	2	X_{12}	150		1				1			-1		-1	-1	-1
6	1	X_{23}	150			1				1				1		3
m+1	$z_i – c_j$		1400	0	0	-3	0	0	-1	0	-1	-2	0	-5	-2	-14

3. Метод потенциалов. Предварительно док-ем сд-ю

т2. Если план $x^* = \left\{x_{ij}^*\right\}$ тр-ой задачи яв-ся опт-ым, то ему ств-ет система из m+n чисел u_i^* и v_j^*, уд-их условиям

$$\left.\begin{array}{l} u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0 \\ \\ u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0 \end{array}\right\} \quad (i = \overline{1,m}\ ,\ j = \overline{1,n})\ .$$

и

Числа u_i^* и v_j^* наз. потенциалами ств-но поставщиков и потребителей.

Д. Тр. задачу мнмз-ции лин-ой фк.g = $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = b_i \quad ,\ i = \overline{1,m}\ , \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = a_j \quad ,\ j = \overline{1,n}\ , \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \ (i = \overline{1,m}\ ,\ j = \overline{1,n})$$

можно расв-ть как дв-ю нек-ой исх. задачи ЛП, условия к-ой получают по общей схеме дв-сти $(2^0 : 3.4)$, если каждому огр-ю вида $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = b_i$ в исх. задаче ств-ет пер. $u_i (i = \overline{1, m})$, а каждому огр. вида $x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = a_j$ – пер. $v_j \left(j = \overline{1, n} \right)$, а именно мксз-ть лин-ю фк. $z = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ при огр-ях $u_i + v_j \le c_{ij} \left(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right)$. План x^* – опт-ый план дв-ой задачи поэтому план $y^* = \left(u_i^*, v_j^* \right)$ яв-ся планом исх. задачи и на основании $m1$ (двойственности) из $3^0 : 3.4$ имеем

$$\max Z = \min g$$

или
$$\sum_{i=1}^{m} b_i u_i^* + \sum_{j=1}^{m} a_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*, x_{ij}^* \ge 0 \text{.}$$

На основании т2 из $5^{0;} : 3.4$ получаем:

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0,$$
$$u_i^* + v_j^* \le 0 \text{ для } x_{ij}^* = 0.$$

На основании т2 для того чтобы опорный план был опт-ым, нх-мо выполнение сд-ых условий:

а) для каждой занятой клетки должно выполняться условие

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0 \left(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right). \qquad (8)$$

В системе (8) $m + n$ ур-й, как показали выше , они лин-но зв-ы (для лин-й незв-ти нх-мо взять $m + n - 1$ ур-й при $m + n - 1$ занятых клетках; если число занятых клеток меньше $m + n - 1$, то в свободные клетки с $\min c_{ij}$ следует писать нули до получения $m + n - 1$ занятых клеток), поэтому полагаем $u_i = 0$ (в качестве i выбираем строку, где нб. число занятых клеток), н-р, $u_1 = 0$ и все остальные $\{u_i\}, \{v_j\}$ находим из (8), к-ых записываем в симплексную табл.

б) для каждой свободной клетки должно иметь место

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \left(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right). \qquad (9)$$

Если хотя бы одна свободная клеточка не уд-ет условию (9), то опорный план яв-ся неоптимальным и его можно улучшить, перемещая нек-ое кол. груза в клетку, где нарушается это условие.

Пусть для свободной клетки $u_i + v_j > c_{ij}$, то число $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$ записываем в левый нижний угол этой же клетки. Аналогично поступаем остальными сводными клетками, и для к-ых $\alpha_{ij} > 0$. Выбираем число $\alpha = \max \alpha_{ij}$ и в клетку $c_{ij} \left(\alpha \right)$, где находится число α, перемещаем нек-ое

θ_0 кол. единиц груза. Для этого, начиная со свободной клетки $c_{ij}(\alpha)$ и присваиваем ей знак «+», проводим замкнутый контур против часовой стрелки по занятым клеткам (как это делали для распределительного метода), чередуя в вершинах контура знаки «+» и «-». Эти вершины ств-но обз-им через $x_{ij}(+)$ и $x_{ij}(-)$. Выбираем число $\theta_0 = \min x_{ij}(-)$ и перемещаем θ_0 из клеток $\{x_{ij}(+)\}$ в клетки $\{x_{ij}(-)\}$ аналогично распределительного метода. На этом заканчиваем первую итерацию.

Вторую итерацию начинаем с исправления потенциалов U_i и V_i, к-ые нарушались в результате перемещения кол-ва ед. грузов в первой итерации. Все остальные процедуры итерации проделаем аналогично первой итерации и т. д.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие (9) для всех свободных клеток.

Все сказанное продемонстрируем на сд-ем

п3. Однородные продукты (см. п1) в m=3 складах (А, Б, В) в кол-ве $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ единиц ств-но нх-мо доставить по $n=4$ магазинам (1, 2, 3, 4) в кол-ве $a_j\left(j=\overline{1,4}\right)$ единиц со стоимостью c_{ij} перевозки единицы груза от *i*-го склада к j-му магазину (значения $\{b_i\}$, $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ заданы в табл. 5).

Предварительно получив первоначальный опорный план по схеме двойного предпочтения из табл. 5, составить план перевозок с помощью метода потенциалов так, чтобы расход был мнм-ым.

Таблица 5

A_j / a_j / B_i b_i	1 300	2 350	3 150	4 200	
А 400	1	2	3	1	
Б 400	2	4	1	3	
В 200	2	1	4	2	

Таблица 5а

	1	2	3	4
V_j / a_i / U_i b_i	$V_1=3$ 300	$V_2=4$ 350	$V_1=1$ 150	$V_4=3$ 200
$U_1= -2$ 400	VV 1 300	2	3	VV 1 100
$U_2= 0$ 400	2 1	4 150	VV 1 150	3 100
$U_3= -3$ 200	2	VV 1 200	4	2

Р. Используя схему двойного предпочтения, в табл. 5а получим первоначальный опорный план, к-ый яв-ся невырожденным, т. к. выполняется условие $m+n-1=3+4-1=6$. Из табл. 5а находим стоимость плана: $z_0 = 300\cdot 1+100\cdot 1+150\cdot 4+150\cdot 1+100\cdot 3+200\cdot 1 = 1650$ к-ый впадает со стоимостью Z_0 =1650, найденной по схеме мим-ой стоимости.

Из табл. 5а составляем систему (8) для нахождения потенциалов $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$, полагая $u_2 = 0$, т.к. на строке i = 2 три занятых клеток.

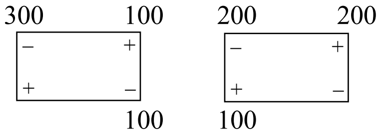
$u_1 + v_1 = 1$		$u_1 + v_1 = 1$		$-2 + v_1 = 1, v_1 = 3$
$u_1 + v_4 = 1$		$u_1 + 3 = 1$	$u_1 = -2$	
$0 + v_2 = 4$	$v_2 = 4$			
$0 + v_3 = 1$	$v_3 = 1$			
$0 + v_4 = 3$	$v_4 = 3$			
$u_3 + v_2 = 1$		$u_3 + 4 = 1$	$u_3 = -3$	

Найденное потенциалы напишем в табл. 5а и проверяем правильность их нахождения. Для свободных клеток находим числа $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$

$u_1 + v_2 - c_{12} = -2 + 4 - 2 = 0,$ $u_3 + v_1 - c_{31} = -3 + 3 - 2 = -2,$

$u_1 + v_3 - c_{13} = -2 + 1 - 3 = -4,$ $u_3 + v_3 - c_{33} = -3 + 1 - 4 = -6,$

$u_2 + v_1 - c_{21} = 0 + 3 - 2 = 1 > 0,$ $u_3 + v_4 - c_{34} = -3 + 3 - 2 = -2.$



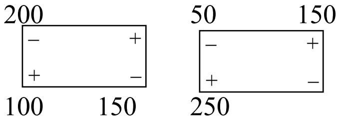
Здесь $\alpha_{ij} = \alpha_{21} = 1,$ тогда $\alpha = \max \alpha_{ij} = \alpha_{2i} = 1$. В клетку $c_{21}(1)$ присваиваем знак "+" и начиная от нее, проводим замкнутый контур прочив часовой стрелки по занятым клеткам, чередуя в вершинах контура знаки "+" и "-", к-ых обз-им $x_{ij}(+)$ и $x_{ij}(-)$. Выбираем число $0_0 = \min x_{ij}(-) = \min(300,\ 100) = 100.$ Число $0_0 = 100$ перемещаем из клеток $x_{ij}(-)$ с клетки $x_{ij}(+)$.

Результаты перераспределения плана запишем в табл. и находим

$$z_1 = 200 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 4 + 150 \cdot 1 + 200 \cdot 1 = 1550 \text{ (ед)}.$$

V_j a_j U_i b_i	$V_1=2$ 300	$V_2=4$ 350	$V_3=1$ 150	$V_4=2$ 200
$u_1 = -1$ 400	200 $\lfloor 1$	$\lfloor 2$	$\lfloor 3$	200 $\lfloor 1$
$u_2 = 0$ 400	100 $\lfloor 2$	150 $\lfloor 4$	150 $\lfloor 1$	$\lfloor 3$
$u_3 = -3$ 200	$\lfloor 2$	200 $\lfloor 1$	$\lfloor 4$	$\lfloor 2$

Проверяем условие $m+n-1=6$, к-ое выполняются. В табл. исправляем потенциалы, к-ые нарушались при перемещении грузов. В этой же табл. находим числа $\alpha_i = u_i + v_j - c_{ij} > 0$, к-ых напишем в левый нижний угол этих клеток. Здесь $\alpha_{ij} = \alpha_{12} = 1 > 0$, отсюда $\alpha = \max \alpha_{ij} = \alpha_{12} = 1$. Выбираем число $\theta_0 = \min x_{ij}(-) = = \min(200,150) = 150$ и числа $\theta_0 = 150$ перемещаем из клеток $x_{ij}(-)$ в клетки $x_{ij}(+)$.



Результаты перераспределения плана запишем в табл. и выч-им

$$z_2 = 50\cdot 1 + 150\cdot 2 + 200\cdot 1 + 250\cdot 2 + 150\cdot 1 + 200\cdot 1 = 1400 \text{ (ед).}$$

$V_j a_j$ / $U_i b_i$	$V_1=1$ 300	$V_2=2$ 350	$V_3=0$ 150	$V_4=1$ 200
$u_1=0$ 400	50 $\lfloor 1$	150 $\lfloor 2$	$\lfloor 3$	200 $\lfloor 1$
$u_2=1$ 400	250 $\lfloor 2$	$\lfloor 4$	150 $\lfloor 1$	$\lfloor 3$
$u_3=-1$ 200	$\lfloor 2$	200 $\lfloor 1$	$\lfloor 4$	$\lfloor 2$

Условие $m+n-1=6$ выполняется. Исправляем потенциалы u_i и v_j, взяв $u_1=0$, т. к. в строке $i=1$ находятся три занятных клеток. Для сводных клеток находим числа $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$. Таких чисел нет, т. е. выполняется условие (9) для всех свободных клеток, значит, найден опт. план

$$x^* = (x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{32}) = (50, 150, 200, 250, 150, 200), \text{ а}$$

$x_{13} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = x_{34} = 0, z_{\min} = 1400,$ что совпадает результатами п1 и п2 решенными др. методами.

2°. Открытая модель транспортной задачи. Тр. задачи, в к-ой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняются условие $\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$ наз. закрытой моделью; в противном случае открытой. Для открытой модели может быть два случая: а) суммарные запасы превышают суммарные потребности $\sum b_i > \sum a_j$; б) суммарные потребности превращают суммарные запасы $\sum b_i < \sum a_j$.

Лин-я фк. одинакова в обоих случаях, изменяются только системы огр-й.

Найти мнм-ое значение лин-й фк. $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при огр-ях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, i = \overrightarrow{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, j = \overrightarrow{1,n}. \end{cases} \quad \text{(случай а)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, i = \overrightarrow{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_j, j = \overrightarrow{1,n}. \end{cases} \quad \text{(случай б)}$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика полагают равными нулю, т. к. груз в обоих случаях не перевозится.

После преобразований задача принимает вид закрытой модели и решается обычным способом.

п4. Методом потенциалов составить план перевозных грузов с нм-ей стоимость от четырех поставщиков $B_i = \left(i = \overline{1,4}\right)$ ств-но в кол-ах 100, 400, 100 и 100 ед. к пяти потребителям и $A_j \left(j = \overline{1,5}\right)$ ств-но в кол-ах 50,100, 150, 200 и 250; стоимости перевозок ед-ы груза приведены в

Таблица 6

A_j / B_i	A$_1$	A$_2$	A$_3$	A$_4$	A$_5$
B$_1$	1	6	8	12	14
B$_2$	16	10	8	6	15
B$_3$	4	1	9	11	13
B$_4$	3	2	7	7	15

Р. Выч-им суммарные запасы и потребности: $\sum_{i=1}^{4} b_i = 700$ и $\sum_{j=1}^{n} a_j = 750.$

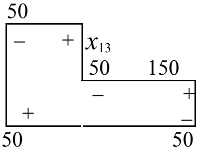
Потребности превышают запасы на 50 ед. Поэтому нх-мо ввести фиктивного поставщика B_{m+1}, объем запасов к-го $b_{m+1} = 50$ ед. Первоначальный опорный план составим по схеме мнм-ой стоимости, (табл.7) выбрав только стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (потребности фиктивного потребителя) распределяем в последнюю очередь. Это позволит получить план, более близких к опт-у. Отмеченное выше используем также при введении фиктивно занятых клеток.

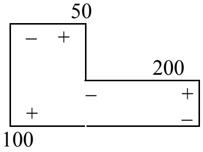
Таблица 7

Матрица планирования		Потребители				
		A$_1$	A$_2$	A$_3$	A$_4$	A$_5$
Постав-щики	$v_j a_j$ $u_i b_i$	-9 50	-4 100	8 150	6 200	15 250
B$_1$	10 100	1 50	6 50	8 10	12 4	16 9
B$_2$	0 400	16	10	8 50	6 150	15 200
B$_3$	5 100	4	1 50	9 4	11 50	13 7
B$_4$	–1 100	3	2	7 100	7	15
B$_{m+1}$	–15 50	0	0	0	0	0 50

Из табл. 7 получим Z_0=50·1+50·1+50·8+150·6+200·15+50·1+50·11+100·7+ 50·9=5950 ед. Условие m+n-1=5+5-1=9 выполняется, значит, опорный план невырожденный. Опр-ем по табл. 7 потенциалы, пологая $u_2 = 0$ т.к. в строке i =2 находятся мкс. число занятых клеток.

По найденным потенциалам для свободных клеток находим числа $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$, к-ых пишем в левый нижний угол ств-их клеток. Опр-ем число $\alpha = \max(10,4,9,4) = 10 = \alpha_{13}$, к-ое ств-ет клетку $x_{13} = x_{13}(+)$ (ей присваиваем знак „+”). Начиная с клетки $x_{13}(+)$ проводим замкнутый контур против часовой стрелки по занятым клеткам, чередуя в вершинах контура знаки „+” и „–”, к-ых обз-им $x_{ij}(+)$ и $x_{ij}(-)$. Опр-ем число $\theta_0 = \min x_{ij}(-) = \min(50,50,50) = 50$.





Число θ_0 =50 перемещаем из клеток $x_{ij}(-)$ в клетки $x_{ij}(+)$. Их наносим в табл. 8. Выч-ем $z_1 = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 8 + 200 \cdot 6 + 200 \cdot 15 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 7 + 50 \cdot 0 = 5450$ ед.

Таблица 8

Матрица планирования		Потребители				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Поставщики	$v_j a_j$ $u_i b_i$	1 50	-3 100	8 150	6 200	15 250
B_1	0 100	1 50	6	8 50	12	16
B_2	0 400	16	10	8 0	6 200	15 200
B_3	-2 100	4	1 100	9	11	13 0
B_4	–1 100	3	2 0	7 100	7	15
B_{m+1}	–15 50	0	0	0	0	0 50

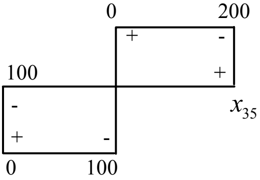
Полученный опорный план вырожденный, т.к. условие $m + n - 1 = 9$ не выполняется. Поэтому пологаем $x_{42} = 0, x_{23} = 0$. При этом сделаем

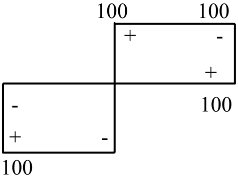
зм.1. Удачный выбор клеток для засылки нулей, при не выполнения условия $m + n - 1$ для занятных клеток, очень важен как для метода потенциалов, так и для распределенного метода. Здесь нх-мо придерживаться сд-их правил: выбираем клетки с нм-ей стоимостью перевозок и после заполнения их нулями до выполнения условия $m+n-1$, занятые клетки должны образовать ступеньки лестницы. Причем, если две занятые клетки расположены рядом по диагонали, то нуль засылаем в ту клетку, к-ые образовали бы с выбранной клеткой ступеньки лестницы, как это делали в табл. 8.

Далее опр-ем потенциалы, (пологая $u_2 = 0$, т.к. в строке $i = 2$ содержится мкс. число занятых клеток), как показано на табл. 8.

Находим числа $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$. Таких чисел нет, значит, получено опт. решение $x^* = (x_{11}, x_{13}, x_{24}, x_{25}, x_{32}, x_{43}, x_{55}) = (50, 50, 200, 200, 100, 100, 50)$, остальные пер. нули, $z_{\min} = 5500$.

зм2. Если число $\alpha_{ij} = 0$, то решение задачи не единственное. Так $\alpha_{ij} u_i + v_j - c_{ij} = -2 + 15 - 13 = 0 = \alpha_{35}$. Тогда пологая $x_{35}(+) = 0$, образуя замкнутый контур и опр-ив $\theta_0 = \min x_{ij}(-) = \min(200, 100, 100) = 100$, получим:





Результаты напишем в табл. 9. Условие $m+n-1$ не выполняется, поэтому пологаем $x_{32} = 0$. Опр-ем потенциалы. Находим числа $\alpha_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$ таких чисел нет. Но есть $\alpha_{43} = 0$. Если учитывая это, переместим грузы, то опять получим решение табл. 8. Из табл. 9 получим $x^* = (x_{11}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{35}, x_{42}, x_{55}) = (50, 50, 100, 200, 100, 100, 100, 50)$, все остальные пер. равны нулю;

Таблица 9

Матрица планирования		Потребители				
		A$_1$	A$_2$	A$_3$	A$_4$	A$_5$
Поставщики	$v_j a_j$ / $u_i b_i$	1 50	3 100	8 150	6 200	15 250
B$_1$	0 100	1 50	6	8 50	12	16
B$_2$	0 400	16	10	8 100	6 200	15 100
B$_3$	-2 100	4	1 0	9	11	13 100
B$_4$	–1 100	3	2 100	7 0	7	15
B$_{m+1}$	–15 50	0	0	0	0	0 50

$z_{\min} = 50\cdot 1 + 50\cdot 8 + 100\cdot 8 + 200\cdot 6 + 100\cdot 15 + 100\cdot 13 + 100\cdot 2 + 50\cdot 0 = 5450,$ что совпадает с $z_{\min} = 5450,$ найденный по табл.8.

зм3. Процедуры метода потенциалов, так и распределенного метода аналогичны процедурам симплекс-метода. Так нахождение числа $\alpha = \max \alpha_{ij}$ аналогичен поиску $\max\left(z_j - c_j\right)$ из индексной строки при решении задач на $\min$. А опр-ся числа $\theta = \min x_{ij}\,(-)$ аналогичен к нахождению чисел $\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{ij}}$. Выполнение условия $\alpha_{ij} = 0$ (в этом случае опт. план неединственный) аналогичен случаю Аб в симплексном методе.

3^0. Постановка задачи целочисленного ЛП и метод Гомори. Задачи ЦП формулируется так же, как и задача ЛП, но добавляется условие цлч-сти пер-ых, т. е. найти

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{10}$$

при огр-ях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = \overline{1,m} \tag{11}$$

$$x_j \geq 0\,,\ j = \overline{1,n} \tag{12}$$

$$x_j \text{ -целые, } j = \overline{1,n} \tag{13}$$

Пусть задача ЛП имеет мгр-ик решений, приведенный на рис. 1. Если наложить требование цлч-сти, то допустимое мн. решений такой задачи представляет собой совокупность изолированных цлч-ых точек и не яв-ся выпуклым. Если добавить новые огр., связывающие внешние цлч. точки, а затем в качестве мгр-ка решений использовать все выпуклое мн., огр-ое осями крд-т и новым контуром (рис. 2), то получим новую задачу ЛП со сд. св-ми:

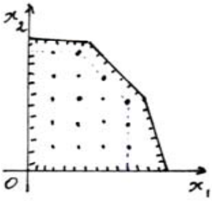


Рис. 1

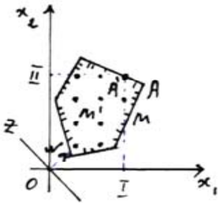


Рис. 2

1) новый мгр-к решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном мгр-ке решений; любая его угловая точка яв-ся целой;

2) т. к. лин. фк-я достигает оптимума в угловой точке мгр-ка решений, то построением такого мгр. обеспечивается цлч-ть опт-го решения.

Метод решения поставленной задачи, предложенной Гомори, основан на симплексном методе и состоит в сд-ем. Симплексным методом находится опт. план задачи без учета условия цлч-ти. Если опт. план цлч-ый, то выч-ия заканчивают; если же опт. план содержит хотя бы одну дробную компоненту

x_i , то накладывают дпн-ое огр., учитывающее, цлч-ть компонент плана, выч-ия симплексным методом продолжают до получения нового опт. плана, если и он яв-ся нецелочисленным (нецлч.) составляют сд. огр-ие, учитывающее цлч-ть. Процесс присоединения дпн-ых огр-й повторяют до тех пор, пока либо будет найден цлч-ый опт. план, либо доказано, что задача не имеет цлч-ых планов. Это имеет место в случае, если для дробного x_i все x_{ij} в этой строке окажутся целыми.

4^0 Составление дополнительного ограничения. Пусть опт. план $X=(x_1,x_2,...,x_i,...,x_m,x_{m+1,}...,x_n)$ получен на базисе $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_i,...,\mathrm{A}_m$; тогда последняя симплексная табл. имеет сд-й вид:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0\ldots & 0 & \ldots 0 & x_{1,m+1} & \ldots x_{1i} & \ldots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1\ldots & 0 & \ldots 0 & x_{2,m+1} & \ldots x_{2i} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & .\,. & . & .\,. & . & .\,. & . & . \\ \\ x_i & & 0\ldots & 1 & \ldots 0 & x_{i,m+1} & \ldots x_{ij} & \ldots & x_{in} \\ x_m & & 0\ldots & 0 & \ldots 1 & x_{m,m+1} & \ldots x_{mi} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Предположим, что x_i - дробное; тогда нек-ые x_{ij} - так же дробные (в противном случае задача не имеет цлч-го решения Обз-им через $[x_i]$ и $[x_{ij}]$ $(\{x_i\}\text{и}\{x_{ij}\})$ целые (дробные) части чисел x_i и x_{ij} . тогда вел-ы дробных частей $\{x_i\}\text{и}\{x_{ij}\}$ чисел x_i и x_{ij} опр-ся как разности:

$$x_i-[x_i]=\{x_i\} \text{ и } x_{ij}-[x_{ij}]=\{x_{ij}\}$$

где $\{x_i\}$ и $\{x_{ij}\}$ – неотрц-ые. Н-р, $[8/3]=2$, $[-8/3]=-3$; $8/3-[8/3]=8/3-2=2/3$, $-8/3-[-8/3]=-8/3+3=1/3$.

Т. к. по услвию $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$- неотц. целые числа, то разность $\left[\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j-\{a_{i0}\}\right]\geq 0$ также целое число, т. е. $\sum\{a_{ij}\}xj-\{a_{i0}\}\geq 0$ или

$$\{a_{i0}\}-\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j\leq 0, \tag{14}$$

где i - номер строки с нб. значением $\{a_{io}\},\{a_{ij}\}$ – элементы этой строки. Стн-ие наз. I-ым сечением Гомори. Для решения частично цлч-ой задачи (его можно использовать и для полностью цлч-ых задач) используется II-ое сечение Гомори:

$$\{a_{i0}\}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j\leq 0\,, \tag{14$'$}$$

где α_{ij} - коэф., опр-ые из сд-их стн-й:

1) для x_j, не подчиненных требованиям цлч-ти,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{ если } a_{ij} \ge 0 \\ \dfrac{\{a_{i0}\}}{1-\{a_{i0}\}} \cdot |a_{ij}|, \text{ если } a_{ij} < 0\ ; \end{cases} \qquad (14а)$$

2) для x_j, подчиненных требованиям цлч-ти,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \{a_{ij}\}, \text{ если } \{a_{ij}\} \le \{a_{i0}\}, \\ \dfrac{\{a_{i0}\}}{1-\{a_{i0}\}} \cdot \left(1-\{a_{ij}\}\right), \text{ если } \{a_{ij}\} > \{a_{i0}\}. \end{cases} \qquad (14б)$$

5^0. Задачи с целочисленным решением. Рас-им задачи цлч-го решения. Прб-уя нерав. (14) в ур-ие, прибавляя к его левой части целую неотц. дополнительную (дпн.) пер-ю x_{n+1}, добавим к последней симплексной табл. и, применяя дв-ый симплексный метод, находим новый план. Если он не яв-ся цлч-ым, то по последней симплексной табл. составим новое дпн. огр.

Если в опт. плане несколько дробных x_i, то дпн-ое огр. составляем для $\max\{x_i\}$. Это ускоряет процесс получения опт. цлч-го решения.

Т. о. сначала решаем задачу (10)–(12) обычным симплекс-методом, затем продолжаем решать задачу (10)–(13) дв-ым симплекс-методом, привлекая стн. (14) вместо (13) и т. д., т. е. решаем задачи $P_0, P_1, P_2, \ldots$

Рас-им геом-й смысл введения дпн-го огр-я (рис. 2). Пусть в точке А мгр-ка решений М целевая фк. Z достигает макс-го значения $Z(A) = Z_{\max}$, но крд-ы точки А –дробные. Тогда введенные огр-ия по цлч-ти I и II от. обл. М отсекает обл. М′ с угловой точкой А′, крд-ы к-ой цлч-ые и в к-ой лин. Фк-я достигает мкс-го значения.

Метод Гомори демонстрируем на сд-ем

п5. Найти $\min Z = x_1 - x_2 - 3x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 \qquad + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \text{ - целые}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Р. Сначала задачу решим без учета цлч-ти x_j, приводя ее к виду

Найти $\min Z = x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad = 2 \\ 3x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_6 = 5, \end{cases} \qquad x_j \ge 0 \left(j = 1,6\right).$$

Составим симплексную табл. 10, выбрав за базис A_4, A_5, A_6 и за ключевой эл-т 1 по $\max\left(Z_j - C_j\right) = \max\left(-1,1,3\right) = 3, \min\frac{x_i}{x_{ij}} = \min\left(\frac{2}{1},\frac{5}{1}\right) = 2,$ и реализуем первую итерацию. Так продолжаем до получения опт. плана задачи.

Таблица 10

	i	C	Базис	b	1	-1	-3	0	0	0	Σ
					A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
I	1	0	A_4	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	4
	2	0	A_5	2	-4	2	-1	0	1	0	0
	3	0	A_6	5	3	0	1	0	0	1	10
	m+1			0	-1	1	3	0	0	0	3
II	1	-3	A_3	1	2	-1	1	1	0	0	4
	2	0	A_5	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	4
	3	0	A_6	4	1	1	0	-1	0	1	6
	m+1			-3	-7	4	0	-3	0	0	-9
III	1	-3	A_3	4	0	0	1	2	1	0	8
	2	-1	A_2	3	-2	1	0	1	1	0	4
	3	0	A_6	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	2
	m+1			-15	1	0	0	-7	-4	0	-25
IV	1	-3	A_3	4	0	0	1	2	1	0	8
	2	-1	A_2	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	16/3
	3	1	A_1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	2/3
	m+1			-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	-77/3

Т. к. в $\left(m+1\right)$- й строке IV-й итерации табл. 10 все оценки $Z_j - C_j \leq 0$, то получено опт. решение $X_{\text{опт.}} = \left(\frac{1}{3},\frac{11}{3},4\right)$, $Z_{\min} = -\frac{46}{3}$. Причем в силу случая $Aa\left(\text{см.}5^0 : 3.2\right)$ опт. план единственный.

В найденном опт. плане $X_{\text{опт.}} = \left(\frac{1}{3},\frac{11}{3},4\right)$ свободные пер. x_1 и x_2 - дробные. Запишем последнюю итерацию, составим дпн-ое огр. и продолжим процесс до получения цлч-го решения (табл. 11). Дпн-ое огр. составим для $x_2 = \frac{11}{3}$, имеющего нб-ю дробную часть: $\{x_2\} = x_2 - [x_2] = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$,

$$\{x_{21}\} = \{x_{22}\} = \{x_{23}\} = 0, \{x_{24}\} = x_{24} - [x_{24}] = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3},$$

$$\{x_{25}\} = x_{25} - [x_{25}] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}, \ \{x_{26}\} = x_{26} - [x_{26}] = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \cdot$$

Тогда по (14) дпн-ое огр. имеет вид: $\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow$ $-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 + x_7 = -\frac{2}{3}$, $x_j \geq 0\left(j = \overline{4,7}\right)$. Это ур-ие включив в IV-ю итерацию табл. 10, составим табл. 11 и осуществим процедуры дв. симплексного метода, выбрав за базис A_3, A_2, A_1, A_7. Т. к. $x_4 = -\frac{2}{3}$, то просматриваем отц. коэф-ы строки $i = 4$, к-ым ств-ют векторы A_4, A_5, A_6. Тогда имеем :

$$\theta_{04} = \min\left(\frac{4}{2}, 1\right) = 1, \qquad \theta_{04}\left(Z_4 - C_4\right) = 1\left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{19}{3};$$

$$\theta_{05} = \min\left(\frac{4}{1}, 11, 2\right) = 2, \qquad \theta_{05}\left(Z_5 - C_5\right) = 2\left(-\frac{11}{3}\right) = -\frac{22}{3};$$

$$\theta_{06} = \min\left(\frac{11}{2}, 1, 1\right) = 1, \qquad \theta_{06}\left(Z_{06} - C_{06}\right) = 1\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Исх. задача решается на отыскание $\min Z$, поэтому в базис задачи включаем вектор, к-му ств-ет $\max \theta_{0j}\left(Z_j - C_j\right) = \max\left(-\frac{19}{3}, -\frac{22}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, т. е. вектор A_6 с ключевым эл-ом $-\frac{2}{3}$, а вектор A_7 исключаем из базиса.

Таблица 11

i	C	Базис	b	1	-1	-3	0	0	0	0	$\sum$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	-3	A_3	4	0	0	1	2	1	0	0	8
2	-1	A_2	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	0	16/3
3	1	A_1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	0	2/3
4	0	A_7	-2/3	0	0	0	-2/3	-1/3	$\boxed{-2/3}$	1	-4/3
m+1			-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	0	-77/3
1	-3	A_3	4	0	0	1	2	1	0	0	8
2	-1	A_2	3	0	1	0	-1	0	0	1	4
3	1	A_1	0	1	0	0	-1	-1/2	0	1/2	0
4	0	A_6	1	0	0	0	1	1/2	1	-3/2	2
m+1			-15	0	0	0	-6	-7/2	0	-1/2	-25

Из табл. 11 получаем опт. цлч-ое решение:

$$X_{опт.} = (0,3,4)\text{, при к-ом } Z_{\min} = -15.$$

п6. $\max Z = x_1 + 4x_2$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 = 2x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ 3x_1 = 2x_2 \quad +x_4 \ = 6 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_j \ge 0\left(j = \overline{1,4}\right) \\ x_j\left(j = \overline{1,4}\right) - \text{цлч-ые.} \end{array}$$

Р. Отбрасывая условие цлч-ти, решаем симплекс-методом задачу P_0 на табл. 12. После 2-й итерации получаем опт. решение $X_0 = (1,3/2,0,0)$, $z_{\max} = 7$. Это решение нецлч-ое, т. к. $a_{10} = \frac{3}{2.}$ Поэтому переходим к построению задачи P_1. Для этого записываем I сечение Гомори в виде (14):

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \le 0 \text{ ,или, после упрощения}$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4\right) \le 0 \Rightarrow \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - y_1 = \frac{1}{2}$$

(при такой записи дпн-го огр. решения можно продолжать симплекс-методом, а не дв-ым симплекс-методом), где y_1 – неотц. балансовая пер. Последнее ур. записываем во 2-й инерции табл. 12 и, выбрав ключевой эл. 3/8 по $\theta_0 = \min\left\{\frac{1}{2} \div \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \div \frac{1}{8}\right\} = 4/3$, организуем 3-ю итерацию, т. е. решаем задачу P$_1$

Опт. решение, полученное в 3-й итерации, вновь нецлч-ое, поэтому переходим к построению задачи P$_2$. Ств-щее сечение будет $\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left(\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{-\frac{2}{3}\right\}y_1\right) \le 0$. Т. к. $\left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$ и $\left\{-\frac{2}{3}\right\} = -\frac{2}{3} - \left[-\frac{2}{3}\right] = -\frac{2}{3} - (-1) = -\frac{1}{3}$, то получаем 4-е дпн-ое огр, к-ое добавляем в качестве 4-й строки 3-й интеграции табл. 12 для задачи $\mathrm{P}_2 : \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}y_1 - y_2 = \frac{1}{3}$.

В 4-й итерации получаем опт-ое цлч. решение $x^* = (1,1,1,1)$, $z_{\max} = 5$.

Таблица 12

№ итераци	C	Базис	a$_{jo}$	1	4	0	0			$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
0	0 0	x_3 x_4	2 6	-1 3	$\boxed{2}$ 2	1 0	0 1			4 12
			0	-1	-4					-5
1	4 0	x_2 x_4	1 4	-1/2 $\boxed{4}$	1 0	1/2 -1	0 1			2 8
		z	4	-3	0	2				3

Продолжение

№ итераци	C	Базис	a_{jo}	1	4	0	0			$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
2	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8			3
	1	x_1	1	1	0	-1/4	1/4			2
		z	7	0	0	5/4	3/4			9
		y_1	1/2	0	0	$\boxed{3/8}$	1/8	-1		0
3	4	x_2	1	0	1	0	0	1		3
	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		2
	0	x_3	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		0
		z	16/3	0	0	0	1/3	10/3		9
		y_2	1/3	0	0	0	$\boxed{1/3}$	1/3	-1	0
4	4	x_2	1	0	1	0	0	1		3
	1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1	2
	0	x_3	1	0	0	1	0	-3	1	0
	0	x_4	1	0	0	0	1	1	-3	0
		z	5	0	0	0	0	3	1	9

зм4. Может оказаться, что переход от базисного к опорному решению приведет к появлению отц-ых оценок в индексной строке. Тогда потребуются дпн-ые итерации симплекс–метода.

зм5. Если при выборе строки для построения сечения окажется несколько равных мкс-ых значений $\{a_{i0}\}$ (н-р, в задаче P_1 имеем $a_{20} = a_{30} = \frac{4}{3}$), то выбираем первую из этих строк.

Отметим также, что значения $Z_{\max}$ при переходе от задачи P_0 к P_1, от P_1 к P_2 и т. д., как правило, уменьшаются, т. к. «отсекаются» ранее найденные опт. решения.

6^0. Задачи с частично целочисленным решением. Теперь метод Гомори демонстрируем для решения частично цлч-ой задачи на сд-ем

п 7. $\max Z = x_1 + 8x_2$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ 0{,}16x_1 + x_2 \le 1{,}9 \end{array}\right\}$$ x_1 и x_2 – неотц-ые и цлч-ые.

Р. Задача яв-ся частично цлч-ой, т. к. из

$$\max Z = x_1 + 8x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 \quad = 9 \\ 0{,}16x_1 + x_2 \quad + x_4 = 1{,}9 \end{array}\right\}$$

получаем, что пер. x_4 может принимать нецлч. значение, даже при x_1, x_2 цлч-ых.

Решаем задачу P_0 на табл. 12а. После 1-й итерации получаем опт. решение $x_0 = (0;\ 1{,}9;\ 7{,}1;\ 0;)$, в к-ом условие цлч-ти нарушено для x_2. Для перехода к задаче P_1 строим сечение II по 2-й строке. Из табл. 12 получаем:

$\{a_{20}\}-(\alpha_{21}x_1+\alpha_{24}x_4)\le 0$. т. к. x_1 –цлч. пер-я и $\{a_{21}\}\le\{a_{20}\}$, то из первого стн. (14б) находим $\alpha_{21}=\{a_{21}\}=0{,}16$. Коэфф. α_{24} находим из первого стн. (14а), поскольку на x_4 не наложено требования цлч-ти и $a_{24}>0$, т. е. $\alpha_{24}=a_{24}=1$. Тогда сечение запишется так: $0{,}16x_1+x_4-y_1=0{,}9$, где y_1 – неотц. балансовая пер. Это ур-ие записываем в конце 1-й итерации табл. 12а для задачи P_1. Выбираем ключевой эл. 1 по $\theta_0=\min\left\{\frac{1{,}9}{1},\frac{0{,}9}{1}\right\}=0{,}9$ и осуществим 3-ю итерацию.

В 4-й итерации получаем опт-ое нецлч. решение X_1 $X_1=\left(\frac{8}{3},1,0,\frac{71}{150}\right)$. Строим новое сечение по 1-й строке (т. к. $\max\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{3}$): $\left\{\frac{8}{3}\right\}-(\alpha_{13}x_3+\alpha_{15}y_1)\le 0$. На пер. x_3 и y_1 условие цлч-ти не налагается, поэтому на основе (14а) получим $\alpha_{13}=a_{13}=\frac{1}{3},\alpha_{15}=\frac{\{8/3\}}{1-\{8/3\}}|a_{15}|=\frac{2}{3},\ \textit{тогда}\ \frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}y_1\right)\le 0\Rightarrow x_3+2y_1\ge 2,$ откуда получим ур-ие для задачи $P_2: x_3+2y_1-y_2=2$, где y_2 неотц. балансовая пер. Это ур. записываем в конце 4-й итерации табл. 12а. Выбрав ключевой эл. 1, организуем 5-ю итерацию.

Таблица 12а

№ итерац	C	Базис	a_{jo}	1	8	0	0			$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
0	0	x_3	9	3	1	1	0			14
	0	x_4	1,9	0,16	$\boxed{1}$	0	1			4,06
		z	0	-1	-8	0	0			-9
1	0	x_3	7,1	2,84	0	1	-1			9,94
	8	x_2	1,9	0.16	1	0	1			4,06
		z	15,2	0,28	0	0	8			23,48
		y_1	0,9	0.16	0	0	$\boxed{1}$	-1		1.06
3	0	x_3	8	$\boxed{3}$	0	1	0	-1		11
	8	x_2	1	0	1	0	0	1		3
	0	x_4	0,9	0,16	0	0	1	-1		1,06
		z	8	-1	0	0	0	8		15
4	1	x_3	8/3	1	0	1/3	0	-1/3		11/3
	8	x_2	1	0	1	0	0	1		3
	0	x_4	71/150	0	0	-4/75	1	-71/75		71/150
		z	32/3	0	0	1/3	0	23/3		56/3
		z_2	2	0	0	$\boxed{1}$	0	2	-1	4
5	1	x_1	2	1	0	0	0	-1	1/3	7/3
	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0	3
	0	x_4	29/50	0	0	0	1	-21/25	-4/75	103/150
	0	x_3	2	0	0	1	0	2	-1	4
			10	0	0	0	0	7	1/3	52/3

Из таблицы 12а получаем опт. решение x=(2, 1, 2, $\frac{29}{50}$), $\sum_{\max}$ =10.

зм6. В начале было указано, что x_4 может принимать нецлч. значение, даже при x_1 и x_2 цлч-ых. Однако путём несложных прб-ий исх. системы нерав-в можно свести задачу к полностью цлч-ой. Дев-но, умножив второе нерав. На 100 и введя после этого балансовую пер., получим ур-ие $16x_1+100x_2+x_4=190$, из к-го видно, что пер. x_4 при целых значениях x_1 и x_2 может принимать только целые значения.

7^0. Примеры задач ЦП. Оптимальный раскрой материалов. Оптимальное использование оборудования. Модели задач цлч-го прг-я делятся на два вида: задачи с неделимостью и задачи с альтернативными пер. К первым относятся модели задач, в к-ых пер. выражают неделимые вел-ы, как н-р, число распределяемых машин, число предприятий, кол-во ед. неделимого груза, число изготовляемых изделий и т. д.

Модели с альтернативными пер. охватывают весьма разнообразные опт. задачи комбинаторного характера, задачи НП, задачи с дпн-ми логическими условиями (н-р, типа «или-или», «если-то» и т. д.), к-ые с помощью искуственно вводимых альтернативных пер-х x_j=0 или1 (их иногда называют булевыми пер.) приводятся к лин. моделям задач цлч-го прг-я.

Рас-им нек-е из этих задач.

з1. Задачи оптимального раскроя материалов. Аналогичную задачу рас-ли в 7^0:3.1, где из m различных материалов $b^i(i=\overline{1,m})$ требовалась изготовить s различных изделий в кол-ве, пропорциональном числам $a_k(k=\overline{1,S})$, где каждая ед. i -го материала может быть раскроена n различными способами, причем использование j -го способа $(j=\overline{1,n})$ дает a^i_{jk} единицу k –го изделия. Найти план раскроя, обеспечивающий мкс. число комплектов. Далее ств-но обз-им $b^i=b_i, a^i_{jk}=a_{ijk}$.

Теперь пусть требуется из m различных материалов $b_i\ (i=\overline{1,m})$ изготовить s различных изделий в кол-ве $a_k(k=\overline{1,S})$ при тех же остальных условиях. Тогда задачу можно сформулировать сд. образом.

На предприятии производится раскрой m различных партий материалов ств-но в кол-ве $b_i\ (i=\overline{1,m})$ единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий требуется изготовить мкс. число комплектов z, в каждой из к-ых входит s различных видов деталей ств-но в кол-ве $a_k(k=\overline{1,S})$ единиц, если известно что каждую единицу материала можно раскроить на детали n различными способами, причем при раскрое ед-ы i -й партии j -м способом $(j=1,n)$ получается a_{ijk} деталей к-го вида.

Р. Обз-им через x_{ij} число ед. материала i -й партии, к-ые будут раскроены j -м способом. Тогда из i -й партии при j -м способе раскроя получим $a_{ijk}x_{ij}$ деталей k –го вида. Из всей же i -й партии при применении к ней всех j способов раскроя получим деталей k -го вида $\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}$, а из всех m партий их будет $z_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}$. В каждый комплект должны входить a_k деталей, поэтому отн-ия $z_k/a_k(k=\overline{1,s})$ опр-ют кол-во комплектов, к-ые можно составить из деталей k -го вида. Кол-во полных комплектов по всем видам деталей опр-ся нм-им из этих отн-й.

В случае полной комплектности должно выполнятся рав-во отн-й: $\frac{z_1}{a_1}=\frac{z_2}{a_2}=...=\frac{z_k}{a_k}=...=\frac{z_s}{a_s}$, откуда s -1 отн-й можно выразить через любые из них, н-р через первое: $\frac{z_k}{a_k}=\frac{z_1}{a_1}(k=\overline{2,s})$.

Заменяя $Z_к$ и Z_1 их значениями, получаем n-1 огр-й по комплектности:

$$\frac{z_k}{a_k}=\frac{1}{a_k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\text{a}_{\text{ijk}}x_{ij}=\frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij1}x_{ij}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijk}-\frac{a_k}{a_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0\left(k=\overline{2,s}\right).$$

Учитывая имеющееся кол. ед. материала в партиях, находим m огр-й по ресурсам:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i\left(i=\overline{1,m}\right),\text{ где } x_{ij}\geq 0.\ \left(i=1,\text{m};\ j=1,\text{n}\right).$$

Т. о., нх-мо найти нб. Значение фк.

$$Z=\max\left(\min_{1\leq k\leq s}\frac{1}{a_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}\right) \qquad (15)$$

при огр-ях

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijk}-\frac{a_k}{a_1}a_{ij1}\right)x_{ij=0,k=\overline{1,S}};\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i,\ i=\overline{1,m};\end{cases} \qquad (16)$$

$$x_{ij}\geq 0\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right),x_{ij}\ \text{– целые.} \qquad (17)$$

Рас-им решение задачи на сд-ем

п8. Для изготовления комплектов из трех брусьев имеются две партии бревен. Первая партия содержит 99 бревен длиной 6,6 м. каждое, второе – 60 бревен по 4,8 м. каждое. Комплект состоит из двух брусьев длиной 2,2 м. и одного длиной 1,3 м.

Как распилить бревна, чтобы получить мкс. число комплектов?

Р. Составим возможные способы распила, опр-им a_{ijk} $\left(i=1,2; j=\overline{1,4}\right)$ и запишем результаты в табл. 13.

Обз-им через x_{ij} $\left(i=1,2; j=\overline{1,4}\right)$ кол-во бревен в I и II партиях, распиленных 1, 2, 3, 4-м способами, и составим мт-ю модель задачи.

Таблица 13

Партия	Размер брусьев	Способы распила				Z
		1	2	3	4	
		Значения *a*				
I	2,2 м. 1,3 м.	3 -	2 1	1 3	- 5	Z_1 Z_2
II	2,2 м. 1,3 м.	2 -	1 2	- 3	- -	Z_1 Z_2

Из условия комплектности $\frac{z_1}{2}=\frac{z_2}{1}$ и табл. 13 находим выражение для целевой фк. т. к. $z_1=2z_2$, то $\min\limits_{1\le j\le 2}\frac{z}{a}=z_2$, т. е.

$$z=z_2=x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+2x_{22}+3x_{23}$$

Огр-ие по комплектности получим из рав-ва $z_1=2z_2$

$$3x_{11}+2x_{12}+x_{13}+2x_{21}+x_{22}=2(x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+2x_{22}+3x_{23})$$

или

$$3x_{11}-5x_{13}-10x_{14}+2x_{21}-3x_{22}-6x_{23}=0$$

Учитывая огр-ия по материальным ресурсам, получим сд-ю мт. мд.

Найти $\max z= x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+2x_{22}+3x_{22}+3x_{23}$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & =99 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} & =60 \\ 3x_{11}-5x_{13}-10x_{14}+2x_{21}-3x_{22}-6x_{23} & =0, \end{cases}$$

x_{ij} -целые; $x_{ij}\ge 0$ $\left(i=1,2;\ j=\overline{1,4}\right)$

Система содержит только один единичный вектор A_{12}. Для того, чтобы составить симплексную таблицу, с помощью второго ур-я исключим x_{22} из третьего, а с помощью третьего исключим x_{11} из первого, за базис примем векторы A_{11}, A_{12}, A_{22} и из лин-ой фк. исключим x_{12} и x_{22}. Тогда получим

$$\max Z=159+\frac{1}{3}x_{13}+\frac{2}{3}x_{14}-\frac{1}{3}x_{21}$$

при огр-ях

$$\begin{cases} x_{12}+\frac{8}{3}x_{13}+\frac{13}{3}x_{14}-\frac{5}{3}x_{21}+x_{23}=39 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=60 \\ x_{11}-\frac{5}{3}x_{13}-\frac{10}{3}x_{14}+\frac{5}{3}x_{21}-x_{23}=60 \end{cases}$$

x_{ij} -целые; $x_{ij}\ge 0$ $(i=1,2;\ j=1,4)$

Решение задачи приведено в табл. 14

Таблица 14

i	с	Базис	*в*	0	0	1/3	2/3	-1/3	0	0	Σ
				A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	
1	0	A_{12}	39	0	1	8/3	$\boxed{13/3}$	-5/3	0	1	139/3
2	0	A_{22}	60	0	0	0	0	1	1	1	3
3	0	A_{11}	60	1	0	-5/3	10/3	5/3	0	-1	170/3
m+l			159	0	0	-1/3	-2/3	1/3	0	0	475/3
1	2/3	A_{14}	9	0	3/13	8/13	1	-5/13	0	3/13	139/13
2	0	A_{22}	60	0	0	0	0	1	1	1	3
3	0	A_{11}	90	1	10/13	5/13	0	5/13	0	-3/13	1200/13
m+l			165	0	2/13	1/13	0	1/13	0	2/13	2151/13

Из табл. 14 получаем цлч-ый опт. план $x_{11} = 90$, $x_{14} = 9$, $x_{22} = 60$; $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{23} = 0$, при к-ом $Z_{max} = 165$. Т. о., чтобы получить 165 комплектов деталей нх-мо 90 бревен по 6,6 м распилить на 3 бруска по 2,2 м; 9 бревен 6,6 м распилить на 5 брусков по 1,3 м; 60 бревен по 4,8 м распилить на 3 бруска, из к-ых один имеет длину 2.2 м, а два других – 1,3 м (см. табл. 13 и 14).

з2. Задачи оптимального использования оборудования. На предприятии имеется m видов оборудования (станков) ств-но в кол-ве в b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ ед. На каждом виде оборудования можно изготавливать n видов деталей, к-ые входят в комплект ств-но в кол. a_j (j = 1,n) ед.

Пусть a_{ij} – производительность *i*-го вида оборудования при изготовлении j-го вида детали. Нх-мо составить план использования оборудования, к-ый обеспечит мкс-ый выпуск комплектной продукции. Обз-им через x_{ij} кол-во *i*-го оборудования, на к-ом изготавливаются детали j-вида. За ед-цу времени их будет произведено $a_{ij}x_{ij}$ ед., а на всех видах оборудования $Z_j = \sum_{l=1}^{m} a_{lj}x_{ij} \left(j = \overline{1,n}\right)$. Т. к. в каждый комплект входит a_j деталей, то отн-я $\frac{z_j}{a_j}\left(j = \overline{1,n}\right)$ опр-ют кол. комплектов, к-ое можно составить из деталей *j*-го вида. Кол-во полных комплектов по всем видам деталей опр-ся нм-им из этих отн-й. Для соблюдения условия полной комплектности, очевидно, должно выполняться рав-во отн-й: $\frac{z_l}{a_l} = \ldots = \frac{z_j}{a_j} = \ldots = \frac{z_n}{a_n}$. Отсюда получаем n-1 огр–й по комплектности:

$$\frac{z_j}{a_j} = \frac{z_l}{a_l} \,(\mathrm{j} = \overline{2,\mathrm{n}}), \quad \frac{z_j}{a_j} = \frac{1}{a_j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij} = \frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left(a_{ij}x_{ij} - \frac{a_j}{a_1}a_{ij}x_{ij}\right) = 0 \quad \left(j = \overline{2,n}\right).$$

Т. к. предполагается, что оборудование используется полностью, то получим еще m огр-й: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$ (i = 1,m)

Т. о. нх-мо найти нб. значение фк:

$$Z = max(\min_{i \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_{ij}) \tag{18}$$

при огр-ях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} \left(a_{ij}x_{ij} - \frac{a_j}{a_1} a_{i1}x_{i1} \right) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \quad x_{ij} - \text{целые} \tag{20}$$

На основании мт-ой модели можно заключить, что задача (18)–(20) яв-ся частным случаем задачи опт-го раскроя материала.

8^0. Оптимальное распределение механизмов и задача коммивояжера. Рас-им задачи с альтернативными пер-ми.

з3. Задачи оптимального распределения механизмов. Имеется m работ P$_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ и n механизмов M$_j$ (j $= \overline{1,n}$), способных выполнять эти работы. Пусть c$_{ij}$ (c$_{ij}$ ≥0) – эффективность (производительность) выполняя j-м механизмов i-й работы. При этом каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом. Составить модель задачи опт-го распределения механизмов.

Р. Введем пер-ые $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я работа занят } j\text{-м механизмом} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Тогда мт. модель задачи имеет вид:

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{21}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1, \ i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Для решения модели (21)–(23) можно использовать методы тр. задачи, в част., распределительный метод. При этом нх-мо учесть, что на основании огр-й (22) занятые клетки располагаются строго в отдельных строках и отдельных столбцах. Поэтому первоначальный опорный план целесообразно найти по схеме двойного предпочтения и опт. решение получить, используя распределительный метод тр-ой задачи. Причем из задачи нахождения maxZ надо перейти к minZ′ =-maxZ или же в табл. вместо выбора min c_{ij} нх-мо выбирать max c_{ij}.

Отметим, что с помощью модели (21)–(23) можно решить многие практические задачи, н-р, рас-им сд-й.

п9. Имеются 4 самолета A_j $(j=\overline{1,4})$ различных типов, к-ые требуется распределить между 4-мя авиалиниями B_j $(i=\overline{1,4})$. Известен ожидаемый эффект c_{ij} от использования *j*-го самолета *i*-й авиалинии, измеряемый, н-р, кол-во обслуженных пассажиров. Эти данные приведены в табл. 15.

Назначить самолеты на авиалиниях так, чтобы суммарный эффект от использования всех самолетов был мкс-ым.

Таблица 15

кол. A_j / кол. B_i	1	1	1	1
1	66	26	85	54
1	118	45	180	70
1	86	34	100	76
1	104	28	160	62

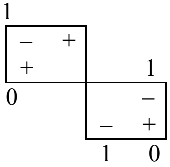
Таблица 15а

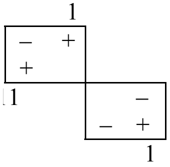
A_j / B_i	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	66 1	26	v 85	54 0
B_2	v 118 0	v 45	vv 180 1	70
B_3	86	34	v 100	v 76 1
B_4	104	28 1	v 160 0	62

Р. По схеме двойного предпочтения строим первоначальный опорный план на табл. 15а. Он оказался вырожденным. Свободные клетки по max c_{ij} заполняем нулями до выполнения условия m+n-1=4+4-1=7. Находим Z_0 =66+180+76+28=350. Выч-ем для свободных клеток:

B_1A_2: 26-66+118-180+160-28=30,
B_1A_3: 85-66+118-180=-43,
B_2A_2: 45-28+160-180=-3,
B_2A4: 70-54+66-118=-36,
Переместим самолеты для B_1A_2

B_3A_1: 86-76+54-66=-2
B_3A_2: 34-76+54-66+188-180+160-28=16
B_3A_3: 100-76+54-66+118+180=-50
B_4A_1: 104-160+180-118=6
B_4A_4 : 62-54+66-118+180-160=-24





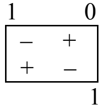
Результаты запишем в табл. 15б и находим Z_1 = 26+118+76 + +160=380. Заполняем свободные клетки нулями по $\max C_{ij}$ до получаемого условия m+n-1=7. Опр-ем для свободных клеток

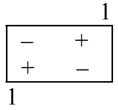
Таблица 15б

A_j B_i	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	66	26 1	85	54 0
B_2	118 1	45	180 0	70
B_3	86 0	34	100	76 1
B_4	104	28	160 1	62

B_1A_1: 66-86+76-54=2
B_1A_3: 85-180+118-86+76-54=-41
B_2A_2: 45-118+86-76+54-26=-35
B_2A_4: 70-118+86-76=-48
Самолеты переместим для B_4A_1

B_3A_2: 34-76+54-34=-22
B_3A_3: 100-180+118-86=-48
B_4A_1:104-160+180-118=8
B_4A_2: 28-160+180-118+86-76+54-26=-32
B_4B_4: 62-160+180-118+86-76=-26



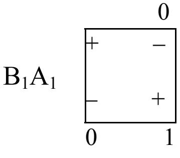


Результаты напишем в табл. 15в и находим Z_1 = 26+180+76+104=386. Заполняем свободные клетки нулями по $\max C_{ij}$ до получения условия m+n-1=7. выч-ем для свободных клеток:

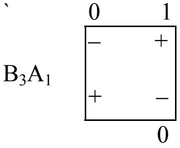
Таблица 15в

A_j B_i	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	66	26 1	85 0	54
B_2	118 0	45	180 1	70
B_3	86	34	100 0	76 1
B_4	104 1	28	160	62

B_1A_1: 66-118+180-85 = 43
B_1A_4: 54-85+100-76 =-7
B_2A_2: 45-180+85-26=-76
B_2A_4: 70-180+100-76= -86
B_3A_1: 86-100+180-118= 48
B_3A_2: 34-100+85-26=-7
B_4A_2: 28-26+85-180+118-104=-79
B_4A_3: 160-180+118-104=-6
B_4A_4:62-76+100-180+118-104=-80



Для этой клетки перераспределение самолетов невозможно.



Здесь перераспределение также невозможно.

Из полученных чисел необходимо анализировать B_1A_1, B_3A_1.
Числа для остальных клеток отц-ые, значит, оптз-ть перераспределение невозможно. Итак, получено опт. решение: $X_{\text{опт}} = (x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{41}) = (1,1,1,1)$, Z_{max}=386. Остальные пер. равны нулю.

з4. Задача «коммивояжера». Имеются n+1 пунктов П$_i$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$ с данными расстояниями c$_{ij}$ между i и **j**-м пунктами. Выехав из исходного пункта П$_0$, коммивояжер должен побывать во всех городах по одному разу и вернуться в пункт П$_0$. В каком порядке следует объезжать пункты, чтобы пройденное суммарное расстояние было минимальным? (см. 10^0:3,1).

Р. Введем n^2 альтернативных пер.

$$x_{ij}=\begin{cases}1\text{, если коммив. из П}_\text{i}\text{ переезжает в П}_\text{j}\ ,\\ 0\qquad\qquad\text{в противном случае}\end{cases}$$

При этом н-мо обеспечить «непрерывность» маршрута, т. е. чтобы набор «звеньев» (i,j) для к-ых x_{ij}=1(т. е. звеньев, входящих в маршрут) образовал единую цепочку, [н-р, при n=5 цепочка (0,5)-(5,4)-(4,2)-(2,3)-(3,1)-(1,0)], а не состоял бы из отдельных не связанных цепочек [н-р, (0,5)-(5,4)-(4,0) и (2,3)-(3,1)-(1,2)]. Это условие можно обеспечить введением днн-ых n первых u$_i\geq 0$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$ и днн-ых n^2 огр-й nx_{ij}+u$_i$ - u$_\text{j}\leq$ n-1. Отсюда мт. модель задачи имеет вид:

$$\min Z=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}x_{ij}\ ,\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}&=1\ ,\quad i=\overline{0,n}\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}&=1\ ,\quad j=\overline{0,n}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{n}x_{ij}\text{+u}_i-\text{u}_j\leq\text{n-1};\ i,\ ij=\overline{0,n}\ \ i\neq\text{j}\\ &x_{ij}\text{=0 или 1, U}_\text{i}\geq0;\ i,\ \ i,j=\overline{0,n}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Для решения задачи (24)–(26) предлагается сд. модификация метода решения тр. задачи на основе эвристических процедур низм-го эвристико-модифицированным распределительным методом, суть которого состоит из нижеописанных шагов:

1. Пусть исх.данные задачи записаны в симипекс-табл.16

Таблица 16

П$_\text{j}$ кол П$_i$ кол	n_0 1	n_1 1	…	n_j 1	…	n_n 1
n_0 1	x	$\lfloor c_{01}$ x_{01}	…	$\lfloor c_{0j}$ x_{0j}	…	$\lfloor c_{0n}$ x_{0n}
n_1 1	$\lfloor c_{10}$ x_{10}	x	…	$\lfloor c_{1j}$ x_{1j}	…	$\lfloor c_{1n}$ x_{1n}
⋮	…	…	…	…	…	…
n_i 1	$\lfloor c_{j0}$ x_{i0}	$\lfloor c_{j1}$ x_{i1}	…	$\lfloor c_{jj}$ x_{ij}	…	$\lfloor c_{jn}$ x_{in}
⋮	…	…	…	…	…	…
n_n 1	$\lfloor c_{n0}$ x_{n0}	$\lfloor c_{n1}$ x_{n1}	…	$\lfloor c_{nj}$ x_{nj}	…	x

Находим опорный план, начиная со строки n_0 табл.16 и продвигаясь по столбцам j=1, j=2 и т. д. этой строки с поиском числа $\alpha_0 = \min_j \text{c}_{0\text{j}} = \text{c}_{0\text{k}}$, и пологаем $x_{0\text{k}} = 1$. При этом строка $i = 0$ и столбец $j = k$ из дальнейшего рас-ия исключаются. Аналогично поступаем со строкой $i = k$ с поиском числа $\alpha_k = \min_j c_{kj} = c_{kr}$ и полагаем $x_{kr} = 1$. Строка $i = k$ и столбец $j = r$ в дальнейшем не расв-ся. Теперь анализируем строку $i = r$ с поиском числа $a_\tau = \min_j c_{\tau j} = c_{\tau\delta}$ и полагаем $x_{rr}=1$, исключая $i = \tau$ и $j = r$ из дальнейшего рас-ия и т. д. пока не будут исключены все столбцы, кроме столбца j=0. Пусть j=p яв-ся последним анализируемым столбцом, кроме столбца j = 0 тогда получим число $\alpha_0 = \min_j c_{pj} = c_{p0}$ и полагаем $x_{p0} = 1$. Т. о. найдем опорный план, он вырожденный, т. к. в симплексной табл. занято ровно n+1 клеток в разных строках и разных столбцах. Выч-ем $\text{Z}_0 = C_{0k} + C_{kr} + C_{rr} + \cdots + C_{p0}$.

2. Свободные клетки $\alpha_{q\text{r}} = minC_{ij} = C_{q\text{r}}$ заполняем нулями (т. е. $x_{qr} = 0$)так, чтобы заполненные клетки образовали ступеньки лестницы и выполнялось условие $(n+1)+(n+1)-1 = 2n+1$.

3. Проверяем не получено ли опт. решение задачи. Если получено, то процесс прекращаем. Если нет, то организуем итерацию, сближающую к опт. решению, до получения решения задачи. Здесь используем процедуры распределительного метода с учетом огр-ия (26). Как это делается покажем на сл-ем.

п10. Составить мт-ю модель и решить задачу коммивояжера при сд-их числовых данных: n=3, c_{01}=25, c_{02}=40, c_{03}=30, c_{12}=50, c_{13}=20, c_{23}=60. Составить полученное решение с результатами непосредственного перебора возможных вариантов маршрутов.

Р. Исх.данные запишем в табл.17 и найдем опорный план на табл.17а, опр-ив числа $\alpha_0 = \min C_{0j} = C_{01} = 25$, $\alpha_1 = \min C_{1j} = C_{13} = 20$, $\alpha_3 = \min C_{3j} = C_{32} = 60$, $\alpha_2 = \min C_{2j} = C_{20} = 40$ и ств-но пологая $\text{x}_{01} = 1$, $\text{x}_{13} = 1$, $\text{x}_{32} = 1$, $\text{x}_{20} = 1$.

Таблица 17

n_j кол n_i кол	n_0 1	n_1 1	n_2 1	n_3 1
n_0 1	X	25	40	30
n_1 1	25	X	50	20
n_2 1	40	50	X	60
n_3 1	30	20	60	X

Таблица 17а

n_j n_j кол	n_0 1	n_1 1	n_2 1	n_3 1
n_0 1	X	1 25	40	0 30
n_1 1	0 25	X	50	1 20
n_2 1	1 40	50	X	60
n_3 1	30	0 20	1 60	X

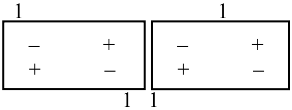
Из табл.17а находим $Z_0 = 21\cdot1+20\cdot1+40\cdot1+60\cdot1=145$.

Свободные клетки табл.17а $\alpha_{qr} = \min c_{ij} = c_{qr}$ заполняем нулями ($x_{10}=0$, $x_{31}=0$, $x_{03}=0$) до выполнения условия $2n+1=2\cdot3+1=7$.

Проверяем не получено ли опт. решение. Если нет, то организуем итерацию.

n_0n_2: 40-25+20-60=-5
n_1n_2: 50-20+30-25+20-60=-5
n_2n_1: 50-25+30-20+25-40=20
n_2n_3: 60-20+25-40=25
n_3n_0: 30-20+25-30+20-25=0

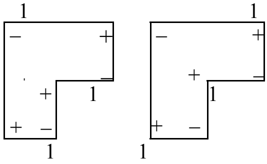
Анализируем n_0n_2



и получаем $x_{31}=1$ и $x_{02}=40$, но тогда нарушается цикличность маршрута, т.е. не выполняется огр-ие (26). Значит, перемещение по n_0n_2 отпадает.

Таблица 17б

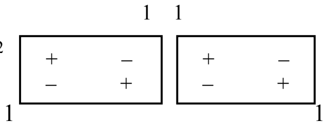
Пj \ Пi	n_0	n_1	n_2	n_3
n_0	X	0 25	40	1 30
n_1	25	X	1 50	0 20
n_2	1 40	50	X	60
n_3	0 30	1 20	60	X



Проверяем для n_1n_2 и получаем $x_{31}=1$, $x_{12}=1$, $x_{03}=1$. При этом не нарушается цикличность маршрута, т.к. $x_{03}=1$, $x_{31}=1$, $x_{12}=1$, $x_{12}=1$, $x_{20}=1$, т. е. выполняяется (26). Результаты напишем на табл. 17б выч-ем Z=30+50+40+20=140. Свободные клетки табл. 17б заполняем нулями до выполнения условия 2n+1=7 и анализируем пустые клетки:

n_0n_2: 40-50+20-30=-20
n_1n_0: 25-30+20-25+30-20=0
n_2n_1: 50-40+30-20=20
n_2n_3: 60-30+25-20+30-40=25
n_3n_2: 60-50+20-30+25-20=5

Проверяем для n_0n_2



и получаем $x_{02}=1$, $x_{13}=1$, но с остальными $x_{20}=1$, $x_{31}=1$ цикличность маршрута нарушается, значит, перемещение согласно n_0n_2 отпадает.

Остальные числа неотц., сд-но, найдено опт. решение задачи:

$$X^*=(x_{03}, x_{31}, x_{12}, x_{20})=(1,1,1,1),\ Z_{min}=30+20+50+40=140$$

зм7. Решение задачи не единственное. Дсв-но, если двигаться в обратном направлении к полученному маршруту, то получим замкнутый цикл (0,2), (2,1), (1,3), (3,0), т. е. 0, 2, 1, 3, 0, к-му ств-ет $Z_{min}=40+50+20+30=140$.

Отметим, что задачу коммивояжера, кроме выше изложенного эвристико-модивицированного распределительного метода, можно решить с помощью метода ДП (см.)

9^0. **Задачи теории расписания или календарного планирования.** Для обработки $n\left(j=1,n\right)$ деталей имеется $m\left(i=\overline{1,m}\right)$ станков. Каждая деталь должна пройти обработку в нек-ой посл-ти на всех станках. Заданв время t_{ij} обработки j-й детали на i-м станке (нек-ые t_{ij}=0, если j-я деталь не обрабатывается на i-м станке). При этом нх-мо выполнить сд-ие условия:

1) на одном станке единовременно обрабатывается только одна деталь;

2) для каждой детали указан опр-ый порядок обработки;

3) производственные операции неделимые, т. е. начавшаяся на опр-ом станке обработка детали должна быть закончена не прерываясь.

Составить модель задачи по опр-ю опт-го порядка обработки деталей, мнмз-го общее время выполнения всех работ.

Р. Пусть время t_{ij} – целые числа в условных ед-ах. Введем неотц-ые пер. x_{ij}, указывающие в этих условных ед-ах “дату” начала обработки j-й детали на i-м станке. Тогда условие 1) для двух деталей $к$ и j можно выразить стн-ми

$$x_{ik} \geq x_{ij} + t_{ij} \text{ или } x_{ij} \geq x_{ik} + t_{ik} \qquad (27)$$

Условие 2), согласно к-му нек-я j-я деталь должна сначала обрабатываться на i-м станке, а затем на s-м, можно выразить стн-ем

$$x_{sj} \geq x_{ij} + t_{ij} \qquad (28)$$

Целевая фк. z = t, к-ю нх-мо мнмз-ть, выражает общее время завершения работ. Вел. t связана с пер-ми задачи стн-ми

$$t \geq x_{ij} + t_{ij} \qquad (29)$$

Модель, заданная стн-ми (27)–(29), отличается от задачи ЛП альтернативным характером условий (27) («или» – «или»).

Условия (27) можно свести к обычным огр-ям введением альтернативных пер. y_{ijk}, принимающих значения 0 или 1. Введем нек-ю пст. Т, заведомо большую общей даты выполнения всех работ.

Тогда альтернативные условия (27) равносильны сд-ей системе нерав-в

$$\left(T+t_{ik}\right)\cdot y_{ijk} + x_{ij} \geq x_{ik} + t_{ik} \qquad (30)$$

$$\left(T+t_{ik}\right)\cdot\left(1-y_{ijk}\right) + x_{ik} \geq x_{ij} + t_{ij} \qquad (31)$$

Дев-но, если бы $x_{ik}=x_{ij}$ (что противоречило бы условию 1)), то из (30) получили бы $\left(\mathrm{T}+t_{ik}\right)y_{ijk} \geq t_{ik}$, что возможно лишь при y_{ijk}=1, но тогда из (31) получили бы противоречивое нерав. $0 \geq t_{ij}$.

При y_{ijk}=0 получаем из (30) $x_{ij} \geq x_{ik} + t_{ik}$, т.е. второе из нерав-в (27), а из (31) нерав-во $\mathrm{T} \geq \mathrm{x}_{ij} - \mathrm{x}_{ik}$, к-ое выполняется всегда исходя из опр. Т. Аналогично при y_{ijk}=1 получаем из (31) $x_{ik} \geq x_{ij} + t_{ij}$ $\left[\text{первое из нерав-в (27)}\right]$, а из (30) – тривиольное нерав. $T \geq x_{ik} - x_{ij}$.

Т.о, если j-я деталь поступает на обработку на i-й станок после k-й, то y_{ijk}=0, а если до k-й, то y_{ijk}=1. Сд-но, для каждого станка i и любых двух деталей (j и k) нх-мо, чтобы из двух пер-ых y_{ijk} и y_{ikj} одна равнялась нулю и другая – единице. Этого можно добиться введением дпн-го огр-я

$$y_{ijk} + y_{ikj} = 1 \tag{32}$$

Теперь можно сформулировать мт-ю модель задачи: мнмз-ть z=t при огр-ях (28),(30),(31),(32), условиях неотц-ти и цлч-ти t_{ij}, x_{ij}, y_{ijk}, t.

Хотя полученная модель задачи может быть решена методами ЦП, но практические расчёты оказываются чрезвычайно громоздкими. Поэтому для решения задач календарного планирования используются иные, так назм- ые комбинаторные методы, н- р, методы Джонсона, суть к-го изложим на сд-ем.

п11. Составить модель задачи по опр-ю опт- го порядка обработки шести деталей ($j = \overline{1,6}$) на двух станках $(i = 1{,}2)$ при условии, что каждая деталь сначала обрабатывается на 1- м, затем на 2 станке с данными (табл. 18) о времени обработки t_{ij} на каждом станке. Найти решение полученной модели.

Р. Опр-им $T = max(\sum t_{1j,} \sum t_{2j}) + t_{ij} = max(73{,}59) + 5 = 78.$ Тогда получим

$$\min Z = t \geq x_{ij} + t_{ij} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{2j} &\geq x_{1j} + t_{1j} \\ (78 + t_{ik})y_{ijk} + x_{ij} &\geq x_{ik} + t_{ik} \\ (78 + t_{ik})(1 - y_{ijk}) + x_{ik} &\geq x_{ij} + t_{ij} \\ y_{ijk} + y_{ikj} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$t, t_{ij}, x_{ij}, y_{ijk} (i = 1,2; k, j = \overline{1,6}) \text{ - неотц- ые и целые.} \tag{35}$$

Модель (33)–(35) решим методом Джонсона, к-ый сводится простому правилу:

1) располагают данные t_{ij} в двух строках табл.;

2) находит среди всех t_{ij} нм-шее;

3) если $min\{t_{ij}\} = t_{1j_0}$, то j_0-ю деталь помещают на первое место; если же $min\{t_{ij}\} = t_{2j_0}$, то j_0 *– ю* деталь помещают на последнее место;

4) если оказываются несколько равных мнм-ых чисел, то выбирают деталь с меньшим номером. Если $min\{t_{ij}\} = t_{1j_0} = t_{2j_0}$, то j_0 *– ю* деталь помещают первой;

5) после выполнения п. 1–4 вычёркивают j_0 *– й* столбец и продолжают ту же процедуру с оставшимися 2n–2 вел-ми t_{ij}, начиная с п. 2.

Согласно п. 1–5 из табл. 18 получим табл. 18а, откуда имеем опт-ю посл-ть обработки деталей (3, 1, 2, 5, 4, 6).

Таблица 18

j i	1	2	3	4	5	6
1	5	12	4	20	18	14
2	9	12	15	6	12	5

Таблица 18а

j i	3	1	2	5	4	6
1	4	5	12	18	20	14
2	15	9	12	12	6	5

Общее время обработки и время простоя 2-го станка получим с помощью лин-ой диаграммы (рис.3). На линии, ств-ей 1-му станку, отложены в масштабе времени обработки согласно найденной опт. посл-ти. Внизу указаны римскими цифрами номера деталей. На 2-м станке неизбежны простои, к-ые указаны тонкой линией. Мнм-ое время обработки оказалось $t_{\min}=78$ и время простоя 2-го станка 19. При произвольном порядке обработки (н-р, в обратном найденному порядку) получили бы T=100 и время простоя 41.

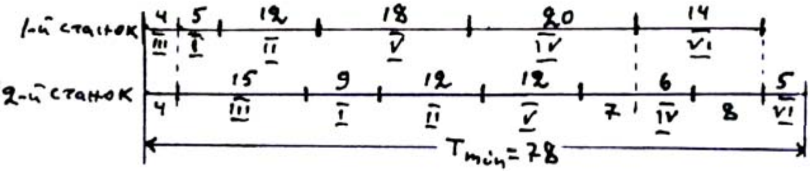


Рис. 3

10^0. Транспортная задача с фиксированными доплатами. В обычной тр. задаче с ресурсами $b_i(i=\overline{1,m})$, потребностями $a_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ и матрицей затрат $\left(c_{ij}\right)$ вводится здесь условие, согласно к-му устанавливается дпл-я оплата за эксплуатацию каждого маршрута $(i-j)$ в размере пст-ой вел-ы d_{ij}, если $x_{ij}>0$, и равной нулю, если $x_{ij}=0$. Составить опт-й план перевозки, мнмз-ий суммарные затраты.

Р. Мт. модель задачи имеет вид

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}x_{ij}+d_{ij}y_{ij}) \qquad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}&=a_j\,(j=\overline{1,n})\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}&=b_i\,(i=\overline{1,m})\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

$$x_{ij}\geq 0\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (38)$$

$$y_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если } & x_{ij}=0\\ 1, \text{ если } & x_{ij}>0\end{cases} \qquad (39)$$

Отличие этой модели от обычной тр. задачи в том, что целевая фк. содержит альтернативные пер. y_{ij}. Для того чтобы прийти к модели цлч-ой задачи введем для y_{ij} сд. условия: а) $0 \le y_{ij} \le 1$, $б) y_{ij} - цлч - ые,$ $в) x_{ij} \le \min(a_j, b_i) y_{ij}$. Первые два условия обеспечивают, что y_{ij} будут принимать только два значения: 0 или 1. Усло-вие в) связывает значения, принимаемые y_{ij}, со значениями x_{ij} в ств. условием (39). Дсв-но, если $y_{ij} = 0$, то из в) следует, что $x_{ij} = 0; если\ y_{ij} = 0$, то условие в) никаких огр-й на x_{ij} не налагает, т.к. всегда $x_{ij} \le \min\{a_j, b_i\}$. Наоборот, если в опт. плане $x_{ij} = 0,$ то и $y_{ij} = 0$, поскольку при $y_{ij} = 1$ вел. Z может быть уменьшена при замене y_{ij} нулем; если $x_{ij} > 0$, то из в) следует, что $y_{ij} = 1$.

Т. о. приходим к сд-ей модели частично, а при целых a_j $и$ b_i полностью цлч-ой задачи: мнмз-ть (36) при условиях (37), (38), а), б) и в).

п12. Составить модель задачи ЦП по сд-им данным: a_1=60, a_2=40, a_3=100, $в_1$=50, $в_2$=30, $в_3$=120,

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}, d_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Р. Исх. данные напишем на табл. 19 и найдем опорный план по схеме двойного предпочтения в табл. 19а. Задачу решим распределительным методом.

Таблица 19

a_j / b_i	60	40	100
50	7 2	vv 5 3	12 3
30	vv 4 4	6 0	8 5
120	10 0	9 1	vv 6 4

Таблица 19а

a_j / b_i	a_1 60	a_2 40	a_3 100
$в_1$ 50	7 10 2	5 40 3	12 3
$в_2$ 30	4 30 4	6 0	8 5
$в_3$ 120	10 20 0	9 1	6 100 4

Из табл. 19а находим

$$Z_0 = (10 \cdot 7 + 2) + (40 \cdot 5 + 3) + (30 \cdot 4 + 4) + (20 \cdot 10 + 0) + (100 \cdot 6 + 4) = 1203$$

Опорный план невырожденный, выч-ем:

$в_2 a_2$: 6 – 5 + 7-4=4,
$в_3 a_2$: 9 – 5+7-10=1,
$в_1 a_3$: 12-7+10-6=9,
$в_2 a_3$: 8 - 4+10-6=8.

Все оценки плж-ны, значит, найден опт. план:
$x^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{33}) = (10, 40, 30, 20, 100)$,
к-му ств-ет $Z_{\min} = 1203$.

11^0. Задачи оптимального размещения. Имеются n пунктов потребления в кол. $a_j\,(j = \overline{1,n})$ ед. продукции. Для уд-ия этих потребностей могут быть использованы m пунктов $(i = \overline{1,m})$ возможного производства продукта. Задана матрица $\|c_{ij}\|$ затрат на перевозки ед-ы продукта из i – го пункта производства в j-й пункт потребления. В отличие от обычной тр. задачи предполагается, что в каждом i-м пункте возможны p_i взаимоисключающих вариантов производства с объемами $b_{i1}, \ldots, b_{ik}, \ldots, b_{ip_i}$. Опр-ть опт. план размещения производства из условия мнмз-ции затрат на транспортировку продукта.

Р. Пусть x_{ij} -кол. ед. продукта, перевозимые из i-го пункта производства в j-й пункт потребления и $y_{ik} = \begin{cases} 0, \text{если вариант } a_{ik} \text{ не включается в план,} \\ 1, \text{если вариант } a_{ik} \text{входит в план.} \end{cases}$

Тогда получим сд-ю мт. модель задачи

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \qquad (40)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j\,(j = \overline{1,n}) \qquad (41)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \sum_{k=1}^{p_i} b_{ik} y_{ik}\,(i = \overline{1,m}) \qquad (42)$$

$$\sum_{k=1}^{p_i} y_{ik} = 1 \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (43)$$

$$y_{ik}\,(i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p_i}) - \text{неотц. и цлч-ы} \qquad (44)$$

$$x_{ij} \ge 0 (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}) \qquad (45)$$

Выражения (40)–(45) описывают частично или (при цлч-ых a_j и b_{ik})полностью цлч. задачу.

п13. Составить модель задачи опт-го размещения по сд-им данным n=3, m=2, p_1=2, p_2=3, $в_{11}$=120, $в_{12}$=150, $в_{21}$=90, $в_{22}$=80, $в_{23}$=100, a_1=90, a_2=40, a_3=70, $\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Найти решение полученной модели.

Р. $\min Z = 7x_{11} + 5x_{12} + 10x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 6x_{23}$

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} = 90\\
&x_{12} + x_{22} = 40\\
&x_{13} + x_{23} = 70\\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 120y_{11} + 150y_{12}\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 90y_{21} + 80y_{22} + 100y_{23}\\
&y_{11} + y_{12} = 1\\
&y_{21} + y_{22} + y_{23} = 1
\end{aligned}$$

Запишем исх. данные в табл. 20 и по схеме двойного предпочтения найдем опорный план на табл. 20а. Задачу решим распределительным методом.

Таблица 20

b_{ik} \ a_j		a_1 90		a_2 40		a_3 70	
b_1	120		7	vv	5		10
	150						
b_2	90	vv	4		9	v	6
	80						
	100						

Таблица 20б

b_{ik} \ a_j		a_1 90		a_2 40		a_3 70	
b_1	120		7	40	5	60	10
	150						
b_2	90		4		9		6
	80						
	100	90				10	

Из табл. 20а получим Z_0=40·5+60·10+90·4+10·6=1220. Условие m+n-1=4 выполняется, значит, опорный план невырожденный. Анализирует оценки:

Таблица 20а

b_{ik} \ a_j		a_1 90		a_2 40		a_3 70	
b_1	120		7		5		10
	150	60		40			
b_2	90		4		9		6
	80						
	100	30				70	

$$\begin{array}{cc} & 60 \\ \hline + & - \\ - & + \\ \hline 90 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 60 & \\ \hline + & - \\ - & + \\ \hline 30 & 70 \end{array}$$

$в_1 a_1 : 7 - 4 + 6 - 10 = -1$

$в_2 a_2 ; 9 - 6 + 10 - 5 = 8$

Находим Z_1=60·7+40·5+30·4+70·6=1160

$в_1 a_3 : 10 - 7 + 4 - 6 = 1$ | Все оценки плж., сд-но, найдем опт. план

$в_2 a_2 : 9 - 5 + 7 - 4 = 7$ | $x^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}) = (60, 40, 30, 70)$, $Z_{\min}$=1160

12^0. Задача логическим условием «либо-либо». Фабрика может производить n различных продуктов $(j = \overline{1,n})$, распологая для этого m видами ресурсов в кол. $b_i\,(i = \overline{1,m})$ и при этом могут быть использованы s технологических способов $\left(k=\overline{1,s}\right)$. Заданы вел. a_{ij}^{k}, характеризующие нормы расхода i-го ресурса на ед-у j-го продукта при изготовлении его к-м способом, и цены c_j ед-ы j-го продукта.

Составить модель задачи по опр-ю набора продуктов и способов их производства из условия мксз. товарной продукции при дпн-ом условии, согласно к-му любой j-й продукт либо должен производиться в кол. не меньшем a_j, либо совсем не производиться.

Р. Без дпн-го альтернативного условия задача относится к числу общих планово-производственных задач (5^0:3.1). Обз-им через x_{jk} кол. ед j-го продукта, изготовляемых к-м способом и введем n альтернативных пер.

$$y_j=\begin{cases}0, \text{если j-й продукт непроизводится;}\\ 1, \text{если j-й продукт производится в кол-ве} \geq a_j\end{cases} \qquad (*)$$

Тогда мт. модель имеет вид:

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\sum_{k=1}^{s} x_{jk}\right) \qquad (46)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} a_{ij}^{k} x_{jk} \leq b_i,\ i=\overline{1,m} \qquad (47)$$

$$x_{jk} \geq 0\ (j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,s}) \qquad (48)$$

Для того чтобы y_j принимали лишь два значения 0 или 1, введем два условия:

$$0 \leq y_j \leq 1 \ и \ y_j - \text{цлч-ые} \qquad (49)$$

Теперь нх-мо обеспечить, чтобы y_j принимали значения в ств. с условиями (*). Для этого обз-им через M_j вел-у, заведемо большую, чем кол. j-го продукта, к-ое может быть произведено при данных ресурсах. Так н-р, эта вел. может быть опр-на по одному из ресурсов (пусть первому) в предположении, что он используется только на изготовлении j-го продукта. Тогда можно принять, что $M_j=\max\limits_{k}\left\{\frac{b_1}{a_{ij}^{k}}\right\}$. Введем для каждого j два дпн-ых огр-ия

$$\sum_{k=1}^{s} x_{jk} \geq y_j a_j \qquad (50)$$

$$\sum_{k=1}^{s} x_{jk} \leq y_j M_j \qquad (51)$$

Теперь, если $y_j=0$, то из (51) следует $\sum\limits_{k} x_{jk} \leq 0$, откуда получаем $x_j=\sum\limits_{k} x_{jk}=0$. Если же $y_j=1$, то из (51) имеем $x_j=\sum\limits_{k} x_{jk} \leq M_j$, а из (50) получаем $x_j \geq a_j$, что ств-ет исх. условиям. Наоборот, если $x_j = 0$, то из (50) следует, что $y_j = 0$, и если $x_{j\geq} a_j$, то нерав. (50) уд-ся при любом y_j (0 или 1), а из (51) следует $y_j = 1$.

п14. Составить мт-ю модель и решить предыдущую задачу при сд. конкретных данных: $n = 3,\ m = 2,\ c_1 = 12,\ c_2 = 25,\ c_3 = 8,\ a_1 = 30,$ 1-й продукт либо производится в кол. не менее 30 ед., либо совсем не производится. Значения b_i и a_{ij}^k приведены в табл. 21.

Р. Опр-ем $M_j = \max\left\{\dfrac{b_1}{a_{ij}^k}\right\} : M_1 = \dfrac{1200}{12} = 100$

Таблица 21

Ресурсы	I способ			II способ		
	j =1	j =2	j =3	j =1	j =2	j =3
1200	15	6	9	12	8	10
800	10	10	12	16	8	6

Тогда мт. модель имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \max Z = 12\left(x_{11} + x_{12}\right) + 25\left(x_{21} + x_{22}\right) + 8\left(x_{31} + x_{32}\right) \\ \left(15x_{11} + 12x_{12}\right) + \left(6x_{21} + 8x_{22}\right) + \left(9x_{31} + 10x_{32}\right) \leq 1200 \\ \left(10x_{11} + 16x_{12}\right) + \left(10x_{21} + 8x_{22}\right) + \left(12x_{31} + 6x_{32}\right) \leq 800 \\ 30y \leq x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad \leq 100y \end{array}\right\}$$

$$x_{jk} \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1,\ \text{у – цлч.}$$

Модель задачи решим симплекс-методом на табл. 21а.

Таблица 21а

i	c	ба-зис	b	12	12	25	25	8	8	0	0	0	0	$\sum$
				x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	x_1	1200	15	12	6	8	9	10	1				61
2	0	x_2	800	10	16	10	8	12	6		1			63
3	0	x_3	30y	1	1							-1		1
4	0	x_4	100y	1	1								1	3
$m+1$			0	-12	-12	-25	-25	-8	-8	0	0	0	0	-90
	0	x_1	400	5	-4	-4		-3	4	1	-1			-2
	25	x_{22}	100	5/4	2	5/4	1	3/2	3/4		1/8			63/8
	0	x_3	30y	1	1							-1		1
	0	x_4	100y	1	1								1	3
$m+1$			2500	77/4	38	25/4	0	59/2	43/4	0	25/8	0	0	855/8

Из табл. 21а получаем: 2-й продукт следует изготовлять II способом $\left(x_{22} = 100\right)$, $Z_{\max}$=2500.

ЛЕКЦИЯ 12

3.6. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1^0. Предмет параметрического ЛП. Как известно из 3.1 общая задача ЛП содержит пст-ые вел.: коэф-ты c_i, a_{ij} и свободные члены $b_i\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$. С одной стороны, при опр. этих вел-н на практике встречаются с тем, что в дев-ти они не яв-ся пст-ми, а их значения изменяются в нек-ых интервалах . С другой, найдя опт. план нек-ой экономической задачи при фиксированных значениях a_{ij}, c_j, b_i, полученных из опыта, нх-мо знать, в каких допустимых пределах можно их изменять, чтобы план оставался оптимальным.

Поэтому возникает нх-сть исследовать поведение опт-го решения задачи ЛП при изменении ее коэф-ов и свободных членов. Исследования подобного рода и составляют предмет параметрического ЛП.

Параметрическое программирование (ПРЛП) возникло в связи с изучением задач планирования производства (прз.) и дает возможность упл-ть опт-ым планированием различных экнч-их процессов, к-ые могут быть описаны лин. мт-ой моделью.

2^0. Задачи с параметром в целевой функции. Геометрическая интерпретация и примеры. Предположим, что коэф. c_j лин-ой фк. изменяются в нек-ых допустимых пределах $\left[c_j - c_j'; c_j + c_j'\right]$, тогда целесообразно коэф-ы лин-ой фк. заменить выражением $c_j(\lambda) = c_j' + \lambda c_j''$, где $c_j', c_j''-$ пст-ые, а λ -параметр, изменяющийся в нек-ых пределах. В этом случае мт. модель задачи имеет вид:

$$\min \mathrm{Z} = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j' + \lambda c_j''\right)x_j, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\left(i=\overline{1,m}\right), \tag{2}$$

$$x_j \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Для каждого значения λ в интервале $\delta \leq \lambda \leq \varphi$, где δ и $\varphi-$ произвольные дсв-ые числа, найти неотц-ый вектор $\mathrm{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, уд-ий системе (2), (3), и доставляющий лин-ой фк. (1) мнм. значение.

Исследуем поведение решения поставленной задачи в зв-ти от изменения параметра λ. Положим $\lambda = \delta$ и используем симплекс-метод. В результате приходим к одному из двух случаев: для $\lambda = \delta$ опт. план сущ-ет (случай А); для $\lambda = \delta$ лин-я фк. не огр-на (случай Б). Рас-им каждый из них.

Случай А. Пусть для $\lambda = \delta$ получен опт. план, к-му ств-ет нек-ый базис, состоящий из m векторов системы $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$. В ств. с условиями опт-ти плана его оценки должны уд-ть условию $\mathrm{Z}_j - c_j \le 0$. Т.к. $c_j = c_j' + \delta c_j''$, то условия опт-ти имеют вид

$$z_j - c_j = \alpha_j + \delta\beta_j \le 0, j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где α_j и β_j – нек-ые дсв. числа.

Отсюда заключаем, что система нерав-в $\alpha_j + \lambda\beta_j \le 0\left(j = \overline{1,n}\right)$ совместна и имеет сд. решения: $\lambda \ge -\alpha_j / \beta_j$ для всех $\beta_j < 0$,

$\lambda \le -\alpha_j / \beta_j$ для всех $\beta_j > 0$.

Пусть
$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\left(-\alpha_j / \beta_j\right) \\ B_j < 0 \\ -\infty, \text{если все } \beta_j \ge 0, \end{cases} \qquad \overline{\lambda} = \begin{cases} \min\left(-\alpha_j / \beta_j\right) \\ \beta_j > 0 \\ +\infty, \text{ если все } \beta_{\mathrm{j}} \le 0, \end{cases} \tag{5}$$

тогда опт. решение задачи при $\lambda = \delta$ совподает с опт. планом задачи для всех λ, уд-их условию $\underline{\lambda} \le \lambda \le \overline{\lambda}$. Т.к в данном случае левый конец сегмента $[\delta, \varphi]$ покрыт, т.е. $\underline{\lambda} \le \delta$, то для решения задачи нх-мо покрыть правый конец сегмента, или д-ть, что при $\lambda \ge \varphi$ задача не имеет решений.

Итак, если $\overline{\lambda}$ конечно и $\overline{\lambda} \ge \varphi$, или $\overline{\lambda} = +\infty$ процесс решения закончен.

Пусть $\overline{\lambda}$ конечно: $\overline{\lambda} = -\alpha_к / \beta_к$ и $\overline{\lambda} < \varphi$, тогда рас-им вектор $\mathrm{A}_к$. Если его компоненты $x_{iк} \le 0$, то согласно симплекс-методу и опр-ю λ лин-я фк. задачи при $\lambda > \overline{\lambda}$ неогр-на снизу, в этом случае процесс решения также закончен. Если по крайней мере, одна из $x_{iк} > 0$, то вектор $\mathrm{A}_к$ вводится в базис, а вектор A_i, ств-ий ключевой строке, из базиса исключается.

Поскольку новый базис получаем с помощью обычного симплекс-метода, причем при $\lambda = \overline{\lambda}$, то он ств-ет нек-му новому плану, причем нерав-ва

$$\alpha_j' + \lambda\beta_j' \le 0, \text{ j=}\overline{\text{1,n}} \tag{6}$$

совместны и ств-ют только новому базису.

Покажем, что любое $\lambda < \lambda$ не уд-ет систем нерав-в (6). Дсв-но, для оценки вектора A_l, исключенного из прежнего базиса, получаем

$$\alpha_l' = -\alpha_к / x_{iк}, \beta_l' = \beta_к / x_{iк},$$

где $x_{lk} < 0$ как ключевой эл-т.

Допустим, что система (6) уд-ят нек-ое $\lambda < \overline{\lambda}$, тогда $\alpha_l' + \lambda\beta_l' \le 0$, или согласно $(6a) - \alpha_к - \lambda\beta_к \le 0$, т.к. $\beta_к > 0$, то из последнего нерав-ва следует, что $\lambda \ge -{\alpha_к}/{\beta_к} = \overline{\lambda}$.

То, если $\overline{\lambda}$ конечно, то оно яв-ся нижней границей для интервала изменения при новом базисе. Этим самым д-на

т1. Новый базис ств-ет опт. плану хотя бы для одного значения параметра λ.

Если интервал $\underline{\lambda}' \leq \lambda \leq \overline{\lambda}'$ яв-ся полной совокупностью значений λ, для к-ых новый базис ств-ет опт. плану, то $\lambda' = \overline{\lambda}$.

Т.о. переходит от одного интервала изменения λ к другому до тех пор, пока один из интервалов не включит $\lambda = \varphi$.

Век-ы $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ наз. критическими значениями параметра λ, а опт. планы, им ств-щие, наз. критическими решениями.

Случай Б. 1. Пусть в результате проведенной итерации для вектора $A_к$ получена оценка $\alpha_к + \delta\beta_к > 0$, а все $x_{ij} \leq 0$. Тогда, если $\beta_к \geq 0$, то лин-ия фк. задачи неог-на снизу для любого λ.

2. Если $\beta_к < 0$, то нерав. $\alpha_к + \lambda\beta_к > 0$ имеет место для $\lambda < \lambda_1' = -\alpha_к / \beta_к$. Отсюда для любого $\delta \leq \lambda < \lambda_1'$ задачи не имеет опт-го плана. Если для $\lambda = \lambda_1'$ все $\alpha_j + \lambda_1' \beta_j \leq 0$, то опт. план для этого значения λ получен и процесс продолжается, как и в случае А. Если не все $\alpha_j + \lambda_1' \beta_j \leq 0$, то в базис можно ввести любой вектор, для которого $\alpha_j + \lambda_1' \beta_j > 0$. Процесс продолжаем до тех пор, пока не окажется, что либо $\alpha_j + \lambda_1' \beta_j \leq 0 \left(j = \overline{1,n} \right)$, либо пока не обнаружен вектор A_t с оценкой $\alpha_t + \lambda_1' \beta_t > 0$, для к-го $x_{it} \leq 0$, тогда возвращаемся к п.1.

Посл-ое применение описанной процедуры либо приведет к опт. плану для нек-го значения λ, либо позволит обнаружить, что при любом λ лин. фк-я задачи неогр-на снизу.

Если значения δ и φ заранее не заданы, а нх-мо опр-ть систему интервалов изменения λ и ств-их им опт-ых планов, то надо найти такой базис, для к-го система ур-й $\alpha_j + \lambda\beta_j \leq 0 \left(j = \overline{1,n} \right)$ совместна. С помощью этой системы опр-ть $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$, после чего продолжить исследования как для $\lambda > \overline{\lambda}$, так и для $\lambda < \underline{\lambda}$ рас-ным методом.

Теперь рас-им геом. интерпретацию задачи с параметром в целевой фк. на пл-ти. Для каждого значения $\delta \leq \lambda \leq \varphi$ найти неотц. вектор $X = (x_1, x_2)$ задачи

$$\min Z = \lambda x_1 + c_2 X_2,$$

при опр-ях

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mi}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{array} \right\} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

,

Положим, что $\lambda \le \varphi$ и изб-им условия задачи на рис.1, где напровление вектора $N = (\delta, C_2)$ ств-ет $\lambda = \delta$. В этом случае $Z_{\min} = Z(A)$ и крд-ы точки A яв-ся опт. планом, ств-им $\lambda = \delta$. Начнем увеличивать $\lambda > \delta$, тогда конец вектора N будет скользить в право по пм-й (L), а пм.(Z), вращаясь вокруг начал крд. станет параллельной (прл.) ребру AB. Пусть этому моменту ств-ет $\lambda = \lambda_1$, тогда, начиная с этого момента значения параметра, получим $Z_{\min} = Z(B)$ и крд-ы точки B яв-ся опт. планом, ств-им $\lambda = \lambda_1$. Если продолжать увеличивать $\lambda > \lambda_1$, то пм (Z) превратится только в опорную к муг-у решений в вершине B, но стать прл-ой ребру BC она не может, ибо находим $\min Z$.

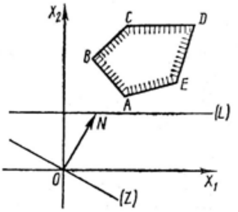


Рис. 1

Если уменьшить значения $\lambda < \delta$, то конец вектора N будет скользить влево по $пм(L)$, а $пм(Z)$, вращаясь вокруг начала крд., при $\lambda = \lambda_2$ может стать прл-ой ребру AE, а при $\lambda = \lambda_3$ – прл-ой ребру DE, крд-ы вершин E и D яв-ся опт. планами, ств-им значения λ_2 и λ_3. При этом $пм(Z)$ останется опорный в точке D, сколько бы мы не уменьшали λ, т.е. она не может быть прл-ой ребру CD.

Т.о., интервалами опт-ти планов задачи для различных значений параметры яв-ся: $-\infty < \lambda \le \lambda_3$ – критическое решение крд-ы вершины Д; $\lambda_3 \le \lambda \le \lambda_2$ – критическое решение крд-ы вершины E; $\lambda_2 \le \lambda \le \lambda_1$ – критическое решение крд-ы вершины A; $\lambda_1 \le \lambda < \infty$ – критическое решение крд-ы вершины B. Опт-мы решениями также служат точки, представляющие собой выпуклое лин. комбинации точек Д и E; E и A; A и B.

п1. Для каждого значения $-\infty < \lambda < \infty$ найти неочт. решение задачи

$$\min z = \lambda x_1 + 2x_2,$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 6 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 11 \\ 3x_1 - 2x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\} \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Р. Вводя дпн-ые пер., получим расширенную задачу:

$$\min z = \lambda x_1 + 2x_2,$$

$$\left.\begin{array}{lllll} 2x_1 + x_2 & -x_3 & & & = 6 \\ -x_1 + 3x_2 & & +x_4 & & = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 & & & +x_5 & = 2 \end{array}\right\} \quad x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

Для опр-ия интервалов изменения λ, записываем расширенную задачу в табл. 1. Отыскиваем первоначальный опорный план, применяя метод

Жордана-Гасса, выбираем ключевой эл. по $\theta = \min\limits_{i} \frac{x_i}{x_{ij}}$, где $x_{ij} > 0$. По этому отн. включаем в базис сначала вектора исх. задачи, а затем расширенной. В результате трех итераций получаем опорный план $X_1 = (2, 2, 0, 7, 0)$ при базисе (A_1, A_2, A_4). Проверяем этот план на опт-ть, для чего подсчитываем оценки $(z_j - c_j)$ и решаем систему нерав-в:

$$\begin{cases} -\frac{6}{7} - \frac{2}{7}\lambda \le 0 \\ -\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 - \lambda \le 0 \\ -4 + \lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le \lambda \\ \lambda \le 4 \end{cases} \Rightarrow -3 \le \lambda \le 4.$$

Т.о., в точке X_1 лин-я фк. достигает $\min z$, если λ изменяется в пределах $[-3, 4]$. Проверяем, сущ-ют ли планы задачи при $\lambda < -3$. Для этого расв-ем компоненты вектора A_3, т.к. именно из оценки этого вектора найдено, что $\lambda = -3$. Среди компонента этого вектора $x_{23} = 1 > 0$. Выбираем его за ключевой эл. и проводим полное исключение. Вектор A_4 исключаем из базиса, а вектор A_3 – включаем в базис.

В результате четвертой итерации получаем новый опорный план $X_2 = (4, 5, 7, 0, 0)$ при базисе (A_1, A_2, A_3). Проверяем этот план на опт-ть: для этого подсчитываем оценки $(z_j - c_j)$ и решаем систему нерав-в:

$$\begin{cases} \frac{6}{7} + \frac{2}{7}\lambda \le 0 \\ \frac{2}{7} + \frac{3}{7}\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + \lambda \le 0 \\ 2 + 3\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \le -3 \\ \lambda \le -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -\infty < \lambda \le -3.$$

Т.о., в точке x_2 лин-я фк. достигает мнм-го значения, если λ изменяется в пределах $]-\infty, -3]$.

Проверяем, существуют ли планы задачи при $\lambda > 4$. Для этого возвращаемся к третьей итерации и расв-ем компоненты вектора A_5, т.к. именно из оценки этого вектора найдено, что $\lambda = 4$. За ключевой эл. выбираем $x_{25} = 1$, т.к. $\frac{7}{1} < 2 : \frac{1}{7}$, и производим полное исключение. Вектор A_4 из базиса исключаем, а вектор A_5 включаем в базис.

В результате пятой итерации получен новый план $x_3 = (1, 4, 7, 0, 0)$, к-му ств-ет базис $(A_1, A_2, A_5,)$. Проверяем этот план на опт-ть, для чего подсчитаем оценки $(Z_i - C_i)$ и решаем систему нерав-в:

$$\begin{cases} -\frac{2}{7} - \frac{3}{7}\lambda \le 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{1}{7}\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3\lambda \le 0 \\ 4 - \lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \le \lambda \\ 4 \le \lambda \end{cases} \Rightarrow 4 \le \lambda < \infty$$

Таблица 1

i	C	Ба-зис	A_0	λ	2	0	0	0	Σ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	–	–	6	2	1	–1	0	0	8
2	–	–	11	–1	3	0	1	0	14
3	–	–	2	$\boxed{3}$	–2	0	0	1	4
m+1	–	–	0	$-\lambda$	–2	0	0	0	$-\lambda-2$
1	–	–	14/3	0	$\boxed{7/3}$	–1	0	–2/3	16/3
2	–	–	35/3	0	7/3	0	$\boxed{1}$	1/3	46/3
3	λ	A_1	2/3	1	–2/3	0	0	1/3	4/3
m+1	–	–	$2/3\lambda$	0	$-2-\frac{2}{3}\lambda$	0	0	$1/3\lambda$	$-2+\frac{1}{3}\lambda$
1	2	A_2	2	0	1	–3/7	0	–2/7	16/7
2	0	A_4	7	0	0	$\boxed{1}$	1	①	1,0
3	λ	A_1	2	1	0	–2/7	0	1/7	20/7
m+1	Z-C_j		$4+2\lambda$	0	0	$-6/7-\frac{2}{7}\lambda$	0	$-\frac{4}{7}+\frac{1}{7}\lambda$	$18/7+\frac{13}{7}\lambda$
1	2	A_2	5	0	1	0	3/7	2/7	47/7
2	0	A_3	7	0	0	1	1	4/3	31/3
3	λ	A_1	4	1	0	0	2/7	11/21	122/21
m+1	Z-C_j		$10+4\lambda$	0	0	0	$6/7+2/7\lambda$	$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\lambda$	$\frac{78}{7}+\frac{33}{7}\lambda$
1	2	A_2	4	0	1	–1/7	2/7	0	36/7
2	0	A_5	7	0	0	1	1	1	10
3	λ	A_1	1	1	0	–3/7	–1/7	0	10/7
m+1	Z_j-C_j		$8+\lambda$	0	0	$-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\lambda$	$\frac{4}{2}-\frac{1}{7}\lambda$	0	$\frac{58}{7}+\frac{3}{7}\lambda$

Т.о., в точке X_3 достигается $Z_{\min}$, если λ изменяется в $[4,\infty[$.

Интервалами опт-ти планов исх. задачи для различных значений λ яв-ся: $-\infty<\lambda\le-3$, критическое значение $x_2=(4,\ 5)$, $Z_{\min}=4\lambda+10$, $-3\le\lambda\le4$ критическое значение $x_1\ =(2,\ 2)$, $Z_{\min}=2\lambda+4$, $4\le\lambda\le\infty$, критическое значение $x_3=(1,4)$, $Z_{\min}=\lambda+8$.

зм1. Если задача решается на max Z, то вместо (4), (5) получим:

$$\mathrm{Z}_j-C_j=\alpha_j+\delta\beta_j\ge0\ (j=\overline{1,\ n}),\tag{7}$$

тогда система нерав-в $\alpha_j+\lambda\beta_j\ge0$ совместны и имеет решения:

$$\begin{cases}\lambda\ge-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}npu\beta_j>0\\ \lambda\le-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}npu\beta_j<0\end{cases}$$

откуда имеем $\lambda = \begin{cases} \max\limits_{\beta_j > 0}(-\alpha_j/\beta_j) \\ -\infty, \textit{если} \text{ все } \beta_j \le 0, \end{cases} \quad \overline{\lambda} = \begin{cases} \min\limits_{\beta_j < 0}(-\alpha_j/\beta_j) \\ \infty, \text{ если все } \beta_{\text{j}} \ge 0. \end{cases}$ (8)

п2. Для всех значений λ найти неотц. решение задачи

$$\max Z = (2+3\lambda)x_1 + (-1+2\lambda)x_2 + 3\lambda x_3 + 4x_4,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\le 7 \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &\le 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\le 2 \end{aligned}\right\}, \text{x}_{\text{j}} \ge 0, \text{j} = \overline{1,4}.$$

Р. Введем дпн-ые неотц. пер. x$_5$, x$_6$, x$_7$, и сведем условия – нерав. к равам. Начнем решение задачи на табл. 2 с начального базиса A$_5$, A$_6$, A$_7$. Задачу решим симплекс – методом сначала при $\lambda = 0$ для α_{j} за три итерации, затем продолжим решение при $\lambda \ne 0$, добавляя строки β_j и $\left(-\dfrac{\alpha_{\text{j}}}{\beta_j}\right)$ по (8).

В строке $\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$ получим при $\beta_j > 0$ max $\left(-\dfrac{\alpha_{\text{j}}}{\beta_{\text{j}}}\right) = -\dfrac{9}{2}$, к-ое ств-ет вектору A$_5$, а при $\beta_j < 0 \min\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \dfrac{2}{65}$, к-ое ств. вектору A$_1$.

Сд-но, базис, опт-ый при $\lambda = 0$, остается базисом решения задачи на отрезке $\left[-\dfrac{9}{2}, \dfrac{2}{65}\right]$. Чтобы продвинуться по оси λ влево, следует ввести в базис вектор A$_5$. После первой же итерации убеждаемся, что все β_j неплж-ны. Это значит, что базис A$_5$,A$_6$, A$_4$, опт-ый или $\lambda = -\dfrac{9}{2}$, яв-ся базисом решения для всех точек луча $\left]-\infty, -\dfrac{9}{2}\right]$. Введем теперь в базис решения, отвечающий отрезку $-\dfrac{9}{2} \le \lambda \le \dfrac{2}{65}$, вектор A$_1$. После первой же итерации все β_{j} оказывается неотц-ми. Значит, базис A$_2$,A $_{6,}$A$_{1,}$ опт-ый при $\lambda = \dfrac{2}{65}$, яв-ся базисом решения при всех λ, или надлежащих лучу $\left[\dfrac{2}{65}, \infty\right[$

Т.о. интервалами опт-ти планов для различных значений λ яв-ся: $-\infty \le \lambda \le \dfrac{9}{2}$ базисом A$_4$, A$_5$, A$_6$ и опт. планом $X = (0,0,0,1,4,16,0)$,

$Z_{\max}=4;\ -\dfrac{9}{2}\le\lambda\le\dfrac{2}{65}$ базисом A$_2$, A$_4$, A$_6$ и опт. планом $X=\left(0,\dfrac{8}{19},0,\dfrac{39}{19},\dfrac{292}{19},0\right)$, $Z_{\max}=\dfrac{148+16\lambda}{19};\quad \dfrac{2}{65}\le\lambda\le\infty$ базисом A$_1$, A$_2$, A$_6$ и опт. планом $X=\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{4}{3},0,0,0,\dfrac{68}{3},0\right)$, $Z_{\max}=\dfrac{22+47\lambda}{3}$.

Таблица 2

j	C	Ба-зис	A$_0$	$2+3\lambda$	$-1+2\lambda$	3λ	4	0	0	0	$\sum$
				A$_1$	A$_2$	A$_3$	A$_4$	A$_5$	A$_6$	A$_7$	
1	0	A$_5$	7	1	2	1	3	1	0	0	15
2	0	A$_6$	15	-3	4	2	-1	0	1	0	19
3	0	A$_7$	2	2	-5	3	$\boxed{2}$	0	0	1	4
m+1		α_j	0	-2	1	0	-4	0	0	0	-5
m+2		β_j	0	-3	-2	-3	0	0	0	0	-8
1	0	A$_5$	4	-2	$\boxed{^{19}/_{2}}$	-2	0	1	0	$^{-3}/_{2}$	9
2	0	A$_6$	16	-2	$^{3}/_{2}$	4	0	0	1	$^{1}/_{2}$	21
3	4	A$_4$	1	1	$^{-5}/_{2}$	1	1	0	0	$^{1}/_{2}$	2
m+1		α_j	4	2	-9	4	0	0	0	2	3
1	$-1+2\lambda$	A$_2$	$^{8}/_{19}$	$^{-2}/_{19}$	1	$^{-4}/_{19}$	0	$\boxed{^{2}/_{19}}$	0	$^{-3}/_{19}$	$^{18}/_{19}$
2	0	A$_6$	$^{292}/_{19}$	$^{-32}/_{19}$	0	$^{82}/_{19}$	0	$^{-3}/_{19}$	1	$^{14}/_{19}$	$^{372}/_{19}$
3	4	A$_4$	$^{39}/_{19}$	$\boxed{^{9}/_{19}}$	0	$^{9}/_{19}$	1	$^{5}/_{19}$	0	$^{2}/_{19}$	$^{83}/_{19}$
m+1		α_j	$^{148}/_{19}$	$^{2}/_{19}$	0	$^{40}/_{19}$	0	$^{18}/_{19}$	0	$^{11}/_{19}$	$^{219}/_{19}$
m+2		β_j	$^{16}/_{19}$	$^{-65}/_{19}$	0	$^{-65}/_{19}$	0	$^{4}/_{19}$	0	$^{-6}/_{19}$	$^{-116}/_{19}$
m+3		$^{-\alpha}/_{\beta j}$	–	$^{2}/_{65}$	0	$^{8}/_{13}$	0	$^{-9}/_{2}$	0	$^{11}/_{6}$	$^{394}/_{195}$
1	0	A$_5$	4	–2	$^{19}/_{2}$	–2	0	1	0	$^{-3}/_{2}$	9
2	0	A$_6$	16	–2	$^{3}/_{2}$	4	0	0	1	$^{1}/_{2}$	21
3	4	A$_4$	1	1	$^{-5}/_{2}$	1	1	0	0	$^{1}/_{2}$	2
m+1		α_j	4	2	–9	4	0	0	0	2	3
m+2		β_j	0	–3	–2	–3	0	0	0	0	–8
m+3		$-\alpha_j/\beta_j$	–								
1	–1+2λ	A$_2$	$^{4}/_{3}$	0	1	0	$^{4}/_{9}$	$^{2}/_{9}$	0	$^{-1}/_{9}$	$^{26}/_{9}$
2	0	A$_6$	$^{68}/3$	0	0	6	$^{32}/_{9}$	$^{7}/_{9}$	1	$^{10}/_{9}$	$^{316}/_{9}$
3	2+3λ	A$_1$	$^{13}/_{3}$	1	0	1	$^{19}/_{9}$	$^{5}/_{9}$	0	$^{2}/_{9}$	$^{83}/_{9}$
		α_j	$^{22}/_{3}$	0	0	2	$^{-2/}9$	$^{8}/_{9}$	0	$^{5}/_{9}$	$^{95}/_{9}$
		β_j	$^{47}/_{3}$	0	0	0	$^{65}/_{9}$	$^{19}/_{9}$	0	$^{4}/_{9}$	$^{229}/_{9}$
		$-\alpha_j/\beta_j$	–								

3^0. Графический метод решения задачи с параметром в целевой функции. Демонструем графическое решение задачи на конкретном примере.

п3. $\max Z = 5x_1 + (2+3t)x_2,\ t\in[0,10]$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 51 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \end{array}\right\}\begin{array}{l} a \\ б \\ в \\ г \end{array}$$

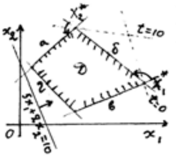


Рис. 2

Р. Положим $t=0$ и построим обл. огр-й D, линию уровня целевой фк. $5x_1+2x_2=10$ (рис.2). Из $\left.\begin{array}{r}4x_1+5x_2=51\\2x_1-5x_2=3\end{array}\right\}$ находим $X_1^*=(9,3), Z_{\max}=51$. Запишем выражение для углового коэф. линий уровня целевой фк. при произвольном значении $t: \kappa=-\frac{5}{2+3t}$

Опр-им обл. опт-ти найденного плана X_1^*: при этом линия уровня должна находиться внутри угла, образованного прямыми $в$ и δ (рис. 2) Их угловые коэф. ств-но равны: к$_1$ = 0, 4 и к$_2$ = - 0, 8. Опр-им $\underline{t}$ и $\bar{t}$. Имеем $-\frac{5}{2+3t}=-\frac{4}{5}\Rightarrow\underline{t}=\frac{17}{12}$ и $-\frac{5}{2+3t}=\frac{2}{5}\Rightarrow\bar{t}=-\frac{29}{6}$, но нас интересуют $t\in[0,10]$, поэтому $\left[\underline{t},\bar{t}\right]=\left[0,\frac{17}{12}\right]$. При $t=\frac{17}{12}$ целевая фк. совпадает с ребром $4x_1+5x_2=SI$, поэтому опт-ми будут все планы между точками x_1^* = (9, 3) и x_2^*=(4, 7) из. $\begin{cases}-x_1+x_2=3\\4x_1+5x_2=51\end{cases}$. Эта картина будет сохраняться до тех пор, пока при изменении t (увеличении углового коэф. К от $-\frac{4}{5}$ до 1) целевая фк. не сольется с прямой $-x_1+x_2=3$, что будет ств-ть решению $x_2{*}=(4,7)$ при $t=-\frac{7}{3}$. Но нас интересуют лишь $t\in[0,10]$, а найденное значение $t=-\frac{7}{3}$ не входит в обл. допустимых значений. Опр-им К для $Z(x,t)$ при $t=10$, имеем $K_Z(10)=-\frac{5}{2+3\cdot10}=-\frac{5}{32}$. Угловой коэф. целовой фк. выходит из обл. допустимых значений раньше, чем целевая фк. сольется с пм. $-x_1+x_2=3$.

Поэтому имеется лишь два мн-ва опт-ти: $x_1{*}=(9,3)$ при

$$t\in\left[0,\frac{17}{12}\right],\ x_2{*}=(4,\ 7)\ \text{при}\ t\in\left[\frac{17}{12},\ 10\right].$$

4^0. Задача с параметром в свободных членах системы ограничений. Геометрическая интерпретация и примеры. В этом случае мт-я модель задачи имеет вид:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}c_jx_j \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i'+\lambda b_i''\ \ i=\overline{1,m}, \tag{10}$$

$$x_j\geq 0, j=\overline{1,n}\ . \tag{11}$$

Для каждого значения λ в интервале $\delta \le \lambda \le \varphi$, где δ и φ – произвольные дсв. числа, найти неотц. вектор $x = (x_{1,} x_{2,} ..., x_n)$, уд-й системе (10), (11) и доставляющий лин-ой фк. (9) мнм. значение.

зм1. Исследование задачи (9)–(11) можно свести к решению дв-ой задачи

$$\max T = \sum_{i=1}^{m} (b_i ' + \lambda b_i '') y_i, \tag{9a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, j = \overline{1, m}, \tag{10a}$$

$$y_i \left(i = \overline{1, m} \right) \text{ – произвольные.} \tag{11a}$$

Задачу(9)–(11) решим без сведения к задаче (9а)–(11а).

Допустим, что при λ=δ найдем опт. план $x_1^* = (x^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ тогда каждый его компонент яв-ся лин. фк-ей от δ, т.е. $x_i^* = q_i + \delta p_i$ и система нерав-в

$$q_i + \lambda p_i \ge 0, i = \overline{1, m} \tag{12}$$

яв-ся совместной.

Если вся $p_i = 0$, то система (12) не зависит от λ, и план x^* яв-ся опт-ым для всех значений λ. Если все $p_i \ge 0$, то план x^* опр-ый для всех λ ≥δ, а если все $p_j \le 0$, то x^* опт-ый для всех λ≤ δ. Т.к. p_i могут быть как плж-ми, так и отц-ми, то из решения системы (12) получаем:

$$\lambda \ge \frac{q_i}{p_i} \text{ для } p_i > 0$$

причем

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{p_i > 0}(-q_i / p_i), \\ -\infty, \text{ если все } p_i \le 0 \end{cases} \tag{13}$$

и

$$\lambda \le q_i / p_i \text{ для } p_i < 0$$

причем

$$\overline{\lambda} = \begin{cases} \min\limits_{p_i > 0}\left(-q_i / p_i\right) \\ +\infty, \text{ если все } p_i \ge 0 \end{cases} \tag{14}$$

Отсюда план x^* опт-ый для всех x из интервала $\underline{\lambda} \le \lambda \le \overline{\lambda}$.

Допустим, что $\overline{\lambda}$ конечно. Начнем неогр-но увеличивать λ, тогда оценки $z_j - c_j$, поскольку они не зв-яв от λ, останутся без изменения. При этом вектор x^* с компонентами $x_i^* = q_i + \lambda p_i$ продолжает уд-ть условиям опт-ти, перестав быть планом расв-ой задачи. Это произойдет тогда, когда хотя бы один из компонентов вектора окажется отц-ым.

Пусть при увеличении λ компонента $x_l^* = q_l + \lambda q_l$ первая стала отц-ой, тогда $\overline{\lambda} = -\frac{q_l}{p_l}$, где $p_l <$ 0. Теперь нх-мо опр-ть, сущ-ет ли новый опт. план при $\lambda > \overline{\lambda}$. Для этого надо выбрать такой вектор, подлежащий введению в базис, и вектор, исключаемый из базиса, чтобы компоненты плана в новом базисе были неотц-ми, а прб-ные оценки $\left(z_j - c_j\right)$ – неплж-ми.

m2. Если вектор A_l, ств-ий $\lambda = -\frac{q_l}{ql}$, исключается из базиса и в базис включается вектор $A_к$, для к-го $\frac{z_{k-}c_k}{x_{lk}} = \min\limits_{x_{lj}<0} \frac{z_j - c_j}{c_{lj}}$, то образуется новый опт. план хотя бы для одного значения $\overline{\lambda}$. Если новый базис опр-ет решения задачи для интервала $\underline{\lambda'} \le \lambda \le \overline{\lambda}$, то $\underline{\lambda'} = \overline{\lambda}$.

Д. На основании (31) из 5^0:3.3 компоненты нового опорного плана x^* выч-ся по фм-ам:

$$x_i^{*\prime} = q_i' + \lambda p_i' = q_i + \lambda p_i - \frac{x_{ik}}{x_{lk}}(q_l + \lambda p_l), i \ne l, ,$$

$$x_k^{*\prime} = q_k' + \lambda p_k' = \frac{q_l + \lambda p_l}{x_{lk}}.$$

Вектор $x^{*\prime}$ яв-ся планом задачи для $\lambda = \overline{\lambda} = -\frac{q_l}{p_l}$. Если $x^{*\prime}$ – план задачи для нек-го другого значения λ, то оно должно уд-ть условию $\lambda > \overline{\lambda}.$. Это следует из того, что если $x_{lk} < 0, p_l < 0$ и $(d_l + \lambda p_l)/x_{lk} \ge 0,$ то $\lambda \ge -\frac{q_l}{p_l} = \overline{\lambda}$. Тогда новый базис связан с опт. планом. Дсв-но, для оценки векторов нового плана имеем $\left(z_j - c_j\right)' = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}\left(z_k - c_k\right)$. Т.к. все $z_j - c_j \le 0$ и $x_{lk} < 0$, то все разности $\left(z_j - c_j\right)' \le 0$ при $x_{lj} \ge 0$.

Для того, чтобы получить $\left(z_j - c_j\right)' = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}\left(z_k - c_k\right) \le 0$ при $x_{lk} < 0$, нх-мо, чтобы уд-сь нерав-во $z_j - c_j \le \frac{x_{lj}}{x_{lk}}\left(z_k - c_k\right)$ или $\frac{z_j - c_j}{x_{lj}} \ge \frac{z_k - c_k}{x_{lk}}$. Сд-но, вектору A_k, вводимому в базис, должно ств-ть

$$\frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \min_{x_{lj}<0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}} \blacksquare$$

сл1. Если все $x_{lj} \geq 0$, то иследуя задачи при $\lambda > \overline{\lambda}$ не имеет ни одного плана.

Дсв-но, пусть свободный член е-го ур-я b_l стал отц-ым, и в этом ур. все коэф. неотц-ые. Т.к. ищется неотц. решение системы, то этому ур. не могут уд-ть никакие значения $x_{lj} \geq 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, т.е. система огр-й несовместна при $\lambda > \overline{\lambda}$.

Т.о. переходим от одного интервала изменения λ к др-у до тех пор, пока один из интервалов не включит $\lambda = \varphi$. Если значения δ и φ заранее не заданы, а нх-мо опр-ть систему интервалов изменения λ и ств-их им опт-ых планов, то надо найти базис, для к-го система нерав-в $q_i + \lambda p_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ совместна и оценка векторов $z_j - c_j \leq 0$. С помощью этой системы опр-ть $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$, затем продолжать исследования как для $\lambda > \overline{\lambda}$, так и для $\lambda < \underline{\lambda}$.

Теперь рас-им геом. интерпретацию задачи (9)–(11) параметром в свободных членах системы огр-й на пл-ти.

Для каждого значения $\delta \leq \lambda \leq \varphi$ найти неотц. Вектор $X = \left(x_1, x_2\right)$ задачи

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq \lambda b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{array}\right\}, \; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Положим, что $\lambda = \delta$ и изб-им условия задачи на рис. 3. Пусть ур-ю граничной пм., содержащей параметр в свободном члене, ств-ет пм., проходящая через вершины A и E. Тогда вел-а отрезка $OF = \dfrac{\lambda b_1}{a_{12}}$ ств-ет $\lambda = \delta$ и $z_{\min}$ достигается в вершине А, образованный пересечением пм-х $\left(L\right)$ и АВ, причем этой вершине ств-ет первоначальный базис.

Увеличим значение параметра $\lambda > \delta$, тогда пм. $\left(L\right)$ переместится в направлении вектора N_1, вел-а отрезка OF уменьшится, а муг-к решений расширяется. Первоначальный базис сохранится, пока пм. $\left(L\right)$ не пройдет через точку A_1, т. е. займет положение $\left(L_1\right)$. Этому моменту отвечает значение параметра $\lambda = \lambda_1$. Если далее увеличить значение параметра $\lambda_1 < \lambda < \infty$, то в этот момент произойдет переход др-у базису, и значение z не будет зависеть от λ. Расширение муг-ка решений прекратится, когда пм $\left(L\right)$ пройдет через точку E_2.

Для опр-ия др. возможных интервалов изменения параметра, исходя из первоначального положения пм. (L) положим, что $\lambda < \delta$. При этом пм. (L) начнет перемещаться в направлении, противоположном вектору N_1, и муг-к начнет сжиматься. Моменту, когда пм. (L) пройдет через вершину В, т.е. займет положение (L_2), ств-ет значение $\lambda = \lambda_2$ (и в этот момент произойдет замена базиса). Если продолжать уменьшение $\lambda < \lambda_2$, то вершины, в к-ых z достигает мнм-го значения, будут образованы пересечениями пм-х ВС и (L_2). Значит при $\lambda < \lambda_2$ произойдет замена базиса, к-ый и ств-ет опт. планом, пока (L_2) не пройдет через вершину С, т. е. не достигает положения (L_3). Этому моменту ств-ет значение $\lambda = \lambda_3$.

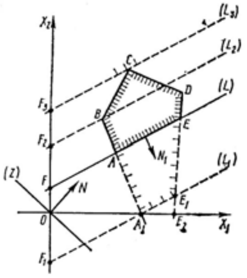


Рис. 3

Если параметру придать значение $\lambda < \lambda_3$, то граничная пм. (L_3) с остальными граничными пм-ми АВ, ВС, СД, ДЕ не образуют муг-ка решений и система огр-й превратиться в несовместную, т.е. при $\lambda < \lambda_3$, задача не имеет решений.

Т. о., интервалами опт-ти плана для различных параметров яв-ся:

$-\infty < \lambda < \lambda_3$ – планы не сущ-ют;

$\lambda_3 \le \lambda \le \lambda_2$ – крд-ы точек ребра СВ;

$\lambda_2 \le \lambda \le \lambda_1$ – крд. точек ребра ВА$_1$;

$\lambda_1 \le \lambda < \infty$ – крд-ы точки А$_1$

п4. Для каждого значения $-\infty < \lambda < \infty$ найти неотц. решение задачи (см. п 1):

$$\min z = x_1 + 2x_2,$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \ \ge 6 \\ x_1 + 3x_2 \le 11 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 2\lambda \end{array}\right\}, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Р. Вводя дпн-ые пер., получим расширенную задачу:

$$\min z = x_1 + 2x_2,$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2x_1 + x_2 - x_3 & & =6 \\ -x_1 + 3x_2 & +x_4 & =11 \\ 3x_1 - 2x_2 & +x_5 & =2\lambda \end{array}\right\}, \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Для опр-ия интервалов λ записываем расширенную задачу в табл. 3 и, пользуясь методом Жордана-Гаусса, находим первоначальный базис, при к-ом все $z_j - c_j \le 0$. Он получен в III-ей итерации табл. В столбце A_0 этой итерации записаны значения компонентов опорного плана задачи, все они зв-ят от λ и по условию задачи должны быть неотц-ми, поэтому решаем систему нерав-в:

$$\left.\begin{array}{c} -\frac{4}{7}\lambda+\frac{18}{7}\ge 0 \\ 2\lambda+5\ge 0 \\ \frac{2}{7}\lambda+\frac{12}{7}\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda\le\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2}\le\lambda \\ -6\le\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{5}{2}\le\lambda\le\frac{9}{2}.$$

Найдем опорные планы, ств-щие критическим значениям параметра: $x_1=(1,4)$ при $\lambda=-\frac{5}{2}$ и $x_2=(3,0)$ при $\lambda=\frac{9}{2}$. При $\lambda<-\frac{5}{2}$ компонент $x_4=2\lambda+5$ становится отц-ым, значит, вектор A_4 подлежит исключению из базиса. Просматриваем эл-ы x_{2j}, стоящие во второй строке, все они неотц. Т. о., при $\lambda<-\frac{5}{2}$ задача планов не имеет, ее система огр-й становится несовместной.

Исследуем задачу при увеличении параметра. Пусть $\lambda>\frac{9}{2}$, тогда первый отц. компонент становится $x_2=\frac{18}{7}-\frac{4}{7}\lambda$, значит, вектор A_2 подлежит исключению из базиса. В первой строке имеются два отц-ых эл-та: $x_{13}=-\frac{3}{7}$ и $x_{15}=-\frac{2}{3}$, находим:

$$\min_{x_{1j}<0}\frac{z_j-c_j}{x_{1i}}=\min_{x_{1j}<0}\left(\frac{-8/7}{-3/7},\frac{-3/7}{-2/7}\right)=\min\left(\frac{8}{3},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

тогда вектор A_5 включается в базис. Выполнив полное исключение с помощью первой строки, получаем новый план в столбце A_0 четвертой итерации. Только один компонент этого плана зависит от λ, а лин-я фк. от параметра уже не зв-ит. Решаем нерав-во:

$$2\lambda-9\ge 0\Rightarrow\lambda\ge\frac{9}{2},т.е.\frac{9}{2}\le\lambda<\infty.$$

Т. о., если значение параметра, начиная с $\lambda=\frac{9}{2}$, неогр-но увеличивать, то опт. план $X_2=(3,0)$.

Интервалами опт-ти планов для различных значений параметра яв-ся:

$-\infty<\lambda<-\frac{5}{2}$ – планы не сущ-ют;

$-\frac{5}{2} \le \lambda \le \frac{9}{2}$ – любая выпуклая лин. комбинация точек $X_1(1,4)$ и $X_2(3,0)$.

$\frac{9}{2} \le \lambda \le \infty$ – компоненты вектора $X_2 = (3,0)$.

Таблица 3

i	c	Базис	A₀	1	2	0	0	0	Σ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	–	–	6	2	1	–1	0	0	8
2	–	–	11	–1	3	0	1	0	14
3	–	–	2λ	$\boxed{3}$	–2	0	0	1	2λ+2
m+1	–	–	0	–1	–2	0	0	0	–3
1	–	–	$-\frac{4}{3}\lambda+6$	0	$\boxed{\frac{7}{3}}$	–1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}\lambda+\frac{20}{3}$
2	–	–	$\frac{2}{3}\lambda+11$	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\lambda+\frac{44}{3}$
3	1	A_1	$\frac{2}{3}\lambda$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\lambda+\frac{2}{3}$
m+1	–	–	$\frac{2}{3}\lambda$	0	$-\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\lambda-\frac{7}{3}$
1	2	A_2	$-\frac{4}{7}\lambda+\frac{18}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$	0	$\boxed{-\frac{2}{7}}$	$-\frac{4}{7}\lambda+\frac{20}{7}$
2	0	A_4	$2\lambda+5$	0	0	1	1	1	$2\lambda+8$
3	1	A_1	$\frac{2}{7}\lambda+\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}\lambda+\frac{18}{7}$
m+1	$z_j - c_j$		$-\frac{6}{7}\lambda+\frac{48}{7}$	0	0	$-\frac{8}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}\lambda+\frac{37}{7}$
1	2	A_2	$2\lambda-9$	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$2\lambda-10$
2	0	A_5	14	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	18
3	1	A_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
m+1	$z_j - c_j$		3	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1

зм2. Если параметры в свободных членах имеются во всех ур-ях огр-й, то для интервалов этих параметров фм-л (12), (13), (14) q_i, p_i и – q_i/p_i целесообразно в симплексной табл. выделить ств-но столбцы A_0, A'_0 и – x_{i0}/x'_{i0}. Учитывая это, решим задачу на *max* на табл. 4.

п5. Для всех значений λ найти неотц. решение задачи

$$\max Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &\le 1 - 2\lambda \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\le 20 + \lambda \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\le 5 + 3\lambda \end{aligned}\right\}, \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Таблица 4

i	C	Базис	A_0	A_0'	$-\dfrac{x_{i0}}{x_{i0}'}$	–1	2	-3	-1	0	0	0	Σ
						A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	0	A_5	1	–2	–	2	$\boxed{1}$	–3	1	1	0	0	1
2	0	A_6	20	1	–	1	3	4	2	0	1	0	32
3	0	A_7	5	3	–	–4	5	–2	3	0	0	1	11
m+1	$Z_j - C_j$		0	0	–	1	-2	3	1	0	0	0	3
1	2	A_2	1	–2	–	2	1	–3	1	1	0	0	1
2	0	A_6	17	7	–	–5	0	13	–1	–3	1	0	29
3	0	A_7	0	13	–	–14	0	$\boxed{13}$	–2	–5	0	1	6
m+1	$Z_j - C_j$		2	–4	–	5	0	–3	3	2	0	0	5
1	2	A_2	1	1	–1	$-16/13$	1	0	$7/13$	$-2/13$	0	$3/13$	$31/13$
2	0	A_6	17	16	$17/6$	9	0	0	1	2	1	–1	23
3	-3	A_3	0	1	0	$\boxed{-14/13}$	0	1	$-2/13$	$--5/13$	0	$1/13$	$6/13$
m+1	$Z_j - C_j$		2	–1	–	$23/13$	0	0	$33/13$	$11/13$	0	$3/13$	$83/13$
	$-(Z_j - C_j)/x_{lj}$				–	$23/14$	–	–	$33/2$	$11/5$	–	–	
	2	A_2	1	$-1/7$ $33/14$	–	0	1	$-8/7$	$5/7$	217	0	$1/7$	$13/7$
	0	A_6	17	$-13/14$	$--238/33$	0	0	$117/14$	$--2/7$	$\boxed{--17/14}$	1	$-5/14$	$188/7$
	-1	A_1	0		–	1	0	$-13/14$	$1/7$	$5/14$	0	$-1/14$	$-3/7$
	$Z_j - C_j$		2	$9/14$	–	0	0	$23/14$	$16/7$	$3/14$	0	$5/14$	$50/7$
	$-(Z_j - C_j)/x_{lj}$				–	–	–	–	8	3/17	–	1	
	2	A_2	5	$7/17$	$--85/7$	0	1	$14/17$	$11/17$	0	$4/17$	$1/17$	$139/17$
	0	A_5	–14	$-33/17$		0	0	$--117/17$	$4/17$	1	$--14/17$	$5/17$	$--376/17$
	–1	A_1	5	$-4/17$		1	0	$26/17$	$1/17$	0	$5/17$	$-3/17$	$127/17$
	$Z_j - C_j$		5	$18/17$		0	0	$53/17$	$38/17$	0	$3/17$	$5/17$	$202/17$
	$-(Z_j - C_j)x_{lj}$												
		A_2	$64/13$	$--5/13$	$64/5$	$11/13$	1	0	$10/13$	$4/13$	$3/13$	0	$100/13$
		A_7	–17	6	–	–9			–1	–2	–1	1	–23
		A_3	$17/13$	$7/13$	–	$-5/13$	0	1	$--1/13$	$-3/13$	$1/13$	0	$29/13$
			$77/13$	$-31/13$		$50/13$	0	0	$36/13$	$17/13$	$3/13$	0	$152/13$

Р. Введем дпн-ые неотц. пер. x_5, x_6, x_7 и сведем условия – нерав. к равам. Исх. данные запишем в табл. 4 и задачу решим симплекс-методом для $\lambda = 0$ (сохранив коэф-ы при них) при начальном базисе A_5, A_6, A_7 за три итерации, получив опт. базис $\left(A_2, A_6, A_3\right)$. В процессе решения задачи для $\lambda = 0$ итерации над столбцами A_0 и A_0' (ствщ-им параметрам q_i и p_i фм-ы (12)) производятся как при решении обычной задачи ЛП. А столбец $\left(-x_{i0} / x_{i0}\right)$, ствщ-й фм-ам (13) и (14) не заполняется до выч-ия опт. базиса для $\lambda = 0$. Причем составляющие этого столбца в сумму $\sum$ не включаются.

В результате третьей итерации получен опт. базис A_2, A_6, A_3 с коэф-ми ств-но $x_2 = 1 + \lambda, x_6 = 17 - 6\lambda, x_3 = \lambda.$ По фм-е (13) имеем

$\underline{\lambda} = \max\left(-q_i / p_i\right) = \min\left(-x_{i0} / x_{i0}'\right) = 0$ при $x_{i0}' = 1 > 0$ для базиса A_3.

$p_i < 0$ $\quad$ $x'_{io<0}$

В столбце A_0' единственному отц. эл-у при базисе A_6 по фм-е (14) ств-ет число $\overline{\lambda} = \min\left(-q_i / p_i\right) = \min\left(-x_{i0} / x_{i0}'\right) = \frac{17}{6} \, при \; x_{i0}' = -6 < 0$.

$p_i < 0$ $\quad$ $x_{io} < 0$

Т.о. в столбце $-x_{i0} / x_{i0}'$ выделены два эл-та: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = \frac{17}{6}$, опрю-ие отрезок оси λ, на к-ом система векторов A_2, A_6, A_3 составляет базис. Вектор $X = \left(0, 1 + \lambda, \lambda, 0, 0, 17 - 6\lambda, 0\right)$ яв-ся опт. планом при $Z_{\max} = 2 - \lambda$.

Для перехода на отц-ю полуось следует исключить из базиса вектор A_3, а для анализа задачи при $\lambda > \lambda_1 = \frac{17}{6}$ нх-мо вывести из базиса A_6.

Исключим сначала A_3. Из индексной строки по фм-е (15) выбираем ключевой столбец $\min\limits_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{23}{14}$, а за ключевую строку берем вектор A_3, т. е. ключевым эл-ом яв-ся $-\frac{14}{13}$. В базис включаем вектор A_1 вместо A_3.

При проведении очередной итерации в столбце $-x_{i0} / x_{i0}'$ заполняются только строки, отвечающие $x_{i0}' > 0$. Плж. значение x_{i0}' ств-ет только вектору A_6. Значение $-x_{20} / x_{20}' = -238/33$ опр-ет точку λ_{-1}. На отрезке $\left[\lambda_{-1}, \lambda_0\right]$ базисом решения задачи яв-ся система векторов A_2, A_6, A_1. Опт. план задачи равен $X = \left(-\frac{13}{14}\lambda, 1 - \frac{1}{7}\lambda, 0, 0, 0, 17 + \frac{33}{14}\lambda, 0\right), Z_{\max} = 2 + \frac{9}{14}\lambda.$

Дальнейшее смещение влево по оси λ требует исключения из базиса вектора A_6. А включить в базис нх-мо вектор A_5, т. к. $\min\limits_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} = \frac{3}{17}$, т. е. ключевым эл-ом яв-ся $-\frac{17}{14}$. В результате получим, что единственному эл. $x'_{10} = \frac{7}{17} > 0$ ств-ет точка $\lambda_{-2} = -\frac{x_{10}}{x'_{10}} = -\frac{85}{7}$. На отрезке $\left[\lambda_{-2}, \lambda_{-1}\right]$ система векторов A_2, A_5, A_1 составляет базис решения задачи, вектор $X = \left(5 - \frac{4}{17}\lambda, 5 + \frac{7}{17}\lambda, 0, 0, -14 - \frac{33}{17}\lambda, 0, 0\right)$ яв-ся опт. планом при $Z_{\max} = 5 + \frac{18}{17}\lambda$.

Значение λ_{-2} достигается на первой строке, отвечающей вектору A_2, а все эл. этой строки неотц-ны, т. е. $x_{1j} \geq 0$. Тогда согласно признаку неразрешимости задачи это означает, что при $\lambda < \lambda_{-2}$ задача не имеет планов.

Остается исследовать задачу при $\lambda > \lambda_1 = \frac{17}{6}$. Для этого вернемся к базису A_2, A_6, A_3, опт-му на отрезке $\left[\lambda_0, \lambda_1\right]$, исключим из базиса вектор A_6 и введем вместо него вектор A_7, на к-ом достигается $\min\limits_{x_{lj} < 0} \frac{z_j - c_j}{x_{lj}} = -\frac{z_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{3}{13} : 1 = \frac{3}{13}$.

В табл. 4, отвечающей новому базису$\left(A_2, A_7, A_3,\right)$, значение $\lambda = -\frac{x_{10}}{x^1_{10}} = \frac{64}{5}$ опр-ет правый конец очередного отрезка. На отрезке$\left[\lambda_1, \lambda_2,\right] = \left[\frac{17}{6}, \frac{64}{5}\right]$ система векторов A_2, A_7, A_3, составляет базис решения, вектор $X = \left(0, \frac{64 - 5\lambda}{13}, \frac{17 + 7\lambda}{13}, 0, 0, 0, -17 + 6\lambda\right)$ яв-ся опт. планом при $z_{\max} = \frac{77 - 31\lambda}{13}$.

Значение λ_2 достигается на первой строке, отвечающей векторы A_2 и все $x_{1j} \geq 0$. Согласно признаку неразрешимости задачи это означает, что при $\lambda > \lambda_2$ условия задачи оказываются несовместимыми.

Т.о. интервалами опт-ти планов для различных значений λ яв-ся:

$-\infty < \lambda \leq -\frac{85}{7}$ задача не имеет планов,

$-\frac{85}{7} \leq \lambda \leq -\frac{238}{33}$ базисом $\left(A_2, A_6, A_1\right)$ и опт. планом

$$X\left(-\frac{13}{14}\lambda,1-\frac{1}{7}\lambda,0,0,0,17+\frac{33}{14}\lambda,0\right),\ z_{\max}=2+\frac{9}{14}\lambda,$$

$-\frac{238}{33}\le\lambda\le 0$ базисом $\left(A_2,A_5,A,\right)$ и опт. планом

$$X=\left(5-\frac{4}{17}\lambda,5+\frac{7}{17}\lambda,0,0,-14-\frac{33}{17}\lambda,0,0\right),\ z_{\max}=5+\frac{18}{17}\lambda,$$

$0\le\lambda\le\frac{17}{6}$ базисом $\left(A_2,A_6,A_3\right)$ и опт. планом

$$X=\left(0,1+\lambda,\lambda,0,0,17-6\lambda,0\right),\ z_{\max}=2-\lambda,$$

$\frac{17}{6\le}\lambda\le\frac{64}{5}$ базисом $\left(A_2,A_7,A_3\right)$ и опт. планом

$$X=\left(0,\frac{64-5\lambda}{13},\frac{17+7\lambda}{13},0,0,0,-17+6\lambda\right),\ z_{\max}=\frac{77-31\lambda}{13},$$

$\frac{64}{5}\le\lambda<\infty$ задача не имеет планов.

зм3. Задачу с параметром в свободных членах системы огр-й можно свести к дв-ой задаче с параметром в целевой фк. и решить ее как в пункте 2^0.

5^0. Общий случай и пример. Найти

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j+tc_j^{'}\right)x_j \tag{16}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+ta_{ij}'\right)x_j=b_i+tb_i',\ i=\overline{1,m} \tag{17}$$

$$x_j\ge 0,j=\overline{1,n} \tag{18}$$

Будем наз-ть основой любую лин. незв. систему,содержащую m векторов условий задачи (16)–(18). Совокупность значений параметра t, при к-ых данная основа яв-ся базисом решения задачи (16)–(18) наз. мн-ом опт-ти основы.

Анализ задачи (16)–(18), как и разобранных простых случаев 2^0 и 3^0, также сводится к покрытию оси t конечным набором мн-в. Однако в данном случае мн-ва, покрывающие ось t, могут быть не связными. А величины $\Delta_j(t)=z_j(t)-c_j(t)$ и $x_{ij}(t)$ в большинстве случаев представляют собой нелин-ые фк. параметра t. Поэтому непосредственные использование симплекс – метода здесь затруднено. Как обычно, решение задачи следует начать с некоторого значения $t=t_0$.

Пусть при $t = t_0$ на нек-ой итерации процесса решения получен опт. план задачи, к-му ств-ет система векторов $A_{i1}(t), A_{i2}(t), ..., A_{im}(t)$. Разложим вектор огр-й векторы условий задачи по векторам этой системы:

$$A_0(t) = B = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}(t) A_{s_i}(t), A_i(t) = \sum_{i=1}^{m} x_{i_i}(t) A_{s_i}(t), j = \overline{1, n}$$

Оценки $\triangle_i(t)$ векторов условий $A_j(t)$ отс-но выбранной основы выч-ся пофм-ам:

$$\triangle_j(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}(t) x_{ij}\ (t) - c_i(t), j = \overline{1, n}$$

Получения системы векторов (основа) яв-ся базисом решения задачи в диапазоне изменения параметра t, для к-го уд-ся система нерав-в

$$x_{i_0}(t) \geq 0, i = \overline{1, m}, \tag{19}$$

$$\triangle_j(t) \geq 0, j = \overline{1, n}, \tag{20}$$

причем предполагается, что опр-ль $\delta(t)(см.\triangle_j(t), j = 3,4)$ расв-ой системы векторов не равен нулю.

Решив систему нерав-в (19),(20)с учетом требования $\delta(t) \neq 0$ получим мн-во опт-ти данной основы.Для дальнейшего анализа выбираем одну из граничных точек t_1 мн-ва опт-ти и исследуем задачу в интервале $]t_1, t_1 + \xi[$, где ξ – дт-но малое плж. число. Решим задачу (16)–(18)при $t = t_1 + \xi$. В качестве исх-ой примем основу, яв-яся. опт-ым базисом для $t = t_1 - \xi$ и через несколько итераций симплекс – методом получим опт. базис для интервала $]t_1, t_1 + \xi[$, либо неразрешимость задачи в этом же интервале.

По отн-ю к новой основе проводится исследования, аналогичное ранее рас-му. В результате устанавливается мн-во значений параметра, для к-го сохраняются св-ва основы, имеющие место для интервала $]t_1, t_1 + \xi[$, т.е условия опт-ти или неразрешимости.

Далее выбираем снова одну из граничных точек и отправляясь от этой точки, опр-ем новое мн. опт-ти или неразрешимости и т.д.

Приведенная процедура закончится через конечное число шагов, т.к. общее число базисов задачи, к-ые могут быть составлены из m векторов условий, конечно.

п6. Требуется для всех значений $t \in]-\infty, \infty[$ найти

$$\max Z = -(30 + 6t)x_1 - (50 + 7t)x_2, \tag{21}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l} (14 + 2t)x_1 + (4 + t)x_2 + x_3 \qquad\quad = 14 + t \\ (150 + 3t)x_1 + (200 + 4t)x_2 \quad - x_4 \ = 200 + 2t \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4} \end{array}\right\} \tag{22}$$

Р. При $t = 0$, освободившись от пер-ых x_3 и x_4, получим систему нерав-в:

$$\left.\begin{matrix} 14x_1 + 4x_2 \le 14 \\ 150x_1 + 200x_2 \ge 200 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{matrix}\right\}.$$

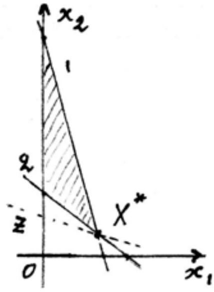


Рис. 4

Отсюда графическим методом (рис. 4) найдем опт. план $x^* = \left(\dfrac{10}{11}, \dfrac{7}{22}, 0, 0\right)$, $Z_{\max} = -\dfrac{475}{11}$.

Систему рав-в (22) напишем в виде:

$$\left.\begin{matrix} (14+2t)x_1 + (4+t)x_2 = 14+t \qquad -x_3 \\ (150+3t)x_1 + (200+4t)x_2 = 200+2t+x_4 \end{matrix}\right\}, \tag{23}$$

где $b_1 = 14+t, b_2 = 200+2t.$ Взяв $x_3 = 0$ и $x_4 = 0,$ решим систему (23):

$$\Sigma(t) = \begin{vmatrix} 14+2t & 4+t \\ 150+3t & 200+4t \end{vmatrix} = 5t^2 + 294t + 2200 \quad \Bigg| \quad x_1(t) = \frac{\Sigma_1(t)}{\Sigma(t)} = \frac{2t^2+48t+2000}{5t^2+294t+2200},$$

$$\Sigma_1(t) = \begin{vmatrix} 14+t & 4+t \\ 200+2t & 200+4t \end{vmatrix} = 2t^2 + 48t + 2000 \quad \Bigg| \quad x_2(t) = \frac{\Sigma_2(t)}{\Sigma(t)} = \frac{t^2+236t+700}{5t^2+294t+2200}$$

$$\Sigma_2(t) = \begin{vmatrix} 14+2t & 14+t \\ 150+3t & 200+2t \end{vmatrix} = t^2 236t + 700 \quad \Big| \quad \text{Все результаты напишем на табл. 5.}$$

Теперь, пологая $b_1 = b_2 = 0$, $(x_3, x_4) = (1,0)$ и $(x_3, x_4) = (0,1)$, решим систему (23) для строки A_1 табл. 5:

$$\Sigma_3(t) = \begin{vmatrix} 4+t & -1 \\ 200+4t & 0 \end{vmatrix} = 200+4t \quad \Bigg| \quad x_3(t) = \frac{\Sigma_3(t)}{\Sigma(t)} = \frac{200+4t}{5t^2+294t+2200},$$

$$\Sigma_4(t) = \begin{vmatrix} 4+t & 0 \\ 200+4t & 1 \end{vmatrix} = 4+t \quad \Bigg| \quad x_4(t) = \frac{\Sigma_4(t)}{\Sigma(t)} = \frac{4+t}{5t^2+294t+2200}.$$

Аналогично получим для строки A_2:

$$\Sigma_3(t) = \begin{vmatrix} -1 & 14+2t \\ 0 & 150+3t \end{vmatrix} = -(150+3t) \quad \Bigg| \quad x_3(t) = \frac{\Sigma_3(t)}{\Sigma(t)} = -\frac{150+3t}{5t^2+294t+2200},$$

$$\Sigma_4(t) = \begin{vmatrix} 0 & 14+2t \\ 1 & 150+3t \end{vmatrix} = -(14+2t) \quad \Bigg| \quad x_4(t) = \frac{\Sigma_4(t)}{\Sigma(t)} = -\frac{14+2t}{5t^2+294t+2200}.$$

Выч-им индексную строку $\vartriangle_j(t) = z_j(t) - c_j(t)$:

$$Z_{\max} = -(30+6t)x_1(t) - (50+7t)x_2(t) = \frac{-19t^3 + 2050t^2 + 30140t + 95000}{5t^2+294t+2200}.$$

$$\triangle_3(t) = -(30+6t)x_1(t) - (50+7t)x_2(t) = \frac{-(30+6t)(200+4t)+(50+7t)(150+3t)}{5t^2+294t+2200} =$$

$$= \frac{-3t^2-120t+1500}{5t^2+294t+2200},$$

$$\triangle_4(t) = -(30+6t)x_1(t) - (50+7t)x_2(t) = \frac{-(30+6t)(4+t)+(50+7t)(14+2t)}{5t^2+294t+2200} =$$

$= \dfrac{8t^2+144t+580}{5t^2+294t+2200}$, где $\delta_3(t) = -3t^2-120t+1500$, $\delta_4(t) = 8t^2+144t+580.$

В силу (19) и (20) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{\sum_1(t)}{\sum(t)} = \frac{2t^2+48t+2000}{5t^2+294+2200} \ge 0\\
x_2(t) &= \frac{\sum_2(t)}{\sum(t)} = \frac{t^2+236t+700}{5t^2+294t+2200} \ge 0\\
\triangle_3(t) &= \frac{\delta_3(t)}{\sum(t)} = \frac{-3t^2-120t+1500}{5t^2+294t+2200} \ge 0\\
\triangle_4(t) &= \frac{\delta_4(t)}{\sum(t)} = \frac{8t^2+144t+580}{5t^2+294t+2200} \ge 0
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

В выражении для $x_1(t)$ числитель $\sum_1(t)$ плж-ен при любом дсв-ом значении t. Условие $x_1(t) \ge 0$ выполняется, если уд-ся нерав-во $\sum(t) = 5t^2+294t+2200 > 0$ или (t+8,8)(t+50) > 0 $\Rightarrow$ t < -50 или t > -8,8 ①

Условие $x_2 \ge 0$ совместно с условием

$x_1(t) \ge 0$при $\sum_2(t)$=$t^2+236t+700 \ge 0$ или прж-но $(t+3)(t+233) \ge 0 \Rightarrow t \le -233$ или $t \ge -3$ ②

Условие $\triangle_3(t) \ge 0$ выполняется, если

$-3t^2-120t+1500 \ge 0 \Rightarrow t^2+40t-500 \le 0 \ \Rightarrow\ (t+50)(t-10) \le 0 \ \Rightarrow\ t+50 \ge 0$ и $t-10 \le 0 \Rightarrow -50 \le t \le 10$ ③

Условие $\triangle_4(t) \ge 0$ уд-ся при $t \le -11{,}9$ или $t \ge -6{,}1$ ④

Мн-во значений t, для к-ых векторы A_1, A_2 яв-ся базисом решения опр-ся в силу ①–④ нерав-ом

$$-3 \le t \le 10. \qquad (25)$$

Отметим, что приведенные результаты (24) получены и в табл. 5 по симплекс методу за три $\left(\mathrm{I}-\mathrm{III}\right)$ итерации.

Чтобы продолжать анализ, выч-им опт. базис задачи для любой точки $t_1 < -3$ или $t_1 > 10$, близкой к концам отрезка (25). При $t > 10$ нарушается условие $\triangle_3(t) \ge 0$. Сд-но, вектор A_3 должен быть введен в базис. Решим задачу для $t_1 = 11 > 10$. Базис опт-го плана задачи составляют векторы $A_2(t)$ и $A_3(t)$. Разложим по векторам этого базиса векторы огр-й и условий на табл. 5 в IV итерации. Откуда находим диапазон изменения t из системы нерав-в:

$$\frac{2t^2+48t+2000}{4t+200} \geq 0, \quad \frac{2t+200}{4t+200} \geq 0, \quad \frac{3t^2+120t-1500}{4t+200} \geq 0, \quad \frac{7t+50}{4t+200} \geq 0.$$

Трехчлен $2t^2+48t+2000 \geq 0$ при всех значениях t. Тогда получим систему нерав-в:

$$4t+200>0, \quad 2t+200 \geq 0, \quad (t+50)(t-10) \geq 0, \quad 7t+50 \geq 0.$$

Приведенная система нерав-в уд-ся при $t \geq 10$. Т.о., векторы $A_2(t)$, $A_3(t)$ составляют опт. базис задачи для всех $t \geq 10$.

Проверим, опираясь на векторы $A_2(t)$, $A_3(t)$,имеется ли обл. изменения t, в к-ой лин. форма задачи не огр-на на мн-ве своих планов. Для этого найдем диапазон изменения параметра t, в точках к-го выполняются условия неразрешимости задачи для векторов $A_2(t)$, $A_3(t)$. Система нерав-в

$$\triangle_1(t) < 0, x_{11}(t) \leq 0, x_{21}(t) \leq 0$$

противоречива, т.к. $x_{21}(t) = \frac{3}{4} > 0$. Система

$$\triangle_4(t) < 0, x_{14}(t) \leq 0, x_{24}(t) \leq 0$$

совместна при $-50 < t \leq -\frac{50}{7}$. Сд-но, в этом диапазоне изменения t задача неразрешима в силу неогр-ти лин-ой формы.

Исследуем задачу при $t < -3$, н-р, для $t=-4$.. При $t=-4$ нарушается условия $\triangle_1(t) \geq 0$, значит вектор A_1 должен быть введен в базис. Из базиса исключается A_2, т. к. $\frac{x_{20}(t)}{x_{21}(t)} < \frac{x_{10}(t)}{x_{11}(t)}$ при $t=-4$. Вычислим диапазон изменения параметра t, для к-го вектора $A_1(t)$, $A_3(t)$ яв-ся базисом решения (см. $\overline{\underline{V}}$ и терицию табл. 5).

Нетрудно непосредственно убедиться, что векторы $A_1(t)$, $A_3(t)$ яв-ся опт. базисом задачи для всех значений t, уд-их нерав-ам

$$-5 \leq t \leq -3 \text{ или } -\infty < t < -233.$$

Кроме того, при $-\frac{50}{7} \leq t \leq -6{,}1$ лин. форма задачи не огр-на на мн-ве своих планов $(\triangle_2(t) < 0, x_{12}(t) \leq 0, x_{22}(t) \leq 0)$.

Составим на табл. 5 симплексные итерации $\overline{\underline{VI}} - \overline{\underline{VIII}}$, отвечающие системам векторов $(A_4(t), A_1(t)), (A_4(t), A_2(t))$ и $(A_4(t), A_3(t))$.

Заметим, что данные в $\overline{\underline{I}}$ и $\overline{\underline{VIII}}$, итерации табл. 5 совпадают, к-ые следовало и ожидать.

Анализ табл. 5 позволяет сформулировать сд. выводы:

1. Исследуемая задача разрешима для всех значений параметра t, принадлежащих двум лучам:

$t \le t_1$ и $t \ge t_2$, где $t_1 = -188 - 2\sqrt{3306} \approx -233, t_2 = -9 + \frac{1}{2}\sqrt{34} \approx -6{,}1$. При этом:

а) для $t < -233$ и $-5 \le t \le -3$ при базисе $A_1(t), A_3(t)$ получим опт. план

$$X = \left(\frac{2t+200}{3t+150}, 0, -\frac{t^2+236t+700}{3t+150}, 0 \right),\ \mathrm{Z}_{\max} = -\frac{4(t^2+105t+500)}{t+50}.$$

б) для $-6{,}1 < t \le 5$ при базисе $A_1(t)$, $\mathrm{A}_4(t)$ опт. план равен

$$X = \left(\frac{t+14}{2t+14}, 0, 0, \frac{t^2+236t+700}{2t+14} \right),\ \mathrm{Z}_{\max} = -\frac{3(t^2+19t+70)}{t+7}.$$

в) для $-3 \le t \le 10$ при базисе $A_1(t), A_2(t)$ имеет опт. план

$$X = \left(\frac{2t^2+48t+2000}{5t^2+294t+2200}, \frac{t^2+236t+700}{5t^2+294t+2200}, 0, 0 \right),$$

$$Z_{\max} = -\frac{19t^3+2050t^2+30140t+9500}{5t^2+294t+2200}.$$

г) для луча $t \ge 10$ при базисе $A_2(t), A_3(t)$ опт. план

$$X = \left(0, \frac{t+100}{2t+100}, \frac{t^2+24t+100}{2t+100}, 0 \right), Z_{\max} = -\frac{7t^2+750t+5000}{2t+100}.$$

2. В интервале изменения параметра $(-50, -6{,}1)$ лин. формы задачи не огр-на на мн-ве своих планов (для $-50 < t < -7$ оценка $\Delta_4(t) < 0$ вектора условий $A_4(t)$ отн-но базиса $A_2(t), A_3(t)$ и в тоже время все $x_{i4} \le 0$;для $-7 \le t < -6{,}1$ оценка $\Delta_2(t) < 0$ вектора $A_2(t)$ отн-но базиса $A_1(t), A_3(t)$ и при этом все $x_{i2} < 0$).

3. Для $-233 \le t \le -50$ задача не разрешима в силу несовместимости ее условий. При любой из основ задачи по крайней мере одна из составляющих разложения вектора огр-й по ее векторам отц-на для всех *t*, при надлежащих отрезку $[-233, -50]$.

6^0. Решение задачи с периметром в матрице ограничений. Выше изложенный метод в общем случае можно использовать для частных случаев, н-р, для решения задачи с параметром в матрице огр-й. Демонстрируем это на простом

Таблица 5

	i	C	B_x	A₀	$-(6t+30)$	$-(7t+50)$	0	0
					A_1	A_2	A_3	A_4
I	1	–	–	$t+14$	$2t+14$	$t+4$	1	0
	2	–	–	$2t+200$	$3t+150$	$4t+200$	0	–1
	$\vartriangle_j(t)$			0	$6t+30$	$7t+50$	0	0
II	1	$-(6t+30)$	A_1	$\frac{t+14}{2t+14}$	1	$\frac{t+4}{2t+14}$	$\frac{1}{2t+14}$	0
	2	–	–	$\frac{t^2+236t+700}{2t+14}$	0	$\frac{5t^2+294t+2200}{2t+14}$	$-\frac{3t+150}{2t+14}$	–1
	$\vartriangle_j(t)$			$-\frac{6t^2+114t+420}{2t+14}$	0	$\frac{8t^2+144t+580}{2t+14}$	$-\frac{6t+30}{2t+14}$	0
III	1	$-(6t+30)$	A_1	$\frac{2t^2+48t+2000}{5t^2+294t+2200}$	1	0	$\frac{4t+200}{5t^2+294t+2200}$	$\frac{t+4}{5t^2+294t+2200}$
	2	$-(7t+50)$	A_2	$\frac{t^2+236t+700}{5t^2+294t+2200}$	0	1	$-\frac{3t+150}{5t^2+294t+2200}$	$\frac{2t+14}{5t^2+294t+2200}$
	$\vartriangle_j(t)$			$-\frac{19t^3+2050t^2+30140t+95000}{5t^2+294t+2200}$	0	0	$\frac{-3t^2-120t+1500}{5t^2+294t+2200}$	$\frac{8t^2+144t+580}{5t^2+294t+2200}$
IV	1	0	A_3	$\frac{2t^2+48t+2000}{4t+200}$	$\frac{5t^2+294t+2200}{4t+200}$	0	1	$\frac{t+4}{4t+200}$
	2	$-(7t+50)$	A_2	$\frac{2t+200}{4t+200}$	$\frac{3t+150}{4t+200}$	1	0	$-\frac{1}{4t+200}$
	$\vartriangle_j(t)$			$-\frac{14t^2+1500t+10000}{4t+200}$	$\frac{3t^2+120-1500}{4t+200}$	0	0	$\frac{7t+50}{4t+200}$
V	1	0	A3	$\frac{-t^2+236t+700}{3t+150}$	1	$\frac{2t+200}{3t+150}$	1	$\frac{2t+14}{3t+150}$
	2	$-(6t+30)$	A1	$\frac{2t+200}{3t+150}$	0	$\frac{2t+200}{3t+150}$	0	$-\frac{1}{3t+150}$
	$\vartriangle_j(t)$			$-\frac{12t^2+1200t+6000}{3t+150}$	0	$-\frac{3t^2+120-1500}{3t+150}$	0	$\frac{6t+30}{3t+150}$

Продолжение

VI	1	0	A4	$-\frac{t^2+236t+700}{2t+14}$	0	$-\frac{5t^2+294t+2200}{2t+14}$	$\frac{3t+150}{2t+14}$	1
	2	$-(6t+30)$	A1	$\frac{t+14}{2t+14}$	1	$\frac{t+4}{2t+14}$	$\frac{1}{2t+14}$	0
	$\Delta_j(t)$			$-\frac{6t^2+114t+420}{2t+14}$	0	$\frac{8t^2+144t+580}{2t+14}$	$-\frac{6t+30}{2t+14}$	0
VII	1	0	A4	$\frac{2t^2+48t+2000}{t+4}$	$\frac{5t^2+294t+2200}{t+4}$	0	$\frac{4t+200}{t+4}$	1
	2	$-(7t+50)$	A2	$\frac{t+14}{t+4}$	$\frac{2t+14}{t+4}$	1	$\frac{1}{t+4}$	0
	$\Delta_j(t)$			$-\frac{7t^2+148t+700}{t+4}$	$-\frac{8t^2+144t+580}{t+4}$	0	$-\frac{7t+50}{t+4}$	0
VIII	1	0	A4	$-(2t+200)$	$-(3t+150)$	$-(4t+200)$	0	1
	2	0	A3	$t+14$	$2t+14$	$t+4$	1	0
	$\Delta_j(t)$			0	$6t+30$	$7t+50$	0	0

п7. $\max Z = x_1 + 2x_2$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ tx_1 - x_2 \geq -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ t \in \left]-\infty, \infty\right[. \end{array};$$

Р. Введем дпн. пер-ые x_3, x_4, x_5 и перепишем задачу в виде

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5,$$

$$\left.\begin{array}{llll} 2x_1 + x_2 - x_3 & & & =9 \\ x_1 - 3x_2 & +x_4 & & =1 \\ -tx_1 + x_2 & & +x_5 & =2 \end{array}\right\} \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

Задачу решим симплекс методом (табл. 6). В II итерации в базис можем включить вектор A_1, если $-2t - 1 < 0$, т. е. $t > -\frac{1}{2}$,

н-р, $t = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$.

Тогда $A_1(t+2, -3t+1, -t) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Находим $\min\left(7 : \frac{7}{4}, 7 : \frac{7}{4}, 2 : \frac{1}{4}\right) =$

$= \min(4, 4, 8) = 4$ (поэтому A_3 исключим из базиса). В III итерации получим

$$\frac{7}{t+2} \geq 0, \frac{28t+7}{t+2} \geq 0, \frac{9t+4}{t+2} \geq 0,$$

$$-\frac{2t+1}{t+2} \geq 0, -\frac{3}{t+2} \geq 0,$$

откуда имеем $t > -2$, $t \geq -\frac{1}{4}$, $t \geq -\frac{4}{9}$, (т. е. $t \geq -\frac{1}{4}$), $t \leq -\frac{1}{2}$.

Тогда нерав. $-\frac{2t+1}{t+2} \geq 0$ и $-\frac{3}{t+2} \geq 0$

не выполняются. При $t=-\frac{1}{6}>-\frac{1}{4}$ получим $-\frac{2t+1}{t+2}=-\frac{4}{11}<0$ (поэтому A₃ включим в базис),

$$A_0=\left(\frac{7}{t+2},\frac{28t+7}{t+2},\frac{9t+4}{t+2}\right)=\left(\frac{42}{11},\frac{14}{11},\frac{15}{11}\right),A_3=\left(-\frac{1}{t+2},-\frac{3t-1}{t+2},-\frac{t}{t+2}\right)=$$

$=\left(-\frac{6}{11},\frac{9}{11},\frac{1}{11}\right)$. Находим $\min\left(\frac{14}{11}:\frac{9}{11},\frac{15}{11}:\frac{1}{11}\right)=\min\left(\frac{14}{9},15\right)=\frac{14}{9}$, тогда A₄

Таблица 6

	i	C	Бx	Aо	1	2	3	4	5	Σ
					A₁	A₂	A₃	A₄	A₅	
I	1	0	A₃	9	2	1	–1	0	0	11
	2	0	A₄	1	1	–3	0	1	0	0
	3	0	A₅	2	–t	$\boxed{1}$	0	0	1	$-t+4$
	Δ			0	–1	–2	0	0	0	–3
II	1	0	A₃	7	$\boxed{t+2}$	0	–1	0	–1	$t+7$
	2	0	A₄	7	$-3t+1$	0	0	1	3	$-3t+12$
	Δ	2	A₂	2	–t	1	0	0	1	$-t+4$
				4	$-2t-1$	0	0	0	2	$-2t+5$
III	1	1	A₁	$\frac{7}{t+2}$	1	0	$-\frac{1}{t+2}$	0	$-\frac{1}{t+2}$	$\frac{t+7}{t+2}$
	2	0	A₄	$\frac{28t+7}{t+2}$	0	0	$\boxed{-\frac{3t-1}{t+2}}$	1	$-\frac{7}{t+2}$	$\frac{26t+17}{t+2}$
	3	2	A₂	$\frac{9t+4}{t+2}$	0	1	$-\frac{t}{t+2}$	0	$\frac{2}{t+2}$	$\frac{9t+8}{t+2}$
	Δ			$\frac{18t+15}{t+2}$	0	0	$-\frac{2t+1}{t+2}$	0	$\frac{3}{t+2}$	$\frac{16t+17}{t+2}$
IV	1	1	A₁	$-\frac{7}{3t-1}$	1	0	0	$\boxed{-\frac{1}{3t-1}}$	$-\frac{3}{3t-1}$	$\frac{3t-12}{3t-1}$
	2	0	A₃	$\frac{28t+7}{3t-1}$	0	0	1	$-\frac{t+2}{3t-1}$	$-\frac{7}{3t-1}$	$-\frac{26t+17}{3t-1}$
	3	2	A₂	$-\frac{t+2}{3t-1}$	0	1	0	$-\frac{t}{3t-1}$	$-\frac{1}{3t-1}$	$\frac{t-4}{3t-1}$
	Δ			$-\frac{2t+11}{3t-1}$	0	0	0	$-\frac{2t+1}{3t-1}$	$-\frac{5}{3t-1}$	$-\frac{4t+17}{3t-1}$
V	1	0	A₄	7	$-(3t-1)$	0	0	1	3	$-(3t-12)$
	2	0	A₃	-7	$-(t-2)$	0	1	0	1	$-(t+7)$
	3	2	A₂	2	–t	1	0	0	1	$-(t-4)$
	Δ			4	$-(2t+1)$	0	0	0	2	$-(2t-5)$

исключим из базиса. В IV итерации получим нерав-ва $-\frac{7}{3t-1}\geq 0, -\frac{28t+7}{3t-1}\geq 0, -\frac{t+2}{3t-1}\geq 0, -\frac{2t+1}{3t-1}\geq 0, -\frac{5}{3t-1}\geq 0,$ откуда получим $t<\frac{1}{3}, t\geq -\frac{1}{4}, t\geq -2, t\geq -\frac{1}{2}$, т. е. имеет место нерав.

$$-\frac{1}{4}\leq t<\frac{1}{3}. \tag{26}$$

Т. о. при $t\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ имеем $X=\left(-\frac{7}{3t-1},-\frac{t+2}{3t-1},-\frac{28t+7}{3t-1},0,0\right),$

$$Z_{\max}=-\frac{2t+11}{3t-1}.\ \text{Н-р, при } t=0\ x=(7,2,7,0,0), Z_{\max}=11.$$

Исследуем задачу при $t=-1<-\frac{1}{4}$: находим $\min\left(-\frac{2t+1}{3t-1},-\frac{5}{3t-1}\right)=$ $=\min\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, т. е. вектор A_4 включается в базис. Вычислим $A_0=(A_1,A_3,A_2)=\left(-\frac{7}{3t-1},-\frac{28t+7}{3t-1},-\frac{t+2}{3t-1}\right)=\left(\frac{7}{4},-\frac{21}{4},\frac{1}{4}\right)$ и $A_4=(A_1,A_3,A_2)=$ $=\left(-\frac{1}{3t-1},-\frac{t+2}{3t-1},-\frac{t}{3t-1}\right)=\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}$ значит, из базиса исключается вектор A_1. В V итерации при $t=-1$ имеем $\vartriangle=-(2t+1)=1>0,$ т. е. нет вектора, включаемый в базис. Причем для $i=2$ получим противоречие: $-7=x_3\ (x_3\geq 0)$, что указывает на несовместность задачи.

Теперь исследуем задачу при $t=1>\frac{1}{3}$. Возвратившись к III итерации при

$t=1$, получим $A_0=\left(\frac{7}{t+2},\frac{28t+7}{t+2},\frac{9t+4}{t+2}\right)=\left(\frac{7}{3},\frac{35}{3},\frac{13}{3}\right)$, а для

$\vartriangle=-\frac{2t+1}{t+2}=-1<0$ $A_3=\left(-\frac{1}{t+2},-\frac{3t-1}{t+2},-\frac{t}{t+2}\right)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, т. е. все $x_{i3}<0,$ значит, лин. форма задачи не огр-на $(z\to\infty)$.

И так, для $t\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ при базисе $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ получим опт. план $X=\left(-\frac{7}{3t-1},-\frac{t+2}{3t-1},-\frac{28t+7}{3t-1},0,0\right)$, $Z_{\max}=-\frac{2t+11}{3t-1}$; задача не разрешима при $t\in\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$ (обл. пустая) и при $t\in\left[\frac{1}{3},\infty\right[$ $(Z\to\infty)$.

Эту же задачу решим графическим методом (рис. 5)

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\left.\begin{aligned} {}_1 + x_2 &\geq 9 \\ 2x\,x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ tx_1 - x_2 &\geq -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ -tx_1 + x_2 &\leq 2 \end{aligned}\right\}$$

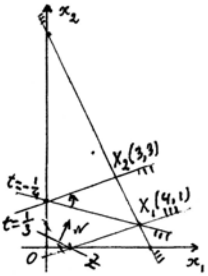


Рис. 5

Решив систему $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$, получим $X_1(4,1)$.

Тогда из $-t \cdot 4 + 1 = 2$ находим $t = -\frac{1}{4}$.

Из $x_1 - 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}$ получим $t = \frac{1}{3}$.

Отсюда имеем $-\frac{1}{3}x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 - 3x_2 = -b$ и решив систему $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 - 3x_2 &= -6 \end{aligned}\right\}$ опр-им $X_2(3,3)$.

Т.о. между точками $x_1(4,1)$ и $X_2(3,3)$ при $t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$ задача имеет решение и не разрешима при $t \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[$ (обл. пустая) и при $t \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$ $(Z \to \infty)$, что видно из рис. 5.

3.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит роль мт-ки и мдв-ия в различных областях?
2. Сформулируйте задачи на max и min. Дайте опр-ия критической точки, локального и глобального (абс-го) эксм.
3. Приведите модель МП. Дайте опр-ие целевой функции и огр-й задачи.
4. Дайте классификацию моделей МП и охарактеризуйте их в отдельности.
5. Приведите мт-ю мд. задачи ЛП
6. Сформулируйте модель процесса производства.
7. Сформулируйте модель задачи о кормовом рационе
8. Приведите модель опр-ия наилучшего состава смеси.
9. Сформулируйте модель задачи о «раскрое».
10. Сформулируйте модель транспортной задачи.
11. Сформулируйте модель задачи о назначении.
12. Сформулируйте модель задачи коммивояжера.

Задание для кр. работы: по образцу приведенных задач в **4^0–10^0** вводите нх-ые параметры и пер-ые для задач (планирования производства, обеспечение опт-го использования ресурсов, выпуск опт-го ассортимента продукции, обеспечивающий мкс-ю прибыль предприятия или мнм-ые затраты на производство) 1–20 и сформулируйте их модели.

1. По данным табл. составить программу сверхпланового выпуска мебели так, чтобы общая стоимость продукции была мкс-ой при условии полного использования резервов труда.

Стоимость изделий (руб.)	150	120
Изделия (шт.) / Ресурсы	сервант	шифоньер
Фанера 60 м^3	0,2	0,1
Доски 40 м^3	0,1	0,2
Труд 500 чел/смен	2	1

2. Бумажный комбинат выполнил план производства (прз.) бумаги разных видов и сберег сырье. Остались неиспользованными 50 тонн целлюлозы, 80 т. древесной массы и 2 т. каолина. В табл. указаны нормы расхода (в кг.) целлюлозы, древесной массы и каолина для прз-ва 1 т. бумаги разного вида:

Продукты / Ресурсы	Типографская бумага	Обложенная бумага	Писчая бумага
Целлюлоза	206	424	510
Древесина	829	627	518
Каолин	20	10	12

Прибыль от реализации 1 т. типографской бумаги 5 руб., 1 т. обложечной бумаги – 6 руб. и 1 т. писчей бумаги – 8 руб. Сколько и какого вида бумаги нх-мо изготовить из сбереженного сырья, чтобы прибыль предприятия (прд.) была наибольшей. Сколько и какого вида сырья при этом останется неиспользованным?

3. Цех выпускает 3 вида изделий, причем суточная программа выпуска I-го изделия – 90, II-го – 70 и III-го – 60 единиц. Прз-ные возможности цеха характеризуются (хркз.) сд. данными:

а) суточный фонд рабочего времени оборудования – 780 часов;

б) суточный расход сырья – 850 т;

в) суточный расход электроэнергии – 790 квт/час.

Нормы затрат прз-ных ресурсов на ед-у различных видов изделий приведены в сд. таблице:

Ресурсы	Ед. изм.	Изделия		
		I	II	III
Оборудование	часы	2	3	4
Сырьё	тонны	1	4	5
Электроэнергия	квт/час	3	7	2

Оптовая цена изделия I равна 8 руб., изделия II – 7 руб., изделия III – 6 руб. Составить план прз-ва продукции, обеспечивающий доход от реализации выпускаемых изделий сверх плана.

4. Прд-ю поставляется сырьё трех видов в кол-ве: первого сорта – 8000 т., второго – 5000 т. и третьего – 12000 т. Прд-е изготавливает изделия 4-х наименований. Нормы расхода каждгого сырья на ед-у каждого изделия, а также возможная прибыль от реализации ед-ы каждого изделия приведены в табл.

Требуется опр-ть, сколько ед. каждого изделия должно изготовить прд-ие с тем, чтобы общая возможная прибыль от реализации этих изделий была бы мкс-ой.

№ изделия / № сырья	1	2	3	4
1. 8000 т.	2	4	1	3
2. 5000 т.	3	5	6	2
3. 12000 т.	8	4	3	5
Возм. прибыль от ед. издел.	4	3	5	2

5. В мастерской освоили прз-во столов и тумбочек для торговой сети. Для их изготовления имеются два вида древесины: первого – 72 м^3, второго – 56 м^3. На каждое изделие требуется того и другого вида древесины в м^3 по сд. таблице

Изделия Сырье	Стол	Тумбочка
1-го вида	0,18	0,09
2-го вида	0,08	0,28

От прз-ва 1-го стола мастерская получает чистого дохода 1,1 руб., от прз-ва 1-ой тумбочки – 0,7 руб. Опр-ть сколько столов и тумбочек должна изготовить мастерская из имеющегося материала, чтобы обеспечить нбший доход.

6. Для прз-ва двух видов продукции цех должен использовать четыре разные группы оборудования. Требуется узнать, какой мкс-ый уровень валовой продукции в денежном выражении может быть запланирован для цеха, если стоимость одного комплекта продукции I равна 2 тыс. руб., продукции II – 3 тыс. руб., а кол-во оборудования и трудоемкость изготовления комплектов продукции обоих видов хркз-ся сд. таблицей.

Группы произв. оборудования	Кол. оборуд. в группе	Необх. кол. единиц оборуд-ия на 1 компл.	
		продукции I	продукции II
А	15	3	3
В	18	2	6
С	16	4	0
Д	8	1	2

7. Прд-ие изготовляет два типа электрических выключателей, типа А, валовой доход от к-ых равен 0,4 руб. на каждый выключатель, и типа Б, валовый доход от к-ых равен 0,3 руб. на каждый выключатель. На изготовление выключателя типа А требуется два раза больше рабочего времени, чем на изготовление выключателя типа Б. Если бы изготовились только выключатели типа Б, то рабочего времени было бы достаточно (в расчете на день) для изготовления ровно 1000 выключателей. Поставка медного провода обеспечивает изготовление только 800 выключателей в день (как типа А, так и типа Б). Для выключателей типа А требуются специальные изоляторы. Этих изоляторов можно получить в день не более 400. Для выключателей типа Б требуются изоляторы, к-ых можно получить не более 700 в день. Найти суточный план прз-ва выключателей типа А и Б, мкс-щий валовой доход предприятия.

8. Механический цех выпускает три вида взаимозаменяемых деталей – А, В, С, каждый из к-ых проходит посл-но обработку на трех станках. Запас мощности станков (т.е. рабочее время) составляет, ств-но: 220,400 и 100 часов. Деталь А обрабатывается первым станком 12 мин, вторым – 15 мин., третьим – 6 мин., деталь В, ств-но, 10, 18 и 4 мин., а деталь С – 9, 20 и 4 мин. Отпускная цена за деталь А – 30 коп., деталь В – 32 коп. и деталь С – 29 коп.

Требуется составить такой план загрузки станков, при к-ом выпуск продукции (в денежном выражении) будет мкс-ым.

9. Механический цех должен выполнить заказ по изготовлению 4000 изделий А и 3000 изделий В. Для этой цели могут быть использованы 3 станка, каждый из к-ых может обрабатывать оба изделия. Известно, что станки могут работать (запас производственной мощности): I – 120 часов, II – 100 часов, III – 160 часов.

Производительность каждого станка, а также себестоимость одного изделия А или В при обработке на том или ином станке, приведены в табл., где цифры в квадратиках обз-ют себестоимость обработки изделия в копейках, а стоящие в левых нижних углах производительность (в час.) ств-го станка при обработке изделия А или В.

Изделия Фонды	А	В	в
I	30 $\boxed{6}$	20 $\boxed{12}$	120
II	20 $\boxed{8}$	14 $\boxed{10}$	100
III	15 $\boxed{11}$	25 $\boxed{7}$	160
а	4000	3000	

Требуется составить такой план загрузки станков при к-ом заказ был бы выполнен с мнм-ой себестоимостью.

10. С/х-ое прд-ие производит два вида продукции. Для этого оно располагает четырьмя производственными факторами в объеме, ств-но, 19, 13, 15, 15, ед. Расходы прз-ных факторов на выработку ед-у обоих видов продуктов, а также доход прд-ия от реализации ед-ы каждого вида продукции приведены в сд. таблице

Произв. факторы	Продукции	
	I	II
1	2	3
2	2	1
3	0	3
4	3	0
Дох. от ед. прод.	7	5

Найти объем выработки обоих видов продукции мкс-щее доход прд-ия.

11. По данным таблицы составить план посева, при к-ом сбор по каждой культуре будет не менее планового, а валовый доход мкс-ый.

№ поля	1	2	Плановый сбор (ц.)	Доход от 1-го цент.
Площадь (га)	100	200		
Урожайность (ц/га): а) хлопок	28	25	5000	15
б) пшеница	20	25	2000	5

12. На ткацких станках двух типов с различной производительностью производится ткань трех артикулов. Для ее изготовления используется пряжа и красители. В табл. указаны мощности станков в тысячах станкочасов, ресурсы пряжи и красителей в 1000 кг., производительности станков по каждому виду пряжи в метрах на час, нормы расхода пряжи и краски в кг-ах на 1000 м. и цена на 1 м. ткани.

Виды ресурсов	Объем ресурса	Произв. и нормы расхода		
		1	2	3
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена (руб.)		15	15	20

Опр-ть опт-ый ассортимент, мкс-щий прибыль, если себестоимость 1 м. ткани составляет, ств-но, 8,5 и 15 руб.

13. В механическом цехе имеется оборудование двух типов и изготавливаются изделия А и Б. По данным нижеследующей таблицы опр-ть план выпуска изделий, мкс-щий использование времени оборудования.

Группа оборудования	Затраты времени на ед. изд./час		Фонд времени оборудования (станко/час)
	А	Б	
Токарная	0,6	0,8	360
Фрезерная	0,6	1	420

14. По данным таблицы составить план прз-ва деталей по станкам, мнм-щий общее время работы станков.

Наименование станков	Фонд времени (станко-часы)	Объем работы	
		Деталь № 1 1000 шт.	Деталь № 2 2000 шт.
Автоматический	100	0,05	0,1
Полуавтоматический	280	0,1	0,18

Числа внутри таблицы – нормы времени (в часах) на изготовление 1-ой детали.

15. Два завода производят некоторую продукцию, к-ую нх-мо отгрузить в три города для реализации. Потребность заказчиков, запасы готовой продукции и расстояния в сотнях км-ов указаны в таблице. Стоимость перевозок считается прц-ой расстоянию и кол-ву перевозимого груза. Требуется спланировать перевозки так, чтобы общая их стоимость была мнм-ой.

Пункты отправления	Запасы (в вагонах)	Киров	Уфа	Барнаул
Завод № 1	300	9	15	35
Завод № 2	250	12	20	46
Потребности (в вагонах)		120	200	230

16. Для прз-ва комплексной продукции требуется изготовить два вида изделий. Их изготовление может быть поставлено на одном из пяти типов прд-й; производственная мощность прд-ия и кол-во прд-й каждого типа даны в табл.

Тип предприятий	Число предприятий	Производст. мощность одного предп.	
		по изделиям № 1	по изделиям № 2
№ 1	5	100 тыс.	15 тыс.
№ 2	3	400 тыс.	200 тыс.
№ 3	40	20 тыс.	2,5 тыс.
№ 4	9	200 тыс.	50 тыс.
№ 5	2	600 тыс.	250 тыс.

Опр-ть сколько прд-й каждого типа надо поставить на прз-во первого и сколько на прз. второго изделия, чтобы мкс-ть выпуск комплектов, если в каждый комплект должно входить два изделия первого вида и одного второго.

17. Три механизма (взаимозаменяемые) могут выполнять три вида земляных работ. В нижесд-ей табл. указаны ресурсы рабочего времени каждого из механизмов в машино-часах, производительности – в м^3 и затраты – в руб. на 1 час работы механизма (в нижнем углу клетки таблицы).

Работы Механизм	1	2	3	Ресурсы времени
I	25 4	11 6	16 3	300
II	42 8	34 10	33 8	185
III	56 14	43 12	29 10	340

Опр-ть: а) мкс-ую загрузку механизмов из условия мкс-го суммарного объема выполненных работ;

б) опт-ую загрузку оборудования мнмз-ую суммарные затраты;
если объемы работ, подлежащих выполнению

$$b_1 = 5000, b_2 = 4000, b_3 = 6000 \ в\,(м^3);$$

в) опт-ую загрузку оборудования при условии, что объемы работ, указанные в пункте б), должны быть выполнены при мнм-ом суммарном времени работы всех механизмов.

18. Нормы выработки в $м^3 / час$ по каждому виду работ указаны в сд. таблице

Виды работ	Экскаваторы		
	1	2	3
I	105	107	64
II	56	66	38
III	56	83	53

При условии, что нх-мо выполнить 2000 м^3 работ каждого вида, опр-ть план использования экскаваторов, мнмз-й суммарное время, затрачиваемое на выполнение этих работ.

19. За механизированном звеном закреплено 200 га орошаемой земли. Его трудовые ресурсы составляют 4200 человеко-дней. Ему выделено 800 ц. минеральных удобрений и предполагается возделывать пшеницу и хлопок. Для получения плановой урожайности требуется внести на 1 га посева пшеницы 2 ц. минеральных удобрений и на 1 га хлопка – 6 ц. Согласно техническим картам труда требуется затратить на 1 га пшеницы 2 чел/дня, а хлопка – 4 чел/дней. Предполагается получить с гектара пшеницы 100 руб. прибыли, а с гектара хлопка – 500 руб. прибыли.

Требуется найти опт. сочетание площадей посевов пшеницы и хлопка, обеспечивающие получение мкс-ой прибыли.

20. Пусть прд-ие выпускает четыре вида продукции и располагает тремя группами основного оборудования. Месячный фонд времени основного оборудования I, II, III группы ограничен и составляет, ств-но, 24 000, 12 000 и 30000 мин. Расход времени на выпуск ед-ы каждого вида продукции и доход прд-ия от ед-ы каждого вида продукции приведены в сд. табл.

Группы оборудования	Время в мин. на выпуск ед. продукции			
	1-я прод.	2-я прод.	3-я прод.	4-я прод.
I группа	1	2	4	8
II группа	3	5	1	0
III группа	6	0	3	1
Доход от реализац. ед. продук. (руб.)	0,4	0,3	0,5	0,8

Опр-ть объём выпуска продукции так, чтобы общий объём дохода от реализации всей продукции был мкс-ым.

21. Для изготовления двух видов изделий А и В фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы. Для изготовления этих изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные приведены в сд. табл.

Виды ресурсов	Объём ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		Изделие А	Изделие В
Сталь (кг)	570	10	70
Цветные металлы (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-ч)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-ч)	3400	200	100
Прибыль (тыс. руб.)		3	8

Опр-ть план выпуска продукции для получения мкс-ой прибыли.

Задание для кр. работы: по образцу приведённых задач в 4^0–10^0 вводите нх. параметры и пер-ые для задач (нахождение опт-го стн-ия продуктов в кормовом рационе, опр-ие наилучшего состава смеси и опт-ый раскрой: продольный раскрой промышленных материалов, обеспечение комплектности заготовок при совместном раскрое промышленных материалов) 22–41 и сформируйте их модели.

22. Установлено, что для эффективного откорма животных, суточный рацион кормов для одного животного должен содержать не менее 6 ед. питательного вещества А, не менее 12 ед. вещества В и не менее 4 ед. вещества С. Для кормления животных используются два вида кормов. Содержание различных питательных веществ в кормах, мнм-ая суточная потребность в питательных веществах, а также стоимость 1 кг. корма приведены в табл.:

Корма Пит. вещества	Кол. ед. пит. вещест. в 1 кг. корм		Мнм. сут. потр. жив. в пит. вещ.
	Корм I	Корм II	
А	2	1	6
В	2	4	12
С	0	4	4
Стоим. 1 кг корма (коп)	5	6	

Найти опт-ый суточный рацион, при к-ом при соблюдении указанных условий выше условий затраты на кормление скота были мнм-ым.

23. Составить пищевой рацион мнм-ой стоимости, к-ый содержит все питательные вещества в кол-ве не менее нормы. Нх. информация приведена в таблице:

Корма Пит. вещества	Кол. ед. пит. вещества в 1 кг. корма			Мнм. норма в пит. вещес.
	№ 1овёс	№ 2 кукуруза	№ 3 люцерна	
А белки	22	1	3	5,4
В углевод	1	2	1,5	7,2
С витамин	0,3	0,4	0,2	1,08
Цена 1 кг Корма (коп.)	2	3	2,5	

24. Из двух сортов бензина образуются для различных целей две смеси А и В. Смесь А содержит 60% бензина 1-го сорта и 40% бензина 2-го сорта. Смесь В содержит 80% бензина 1-го сорта и 20% бензина 2-го сорта. Продажная цена 1 кг. смеси А – 5 руб., смеси В – 6 руб.

Составить план образования смесей, при к-ом будет получен мкс-ый доход, если в наличии имеется 50 т. бензина 1-го сорта и 30 т. бензина 2-го сорта.

Ук: Использовать сд. таблицу.

Вид бензина Вид смеси	1-го сорта	2-го сорта	Цена 1 кг	План
А	3/5	2/5	5	x_1
В	4/5	1/5	6	x_2
Налич. бенз.	50 000	30 000		

25. В опытном хозяйстве найдено, что откорм животных выгоден только тогда, когда каждое животное будет получать в дневном рационе питательных веществ А, В и С не менее 6, 8 и 4 ед. ств-но. Для кормления животных используются два вида корма, притом содержание питательных веществ в одном кг. каждого вида корма дано в сд. таблице:

Корма Пит. веществ.	Корм I	Корм II
А	1	3
В	2	2
С	4	0

Требуется составить кормовой рацион мнм-ой стоимости при соблюдении указанных условий питания животных, если цена корма I равна 0,3 руб/кг, корма II – 0,5 руб/кг.

26. Для кормления коров совхоз располагает сд-ми видами кормов: клеверным сеном, луговым сеном, подсолнечным силосом, кормовой свеклой, картофелем и концентратами. Известно, что для нормального развития скота нх-мо, чтобы дневной расход его включил 19, 26 кормовой единицы, 1926 г. перевариваемого белка, 114 г. кальция и 85 г. фосфора.

Требуется составить наиболее дешёвый дневной рацион, обеспечивающий нх-ое кол. питательных веществ. Содержание питательных веществ в 1 кг. каждого из кормов и себестоимость 1 кг. (в коп.) даётся в таблице:

Корма Пит. вещ.	Сено клеверн.	Сено луговое	Силос подсолн.	Свекла корм.	Картофель	Концентр.	Потребн. в пит. вещ.
Корм. ед.	0,54	0,52	0,18	0,12	0,30	1,06	19,26
Белки (г.)	56	36	12	3	9	196	1926
Кальц. (г.)	9,29	6,02	3,55	0,38	0,14	2,60	114
Фосфор (г.)	1,95	2,14	0,65	0,33	0,68	7,60	85
Цены 1 кг.	1,7	1,2	0,8	1,6	2,4	4,0	

27. Для нормального развития дойных коров с живым весом в 450 кг. и среднесуточным удоем молока в 12 л. требуется, чтобы дневной рацион коровы включал: кормовых ед. – не менее 12 кг., перевариваемого протеина – не менее 1 000 г. и каротина – не менее 450 мг. Рацион составляется из кукурузного силоса, сахарной свеклы и концентратов. В 1 кг. этих кормов содержится (см. табл.)

Корма Пит. вещества	Силос кукур.	Сахарная свекла	Концентр.	Мнм. норма в пит. веществ.
Корма ед. (кг)	0,18	0,24	1,2	12
Перевар прот (г)	10	8	200	1000
Каротин (мг)	15	1	1,5	450
Цена 1 кг (коп)	1	1,1	7,5	
План	x_1	x_2	x_3	

Требуется составить дневной рацион, стоимость к-го была бы нм-ей.

28. В сплав должно входить не менее 4% никеля (*Ni*) и не более 80% железо (Fe). Для составления сплава используется три вида сырья, содержащих железо, никель и прочие вещества. Кроме того, могут добавляться чистый никель, железо и прочие вещества. Стоимость различного сырья, процентное содержание в нем составляющих компонент сплава представлены в таблице:

Сырья Комп. сплава	I	II	III	Fe	*Ni*	Прочие
Fe, %	70	90	85	100	0	0
N_i, %	5	2	7	0	100	0
Прочие, %	25	8	8	0	0	100
Цена	6	4	5	2,5	67	20

Найти состав сплава, мнмз-й его стоимость.

29. Из четырех видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов латуни: обычный, специальный и художественных изделий. Цены единицы веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 0,8 руб., 0,6 руб., 0,4 руб., и 1,0 руб., а единицы веса сплава, ств-но, 2 руб., 3 руб., 4 руб.

Сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца; специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить без ограничений.

Прз-ная мощность прд-ия позволяет выпускать (за опр-ый срок) не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса декоративного сплава.

Найти прз-ый план, обеспечивающий мкс-ую прибыль.

30. В состав рациона кормления входят три продукта: сено, силос и концентраты, содержащие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ (в г на /кг) ствщ-го продукта питания и мнм-но нх-ые нормы их потребления заданы сд-ей табл.:

Продукты / Пит. вещества	Сено	Силос	Концентраты	Нормы потребления
Белок	50	20	180	2000
Кальций	6	4	3	120
Витамины	2	1	1	40

Используя эти исходные данные решить сд. задачи.

1. Опр-ть опт-ый рацион кормления из условия мнм-ой стоимости, если цена 1 кг продукта ств-но составляет: сена – 3 коп, силос – 2 коп. и концентрата – 5 коп.

2. Решить задачу 1, если заданы дополнительно предельные нормы суточной выдачи: сена – не более 12 кг, силоса не более 20 кг и концентрата не более – 16 кг.

3. Включить в задачу 2 условие ограниченности ресурсов продуктов на один рацион: сена – не более 10 кг, силоса не более 15 кг и концентратов – не более 20 кг.

4. Опр-ть влияние на мнм-ую стоимость рациона увеличения ресурсов сена и силоса на 1 кг и концентратов на 3 кг.

5. В найденном (в задаче 2) опт-ом рационе заменить 1 кг сена на силос или концентраты. Опр-ть, при какой замене мнм-ая стоимость изменится нм-им образом.

31. Животноводческая ферма составляет рацион кормления коров на зиму. Имеются два научно разработанных рациона А (не менее 40% кукурузного силоса, не более 40% кормовых трав) и В (не менее 30% кукурузного силоса, не более 50% кормовых трав) и произвольный рацион С (корм без ограничения).

Заданы сд. предельные нормы расхода каждого продукта, исходя из произведенных заготовок корма: кукурузного силоса – 200 ц, кормовых трав – 300 ц.

Какое кол. каждого из рационов должна составлять ферма, чтобы получить мкс-ую прибыль, если при рационе А она составляет 10 руб/ц, при рационе В – 12 руб/ц, при произвольном рационе – 5 руб/ц?

32. Для изготовления брусьев трех размеров: 0,6 м; 1,5 м и 2,5 м в стн: 2:1:4 на распил поступают бревна длиной в 3 м. Опр-ть план распила, обеспечивающий мкс. число комплектов. Ук: см. п3: 3.1. *О*: $X_{опт} = (0, \frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5})$ и $\max Z = \frac{1}{5}$.

33. Произвести распил 5 – метровых бревен на брусья размерами 1,5; 2,4; и 3,2 м в отношении 2:3:5 так, чтобы мнмз-ть общую величину отходов.

О: $x_1 = 0,445$; $x_2 = 0,3325$; $x_3 = 0,2225$.

34. Полуфабрикаты поступают на прд-ие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры нх-мо изготовить комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскрываться различными способами.

Кол-во деталей каждого типа, к-ое получается при раскрое одного листа, ств-щей партии по тому или иному способу раскроя, представлены в сд. таблице.

Первая партия				Вторая партия		
способ раскроя детали	1	2	3	способ раскроя детали	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление мкс-го числа комплектов. Ук: см. з4 из 7^0: 3.1. О: $x_{11} = 153$, $x_{12} = 243$, $x_{21} = 28$, $x_{23} = 222$, где x_{ik} обз-ют число листов i - партии, раскраиваемых по к-му способу.

35. Какое мнм. число досок надо распилить для изготовления 8 дверных рам (коробов), если длина доски 8 м, а размеры короба 2 м и 1,4 м.

№ варианта	Число отпил-ых реек длиной		Остаток
	2 м	1,4 м	
1	4	0	0
2	3	1	0,6
3	2	2	1,2
4	1	4	0,4
5	0	5	1

О: По 1-му варианту 3 доски – $x_1 = 3$, по 4-му варианту $x_4 = 4$ доски. $y_{\min} = 7$ досок.

36. Для нарезки заготовок длиной 29,21 и 15 см используются прутки 65 см. Требуется за смену нарезать сд. число заготовок: длиной 29 см – 100 шт, длиной 21 см – 200 шт. и длиной 15 см – 150 шт. Какое число прутков нх-мо нарезать по различным вариантам, чтобы число заготовок различной длины было бы равно заданному числу и общая длина всех отрезков была мнм-ой?

№ варианта № заготовки	1	2	3	4	5	6
1	2	0	1	0	1	0
2	0	3	0	0	1	2
3	0	0	2	4	1	1
Длина конц. отрезка	7	2	6	5	0	8

37. Из листов материала размером 0,6 и 1,3 м нужно выкроить заготовки двух типов: А размером 0,4 м × 0,5 м в кол. 800 шт. и В – 0,2 м × 0,3 м в кол. 400 шт., израсходовав при этом возможно менее число листов материала. Матрица способов раскроя, построенная на базе карт раскроя имеет вид:

Способ раскроя Тип заготовок	1	2	3	4
А	3	2	1	0
В	1	6	9	13

О: $x_1 = 250$, $x_2 = 25$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $y_{\min} = 275$ листов.

38. В машиностроительный завод поступила партия металлического листа в 400 листов. Из поступивших листов изготавливаются комплекты деталей, включающие 4 детали 1 типа, 3-детали 2 типа и 2-детали 3-го типа. Сущ-ет 3 способа раскроя каждого листа, при к-ых получается разное кол. деталей каждого типа. Эта информация сведена в таблицу.

Способ раскроя Детали	1	2	3
1	0	6	9
2	4	3	4
3	10	16	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление мкс-го числа комплектов.

39. Решить предыдущую задачу (№ 38) при условиях: что на завод поступило 250 металлических листов, а табл. раскроя имеет вид:

Сп. раскроя Детали	1	2
1	6	5
2	5	4
3	8	0

40. Имеется 700 реек длиной 6,5 м. Как их распилить, чтобы получить max комплектов изделий, состоящих из одной планки 2 м и 2-х планок по 1,5 м, если возможны сд. варианты распила:

Число отпил. в 1-й рейке		Остаток
по 2 м	по 1,5 м	
3	0	0,5
2	1	1
1	3	0
0	4	0,5

О: $x_1 = 100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $x_4 = 0$, $y_{\min} = 50$ м.

41. Имеется 21 рейка по 6,5 м и 84 реек по 5,5 м. Как их разрезать, чтобы изготовить max комплектов изделий, состоящих из одной планки в 2 м и двух планок по 1,5 м, если имеются сд. способы раскроя?

Длина рейки	Число отпил-ых планок		Остаток (м.)
	2 м	1,5 м	
6,5	3	0	0,5
	2	1	1
	1	3	0
	0	4	0,5
5,5	2	1	0
	1	2	0,5
	0	3	1

O: (0,0,21,0,7,77,0) $y_{\min} = 38{,}5$ м.

42. В каждое изделие входит одна пластина 18×28 см^2 и 10 пластин – 6×16 см^2. Имеются 310 листов. Как их нарезать для изготовления мкс-ма комплектов, если размер листа 30×65 см^2. В каждом листе можно вырезать от 0 до 3 больших пластин. Матрица способов раскроя, построенная на базе карт раскроя имеет вид:

Тип пластин	Номера способов раскроя и число заготовок в ств. с номерами			
	1	2	3	4
1.18× 28	0	1	2	3
2.6× 16	20	14	9	2
Остаток в см^2	30	102	78	246

3.2. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ ЛП

Вопросы для самопроверки

1. Дайте опр-ие совместности и несовместности систем. В каком случае совместная система наз. определенной и неопределенной. Приводите примеры.
2. Какие две системы лин-ых ур-й наз. экв-ми и какие элр. прб-ия можно произвести над матрицами экв-ых систем?
3. Когда система векторов яв-ся линейно зв-ой, а когда лин. незв-ой?
4. Какие столбцы (строки) матрицы наз. базисными столбцами (строками)?
5. Что наз. рангом матрицы и какие способы знаете его нахождения?
6. Докажите теорему о базисном миноре.
7. Как выяснить совместность или несовместность системы?
8. В чем состоит метод Жордана-Гаусса?
9. Как опр-ся совместность и несовместность системы, решаемой методом Жордана-Гаусса?

10. Как опр-ся общее решение одн-ой и неодн-ой системы?
11. Как находится обратная матрица методом Жордана-Гаусса?
12. Как решается матричное ур. методом Жордана-Гаусса?
13. Какое мн. наз. выпуклым. Приведите примеры выпуклых мн-в.
14. Какая точка выпуклого мн-ва наз. крайней (угловой) точкой?
15. Какими св-ми обладает выпуклое мн.?
16. Что наз. мгр-ом решений?
17. Что такое размерность мгр-го мн-ва?
18. Дайте геом. истолкование ЛП.

Задачи для самостоятельной работы

1. Сформулируйте и док-те теорему Кронекора-Капелли.

2. Исследовать сд. системы и какие из них совместные и несовместные, определенные и неопределенные:

$$1)\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases},\ 2)\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 6 \\ 2x_1 - 10x_2 = 15, \end{cases}\ 3)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}\ 5)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

3. Исследовать на лин-ю зв-ть систему векторов:

1) а = $\{1,4,6\}$, в = $\{1,-1,1\}$, с = $\{1,1,3\}$.

2) а = $\{2,-3,1\}$, в = $\{3,-1,5\}$, с = $\{1,-4,3\}$

3) e^x, e^{2x}, e^{3x}, на]-∞ , ∞ [,

4) $1 + x + x^2$, $1 + 2x + x^2$, $1 + 3x + x^2$.

5) $f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4$, $f_2 = x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 8x_4$, $f_3 = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4$, $f_4 = 6x_1 - 7x_2 - x_4$.

О: 1) зв; 2) незв; 3) незв; 4) зв. 5) зв.

4. Найти лин-ю зв-ть между фк-ми: $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 7x_4 \\ f_2 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ f_3 = 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ f_4 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \end{cases}$

О: $f_1 = 3f_2 - f_3 + 2f_4$.

5. Найти ранг матрицы: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

О: 1) r = 2; 2) r = 2; 3) r = 3.

6. Методом Жордана-Гаусса найти решение системы:

$$1)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4 \\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=-8 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4 \\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=6 \end{cases}$$

О: 1) $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$; 2) $\begin{cases} x_1=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}x_3-x_4 \\ x_2=\frac{-4}{3}-\frac{2}{3}x_3+x_4 \end{cases}$; 3) r $(A) = 2$, r $(\widetilde{A})=3$, несовм.

7. Умножить матрицы: 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Найти $AB - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

5) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$. *О*: 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

8. Найти обратную матрицу для матрицы *А*: 1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *О*: 1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найти решение матричного ур: 1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *О*: 1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Проверить, будут ли выпуклы данные мн-ва: 1) Отрезок на пм. R^1. 2) Круг в пр. R^3. 3) Шар без центра в R^3. 4) Отрезок и точка, лежащая вне его на пл. R^2. 5) Два отрезка в R^2, имеющие одну общую точку. 6) Два туг-ка в R^2, имеющие одну общую точку. *О*: 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) нет.

11. Выяснить, будут ли выпуклы мн-ва $X \subset R^2$, крд-ты к-ых состоят из точек $A = (x_1, x_2)$ и уд-ет заданным огр-ям: 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1^2 \le 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1^2 - x_2 \ge 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^{10} + x_2^{10} \ge 4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \le 1 \\ \sin x_1 \le \frac{1}{2} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 15 \end{cases}$

О: 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 7) нет.

12. Опр-ть значения параметра λ, при к-ых заданные мн. $x \subset R^2$ яв-ся выпуклыми: 1) $\begin{cases} \lambda(x_1 - x_2^2) = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lambda(x_1 - x_2^2) = 0 \\ x_1 + x_2 = \lambda \end{cases}$ 3) $x_1^2(\lambda^2 + 3\lambda + 2) - x_2 \ge 0$

4) $e^{x_1}(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - x^2(\lambda^2 + 2) \le 0$.

$О$: 1) $\lambda = o$ 2)$\lambda = 0,\ \lambda = -\frac{1}{4}$ 3)$-2 \le \lambda \le -1$, 4)$\lambda \le 2, \lambda \ge 3$

13. Опр-ть размерность выпуклых мн-в, огр-я к-ых заданы условиями:

1) $x_1 + x_2 \ge -1$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 \le -1 \end{cases}$ 3) $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ 4) $x_1+x_2+\ldots x_n \le 1$

5) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \end{cases}$

О: 1) $\rho = 2$. 2) $\rho = 0$. 3) $\rho = n - 1$. 4) $\rho = n$. 5) $\rho = 1$. 6) $\rho = 2$

14. Опр-ть значения λ, при к-ом сд. выпуклые мн. в R^2имеют размерность $p = 1$: а) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ \lambda x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1^2 + x_2 \ge 0 \\ x_1^2 + (x_2 - \lambda)^2 \le 1 \\ x1 = \lambda \end{cases}$

О: а) $\lambda \ne 0$. б) $-1 < \lambda < 1$.

15. Опр-ть фк-ю $\varphi(\lambda)$ (размерность выпуклого мн. при фиксированном значении λ)для мн.: $\begin{cases} -x_1^2+x_2\geq\lambda \\ \lambda x_1+x_2=0 \end{cases}$

$$\text{О: } \varphi(1)= \begin{cases} 1 \; \textit{при} \; \lambda<0 \text{ и } \lambda>4, \\ 0 \; \textit{при} \; \lambda=0 \text{ и } \lambda=4 \\ \text{не опр-на при } 0<\lambda<4. \end{cases}$$

16. Найти выпуклые оболочки мн-в, принадлежащих пл-ти R^2:

1) $x_1^2+x_2^2\leq 1$. 2) $x_1^2+x_2^2=1$. 3) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2\leq 1 \\ -x_1^2+x_2=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2\geq 1 \\ -x_1x_2=0. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ |x_1| \quad \leq 1. \end{cases}$ *О*: 1) $x_1+x_2\leq 1$. 2) $x_1^2+x_2^2\leq 1$. 3) $\begin{cases} -x_1^2+x_2\geq 0 \\ x_2\leq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$ 4) пл.R^2.

5) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2\leq 1 \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$ 6) $x_1^2+x_2^2\leq 1$.

17. Найти выпуклые оболочки мн-в, лежащих в R^n:

1) $x_1+x_2+...+x_n=1$. 2)$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 1$. 3)$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$. 4)$x_1^2x_2^2+...+x_n^2\geq 1$

5)$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 1 \\ x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1^1+x_2^2+..+x_n^2\leq 4 \\ x_1^2+x_2^2+..+x_n^2\geq 0. \end{cases}$

О: 1) $x_1+x_2+...+x_n=1$. 2) $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 1$. 3) $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 1$.

4) *Пр*. R^n. 5) $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 1$. 6) $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leq 4$.

18. Описать все выпуклые конусы на прямой R^1. *О*: точка, прямая, луч.

19. Опр-ть, обладают ли заданные мн. св-ми выпуклого конуса:

1) $\begin{cases} x_1+x_2\leq 1 \\ x_1-x_2\geq 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2\leq 1 \\ x_1-x_2\leq 1 \\ x_2\leq 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3\leq 0 \\ x_1=x_2=x_3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 1 \\ x_1=x_2 \quad =0 \\ x_3\geq 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1 \\ x_1=x_2 \quad =0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2\leq 1 \\ x_1^2+x_3^2\leq 1 \end{cases}$ *О*.: 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет.

20. Будет ли сумма двух конусов конусом? *О*.: Вообще говоря, нет, н-р, N=K_1+K_2, где $K_1=\{X=(x_1,x_2):x_1=0\;x_2\geq 1\},K_2=\{X=(x_1,x_2):x_1\geq 1,\;x_2\geq 0\}$

21. Найти прямую сумму выпуклых конусов К$_1$ и К$_2$, к-ые заданы сд. огр-ми:

$$1) x_1 + x_2 = 0 \quad (K_1 \subset R^2) \qquad 2)\begin{cases} x_1 \quad \ge c_1 \\ \quad x_2 \ge c_2. \end{cases} \quad (K_1 \subset R^2)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad \ge 0 \\ \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \quad (K_2 \subset R^2) \qquad \begin{cases} x_1 \quad = c_3 \\ \quad x_2 \ge c_4 \end{cases} \quad (K_2 \subset R^2)$$

$$3)\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ \quad x_2 \ge 0 \end{cases} (K_1 \subset R^2) \qquad 4) \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \ (K_1 \subset R^2) \\ x_1 + x_2 = 0 \ (K_2 \subset R^3) \end{matrix} \qquad 5) \begin{cases} x_1 \quad \le 0 \\ \quad x_2 \ge 0 \end{cases} (K_1 \subset R^2)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 1 \\ x_1 \quad \le 0. \end{cases} (K_2 \subset R^2) \qquad x_1 + x_2 = 0 \ (K_2 \subset R^3)$$

O.: $1) K = \{X = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \ge 0\}$ $2) K = \{X = (x_1, x_2) : x_1 \ge c_1 + c_2,\ x_2 \ge c_2 + c_4\}$

$3)\ K = \{X = (x_1, x_2) : x_2 \ge 0\}$ $4) K = \{X(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0\}$

$5)\ K = R^3$. $6) K = \{X = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = 2,\ x_3 \ge 6\}$

22. Опр-ть, какие из огр-й (i) мгр-ых мн-в, заданных в условиях, яв-ся нежесткими, и найти точки x_i, к-ые обращают их в строгие нерав-ва:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 7 \\ \text{-}7x_1 + 4x_2 \le 1 \\ 8x_1 - 3x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x_1 \quad \le 1 \\ \quad x_2 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ 10x_1 - 5x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le -10 \end{cases} \qquad 5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 \quad + 2x_3 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

O: 1) $i = 1$; $x_1 = (1,2)$. 2) Все огр. жесткие. 3) $i = 1, 2, 3$; $X_i = (0,1)$.

4) $i = 1, 2, 3, 4$; $X_i = (-11, 9)$. 5) $i = 1, 2, 3$; $X_i = (\frac{1}{2}, 1, 0)$.

23. Опр-ть размерность ρ мгр-ых мн-в М, заданных в условиях (размерность пр-ва R^n, в к-ом содержится М, равна нб. номеру крд. огр-й):

1) $x_1 + x_2 = 1$. 2) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1$. 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 \quad \le 0 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 11 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 \le 11. \end{cases}$ O: 1) $\rho = 1$. 2) $\rho = \text{n}$. 3) $\rho = 1$.

4) $\rho = 2$. 5) $\rho = 2$. 6) $\rho = 3$.

24. Опр-ть размерность $\rho(\lambda)$ мгр-го мн. М, заданного огр-ми:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2} \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

О: $\rho(\lambda)$ =0 при $\lambda\ne-2,\ \lambda\ne1$;

$\rho(\lambda)$ =2 при $\lambda=1$.

При $\lambda=-2$ огр-ия противоречивы.

25. Опр. размерность $\rho(\lambda,\ \mu)$ мгр. мн. М, заданного огр-ми:

$$\begin{cases} 2x_2-x_3\le0 \\ \lambda x_1+\ \ \mu x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda\mu x_2+x_3=\mu \\ x_1+\ \mu x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$$

О: $\rho(\lambda,\mu)=0$, если $\lambda\ne-2,\quad\lambda\ne1,\mu\ne0,$

$\dfrac{\lambda\mu+\mu_2+2\mu-4}{(\lambda+2)\ \ (\lambda-1)\mu}\le0;\quad\rho(\lambda,\mu)=1$ *при* $\lambda=\mu=-2;$

$\rho(\lambda,\mu)=2$ *при* $\lambda=\mu=1$

26. Мгр-ые мн. М заданы своими огр. Выписать огр-ия, задающие все грани М^i этих мн-в: 1) $\begin{cases} x_1+\ x_2=1 \\ x_1+\ 2x_2\le4 \\ x_1\qquad\ \ \ge0 \\ \qquad\ \ x_2\ge0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ xi\ge0,\ \ i=\overline{1,3} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le1 \\ x_i\ge0,\ \ i=\overline{1,3} \end{cases}$

О: 1) М^1: $\begin{cases} x_1\ +\ \ x_2=0 \\ x_1\ +\ 2x_2\le4 \\ x_1\qquad\ \ \ge0 \\ \qquad\ \ x_2\ge0 \end{cases}$ М^2 $\begin{cases} x_1+\ x_2\ =0 \\ x_1+2x_2\ \le4 \\ x_1\qquad\ =0 \\ \qquad\ x_2\ge0 \end{cases}$ М^3 $\begin{cases} x_1+\ x_2=0 \\ x_1+2x_2\le4 \\ x_1\qquad\ \ge0 \\ \qquad\ x_2\ge0 \end{cases}$

2) М^1: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_i\ge0,\ \ i=1,2,3. \end{cases}$ М^2: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1\qquad\qquad=0 \\ x_i\ge0,\qquad i=2,3 \end{cases}$ М^3: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \qquad x_2\qquad=0 \\ x_i\ge0,\qquad i=1,3 \end{cases}$

М^4: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \qquad\qquad x_3=0 \\ x_i\ge0,\qquad i=1,2 \end{cases}$ М^5: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \qquad x_1=x_2=0 \\ \qquad\qquad x_3\ge0 \end{cases}$ М^6: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1=\qquad x_3=0 \\ \qquad\qquad x_2\ge0 \end{cases}$

М^7: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \qquad x_2=x_3=0 \\ \qquad\qquad x_1\ \ge0 \end{cases}$ 3) Грани М^i, $i=\overline{1,7}$ (см. ответ задачи 2)) и грани

М^8: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le1 \\ x_i\ge0,\qquad i=\overline{1,3} \end{cases}$ М^9: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le1 \\ x_1\qquad\qquad=0 \\ x_i\ge0 \end{cases}$ М^{10}: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le1 \\ \qquad x_2\qquad=0 \\ x_i\ge0,\qquad i=\overline{1,3} \end{cases}$

$$\text{M}^{11}: \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ \qquad\qquad x_3=0 \\ x_i\ge 0, \quad i=1,2 \end{cases} \quad \text{M}^{12}: \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ x_1=x_2 \qquad =0 \\ \qquad\quad x_3\ge 0 \end{cases} \quad \text{M}^{13}: \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ x_1= \qquad x_3=0 \\ \quad x_2 \qquad \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{M}^{14}: \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ \qquad x_2=x_3=0 \\ x_1 \qquad\quad \ge 0 \end{cases} \quad \text{M}^{15}: \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ x_1=x_2=x_3=0 \end{cases}$$

27. Найти вершины мгр-ых мн-в М, огр-ия к-ых приведены в условиях:

$$1)\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ x_1 \qquad \ge 0 \\ \qquad x_2\ge 0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ x_1-x_2\le 1 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 3 \\ x_1+x_2 \qquad \le 2 \\ x_1 \qquad +x_3\le 2 \\ \qquad x_2+x_3\le 2 \end{cases} \quad 4)\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=6 \\ -x_1 \qquad\quad \le 0 \\ \qquad\qquad -x_3\le 0 \end{cases}$$

О: 1) $X_1=(0,1)$; $X_2=(1,0)$; $X_3=(0,0)$. 2) $X_1=(1,0)$. 3) $X_1=(1,1,1)$.

4) Система огр-й противоречива.

28. Написать ур-ия ребер Г (граней единичной размерности) мгр-го мн. М в виде x = x$_0$ + te (где x$_0$ ∈ Г, e – направляющий вектор этого ребра):

$$1)\begin{cases} x_1+x_2\le 0 \\ x_1 \qquad \ge 0 \\ \qquad x_2\ge 0. \end{cases} 2)\begin{cases} x_1+\ x_2\le 1 \\ x_1-\ x_2\le 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases} 3)\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ x_1-x_2\le 1 \\ \qquad x_2\ge 0. \end{cases} 4)\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ x_1-x_2\le 1 \\ x_1 \qquad \ge 0. \end{cases} 5)\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_i\ge 0, i=\overline{1,3} \end{cases}$$

О: 1) Г$_1$=$\left\{x_0=(0,0);\ e=(1,0);\ 0\le t\le 1\right\}$, Г$_2$=$\left\{x_0=(0,1),\ e=(0,1),\ 0\le t\le 1\right\}$,

Г$_3$=$\left\{x_0=(1,0);\ e=(-1,1);\ 0\le t\le 1\right\}$. 2) См. ответ предыдущей задачи.

3) Г$_1$=$\left\{x_0=(1,0);\ e=(-1,0);\ t\ge 0\right\}$, Г$_2$=$\left\{x_0=(1,0);\ e=(-1,1),\ t\ge 0\right\}$.

4) Г$_1$=$\left\{x_0=(1,0);\ e=(-1,1);\ 0\le t\le 1\right\}$, Г$_2$=$\left\{x_0=(1,0);\ e=(-1,-1),\ 0\le t\le 1\right\}$

Г$_3$=$\left\{x_0=(0,-1);\ e=(0,1);\ 0\le t\le 2\right\}$. 5) Г$_1$=$\left\{x_0=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},o\right);\ e=(-1,0,1);\ 0\le t\le \frac{2}{3}\right\}$.

* * *

29. Исследовать на лин-ю зв-ть систему векторов:,

1) a $=\{5,4,3\}$, в $=\{3,3,2\}$, с $=\{8,1,3\}$.

2) 1, x, sin$x$ на $]-\infty,\infty[$.

3) 2, sin$x$, $\sin^2 x$, cos^2x на $]-\infty,\infty[$

4) a $=\{1,1,1\}$, $в=\{0,1,1\}$, с $=\{0,0,1\}$.

5) $a=\{1,-1,2\}$, $в=\{-1,1,-1\}$, $c=\{2,-1,1\}$

6) $x, x^2, (1+x)^2\ на]-\infty,\infty[$.

7) $a=\{1,2,3\}$, $в=\{4,5,6\}$, $c=\{7,8,9\}$

8) $1, x, x^2, (1+x)^2$ *на* $]-\infty,\infty[$.

9) $a=\{1,1,1\}$, $в=\{1,2,3\}$, $c=\{1,3,6\}$

10) $\cos x,\ \sin x,\ \sin 2x$ *на* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

11) $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$ *на* $]-\infty,\infty[$

12) $a=\{3,2,-4\}$, $в=\{4,1,-2\}$, $c=\{5,2,-3\}$

13) $a=\{0,1,1\}$, $в=\{1,0,1\}$, $c=\{1,1,0\}$

14) $\frac{1}{x},\ x,\ 1$ *на* $]0,1[$

15) $1,\ tg\ x,\ ctg\ x$ *на* $]0,\frac{\pi}{2}[$

16) $x,\ 1+x,\ (1+x)^2$ *на* $]-\infty,\infty[$

17) $a=\{2,1,0\}$, $в=\{-5,0,3\}$, $c=\{3,4,3\}$

18) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^{x^2}$ *на* $]-\infty,\infty[$

19) $f_1=2x_1-x_2+5x_3,\ f_2=x_1-2x_2-3x_3,\ f_3=6x_1+7x_2-8x_3.$

20) $\begin{cases} f_1=2x_1-3x_2+4x_3-5x_4 \\ f_2=\ \ x_1-2x_2+7x_3-8x_4 \\ f_3=4x_1-5x_2+6x_3-7x_4 \\ f_4=6x_1-7x_2 \qquad\quad -x_4. \end{cases}$ и найти лин-ю зв-ть между этими фк-ми.

30. Методом Жордана-Гаусса найти общее и фунд. решения системы:

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=\ 4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4=0 \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4=0. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$

$$10)\ \begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases} \quad 11)\ \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases} \quad 12)\ \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-13x_3=-6 \end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0. \end{cases} \quad 14)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4. \end{cases} \quad 15)\ \begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_4=2 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$$

$$16)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-3x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases} \quad 17)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12 \\ 3x_3+4x_2+x_3+2x_4=13 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14. \end{cases} \quad 18)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$$

$$19)\ \begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases} \quad 20)\ \begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

3.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛП

Вопросы для самопроверки

1. Приводите классификацию моделей задач ЛП.

2. Напишите в различных формах (векторной, матричной, с помощью сумм) мт-ую модель задачи ЛП.

3. Дайте опр-ие плана, опорного плана, не вырожденного и вырожденного опорного плана, опт-го плана.

4. Как строится опорный план?

5. Как вводится новый опорный план?

6. На чем основан графический метод решения задачи ЛП?

7. Как опр-ть по рис-у, имеет задач ЛП решение или ее оптимум находится в $\pm\ \infty$?

8. Какие задачи ЛП можно решить графическим методом?

9. Как построить первоначальный опорный план ЛП и проверить его на опт-ть?

10. Перечислите условия опт-сти опорного плана задачи ЛП на отыскания мнм-го и мкс-го значения линейных фк.

11. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не яв-ся опт-ым?

12. Когда целевая фк. не огр-на на мгр-ке решений?

13. Как опр-ть вектор, подлежащий исключению из базиса. Какой эл-т наз. ключевым.

14. Какой метод решения лин-ых ур-й лежит на основе симплексного метода?

15. В каких случаях опт. План единственный и не единственный?

16. К каком случае целевая фк. задачи ЛП неогр-на?

17. В каком случае задачи ЛП несовместны?

* * *

1. Привести к канонической формуле сд. задачи ЛП:

1) $\min Z = x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \qquad \ge 1 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

2) $\max Z = 2x_1 + x_2 - x_3$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

3) $\min Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad \le 4 \end{array}\right\}$$

$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

4) $\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5$

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \qquad \ge 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x \ge 5.$$

2. Привести к системе нерав-в сд-ие огр-ия:

1)
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 10 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

2)
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

3. Привести к стандартной модели сд. задачи ЛП:

1) $\max Z = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 4 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

2) $\min Z = x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 + x_5$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 \qquad = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad + 2x_5 = 8 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

3) $\max Z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 6 \end{array}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

4) $\min Z = 3x_1 + x_2 \qquad + x_4 - x_5$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 9 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 6 \end{array}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

4. Построить области решений сд-их систем нерав-в:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} -x_1+x_2\le 2\\ 5x_1+2x_2\ge 10\\ 5x_1-2x_2\le 10 \end{array}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{array}{l} -x_1+2x_2\le 4\\ 5x_1+2x_2\ge 10\\ 4x_1-3x_2\le 12\\ 7x_1+4x_2\le 28 \end{array}\right\};\quad 3)\ \left.\begin{array}{l} x_1+2x_2\ge -1\\ 5x_1+2x_2\ge 10\\ 4x_1-3x_2\le 12 \end{array}\right\}\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

5. Построить обл. допустимых решений сд-их систем ур-й (все $x_j\ge 0$):

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3-x_4=20\\ x_1+x_3+3x_4=8\\ x_1+x_5=2 \end{array}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{array}{l} 2x_1-3x_2-x_3-2x_4=2\\ x_1+x_2-2x_3-3x_4=-3 \end{array}\right\}\quad 3)\ \left.\begin{array}{l} x_1+x_3=8\\ x_2+2x_3=4 \end{array}\right\}$$

6. Построить обл. допустимых решений сд-их смешанных систем:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x_1-x_2\ge -3\\ 6x_1+7x_2\le 42\\ 2x_1-3x_2\le 6\\ x_1+x_2=4 \end{array}\right\};\ x_2\ge 0\quad 2)\ \left.\begin{array}{l} -x_1+2x_2\le 4\\ 2x_1-x_2\le 6\\ 3x_1+8x_2=4 \end{array}\right\};\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\quad 3)\ \left.\begin{array}{l} 2x_1-x_2+x_3=6\\ x_1-2x_2+x_3=3\\ x_1+x_2\le 8 \end{array}\right\}\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$$

7. Записать с помощью нерав-в области, представляющие собой пл-ти x_1Ox_2 муг-ки сд. вершинами: 1) A(1,8), B(5,2), C(6,6); 2) A(1,4), B(4,1), C(8,2), D(6,9), E(1,8); 3) A(2,6), B(6,9), C(9,3), D(5,–3); 4) A(0,4), B(4,4), C(3,0), D(1,0), E(0,2).

Задание для кр. работы: решить графически задачи 8–27.

8. $Z=x_1+x_2$ (max)
$$x_1+x_2\le 1,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

9. $Z=x_1+2x_2$ (max)
$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2\le 1\\ x_1-x_2\le 1 \end{array}\right\};\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

10. $Z=x_1+2x_2$ (max)
$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2\le 1\\ x_1-2x_2\le 1 \end{array}\right\}\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

11. $Z=x+x_2$ (min)
$$\left.\begin{array}{l} 0\le x_1\le 1\\ 0\le x_2\le 2\\ 0\le x_1+x_2\le 3\\ -1\le x_1-x_2\le 0 \end{array}\right\}$$

12. $Z=x_1-x_2$ (max)
$$\left.\begin{array}{l} 1\le x_1+x_2\le 2\\ 2\le x_1-2x_2\le 3\\ 1\le 2x_1-x_2\le 2 \end{array}\right\}\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

13. $Z=x_1+x_2-x_3$ (max)
$$x_1+x_2+x_3=1,\quad x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

14. $Z=x_1+x_2-x_3$ (min)
$$x_1+x_2+x_3\le 1,\quad x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

15. $Z=x_1-x_2-x_3$ (max)
$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=4\\ x_1-x_2+x_3\le 2 \end{array}\right\}\quad x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

16. $Z=2x_1+x_2+x_3$ (min)
$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=4\\ x_1-x_2+x_3\le 2 \end{array}\right\}\quad x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

17. $Z = x_1 + x_2 - x_3$ (min)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

18. $2x_1 - x_2 + 2x_3$ (min)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

19. $Z = x_1 + x_2$ (max)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\ &\le 1 \\ x_2 - x_2 &\le 1 \\ x_1 + \quad x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\}$$

20. $Z = x_2 + x_3$ (max)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$
$$x_3 \ge 0$$

21. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ (min)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

22. $Z = x_1 + x_2$ (max)

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$
$$x_j < 0,\ j = \overline{1,4}.$$

23. $Z = x_1 - x_2 + x_3$ (min)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \quad &= -2 \end{aligned}\right]$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

24. $Z = x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5$ (min)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

25. $Z = x_1 \quad - x_4$ (max)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ &x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

26. $Z = 2x_1 \quad + 2x_3 + x_4$ (max)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

27. $Z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ (min)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

О: 8. $X^0 = t(1,0) + (1-t)(0,1) = (t, 1-t),\ 0 \le t \le 1,\ Z_{\max} = 1$; 9. $X^0 = (0,1),\ Z_{\max} = 2$; 10. Лин. форма не огр-на сверху; 11. $X^0 = (0,0,0),\ Z_{\min} = 0$; 12. Система условий задачи противоречива; 13. $X^0 = (0,1,0),\ Z_{\max} = 1$; 14. $X^0 = (0,0,1)$, $Z_{\min} = -1$; 15. $X^0 = (3,1,0),\ Z_{\max} = 2$; 16. $X^0 = (0,4,0),\ Z_{\min} = 4$; 17. $X^0 = (0,0,2)$, $Z_{\min} = -2$; 18. Лин. форм не огр-на снизу; 19. $X^0 = (2,1,0),\ Z_{\max} = 3$; 20. Лин. форма на огр-на сверху; 21. $X^0 = (1,1,0,0),\ Z_{\min} = 2$; 22. $X^0 = (2,1,0,0)$, $Z_{\max} = 3$; 23. $X^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, 2),\ Z_{\min} = -\frac{1}{2}$; 24. $X^0 = (0, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}),\ Z_{\min} = 1{,}5$; 25. $X^0 = (3,2,0,0),\ Z_{\max} = 3$; 26. $X^0 = (1,0,0,0),\ Z_{\max} = 2$; 27. $X^0 = (0,1,0,0),\ Z_{\min} = -1$.

* * *

Используя геом. интерпретацию, опр-ть в задачах 28–31 обл. изменения параметров, при к-ых: 1) условия задачи несовместны; 2) условия задачи совместны, но задача неразрешима из-за $\max Z \to \infty (\min Z \to -\infty)$; 3) задача имеет единственное решение; 4) задача имеет беск-ое мн. решений.

28. $Z = x_1 - x_1$ (min),

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le a, \\ 0 \le x_1 \quad &\le 1, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

29. $Z = x_1 + x_1$ (max),

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &\le 1, \\ ax_1 - x_2 &\le 1, \\ x_j \ge 0,\ j &= 1,2. \end{aligned}$$

30. $Z = d(x_1 + x_1)$ (max),

$$-a \le x_1 - x_2 \le a,$$
$$x_1 + bx_2 \le 1,$$
$$0 \le x_1 \qquad \le c,$$
$$x_2 \ge 0.$$

31. $Z = x_1 + x_1$ (max)

$$x_1 + ax_2 \le 1$$
$$x_1 + bx_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \ge c$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

О: 28. 1) $a < 0$, 2) $a > 0$, 3) $a = 0$, 4) не сущ. ни одного значения a, при к-ом задача смеет беск. мн. решений; 29. 1) При всех значениях a условия задачи совместны, 2) $a \le 0$, 3) $a > 0$, $a \ne 1$, 4) $a = 1$. 30.1) $a < 0$ или $c < 0$, 3) $a \ge 0$, $c \ge 0$, $в \ne 1$ и $d \ne 0$ или $a \ge 0$, $c \ge 0$, $d < 0$, 4) $a \ge 0$, $c \ge 0$, $b = 0$, $d > 0$ или $a \ge 0$, $c \ge 0$, $d = 0$.

32. Рас-им задачу в канонической форме при m=2 и n>2:

$$\left.\begin{aligned} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_x\,(\max) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ X_j \ge 0, j = \overline{1-n} \end{aligned}\right\}$$

Построим в пр-ве пер-ых V мн. M_V, состоящее из точек $V = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$,

где $\upsilon_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ $\upsilon_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$

$$\upsilon_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Д-ть, что:

а) M_V – выпуклый конус, принадлежащий пр-ву R^3 ;

б) если задача (γ) недопустима, то M_V не имеет общих точек с пм. $\ell = (в_1, в_2, \upsilon_3)$, где $u_3 \in\ ]-\infty,\infty[$.

в) если задача (γ) разрешима, то пересечение конуса M_V с пм. ℓ есть отрезок вида $\bar{\ell} = (в_1, в_2, \upsilon_3)$, где $\upsilon_3 \le \upsilon_3 \le \overline{\upsilon_3}$ или луч $\ell_0 = (в_1, в_2, \upsilon_3)$, где $-\infty < \upsilon_3 \le \upsilon_3$ (приведенная геом. интерпретация наз. второй геом. интерпретацией задачи ЛП см. зм3 из 4^0:3.3).

33. Обобщить построения, описанные в задаче 32 для случая, когда m>2 и n>2.

34. Используя второй графический метод, решить задачу ЛП:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5\,(\max)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 2$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

О: $X^0 = (2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0)$, $Z_{\max} = 4$.

Задание для кр. работы: решить симплекс-методом задачи 35–54 и, где возможно, дать геом. интерпретацию процесса решения. Во всех примерах $x_j \geq 0$.

35. $Z = x_1 + 2x_2\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 - x_1 &\geq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1 \end{aligned}\right\}.$$

36. $Z = x_1\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \end{aligned}\right\}.$$

37. $Z = 4x_1 + 3x_2\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -2 \\ 5x_1 3x_2 &\leq 15 \\ x_2 &\leq 2,5 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -2 \end{aligned}\right\}$$

38. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

39. $Z = x_1 + x_2 + x_3\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 - 2x_6 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

40. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 (\min)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_5 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

41. $Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_2 (\min)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}\right\}$$

42. $Z = x_4 - x_5$ (max)

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geq 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &\geq 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

43. $Z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ (min)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

44. $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ (min)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

45. $Z = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5$ (max)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 + x_4 &\leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 &\leq 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &\leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leq 24 \end{aligned}\right\}$$

46. $Z = -x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5$ (max)

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &\geq 15 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leq 25 \end{aligned}\right\}$$

47. $Z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5$ (min)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3 \\ x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 &\leq 5 \\ x_2 + x_5 &\geq 3 \end{aligned}\right\}$$

48. $Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$ (min)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5 \end{array}\right\}$$

49. $Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$ (max)

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \end{array}\right\}$$

50. $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4$(max)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \end{array}\right\}$$

51. $Z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ (min)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{array}\right\}$$

52. $Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3$ (max)

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1 \end{array}\right\}$$

53. $Z = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2} x_3$ (min)

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \end{array}\right\}$$

54. $Z = x_1 - 2x_2 + 4x_4 - x_5$ (max)

$$\left.\begin{array}{lr} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & = 42 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 & = 16 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 & = 32 \end{array}\right\}$$

55. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5$ (max)

$$\left.\begin{array}{lr} x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 & = 8 \\ 4x_2 \qquad + 3x_4 - x_5 & = 3 \end{array}\right\}$$

0:35. $X^0 = (\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$, $Z_{\max} = \frac{19}{5}$. 36. $Z_{\max} \to \infty$. 37. $X^0 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $Z_{\max} = \frac{27}{2}$.

38. $X^0 = (1, 0, 2, 0, 0)$, $Z_{\max} = 8$. 39. $X^0 = (5, 0, 10, 0, 1, 0)$, $Z_{\min} = 15$.

40. $X^0 = (0, 1, 5, \frac{5}{8}, 0, \frac{3}{2})$, $Z_{\min} = -\frac{19}{8}$. 41. $X^0 = (1, 1, 3, 0)$, $Z_{\min} = 7$. 42. $Z_{\max} \to \infty$.

43. $X^0 = (3, 0, 1, 3)$, $Z_{\min} = 2$. 44. Система не совместна. 45. $X^0 = (0, 0, 12, 5, 58)$,

$Z = 148$. 46. $Z_{\max} \to \infty$. 47. $X^0 = (0, 2, 8, 1, 0, \frac{1}{2})$, $Z_{\min} = -3$.

54. $X^0 = (2, 4, 0, 8, 0), Z_{\max} = 26$. 55. $X^0 = (\frac{81}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0), Z_{\max} = \frac{35}{4}$.

3.4. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛП

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит суть метода искусственного базиса и как выбирается коэф-ы целевой фк. для искусственных пер-ых при решении задач на min и max?

2. Зачем в системе огр-ий необходим единичный базис?

3. Когда опт. план расширенной задачи яв-ся опт. планом исходной задачи?

4. Когда исходная задача несовместна и как это опр-ть при решении расширенной задачи?

5. Как опр-ся вектор для включения в базис при использовании искусственного базиса?

6. В чем состоит суть метода полного исключения и чем он отличается от метода искусственного базиса?

7. При каких видах огр-й используются балансовые и искусственные пер.?

8. Как получается обратная матрица из коэф-ив огр-й исходной задачи при реализации симплекс-метода (см. п 5 из 1^0:3.4)?

9. В чем заключается сущность дв-сти в ЛП?

10. Приводите классификацию моделей дв-ых задач ЛП.

11. Сформулируйте и док-те теорему дв-сти для несимметричных дв. задач.

12. Как по решению исходной (дв-ой) найти решение дв-ой (исх.) задачи?

13. Как обобщается теорема дв-сти к симметричным дв. задачам ЛП.?

14. Сформулируйте вторую теорему двойственности. Когда она верна и как используется при решении дв-ых задач?

15. Сформулируйте третью теорему двойственности. Где она используется?

16. Пусть исх. задача состоит в опт. использовании ресурсов. Дайте экнч-ю интерпретацию дв-ой задачи.

17. В чем состоит сущность дв. симплексного метода?

Задание для кр. работы: решить методом искусственного базиса и методом полного исключения задачи 1–20, полагая все $x_j \geq 0$.

1. $Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 10(\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{array}\right\}$$

2. $Z = x_1 + x_2 - x_3 + 3{,}5x_4 + 5(\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12 \end{array}\right\}.$$

3. $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 + 4(\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{array}\right\}.$$

4. $Z = 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + 500(\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 - 3x_2 + 2x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \end{array}\right\}.$$

5. $Z = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 + 10(\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{array}\right\}.$$

6. $Z = -10x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 - 20x_6 + 50(\max)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 1 \\ x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1 \end{array}\right\}.$$

7. $Z=-x_1-x_2-x_3-4x_4+2x_5+32(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=22 \\ -x_1+x_2+x_3-3x_4+4x_5=14 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \end{array}\right\}$$

8. $Z=-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5-10x_6+100(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_6=16 \\ x_2+2x_3+4x_4+5x_5=16 \\ 8x_1+7x_2+6x_3+6x_4+5x_5+2x_6=48 \\ -4x_1+4x_3+11x_4+13x_5-4x_6=32 \end{array}\right\}.$$

9. $Z=-x_1-x_2+4x_3+7x_4-x_5+2x_6+6(\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2-11x_3-12x_4-2x_5+x_6=7 \\ x_1+x_2-4x_3-5x_4-x_5-2x_6=3 \\ 2x_1+x_2-7x_3-7x_4-2x_5-x_6=4 \end{array}\right\}.$$

10. $Z=-2x_1-2x_2+14x_3+14x_3-2x_5+4x_6+12(\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} 9x_1+6x_2-33x_3-36x_4-6x_5+3x_6=21 \\ 2x_1+2x_2-8x_3-10x_4-2x_5-4x_6=6 \\ 2x_1+x_2-7x_3-7x_4-2x_5-x_6=4 \end{array}\right\}.$$

11. $Z=3x_1+2x_2-4x_3-6x_4-3x_5+6(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+3x_3-x_4-x_5-2x_6=6 \\ x_1+2x_2+7x_3+x_5+2x_6=8 \\ x_1+2x_2+7x_3-x_5=8 \\ 2x_1+3x_2-6x_3-x_4=14 \end{array}\right\}.$$

12. $Z=3x_1+2x_2-14x_3-6x_4-7x_5-3x_6+4(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+4x_4+x_5-x_6=4 \\ x_1+2x_2+x_3+9x_4-x_5-2x_6=5 \\ x_1+x_2-2x_3+4x_4-2x_6=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3+13x_4-3x_6=9 \end{array}\right\}.$$

13. $Z=3x_1+2x_2-2x_3-8x_5-3x_6+4(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+2x_6=4 \\ x_1+2x_2+4x_3+3x_4-x_5+2x_6=5 \\ x_1+2x_2+4x_3+3x_4-2x_5=5 \\ x_2+3x_3+2x_4-2x_5+4x_6=1 \end{array}\right\}$$

14. $Z=3x_1+2x_2-4x_3+2x_4-x_5-3x_6+5(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5+2x_6=5 \\ x_1+2x_2+5x_3+5x_4+x_5-x_6=6 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5+x_6=5 \\ x_2+4x_3+3x_4-x_5-3x_6=1 \end{array}\right\}.$$

15. $Z=3x_1+2x_2-14x_3-6x_4-x_5-7x_6+7(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5+3x_6=7 \\ x_1+2x_2+x_3+6x_4+x_5+x_6=11 \\ x_1+2x_2+x_3+6x_4=11 \\ x_2+3x_3+5x_4-2x_6=4 \end{array}\right\}.$$

16. $Z=3x_1+2x_2-6x_3-8x_4-x_5+x_6+4(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3-x_4-2x_5+3x_6=4 \\ x_1+2x_2+x_4+4x_5-2x_6=7 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-4x_5+x_6=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_5+x_6=11 \end{array}\right\}.$$

17. $Z=3x_1+2x_2-18x_3+2x_4-5x_5-3x_6+3(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2-4x_3+3x_4+5x_5+x_6=3 \\ x_1+2x_2-3x_3+8x_4-x_5-3x_6=5 \\ x_1+x_2-4x_3+3x_4-x_5-2x_6=3 \\ 2x_1+3x_2-7x_3+11x_4-2x_5-5x_6=8 \end{array}\right\}.$$

18. $Z=3x_1+2x_2-2x_3-16x_4+x_5-x_6+8(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3-3x_4-3x_5+2x_6=8 \\ x_1+2x_2+4x_3-x_4-x_5+x_6=13 \\ x_1+x_2+x_3-3x_4-4x_5-3x_6=8 \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4-5x_5-2x_6=21 \end{array}\right\}.$$

19. $Z=3x_1+2x_2-14x_3-3x_5-8x_6+3(\max)$, 20. $Z=3x_1+2x_2-10x_3-2x_4-4x_5-3x_6+3(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5-x_6&=3\\ x_1+2x_2-2x_3+6x_4+2x_5-3x_6&=5\\ x_1+x_2-3x_3+2x_4-2x_5-3x_6&=3\\ 2x_1+3x_2-5x_3+8x_4-6x_6&=8 \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3+x_4-2x_5+3x_6&=3\\ x_1+x_2-x_3+4x_4+x_5-x_6&=5\\ x_1+x_2-2x_3+x_4-3x_5+x_6&=3\\ 2x_1+3x_2-3x_3+5x_4-2x_5&=8 \end{aligned}\right\}.$$

O: 1. $X^*=(9,7,0)$, Zmin $=44$. 2. $X^*=(0,6,0,6)$, Zmax $=32$. 3. $X^*=(3,1,0,0)$, $Z_{\min}=5$.

4. $X^*=(0,125,25,0)$, $Z\min=975$. 5. $X^*=(5,0,0,10,0)$,

$Z_{\max}=20$. 6. $X^*=(0,0,0,1,2,0)$, $Z_{\max}=72$.

7. $X^*=(5,0,3,7)$, $Z_{\max}=29$. 8. $X^*=(3,0,0,4,0,0)$,

$Z_{\max}=93$. 9. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$, $Z_{\min}=3$.

10. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$, $Z_{\min}=6$. 11. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$,

$Z_{\max}=22$.12. $X^*=(3,1,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=15$.

13. $X^*=(3,1,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=15$. 14. $X^*=(4,1,0,0,0,0)$,

$Z_{\max}=19$. 15. $X^*=(3,4,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=24$.

16. $X^*=(1,3,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=13$. 17. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$,

$Z_{\max}=10$. 18. $X^*=(3,5,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=27$.

19. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=10$. 20. $X^*=(1,2,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=10$.

* * *

21. $Z=3x_1+2x_2-6x_3-4x_4-3x_5-6x_6+4(\max)$, 22. $Z=3x_1+2x_2+2x_3-18x_4-4x_5-6x_6+8(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5&=4\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5+x_6&=5\\ x_1+x_2-x_3+3x_4-x_6&=4\\ 2x_1+3x_2+x_3+5x_4+x_5&=9 \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-4x_4+x_5-2x_6&=8\\ x_1+2x_2+5x_3-3x_4+2x_5-x_6&=13\\ x_1+2x_2+5x_3-3x_4+x_5-2x_6&=13\\ x_2+3x_3+x_4+x_5+x_6&=5 \end{aligned}\right\}.$$

O: 21. $x^*=(3,1,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=15$. 22. $x^*=(3,5,0,0,0,0)$, $Z_{\max}=27$.

23. Составить дв-ые задачи к сд-им исходным и показать взаимосопряженность ств-их пар задач:

1) $Z=x_1-2x_2+3x_3-x_4(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_4&=8\\ x_2+x_3-3x_4&=6 \end{aligned}\right\},$$

$x_j\ \geq\ 0, j\ =\ \overline{1,4}.$

2) $Z=3x_2-x_4(\max)$

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_4&=8\\ x_2+x_3-3x_4&=6 \end{aligned}$$

$x_j\ \geq\ 0, j\ =\ \overline{1,4}.$

3) $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5\,(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &\geq 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &\leq 4 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

4) $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_4\,(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 - 3x_4 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

5) $Z = -x_1 + x_2 + x_3\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 1 \end{aligned}\right\},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

6) $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3\,(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 2 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 .$$

24. Опр-ть, яв-ся ли данные векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ опт. решениями данной задачи и дв-ой к ней:

1) $Z = x_1 + 10x_2 + 8x_3\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3},$$

$$\overline{x} = (1,0,1), \overline{y} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

2) $Z = x_1 + 4x_2 + x_3\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}\right\},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3},$$

$$\overline{x} = (1,0,2), \overline{y} = \left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right).$$

Ук: составить дв. задачу и проверить, уд-ет ли ее огр-ям вектор $\overline{y}$. Если да, то сравнить значения $Z\left(\overline{x}\right)$ и $q\left(\overline{y}\right)$.

25. Решить дв. задачу, используя решение исх-ой задачи с помощью симплексной таблицы: $Z = 2x_1 + x_2\,(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\ 6x_1 + 5x_2 &\geq 30 \end{aligned}\right\},$$

$$x_2 \geq 0. \qquad O: y^* = \left(\frac{5}{19}, 0, \frac{2}{19}\right),\ q_{\min} = -\frac{126}{19}.$$

26. Решить задачу, используя данные симплексной табл. при решении дв. задачи: $Z = 2x_1 + x_2\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\ 6x_1 + 5x_2 &\geq 30 \end{aligned}\right\},$$

$$x_2 \geq 0 .$$

Задание для кр. работы:

27. В сд. задачах дать геом. интерпретацию исх-й и дв-й задач и найти опт. решения для разрешимых задач:

1) $Z = x_1 + x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \end{matrix}\right\}$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2) $Z = 2x_1 + x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{matrix}\right\}$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

3) $Z = 2x_1 + x_2\,(\min)$ $\left.\begin{matrix} 3x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5 \end{matrix}\right\}$

4) $Z = 3x_1 + x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3 \end{matrix}\right\}$, $x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$

5) $Z = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{matrix}\right\}$, $x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$

6) $Z = x_1 - x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \end{matrix}\right\}$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

О: 1) $x^* = (3, 3), y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Z_{\max} = q_{\min} = 6.$

2) $Z_{\max} \to \infty$. 3) $x^* = (1, 2), y^* = \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right)$, $Z_{\min} = q_{\max} = 4$,

4) $x^* = (10, 7, 0, 0), y^* = (4,7)$, $Z_{\max} = q_{\min} = 37$,

5) $x^* = (4, 4, 0, 0)$, $y^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$, $Z_{\max} = q_{\min} = 8$,

6) $x^* = (1, 0), y^* = (1, 0), Z_{\max} = q_{\min} = 1$.

28. Решить дв-ые задачи, используя решение исх-х задач с помощью симплексных таблиц:

1) $Z = 4x_1 + 2x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \end{matrix}\right\}$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

2) $Z = 2x_1 + 3x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{matrix}\right\}$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

3) $Z = x_1 - 2x_2\,(\max)$, $\left.\begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{matrix}\right\}$, $x \ge 0, x_2 \ge 2$.

4) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5\,(\max)$ $\left.\begin{matrix} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{matrix}\right\}$, $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$

5) $Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4\,(\min)$, $\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$, $x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

6) $Z = 2x_1 + x_2\,(\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + \;\; x_2 \ge 5 \end{array}\right\}.$$

$$x_1 \ge 0.$$

7) $Z = 2x_1 + x_2\,(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 - \;4x_2 \le 4 \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 30 \end{array}\right\},$$

$$x_2 \ge 0.$$

О: 1) $y^* = \left(0,\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $q_{\min} = 30$. 2) Обл. пустая. 3) $y^* = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $q_{\min} = 4$. 4) $y^* = (3,\ 4,\ 1)$, $q_{\min} = 1$. 5) $q_{\max} \to \infty$. 6) $y^* = \left(\frac{1}{5},\ \frac{8}{5}\right)$, $q_{\max} = \frac{34}{5}$. 7) Обл. пустая.

29. Решить сд. задачи, используя данные симплексных таблиц при решении дв-ых задач:

1) $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3\,(\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - \;2x_2 + \;\; x_3 \ge 5 \\ x_1 + \;\; x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \;-\;\; x_3 \ge 2 \end{array}\right\},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

2) $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4\,(\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 - \;2x_3 + x_4 \ge 6 \\ -x_1 \;\;+\;\; x_3 \le 2 \\ 2x_2 - \;3x_3 + 2x_4 \le 8 \end{array}\right\},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

3) $Z = x_1 - 2x_2\,(\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \qquad\quad \ge 10 \\ -2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \ge 12 \end{array}\right\},$$

$$x_2 \ge 2$$

4) $Z = 3x_1 + x_2 + x_3\,(\max)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 \;-\;\; x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - \;x_3 = 4 \end{array}\right\}.$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

5) $Z = -2x_2 - 4x_3 + 2x_5\,(\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \;3x_2 + 6x_3 + x_4 + 10x_5 + x_6 = 29 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - \;x_4 + \;\;2x_5 \qquad\;\; = -5 \\ 2x_1 \qquad + \qquad x_3 + \;x_4 - \;8x_5 - \;\; x_6 = 2 \end{array}\right\}$$

$$,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

6) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4\,(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad = 10 \\ x_1 \;\;+\;\;\;\; x_3 + x_4 = 7 \\ -3x_1 \;-\;\;\; 2x_3 + x_5 = 4 \end{array}\right\},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

7) $Z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4\,(\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - \;\;\; x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - \;\;\; x_4 = 4 \\ 2x_1 \;\;\;+\;\;\;\; x_3 + \;\; x_4 = 6 \end{array}\right\}.$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

О: 1) $X^* = (4{,}55;\ 9{,}22;\ 0{,}92)$, $Z_{\min} = 17{,}9$. 2) $X^* = (6,\ 0,\ 0,\ 0)$, $Z_{\min} = 6$. 3) $X^* = (12,\ 0)$, $Z_{\min} = 12$. 4) $X^* = (0, 9, 15)$, $Z_{\max} = 24$. 5) $X^* = (4{,}5; 0; 0; 12; 1{,}25; 0)$, $Z_{\max} = 2{,}5$. 6) $X^* = (0,\ 31,\ 7,\ 0,\ 18)$, $Z_{\max} = 38$. 7) $X^* = (0;\ 0{,}4;\ 3{,}2;\ 2{,}8)$, $Z_{\max} = 0$.

* * *

30. Дан вектор $\overline{X}=(3,0,1,3)$. Опр-ть, яв-ся ли он опт. решением ед-их задач:

1) $Z=-2x_1-x_2+x_3+x_4\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=2\\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4&=6\\ x_1-3x_2-2x_3-x_4&=-2 \end{aligned}\right\}$$

$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$

2) $Z=2x_1-x_2+4x_3-6x_4\,(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_3+2x_4&=11\\ x_1+x_2-x_4&=0\\ 2x_1-2x_3+3x_4&=13 \end{aligned}\right\}$$

$x_j\geq 0\ \ j=\overline{1,4}.$

3) $Z=2x_1-x_2+4x_3-6x_4\,(\max)$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2\qquad+2x_4&\leq 15\\ x_1+2x_2-x_3-x_4&\geq -4\\ x_2+3x_3-x_4&\geq 0 \end{aligned}\right\}\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

О: 1) да. 2) да. 3) нет.

31. Предприятие должно выпустить три вида продукции (А, Б и В) в стн.1:2:3. При этом используются трудовые ресурсы, имеющиеся в наличии в кол-ве 200 ед., и часть производственной продукции как внутрипроизводственное потребление.

В сд-ей табл. приведены данные о коэф-ах внутрипроизводственных затрат и затрат труда на производство единицы ств-ей продукции:

Ресурсы	Норма затрат		
	А	Б	В
А	–	0,5	0,2
Б	–	–	0,2
Труд	2	3	1

1. Опр-ть опт. план предприятия из условия мксз-ции конечной продукции.

2. Составить и истолковать экономически дв-ю задачу.

3. Вычислить и сопоставить оценки единиц каждого из видов продукции и единицы трудовых ресурсов. Оценить с их помощью весь выпуск продукции предприятия по опт. плану.

4. Опр-ть, на сколько изменится выпуск продукции при увеличении трудовых ресурсов на 10 ед., уменьшении на 5 ед.

О: 1) $x^*=(70,\ 31,\ 36)$. 3) $a_{01}=a_{02}=a_{03}=0$, $a_{02}=a_{04}=0{,}3$. 4) $\vartriangle Z=3{,}6$.

32.В сд-ей табл. указано кол. изделий А и Б, к-ое может быть изготовлено из каждой единицы сырья одним из четырех технологических способов:

Изделия	Выход на ед. сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

1. Опр-ть мнм. кол-во сырья, позволяющее изготовить 574 шт. изделий А и 328 шт. Б, и используемые при этом технологические способы.

2. Построить и сформулировать экономически дв-ю задачу.

3. Опр-ть оценки каждого вида изделий и единицы используемого сырья и оценить с их помощью каждый из четырех технологических способов.

4. Как изменилось бы оценки изделий А и Б, если бы их нх-мо было изготовить в кол-вах 600 и 394 шт. ств-но? Как изменилось бы при этом мнм. кол-во сырья?

5. Опр-ть, как распределяются затраты сырья между изделиями А и Б.

6. В каком стн. изменится кол-во изделий А и Б, если сохраняя общее мнм. кол-во сырья, изменить по сравнению с опт. планом кол-во сырья, обрабатываемого по I и II способам?

7. Целесообразна ли точка зрения предприятия замена двух изделий А на три изделия Б? Как при этом изменится общее кол. обрабатываемого сырья?

О: 1) 94, $x_2=14$ и $x_3=8$. 3) оценки изделий 5/41 и 3/41, сырья1. 4) 1+е изменились бы, 102. 5) в отн. 5:3. 6) в отн. 5:3 7) целесообразна (2x5/41>3x3/41).

33. Каждое из двух предприятий (А и Б) может производить три вида изделий (I,II и III). В сд-ей табл. приведены данные о годовой производительности в тыс. шт. и затратах на единицу изделия в руб. при изготовлении одного изделия.

Предприятия	Производительность			Затраты		
	I	II	III	I	II	III
А						
Б						

1. Опр-ть опт. распределение изделий по предприятиям (т.е. время работы каждого предприятия по каждому из изделий) из условия мксз. числа комплектов, в каждой из к-ых изделия I, II и III входят в стн. 1:2:2.

2. Составить дв-ю задачу и опр-ть оценки каждого изделия и единицы рабочего времени каждого предприятия.

3. Опр-ть, какую цену следует установить на каждое изделие, если цена комплекта равна 50 руб.

4. Показать, каким образом, руководствуясь этими ценами, можно опр-ть опт. распределение производства.

О: на вопросы (1) и (2) (над диагональю доли времени, под ней число изделий):

Изделия Предприятия	I	II	III	Оценки раб. времени
А	0,274 137	0 0	0,726 290	0,97
Б	0,032 8	0,968 290	0 0	0,48
Всего	145	290	290	
Оценки изделий	$19 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-4}$	

3) пропорционально оценкам: 9,4; 7,9; 12,4.

34. Применяя дв-ый симплексный метод, решить (записать опт. планы исходной и дв-ой задач) задачи (все $x_j \geq 0$):

1) max Z $\quad Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4,$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4 \end{array}\right\}$$

2) min Z $\quad Z = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3,$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \qquad\quad \geq 12 \end{array}\right\}$$

3) min Z $\quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3,$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \end{array}\right\}$$

4) max Z $\quad Z = 5x_1 - x_2 - 4x_3,$

$$\left.\begin{array}{l} -x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad \geq 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 \leq 4 \end{array}\right\}$$

3.5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Сформируйте тр. задачу ЛП и напишите ее мт-ю модель.

2. Док-те теорему о сущ. решения тр-ой задачи.

3. Какие сущ. методы построения первоначального опорного плана? Постройте опорный план с помощью этих методов.

4. Сколько плж-ых перевозок должен содержать невырожденный опорный план и почему?

5. В чем заключается опорность тр-ой задачи, условия к-ой записаны в виде табл.?

6. В чем состоит суть распределительного метода решения тр-ых задач?

7. Как решается тр. задача симплекс методом?

8. Дайте опр-ие системе потенциалов, расскажите, как она строится.

9. В каком случае опорный план тр. задачи яв-ся опт-ым?

10. Какая модель тр. задачи наз. закрытой, а какая – открытой?

11. Как открытую модель преобразовать в закрытую?

12. Как решается открытая тр. задача?

13. Какие экономические задачи относятся к задачам цлч-го прг-ия?

14. Сформулируйте задачу целочисленного прг.

15. В чем состоит метод Гомори?

16. Как составить дополнительное огр., если компоненты опт-го плана яв-ся дробными?

17. Какой геом. смысл имеет введение дополнительного огр-я?

18. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?

19. Сформулируйте задачу опт-го раскроя материалов и составьте ее мт-ю модель.

20. Сформулируйте задачу опт. использования оборудования и составьте ее мт-ю модель.

Задания для кр-ых работ: 1) Найти опорный план по схеме северо-западного угла и решить распределительным методом тр. задачи 1–20. 2) найти опорный план по схеме мнм-ой стоимости и решить симплекс-методом тр. задачи 2–21; 3) найти опорный план по схеме двойного предпочтения и решить методом потенциалов тр. задачи 3–22.

1

a_j b_i	4	12	8
2	5	8	4
14	4	5	3
8	4	2	5

2

a_j b_i	40	30	20
20	1	2	5
30	4	3	4
40	8	5	1

3

a_j b_i	70	40	50
90	9	5	7
20	8	8	4
50	10	7	4

4

a_j b_i	16	8	12
3	15	24	12
21	12	15	9
12	12	6	15

5

a_j b_i	8	24	16
4	15	24	12
16	12	6	15
28	12	15	9

6

a_j b_i	4	12	8
2	15	24	12
14	12	15	9
8	12	6	15

7

a_j b_i	30	20	40
20	3	5	2
20	4	4	1
50	4	4	6

8

a_j b_i	7	13	10
10	3	5	2
10	6	6	4
10	9	10	6

9

a_j b_i	10	30	20
5	10	16	8
20	8	4	10
35	8	10	6

10

a_j b_i	6	18	12
3	10	16	8
12	8	4	10
21	8	10	6

11

a_j b_i	6	18	12
3	10	16	8
21	8	10	6
12	8	4	10

12

a_j b_i	8	24	16
10	10	16	8
16	8	4	10
22	8	10	6

13

a_j b_i	18	17	15
10	10	10	10
20	8	5	11
20	8	4	14

14

a_j b_i	2	6	4
1	5	8	4
4	4	2	5
7	4	5	3

15

a_j b_i	20	40	30
20	2	3	4
10	1	1	1
50	2	4	2

16

a_j b_i	17	33	50
50	6	1	4
20	2	2	3
30	5	4	6

17

a_j b_i	14	42	28
49	4	5	3
7	5	8	4
28	4	2	5

18

a_j b_i	10	30	20
5	5	8	4
20	4	2	5
35	4	5	3

19

a_j b_i	15	17	18
10	1	1	1
30	2	4	5
10	1	4	3

20

a_j b_i	30	60	30
40	4	8	11
60	6	6	7
20	5	10	15

21

a_j b_i	90	90	40
60	4	4	4
80	5	8	6
80	3	8	5

22

a_j b_i	70	60	60
70	3	2	3
20	1	4	3
100	10	5	4

23

a_j b_i	15	30	35
20	10	18	4
40	9	5	8
20	6	4	10

24

a_j b_i	80	50	50
50	1	3	6
30	2	8	7
100	5	4	3

Задания для кр. работы: решить цлч. задачи 25–35 и частично цлч-ые 36–44, сопровождая (где это возможно) решение графической иллюстрацией (предполагается, что все $x_j \geq 0$).

25. $Z = 3x_1 + 3x_2 (\max)$,
$x_1 + 3x_2 \geq 6$
$3x_1 + 2x_2 \leq 36$
$x_2 \leq 13$

26. $Z = 3x_1 + 4x_2 (\max)$,
$3x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 + 4x_2 \leq 10$

27. $Z = x_1 + x_2 (\max)$,
$3x_1 + 2x_2 \leq 5$
$x_2 \leq 2$

28. $Z = x_1(\max),$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=12\\ 3x_1-8x_2+x_4&=24 \end{aligned}$$

29. $Z = x_1(\max),$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=9\\ -4x_1+7x_2+x_4&=4\\ 5x_1-6x_2+x_5&=6 \end{aligned}$$

30. $Z = 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4(\max),$

$$\begin{aligned} x_1-2x_2\qquad+x_4\qquad&=3\\ x_2+x_3-2x_4\qquad&=5\\ 3x_2\qquad+x_4+x_5&=4 \end{aligned}$$

31. $Z = x_1-x_2+x_3-x_4(\max),$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4&=6\\ x_2+x_3-x_4&=4\\ 2x_1\qquad+x_3+x_4&=8 \end{aligned}$$

32. $Z = x_1+2x_2+x_5(\min),$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=5\\ x_2+x_3+x_4-x_5&=2\\ x_3-x_4+x_5&=1 \end{aligned}$$

33. $Z = 2x_1+2x_2+10(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3\qquad&=5\\ 2x_1+3x_2\qquad+x_4&=9 \end{aligned}\right\}$$

34. $Z = x_1+x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3\qquad&=6\\ 2x_1+3x_2\qquad+x_4&=9 \end{aligned}\right\}$$

35. $Z = x_1-x_2+x_3+x_4+x_5-x_6(\min),$

$$\left.\begin{aligned} x_1\qquad+x_4\qquad+6x_6&=9\\ 3x_1+x_2-4x_3\qquad+2x_6&=2\\ x_1+2x_2\qquad+x_5+2x_6&=6 \end{aligned}\right\}$$

36. $Z = 4x_1+5x_2(\min),$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2&\ge 2\\ x_1+4x_2&\ge 5\\ 3x_1+2x_2&\ge 7 \end{aligned}\right\}$$

37. $Z = 4x_1+5x_2+x3(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2\qquad+x_4\qquad&=10\\ x_1-4x_2\qquad+x_5\quad&=11\\ 3x_1+3x_2+x_3\qquad+x_6&=13 \end{aligned}\right\}$$

38. $Z = 3x_1+x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3\qquad&=6\\ 2x_1-3x_2\qquad+x_4&=3 \end{aligned}\right\}$$

39. $Z = x_1+2x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&\le 7\\ 2x_1&\le 11\\ 2x_2&\le 7 \end{aligned}\right\}$$

40. $Z = 6x_1+x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} -2{,}9x_1+6x_2&\le 17{,}4\\ 3x_1+x_2&\le 1 \end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2 - \text{цлч-ые.}$

41. $Z = x_1(\max),$

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2&\le 12\\ 3x_1-8x_2&\le 24 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 - \text{цлч.}$

42. $Z = 0{,}25x_1+x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5x_1+x_2&\le 1{,}75\\ x_1+0{,}3x_2&\le 1{,}5 \end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2 - \text{цлч.}$

43. $Z = x_1+x_2(\max),$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&\le 4\\ 2x_1+2x_2&\le 4 \end{aligned}\right\}$$

$x_2 - \text{цлч.}$

44. $Z = -5x_1+10x_2-7x_3+3x_4(\max),$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+7x_3+2x_4&=3{,}5\\ -2x_1+x_2+3x_3+3x_4&=1{,}5\\ 2x_1+2x_2+8x_3+x_4&=4 \end{aligned}\right\}$$

$x_2 - \text{цлч.}$

О: 25 . $x^*=(3,13)$, $Z_{\max}=48$; 26. $x^*=(1,2)$, $Z_{\max}=11$; 27. $x^*=(0,2)$ *или* $x^*=(1,1)$, $Z_{\max}=2$; 28. $x^*=(9,1)$, $Z_{\max}=9$; 29. $x^*=(5,3)$, $Z_{\max}=5$; 30. $x^*=(0,0,11,3,1)$, $Z_{\max}=24$; 31. $x^*=(2,2,3,1)$, $Z_{\max}=2$; 32. $x^*=(1,3,0,0,1)$, $Z_{\min}=2$;

33. $x^* = (0,3,2,0)$, *или* $x^* = (1,2,1,1)$, *или* $x^* = (2,1,0,2)$, $Z_{\max} = 16$; 34.$x^* = (0,3,3,0)$, *или* $x^* = (1,2,2,1)$, *или* $x^* = (2,1,1,2)$, *или* $x^* = (3,0,0,3)$, $Z_{\max} = 3$; 35. $x^* = (1,1,1,2,1,1)$, $Z_{\min} = 3$; 36. $(2,1,3,1,1)$, $Z_{\min} = 13$; 37. $(2,2,1,0,1,0)$, $Z_{\max} = 19$; 38. $(1,1,1,4)$, $Z_{\max} = 4$; 39. $(4,3,0,3,1)$, $Z_{\max} = 10$; 40. $(0,2)$, $Z_{\max} = 2$; 41. $x_1 = 9$, $\frac{3}{8} \le x_2 \le 1$, $Z_{\max} = 9$;

42. $(1,1)$, $Z_{\max} = 1{,}25$; 43. $\left(\frac{3}{2},1\right)$, $Z_{\max} = 2{,}5$; 44. $\left(0,1,\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$, $Z_{\max} = \frac{65}{6}$;

45. Решить цлч. задачи:

1) $Z = 3x_1 + 4x_2 (\max)$,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

2) $Z = x_1 + x_2 (\max)$,

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 11x_2 + x_3 \qquad &= 38 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

46. Решить частично цлч. задачу:

$Z = 8x_1 + 6x_2 (\max)$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 &- \textit{цлч} \end{aligned}$$

О: *1)* (1, 2, 1, 1), $Z_{\max} = 11$; 2) (2, 3, 1, 2, 12), $Z_{\max} = 5$. *О*:$\left(0, \frac{82}{57}, 1, \frac{89}{19}, \frac{278}{190}\right)$, $Z_{\max} = \frac{499}{57}$

47. Прб-ть задачи 40 и 42 в цлч-ые и сравнить их решения с предыдущем

$$O: \left.\begin{aligned} -29x_1 + 60x_2 + x_3 &= 174 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 50x_1 + 100x_2 + x_3 \qquad &= 175 \\ 10x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 175 \end{aligned}\right\}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 – *неотр. и цлч.* $\qquad$ x_1, x_2, x_3, x_4 – *неотр. и цлч.*

Задание для кр. работы: решить задачи с неделимостью 48–52 и с альтернативными пер. 53–67.

48. Составить модель задачи по опр-ю опт-го плана производства *n* типов машин заданных объемах $в_{\text{i}}$ ($i = \overline{1,m}$) ресурсов, норм расхода a_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) *i*-го ресурса на производство одной j-й машины и вел-ах C_j ($j = \overline{1,n}$) прибыли при реализации одной машины *j*-го типа.

49. Имеется m типов машин ($i = \overline{1,m}$) и n видов работ ($j = \overline{1,n}$), подлежащих выполнению в объемах a_j ($j = \overline{1,n}$). Заданы матрицы $\|\lambda_{ij}\|$, $\|C_{ij}\|$, где λ_{ij} – производительность *i*-й машины на *j*-й работе. C_{ij} – себестоимость выполнения ед-ы *j*-й работы машиной *i*-го типа, и стоимость c_i одной машины *i*-го типа.

Составить мт-ю модель задачи по опр-ю опт-го машинного парка (т.е. кол-во машин каждого типа) и опт-го его распределения по указанным работам из условия мнмз-ции суммарной стоимости (машинного парка и производимых работ).

Ук. Ввести пер-ые: y_i – общее число машин *i*-го типа и x_{ij} машин *i*-го типа, используемых на *j*-й работе; последние могут и не быть цлч-ми, если производительность машины λ_{ij} не кратна объему работы a_j.

50. Имеются суда m типов в кол-ах $в_i$ $(i=\overline{1,m})$, на каждом из к-ых имеются n грузовых емкостей $(j=\overline{1,n})$ с грузоподъемностью d_{ij} (нек-ые d_{ij} могут быть равны нулю. Подлежит перевозке r видов грузов в кол-ах $q_к$ $(k=\overline{1,r})$.

Составить мт-ю модель задачи по выбору опт-го состава судов, если затраты по эксплуатации одного суда i-го типа равна c_i.

51. Имеется n маршрутов, по каждому из к-ых нх-мо совершить a_j $(j=\overline{1,n})$рейсов и m типов машин, каждая из к-ых может быть использована в течении $в_i$ $(i=\overline{1,m})$ часов. На выполнение i-й машиной рейса по j-му маршруту требуется t_{ij} часов при затратах C_{ij} руб. Составить модель задачи опт-го распределения машин по маршрутам.

52. Требуется распилить а бревен, длиной каждое в 10 м, на брусья трех размеров: 3,5; 4,5 и 5 м, к-ые должны быть изготовлены в ассортименте 2:1:1. Составить модель опр-ия опт-го плана распила из условия мкс-го использования каждого бревна.

53. Имеются 4 механизма A_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ различных типов, к-ые нх-мо распределить между 4-мя работами B_i $\left(I=\overline{1,4}\right)$. Известен ожидаемый эффект $C_{ij}=\begin{pmatrix}7&5&8&4\\12&4&3&10\\6&9&11&5\\3&7&12&3\end{pmatrix}$ от использования j-го механизма i-й на работе. Механизмы назначить так, чтобы суммарный эффект был мкс-ым.

54. Составить мт-ю модель и решить задачу коммивояжера при сд-их числовых данных: $n=3$, $c_{01}=15$, $c_{02}=30$, $c_{03}=20$, $c_{12}=40$, $c_{13}=10$, $c_{23}=50$.

55. Найти опт. план обработки 10 деталей на двух станках при сд-ей матрице $//t_{ij}//$:

j i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15	14	12	20	25	5	9	16	30	8
2	23	18	10	17	8	40	16	6	20	12

О: 6,10,7,2,1,9,4,3,5,8; $T_{\min}=175$.

56. Составить модель задачи ЦП по данным: $в_1=50$, $в_2=40$, $в_3=100$, $a_1=60$, $a_2=40$, $a_3=90$, $//c_{ij}//=\begin{pmatrix}6&5&11\\5&6&7\\9&8&6\end{pmatrix}$, $//d_{ij}//=\begin{pmatrix}2&3&2\\4&0&5\\0&2&3\end{pmatrix}$.

57. Составить модель задачи опт-го размещения и решить её по сд-им данным $n=3$, $m=2$, $p_1=2$, $p_2=3$, $в_{11}=110$, $в_{12}=140$, $в_{21}=80$, $в_{22}=90$, $в_{23}=100$, $a_1=90$, $a_2=30$, $a_3=80$, $//c_{ij}//=\begin{pmatrix}6&5&10\\4&8&5\end{pmatrix}$. См. [45], стр. 202.

58. Составить модель задачи опч-го размещения и решить ее по сд-им данным: $n = 3$, $m = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $в_{11} = 115$, $в_{12} = 150$, $в_{13} = 10$, $в_{21} = 80$, $в_{22} = 100$, $a_1 = 80$, $a_2 = 50$, $a_3 = 70$, $//c_{ij}// = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

59. Для уд-ия спроса и потребителей, в кол. a_j ($j = 1,n$) ед. продукции могут быть частично использованы имеющиеся предприятия-поставщики, а частично предприятия, реконструируемые или вновь строящиеся. Реальные или проектируемые производственные мощности этих предприятий составляют b_i $i = \left(\overline{1,m}\right)$. Задана матрица $//c_{ij}//$ тр-ых затрат на доставку продукции и вектор $C = (c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_m)$, где c_i – производственные затраты на ед-у продукции. Кроме того имеются еще «фиксированные» затраты d_i, связанные с реконструкцией или со строительством новых предприятий (доля общих капиталовложений, рассчитанная на планируемый период, исходя из общего срока окупаемости). Эти фиксированные затраты $d_i = 0$, если $b_i = 0$, т.е. если i-й поставщик в плане не предусматривается, и $d_i > 0$, если $b_i > 0$. Для имеющихся предприятий ств-щее $d_i = 0$, вне зв-ти от b_i.

Составить модель задачи по опр-ю опт-го плана размещения производства и транспортировки продукции из условия мнмз-ции суммарных затрат.

Ук. Ввести альтернативные пер. $y_i = \begin{cases} 0, если\ b_i = 0, \\ 1, если\ b_i > 0, \end{cases}$ к-ые войдут в огр-ия по строкам (подобно задаче 57) и в целевую фк. (как в тр. задаче фиксированными доплатами).

60. Общую сумму капиталовложений К нх-мо распределить между n объектами $(j = \overline{1,n})$, потребности к-ых измеряются суммами $a_j (j = \overline{1,n})$, а ожидаемые прибыли $c_j (j = \overline{1,n})$. На каждый объект капиталовложения либо выделяются в необходимой сумме, либо совсем не выделяются.

Составить модель задачи ЦП, заключающейся в опт-ом распределении капиталовложений.

61. Решить предыдущую задачу при сд-ых данных:

$$n = 5, K = 1200, a_1 = 420, a_2 = 180, a_3 = 240, a_4 = 560, a_5 = 300, c_1 = 80, c_2 = 65,$$

$$c_3 = 90, c_4 = 210, c_5 = 150.$$ *О*: III–240, IV–560, V–300, $Z_{\max} = 450$.

62. Решить задачу 60 при сд-их данных: $n=5$, $K=1400$, $a_1=410$, $a_2=200$, $a_3=230$, $a_4=540$, $a_5=300$, $c_1=90$, $c_3=70$, $c_3=85$, $c_4=200$, $c_5=160$.

63. Фабрика может производить n = 3 различных продуктов ($j = \overline{1,3}$), располагая для этого m = 2 видами ресурсов в кол. $b_i (i = 1,2)$ и при этом могут быть использованы S = 2 технологических способов (k = 1,2). Заданы вел. a_{ij}^{K} – нормы расхода i-го ресурса на ед. j-го продукта при изготовлении его к-м способом, и цена c_i ед-ы j-го продукта.

Составить модель задачи по опр-ю набора продуктов и способов их производства из условия мксз. товарной продукции при дан-ом условии, что 3-й продукт либо производится в кол. не менее a_3 ед., либо совсем не производится при сд-их данных: $c_1 = 10,\ c_2 = 20,\ \ c_3 = 8,\ a_3 = 40.$ Значения $в_i$ и a_{ij}^K приведены в сд. таблице

Ресурсы	I способ			II способ		
	j=1	*j*=2	*j*=3	*j*=1	*j*=2	*j*=3
1400	14	7	10	16	14	7
1000	7	10	14	7	21	10

63. Найти решение модели предыдущей задачи.

64. Решить предыдущую задачу при сд-их данных: $n=3, m=2, c_1 = 11,$ $c_2 = 24,\ c_3 = 10,\ a_2 = 60,$ 2-й продукт либо производится в кол. не менее 60 ед. либо совсем не производится. Значения $в_i$ и a_{ij}^K даны в сд. табл.

Ресурсы	I способ			II способ		
	j=1	*j*=2	*j*=3	*j*=1	*j*=2	*j*=3
1000	16	6	8	14	7	10
600	12	10	8	15	9	12

65. (Задача с невыпуклыми областями). Привести к цлч-ой задачу $Z = x_1 + x_2$ в обл., изображенной на рис. 1 и описанный альтернативными условиями: или обл. I $3x_2 + 2x_2 \le 24, x_1 \ge 5, x_2 \ge 0,$ или обл. II $x_1 + x_2 \le 16,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 6.$

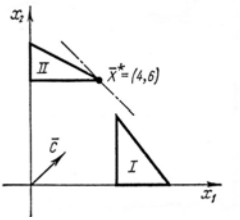


Рис. 1

Ук. Для описания этой обл. ввести альтернативные пер. $y_1 = \begin{cases} 0, \textit{если точка принадлежит обл. I} \\ 1, \textit{если} - \textit{обл. II} \end{cases}$

$$y_2 = \begin{cases} 0, \textit{если точка принадлежит обл. II} \\ 1, \textit{если} - \textit{обл. I} \end{cases}$$

О: Получаем задачу частично ЦП

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{ при условиях:}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5 &\ge -5y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 24 &\le y_1 \end{aligned}\right\}(\text{А}) \qquad \left.\begin{aligned} x_2 - 6 &\ge -6y_2 \\ x_1 + 2x_2 - 16 &\le 16y_2 \end{aligned}\right\}(\text{Б})$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_1 + y_2 = 1, y_1, y_2 - \text{целые (В)}$$

Графическое решение задачи дает $x^* = (4,6),\ Z_{\max} = 10$.

66. Привести к задаче ЦП сд. задачу: $\max Z = x_1 + 2x_2$ при условиях: $x_1 + x_2 \le 8, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ и либо $x_1 \ge 5,$ либо $x_2 \le 4.$

67. То же, при условиях $0 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 7$ и либо $x_1 \le 2,$ либо $x_2 \le 3.$

3.6. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается задача параметрического ЛП от обычной задачи ЛП? Характеризуйте предмет параметрического ЛП.

2. Сформулируйте задачу С (t) с параметром в целевой фк. и приводите ее геом. интерпретацию.

3. В чем состоит симплекс метод решения задачи С (t)?

4. В чем состоит суть графического решения задачи С (t)?

5. Сформулируйте задачу В (t) с параметром в свободных членах системы орг-й и приведите ее геом. интерпретацию.

6. В чем состоит решения задачи В (t)?

7. Сформулируйте задачу Д (t) параметрического ЛП в общем случае.

8. В чем состоит метод решения задачи Д (t)?

9. Сформулируйте задачу А (t) с параметром в матрице орг-й.

10. В чем состоит метод решения задачи А (t)?

Задание для кр. работы

Для каждого значения параметра $t \in]-\infty, \infty[$ (если не указано, что $t \in [a, b]$) найти решение задачи 1–20, полагая все $x_i \geq 0$. Опр-ть промежутки значений t при к-ых планы опт-ны (при каких значениях t задачи имеет бесчисл. мн. решений), лин. форма не огр-на и задача не разрешима. Привести геом. интерпретацию, где это возможно.

1. $Z = 2x_1 + tx_2\,(\max)$,
$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \end{array}\right\}$$

2. $Z = 2x_1 + x_2 + tx_3\,(\max)$,
$$\left.\begin{array}{llll} -x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 & +x_4 & = 27 \\ x_1 - x_2 & & +x_4 = 4 \end{array}\right\}$$

3. $Z = -x_1 + tx_2\,(\max)$,
$$\left.\begin{array}{r} -x + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \end{array}\right\}$$

4. $Z = tx_1 + (t+1)x_2 - (2t-6)x_3$,
$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \end{array}\right\} t \in [1,8]$$

5. $Z = -(t-2)x_1 + x_2(\max)$,
$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + 2x \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{array}\right\} t \in [1,10].$$

6. $Z = 5x_1 + (3t+2)x_2(\max)$,
$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 51 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{array}\right\} t \in [0,10].$$

7. $Z = (3t+2)x_1 + (2t-1)x_2 + 3tx_3 + 4x_4(\max)$,
$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2 \end{array}\right\}$$

8. $Z = -(t-1)x_1 + 2x_2(\max)$
$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}\right\}$$
$$t \in [1,3]$$

9. $Z=-(2t-1)x_1+tx_2+x_3+(t-2)x_4(\max)$, 10. $Z=2x_1-x_2+5x_3+x_4(\max)$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1-x_2+2x_3+5x_4\le 10 \\ x_1+3x_3+x_4\le 6 \\ 2x_1-3x_2-x_3\le 5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 3t+10 \\ 4x_1-x_2+2x_3+x_4\le -(t-7) \\ 3x_2+x_3-2x_4\le 5t+2 \end{array}\right\}$$

11. $Z=(t-1)x_1+(t-2)x_2+(2t-3)x_3-(2t+1)x_4(\max)$, 12. $Z=2x_1+x_2+4x_3+3x_4(\max)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3-x_4\le t+1 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4\le -(3t-2) \\ -x_1+2x_2+3x_3-3x_4\le -(2t-3) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} (t+2)x_1+x_2+2x_3+5x_4\le 12 \\ -(2t-1)x_1-2x_2+3x_4\le 7 \\ (4t+3)x_1+3x_2-x_3+2x_4\le 9 \end{array}\right\}$$

13. $Z=2x_1+x_2(\max)$, 14. $Z=x_1+2x_2(\max)$, 15. $Z=x_1+2x_2-3x_3(\min)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2\le 4 \\ x_1-x_2\le 6 \\ tx_1+x_2\le 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x_1+x_2\ge 9 \\ x_1+4x_2\le 15 \\ tx_1-x_2\le -2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+tx_2+x_3=2 \end{array}\right\}$$

16. $Z=2x_1+x_2\ (\min)$, 17. $Z=x_1+2x_2\ (\min)$ 18. $Z=x_1+2x_2-3x_3\ (\max)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2\le 4 \\ x_1-x_2\le 6 \\ tx_1+x_2\le 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x_1+x_2\ge 9 \\ x_1+4x_2\le 15 \\ tx_1-x_2\le -2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+tx_2+x_3=2 \end{array}\right\}$$

19. $Z=(t-1)x_1+(t-2)x_2+(2t-3)x_3-(2t+1)x_4(\min)$, 20. $Z=2x_1+x_2+4x_3+3x_4\ (\min)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3-x_4\le t+1 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4\le -(3t-2) \\ -x_1+2x_2+3x_3-3x_4\le -(2t-3) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} (t+2)x_1+x_2+2x_3+5x_4\le 12 \\ -(2t-1)x_1-2x_2+3x_4\le 7 \\ (4t+3)x_1+3x_2-x_3+2x_4\le 9 \end{array}\right\}$$

O: 1. $-\infty<t\le -\frac{2}{3}, x=(5,0)$; $-\frac{2}{3}\le t\le 4, x=(6,3)$; $4\le\lambda\le\infty, x=(2,5)$; бесчисл. мн. решений при $t=-\frac{2}{3}$ и $t=4$. 2. $-\infty<t\le -\frac{1}{8}, x=(6,\frac{9}{2})$; $-\frac{1}{8}\le t\le 3, x=(7,3)$; $3\le t<\infty, x=(4,0)$; бесчисл. мн. решений при $t=-\frac{1}{8}$ и $\lambda=3$. 3. $-\infty<t\le 0, x=(0,0)$; $0\le t\le 1, x=(0,2)$; $1\le t<\infty$, решения нет $(Z\to\infty)$; бесчисл. мн. решений при $t=1$. 4. $1\le t\le\frac{12}{5}$, $x_1=(0,0,1)$, $Z_{\max}=4$; $\frac{12}{5}\le t\le 8$, $x_2=(\frac{1}{2},0,0)$, $Z_{\max}=\frac{6}{5}$; бесчисл. мн. решений при $t=\frac{12}{5}$, т.е. $x_1=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, где $0\le\alpha\le 1$. 5. $1\le t\le\frac{7}{2}, x_1=(\frac{13}{7},\frac{30}{7},0,\ \frac{36}{7},0,\frac{45}{7})$, $Z_{\max}=\frac{43}{7}$; $\frac{7}{2}\le t\le 10, x_2=(0,\frac{3}{2},\frac{13}{2},$

$\frac{1}{2}, 0, \frac{77}{14})$, $Z_{\max} = \frac{3}{2}$; беск. мн. решений при $t = \frac{7}{2}$, т.е. решение в x_1, x_2 и в их выпуклой оболочке $x_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, где $0 \le \alpha \le 1$. 6. $0 \le t \le \frac{17}{12}, x_1 = = (9,3,9,0,0,7), Z_{\max} = 51$; $\frac{17}{12} \le t \le 10, x_2 = (\frac{88}{7}, 7, 0, 0, 30, 6), Z_{\max} = \frac{255}{4}$; при $t = \frac{17}{12}$ решение в x_1, x_2 и в их выпуклой оболочке $x_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, где $\alpha \in [0,1]$. 8. $t \in [1,3], x = (0,8,0,7)$, $Z_{\max} = 16$; 13. Разрешима при $-1 < t < \infty$ и не разрешима при $-\infty < t \le -1$. 15. Разрешима при $\frac{1}{2} < t < 2$ и неразрешима при $t < \frac{1}{2}$ *и* $t > 2$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ НП И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

> Каждое дерзание –
> Это новый риск, новый шаг непознанного
> Со старым и все более устаревшим оснащением.
> Т. С. Элиот

ЛЕКЦИЯ 13

4.1. СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ НП. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

1^0. Модели задач НП. Свойства и трудности, порождаемые нелинейностями. Как известно, МП принадлежит к числу наиболее интенсивно используемых дисциплин прикладной мт-ки, причем в последнее время все чаще возникают модели задач, сводящихся к схеме нелинейного программирования (НП), н-р, из области внешний торговли, решения ур-й регрессионного анализа, планирования производства, конкуренции, управления запасами и т. д. Модели задач НП в общем виде формируется так:

Найти

$$\max \mathrm{Z} = f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \text{ (или } \min \mathrm{Z} = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\text{)} \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) \geq 0\left(i=\overline{1,k}\right),\\ &\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0\left(i=\overline{k+1,m}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При этом предпологается, что известны фк. $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и $\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)$. Обычно на нек-ые пер. $x_1,x_2,\ldots,x_n$ накладывается условие неотц-ти. Кроме того, огр-ем может служить условие цлч-ти решения для ряда пер-ых. Величины m и n между собой не связаны, так что m может быть больше, меньше или равно n (для условного эксм., т. е. эксм-а при огр-ях). В част., m можетбыть и нулем (для безусловного эксм-а).

Если все фк. $f\left(x_1,\ldots,x_n\right),\varphi_i\left(x_i,\ldots,x_n\right)$ лин-ые, то ств. задача наз. задачей линейного программирования (ЛП). Если хотя бы одна из перечисленных фк-й не линейна, то ств, задачу будем наз-ть задачей НП.

Сформулированная задача НП (1), (2) яв-ся чрезвычайно общей. Поэтому выделяют классы задач НП, когда фк-ции $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и $\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ обладают опр. св-ми. Основные результаты в НП получены при рас-нии задач, в к-ых система огр-й лин-ая, а целевая фк. нелин. Даже в таких задачах опт. решение может быть найдено только для узкого класса целевых фк-й, н-р, когда целевая фк. сепарабельная (яв-ся суммой n фк-й $f_j\left(x_j\right)$ или квадратичная.

А для нелин-ых огр-й задача сущ-но осложняется. При этом в терминах рав-в можно сформулировать огр-ия логического или дискретного характера. Н-р, условие «из того, что $\varphi_1(x) \le 0$ должно следовать $\varphi_2(x) > 0$» можно записать в виде нерав-ва $\varphi_1(x) + z^2\varphi_2(x) > 0$, где z – дпн. пер-ое. Рав. $x^2 - x = 0$ экв-но $(\Leftrightarrow)$ условию: x=0 или 1. Любое нерав. можно превратить в рав-во и рав-во в нерав-во: $\varphi(x) \le 0 \Leftrightarrow \varphi(x) + z^2 = 0$ и $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\varphi(x) \le 0, \\ \varphi(x) \le 0. \end{cases}$

Систему рав-в можно свести к рав-ву: $\varphi_i(x) = 0\left(i = \overline{1,k}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^2(x) = 0.$

Учитывая все это, из «сложной» задачи (1), (2) получим «простую» задачу:

$$\max Z = f(x) \text{ (или } \min Z = f(x)\text{)}, \tag{1'}$$

$$\phi(x) \ge 0, \phi(x) = 0\ . \tag{2'}$$

где x=$(x_1,...,x_n)$. Однако, переходя к «простой» задаче (1′), (2′), теряем специфику задачи (1), (2) и этим только затрудняем поиск подходящего метода решения.

Основное влияние на выбор способа решения оказывают св-ва целевой фк. $f(x)$ и фк-й огр-ня $\varphi_i(x)$. Св-ва фк-й можно разделить на две группы: 1) Локальные (степень гладкости фк.), т. е. св-ва, связанные с непр-ю фк., сущв-ем и непр-ю ее частных производных различных порядков и производных по направлению. 2) Глобальные (выпуклость фк.), т. е. св-ва, связанные одноэкстремальностью выпуклых фк-й, опр-ых на выпуклом мн-ве,– выпуклое программирование (ВП).

В связи с указанными св-ми вытекают трудности, порождаемые нелинейностями фк-й $f(x), \varphi_i(x)$ при решении задач НП. Прежде чем изучать черты нелинейных явлений, напомним характерные (хрк.) черты решения задач ЛП:

1) Мн-во допустимых решений (МДР) $(x_1,...,x_n)$ n-мерного пр-ва, уд-их условиям огр-й и неотц-ти пер-ых, выпукло. Это выпуклое мн. имеет конечное число вершин, наз-мых крайним точками.

2) Для всех МДР $(x_1,...,x_n)$, в к-ых целевая фк. принимает заданное значение, есть гиперплоскость (гиперпл.). Кроме того, гиперпа-ти, ств-ие разным значениям целевой фк., параллельны (прл.).

3) Локальный max или min яв-ся также глобальным max или min целевой фк. на МДР, т. е. не сущ-ет локального оптимума целевой фк., отличного от глобального оптимума (опт.).

4) Если опт. значение целевой фк. огр-но, то по крайней мере одна крайняя точка МДР яв-ся опт-ым решением. Кроме того, начав с произвольной вершины МДР, можно достичь опт-ой крайней точки в конечное число шагов, причем на каждом шаге совершается переход только в соседнюю вершину.

У произвольной задачи (1), (2) НП нек-ые или все эти св-ва, характеризующие (хркз.) лин-ые задачи отсутствуют и возникают трудности, связанные с нелин-ми явлениями. Демонстрируем это на конкретном

п1. Найти $\min Z = \min f\left(x\right) = \left|x_1 - 2\right| + \left|x_2 - 2\right|$,

при огр-ях
$$\left.\begin{aligned} \varphi_1\left(x\right) &= x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ \varphi_2\left(x\right) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

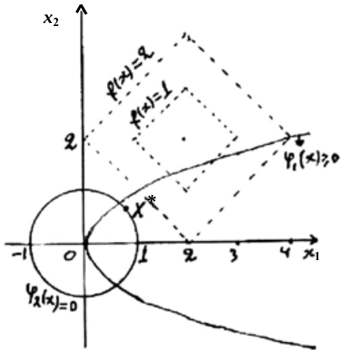


Рис. 1

Р. Штриховые линии на рис. 1 – это линии уровней целевой фк., т. е. точки, в к-ых целевая фк. принимает одно и то же значение. Допустимая обл. есть дуга окружности, лежащая внутри параболы. Решением задачи яв-ся точка X_1^* где $x_1 = x_2$ (см. рис. 1). Тогда из $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда берем $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Т. о. $X^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $Z_{\min} = 4 - \sqrt{2} \approx 2{,}59$.

Если убрать огр-ие $\varphi_2\left(x\right) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, то решением задачи яв-ся точка X_1^*, где угловая точка целевой фк. при $x_1 = 2$ лежит на графике параболы $x_2^2 = x_1$, т. е. $x_2 = \sqrt{x_1} = \sqrt{2}$. Тогда $X_1^* = \left(2, \sqrt{2}\right), Z_{\min} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$. Если убрать оба огр-я, то решением будет точка $X_2^* = \left(2, 2\right), Z_{\min} = 0$. В этом случае (когда $m = 0$) точка X_2^* наз. безусловным мнм-ом.

Из п1 видно, что каждый раз при нахождении опт-ых точек X^*, X_1^*, X_2^* приходится привлекать разные особенности задачи, исходя из ее графика (рис.1). Эти особенности – трудности НП, связанные с нелинейностями, будут демонстрированы и в дальнейших примерах.

2⁰. Графический метод решения моделей задач НП. Задачи, содержащие только две пер-ые, легко могут быть решены графически. Приведем несколько таких примеров, чтобы проиллюстрировать более наглядно разницу между лин-ми и нелин-ми задачами.

п2. Требуется найти: а) $\max Z = 0{,}5x_1 + 2x_2$; (3)

б) $\min Z = 10\left(x_1 - 3{,}5\right)^2 + 20\left(x_2 - 4\right)^2$; (4)

в) $\min Z = 10\left(x_1 - 2\right)^2 + 20\left(x_2 - 3\right)^2$; (5)

при огр-ях

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 0,5x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Р. а) Графическое решение задачи (3), (6) показано на рис.2. Оптимум достигается в вершине X^* обл-ти допустимых решений (ОДР) (6). Его находим из $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 0,5x_1 - x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = \frac{4}{3}, x_2^* = \frac{14}{3}$. Т. о. $X^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right), Z_{\max} = 10$. При этом опт. точка X^* единственная, значит, локальный мкс совпадает глобальным мкс-ом.

б) Решение задачи (4), (6) показано на рис. 3. Здесь линии уровня сепарабельной целевой фк. $Z = f\left(x_1, x_2\right) = f_1\left(x_1\right) + f_2\left(x_2\right)$ яв-ся эллипсами с центрами в точке $x_1 = 3,5;\ x_2 = 4$. В опт. точке X^* эллипс касается границы $x_1 + x_2 = 6$ выпуклого мн. (6). Кроме того угловой коэф. касательной к кривой $Z = 10\left(x_1 - 3,5\right)^2 + 20\left(x_2 - 4\right)^2$ в точке X^* должен равняться -1, т. к. таков он у пм. $x_1 + x_2 = 6$, т. е. $0 = 20\left(x_1 - 3,5\right) + 40\left(x_2 - 4\right)x_2' \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2' = -\frac{1}{2}\frac{x_1 - 3,5}{x_2 - 4} = -1 \Rightarrow x_2 - 4 = 0,5\left(x_1 - 3,5\right)$. Т. о., решив три ур-ия с тремя неизвестными $\left(x_1 + x_2 = 6,\ x_2 - 4 = 0,5\left(x_1 - 3,5\right),\ Z = 10\left(x_1 - 3,5\right)^2 + 20\left(x_2 - 4\right)^2\right)$ находим $x_1^* = 2,5;\ x_2^* = 3,5;\ z^* = 15$. Итак, $X^* = \left(2,5;\ 3,5\right),\ Z_{\min} = 15$.

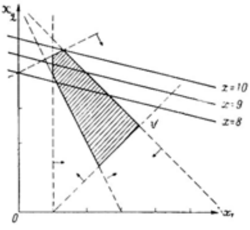


Рис. 2

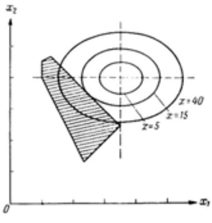


Рис. 3

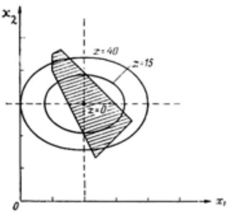


Рис. 4

в) Решение задачи (5), (6) видно из рис. 4: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3$, т. е. $X_3^* = \left(2,3\right)$, Z_{min} = (0). Т. о. оптз-ая точка X^* не обязательно лежит на границе. Отметим, что в рас-ом случае мнм. целевой фк. при наличии огр-й и условий неотц-ти тот же, что и без них. В таких случаях будем говорить, что огр-я несущественны.

В каждом из рас-ых примеров локальный оптимум (опт.) совпал с глобальным. Легко, однако, привести примеры, где это будет не так.

п3. Найти $\max Z = 25\left(x_1 - 2\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2$,

при огр-ях

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 \le 2 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Р. Решение задачи показано на рис. 5. Нетрудно понять, что в вершине X_4^* достигается глобальной мкс. целевой фк, к-го находим так: из $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 5,\ x_2^* = 1$, т. е. $X_4^* = \left(5,1\right)$, $\max Z_4 = 226$. В вершине x_2^* достигается отс-ый мкс целевой фк. $\left(\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}\right) \Rightarrow x_1^* = 0,\ x_2^* = 2$, т.е. $X_2^* = \left(0,2\right)$, $\max Z_2 = 100)$, отличный от глобального и к-ый больше, чем значения ее в соседних вершинах X_1^* и X_3^* $\left(\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}\right) \Rightarrow x_1^* = 2,\ x_2^* = 0$, т. е. $X_1^* = \left(2,\ 0\right)$, $\max Z_1 = 4$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 2,\ x_2^* = 4$, т. е. $X_3^* = \left(2,4\right)$, $\max Z_3 = 4)$.

Т. о. глобальный эксм. достигается в вершине выпуклого мн-ва допустимых решений. Кроме того, сущ-ет другая вершина, в к-ой достигается отс-ый эксм. (по отн-ю к соседним вершинам), отличный от глобального. Отметим, что в задачах такого типа глобальный эксм. достигается хотя в вершине, однако нет возможности использовать процедуру симплекс метода для перехода от одной вершины к соседней. Такая процедура может привести к отн-му, но не обязательно к глобальному эксм.

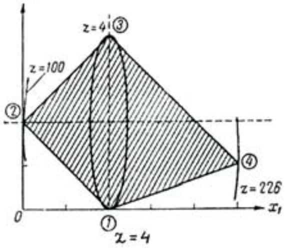


Рис. 5

Если задача содержит нелин. огр-ия, то не сохраняет силу утв-ие о выпуклости допустимых решений. Более того, она может состоять из нескольких несвязанных обл-й, как на рис. 6.

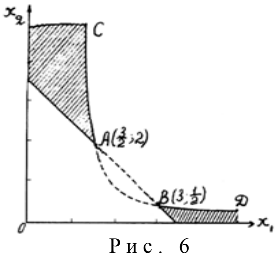


Рис. 6

п 4. Найти $\min$ и $\max Z=\left(x_1-1\right)^2+x_2^2$ при огр-ях

$$\left.\begin{aligned}&\left(x_1-1\right)x_2\le 1\\&x_1+x_2\ge 3{,}5\\&0\le x_1\le 5\\&0\le x_2\le 5\end{aligned}\right\}$$

Р. Мн-во допустимых решений в этом случае состоит из двух отдельных частей, ни одна из к-ых не выпукла (рис. 6). Решив систему $\begin{cases}\left(x_1-1\right)x_2=1\\ x_1+x_2=3{,}5\end{cases}\Rightarrow\left(2{,}5-x_2\right)x_2=1\Rightarrow x_2^2-\frac{5}{2}x_2+1=0\Rightarrow x_2=2,\ x_2=\frac{1}{2}$ и учитывая рав. $x_1+x_2=3{,}5$, получим $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2},2\right)$, $\mathcal{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)$. Значит, $Z_{\min}=\frac{17}{4}$ достигается в точках $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2},2\right)$ и $\mathcal{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)$. Фк. Z имеет два локальных мкс-ма: в точке $\mathcal{C}\left(\frac{6}{5},5\right)$, к-ю находим из $\begin{cases}\left(x_1-1\right)x_2=1\\ x_2=5\end{cases}\Rightarrow x_1^*=\frac{6}{5},\ x_2^*=5$. Отсюда получим $\max Z\,(\mathcal{C})=\frac{625}{25}$ и в точке $\mathcal{D}$ $\left(5,\frac{1}{4}\right)$ $\left(\begin{cases}\left(x_1-1\right)x_2=1\\ x_1=5\end{cases}\Rightarrow x_1^*=5,\ x_2^*=\frac{1}{4}\right)$, $\max Z\,(\mathcal{D})=\frac{257}{16}$. Точка $\mathcal{C}$ яв-ся точкой глобального мкс.

Отметим, что для задач НП, имеющих отличные от глобального локальные опт-ы, большинство вычт-ых методов позволяет найти именно локального опт-а. В общем случае они не позволяют установить, совпадает ли она с точкой глобального опт-а. Тем не менее эти методы отыскания локального опт-а часто оказываются очень полезными на практике. Единственный вычт. метод, приводящий к глобальному опт. незв-мо от числа локальных эксм-ов – это метод динамического программирования (ДП). Сд-но, если задача может быть решена с помощью ДП, всегда получаем возможность отыскать глобальный опт.

3^0. Выпуклые и вогнутые функции. Классический метод определения условного экстремума. Приведем необходимые (нх.) в дальнейшем материалы (см. также 6^0: 3.2).

Для опр-ия условного эксм. (т.е эксм-ма при огр-ях) могут быть использованы методы диф-го исчисления, когда фк. $f\left(x_1,\dots,x_n\right)=f\left(x\right)$ имеет не ниже второй производной.

т1. Если $f(x_1,...,x_n)$ – непр. фк-я, опр-ая на замкнутом и огр-ом мн-ве R, то она достигает на этом мн-ве, по крайней мере один раз, мкс-го и мнм-го значения (теорема сущ-ия экс-ма).

Сд. теорема опр-ет возможные местоположения мкс-ма.

т2. Если $f(x_1,...,x_n)$ яв-ся фк-ей нескольких пер-ых, опр-ой на допустимой обл. R, то мкс. значение f, если оно сущ-ет, достигается в одной или нескольких точках, к-ые принадлежат одному из сд-их мн-в:

1) S_1 – мн. в критических (станционарных) точек;

2) S_2 – мн. точек границы;

3) S_3 – мн. точек, где $f(x_1,...,x_n)$ недиф-ма.

о1. Мн-во точек $s_1(x)$ фк. $f(x_1,...,x_n)$ наз. мн-ом критических точек, если они уд-ют условию

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n} \tag{7}$$

о2. ф.к $f(x)$ достигает отс-го мкс-ма в точке $x^0=(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0)$, если для всех точек R, лежащих в малой окрестности точки $(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0)$, имеет место нерав-во

$$\text{F}(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0)\geq\ \text{F}\ (x_1\ ,x_2\ ,...,x_n\ )\ . \tag{8}$$

о3. Фк. $f(x)$ достигает абс-го мкс-ма в точке $(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0)$, если для всех точек $(x_1\ ,x_2\ ,...,x_n\ )\in R$ справедливо нерав-во

$$f\ (x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0)\geq f\ (x_1\ ,x_2\ ,...,x_n\ )\ . \tag{9}$$

о4. Отрезком, соединяющим две точки x_1 и x_2 наз. мн. точек x_1 уд-их ур-ю

$$x=tx_1+(1-t)x_2, \tag{10}$$

где $0\leq t\leq 1$.

о5. Мн. точек X наз. выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками ему принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки, т.е $x\in\text{X}$, если $x_1,x_2\in\text{X}$, опр-ые по стн. (10).

л1. Пересечение (общая часть) выпуклых мн-в есть выпуклое мн.

п5. Д-ть, что сд-ие обл. будут выпуклыми: 1) $x^2+y^2\leq 16$; 2) $4x^2+9y^2\leq 36$; 3) $x^2\leq y$; 4) $\left.\begin{matrix}(x-2)+(y-4)^2\leq 9\\(x-5)+(y-6)^2\leq 4\end{matrix}\right\}$. Начертить их графики.

Д. 1) Круг $\text{S}=\{\text{X}=(x,\text{y}):x^2+y^2\leq 16\}$, представленный на рис. 7, яв-ся выпуклым мн-ом, т.к. любой отрезок $[\text{X}_1,\text{X}_2]\in\text{S}$, если $\text{X}_1,\text{X}_2\in\text{S}$. А точка $\text{X}\in[\text{X}_1,\text{X}_2]$ в силу (10), значит, $\text{X}\in\text{S}$.

Д-во остальных примеров представляется читателю.

Для того чтобы опр-ть, яв-ся ли найденные критические точки точками мкс-ма или мнм-ма, нх-мо исследовать $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в окрестности критических точек и определить, яв-ся она выпуклой или вогнутой.

об. Пусть R – выпуклое мн. точек n-мерного пр-ва. Фк. f, опр-я на R, наз. выпуклой, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ и произвольного $0 \le \mathrm{t} \le 1$, выполняется нерав-во (рис. 8)

Если

$$f\left(x_2\right) = f\left(\mathrm{t}x_1 + \left(1-\mathrm{t}\right)x_3\right) \le \mathrm{t}f\left(x_1\right) + \left(1-\mathrm{t}\right)f\left(x_3\right), \tag{11}$$

$$f\left(x_2\right) = f\left(\mathrm{t}x_1 + \left(1-\mathrm{t}\right)x_3\right) \ge \mathrm{t}f\left(x_1\right) + \left(1-\mathrm{t}\right)f\left(x_3\right), \tag{12}$$

то фк. наз. вогнутой (рис. 9)

Если в (11) или (12) есть строгие нерав, то фк. f наз. строго выпуклой или строго вогнутой ств-но.

пб. Построить кривую $y = \dfrac{x^3 - 3x}{6}$ и проверить стн-ия (11) и (12).

Р. Находим $y' = \dfrac{x^2 - 1}{2}$.. Из $y' = 0$ опр-им критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Из $y'' = x$ находим точки max и min: $y''(-1) = -1 < 0$ и $y''(1) = 1 > 0$, $y(-1) = \dfrac{1}{3}$ и $y(1) = -\dfrac{1}{3}$ т.е. получим ств. вершины кривой $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ и $\left(1, -\dfrac{1}{3}\right)$. Пологая $y = 0$, опр-им точки пересечения кривой с осями крд-т: $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0,0)$ и $(\sqrt{3}, 0)$. Причём начало крд-т есть центр симметрии кривой, т.к. $y(-x) = -y(x)$. Полученные результаты представлены на рис.10.

Стн.(11) проверим для произвольных x_1, x_3 и t, н-р, при $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_3 = -\dfrac{2}{3}$ и $t = \dfrac{1}{2}$ из (10) получим $x = \dfrac{1}{2}(-\dfrac{3}{2}) + \dfrac{1}{2}(-\dfrac{2}{3}) = -\dfrac{13}{12}$. Тогда $f(-\dfrac{13}{12}) = \dfrac{3419}{10368} \approx 0{,}33$, $f(-\dfrac{3}{2}) = \dfrac{9}{48} \approx 0.19$, $f(-\dfrac{2}{3}) = \dfrac{46}{162} \approx 0{,}28$. Отсюда $f(-\dfrac{13}{12}) \approx 0.33 > \dfrac{1}{2} f(-\dfrac{2}{3}) = \dfrac{611}{2592} \approx 0.24$, т.е. ф.к. $y = \dfrac{x^3 - 3x}{6}$ на отрезке $\left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{2}{3}\right]$ вогнутая (выпуклостью вверх).

Пусть $x_4 = \dfrac{2}{3}$, $x_6 = \dfrac{3}{2}$, $t = \dfrac{1}{2}$ и проверим стн. (12). Тогда имеем $\mathrm{f}(\dfrac{2}{3}) = -\dfrac{46}{162}$, $\mathrm{f}(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{9}{48}$; $x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{12}$, $\mathrm{f}(\dfrac{13}{12}) = -\dfrac{3419}{10368}$. Отсюда получим

$f(\frac{13}{12})=-\frac{3419}{10368}\approx-0,33<\frac{1}{2}f(\frac{2}{3})+\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})=-\frac{64}{2592}\approx-0,24$, значит, фк. $y=\frac{x^3-3x}{6}$ на отрезке $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$ выпуклая (выпуклостью вниз).

Отметим, что если $\mathrm{f}(x)$ – выпуклая фк., то фк. – $f(x)$ – вогнутая и наоборот.

Рис. 7

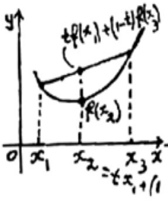


Рис. 8

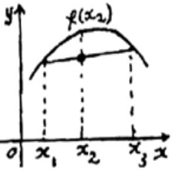


Рис. 9

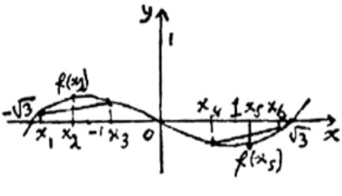


Рис. 10

п7. Исследовать св-ва выпуклости фк. $y=ax^2$

Р. Здесь $\mathrm{f}(x)=ax^2$ – фк. одной пер-ой, заданная на всей дсв-ой оси. Имеем $f\left[tx_1+(1-t)x_2\right]=a\left[tx_1+(1-t)x_2\right]^2=\quad a\left[t^2x_1^2+(1-t)^2x_2^2+2t(1-t)x_1x_2\right]=$ $a\left[t^2x_1^2+x_2^2-2tx_2^2+t^2x_2^2+2tx_1x_2-2t^2x_1x_2\right]=a\left[t^2(x_1-x_2)^2+x_2^2+2tx_2(x_1-x_2)\right]$. Но $0\le t\le1$, сд-но, $t^2\le t$, т.е. $t^2(x_1-x_2)^2$, или $t^2(x_1-x_2)^2+x_2^2+2tx_2(x_1-x_2)\le$ $\le t(x_1-x_2)^2+x_2^2+2tx_2(x_1-x_2)=tx_1^2+(1-t)x_2^2$. Умн-я обе части последнего нерав-ва на a , получим при $a>0$: $f(x)=a\left[tx_1+(1-t)x_2\right]^2\le tax_1^2+(1-t)ax_2^2$ – фк. выпуклая, при $a<0$: $f(x)=a\left[tx_1+(1-t)x_2\right]^2\ge tax_1^2+(1-t)ax_2^2$ – фк. вогнутая.

зм1. Приведенное выч. может оказаться очень громоздким, если фк. $f(x)$ сложная. Поэтому в практических (наглядных) целях, взяв из обл. опр-ия фк. $f(x)$ и отрезка $[0,1]$ произвольные числа, н-р, $x_1=-1,\ x_2=2,\ t=\frac{1}{2}$, можно проверить стн. (11) и (12) как в п6. Пусть $a>0$. Тогда имеем $af(x)=af\left[\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\cdot2\right]=af(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a<\frac{1}{2}af(-1)+\frac{1}{2}af(2)=\frac{5}{2}a-$ фк. выпуклая. Если $a<0$, то $af(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a>\frac{1}{2}af(-1)+\frac{1}{2}af(2)=\frac{5}{2}a$ – фк. вогнутая.

Критерий выпуклости и вогнутости фк-и n пер-ых может быть сформулирован в виде сд-ей

т3. Диф-мая фк-я $f(x)$ строго вогнута в нек-ой окрестности точки $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если выполняются сд. условия:

$$\Delta_1 = f_{11}(x_0) < 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11}(x_0) & f_{12}(x_0) \\ f_{21}(x_0) & f_{22}(x_0) \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{11}(x_0) & f_{12}(x_0) & f_{13}(x_0) \\ f_{21}(x_0) & f_{22}(x_0) & f_{23}(x_0) \\ f_{31}(x_0) & f_{32}(x_0) & f_{33}(x_0) \end{vmatrix} < 0 \text{ , ...}$$

т.е. если знаки опр-лей чередуются, где

$$f_{ij}(x_0) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \text{ при } x = x_0. \tag{13}$$

Фк. $f(x)$ строго выпукла в окрестности точки x_0, если все опр. (выписанные выше) плж-ны.

зм2. Фк. $f(x)$ вогнута (выпукла) в нек-ой окрестности точки x_0, если выполняются условия $\Delta_i \le 0$, $\Delta_j \ge 0$, $i \ne j$, при этом в исходном опр. Δ_n допустимо менять место расположения нек-ьих строк как в п13, ($\Delta_i \ge 0$) т3.

т4. Для того чтобы в точке x_0 достигался внутренний отс-ый мкс. (мнм.) дт-но рав-ва нулю всех первых частных производных в точке x_0, а сама фк. в её окрестности была строго вогнута (выпукла).

п8. Найти отс-ый мкс. или фк. $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$.

Р. Находим критические точки, приравняв частные производные нулю:

$$\left.\begin{aligned} f_{10} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1 = 0 \\ f_{20} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad x_0 = (x_1, x_2) = (4, 6) - \text{критическая точка}$$

Опр-им $f_{11}(x_1, x_2) = -4, f_{12} = 1, \ f_{21} = 1, \ f_{22} = -4$.

Т.к.

$$f_{11} = -4 < 0, \qquad \begin{vmatrix} f_{11}(4,6) & f_{12}(4,6) \\ f_{21}(4,6) & f_{22}(4,6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 > 0,$$

то фк. f достигает в точке $x_0(x_1^0, x_2^0) = (4, 6)$ отс-го мкс.

зм3. Верно утв-ие: если $f(x)$ строго выпуклая (вогнутая) фк. на всем мн-ве R, то f обладает только одним отс. мнм-ом (мкс-ом), к-ый яв-ся и абс-ым.

т5 (о выпуклости допустимого мн. решений). Пусть $\varphi_1(x)_1, \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x) \ge 0$ и $x \ge 0$ – огр-ия задачи НП. Если фк. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ вогнуты, то допустимое мн. $R = \{ x : x \ge 0 \text{ и } \varphi_i(x) \ge 0, i = \overline{1, m} \}$ яв-ся выпуклым.

Д. Дт-но показать, что $R = \{ x : \varphi_i(x) \ge 0, x \ge 0 \}$ при каждом $i = \overline{1, m}$ будет выпуклым. Тогда $R = R \bigcap R_2 \bigcap ... \bigcap R_m$ будет также выпуклым, т.к. пересечение конечного числа выпуклых мн-в выпукло. Рас-им нек-ю вогнутую фк. $\varphi_i(x) \geq 0$. Выберем две произвольные точки $x_1, x_3 \geq 0$ (рис. 11). Тогда $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$ т.к. $x_1 \in R_i$ и $x_3 \in R_i$. Из условия вогнутости φ_i следует, что $\varphi_i(tx_1 + (1-t)x_3) \geq t\varphi_i(x_1) + (1-t)\varphi_i(x_3)$. Сд-но, мн. R_i содержит отрезок $t\varphi_i(x_1) + (1-t)\varphi_i(x_3)$, а поэтому R_i выпукло (рис. 11).

сл1. Лин. комбинация с плж. коэф-ми выпуклых (вогнутых) фк-ий будет фк-ей выпуклой (вогнутой).

Для наглядности на рис. 12 приведены: *а* – выпуклые мн., *б* – невыпуклые мн., *в* – вогнутые фк., *г* – выпуклые фк., *д* – фк., которые не яв-ся ни выпуклыми, ни вогнутыми. Удачным примером выпуклой фк., опр-ой на E^2, явл-ся фк-я, подобная пиале. Перевернутая вверх дном пиала изб-ет вогнутую фк-ю. Лин-я фк. яв-ся одновременно и выпуклой и вогнутой.

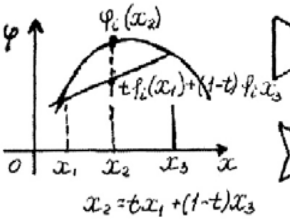


Рис. 11

Рис. 12

Рас-им классический метод поиска условного экс-ма. Он состоит в сд-ем.

1) Отыскивают мн-во всех критических точек $S_1(x)$ фк-и $f(x)$ внутри допустимого мн. R. Найденные точки далее исследуют на мкс. (мнм.) и опр-ют точку нб-го мкс-ма $x_0 \in S_1(x)$.

2) Переходят к исследованию точек границ $S_2(x)$ и отыскиванию тех из них, где $f(x)$ достигает мкс-ма. Для этого выбирают произвольную границу, опр-ую, н-р, условием $\varphi_i(x) = 0$. Если фк.

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{14}$$

с разделяющимися пер-ми, то всегда можно, опр-ив из (14) пер-ию

$$x_i = \varphi_i(\{x_i\}), \quad i = \overline{1,n}, \ j \neq i \tag{15}$$

подставим ее в выражение для $f(x)$. Тем самым задача сведется к поиску безусловного экс-ма, для чего используется процедура, описанная в п.1. Обз-им через x_i^* точку границы $\varphi_i(x) = 0, \quad x_i^* \in R$, в к-ой $f(x)$ достигает мкс-ма. Повторив вышеописанную процедуру по всем остальным границам, найдем ств-но экс-ые точки всех границ $x_i^*, i = \overline{1,m}$.

3) Непосредственным сравнением значений $f(x)$ для всех точек x_i^* и критической внутренней точки x_0 опр-ют точку абс-го мкс-ма $x_{\text{опт}}$ на мн-ве решений R.

п9. Найти нб. и нм. значения фк. $z = x^2 y(2-x-y)$ в туг-ке, огр-ом прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=6$ (рис. 13)

Р. Найдем критические точки:

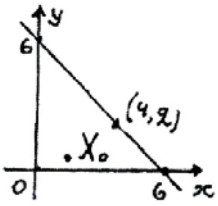


Рис. 13

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 4xy-3x^2y-2xy^2 = xy(4-3x-2y)=0\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2x^2-x^3-2x^2y = x^2(2-x-2y)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}4-3x-2y=0\\ 2-x-2y=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$, т. е. критическая точка $\mathrm{x}_0 = (1,\frac{1}{2})$ лежит внутри туг-ка. $z_0 = z(\mathrm{x}_0) = 1\cdot\frac{1}{2}(2-1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

На сторонах $x=0$ и $y=0$ значения фк. z равны нулю. Найдем ее нб. и нм. значения на стороне $x+y=6$. На ней $y=6-x$ $(0\le x\le 6)$ и $z = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x)$. На концах интервала $z = z(0) = z(6) = 0$. Опр-им критические точки: $z^1 = -48x+12x^2 = 12x(x-4) = 0 \Rightarrow x=4$ (т. к. $x=0-$ граничная точка); при этом $y=2$, $z = -4\cdot 16(6-4) = -128$.

Итак, нб. и нм. значения фк. z в данном туг-ке надо искать среди сд-их ее значений: $z=\frac{1}{4}$ – внутри туг-ка, в точке $(1,\frac{1}{2})$; $z=0$ – на сторонах $x=0$, $y=0$ (в том числе и в концах); $z=-128$ – на стороне $x+y=6$, в точке (4,2).

Отсюда видно, что нб. значение $z=\frac{1}{4}$ принимает внутри туг-ка, в точке $X_0 = \left(1,\frac{1}{2}\right)$, а нм. $z=-128$ на его границе, в точке $(4,2)$

п10. Найти нб. и нм. значения фк. $z = x+y$ в круге $x^2+y^2=1$.

Р. Критических точек фк. z не имеет, т.к. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \ne 0$, поэтому нб. и нм. значения она может принимать только на границе обл-ти, т.е. на окружности $x^2+y^2=1$. Параметрическое ур. этой окружности: $x=\cos t, y=\sin t\,(0\le t\le 2\pi)$ На окружности z становится фк-ей от $t: z = z(t) = cost + sint.$

Найдем критические точки этой фк-и: $z'(t) = -sint + cost = 0 \Rightarrow sint = cost \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4}$. В этих точках имеем

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{4} + Sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = cos\frac{5\pi}{4} + sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \; x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Т.о. нб. значение $z = \sqrt{2}$ и нм. $z = -\sqrt{2}$ достигает в граничных точках

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) u \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Отметим, что выше рас-ный классический метод поиска условного экс-ма требует больших вычт-ых затрат и применим лишь в простейших случаях, при небольшом числе огр-й и если фк-и $\varphi_i(x)$ – с разделяющимися пер-ми. Поэтому ниже расв-ся более эффективные методы решения задач условной оптз-ции.

4^0. Метод множителей Лагранжа. Рас-им другой метод классического анализа, к-ый позволяет находить мкс. или мнм. фк. при огр-ях, имеющих вид рав-в. Важность этого метода обуславливается как его прямым применением при решении задач (особенно по экономическим вопросам), так и тем фактом, что он служит мостом к современным работам по теории и вычт-ым вопросам задач НП. Пусть требуется найти

$$\max z = \mathrm{f}(x_1,..,x_n) \tag{16}$$

при огр-ях

$$\varphi_i(x_1,..,x_n) = 0, \; i = \overline{1,\mathrm{m}} \tag{17}$$

Предположим, что фк. f, $\varphi_1, \varphi_2,.., \varphi_m$ диф-мы и на пер-ые не налагаются условия неотц-ти.

Введем набор пер-ых $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_m$ (по числу огр-й), к-ые наз. множителями Лагранжа, и составим так наз-мую фк. Лагранжа вида:

$$\mathrm{F}(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1,...,x_n). \tag{18}$$

т6. Пусть для задачи (16), (17) фк-ей Лагранжа яв-ся стн. (18). Тогда нх-ым условием того, чтобы вектор $x^0 = (x^0,...,x_n^0)$ являлся решением задачи (16) при огр-ях (17), нх-мо сущв-ие такого вектора $\lambda^0 = (\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$, что пара векторов $\left(x^0,\lambda^0\right)$ уд-ет системе ур-й

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F}_{x_j}\left(x^0,\lambda^0\right)&=\frac{\partial\mathrm{F}\left(x^0,\lambda^0\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i\left(x^0\right)}{\partial x_j}=0,\ \ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}\\ \mathrm{F}_{\lambda_i}\left(x^0,\lambda^0\right)&=\frac{\partial\mathrm{F}\left(x^0,\lambda^0\right)}{\partial\lambda_i}=\varphi_i\left(x^0\right)=\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_n^0\right)=0,\ \ i=\overline{1,m} \end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Если градиенты фк-й f и φ_i обз-им через $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$,

$\nabla\varphi_i=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\right)^T$, то стн. (19) можно писать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\nabla f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\varphi_i\left(x^0\right)=0\\ &\varphi_i\left(x^0\right)=0,\qquad\qquad i=\overline{1,m} \end{aligned}\right\}\qquad(19')$$

или

$$\nabla\mathrm{F}\left(x^0,\lambda^0\right)=0,\qquad(19'')$$

где $\nabla\mathrm{F}=\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_n},\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\lambda_m}\right)$.

Т.о. метод множителей Лагранжа состоит в сд-ем:

1. Составляют фк-ю Лагранжа $\mathrm{F}\left(x,\lambda\right)$.

2. Находят частные производные $\frac{\partial\mathrm{F}\left(x,\lambda\right)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial\mathrm{F}\left(x,\lambda\right)}{\partial\lambda_i}$, $\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}};\ i=\overline{1,m}.$

3. Решают систему
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mathrm{F}(x,\lambda)}{\partial x_i}=0,i=\overline{1,n}\\ &\frac{\partial\mathrm{F}(x,\lambda)}{\partial\lambda_i}=\varphi_i(x)=0,i=\overline{1,m} \end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

и отыскивают точки $x^0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, уд-ие системе (20).

4. Найденные точки исследуют далее на мнм (или мкс).

п11. Имеются два способа производства нек-го продукта. Пусть y_1, y_2 кол-во продукта, произведенного первым или вторым способом ств-но. Издержки производства Н при каждом способе зависят от произведенных y_1, y_2 сд-им образом:
$$\begin{cases}\mathrm{H}_1\left(y_1\right)=a_0+a_1y_1+a_2y_1^2;\ \ a_0,a_1,a_2>0;\\ \mathrm{H}_2\left(y_2\right)=b_0+b_1y_2+b_2y_2^2;\ \ b_0,b_1,b_2>0.\end{cases}$$

За некоторый промежуток времени нх-мо произвести ровно с единиц продукции (т. е. $y_1+y_2=c$), распределив ее между двумя способами так, чтобы мнмз-ть общие издержки.

Р. Составим фк-ю Лагранжа

$$\mathrm{F}(y_1,y_2,\lambda)=a_0+a_1y_1+a_2y_1^2+в_0+в_1y_2+в_2y_2^2+\lambda(c-y_1-y_2).$$

$$\text{Откуда}\quad\begin{cases}\mathrm{F}_{y_1}=a_1+2a_2y_1-\lambda=0\\ \mathrm{F}_{y_2}=в_1+2в_2y_2-\lambda=0\Rightarrow\\ \mathrm{F}_\lambda=c-y_1-y_2=0\end{cases}\qquad \begin{array}{l} y_1^0=\dfrac{в_2}{a_2+в_2}c+\dfrac{в_1-a_1}{2(a_2+в_2)}\ ,\\ y_2^0=\dfrac{a_2}{a_2+в_2}c-\dfrac{в_1-a_1}{2(a_2+в_2)}\ ,\end{array}$$

Обсуждения дт-ых условий в терминах лагранжевой формы не так просто, за исключением двух пер-ых с одним огр-ем. Для этого последнего случая справедлива сд-я

т7. В точке $(x_1^0,\ x_2^0)$, уд-ей нх-ым условиям $F_{x_1}=0, F_{x_2}=0,\ F_\lambda=0,$ достигается мкс, если плж-ым яв-ся опр-ль (частные производные второго порядка вычислены в точке $(x_1^0,\ x_2^0)$):

$$\begin{vmatrix}\mathrm{F}_{x_1x_1} & \mathrm{F}_{x_1x_2} & \mathrm{F}_{x_1x_\lambda}\\ \mathrm{F}_{x_2x_1} & \mathrm{F}_{x_2x_2} & \mathrm{F}_{x_2x_\lambda}\\ \mathrm{F}_{\lambda x_1} & \mathrm{F}_{\lambda x_2} & \mathrm{F}_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_{x_1x_2}+\lambda\varphi_{x_1x_1} & \varphi_{x_1x_2}+\lambda\varphi_{x_1x_2} & \varphi_{x_1}\\ \varphi_{x_2x_1}+\lambda\varphi_{x_2x_1} & \varphi_{x_2x_2}+\lambda\varphi_{x_2x_2} & \varphi_{x_2}\\ f_{x_1} & f_{x_2} & 0\end{vmatrix}>0$$

Отметим, что пер-ые λ_j в фк. Лагранжа могут быть интерпретированы как дв. пер-ые к нелин. задаче с огр-ми типа рав-в. Каждому огр. ставится в ств-ие одна пер. λ_j, а значение каждой пер. λ_j, ств-щее мксз-ей точке $(x_1^0,\ ...,x_n^0)$, яв-ся скоростью, с к-ой может возрасти целевая фк. f, если несколько ослабить j-е огр-ие. При этом неотц-ть пер-ых λ_j не требуется.

п12. Нек-я энергетическая компания обладает двумя гидроэлектростанциями, стоящими на одной и той же реке. Отводная плотина регулирует общий поток воды т. о., что возможно любое его распределения между этими двумя станциями. Мощности станций выражаются сд-ми фк.:

$p_1(x_1)=\int\limits_0^{x_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ p_2(x_2)=\int\limits_0^{x^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$ где пер-ые x_1 и x_2 – величины потоков воды, направляемых ств-на на первую и вторую плотины. Предполагая, что речной поток C направляется на станции полностью (т. е. $x_1+x_2=\mathrm{C}$), распределить его между двумя станциями так, чтобы мксз-ть общие мощности станций.

Р. Составим фк-ю Лагранжа: $\mathrm{F}(x_1,\ x_2,\ \lambda)=\int\limits_0^{x_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int\limits_0^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\lambda(c-x_1-x_2).$

Взяв частные производные, как указано в т6, получим

$$\begin{cases}\mathrm{F}_{x_1}=e^{-x_1^2/2}-\lambda=0\\ \mathrm{F}_{x_2}=e^{-x_2^2/2}-\lambda=0\Rightarrow\\ \mathrm{F}_\lambda=c-x_1-x_2=0\end{cases}\begin{cases}e^{-x_1^2/2}=e^{-x_2^2/2}\\ \qquad\text{или}\\ x_1=x_2=\dfrac{c}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda^0=e^{-x_1{}^2/2}=e^{-c^2/8}\\ p_1(x_1^0)+p_2(x_2^0)=2\int\limits_0^{c/2}e^{-t^2/2}dt.\end{cases}$$

Проверив условия т7, установим, что точка $x_1 = x_2 = \frac{c}{2}$ доставляет мкс:

$$\begin{cases} F_{x_1x_1} = -x_1e^{-x_1^2/2},\ F_{x_1x_2} = 0,\ F_{x_1\lambda} = -1 \\ F_{x_2x_1} = 0,\ F_{x_2x_2} = -x_2e^{-x_2^2/2},\ F_{x_2\lambda} = -1 \Rightarrow \\ F_{\lambda x_1} = 0,\ F_{\lambda x_2} = -1,\ F_{\lambda\lambda} = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} -\frac{c}{2}e^{-c^2/8} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{c}{2}e^{-c^2/8} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = ce^{-c^2/2} > 0.$$

п13. Найти точку условного эксм. фк. $Z = x_1x_2 + x_2x_3$ при огр-ях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2, \end{cases} \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Р. Составим фк-ю Лагранжа $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + +x_2x_3 + \lambda_1(x_1x_2 - 2) + +\lambda_2(x_2x_3 - 2)$. Находим частные производные и приравниваем нулю:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1} = F_1 = \quad x_2 \qquad +\lambda_1 \qquad = 0 \\ F_2 = x_1 \qquad +x_3 \quad +\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ F_3 = \quad x_2 \qquad\qquad +\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = F_4 = x_1 + x_2 \qquad -2 = 0 \\ F_5 = \quad x_2 + x_3 \qquad -2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{из 1-го и 2-го} \\ \text{ур-я следует} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \text{-}x_2, \\ \text{отсюда Ю} \end{array} \left| \left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \right.$$

Решая полученную систему, находим: $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$, эксм $Z = 2$. Теперь надо выяснить найденный эксм. есть мкс. или мнм. Для этого найдем вторые частные производные в точке (x^0, λ^0) и используем зм2.

$$\left.\begin{array}{l} F_{11} = 0,\ F_{12} = 1,\ F_{13} = 0,\ F_{14} = 1,\ F_{15} = 0 \\ F_{21} = 1,\ F_{22} = 0,\ F_{23} = 1,\ F_{24} = 1,\ F_{25} = 1 \\ F_{31} = 0,\ F_{32} = 1,\ F_{33} = 0,\ F_{34} = 0,\ F_{35} = 1 \\ F_{41} = 1,\ F_{42} = 1,\ F_{43} = 0,\ F_{44} = 0,\ F_{45} = 0 \\ F_{51} = 0,\ F_{52} = 1,\ F_{53} = 1,\ F_{54} = 0,\ F_{55} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \Delta_5' = \begin{vmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \end{vmatrix},$$

где Δ_5 получен из Δ_5', расположив его 5-ю строку вместо первой круговой подстановкой. Откуда получим:

$\Delta_1 \leq 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0&1 \\ 0&1 \end{vmatrix} \geq 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0&1&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&1 \end{vmatrix} = -1 < 0,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&0 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Отсюда следует, что найденный эксм. есть мкс $Z = 2$ при $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$.

Этот же пример решим др. методом классического анализа:

$$\text{из} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & Z = \left(2 - x_2\right) x_2 + x_2 (2 - x_2) = -2x_2^2 + 4x_2 \\ & Z'_{x_2} = -4x_2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 - \text{критическая точка.} \end{aligned}$$

$Z''_{x_2 x_2} = -4 < 0,$ значит, $x_2^0 = 1$ точка мкс. Тогда $x_1^0 = 2 - x_2^0 = 1$ и $x_3^0 = 2 - x_2^0 = 1$.

Итак, имеем $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1,$ мкс Z=2.

5^0. Седловая точка. Условия Куна-Таккера и теорема Куна-Таккера.

Рас-им метод множителей Лагранжа, позволяющий найти мкс или мнм фк. при огр-ях, имеющих вид нерав-в. Для этого сначала изучим задачу ЛП с помощью метода множителей Лагранжа.

Напомним общую форму прямой и дв-ой задач ЛП.

$$\begin{array}{cc} \text{Прямая задача:} & \text{Дв-я задача:} \\ \max\varphi\left(x\right) = \max\left(C'X\right), & \min g\left(U\right) = \min\left(P_0'U\right), \\ AX \le P_0, & A'U \ge C, \\ X \ge 0. & U \ge 0. \end{array}$$

Здесь A', C', P_0' – транспонированные матрицы ств-но матриц A, C, P_0.

Преобразовав эти задачи, можно их записать в сд-ей экв. форме

$$\begin{array}{cc} \max\phi\left(x\right) = \max\left(C'X\right), & \max\left(-g\left(U\right)\right) = \max\left(-P_0'U\right), \\ p_0 - AX \ge 0, & -C + A'U \ge 0, \\ X \ge 0. & U \ge 0. \end{array}$$

Напишем фк. Лагранжа F_p и F_d, ств-ие прямой и дв. задачам ЛП:

$$\begin{aligned} & F_p\left(X,U\right) = C'X + U'\left(P_0 - AX\right), \\ & F_d\left(X,U\right) = -P_0'U = X'\left(-C + A'U\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Для задач ЛП дв-ые пер. U яв-ся множителями Лагранжа, а дв-ми пер. самой дв-ой задачи яв-ся пер-ые прямой задачи, и потому в этом случае множителями Лагранжа яв-ся прямые пер. X. Из фм. (21) видно, что

$$F_P\left(X,U\right) = -F_d\left(X,U\right)$$

о7. Пара векторов $\bar{X}, \bar{U}$ наз. седловой точкой фк. $\varphi\left(X,U\right)$, если $\bar{X} \ge, \ \bar{U} \ge 0$ и

$$\varphi\left(X,\bar{U}\right) \le \varphi\left(\bar{X},\bar{U}\right) \le \varphi\left(\bar{X},U\right)$$

для всех $X \ge 0, \ U \ge 0$.

Без д-ва приведем сд-ю

т 8. Вектор X^0 яв-ся опт. решением прямой задачи ЛП ттогда, когда сущ-ет такой вектор $U^0 \geq 0$, что вектор $\left(X^0,\ U^0\right)$ есть седловая точка фк. Лагранжа F_p, то есть для всех $X \geq 0,\ U \geq 0$

$$C'X + U^{0'}\left(P_0 - AX\right) \leq C'X^0 + U^{0'}\left(P_0 - AX^0\right) \leq C'X^0 + U'\left(P_0 - AX^0\right).$$

Из $m8$ следует, что вопрос о сущ. опт-го решения задачи ЛП может быть сведен к вопросу о сущ. седловой точки ств-ей фк. Лагранжа. Кроме того, если найдена седловая точка, то она будет такой точкой $\left(X^0,\ U^0\right)$, что вектор X^0 будет опт-ым решением задачи ЛП. Этот факт с вычт-ой точки зрения не представляет интереса, т. к. симплекс-метод и его модификации дают эффективные вычт. алгоритмы для всех лин. задач. Однако этот факт дает идею для решения задач НП. К счастью, оказывается, что для нахождения седловых точек для широкого класса фк-й можно использовать метод, известный под названием градиентного. В этом случае, если удастся установить экв-сть нек-го класса задач НП задачам отыскания седловой точки, как это сделано в т 8 для задач ЛП, то становится возможным к решению задач НП применять градиентный метод.

Кроме того, т 8 позволяет переход от одного мт-го метода к другому. Дсвно, задача ЛП была задачей мксз-ции при нек-ых огр-ях, а применение фк. Лагранжа приводит к задаче отыскания седловой точки фк. $F_P\left(X,\ U\right)$. В свою очередь нерав-ва

$$F_P\left(X,\bar{U}\right) \leq F_P\left(\bar{X},\bar{U}\right) \leq F_P\left(\bar{X},U\right),$$

опр-щие седловую точку, можно интерпретировать как

$$F_P\left(\bar{X},\bar{U}\right) = \max_{x \geq 0}\left(\min_{U \geq 0} F_P\left(X,U\right)\right) = \min_{U \geq 0}\left(\max_{X \geq 0} F_P\left(X,U\right)\right). \qquad (22)$$

Т. о. задача мксз. при огр-ях типа нерав-в прб-ся в задачу максиминимизации (мксмнмз) или минимаксимизации (мнммксз) фк. Лагранжа. Фактически это прб. связывает задачи прямой оптз. с теорией игр, (к этому вопросу вернемся в дальнейшем), с ее седловыми точками и минимаксными методами.

Задача нахождения седловой точки сформулируется так:

Найти такие векторы $\bar{X} \geq 0, \bar{U} \geq 0$, что для фк $\varphi\left(X,U\right)$ справедливы нерав-ва

$$\varphi\left(X,\bar{U}\right) \leq \varphi\left(\bar{X},\bar{U}\right) \leq \varphi\left(\bar{X},U\right). \qquad (23)$$

А задача НП сформулируется сд-им образом. Найти

$$\max Z = f\left(X\right), \qquad (24)$$

при огр-ях

$$\varphi_i\left(X\right) \geq 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad (25)$$

$$X \geq 0. \qquad (26)$$

Рас-им сначала задачу (23) и введем сд. обз-ия:

$$\overline{\varphi_k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi\left(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n;\overline{u}_1,\dots\overline{u}_m\right)}{\partial x_1} \\ \hline \dfrac{\partial\varphi\left(\overline{x}_1,\dots,x_n;\overline{u}_1,\dots,u_m\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \overline{\varphi}_u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi\left(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n,\dots,\overline{x}_n;\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_m\right)}{\partial u_1} \\ \hline \dfrac{\partial\varphi\left(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n;u_1,\dots,\overline{u}_m\right)}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

где $\overline{\varphi}_X$ и $\overline{\varphi}_u$ есть векторы частных производных фк. $\varphi(X,U)$ в точке $\left(\overline{X},\overline{U}\right)$.

т9. Пусть фк. $\varphi(X,U)$ диф-ма. Тогда для того, чтобы точка $\left(\overline{X},\overline{U}\right)$ была седловой точкой фк. φ, нх-мо, чтобы $\left(\overline{X},\ \overline{\mathrm{U}}\right)$ была седловой точкой фк. φ, нх-мо, чтобы

$$① \quad \overline{\varphi}_x \le 0, \quad \varphi'_{\mathrm{x}}\overline{X} = 0, \quad \overline{\mathrm{X}} \ge 0.$$

$$② \quad \overline{\varphi}_u \ge 0, \quad \varphi'_u\overline{U} = 0, \quad \overline{\mathrm{U}} = 0.$$

Приведем разъяснение условий теоремы в качестве эвристического док-ва т9. Если точка $\left(\overline{X},\ \overline{\mathrm{U}}\right)$ – седловая точка фк. φ, то

$$\varphi\left(\overline{X},\overline{U}\right) = \max_{X\ge 0}\min_{U\ge 0}\varphi(X,U)$$

Тогда в силу того что седловая точка яв-ся мксз-ей по отн-ю к каждой пер. x_j, она не может совпадать с точкой, у которой $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} > 0$, т.к. иначе фк. φ возрастала бы вдоль x_j. Т.о. в седловой точке $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} \le 0$. Причем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} < 0$ возможно только в том сучае, когда пер x_j уже достигла своего нм. допустимого значения, т.е.нуля. Итак, если в седловой точке $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} < 0$, то $x_j = 0$.

Точно так же, в силу того что точка $\left(\overline{X},\ \overline{\mathrm{U}}\right)$ должна быть мнмз-ей по отн-ю к каждой пер. u_i, нерав-во $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} < 0$ невозможно, т.к. иначе фк. убывала бы и дальше. Т.о. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i} \ge 0$, причем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i} > 0$ тогда, когда $u_i = 0$.

т10. Пусть фк. $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{u})$ диф-ма. Тогда, для того, чтобы точка $\left(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}}\right)$ была седловой точкой фк. φ, дт-но, чтобы выполнялись условия т9 и были выполнены условия

$$③ \quad \varphi\left(\mathrm{x},\overline{\mathrm{u}}\right) \le \varphi\left(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}}\right) + \overline{\varphi_{\mathrm{x}}}'\left(\mathrm{x} - \overline{\mathrm{x}}\right).$$

$$④ \quad \varphi\left(\overline{\mathrm{x}},\mathrm{u}\right) \ge \varphi\left(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}}\right) + \overline{\varphi_{\mathrm{u}}}'\left(u - u\right)$$

для всех $\mathrm{X} \ge 0,\ U \ge 0$

Д. Перепишем условие③в виде $\varphi\left(x,\bar{u}\right) \le \varphi\left(\bar{x},\bar{u}\right) + \overline{\varphi_x'}\,x - \overline{\varphi_x'}\,\bar{x}$. Но по условию① $\overline{\varphi_x'}\,\bar{x} = 0$ и $\overline{\varphi_x'} \le 0$, так что $\overline{\varphi_x'}\,x \le 0$ для всех векторов $x \ge 0$. Отсюда следует $\varphi\left(x,\bar{u}\right) \le \varphi\left(\bar{x},\bar{u}\right)$, что и устанавливает левое из неравенств, опр-щих. седловую точку. Перепишем теперь условие④в виде $\varphi\left(\bar{x},u\right) \ge \varphi\left(\bar{x},\bar{u}\right) + \overline{\varphi_u'}\,u - \overline{\varphi_u'}\,\bar{u}$. А по условию② $\overline{\varphi_u'}\,\bar{u} = 0$ и $\overline{\varphi_u'}\,u \ge 0$, так что $\overline{\varphi_u'}\,u \ge 0$ для всех $u \ge 0$. Поэтому $\varphi\left(\bar{x},u\right) \ge \varphi\left(\bar{x},\bar{u}\right)$, что и представляет собой правое нерав-во стн. (23) (см.06).

Условия ③ и ④ можно интерпретировать сд-им образом. Приравниванию нулю выражения $\left(\overline{\varphi_x'}\left(x-\bar{x}\right)\right)=0$, стоящего в правой части условия③дает ур-е гиперпл-ти в (n+m)-мерном пр-ве, которая касается пвх-ти φ в точке $\left(\bar{x},\bar{u}\right)$. Условие ③означает, что при изменении вектора x и при пост-ом векторе $u=\bar{u}$ эта пл. должна всюду лежать над пвх-ю φ.

Аналогично условие ④ означает, что гиперпл-ть, касательная к пвх-ти φ в точке $\bar{x},\bar{u}$ должна быть всюду ниже пвх-ти φ при изменении вектора u и при пост-ом векторе $x = \bar{x}$.

Эти условия проверяются в каждом случае и они всегда выполняются, если фк. $\varphi\left(x,\bar{u}\right)$ вогнута по x, а фк. $\varphi\left(\bar{x},u\right)$ выпукла по u.

Отсюда следует, что если эти условия выпуклости и вогнутости выполняются для фк. $\varphi\left(x,u\right)$, то условия①и② т9 яв-ся как нх-ми, так дт-ми для того, чтобы точка $\left(\bar{x},\bar{u}\right)$ была седловой.

Возвратимся теперь к рас-ю общей задачи НП (24)–(26). Построим сначала ствщ-ю этой задаче фк-ю Лагранжа

$$L(X,U) = f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i\varphi_i\left(x\right). \tag{27}$$

т11. Пусть фк. $f,\varphi_1,...\varphi_m$ диф-мы, а L (X,U) – ств. фк-я Лагранжа. Тогда для того, чтобы вектор X^0 являлся решением общей задачи НП, необходимо, чтобы вектор X^0 и нек-ый вектор U^0 уд-ли условиям ①и② т9 для фк. $\varphi\left(X,U\right) = L\left(X,U\right)$.

Этой теореме можно дать экономическую инп-ю. Расписав подробно условия ① и ②, получим:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}u_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\le 0 \quad \text{и если} <, \text{то } \overline{x}_j=0, \tag{28}$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial u_i}=\varphi_i\left(x_1,...,x_n\right)\ge 0 \quad \text{и если} >, \text{то } \overline{u_i}=0,$$

где $\overline{x}_j, \overline{u}_i$ – крд. седловой точки, а x_j^0, u_i^0 – крд. решений задач НП, поэтому $\overline{x_j}=x_j^0$, $\overline{u_i}=u_i^0$. Фк-ю $f(x)$ можно понимать как фк-ю выпуска или дохода, устанавливающую связь между уровнями x_j опрн-ых производственных процессов и общим доходом (или выпуском продукта). Фк. $\varphi_1\left(x\right),...,\varphi_m\left(x\right)$ можно инп-ть как фк. потребления, устанавливающие связь между производственными уровнями x_j и использованием m видов лимитированных ресурсов. Тогда производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ является маргинальным доходом при j-м способе производства, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ – маргинальным потреблением i-го вида ресурса при j-м способе производства. Множители Лагранжа u_i можно инп-ть как приписанные значения, или теневые цены. Т.о. условие 1 стн. (28) означает, что маргинальная прибыль j-го способа производства должна быть равной нулю или отц-ой. При этом если она отц-на, то j-й способ производства исключается $\left(x_j=0\right)$.

Условие 2 стн. (28) просто означает, что если i-й вид ресурсов имеется в избытке, то его теневая цена равна нулю $\left(u_i=0\right)$.

Теорема т11, условия к-ой наз-ся условиями Куна-Таккера, непосредственно используется при решении задач НП. Хотя эта теорема обычно не дает алгоритма для выч-я решения, но она всегда обеспечивает нас способом проверки предполагаемого решения на опт-ть. То, что предполагаемое решение $\overline{X}$ уд-ет условиям Куна-Таккера, ещё не означает, что $\overline{X}$ опт- но, но если решение $\overline{X}$ условиям Куна-Таккера не уд-ет, то оно заведомо не яв-ся опт-ым.

Условия Куна-Таккера можно сделать более пригодным для использования с помощью сд-ей

т12. Пусть фк. $f,\varphi_1,...,\varphi_m$ диф-мы, а $L(X,U)$ – ств. фк-я Лагранжа. Тогда для того, чтобы вектор x^0 был решением общей задачи НП, дт-но, чтобы вектор x^0 и нек-ый вектор u^0 уд-ли условиям ① и② т.9 и условию③ т10 для фк. $\varphi(X,U)\equiv L(X,U)$.

Д-во следует из условий ① –③ с заменой фк. $\varphi(X,U)$ на фк-ю $L(X,U)=$ $=f(\mathrm{x})+\sum_{i=1}^{m}u_i\varphi_i(\mathrm{x})$. Как уже упоминалось условие ③ выполняется, если фк. $\varphi(\mathrm{x},\overline{u})$ будет вогнута, а $\varphi(\overline{\mathrm{x}},u)$ выпукла. Тогда возникает вопрос: при каких условиях фк. $L(\mathrm{x},\overline{u})$ будет вогнутой, а фк. $L(\overline{\mathrm{x}},u)$ выпуклой. Фк. $L(x,\overline{u})=f(\mathrm{x})+\sum_{i=1}^{m}\overline{u}_i\varphi_i(\mathrm{x})$ яв-ся неотц-ой лин. комбинаций фк-й $f,\varphi_1,...,\varphi_m$. Из сл1 (см. $m5$) следует, что если все фк. $f,\varphi_1,...\varphi_m$ вогнуты, то и любая их лин. комбинация яв-ся вогнутой. Рас-ев фк-ю $L(\overline{\mathrm{x}},u)$, видим что они лин., сд-но, выпукла (хотя и не строго выпукла).

Отсюда следует, что если фк. $f,\varphi_1,...,\varphi_m$ вогнуты, что условия т11 яв-ся нх-ми, так и дт-ми для опт-ти решения общей задачи НП. Из т9–т12 следует, что если фк. $f,\varphi_1,...,\varphi_m$ вогнуты, то нх-ые и дт-ые условия того, что точка (x^0,u^0) яв-ся седловой точкой фк. $L(\mathrm{x},u)$, совпадает с нх-ми и дт-ми условиями того, что точка X^0 яв-ся решением общей задачи НП, т.е. сущв-ие седловой точки фк. Лагранжа экв-но сущв-ю опт-го решения задачи НП. Именно этот факт сформулируется в сд-ей т13, назм-ой теоремой Куна-Таккера.

Пусть дана общая задача НП (24)–(26). Составим фк-ю Лагранжа (27) для этой задачи и сформулируем.

т13 (Куна-Таккера). Пусть фк. $f,\varphi_1,...,\varphi_m$ диф-мы и вогнуты для $X\ge 0$; пусть, кроме того, сущ-ет по крайней мере одна точка X, для к-ой $\varphi_i(x)>0,\ i=\overline{1,m}$, т.е. выполняется условие регулярности. Тогда вектор X^0 яв-ся опт. решением общей задачи НП ттогда, когда сущ-ет нек-ый вектор $u^0\ge 0$, для к-го вектор (x^0,u^0) яв-ся седловой точкой ств-ей фк. Лагранжа, т.е.

$$L(\mathrm{x},u^0)\le L(\mathrm{x}^0,u^0)\le L(\mathrm{x}^0,u) \tag{29}$$

Отметим, что стн-ия (29) в точке (x^0,u^0) экв-ны (см.① и ② т9) сд-им локальным условиям Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\le 0,\frac{\partial L}{\partial x_j}x_j^0=0,\ \ x_j^0\ge 0,\ j=\overline{1,n}\ \cdot \tag{30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}\ge 0,\frac{\partial L}{\partial u_i}u_i^0=0,\ \ u_i^0\ge 0,\ i=\overline{1m} \tag{31}$$

Условия т11и т12, будучи нх-ми и дт-мы для опт-ти предполагаемого решения, в то же время не дают вычт-го алгоритма для нахождения решения задачи НП. Однако способом исключения точек, заведомо не уд-их этим условиям, иногда удается найти искомое решение. Чтобы показать, как это делается с использованием условий Куна-Таккера, рас-им сд-й

п14. Найти $\min f(x_1,x_2)=\min(a,e^{-b_1x_1}+a_2e^{-b_2x_2})$ при огр-ях

$$1-x_1-x_2\ge 0,$$

$$x_1,x_2\ge 0,$$

где $a_1,b_1,a_2,b_2>0$ (установить их взаимосвязь при найденных решениях).

Р. Переходим к задаче мксз. и применим условия Куна-Таккера из т11.

$$\min f(x_1,x_2)=\max(-f(x_1,x_2))=\max(-a,e^{-b_1x_1}-a_2e^{-b_2x})$$

при условиях

$$1-x_1-x_2\ge 0;\ \ x_1,x_2\ge 0.$$

Фк-ей Лагранжа и нх-ми условиями в этой задаче яв-ся:

$$L(x_1,x_2,u)=-a,e^{-b_1x_1}-a_2e^{-b_2x_2}+u(1-x_1-x_2).$$

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_1}=a_1b_1e^{-b_1x_1}-u\le 0 \text{ и если } <,\text{ то } x_1^0=0,$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=a_2b_2e^{-b_2x_2}-u\le 0 \text{ и если } <,\text{ то } x_2^0=0,$$

$$3)\ \frac{\partial L}{\partial u}=(1-x_1-x_2)\ge 0 \text{ и если } >,\text{ то } u=0.$$

Т. к. фк. f и все огр. вогнуты по $x_{1,}x_2$, фк. L, будучи лин-ой отс-но пер-ой *u*, выпукла по *u*, эти условия будут также дт-ми для опт-ти решения. Но эти условия не приводят к какому-либо вычт. алгоритму, поэтому поступим сд-им образом:

а) Перечислим различные классы возможных внутренних и граничных решений.

б) Опр-им для параметров условия, к-ые должны быть нх-ми и дт-ми для каждого класса решений.

В этой задаче можно опр-ть четыре класса возможных решений.

Класс А: $x_1^0=0,\ x_2^0>0$. По условиям 1–3 такое решение может быть тогда, когда:

1) $a_1в_1-u\le 0,$

2) $a_2в_2e^{-b_2x_2}-u=0$

3) $x_2^0=1,$

т.к. иначе *u*=0 и условия 1 и 2 не могут быть выполнены.

Из условий 1–3 получим неравенство:

$$a_1в_1\le a_2в_2e^{-b_2},\ \text{или}\ ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2}\le -в_2\ .$$

Это условие, налагаемое на параметры, яв-ся нх-ым и дт-ым для того, чтобы решением было $x_1^0=0,\ x_2^0=1$.

Класс B: $x_1^0 \geq 0,\ x_2^0 = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a,в,e^{-в_1x_1} - u = 0 \\ 2)\ a_2в_2 - u = 0, \\ 3)\ x_1^0 = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_2в_2 \leq a,в,e^{-в_1} \text{ или } ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} \geq в_1 .$$

Это условие для параметров яв-ся нх. и дт., чтобы решением было $x_1^0 \geq 0,\ x_2^0 = 0.$

Класс C: $x_1^0 = x_2^0 = 0.$ Из условий 1–3 видно, что решение таким быть не может, т.к. тогда было бы

1) $a_1в_1 - u \leq 0$

2) $a_2в_2 - u \leq 0$

3) $u = 0$.

Класс $\text{D}: x_1^0 > 0,\ x_2^0 > 0.$

1) $a_1в_1e^{-b_1x_1} - u = 0,$

2) $a_2в_2e^{-b_2x_2} - u = 0,$

3) $1 - x_1 - x_2 = 0,$

т.к. иначе $u = 0$ и условия 1 и 2 не выполняются. Из 1–3 получим $a_1в_1e^{-b_1x_1} = a_2в_2e^{-b_2(1-x_1)} \Rightarrow ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} + в_2 = x_1\left(в_1 + в_2\right) \Rightarrow x_1^0 = \frac{ln\left(a_1в_1 / a_2в_2 + в_2\right) + в_2}{в_1 + в_2},$ отсюда с учетом $x_1 = 1 - x_2$ получим, что $x_2^0 = \frac{в_1 - ln\left(a_1в_1 / a_2в_2\right)}{в_1 + в_2}$. Т.к. $0 < x_1^0 < 1$ и $0 < x_2^0 < 1,$ то из полученных решений ств-но следует $ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} < в_1$ и $-в_2 < ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2}$, откуда $-в_2 < ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} < в_1$.

Итак, окончательно имеем:

$\text{A}: x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 1$ тогда, когда $ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} \leq -в_2$.

$\text{B}: x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 0$ тогда, когда $ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} \geq в_1$.

$\text{D}: x_1^0 = \frac{ln\left(a_1в_1 / a_2в_2\right) + в_2}{в_1 + в_2},\ x_2^0 = \frac{в_1 - ln\left(a_1в_1 / a_2в_2\right)}{в_1 + в_2}$ тогда, когда $-в_2 < ln\frac{a_1в_1}{a_2в_2} < в_1$.

В сд. примере покажем, что сущ-ет $u^0 \geq 0$, при к-ом в точке оптимума выполняются условия Куна-Таккера (30) и (31) для фк. $L(\mathrm{x}, u)$.

п15. Найти $\max Z = -x_1^2 - x_2^2$ при огр-ях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Р. Графическим методом легко решить задачу: $x_1^0 = 0{,}8;\ x_2^0 = 0{,}4;\ Z = -0{,}8.$

Огр-ия перепишем в виде $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 8 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \end{cases}$ и составим фк-ю Лагранжа

$\mathrm{L}(\mathrm{x}, u) = -x_1^2 - x_2^2 + u_1(2x_1 + x_2 - 2) + u_2(8 - 2x_1 - x_2) + u_3(6 - x_1 - x_2)$. Находим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2u_1 - 2u_2 - u_3; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + u_1 - u_2 - u_{3;}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = 8 - 2x_1 - x_2; \quad \frac{\partial L}{\partial u_3} = 6 - x_1 - x_2.$$

Согласно условиям (31) u_2 и u_3 должны принимать нулевые значения, т.к. подставляя $x_1^0 = 0{,}8$ и $x_2^0 = 0{,}4$ в $\frac{\partial L}{\partial u_2}$ и $\frac{\partial L}{\partial u_3}$, имеем значения, большие нуля, а по условию $\frac{\partial L}{\partial u_2} u_i^0 = 0$. Согласно условию u_1 может принимать нулевое значение, т.к. $\frac{\partial L}{\partial u_1} = 0$ при $x_1^0 = 0{,}8;\ x_2^0 = 0{,}4$

В ств. с (30) производная $\frac{\partial L}{\partial x;}(j = 1{,}2)$ должна принимать нулевые значения, т. к. крд-ы вектора X^0 отличны от нуля. Тогда $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 \cdot 0.8 + 2u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0{,}8$. Сд-но, в точке (x^0, u^0) выполняются условия Куна-Таккера и она дсв-но яв-ся точкой эксм.

зм4. Если требуется найти

$$\min Z = f(x_1, ..., x_n), \tag{32}$$

при огр-ях

$$\varphi_i(x_1, ..., x_n) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{33}$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j = \overline{1, n}, \tag{34}$$

где $f(x)$, $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$ – выпуклые фк., а(33),(34) – выпуклые замкнутое мн. и выполняется условие регулярности, т.е. сущ-ет точка Х, что $\varphi_i(x) < 0$, $i = \overline{1,m}$, то условия Куна-Таккера (аналогичные к (30) и (31)) сформулируется так: пусть для задачи НП (32)–(34) составлена фк. Лагранжа

$$L(\mathrm{x},u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi_i(x), \tag{35}$$

тогда вектор x^0 яв-ся опт. решением задачи (32)–(34) ттогда, когда сущ-ет вектор $u^0 \geq 0$, для к-го вектор (x^0, u^0) яв-ся седловой точкой фк. Лагранжа (35), т.е.

$$L(\mathrm{x}^0,u) \leq L(x^0,u^0) \leq L(\mathrm{x},u^0). \tag{36}$$

Стн-я (36) в точке (x^0, u^0) экв-ны сд. условиям Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j^0 = 0\ ,\ x_j^0 \geq 0\ ,\ j = \overline{1,m}\ , \tag{37}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} \leq 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial u_i} u_i^0 = 0\ ,\ u_i^0 \geq 0\ ,\ i = \overline{1,m}. \tag{38}$$

Задачи (32)–(34) наз. задачей выпуклого программирования (ВП), а (24)–(26) наз. задачей вогнутого программирования (ВГП).

Условия (37), (38) позволяют проверить “подозрительную” точку x^0 на оптимальность, определив u^0. Если такое решение $u^0 \geq 0$ сущ-ет, то пара (x^0, u^0) будет седловой точкой фк. Ланграндж, а x^0 – решением ств-ей задачи ВП.

п16. Проверить, яв-ся ли точка $\mathrm{x}^0 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ решением, и если да, то найти седловую точку фк. Ланграння задачи: Найти

$$\min f(x) = -4x_1 - x_2 + x_3^2$$

при огр-ях

$$\varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_3 - 1 \leq 0$$
$$\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0$$
$$\varphi_3(x) = -x_1 + x_2 + x_3 \leq 0,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Р. Составим фк-ю Лагранжа

$$L(x_1,u) = -4x_1 - x_2 + x_3^2 + u_1(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 - 1) + u_2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) +$$
$$+ u_3(-x_1 + x_2 + x_3).$$

Для нее имеем $\frac{\partial L(x^0,u)}{\partial u_1} = 0,\ \frac{\partial L(x^0,u)}{\partial u_2} = 0,\ \frac{\partial L(x^0,u)}{\partial u_3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0.$ Сд-но, $u_3 = 0$.

Потребуем теперь, чтобы $\frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial x_1}=-4+\sqrt{3}\,u_1+\sqrt{3}\,u_2-u_3=0,\frac{\partial L(x_1^0 u)}{\partial x_2}=$ $=1+u_1-u_2+u_3=0,\ \frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial x_3}=\frac{\sqrt{3}}{2}u_1+u_3\geq 0$. Т.к. $u_3=0$, то выводим отсюда

$$\begin{cases} u_1+u_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}, \\ u_1-u_2=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=\left(4\sqrt{3}+3\right)/6>0, \\ u_2=\left(4\sqrt{3}-3\right)/6>0. \end{cases}$$

Т.о., пара точек $x^0=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $u^0=\left(\frac{4\sqrt{3}+3}{6},\frac{4\sqrt{3}-3}{6},0\right)$ яв-ся седловой точкой фк-и Лагранжа.

п17. Найти мнм-го расстояния от начала крд. до выпуклого мн:

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 4, \\ 2x_1+x_2\geq 5;\ x_1,x_2\geq 0. \end{cases}$$

Р. Опр-им расстояние $d=\min f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Огр-ия перепишем в виде:

$$\begin{cases} 4-x_1-x_2\leq 0, \\ 5-2x_1-x_2\leq 0. \end{cases}$$

Составим фк-ю Лагранжа $L(x,u)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}+u_1(4-x_1-x_2)+u_2(5-2x_1-x_2)$. Находим

$$\left.\begin{array}{l|l} \frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-u_1-2u_2=0 & \frac{\partial L}{\partial u_1}=4-x_1-x_2=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-u_1-u_2=0 & \frac{\partial L}{\partial u_2}=5-2x_1-x_2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^0=(1,3).$$

Используя стн-я (37) и (38), получим

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial x_1}=\frac{1}{\sqrt{10}}-u_1-2u_2\leq 0 \\ \frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial x_2}=\frac{3}{\sqrt{10}}-u_1-u_2\leq 0 \\ \frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial u_1}=0,\ u_1>0 \\ \frac{\partial L\left(x^0,u\right)}{\partial u_2}=-2<0,\ u_2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-u_1=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-u_1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1=x_2 \\ \frac{\partial L}{\partial u_1}=4-x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2=2, \\ \text{т.е. } x^0=(2,2), \\ \text{тогда } \mathrm{u}_1=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}$$

Итак, найдено решение задачи $x_1=2,\ x_2=2,\ \min f\left(x^0\right)=2\sqrt{2}$, а пара точек $x^0=(2,2),\ u^0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ яв-ся седловой точкой фк-и Лагранжа.

ЛЕКЦИЯ 14

4.2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАМИРОВАНИЕ

1^0. Постановка и решение задачи дробно-линейного программирования. Найти

$$\max Z = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} c_j x_j + c_o}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o}, \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j = a_{io},\ i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Очевидно, что в обл. решений (2)–(3) выражение $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o \neq 0$ (в противном случае $Z_{\max} \to \infty$), т. е. сохраняет постоянный знак. Будем считать его плж-ым, т. к. в противном случае, знак минус можно отнести к числителю. Обз-им

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o = \frac{1}{y_o} \tag{4}$$

и введем новые пер

$$y_j = y_o x_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

В новых пер. модель (1)–(3) принимает вид

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_o y_o, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - a_{io} y_o = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_o y_o = 1 \tag{8}$$

$$y_o \geq 0 \ \text{ и } \ y_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \tag{9}$$

Т.о. получили модель задачи ЛП, к-ая может быть решена обычным симплекс-методом. Из опт-го решения $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*, y_o^*)$ задачи (6)–(9) при $y_o^* > 0$ получаем, с помощью стн-й (5), опт-ое решение исходной задачи. В случае, когда $y_o^* = 0$, имеем $\Sigma d_j x_j^* + d_o \to \infty$, откуда следует неогр-ть области. В этом случае $Z_{\max}$ (конечный или беск-ый) достигается в беск-но удаленных точках.

п1. Найти $\max Z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$,

при огр-ях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - x_3 \qquad &= -5 \\ -x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad &= \ \ 7 \\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_5 &= 11 \end{aligned}\right\}, \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Р. Обз-им $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{y_o}$, $y_1 = y_o x_1$, $y_2 = y_o x_2, \ldots, y_5 = y_o x_5$. Тогда придем к лин-ой модели (6)–(9), к-ая в данном случае запишется в виде:

$$\max Z = 3y_1 - y_2$$

$$\left.\begin{aligned} -y_1 - y_2 + y_3 \qquad\quad - 5y_o &= 0 \\ -y_1 + 3y_2 \quad + y_4 \quad - 7y_o &= 0 \\ -3y_1 + y_2 \qquad - y_5 + 11y_o &= 0 \\ y_1 + y_2 \qquad\qquad + \vartheta \quad &= 1 \end{aligned}\right\}, \ y_1 \geq 0, \ldots, y_5 \geq 0, y_o \geq 0.$$

Здесь 1-е, 3-е (после умн-ия на -1) и 2-е ур-ия разрешены отс-но базисных пер. y_3, y_4 и y_5. Поэтому для образования исходного опорного решения введем лишь одну искусственную пер. ϑ в последнее ур. и выполняем симплексную табл. 1. Причем как только убрали из базиса пер-ю ϑ ств-й столбец можно исключить из рас-ия (не включая их эл-ты в Σ). После двух операций получаем опт. решение (3-е огр. можно было взять так: $3y_1 - y_2 + y_5 - 11y_0 = 0$):

$$y_1^* = 1, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = \frac{26}{11}, \quad y_4^* = \frac{32}{11}, \quad y_5^* = 0 \quad и \quad y_0^* = \frac{3}{11}.$$

Тогда в силу (5) находим опт. Решение исходной задачи

$$x_1^* = \frac{y_1^*}{y_o} = \frac{11}{3}, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = \frac{y_3^*}{y_o} = \frac{26}{3}, \quad x_4^* = \frac{y_4^*}{y_o} = \frac{32}{3}, \quad x_5^* = 0 \ \text{ и } \ Z_{\max} = 3.$$

Таблица 1

i	c	Базис	b	3	–1	0	0	0	0	0	Σ
				y_1	y_2	y_o	y_3	y_4	y_5	ϑ	
1	0	y_3	0	–1	–1	–5	1				-6
2	0	y_4	0	–1	3	–7		1			-4
3	0	y_5	0	–3	1	11			-1		8
4	0	ϑ	1	$\boxed{1}$	1	0				1	3
m+1	$Z_j - c_j$		0	–3	1	0	0	0	0	0	–2

Продолжение

i	c	Базис	b	3	–1	0	0	0	0	0	Σ
				y_1	y_2	y_o	y_3	y_4	y_5	ϑ	
1	0	y_3	1	0	0	–5	1				–3
2	0	y_4	1	0	4	–7		1			–1
3	0	y_5	3	0	4	$\boxed{11}$			-1		17
4	3	y_1	1	1	1	0					3
m+1	$Z_j - c_j$		3	0	4	0	0	0	0		7
1	0	y_3	$\frac{26}{11}$	0	$\frac{26}{11}$	0	1		$-\frac{5}{11}$		$\frac{52}{11}$
2	0	y_4	$\frac{32}{11}$	0	$\frac{72}{11}$	0		1	$-\frac{7}{11}$		$\frac{108}{11}$
3	0	y_0	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{4}{11}$	1			$-\frac{1}{11}$		$\frac{17}{11}$
4	3	y_1	1	1	1	0					3
m+1	$Z_j - c_j$		3	0	4	0	0	0	0		7

2^0. Квадратичные функции и их основные свойства. Квадратичной (кв.) функцией (формой) от n пер-ых наз. фк-я вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j . \qquad (10)$$

С каждой такой фк-ей связана симметрическая матрица n-го порядка $c = \left(c_{ij}\right)$. Диагональные эл. c_{ii} этой матрицы яв-ся коэф-ми при x_i^2, а недиагональные эл. $c_{ij} = c_{ji}$ равны половине коэф-та при $x_i x_j$.

Н-р, кв-ой фк-и $f\left(x\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ств-ет матрица $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

$$f\left(x\right) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если при любом x, кроме $x = 0$, выполняется нерав-во $f\left(x\right) > 0$ $\left(f\left(x\right) < 0\right)$, то фк. $f\left(x\right)$ наз. плж-но (отц-но) опр-ной.

Если при этом для нек-ых $x \neq 0$ возможно и равенство $\left(f(x)=0\right)$, то фк. $f(x)$ наз. неотц-ой (неплж-ой), т.е. $f(x) \geq 0 \left(f(x) \geq 0\right)$,

Если $f(x)>0$ при одних x и $f(x)<0$ при др. x, то фк. $f(x)$ наз. неопр-ой.

п2. 1) $Z = x_1^2 + x_2^2$ – плж-но опр-ая фк., т.е. $Z > 0$.

2) $Z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 - x_2\right)^2$ – неотц. фк-я (т.к. $Z > 0$ при $x_1 \neq x_2$ и $Z = 0$ при $x_1 = x_2$), т.е. $Z \geq 0$.

3) $Z = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -\left(x_1 - x_2\right)^2$ – неплж. фк-я, т.е. $Z \leq 0$.

4) $Z = x_1^2 - x_2^2$ – неопределенная фк., т.к. $Z > 0$ при $x_1^2 > x_2^2$ и

$Z < 0$ при $x_1^2 < x_2^2$.

Указанные св. кв-ой фк. можно установить в общем случае по знакам корней λ_i характеристического ур-я матрицы *C*, имеющего вид

$$\begin{vmatrix} \mathrm{c}_{11} - \lambda & \mathrm{c}_{12} & \ldots & \mathrm{c}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{c}_{21} & \mathrm{c}_{22} - \lambda & \ldots & \mathrm{c}_{2\mathrm{n}} \\ \hdashline \mathrm{c}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{c}_{\mathrm{n}2} & \ldots & \mathrm{c}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =0 \qquad (11)$$

т1. Для того чтобы кв-я фк. (10) была плж-но (отц-но) опр-ой, нх-мо и дт-но, чтобы все корни ур-ия (11) были плж-ми (отц-ми).

Если среди этих корней есть хотя бы один равный нулю – кв. фк-я неотц-ая (неплж-ая), т.е. $f(x) \geq 0 \left(f(x) \leq 0\right)$. Наконец, если имеются корни разного знака – кв. фк. неопределенная.

Опр-ие указанных св-в кв-ой фк-и важно в связи со сд-ей

т2. Неотц. кв-я фк. яв-ся выпуклой, а не плж-ая – вогнутой. Обе теоремы примем без доказательства.

п3. Опр-ть св-ва кв-ых фк-й: 1) $Z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$; 2) $Z = x_1^2 - x_2^2$.

Р. 1) Для $Z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ имеем, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда характеристическое ур. запишется в виде $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Сд-но, по т1 заключаем, что данная фк. неотц-ая, т.е. $Z \geq 0$.

2) Для $Z = x_1^2 - x_2^2$ имеем $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда ур. (11) запишется в виде $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$, значит, в силу т1. фк. неопр-ая.

3^0. Квадратичное программирование. К задаче квадратичного программирования (КП) относят специальный класс задач НП, для к-ых целевая фк. $f(x)$ – квадратичная, вогнутая, и все огр-я лин.

Применив к этой задаче теорему Куна-Таккера, получим условия для опт-го решения в виде системы лин-ых ур-й, решить к-ые можно симплекс-методом.

В матричном виде задача КП записывается так: Найти

$$\max f(x) = B'x + \frac{1}{2}x'Cx = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \tag{12}$$

при огр-ях

$$A_0 - Ax \geq 0, \tag{13}$$

$$x \geq 0, \tag{14}$$

где $c = \left(c_{ij}\right)_{n,n}$ – симметричная, отц-но опр-ная матрица;

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_n \end{bmatrix}$; $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, $A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ \dots \\ a_{m0} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; B', x'$ – транспонированные *B, x.*

Заметим, что если *C* – отц-но опр-ная матрица, то кв. форма $x'Cx$ вогнута. Сд-но задачи (12)-(14). яв-ся задачей вогнутого программирования (ВГП).

Н-р, кв. Формы $f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 4x_1^2 - x_2^2; f(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2$ есть вогнутые фк.

4^0. Теорема Куна-Таккера. Примеры. Будем предпологать, что $f(x)$ – строго вогнута и напишем для задачи КП фк-ю Лагранжа:

$$L(x,u) = B'x + \frac{1}{2}x'Cx + u'(A_0 - Ax). \tag{15}$$

Применив к задаче (12)–(14) теорему Куна-Таккера, получим нх-ые и дт-ые условия опт-ти решения в виде сд-ей

т3. Вектор $\overset{\circ}{x} \geq 0$ яв-ся опт-ым решением задачи КП ттогда, когда сущ-ют такие *m*-мерные векторы $u > 0, w \geq 0$ и *n*-мерный вектор $v \geq 0,$ что выполняются сд. условия:

1) $B + Cx - A'u + v = 0$

2) $A_0 - Ax - w = 0$

3) $v'x = 0$

4) $w'u = 0$

Заметим, что условия 1) и 2) образуют отс-но пер-ых x, u, v и w систему из $n + m$ ур-ий с $2(m+n)$ неизвестными.

Д. Из стн. (15) получим

$$\frac{\partial\left(B'x\right)}{\partial x} = B, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\left(x'Cx\right)}{\partial x} = 2Cx, \tag{17}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Применив теорему Куна-Таккера к фк. (15) и используя (16) и (17) имеем:

а) $\frac{\partial L(x,u)}{\partial x} = B + Cx - A'u \leq 0$ и если $\frac{\partial L(x,u)}{\partial x_j} < 0,$ то $x_j^0 = 0,\ j = \overline{1,n}$,

б) $\frac{\partial L(x,u)}{\partial u} = A_0 - Ax \geq 0$ и если $\frac{\partial L(x,u)}{\partial u_i} > 0,$ то $u_i^0 = 0, i = \overline{1,m}.$

Введем два вспомогательных вектора $V' = \left(\vartheta_1,...,\vartheta_n\right) \geq 0$ и $W' = \left(w_1,...,w_m\right) \geq 0,$ причем выберем $v_j > 0,$ если $\frac{\partial L(x,u)}{\partial x_j} < 0$ и $v_j = 0,$ если $\frac{\partial L\left(x_1 u\right)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}$. Аналогично выберем $w_i > 0,$ если $\frac{\partial L}{\partial u_i} > 0$ и $w_i = 0,$ если $\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}.$

Прибавив вектор v к условиям а) u вычтя w из б), получим рав-ва:

$$1)\ B + Cx - A'u + V = 0,\ 2)\ A_0 - Ax - w = 0. \tag{18}$$

Сравнив компоненты векторов x и v, а также u и w, получим

$$3)\ v'x = 0,\ 4)\ w'u = 0 \ \blacksquare$$

Из условий 3) и 4) следует, что по меньшей мере n пер-ых из $x, v,$ а также m пер-ых из набора u, w обращаются в нуль.

Как уже отмечалось, система (18) состоит из ур-й с $2\left(m+n\right)$ пер-ых.

Т.о., если сущ-ет опт. решение задачи (12)–(14), что оно должно быть одним из базисных решений (18). Поскольку для нахождения допустимого базисного решения может быть применен симплекс-метод, то этот метод вполне пригоден для решения задач КП.

Перепишем (18) в виде

$$\begin{gathered} Cx - A'u + v = -B, \\ Ax + w = A_0\,. \end{gathered} \tag{19}$$

Для нахождения нач-го базиса (19) можно применить метод искусственных пер. Введя искусственные пер. $z = \left(z_1,...,z_n\right)$ и $y = \left(y_1,...,y_m\right),$ приходим к сд-ей системе

$$\begin{gathered} Cx - A'u + \nu + z = -B, \\ Ax + w + y = A_0. \end{gathered} \tag{20}$$

Выбрав компоненты векторов z *и* y одинакового знака со знаками ств-их свободных членов $-B,\ A_0$, находим нач. базисное решение.

Составив псевдоцелевую фк. $z=\sum\limits_{i=1}^{m} My_i+\sum\limits_{j=1}^{n} MZ_j\,(M\gg C)$, выводим из базиса искусственные пер. $\{y_i\}$ и $\{z_j\}$ и вводим *x, u, v и w,* учитывая условия $v'x=0,\ w'u=0.$

Если удается вывести все искусственные пер. и при этом уд-ся условия 3) и 4) т3., то найденное базисное решение будет опт-ым.

п4. Найти

$$\max f(x_1,x_2)=10x_1+20x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2$$

при огр-ях

$$\left.\begin{aligned} 8-x_2\geq 0,\\ 10-x_1-x_2\geq 0\end{aligned}\right\} x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Р. Т.к. в данном случае кв. форма $f(x_1,x_2)$ вогнута и огр-ия лин-ны, то имеем задачу КП. Составим фк-ю Лагранжа

$$L(x,u)=10x_1+20x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2+u_1(8-x_2)+u_2(10-x_1-x_2)\,.$$

Применив теорему Куна-Таккера, получим сд. условия для седловой точки:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1}=10+x_2-4x_1-u_2\leq 0,\\ &\frac{\partial L}{\partial x_2}=20+x_1-4x_2-u_1-u_2\leq 0,\\ &\frac{\partial L}{\partial u_1}=8-x_2\geq 0,\\ &\frac{\partial L}{\partial u_2}=10-x_1-x_2\geq 0.\end{aligned}\right\}\text{I}\quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1}x_1=(10+x_2-4x_1-u_2)x_1=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial x_2}x_2=(20+x_1-4x_2-u_1-u_2)x_2=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial u_1}u_1=(8-x_2)u_1=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial u_2}u_2=(10-x_1-x_2)u_2=0.\end{aligned}\right\}\text{II}$$

Требуется найти такое решение системы нерав-в I, к-ое одновременно уд-ет и системе II. Для этого можно было бы, н-р, применить метод перебора и перебрать все возможные варианты вида:

$$\begin{aligned} &1)\ x\neq 0,\quad x_2\neq 0,\quad u_1\neq 0,\quad u_2\neq 0,\\ &2)\ x_1=0,\quad x_2\neq 0,\quad u_1\neq 0,\quad u_2\neq 0,\end{aligned}$$

$$16)\ x_1=0,\quad x_2=0,\quad u_1=0,\quad u_2=0.$$

Однако в данном случае этот подход не рационален, поскольку можно применить стандартный алгоритм ЛП.

Перепишем систему I в виде

$$\left.\begin{aligned} &4x_1 - x_2 + u_2 \geq 10 \\ &-x_1 + 4x_2 + u_1 + u_2 \geq 20 \\ &x_2 \leq 8 \\ &x_1 + x_2 \leq 10 \end{aligned}\right\} \text{Ia}$$

Вводим теперь свободные пер. $\vartheta_1, \vartheta_2, w_1, w_2$, отражающие нерав-ва Ia в рав-ва. Эти пер. уд-ют дпн-ым условиям $\vartheta_1 x_1 = 0, \vartheta_2 x_2 = 0, w_1 u_1 = 0, w_2 u_2 = 0.$

$$\left.\begin{aligned} &(a_1) && 4x_1 - x_2 + u_2 - \vartheta_1 = 10 \\ &(a_2) && -x_1 + 4x_2 + u_1 + u_2 - \vartheta_2 = 20 \\ &(a_3) && x_2 + w_1 = 8 \\ &(a_4) && x_1 + x_2 + w_2 = 10 \end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

Для нахождения допустимого базисного решения системы III применим метод (см. 1°:3.4) искусственных пер-х y_1 и y_2, вводя их в огр-ия (a_1) и (a_2). Образуем псевдоцелевую фк. $\min Z = My_1 + My_2$. Составим первую симплекс-таблицу (табл. 2). Выполнив первую итерацию, выводим из базиса пер-ю y_1 и включаем в базис пер-ю x_1 и так продолжаем до получения решения задачи. Поскольку в индексной строке (последняя строка табл. 2) нет пжл-ых чисел, то получено допустимое базисное решение $x_1 = 4,$: $x_2 = 6, w_1 = 2, w_2 = 0, u_1 = u_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0.$ Т.к. $x_1\vartheta_1 = 0,\ x_2\vartheta_2 = 0,\ u_1 w_1 = 0,$ $u_2 w_1 = 0,$ то это решение яв-ся опт-ым. Итак, $x_1^* = 4,\ x_2^* = 6,$ $f_{\max} = 10\cdot 4 + 20\cdot 6 + 4\cdot 6 - 2\cdot 16 - 2\cdot 36 = 80.$

Заметим, что в качестве псевдоцелевой фк-и можно взять и фк-ю $\max Z = -y_1 - y_2$ (см. п5).

Если огр-ия даны в виде рав-в, то опт. решение задачи (12)–(14) можно найти из системы ур-ий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{io} \left(i = \overline{1\ ,m}\right) \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} + u_j = 0 \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{22}$$

$$x_j \geq 0,\ u_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{23}$$

$$x_j u_j = 0 \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{24}$$

п5. Найти:

$$\max f(x) = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2,$$

Таблица 2

i	С	Базис	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Σ
				x_1	x_2	u_1	u_2	ϑ_1	ϑ_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
1	М	y_1	10	$\boxed{4}$	–1	0	1	–1	0	1	0	0	0	14
2	М	y_2	20	–1	4	1	1	0	–1	0	1	0	0	25
3	0	w_1	8	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10
4	0	w_2	10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	13
$m+1$			30м	3м	3м	м	2м	–м	–м	0	0	0	0	37м
1	0	x_1	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
2	м	y_2	$\frac{45}{2}$	0	$\boxed{\frac{15}{4}}$	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	–1	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{57}{2}$
3	0	w_1	8	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10
4	0	w_2	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{19}{2}$
$m+1$			$\frac{45}{2}$м	0	$\frac{15}{4}$м	м	$\frac{5}{4}$м	$-\frac{1}{4}$м	–м	$-\frac{3}{4}$м	0	0	0	$\frac{53}{2}$м
1	0	x_1	4	1	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{27}{5}$
2	0	x_2	6	0	1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	0	0	$\frac{114}{15}$
3	0	w_1	2	0	0	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{4}{15}$	1	0	$\frac{12}{5}$
4	0	w_2	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	–м	–м	0	0	–2м

при огр-ях:

$$\left.\begin{aligned}2x_1+5x_2+x_3&=20\\2x_1-x_2+x_4&=8\end{aligned}\right\},\quad x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$$

Р. Т.к. $C=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 0\\0 & 15-\lambda\end{vmatrix}=(4+\lambda)(15+\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=-4,\ \lambda_2=-15,$ то фк. $f(x)$ вогнутая, а огр-ия лин-ы, значит, имеем задачу КП.

Огр-ия перепишем в виде $\left.\begin{array}{l} 20-2x_1-5x_2-x_3=0 \\ 8-2x_1+x_2-x_4=0 \end{array}\right\}$ и составим фк-ю Лагранжа

$L(x,u)=32x_1+120x_2-4x_1^2-15x_2^2+\lambda_1(20-2x_1-5x_2-x_3)+\lambda_2(8-2x_1+x_2-x_4)$.

Применив теорему Куни-Таккера при огр-ях рав-ах, получим

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=20-2x_1-5x_2-x_3=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}=8-2x_1+x_2-x_4=0 \end{array}\right\} \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} 2x_1+5x_2+x_3=20 \\ 2x_1-x_2+x_4=8 \end{array}\right\} \qquad (21')$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=32-8x_1-2\lambda_1-2\lambda_2<0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=120-30x_2-5\lambda_1+\lambda_2<0 \end{array}\right\} \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} 8x_1+2\lambda_1+2\lambda_2-u_1=32 \\ 30x_1+5\lambda_1-\lambda_2-u_2=120 \end{array}\right\} \qquad (22')$$

Поскольку пер. λ_1 и λ_2 имеют любой знак (в силу рав-в огр-й), исключим их из системы $(22')$, пологая $\begin{cases} -\lambda_1+u_3=0 \\ -\lambda_2+u_4=0 \end{cases}$. Откуда найдем $\lambda_1=u_3$, $\lambda_2=u_4$, и подставим их в $(22')$. Окончательно получим:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & & & & =20 \\ 2x_1 & -x_2 & & +x_4 & & & & & =8 \\ 8x_1 & & & & -u_1 & & +2u_3 & +2u_4+\vartheta_1 & =32 \\ & 30x_2 & & & & -u_2 & +5u_3 & -u_4+\vartheta_2 & =120 \end{array}\right\}, \qquad (25)$$

$$x_1 \geq 0_1,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0, \ldots, u_4 \geq 0, \qquad (23')$$

$$x_1u_1=0,\ x_2u_2=0,\ x_3u_3=0,\ x_4u_4=0, \qquad (24')$$

где $\vartheta_1 \geq 0, \vartheta_2 \geq 0$ – искусственные пер., к-ые ввели только в последние два ур-ия, т.к. первые два разрешены отс-но базисных пер. x_3 и x_4.

В системе (25) все пер. неотц-ые. Для отыскания опорного решения этой системы будем решать (табл. 3) симплекс-методом задачу $\max Z=-\vartheta_1-\vartheta_2$ при условиях (25) и дпн-ом огр-и (24) на выбор базиса.

Заметим, что ключевой столбец на каждой итерации выбирается по отц-ой оценки индексной строки с учетом условий (24). Так, н-р, на 1-й итерации при выборе ключевого столбца по оценке – 7 пришлось бы ввести в базис u_3 (вместо ϑ_1 или ϑ_2), что не возможно, т. к. в базисе уже есть x_3. Аналогично нельзя выбирать столбец с оценкой – 1 и т.д. Причем в $\sum$ не включаем эл-ты столбцов ϑ_1 и ϑ_2.

После III итерации получим опт. решение, уд-щее условиям $(24')$, к-ое, т.о., яв-ся опт. решением задачи КП:

$$x^* = (\frac{5}{2}, 3, 0, 6), Z_{\max} = 280$$

Таблица 3

i	**С**	Базис	a_{i0}									−1	−1	$\sum$
				x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	u_4	ϑ_1	ϑ_2	
1		x_3	20	2	5	1								28
2		x_4	8	2	−1		1							10
3	−1	ϑ_1	32	8				−1		2	2	1		43
4	−1	ϑ_2	120		$\boxed{30}$				−1	5	−1		1	153
m+1			−152	−8	−30			1	1	−7	−1			−196
1		x_3	0	$\boxed{2}$	0	1			1/6	−5/6	1/6			5/2
2		x_4	12	2	0		1		−1/30	1/6	−1/70			151/10
3	−1	v_1	32	8				−1		2	2	1		43
4		x_2	4		1				−1/30	1/6	−1/30			51/10
m+1			−32	-8	0			1	0	−2	−2			−43
1		x_1	0	1	0	1/2			1/12	−5/12	1/12			5/4
2		x_4	12	0	0	−1	1		−1/5	1	−1/5			63/5
3	−1	v_1	32	0	0	−4	0	−1	−2/3	$\boxed{16/3}$	4/3			33
4		x_2	4	0	1				−1/30	1/6	−1/30			51/10
m+1			−32	0	0	4	0	1	2/3	−16/3	−4/3			−33
1		x_1	5/2	1	0	3/16	0	−5/64	1/32	0	3/16			285/64
2		x_4	6	0	0	−1/4	1	3/16	−3/40	0	−9/20			513/80
3		u_3	6	0	0	−3/4	0	−3/16	−1/8	1	1/4			99/16
4		x_2	3	0	1	1/8	0	1/32	−1/80	0	−3/40			691/160
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0			0

ЛЕКЦИЯ 15

4.3 ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

1^0. Особенности градиентных методов. Градиентные методы относятся к приближенным (прж.) методам решения задач НП. В общем случае они обеспечивают получение опт-го решения с помощью беск-го процесса последовательных (посл.) прж-й. Однако в нек-ых случаях процесс может закончиться и через конечное число итераций.

Градиентные методы могут применяться к любой задаче НП, приводя лишь к локальному, а не глобальному эксм. Поэтому они оказываются более эффективными при решении задач вогнутого программирования (ВГП), где всякий локальный эксм. есть одновременно и глобальный.

Одно из преимуществ градиентного метода состоит в том, что итерационный процесс может быть начат с любого допустимого решения, т.е. нет нх-ти в какой либо специальной форме начального допустимого решения, как, н-р, базисной.

Пусть дана фк. $z = f(x)$, где $x = (x_1, ..., x_n)$. Градиентом $\nabla f(x^0)$ этой фк. в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ наз. вектор, крд-ми к-го служат значения в этой точке частных производных первого порядка по ств-щей пер-ой, т.е.

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right) \qquad (1)$$

Антиградиентом наз. вектор $-\nabla f(x^0)$.

Градиент фк-и $f(x)$ задает в данной точке $x = x^0$ направление наискорей-шего роста этой фк-и, антиградиент, ств-но – наискорейшего убывания фк-и. При этом на практике удобно использовать нормированные градиент и антиградиент

$$\nabla f^0 = \frac{\nabla f(x^0)}{|\nabla f(x^0)|} \text{ и } -\nabla f^0 = -\frac{\nabla f(x^0)}{|\nabla f(x^0)|} \qquad (1')$$

Дифференциал (диф.) фк-и, прж-но равный ее полному приращению, находится из скалярного пзв-ия

$$dz = \nabla f \cdot \Delta x \approx \Delta z, \qquad (2)$$

где $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$.

Перемещение из точки x^0 вдоль градиента означает перемещение на величину

$$\Delta x = \lambda \cdot \nabla f^0, \qquad (3)$$

где λ – шаг перемещения при каждой итерации.

Для фк-и $z = f(x)$ при $z = C = const$ выражение $f(x) = C$ наз. линией уровня. Н-р, для фк-и $z = x^2 + y^2$ при $z = C$ выражения $x^2 + y^2 = C_1$, $x^2 + y^2 = C_2, ...$ изображают линии уровня в виде окружностей.

п1. Вычислить градиент фк-и $z = x^2 y - 2xy + \frac{x}{y}$ в точке $x^0 = (1,2)$.

Р. $$\left.\begin{array}{l|l} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 2y + \frac{1}{y} & \frac{\partial z(x^0)}{\partial x} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2x - \frac{x}{y^2} & \frac{\partial z(x^0)}{\partial y} = -\frac{5}{4} \end{array}\right| \Rightarrow \nabla z(x^0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right) \text{ или } \nabla z^0 = \frac{\nabla z(x^0)}{\left|\nabla z(x^0)\right|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

п2. Построить линии уровня, вычислить и построить градиент фк-и $z = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2$ в точке $x^0 = (7,4)$.

Р. $z(x^0) = (7-2)^2 - (4-1)^2 = 16$, откуда получим линии уровня $(x_1-2)^2 - (x_2-1)^2 = 4^2$, проходящей через точку x^0 (см. рис. 1). При др-их $z = C_1, z = C_2, ...$ получим др-ие ств. линии уровня (они на рис. 1 указаны пунктирными линиями), н-р, при $z = 0$ имеем пм. $x_2 = x_1 - 1$ и $x_2 = -x_1 + 3$. Теперь выч-им градиенты:

$$\left.\begin{array}{l|l} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) & \frac{\partial z(x^0)}{\partial x_1} = 10 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = -2(x_2 - 1) & \frac{\partial z(x^0)}{\partial x_2} = -6 \end{array}\right| \Rightarrow \nabla z(x^0) = (10, -6) \text{ или } \nabla z^0 = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right).$$

Нормированный градиент ∇z^0 указывает в данной точке $x^0 = (7,4)$ направление наискорейшего роста фк. $z = f(x) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2$ (см. рис. 1)

2^0. Градиентные методы при нахождении безусловного экстремума функции. При нахождении безусловного эксм. фк. $z = f(x)$ (т. е. при отсутствии огр-й) нх-мо на каждой итерации выбирать шаг перемещения (множитель λ), обеспечивающий нб. возрастание фк-и Δz.

Перемещения из точки x^0 в точку x' приводит к изменению фк-и

$$\Delta z = f(x') - f(x^0) = f(x_1', ..., x_n') - f(x_1^0, ..., x_n^0), \tag{4}$$

где $x_1' = x_1^0 + \lambda \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, ..., x_k' = x_k^0 + \lambda \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, ..., x_n' = x_n^0 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}$.

Вел. λ может быть опр-на из условий экс-ма (4). Нх-ое условие экс-ма дает ур-ие

$$\frac{d\Delta z}{d\lambda} = \frac{\partial f(x')}{\partial x_1} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f(x')}{\partial x_n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = \nabla f(x') \nabla f(x^0) = 0 \tag{5}$$

Если опр-ие λ по ур-ю (5) связано со сложными выч-ми, то шаг λ выбирают дт-но малым, чтобы не перейти в обл. уб-ия фк-и.

п3. Найти градиентным методом $\max z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$, начав итерационный процесс с точки $x^0 = (4,5)$. Сопроводить решение графической интерпретацией.

Р. Находим $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 4 - 2x_1$ и $\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2 - 2x_2$.

I итерация. Имеем $\nabla z\left(x^0\right) = (4 - 2\cdot 4;\ 2 - 2\cdot 5) = (-4;-8)$.

Опр-им $x' = x^0 + \lambda \nabla z\left(x^0\right) = (4,5) + \lambda(-4,-8) = (4 - 4\lambda, 5 - 8\lambda)$, тогда

$\nabla z(x') = \left[4 - 2(4 - 4\lambda), 2 - 2(5 - 8\lambda)\right] = (-4 + 8\lambda, -8 + 16\lambda)$. По (5) находим

$$\frac{d\nabla z}{d\lambda} = \nabla z(x')\nabla z\left(x^0\right) = (-4 + 8\lambda)(-4) + (-8 + 16\lambda)(-8) = 80 - 160\lambda = 0,$$

откуда $\lambda^0 = \frac{1}{2}$. Т.к. $\frac{d^2\Delta z}{d\lambda^2} = -160 < 0$, то найденное значение λ яв-ся точкой мкс-ма Δz.

С помощью $\lambda^0 = \frac{1}{2}$ находим новую точку $x' = \left(4 - 4\cdot\frac{1}{2},\ 5 - 8\cdot\frac{1}{2}\right) = (2,1)$.

II интерация. Для нач-ой точки $x' = (2,1)$ находим

$\nabla z(x') = (4 - 2\cdot 2, 2 - 2\cdot 1) = (0,0)$. Сд-но, $x' = (2,1)$ яв-ся стационарной (критической) точкой и дальнейшее перемещение вдоль градиента невозможно (рис. 2).

Т. к. фк. $z = f(x)$ вогнутая, то в найденной точке достигается глобальный мкс-ум $z_{\max} = 4\cdot 2 + 2\cdot 1 - 2^2 - 1^2 + 5 = 10$, а в нач. точке

$$z_0 = 4\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4^2 - 5^2 + 5 = -10.$$

3⁰. Градиентные методы при нахождении условного экстремума функции. В задачах МП наличие огр-й в форме рав-в или нерав-в налагает дпн-ое условие на выбор λ, при к-ом новая точка не выйдет за пределы обл-и допустимых значений.

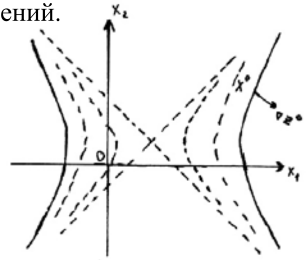


Рис. 1

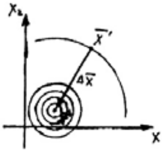


Рис. 2

Рас-им задачу ВГП, в к-ой огр-я заданы в форме лин-х нерав-в: мксз-ть вогнутую фк-ю

$$z = f\left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right), \tag{6}$$

при огр-ях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le a_{i0} \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{8}$$

Пусть на данной итерации перемещение осуществляется из точки $x^0 = \left(x_1^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0\right)$ в направлении вектора $e = \left(e_1, ..., e_n\right)$ (к-ый не обязательно должен совпадать с градиентом ∇f) в новую точку $x' = x^0 + \lambda e.$ Тогда изменение фк-и составит $\Delta z = \nabla f\left(x^0\right)e.$

Обз-им номерами $i = i'$ и $j = j'$, т. е. из нерав-в (7) и (8), к-ые в точке x^0 выполняются как строгие нерав-ва.

Опр-им вел-ы $\alpha, \beta\, и\, e$ из стн-й

$$\alpha = \begin{cases} \min\limits_{i'} \dfrac{a_{i'o} - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i'j} x_j^0}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i'j} e_j} \text{ по тем } i', \text{ для к-ых } \Sigma a_{i'j} e_j > 0, \\ \end{cases} \tag{9}$$

∞, если при всех i' будет $\Sigma a_{i'j} e_j \le 0$.

$$\beta = \begin{cases} \min\limits_{j'} \dfrac{-x_{j'}^0}{e_{j'}} \text{ по тем } j', \text{ для к-ых } e_{j'} < 0, \\ \end{cases} \tag{10}$$

∞, если при всех j' будет $e_{j'} \ge 0$;

$$\xi = \min\left(\alpha, \beta\right) \tag{11}$$

Вел. ξ яв-ся мкс-но допустимым значением для λ , при к-ом перемещение не выйдет из обл. допустимых значений.

Если нач. точка x^0 лежит внутри обл-и (т.е. при всех i огр-ия (7) выполняются как строгие нерав-ва), то направление перемещения e выгодно выбирать по градиенту (т. е. $e = \nabla f\left(x^0\right)$). Если же нач. точка x^0 для данной итерации лежит на границе обл-и (т. е. для некоторых i нерав-ва (7) выполняются как рав-ва), то вектор e может быть опр-ен из решения сд-ей задачи ЛП:

$$\max T = \nabla f\left(x^0\right)e = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_j} e_j \tag{12}$$

при огр-х

$$\sum_{i} a_{ij} e_j \le 0, \tag{13}$$

где i распространяется на те нерав-ва (7), к-ые в точке x^0 выполняются как рав-ва,

$$\sum_j e_j + \sum_{j'} \left(e'_{j'} + e''_{j'}\right) \le 1, \tag{14}$$

$$e_j \ge 0, e'_{j'} \ge 0, e''_{j'} \ge 0, \tag{15}$$

$$e'_{j'} e''_{j'} = 0, \tag{16}$$

где

$$e'_{j'} - e''_{j'} = e_{j'}. \tag{17}$$

Очередную итерацию выполняем в сд-ем порядке:

1) Опр-ем направление перемещения e из решения задачи (12)–(15).

2) Мкс-но возможную вел-ну перемещения ξ опр-ем из (9)–(11).

3) Из условия мксз-и ΔZ находим вел-у λ^*. Для этого либо решается ур. (5), когда перемещение осуществляется вдоль градиента, либо аналогичное ур.

$$\frac{d\Delta Z}{d\lambda} = \nabla f\left(x'\right) e, \tag{5$'$}$$

когда перемещение происходит по направлению $e \ne \nabla f\left(x^0\right)$.

4) Находим вел-у перемещения $\lambda = \min\left\{\xi, \lambda^*\right\}$.

5) Выч-ем новую точку $x' = x^0 + \lambda e$ (или $x' = x^0 + \lambda \nabla f\left(x^0\right)$), к-ую принимаем за нач-ю на сд-ей итерации.

6) Расчет прекращаем либо по достижении стационарной точки $\left(\nabla f = 0\right)$, либо когда ΔZ в результате последней итерации окажется в пределах заданной точности вычислений.

п4. Решить градиентным методом сд. задачу ВГП:

$$\max Z = 10x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2,$$

при огр-ях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 40 \end{aligned}\right\}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Р. Имеем $\nabla f = \left(10 - 2x, 16 - 2x_2\right)$. Пусть итерационный процесс начинается с точки $x_0 = \left(1, 2\right)$, яв-йся допустимым решением системы нерав-в (рис. 3).

I итерация. 1) Составляем задачу (12)–(16). Здесь $\nabla f\left(x^0\right) = (10 - 2 \cdot 1, 16 - 2 \cdot 2) = (8,12)$. Для нач-ой точки x^0 оба неравенства выполняются как строгие нерав-ва $(1 + 2 \cdot 2 < 16$ и $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 < 40)$. Поэтому имеем $i' = 1$ и 2. Далее в этой точке $x_1 = 1 > 0$ u $x_2 = 2 > 0$, поэтому $j' = 1$ и 2. В ств-и с (17) $e_1 = e'_1 - e''_1$ и $e_2 = e'_2 - e''_2$. Теперь можем писать модель (12)–(16):

$$\max T = 8e_1 + 12e_2 = 8e'_1 - 8e''_1 + 12e'_2 - 12e''_2, \tag{12$'$}$$

при огр-ях

$$e'_1 + e''_1 + e'_2 + e''_2 \le 1, \tag{14'}$$

$$e'_1 \ge 0, e''_1 \ge 0, e'_2 \ge 0, e''_2 \ge 0, \tag{$15'$}$$

$$e'_1 e''_1 = 0, e'_2 e''_2 = 0. \tag{$16'$}$$

Условия (13) в данном случае отсутствуют, т. к. нерав-ва (7) в нач. точке x^0 выполняются как строгие нерав-ва.

Задачу $(12') - (16')$ можно было бы решить и симплекс-методом, однако наличие только одного огр-я $(14')$ позволяет сразу же опр-ть опт. решение $e'_2 = 1$ и $e'_1 = 0, e''_1 = 0, e''_2 = 0$ или, на основании (17) имеем $e_1 = 0$ и $e_2 = 1$.

Сд-но, направление перемещения задается вектором $e = (0,1)$. Как видно из рис. 3, найденное направление не явл-ся наилучшим, к-ое совпадает с градиентом.

2) Опр-ем мкс-но возможную вел-у перемещения, выч-ем $\sum_j a_{ij} e_j$ для $i' = 1$ и $i' = 2$. Имеем $a_{11}e_1 + a_{12}e_2 = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 > 0$ и $a_{21}e_1 + a_{22}e_2 = 5\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 > 0$.

Поэтому $$\alpha = \min\left\{\frac{16-(1\cdot 1+2\cdot 2)}{2},\ \frac{40-(5\cdot 1+2\cdot 2)}{2}\right\} = \frac{11}{2} \tag{$9'$}$$

$$\beta = \infty, \tag{$10'$}$$

Откуда $\xi = \min\left\{\frac{11}{2}, \infty\right\} = \frac{11}{2.}$

3) Выч-ем λ^* из условия мксз-и ΔZ. Имеем

$x' = x^0 + \lambda e = (1,2) + \lambda(0,1) = (1, 2+\lambda)$. Теперь находим

$$\nabla f\left(x'\right) = \left[10 - 2\cdot 1,\ 16 - 2(2+\lambda)\right] = (8,\ 12 - 2\lambda).$$

Тогда ур. $(5')$ запишется в виде $\frac{d\Delta Z}{d\lambda} = (8, 12 - 2\lambda)(0,1) = 12 - 2\lambda = 0$, откуда $\lambda^* = 6$. Т. к. $\frac{d^2\Delta Z}{d\lambda^2} = -2 < 0,$ то при найденном значении $\lambda^* = 6$ достигается мкс-м ΔZ.

4) Вел-а перемещения λ опр-ся из выражения

$$\lambda = \min(\xi, \lambda^*) = \min(\frac{11}{2}, 6) = \frac{11}{2}.$$

5) Новая точка $x' = x^0 + \lambda e = (1,2) + \frac{11}{2}(0,1) = (1, \frac{15}{2})$. Эта точка оказалась лежащей на граничной прямой, ств-ей 1-му нерав-ву, т. е. тому, к-му ств-ет найденное значение α (рис. 3).

II итерация. Принимаем $x^0 = (1, \frac{15}{2})$.

1) $\nabla f(x^0) = (10 - 2 \cdot 1, 16 - 2 \cdot \frac{15}{2}) = (8,1)$. Подставляя крд-ы точки x^0 в заданные нерав-ва, получаем $1 + 2 \cdot \frac{15}{2} = 16$ и $5 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{15}{2} = 20 < 40$. Сд-но, 1-е нерав-во выполняется как рав-во $(i = 1)$,а 2-е – как строгое нерав-во $(i' = 2)$. Далее $x_1 = 1 > 0$ и $x_2 = \frac{15}{2} > 0$, поэтому $j' = 1$ и 2 и $e_1 = e_1' - e_1''$, $e_2 = e_2' - e_2''$. Составляем модель (12)–(16)

$$\max T = 8e_1 + e_2 = 8e_1' - 8e_1'' + e_2' - e_2'', \tag{12'}$$

при условиях

$$1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 = e_1' - e_1'' + 2e_2' - 2e_2'' \le 0 \tag{13'}$$

$$e_1' + e_1'' + e_2' + e_2'' \le 1 \tag{14'}$$

$$e_1' \ge 0, e_1'' \ge 0, e_2' \ge 0, e_2'' \ge 0 \tag{15'}$$

$$e_1'e_1'' = 0, e_2'e_2'' = 0 \tag{16'}$$

Эту задачу решим симплекс-методом (табл. 1), вводя искусственные пер. y_1 и y_2.

Таблица 1

i	C	Базис	a_{i0}	8	–8	1	–1	0	0	$\sum$
				e_1'	e_1''	e_2'	e_2''	y_1	y_2	
I	0 0	y_1 y_2	0 1	$\boxed{1}$ 1	–1 1	2 1	–2 1	1 0	0 1	1 6
$m+1$		T_1	0	–8	8	–1	1	0	0	0
II	8 0	e_1' y_2	0 1	1 0	–1 2	2 –1	–2 $\boxed{3}$	1 –1	0 1	1 5
$m+1$		T_2	0	0	0	15	–15	8	0	8
III	8 –1	e_1' e_2''	2/3 1/3	1 0	1/3 2/3	4/3 –1/3	0 1	1/3 –1/3	2/3 1/3	13/3 5/3
$m+1$		T_3	5	0	10	10	0	3	5	33

После II итерации получили $e_1' = \frac{2}{3}, e_2'' = \frac{1}{3}, e_1'' = e_2' = 0$. Сд-но, $e_1 = e_1' - e_1'' = \frac{2}{3}$ и $e_2 = e_2' - e_2'' = -\frac{1}{3}$.

Т. о. направление дальнейшего перемещения задается вектором $e=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. Как показано на рис. 3, этот вектор направлен вдоль границы обл-и.

2) Опр-им ξ. Т. к. в новой нач. точке только 2-е нерав-во выполняется как строгое нерав-во и для него

$$\sum_j a_{ji}e_j=\sum a_{2j}e_j=5\cdot\frac{2}{3}+2(-\frac{1}{3})=\frac{8}{3}>0,\text{ то}$$

$$\alpha=\frac{40-(5\cdot 1+2\cdot\frac{15}{2})}{8/3}=\frac{15}{2}.$$

Далее, $e_1=\frac{2}{3}>0$ и $e_2=-\frac{1}{3}<0$, откуда $\beta=\frac{-15/2}{-1/3}=\frac{45}{2}$.

Сд-но, $\xi=\min\left\{\frac{15}{2},\frac{45}{2}\right\}=\frac{15}{2}$.

3) Выч-им λ^*. Имеем для II итерации $x'=x^0+\lambda e=(1,\frac{15}{2})+\lambda(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=$ $=(1+\frac{2\lambda}{3},\frac{15}{2}-\frac{\lambda}{3})$. Тогда $\nabla f(x')=\left[10-2(1+\frac{2\lambda}{3}),16-2(\frac{15}{2}-\frac{\lambda}{3})\right]=(8-\frac{4\lambda}{3},1+\frac{2\lambda}{3})$.

$$\text{Сд-но, }\frac{d\Delta Z}{d\lambda}=\nabla f(x')e=(8-\frac{4\lambda}{3})\frac{2}{3}+(1+\frac{2\lambda}{3})(-\frac{1}{3})=5-\frac{10\lambda}{9}=0. \qquad (5')$$

Из (5’) получим $\lambda^*=\frac{9}{2}$.

4) Опр-им вел-у λ перемещения из выражения

$$\lambda=\min(\xi,\lambda^*)=\min(\frac{15}{2},\frac{9}{2})=\frac{9}{2}.$$

5) Новая точка $x'=x^0+\lambda e=(1,\frac{15}{2})+\frac{9}{2}(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=(4,6)$.

Найденная точка, как видно из рис. 3 совпадает с точкой x^*, в к-ой одна из линий уровня (концентрических окружностей) касается границы обл-ти, т. е. оказывается опт. решением задачи (такой вывод получим и из $(5')$: т. к. $\frac{d^2Z}{d\lambda^2}=-\frac{10}{9}<0$, то найденное значение $\lambda=\lambda^*=\frac{9}{2}$ яв-ся точкой мкс-ма ΔZ, т. е. $x'=(4,6)$ есть точка мкс-ма).

Т. к. фк. $Z=10x_1+16x_2-x_1^2-x_2^2$ вогнутая, то в найденной точке $x^*=(4,6)$ достигается глобальный экс-ум $Z_{\max}=84$.

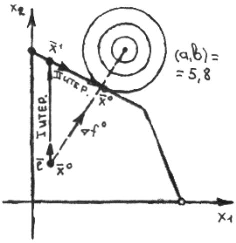


Рис. 3

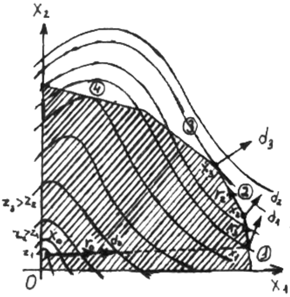


Рис. 4

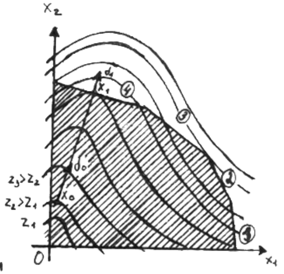


Рис.5

зм1. Градиентные методы допускают различные варианты реализаций, как при наборе направления, так и при выборе шага перемещения из одной точки к др-ой. Н-р, можно указать такие варианты как Метод допустимых направлений Зойтендейка [55], Методы сопряженных градиентов, Обобщенный градиентный спуск, Градиентный метод с постоянным шагом [117] и т. д. Каждый из этих вариантов имеют свои преимущества и сложности при реализации на практике. Причем все эти варианты рассчитаны на получение решений лишь задач ВГП (в большинстве случаев с лин. огр-ми), а не для решений общих задач НП. Поэтому приводить эти варианты здесь не будем.

4^0. Геометрическая интерпретация. В градиентных методах от выбора нач-ой точки x^0 зависит дальнейшее перемещение в направлении локальных или глобального экс-мов, т. е. при удачном выборе x^0 можно даже получить сразу глобальный эксм. Учесть это обстоятельство очень важно при решении задач МП с помощью градиентных методов, особенно при решении общих задач НП. Поэтому на примере задач с двумя пер-ми покажем геом-ю картину итерационного процесса.

Рас-им задачу, для к-ой выпуклое мн. допустимых решений (МДР) показано на рис 4. Там же показаны линии уровня нелин. целевой фк-и и направления возрастания Z. Предположим, что мы начали с допустимого решения $x^0 = x_0 (u\, x' = x_1$, для удобства). Градиент $\nabla f(x_0)$, или d_0 , яв-ся вектором, нормальным к гиперпл-ти, касающейся линии уровня $f(x) = z_0$ в точке x_0, и направленным в сторону возр-я z.

В начале процесса сущ-ых огр-й нет, поэтому $z_0 = \dfrac{d_0}{|d_0|}$. Мы можем двигаться из x_0 в направлении z_0 до тех пор, пока не достигнем границы мн–ва допустимых решений. Вообще говоря, не рекомендуется двигаться до конца, т.к. $\max f(x_0 + \lambda z_0)$ может достигаться раньше, чем граница. В нашем случае, однако $f(x_0 + \lambda z_0)$ возрастает при возрастании λ. Точка x_1 показана на рис 4. Из этой точки мы не можем двигаться в направлении d_1, т. к. при этом выйдем из МДР. Задачи (12) – (17) для точки x_1 имеет только одно огр–ие. Решением этой задачи явл–ся вектор r_1, составляющий с вектором d_1 нм-ий угол по сравнению с любым вектором, выходящим из точки x_1 и лежающим в МДР. Т. о., на сд-ей итерации двигаемся вдоль огр-ия 1. Мы снова должны двигаться как можно дальше, пока не придем в точку x_2. Выбор вектора ясен из рисунка. На третьей итерации снова как можно дальше двигаемся вдоль огр-я 2., получая точку x_3. В этой точке процесс заканчивается. т. к. решая задачу (12)–(17), обнаруживаем, что $\max T = \nabla f\left(x_3\right) r < 0$. Геом-ки это выражается тем, что вектор d_3 составляет тупой угол с любым вектором в мн-ве допустимых решений, выходящим из точки x_3. В этом примере процесс заканчивается за конечное число итерации. Т. о. в точке x_3 $f(x)$ имеет отс-ый локальный мкс-м. В точке x_3 фк. $f(x)$ достигает также и глобального опт-ма на выпуклом мн-ве.

Предположим теперь, что решая ту же задачу, в качестве нач-го допустимого решения взяли точку x_0 (см. рис. 5). В этом случае процесс заканчивается после первой же итерации и приводит к точке x_1. Однако в точке x_1 фк. $f(x)$ не имеет отс-го локального макс-а; x_1 представляет собой отс-ю седловую точку, т. к. при движении их x_1 в любом направлении вдоль огр-ия 4 $f(x)$ будет возр-ть, а при движении из x_1 в x_0 $f(x)$ уб-ет.

Пусть теперь нач-ое прж-ие в той же задаче будет таким, как показано на рис. 6. Ясно, что в этом случае процесс заканчивается после двух итераций и приводит к локальному экс-му в точке А.

В качестве последнего примера рас-им задачу, в к-ой нет огр-й, кроме требования неотц-ти пер-ых. Предположим, что линии уровня для $z = f\left(x\right)$ имеют вид, показанной на рис. 7. Если итерацию начнем из точки x_{0a}, то получим указанную на рис-ке посл-ть точек. Заметим, что на первой итерации не двигаемся как можно дальше. Процесс заканчивается после трех итераций в точке x_{3a}, в к-ой достигается отс-ый локальный мкс-м фк-и $f(x)$.

Если итерацию начнем из точки $x_{ов}$, то сразу придем к седловой точке x_{1b}. Если же начать из точки $x_{ос}$, то полученная посл-ть точек сходится к точке x, в к-ой достигается абс-ый мкс-м фк-и f для $x \geq 0$. В этом случае число требуемых итераций может и не быть конечным.

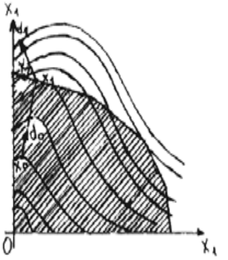


Рис. 6

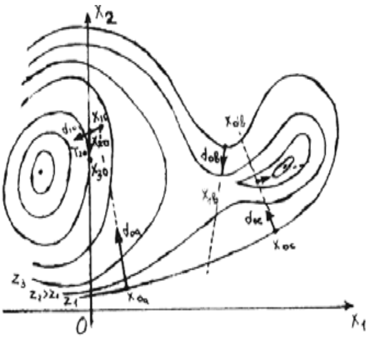


Рис. 7

5^0. Градиентные методы при решении задач НП. Примеры. Одно из преимуществ (см. зм 1 и параграф 4^0) градиентного метода заключается в том, что он допускает всевозможные варианты при опр-и направления и выборе нач-ой точке x^0 для наилучшего перемещения в поиске отс-го локального (желательно глобального) мкс-ма. Для этого нх-мо в первом же итерационном процессе стараться найти точку x^1 из окрестности глобального экс-ма на основе совместного учета градиента целевой фк. $\nabla f(x)$ и свойства тех активных огр-й, к-ые участвуют в поиске этой точки. Сказанное объясним на конкретных примерах.

п5. Найти max $z = f(x) = 25(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2$, при огр-ях

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 \le 2 \end{array}\right\} \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \left(\textit{см.п3, рис.5 из } 2^0 : 4.1\right).$$

Р. Огр-ия представим в виде нерав-в $в(\le)$, а границы обл-ти допустимых решений обз-им через φ_i:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & -x_1 - x_2 \le -2 \\ 2 & -x_1 + x_2 \le 2 \\ 3 & x_1 + x_2 \le 6 \\ 4 & x_1 - 3x_2 \le 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_1 = -x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ \varphi_2 = -x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ \varphi_3 = x_1 + x_2 - 6 = 0 \\ \varphi_4 = x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Находим частные производные и градиенты: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 50(x_1 - 2) = 0$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) = 0$ Отсюда $x^0 = (2,2)$ – стационарная точка $\nabla f(x) = [50(x_1 - 2), 2(x_2 - 2)]$.

В окрестности точки x^0 получим $x^1 = x^0 + \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$, тогда $\nabla f(x') = (25,1)$. Опр-им $\nabla\varphi_1 = (-1,-1)$, $\nabla\varphi_2(-1,1)$, $\nabla\varphi_3 = (1,1)$, $\nabla\varphi_4 = (1,-3)$. Т. к. $\nabla f \cdot \nabla\varphi_1 = -26 < 0, \nabla f \nabla\varphi_2 = 0 - 24 < 0$, $\nabla f \nabla\varphi_3 = 26 > 0, \nabla f \nabla\varphi_4 = 22 > 0$, то опт. направление надо искать от точки x^0 к точке

$$x^1 \colon \begin{cases} \varphi_3 = x_1 + x_2 - 6 = 0 \\ \varphi_4 = x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x_2 = 1,\ x_1 = 5,$ т.е. $x' = (5,1)$. Тогда $e = \overline{x^0 x^1} = (5-2, 1-2) = (3,-1)$ Отсюда

$$x' = x^0 + \lambda e = (2,2) + 1(3,-1) = (5,1)\ \nabla f(x') = (150,-2)$$

Найденная точка $x' = (5,1)$ яв-ся точкой глобального мкс. и $Z_{\max} = 226$.

Формально процесс можно закончить исходя из условия $r_1\ \nabla f(x') < 0$

и $r_2 \nabla f(x') < 0$, где $r_1 = (-1, 1)$ из $x_1 + x_2 - 6 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_2 - 6}{1} = \dfrac{x_1}{-1}$

и $r_2 = \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$ из $x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_1}{-1} = \dfrac{x_2 + \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}$ т. к. r_2 уб-ет по x_1 и x_2

зм2. При решении данной задачи итерацию можно было бы организовать из точки x^0=(2,2) в направлении $\nabla \varphi_4 = (1, -3)$ до границы, а затем в направлении прямой φ_4 до точки $x^1 = (5,\ 1)$. Аналогично, можно было бы сначала из точки x^0=(2, 2) двигаться до прямой φ_3, затем по этой прямой до точки $x' = (5,1)$.

Теперь решим задачу НП, где и огр-ия нелин-ы.

п6. Найти $\max Z = f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$, при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - 1)x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 7/5 \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 5 \end{array}\right\} \text{(см. п 4, рис. 6 из } 2^0: 4.1)$$

Р. Огр-ия напишем в виде нерав-в ($\le$), а границы обз-им через φ_i:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & (x_1 - 1)x_2 \le 1 \\ 2 & -x_1 - x_2 \le -7/5 \\ 3 & x_1 \le 5 \\ 4 & x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_1 = x_1 x_2 - x_2 - 1 = 0 \\ \varphi_2 = -x_1 - x_2 + 7/5 = 0 \\ \varphi_3 = x_1 - 5 = 0 \\ \varphi_4 = x_2 - 5 = 0 \end{array}\right\}$$

находим $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) = 0$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 = 0$. Отсюда получим x^0=(1, 0) – стандартную точку и взяв точку $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$, из окрестности стационарной точки т. е. $x^2 = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, из $\nabla f(x) = [2(x_1 - 1), 2x_2]$ определим $\nabla f(x^2) = (1,3)$ и $\nabla \varphi_1 = (x_2, x_1 - 1)$, $\nabla \varphi_2 = (-1, -1)$, $\nabla \varphi_3 = (1,0)$, $\nabla \varphi_4 = (0,1)$. Т.к.

$\max\left\{\nabla\varphi_2\nabla f(x^2), \nabla\varphi_3\nabla f(x^2), \nabla\varphi_4\nabla f(x^2)\right\} = \{-4,1,3\} = 3$, то опт. направление ищем по $\nabla\varphi_4 = (0,1)$, где $\varphi_4 = x_2 - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$, тогда $\varphi_1 = 5x_1 - 5 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5}$. Отсюда $\nabla\varphi_1 = \left(5, \frac{1}{5}\right)$, к-ое не имеет никакого отн-ия с направлением $\nabla f\left(x^2\right) = (1,3)$, т. к. они взяты в различных точках $x^1 = \left(\frac{6}{5}, 5\right)$ и $x^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Итак, точка $x^1 = \left(\frac{6}{5}, 5\right)$ лежит на кривой $\varphi_1 = x_1x_2 - x_2 - 1 = 0$ и яв-ся самой дальней точкой в ОДР из точки $x^0 = (1, 0)$, то опт. направление надо искать от точки x^0 к точке x^1, т. е. $e = \overline{x^0x^1} = \left(\frac{6}{5} - 1, 5 - 0\right) = \left(\frac{1}{5}, 5\right)$. Откуда $x^1 = x^0 + \lambda e = (1,0) + 1\left(\frac{1}{5}, 5\right) = \left(\frac{6}{5}, 5\right)$, $\nabla f\left(x^1\right) = \left(\frac{2}{5}, 10\right)$. Найденная точка $x^1 = \left(\frac{6}{5}, 5\right)$ яв-ся точкой глобального мкс-ма $Z_{\max} = \frac{626}{25}$.

Формально процесс можно закончить аналогично, как в п 5.

Все сказанное в зм2 имеет место и здесь.

ЛЕКЦИЯ 16

4.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1^0. Постановка задачи геометрического программирования и ее основные свойства. Дт-но широкий и интересный с практической точки зрения класс задач НП составляет задачи геометрического программирования (ГП). Такие задачи возникают в самой мт-ке, в экономике, планировании производства, техническом проектировании и т.д. Для примера приведем сд-ю

з1. Пусть требуется переправить через реку 400 куб. м. гравия. Допустим, что гравий грузится в открытый ящик длиной t_1, шириной t_2 и высотой t_3. Боковые стороны и дно ящика изготовлены из материала, кв. м. к-го стоит 10 руб., а передняя и задняя стенка из материала, кв. м к-го стоит 20 руб. Каждая перевозка ящика любых размеров с одного берега на др-й и обратно стоит 0,1 руб., причем после его использования ящик не будет иметь остаточной стоимости. Чему равна мнм. суммарная стоимость транспортировки 400 куб. м гравия?

Р. Очевидно, при лин-ых размерах ящика t_1, t_2 и t_3 число рейсов, к-ые нужно выполнить для перевозки 400 куб. м гравия, составляет $\frac{400}{t_1t_2t_3}$, а стоимость перевозок $0_j1\cdot\frac{400}{t_1t_2t_3}=\frac{40}{t_1t_2t_3}$. Общая стоимость материалов составляет $40t_2t_3+20t_1t_3+10t_1t_2$. Тогда суммарная стоимость перевозок с учетом стоимости материала составляет

$$f(t)=\frac{40}{t_1t_2t_3}+40t_2t_3+20t_1t_3+10t_1t_2\ \ (\text{см. п2 и п4}).$$

Заметим, что фк. $f(t)$ состоит из слагаемых $u_j(t)$ вида

$$u_j(t)=c_jt_1^{\alpha_{j1}}t_2^{\alpha_{j2}}\ldots t_m^{\alpha_{jm}}=c_jt_1^{\alpha_{j1}}\ldots t_j^{\alpha_{ji}}\ldots t_m^{\alpha_{jm}},\ \text{где. } c_j>0;\ t_j\geq 0,\ i=\overline{1_i m}$$

Фк-и вида $u_j(t)$ носят наз-ие позиномов.

Матрица из показателей степеней (экспонент) позиномов

$$A=\left(a_{ji}^1\right)=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots & a_{j1}\cdots & a_{n1}\\ a_{1j}\cdots & a_{ji}\cdots & a_{nj}\\ a_{im}\cdots & a_{jm}\cdots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

наз. матрицей экспонент позиномов. Очевидно, вектор коэф-ов позинома и его матрица экспонент А вполне опр-ет данный позином н-р, для

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&2\\0&2&1&1\end{pmatrix}\ \text{и C}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$$

получим позином: $g(t)=t_1+\frac{1}{2}t_2t_3^2+\frac{1}{3}t_1t_3+\frac{1}{4}t_2^2t_3$.

Для исследования задачи мнмз-и позиномов используется известное нерав-во о среднем ариф-ом и геом-ом, к-ое наз-ют геом-им (отсюда и происходит наз-ие ГП).

Для n пер-ых $u_j > 0$ это нерав-во имеет вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{u_j} \geq u_1^{\frac{1}{n}} u_2^{\frac{1}{n}} \ldots u_n^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

где $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot n = 1.$ Д-во (1) см. $[106]$, стр. 31 и 162. Причем рав-во в (1) будет в случае, когда $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u.$ Более общим случаем яв-ся геом-ое нерав-во для средневзвешенных ариф-го и геом-го:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \ \mathrm{u_j} \geq \prod_{j=1}^{n} \mathrm{u}_j^{\delta_j}, \tag{2}$$

где все веса $\delta_j \geq 0$ и выполняется условие нормализации $\sum_{j=1}^{n}\delta_j = 1.$ Н-р, при $n = 2,\ \delta_1 = \frac{1}{4},\ \delta_2 = \frac{3}{4}$ получим $\frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \geq u_1^{\frac{1}{4}} u_2^{\frac{3}{4}}.$ Если $\delta_j = \frac{1}{n},$ то нерав-во (2) превращается в нерав-во (1).

Нерав-во (2) может быть использовано для нахождения мнм-а позинома $f(\mathrm{t}).$

п1. Найти оценку снизу для фк-и $f(\mathrm{t}) = 4\mathrm{t}_1 + \frac{\mathrm{t}_1}{\mathrm{t}_2^2} + \frac{4\mathrm{t}_2}{\mathrm{t}_1}.$

Р. Используя геом. нерав-во $\left(\text{при } \delta_1 = \frac{1}{4},\ \delta_2 = \frac{1}{4},\ \delta_3 = \frac{1}{2}\right)$, получим: $\frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \geq u_1^{\frac{1}{4}} \cdot u_2^{\frac{1}{4}} \cdot u_3^{\frac{1}{2}}.$ Тогда $\left(\text{из } 4\mathrm{t}_1 = \frac{1}{4}u_1 \Rightarrow 16\mathrm{t}_1 = u_1,\ \frac{4\mathrm{t}}{\mathrm{t}_2^2} = u_2,\ \frac{8\mathrm{t}_2}{\mathrm{t}_1} = u_3\right)$ имеем $f(\mathrm{t}) \geq (16\mathrm{t}_1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4\mathrm{t}_1}{\mathrm{t}_2^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{8\mathrm{t}_2}{\mathrm{t}_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{t}_1^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{2}} \mathrm{t}_1^{\frac{1}{4}} \mathrm{t}_2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \mathrm{t}_2^{\frac{1}{2}} \mathrm{t}_1^{-\frac{1}{2}} = 8.$

Т.о., 8 яв-ся оценкой снизу для $f(\mathrm{t})$, при $\mathrm{t}_1 > 0$ и $\mathrm{t}_2 > 0.$ Более того, 8 яв-ся точной нижней гранью для $f(\mathrm{t})$, т.к. $f\left(\mathrm{t}_1 = \frac{1}{2},\ \mathrm{t}_2 = \frac{1}{2}\right) = 8$ (см, п3, п5).

Следует отметить, что класс позиномов дт-но широк и, что особенно важно, фк-ми этого вида описывается большое число закономерностей и отн-й, выражающихся в технике, экономике и др. областях знаний. В одних случаях, эти закономерности уже выражены позиномоми $\left(V = \pi r^2 h - \text{объем цилиндра}, JR^{-1} - \text{закон Ома и т.д}\right)$, в других случаях позиномы появляются вследствие того, что иногда для сложной реальной функциональной зависимости желательно найти приближенное (прж), но по возможности более простое выражение (т.е. аппроксимировать данную фк.). Такого рода ситуации часто возникают в инженерных расчетах, н-р, в техническом проектировании и т.д.

2^0. Двойственная функция. Рас-им случай геом-го нерав-ва (2)

$$\delta_1 U_1 + \delta_2 U_2 + \ldots + \delta_n U_n \geq U_1^{\delta_1} U_2^{\delta_2} \ldots U_n^{\delta_n}, \qquad (2^1)$$

где все $U_j > 0,$ а веса $\delta_j \geq 0$ уд-ют условию нормализации $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 1.$

Для удобства производим замену пер-ых в $(2')$, пологая $\mathrm{u}_1 = \delta_1 \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n} = \delta_\mathrm{n} \mathrm{U}_\mathrm{n}.$ Тогда геом-ое нерав-во $(2')$ примет вид:

$$\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + .. + \mathrm{u}_\mathrm{n} \geq \left(\frac{\mathrm{u}_1}{\delta_1}\right)^{\delta^1} \left(\frac{\mathrm{u}_2}{\delta_2}\right)^{\delta^2} \ldots \left(\frac{\mathrm{u}_\mathrm{n}}{\delta_\mathrm{n}}\right)^{\delta^\mathrm{n}}. \qquad (3)$$

Левая часть (3) представляет собой функцию-позином $\mathrm{f}(\mathrm{t})$. Наз-ем её прямой фк-ей задачи ГП. Правая часть наз-ся преддвойственной фк-ей. Обз-им её через V. Тогда нерав-во (3) можно писать так:

$$\mathrm{f} \geq \mathrm{V} \qquad (4)$$

Если исходная фк. $\mathrm{f} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ldots + \mathrm{u}_\mathrm{n} -$ позином, причем $\mathrm{u}_\mathrm{j} = \mathrm{c}_\mathrm{j} \mathrm{t}_{1\ldots}^{\alpha \mathrm{j}1} \mathrm{t}_{\mathrm{i}\ldots}^{\alpha \mathrm{ji}} \mathrm{t}_\mathrm{m}^{\alpha \mathrm{jm}},$ то подставляя выражения для u_j в правую часть (4), получим выражение для V:

$$\mathrm{V}(\delta, \mathrm{t}) = \left(\frac{\mathrm{c}_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{\mathrm{c}_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{\mathrm{c}_\mathrm{n}}{\delta_\mathrm{n}}\right)^{\delta_\mathrm{n}} \mathrm{t}_1^{Д_1} \ldots \mathrm{t}_\mathrm{i}^{Д_\mathrm{i}} \ldots \mathrm{t}_\mathrm{m}^{Д_\mathrm{m}} \qquad (5)$$

где

$$Д_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \delta_\mathrm{j}, \alpha_\mathrm{ji}, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}. \qquad (6)$$

Допустим, что можно выбрать веса δ_j так, чтобы все показатели $Д_\mathrm{j}$ обратились в нули. Тогда двойственная фк.V(δ ,t) не будет зависеть от пер-ых t_i и наз-ем её двойственной (дв.) фк-ей и обз-им

$$\mathrm{v}(\delta) = \left(\frac{\mathrm{c}_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{\mathrm{c}_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{\mathrm{c}_\mathrm{n}}{\delta_\mathrm{n}}\right)^{\delta_\mathrm{n}}. \qquad (7)$$

Из нерав-ва (3) следует, что f(t) имеет плж-ую точную нижнюю грань M. Тогда можем записать, что

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) \geq \mathrm{M} \geq \mathrm{v}(\delta). \qquad (8)$$

Из (8) следует, что M яв-ся оценкой сверху для дв-ой фк-и для любого выбора весов δ_j при к-ом все показатели $Д_\mathrm{i}$ обращаются в 0.

Используем выше полученные результаты для решения

п2. Найти решение з**1**.

Р. Для фк-и

$$f(t)=\frac{40}{t_1t_2t_3}+40t_2t_3+20t_1t_3+10t_1t_2 \text{ запишем дв. фк-ю}$$

$$v(\delta)=\left(\frac{40}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{40}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{20}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{10}{\delta_4}\right)^{\delta_4}, \qquad (9)$$

где веса $\delta_j \geq 0,\quad j=\overline{1,4}$ уд-ют условиям(в силу (6), где

$$i=\overline{1,3}\text{получаем}\quad \text{из}\, f(t))$$

$$\left.\begin{array}{llll} д_1 = & -\delta_1 & +\delta_3 & +\delta_4=0 \\ д_2 = & -\delta_1 & +\delta_2 & +\delta_4=0 \\ д_3 = & -\delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3=0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Условия (10) наз-ют условиями ортогональности. Кроме того веса δ_j должны уд-ть условию нормализации:

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=1 \qquad (11)$$

Решая системы (10), (11) методом Гаусса – Жордана, находим единственное решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta_4^*=1/5 \\ \delta_3^*=1/5 \\ \delta_1^*=2/5 \\ \delta_2^*=1/5 \end{array}\right\}$$

$$\text{Подставляя}\quad \text{эти}\quad \text{значения}\quad \text{в}\,(9)\,\text{получим}:$$

$$v\left(8^*\right)=\left(\frac{40}{2/5}\right)^{2/5}\left(\frac{40}{1/5}\right)^{1/5}\left(\frac{20}{1/5}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{10}{1/5}\right)^{\frac{1}{5}}=100$$

Итак, min f(t) =v(8^*) = 100, т.е. мнм. суммарная стоимость равна 100 руб. Как найти точку мнм-а $t^*=(t_1,\ldots,t_m)$ см. п4

п3. Найти решение фк-и f(t) п1, используя фм-у(9).

Р. Для фк. $f(t)=4t_1+\frac{t_1}{t_2^2}+4\frac{t_2}{t_1}\left(j=\overline{1,3};i=\overline{1,2}\right)$ напишем дв. фк-ю:

$$v(\delta)=\left(\frac{4}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{4}{\delta_3}\right)^{\delta_3}$$ и опр-им веса δ_j из условия

$$\left.\begin{array}{rrrrcl} Д_1= & \delta_1 & +\delta_2 & -\delta_3 & = & 0 \\ Д_2= & & -2\delta_2 & +\delta_3 & = & 0 \\ & \delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = & 1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta_3=2\delta_2 \\ \delta_1-\delta_2=0 \\ \delta_1+3\delta_2=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \delta_3^* & = & 2/4 \\ \delta_1^* & = & 1/4 \\ \delta_2^* & = & 1/4 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\left(\delta^*\right)=\left(\frac{4}{1/4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{1/4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{2/4}\right)^{\frac{2}{4}}=8.$$

Итак, $\min f(t)=v(\delta^*)=8$ (см. **п5**).

3^0. Максимум двойственной функции. Определение минимизирующей точки. Сформируем и д-ем сд-ю

т1.Существуют плж-ые веса δ_j, уд-ие условия μ орт-ти, и мкс-м дв-ой фк-и $v(\delta)$ равен мнм-у прямой фк-и $f(t)$, т.е. $\min f(t)=\max v(\delta)$.

Д. Предположим, что позином $f(t)$ имеет мнм-ое значение в нек-ой точке $\left(t_1^*,t_2^*,...,t_m^*\right)$, все крд-ы к-ой плж-ы.

В мнмз-ей точке t^* производные $f(t)$ по каждой пер-ой обращаются в нуль и получаем m ур-й вида

$$0=\frac{\partial f(t^*)}{\partial t_i}t_i=\sum_{j=1}^{n}t_i^*\frac{\partial u_j\left(t^*\right)}{\partial t_i}\sum_{j=1}^{n}u_j\left(t^*\right)a_{ji}.. \qquad (12)$$

Разделив эти ур. (12) на $f(t)\neq 0$ и полагая

$$\frac{u_j\left(t^*\right)}{f\left(t^*\right)}=\delta_j^*, \qquad (13)$$

получим, что

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j^*a_{ji}=0, i=\overline{1,m}. \qquad (14)$$

Т.о., вектор δ^*, задаваемый (13), уд-ет условиям орт-ти, а кроме того, очевидно, он уд-ет и условиям нормализации. Поэтому $f\left(t^*\right)=\left(f^*\right)^{\overset{*}{\delta^1}}\left(f^*\right)^{\overset{*}{\delta^2}}...\left(f^*\right)^{\overset{*}{\delta^n}}=\prod_{j=1}^{n}\left(f^*\right)^{\overset{*}{\delta^j}}$. Но с др-ой стороны, согласно (13)

$$f^*=\frac{u_i\left(t^*\right)}{\delta_j^*},$$

и поэтому

$$\prod_{j=1}^{n}\left(f^{*}\right)^{\delta_j^{*}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{u_j\left(t^{*}\right)}{\delta_j^{*}}\right)^{\delta_j^{*}} = V\left(\delta^{*}\right) \qquad (15)$$

Тогда из (15) следует, что

$$f\left(t^{*}\right) = V(\delta^{*}). \qquad (16)$$

Стн. (16) вместе с (8) д-ет, что $\min f(t) = \max V(\delta)$■

Как следует из (13) и (16), метод ГП позволяет найти $\min f(t)$ без предварительного опр-ия искомой точки t^{*}. В этом методе первоначально находится точка $\left(\delta_1{}^{*}, \delta_2{}^{*}, \ldots, \delta_n{}^{*}\right)$, к-ая мксз-ет дв. фк-ю V при условиях орт-ти и нормализации.

Остаётся теперь задача опр-ия точки мнм-а $t^{*} = \left(t_1^{*}, t_2^{*}, \ldots, t_m^{*}\right)$.

Покажем, как найти искомую точку t* при известных δ_j^{*}, V(δ *).

Для этого воспользуемся стн-ми (13). Т. к. $f(t^{*}) = V(\delta^{*})$, то

$$u_j(t^{*}) = V(\delta^{*})\delta_j^{*},\ j = \overline{1,n}. \qquad (17)$$

Решая систему (17), найдем искомые значения для неизвестных $t^{*}=\left(t_1^{*}, t_2^{*}, \ldots, t_m^{*}\right)$.

п4. Найти точку мнм-ма $t^{*} = \left(t_1^{*}, \ldots, t_m^{*}\right)$ задачи

$$\min \mathrm{f}\,(\mathrm{t}) = \frac{40}{6_1 t_2 t_3} + 40t_2t_3 + 20t_1t_3 + 10t_1t_2 \quad (\text{см. } \mathbf{з1},\ \boldsymbol{n2})$$

Р. В **п2** нашли, что $\left(\delta_1^{*}, \delta_2^{*}, \delta_3^{*}, \delta_4^{*}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $m = v(\delta^{*}) = 100$, а из (13) следует, что t* уд-ет системе

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)\cdot 100 = u_1 = 40t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} \\ \left(\frac{1}{5}\right)\cdot 100 = u_2 = 40t_2t_3 \\ \left(\frac{1}{5}\right)\cdot 100 = u_3 = 20t_1t_3 \\ \left(\frac{1}{5}\right)\cdot 100 = u_4 = 10t_1t_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 40t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} = 40 \\ 40t_2t_3 = 20 \\ 20t_1t_3 = 20 \\ 10t_1t_2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \quad \left.\begin{array}{r} t_1t_2t_3 = 1 \\ t_2t_3 = 1 \\ t_1t_3 = 1 \\ \frac{1}{2}t_1t_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \frac{t_1t_2t_3}{t_1t_3} = 1 \Rightarrow t_2^{*} = 1 \\ t_3^{*} = \frac{1}{2} \\ t_1^{*} = 2 \end{array}$$

Итак, t*=(2, 1, $\frac{1}{2}$), f(t*) = $\frac{40}{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}+40\cdot 1\cdot \frac{1}{2}+20\cdot 2\cdot \frac{1}{2}+10\cdot 2\cdot 1=100=V(\delta^*).$

п5. Найти точку t* задачи $\min f(t)=4t_1+\frac{t_1}{t_2^2}+4\frac{t_2}{t_1}$ (см. **п**1, **п**3)

Р. В **п**3 выч-ли $(\delta_1^*,\delta_2^*,\delta_3^*,)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right), м=v(\delta^*)=8,$ а из (13) следует, что t* уд-ет системе:

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 8=u_1=4t_1\\ \left(\frac{1}{4}\right)\cdot 8=u_2=t_1t_2^{-2}\\ \left(\frac{2}{4}\right)\cdot 8=u_3=4t_1^{-1}t_2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}t_1=\frac{1}{2}\\ t_1t_2^{-2}=2\\ t_1^{-1}t_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}t_1^*=\frac{1}{2}\\ t_2^*=\frac{1}{2}\end{array}\left|\begin{array}{l}\text{Итак}, t^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) и\\ f(t^*)=8=V(\delta^*).\end{array}\right.$$

4⁰. Прямая и двойственная задача ГП и их свойства. Выше были рас-ны частные постановки задачи ГП и исследованы нек-ые св-ва и взаимосвязь прямой и дв-ой задач ГП без огр-й. Теперь рас-им постановки и элементы теории ГП, а также ств-ие между прямой и дв-ой задачами ГП с огр-ми. В основе теории ГП лежит обобщенное геом. нерав-во, а также теорема Куна-Таккера для задач НП.

В наиболее общей постановке прямая задача ГП формулируется сд-им образом.

Прямая задача А. Найти

$$\min f_0(t),\quad где\quad t=(t_1,\dots,t_m) \tag{18}$$

при огр-ях

$$t_i>0,\quad i=\overline{1,m} \tag{19}$$

и

$$f_1(t)\le 1,\dots,f_k(t)\le 1,\dots,f_p(t)\le 1, \tag{20}$$

где

$$f_k(t)=\sum_{j\in J_K} c_j\cdot t_1^{a_{j1}}t_2^{a_{j2}}\dots t^{ajm}, k=\overline{0,p}, \tag{21}$$

$$J_k=\{m_k,m_{k+1},\dots,n_k\},\quad k=\overline{0,p}, \tag{22}$$

$$m_0=1, m_1=n_0+1,\dots,m_k=n_{k-1^{+1}},\dots,n_p=n \tag{23}$$

Все $c_j>0$, $j=\overline{1,n}$, а показатели степени a_{ji} – дсв-ые числа. Сд-но, все фк-и $f_k(t)$ – позиномы. Мнмз-ая фк. $f_0(t)$ наз. прямой фк-ей, огр-ия (19) – условиями неотц-ти, а огр-ия (20) – вынужденными огр-ми. Матрица А=$(a_{ji})(j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m})$ наз. матрицей экспонент. Причем из (22), (23) видно, что $\bigcup_{k=0}^{p} J_k=(1,2,\dots,n)$.

Дв. задача, ств-ая прямой задаче А, формулируется сд. образом.

Двойственная задача В. Найти

$$\max V(\delta)=\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j}{\delta_j}\right)^{\delta_j}\right]\prod_{K=1}^{P}\lambda_K\left(\delta\right)^{\lambda_K(\delta)}, \tag{24}$$

где

$$\lambda_k\left(\delta\right)=\sum_{j\in J_k}\delta_j, k=\overline{1,P}, \tag{25}$$

где

$$\delta_j\geq 0, j=\overline{1,n} \tag{26}$$

$$\sum_{j\in J_0}\delta_j=1 \tag{27}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\delta_j=0, i=\overline{1,m}, \tag{28}$$

а мн-ва индексов $J_k\left(k=\overline{o,p}\right)$ опр-ся согласно (22) и (23), множители $c_j>0, j=\overline{1,n},$ на пер-ые $\delta=\left(\delta_1,\ ...,\ \delta_j,\ ...,\ \delta_n\right)$ налагаются огр-ия (26)–(28).

Фк-я $V\left(\delta\right)$ наз, дв-ой фк-ей, а пер-ые $\delta_1,\ \delta_2$, ..., δ_n – дв. пер-ми. Условие (27) – условие нормализации, а стн-ия (28) – условия орт-ти.

Путем сопоставления форм записи прямой задачи (18)–(23) и дв-ой (24)–(28) можно установить сд-ие ств-ия между ними.

1. Каждому члену позиномов прямой задачи вида $u_j=c_jt_1^{a_{j1}}...t_m^{a_{jm}}$ ств-ет одна дв. пер-ая δ_j и наоборот.

2. Каждый множитель $\lambda_k\left(\delta\right)^{\lambda_k(\delta)}$ фк-и $V\left(\delta\right)$ опр-ся вынужденным огр-ем $f_k(t)<1$. Однако целевая фк $f_o(t)$ не влечет появление такого множителя, т.к. по условию нормализации $\lambda_o\left(\delta\right)=\sum_{j=J_0}\delta_j=1$.

3. Условие нормализации (27) – это единственное условие, по к-му различаются целевая фк. $f_o(t)$ и позиномы – огр-ия $f_k(t)$.

Связь между опт-ми решениями прямой и дв-ой задач ГП устанавливается в сд-ей основной теореме.

т2. Пусть прямая задачи А совместна и сущ-ет решение t' такое, что $t_k\left(t'\right)<1\left(k=\overline{1,P}\right)$, а также опт. решение. Тогда:

1. Ств-ая дв. задача совместна и сущ-ет точка, уд-щая дв-ом огр-ям, в к-ой достигается условный мкс-м дв-ой фк-и $V\left(\delta\right)$.

2. Мкс. значение целевой фк-и дв-ой задачи равно мнм-му значению целевой фк-и прямой задачи, т.е.

$$\min f_o(t)=max V(\delta)$$

3. Если $t*$ – мнмз. точка прямой задачи А, то сущ-ют неотц-ые множители Лагранжа $\mu^* k\left(k=\overline{1,P}\right)$ такие, что φ к. Лагранжа

$$L(t,\mu)=f_o(t)+\sum_{k=1}^{p}\mu_k\left[f_k\left(t\right)-1\right] \tag{29}$$

обладает тем св-ом, что

$$L(t^*,\mu)\le L(t^*,\mu^*)=f_o(t^*)\le L(t,\mu^*) \tag{30}$$

для произвольных $t_i>0$ и произвольных $\mu_k\ge 0$.

Кроме того сущ-ет мксз-ий вектор δ^* дв-ой задачи с компонентами, опр-ми из условий

$$\begin{gathered}\delta_j^*=\frac{c_j t_1^{a_{j1}} t_2^{a_{j2}}\ldots t_m^{ajm}}{f_o\left(t\right)},j\in J_0\\ \frac{\mu_k c_j t_1^{a_{j1}} t_2^{a_{j2}}\ldots t_m^{a_{jm}}}{f_o\left(t\right)},j\in J_k\left(k=\overline{1,P}\right),\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$t=t^*\text{и}\,\mu=\mu^*.$$

Далее

$$\lambda_k\left(\delta^*\right)=\frac{\mu_k^*}{f_o\left(t^*\right)}. \tag{32}$$

4. Если δ^* – мксз. точка дв-ой задачи В, то любая мнмз. точка t^* прямой задачи А уд-ет системе ур-ий

$$c_j t_1^{a_{j1}} t_2^{a_{j2}}\ldots t_m^{a_{jm}}=\begin{cases}\delta_j^* V\left(\delta^*\right),j\in J_o,\\ \hline \dfrac{\delta_j^*}{\lambda_k\left(\delta^*\right)},j\in J_k,\end{cases} \tag{33}$$

где k пробегает все плж, цлч-ые значения, для к-ых $\lambda_k\left(\delta^*\right)>o$,

Д-во **т2** см. в $\left[38\right]$.

Пользуясь результатами **т2**, зная решение прямой задачи t^*, можно на основании стн-й (31) опр-ть мксз-й вектор Ъ*. Наоборот, если известно решение дв-ой задачи $\overset{*}{\delta}$, то используя фм-у (33), можно опр-ть опт. решение прямой задачи t*. Заметим, что система (33) путем лгр-ия обоих частей каждого ур-ия оказывается лин-ой отс-но $\ln t_1$, $\ln t_2,\ldots,\ln t_m$. Наконец, из (32) следует, что вел-ы $\lambda_k\left(\delta^*\right)$ с точностью до пст-го множителя оказываются множителями Лагранжа прямой задачи.

Одним из условий **т**2 яв-ся предположение о сущ-и точки, уд-ей огр-ми прямой задачи, где достигается $min\, f_o(t)$

Сд. теорема дв-ти опр-ет дт-ые условия, при к-ых это предположение справедливо.

т3. Если прямая задачи А совместна и сущ-ет точка δ^* с плж. компонентами, уд-щая огр-ям дв-ой задачи В, что сущ-ет точка t*, уд-щая огр-ям прямой задачи, в к-ой фк. $f_0(t)$ достигает своего мнм-а.

Теперь исследуем нек-ые св. задачи ГП. С этой целью рас-им позином

$$f(t) = \sum_j C_j t_1^{a_{j1}} t_2^{a_{j2}} \cdots t_m^{a_{jm}} \qquad (34)$$

и произведем в нем замену пер-ых, пологая

$$t_i = e^{z_i}, \ \ i = \overline{1, m}. \qquad (35)$$

Прб-ая фк., имеющая вид

$$f(z) = \sum_j c_j e \sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i, \qquad (36)$$

наз. плж-ой показательной фк-ей. Отметим, что пер-ые z_i прб-ой прямой задачи меняются на мн-ве всех дсв-ых чисел, тогда как пер-ые прямой задачи t_i должны уд-ть условию неотц-ти.

Итак, прб-ли прямую задачу А к сд. виду.

Прямая задача A_z. Найти

$$\min f_0(Z) \quad (Z = Z_1, \ ..., \ Z_i, \ ..., Z_m)$$

при огр-ях

$$f_1(Z) \le 1, ..., \ f_k(Z) \le 1, \ ..., \ f_p(Z) \le 1 \qquad (37)$$

где

$$f_k(Z) = \sum_{j \in Jк} c_j e^{\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i}, \ k = \overline{0, P}, \qquad (38)$$

где $J_к = \{m_к, \ m_{к+1}, \ ..., \ n_к\}$ и $m_0 = 1, \ m_1 = n_0 + 1, \ n_p = n.$

Очевидно, все фк. $f_k(Z)$ – плж. показательные фк.

Анализ прб-ой задачи A_z позволяет выявить многие важные св. прямой задачи А. Н-р, из рас-ия задачи A_z, сразу следует, что любая прямая задача может быть сформулирована так, что ее матрица экспонент A = (a_{ji}) будет иметь ранг m.

Дсв-но, задача A_z может быть представлена в бескоординатной форме:

Найти $\min \sum_{j \in J_0} c_j e^{x_j}$ при огр-ях

$$\sum_{j \in Jк} c_j e^{x_j} \le 1, к = \overline{1, P},$$

где вектор $x=\left(x_1,\ ...,\ x_j,\ ...,\ x_n\right)$ принадлежит пр-ву, натянутому на столбцы матрицы $A=\left(a_{ji}\right)$, $\mathrm{x_j}=\sum\limits_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\mathrm{a_{ji}z_i}$. Если ранг A меньше m, то вектор-столбцы матрицы A лин. зв-ы, и из них можно выделить базисные векторы и небазисные лин. зависящие от базисных.

Такое выделение будет, естественно, не единственным. Однако при данном выделенном базисе пер-ым, не входящим в базис (небазисным), можно приписать произвольные значения, и потому их в сущности можно не считать пер-ми, т.к. это не оказывает влияния на мнм. значение задачи A_z.

Т.о., без потери общности можно считать, что ранг матрицы A всегда равен m. Если такая матрица квадратная (т.е. $n=m$), то ее векторы-столбцы образуют базис для пр. E_n. В таком случае всегда сущ-ет посл-ть векторов $\left\{\mathrm{z^q}\right\}^{\infty}$ $\mathrm{q}=1$, для к-ой

$$\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{a_{ji}}\mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{q})}=-\mathrm{q},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{q}=1,\ 2,\ ... \tag{39}$$

Тогда из стн-я (39) следует, что

$$\lim_{\mathrm{q}\to\infty}\mathrm{f_k}\left(\mathrm{Z^{(q)}}\right)=0,\ \mathrm{k}=\overline{0,\mathrm{P}}. \tag{40}$$

Но это означает, что задача A_z совместна и $f_0(z)$ имеет мнм., равный 0. Кроме того, ясно, что задачи этого типа вообще не имеют условного мнм. Ств-ая дв. задача в этом случае всегда несовместна, поскольку нулевой вектор будет единственным решением, уд-им условиям орт-ти, но он не уд-ет условию нормализации.

Итак, приходим к выводу, что любая нетривиальная прямая задача может быть сформулирована так, что ее матрица-экспонент будет иметь ранг m, равный числу пер-ых прямой задачи, где m – строго меньше общего числа членов n.

Целое число $m-n-1=d$ наз. степенью трудности такой задачи. Степень трудности совпадает с числом незв-ых пер-ых, по к-ым мксз-ся дв. целевая фк. Так, решение задачи с нулевой степенью трудности (d=0) легко получается из решения дв-ой задачи, поскольку огр-ия для нее будут иметь единственное решение. Причем нахождение этого решения $\delta *$ несложно, т.к. все дв. огр-ия лин-ы. Вследствие того, что вектор $\delta *$ яв-ся единственным решением дв-ых огр-й, то он яв-ся также и мксз-им вектором для дв-ой задачи. Если же степень трудности больше нуля (d>0), то для нахождения $\delta *$ требуются дпн-ые условия. Для такой задачи можно построить базисные векторы $b^{(i)}$, $i=0,1,...,d$ так, что общее решение дв-ых огр-й будет иметь вид

$$\delta=b^0+\sum_{i=1}^{d}r_ib^{(i)} \tag{41}$$

где r_i – произвольные дсв. числа, уд-ие условиям неотц-ти вида

$$\delta_j = b_j^0 + \sum_{i=1}^{d} r_i b_j^{(i)} \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{42}$$

Вектор $b^{(0)}$, уд-й условиям нормализации

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{(0)} = 1 \tag{43}$$

и условиям орт-ти

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j^0 = 0,\ i = \overline{1,m} \tag{44}$$

наз-ся вектором нормализации.

Векторы $b^{(i)}\left(i = \overline{1,d}\right)$ образуют базис пр-ва решений лин. одн-ой системы ур-й:

$$\begin{gathered} \sum_{j\in J_0} y_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j = 0,\ i = \overline{1,m} \end{gathered} \tag{45}$$

Их наз-ют векторами невязки, а пер-ые r_i, связанные с векторами $b^{(i)}$, – базисными.

Выразив дв. фк-ю v через базисные пер., получим

$$v = \left\{\prod_{j=1}^{n} c_j \left[b_j^0 + \sum_{i=1}^{d} r_i b_j^{(i)}\right]\right\} \left(\prod_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \delta_j^{-\delta j}\right) \prod_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k^{(\delta)}}. \tag{46}$$

Пусть
$$K_i = \prod_{j=1}^{n} c_j^{b_j^{(i)}},\ i = \overline{0,d} \tag{47}$$

Тогда
$$v = k_0 \left(\prod_{i=0}^{d} k_i^{r_i}\right) \left(\prod_{j=i}^{n} \delta_j^{-\delta j}\right) \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \tag{48}$$

Отметим, что пст-я K_0 имеет размерность дв-ой фк-и, а пст-ые $K_i\left(i=\overline{1,d}\right)$ – безразмерные вел. Эти пст. наз-ют базисными, т.к. они зависят от базиса $\left\{b^{(i)}\right\}$, $i=\overline{1,d}$.

Т.о., дв. задачу В привели к сд. виду

Преобразованная двойственная задача B_r. Найти

$$\max \mathrm{v}(\mathrm{r}) = k_0 \left(\prod_{i=1}^{d} k_i^{r_i}\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \delta_j(r)^{-\delta_j(r)}\right) \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(r)^{\lambda_k(r)}, \tag{49}$$

где

$$\delta_j\left(r\right)=b_j^{(0)}+\sum_{i=1}^{d}r_ib_j^{(i)} \tag{50}$$

и

$$\lambda_k\left(r\right)=\lambda_k\left(0\right)+\sum_{i=1}^{d}r_i\lambda_k^{(i)},\ k=\overline{1,P}\ , \tag{51}$$

$$k_i\ =\ {}_jПC_j^{b_j^{(i)}}\ ,\ i=\overline{0,d}\ , \tag{52}$$

и

$$\lambda_k^{(i)}=\sum_{j\in J_k}b_j^{(i)},\ \lambda_k^{(0)}=\sum_{j\in J_k}b_i^{(0)}.$$

На вектор r наложены условия неотц-ти вида

$$\delta_j\left(r\right)=b_j^{(0)}+\sum_{i=1}^{d}r_ib_j^{(i)}\geq 0,\ j=\overline{1,n} \tag{53}$$

Решение прб-ой дв. задачи B_r сводится к оптз-и вогнутой фк-и, полученной заменой $v\left(r\right)$ на $\ell n\ v\left(r\right)$ на выпуклом мн-ве допустимых решений (МДР).

Допустим, что r – точка, в к-ой $\delta_j\left(r\right)>0\left(j=\overline{1,n}\right)$. Лгр-уя $v\left(r\right)$ и диф-уя по r_i в точке r, получим

$$\frac{\partial v/\partial r_i}{v\left(r\right)}=\ell nK_i-\sum_{j=1}^{n}b_j^{(i)}\ell n\delta_i\left(r\right)+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^{(i)}\ell n\lambda_k\left(r\right) \tag{54}$$

Значит, точка r яв-ся стационарной точкой для $\ell n\ v\left(r\right)$ ттогда, когда

$$\ell nK_i=\sum_{j=1}^{n}b_j^{(i)}\ell n\ \delta_j\left(r\right)-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^{(i)}\ell n\lambda_k\left(r\right),\ i=\overline{1,d},$$

что экв-но

$$k_i=\prod_{j=1}^{n}\delta_j\left(r\right)^{b_j^{(i)}}\prod_{k=1}^{p}\lambda_k\left(r\right)^{-\lambda_k^{(i)}}\ . \tag{55}$$

Если r уд-ет этим ур-ям, то после несложных прб-й выражение для $v\left(r\right)$ может быть приведено к виду

$$v\left(r\right)=k_0\prod_{j=1}^{n}\delta_j\left(r\right)^{-b_j^{(0)}}\prod_{k=1}^{p}\lambda_k\left(r\right)^{\lambda_k(0)}. \tag{56}$$

Использование стн-й (55) и (56), а также св-ва, что для вогнутой фк-и всякая стационарная точка яв-ся мксз-ей, док-ют сд. теорему.

т4. Если δ уд-ет огр-ям дв-ой задачи В и все компоненты δ плж-ны, то δ яв-ся мксз-ей точкой дв-ой задачи ттогда, когда

$$k_i=\left(\prod_{j=1}^{n}\delta_j^{b_j^{(i)}}\left(r\right)\right)\prod_{k=1}^{p}\lambda_k\left(\delta\left(r\right)\right)^{-\lambda_k^{(i)}}\ ,\ i=\overline{1,d}, \tag{57}$$

где
$$k_i = \sum_{j=1}^{n} c_j^{b_j^{(i)}}, \ i = \overline{1,d}. \tag{58}$$

При этом, если δ уд-ет стн-ям (57), то
$$v(\delta) = k_0 \left(\prod_{j=1}^{n} \delta_g^{-b_j^{(0)}}(r) \right) \prod \lambda_k(\delta)^{\lambda_k^{(0)}}. \tag{59}$$

Ур-ия (57) наз. мксз-ми ур-ми. Они образуют систему, состоящую из d нелин-х ур-й отс-но d базисных пер, $r_i \left(i = \overline{1,d} \right)$. Решив эту систему, можно опр-ть мксз-ю точку дв-ой программы В. Фм. (56) задает мкс. значение дв-ой задачи В для такой мксз-ей точки.

5^0. Описание алгоритма. Примеры. На основании вышеизложенного можно сформулировать сд-й алгоритм Г П.

Пусть задана прямая задача А в виде (18)–(23).

1. Составляем задачу, дв-ую к ней, (24)–(28).

2. Находим решение огр-й орт-ти (28) и нормализации (27) – δ^*.

Если степень трудности $d = n - m - 1 = 0$, то это решение единственно.

3. Используя значение $\delta^* = \left\{ \delta_j^{\ *} \right\} \left(j = \overline{1,n} \right)$ составляем систему ур-й (33), к-ую решаем отс-но пер-ых $t^* = \left\{ t_i^* \right\} \left(i = \overline{1,m} \right)$.

При это для искомого решения $\upsilon\left(\delta^*\right) = f_0\left(t^*\right)$.

4. Если же степень трудности задачи $d > 0$, то общее решение системы ур-й (27)-(28) будет иметь вид:
$$\delta_j(r) = b_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{d} r_i b_j^{(i)} \geq 0 \ , \ j = \overline{1,n}.$$
где r – вектор произвольных параметров.

5. Используя условия опт-ти т4, составляем и решаем систему нелин-х ур-й (57) отс-но неизвестных r_{i}, $i = \overline{1,d}$. Найдя ее решение r^* и подставляя в (53), опр-ем опт-ые значения дв-ых пер-ых $\delta_j = \delta_j\left(r^*\right)$, а подставляя δ^* в (59), опр-им опт. значение дв-ой целевой фк-и $\upsilon\left(\delta^*\right) = \max \upsilon$.

6. Переходим к прямой задаче и, используя стн-ия (33), решаем систему ур-й отс-но искомых значений $t_1^{\ *}, t_2^{\ *}, \ldots, t_m^{\ *}$ при уже найденных значениях пер-ых $\left\{ \delta_j^{\ *} \right\}, j = \overline{1,n}.$

п6. Найти

$$\min f_0(t) = 40t_1t_2 + 20t_2t_3 \qquad ①$$

при огр-и

$$f(t) = \frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1/2} + \frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-2/3} \le 1 \qquad ②$$

Р. Т.к. число членов $n = 4$, а число пер-ых $m = 3$, то степень трудности $d = n - m - 1 = 0$, значит, решение дв-ых огр-й единственно. Дв. задача к задаче ① запишется в виде:

$$\max \upsilon(\delta) = \left(\frac{40}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{20}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{1/5}{\delta_3}\right)^{\delta_3} \left(\frac{3/5}{\delta_4}\right)^{\delta_4} (\delta_3 + \delta_4)^{\delta_3+\delta_4} \qquad ③$$

при условиях

$$\delta_1 + \delta_2 = 1 \qquad ④$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1 - \delta_3 = 0 \\ &\delta_1 + \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 - \delta_4 = 0 \\ &\delta_2 - \frac{2}{3}\delta_4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad ⑤$$

$$\delta_j \ge 0, j = \overline{1,n} \qquad ⑥$$

Из системы ④, ⑤ находим единственное решение:

$$\delta_1^* = \frac{1}{2}, \delta_2^* = \frac{1}{2}, \delta_3^* = \frac{1}{2}, \delta_4^* = \frac{3}{4}.$$

Отсюда видно, что для $f(t)$ выполнены условия т2 и т3 и прямая задачи совместна. Применим эти теоремы для поиска искомого решения t^*. Находим значения дв-ой фк-и $\upsilon = (\delta^*) = \left(\frac{40}{1/2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{1/2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1/5}{1/2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3/5}{3/4}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = 40.$

Сд-но, по теореме дв-ти т1 $\upsilon(\delta^*) = f_0(t^*) = 40$. По стн. (33) составим систему ур-й:

$$\left.\begin{aligned} &40t_1t_2 = \delta_1^*\upsilon(\delta^*) = \frac{1}{2}40 \\ &20t_2t_3 = \delta_2^*\upsilon(\delta^*) = \frac{1}{2}40 \\ &\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_3}{\delta_3 + \delta_4} = \frac{2}{5} \\ &\frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-\frac{2}{3}} = \frac{\delta_4}{\delta_3 + \delta_4} = \frac{3}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &t_1t_2 = \frac{1}{2} \\ &t_2t_3 = 1 \\ &t_1^{-1}t_2^{-\frac{1}{2}} = 2 \\ &t_2^{-1}t_3^{-\frac{2}{3}} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad ⑦$$

Прологарифмируя (7), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\ell n t_1 + \ell n t_2 = -\ell n 2 \\ &\ell n t_2 + \ell n t_3 = 0 \\ &-\ell n t_1 - \frac{1}{2}\ell n t_2 = \ell n 2 \\ &-\ell n t_2 - \frac{2}{3}\ell n t_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\ell n t_1 + \ell n t_2 = -\ell n 2 \\ &-\ell n t_1 - \frac{1}{2}\ell n t_2 = \ell n 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\ell n t_2 = 0 \Rightarrow t_2^{*} = 1 \\ &\qquad 0 + \ell n t_3 = 0 \Rightarrow t_3^{*} = 1 \\ &\ell n t_1 + 0 = -\ell n 2 \Rightarrow \ell n t_1 = \ell n \frac{1}{2} \Rightarrow t_1^{*} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Итак, $t^{*} = \left(\frac{1}{2},1,1\right), f_0\left(t^{*}\right) = 40\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + 20\cdot 1\cdot 1 = 40,$ т.е. $\upsilon\left(\delta^{*}\right) = f_0\left(t^{*}\right) = 40.$

п7. Найти

$$\min f_0\left(t\right) = 40 t_1^{-1} t_2^{-1/2} t_3^{-1} + 20 t_1 t_3 + 20 t_1 t_2 t_3, \qquad ①$$

при условии

$$f\left(t\right) = \frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} + \frac{4}{3} t_2^{\frac{1}{2}} t_3^{-1} \le 1. \qquad ②$$

Ств-ая дв. задача имеет вид:

$$\max \upsilon\left(\delta\right) = \left(\frac{40}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{20}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{20}{\delta_3}\right)^{\delta_3} \left(\frac{1/3}{\delta_4}\right)^{\delta_4} \left(\frac{4/3}{\delta_5}\right)^{\delta_5} \left(\delta_4 + \delta_5\right)^{\delta_4+\delta_5}, \qquad ③$$

при огр-ях

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1, \qquad ④$$

$$\left.\begin{aligned} &-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4 = 0 \\ &-1/2\delta_1 \quad + \delta_3 - 2\delta_4 + \frac{1}{2}\delta_5 = 0 \\ &-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad - \delta_5 = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad ⑤$$

$$\delta_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \qquad ⑥$$

Степень трудности программы равна $d = n - m - i = 5 - 3 - 1 = 1$.

1. Систему ④ – ⑥ решаем методом Жордана Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta_5 \\ \delta_2 &= 1/4 + \frac{1}{4}\delta_5 \\ \delta_3 &= 1/4 + 1/4\delta_5 \\ \delta_4 &= 0 + 1/2\delta_5 \end{aligned}$$

Отсюда получаем сд-е базисное решение: $\delta_1^* = \frac{1}{2},\ \delta_2^* = \frac{1}{4},\ \delta_3^* = \frac{1}{4},\ \delta_4^* = 0,\ \delta_5^* = 0.$

Полное мн. решений системы равно при $\delta_4 = r$ (тогда из последнего ур-я $\delta_5 = 2r$)

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= 1/2 - r \\ \delta_2 &= 1/4 + 1/2r \\ \delta_3 &= 1/4 + 1/2r \\ \delta_4 &= r \\ \delta_5 &= 2r \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Из этих ур-й, используя условия неотц-ти (6), получаем, что r должно уд-ть нерав-ву $0 \le r \le 1/2$ ⑦

2. Записав общее решение системы в виде: $\delta = b^{(0)} + rb^{(1)}$, опр-ем, что

$$b^{(0)} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right) \qquad ⑧$$

$$b^{(1)} = \left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\right) \qquad ⑨$$

3. Используя условия опт-ти (57) т4, опр-ем искомое значение r^*, при к-ом

$$\upsilon\left(\delta\left(r^x\right)\right) = \max_r \upsilon(r).$$

Выч-ем $k_1 = \sum_{j=1}^{5} c_j^{bj^{(1)}} = 40^{-1} \cdot 20^{\frac{1}{2}} 20^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{40}\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{9} = \frac{8}{27}.$ Но в силу (57) с учетом $d = 1, p = 1$ $\quad k_1 = \mathop{\Pi}\limits_{j=1}^{5} \delta_j^{bj^{(1)}}(r)\lambda_1^{-\lambda_1}(r),$ ⑩

где $\delta_j(r)$ опр-ся из ⑤ и ⑥, $b_j^{(1)}$ опр-ся из ⑨

$$\lambda_1(r) = \delta_4(r) + \delta_5(r) = r + 2r,$$

$$\lambda_1^{(1)} = b_4^{(1)} + b_5^{(1)} = 1 + 2 = 3.$$

Подставляя эти значения в ⑩, получим

$$k_1 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^{-1} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}r\right)^{1/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}r\right)^{\frac{1}{2}} (r)^1 (2r)^2 (r + 2r)^{-3} =$$

$$= \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}r\right) r 4r^2}{\left(\frac{1}{2} - r\right) 3^3 r^3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2}r = 2\left(\frac{1}{2} - r\right) \Rightarrow r^* = 0,3.$$

Заметим, что это значение уд-ет нерав-у ⑦. Подставляя $r^* = 0,3$ в ⑥′, получим опт-ые значения дв-ых пер-ых: $\delta_1^* = \frac{1}{2} - r^* = 0,2$; $\delta_2^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} r^* = 0,4$; $\delta_3^* = \delta_2^* = 0,4$; $\delta_4^* = 0,3$; $\delta_5^* = 0,6$.

Тогда $\max \upsilon(\delta *) = \left(\frac{40}{0,2}\right)^{0,2} \left(\frac{20}{0,4}\right)^{0,4} \left(\frac{20}{0,4}\right)^{0,4} \left(\frac{1/3}{0,3}\right)^{0,3} \left(\frac{4/3}{0,6}\right)^{0,6} (0,9)^{0,9} =$

$(200)^{0,2}(50)^{0,4}(50)^{0,4}\left(\frac{10}{9}\right)^{0,3}\left(\frac{10}{9}\right)^{0,6} \cdot 2^{0,6} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{0,9} = 4^{0,2} \cdot 50 \cdot 4^{0,3} = 100$. Итак, $\upsilon(\delta^*) = 100$

Теперь, используя стн-я (33) из **т2**, составим ур-я отс-но неизвестных прямой задачи t_1, t_2, t_3 :

$$40 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} = \delta_1^* \upsilon(\delta^*) = 0,2 \cdot 100 = 20, \qquad ⑪$$

$$20 t_1 t_3 = \delta_2^* \upsilon(\delta^*) = 0,4 \cdot 100 = 40, \qquad ⑫$$

$$20 t_1 t_2 t_3 = \delta_3^* \upsilon(\delta^*) = 0,4 \cdot 100 = 40, \qquad ⑬$$

$$\frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} = \frac{\delta_4^*}{\delta_4^* + \delta_5^*} = \frac{0,3}{0,3 + 0,4} = \frac{1}{3}. \qquad ⑭$$

Разделив ур-ие⑬ на ⑫, получим $t_2^* = \frac{40}{40} = 1$. Подставляя $t_2^* = 1$ в ⑭, получим $\frac{1}{3} t_1^{-2} = \frac{1}{3}$, откуда $\mathrm{t}_1^* = 1$. Подставив $t_1^* = 1$ в ⑫, находим $t_3^* = 2$. Итак, нашли опт. решение прямой задачи: $t^* = (1,1,2)$, $f_0(t^*) = \upsilon(\delta^*) = 100$.

6^0. Понижение размерности позиномов. Если в матрице экспонент позиномов i-я строка лин. зв-ма от остальных строк, то размер ств-го позинома можно уменьшить на единицу, т.е. избавиться от t пер-го. Если же лин. зв-мы две строки от остальных, то можно избавиться от двух пер-ых.

Для подтверждения сказанного сформулируем сд-ю

т5. Пусть нек-ая строка (н-р, i-я строка) матрицы экспонент позинома $f(t_1, \ldots, t_i, \ldots t_m)$ яв-ся лин-ой комбинацией др-их строк. Пусть f_1 – позином от m-1 пер-ых, получающийся из позинома f фиксированием i-й пер-ой: $t_i = 1$, т.е.

$$\mathrm{f}_1(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_m).$$

Тогда (в предположении, что мнм-ы достигаются):

$a)$ $\min f = \min f_1$;

б) если $\left(t_1^*,\ldots,t_{i-1}^*,t_{i+1}^{\times},\ldots,t_m\right)$ – мнмз. точка позинома f_1, то $\left(t_1^*,\ldots,t_{i-1}^*,1,t_{i+1}^{\times},\ldots,t_m^*\right)$ будет мнмз. точкой позинома f.

Далее, если в матрице экспонент позинома f_1 найдется строка, яв-яся лин. комбинацией остальных строк, то можно еще уменьшить на единицу число пер-ых, перейдя к нек-му позиному f_2 и т.д.

п8. Предварительно уменьшив число пер-ых найти нм. значение позинома $f(t)=2t_1t_2^{-1}t_3+t_1^2t_3^4+3t_1^{-3}t_2t_3^{-5}$ с матрицей экспонент $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -5\end{pmatrix}$.

Р. легко проверить, что третья строка этой матрицы яв-ся лин-ой комбинацией ее первых двух строк с коэф-ми $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$. Дев-но, $2\cdot1+1(-1)==1,\ 2\cdot2+1\cdot0=4,\ 2(\text{-}3)+1\cdot1=-5$. Тогда вычеркнув 3-ю строку, получим матрицу $\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ств. позиному $f_1(t)=2t_1t_2^{-1}+t_1^2+3t_1^{-3}t_2$. Для f_1 запишем дв. фк-ю $\upsilon(\delta)=\left(\frac{2}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{3}{\delta_3}\right)^{\delta_3}$, где веса $\delta_{\mathrm{j}}\geq0\left(j=\overline{1,3}\right)$ уд-ют условиям:

$$\left.\begin{aligned}&D_1=\delta_1+2\delta_2-3\delta_3=0\\ &D_2=-\delta_1+\delta_3=0\\ &\delta_1+\delta_2+\delta_3=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&\delta_3=\delta_1\\ &\left.\begin{aligned}&-2\delta_1+2\delta_2=0\\ &2\delta_1+\delta_2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\delta_2=\delta_1\\ &3\delta_1=1\end{aligned}\right.\end{aligned}\Bigg\}\Rightarrow\begin{aligned}&\delta_1^*=\frac{1}{3}\\ &\delta_2^*=1\big/3\\ &\delta_3^*=1\big/3\end{aligned}$$

Тогда $\upsilon(\delta^*)=\left(\frac{2}{1/3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1/3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(3\Big/\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=(6\cdot3\cdot9)^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{6}.$ Из $\upsilon(\delta^*)=f_1(t^*)$ и

$$\frac{u_j(t^x)}{f_1(t^*)}=\delta_j^*\ \text{получим:}\ \left.\begin{aligned}&\frac{1}{3}\cdot3\sqrt[3]{6}=u_1=2t_1t_2^{-1}\\ &\frac{1}{3}\cdot3\sqrt[3]{6}=u_2=t_1^2\\ &\frac{1}{3}\cdot3\sqrt[3]{6}=u_3=3t_1^{-3}t_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&t_1t_2^{-1}=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\\ &t_1^2=\sqrt[3]{6}\\ &t_1^{-3}t_2=\frac{\sqrt[3]{6}}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&t_1=\sqrt[6]{6},\\ &t_2=2\big/\sqrt[6]{6}.\end{aligned}$$

Т.о. $t^*=\left(\sqrt[6]{6},2\big/\sqrt[6]{6}\right)$ – точка мнм-а, $f_1(t^*)=u_1+u_2+u_3=3\sqrt[3]{6}.$

Согласно т5 таков же будет мнм исходного позинома

$$f(t^*)=3\sqrt[3]{6}\ \text{ в точке }\mathrm{t}^*=\left(\sqrt[6]{6},2\big/\sqrt[6]{6},1\right).$$

7^0. Регулярные позиномы. Общий метод в классе позиномов от m перых и n число членов можно выделить важный класс позинов, нм. значение к-ых находятся особенно просто.

о1. Пусть $f(x)=\sum_{j=1}^{n} x^{\alpha_j}$ есть позином одной пер. x. Назовем позином регулярным, если имеет место рав-во

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j = 0. \qquad ①$$

Простейшими регулярными позиномами от t яв-ся:

1) $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t} + \frac{1}{\mathrm{t}} = t + t^{-1}$, где $\mathrm{c}_1 = c_2 = 1,\ \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 1;\ \mathrm{c}_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1\cdot 1 + 1(-1) = 0$

2) $h(x) = x + \frac{\sin\alpha}{x^{\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{x^{\cos\alpha}} = x^1 + \sin\alpha x^{-\sin\alpha} + \cos\alpha x^{-\cos\alpha}, (0 \le \alpha < \frac{\pi}{2})$, где

$c_1 = 1, c_2 = \sin\alpha, c_3 = \cos\alpha; \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\sin\alpha; \alpha_3 = -\cos\alpha;$ отсюда $\sum_{i=1}^{3} c_j\alpha_j = 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0.$

о2. Пусть теперь

$$f(x_1 ... x_i, ... x_m) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_1^{\alpha_{1j}} ...\ x_i^{\alpha_{ij}} ... x_m^{\alpha_{mj}} \qquad ②$$

есть позином от m пер-ых. Будем называть $f(x_1, ..., x_i, ..., x_m)$ регулярным позиномом, если

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + ... + \alpha_{1n}c_n &= 0 \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + ... + \alpha_{2n}c_n &= 0 \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + ... + \alpha_{mn}c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad ③$$

Это опр-ие равносильно также сд-му.

Позизном ② естественным образом порождёт m позиномов одной перой $f_1(x_1) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i^{\alpha_{1j}}, ..., f_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i^{\alpha_{ij}}, ..., f_m(x_m) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_m^{\alpha_{mj}}$, к-ые наз. компонентами данного позинома. Н-р, компонентами позинодвух пер-ых

$$f(x, y) = 2x^{-\frac{4}{r}} y^{-\frac{1}{s}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{s}} + 2x^{-\frac{2}{r}} y^{-\frac{2}{s}} (r, s \ne 0) \qquad ④$$

будут позиномы

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^{-\frac{4}{r}} + 2x^{\frac{5}{r}} + x^{-\frac{2}{r}}, \text{ где } 2(-\frac{4}{\mathrm{r}}) + 2\frac{5}{\mathrm{r}} + 1(-\frac{2}{r}) = 0 \\ f_2(y) &= 2y^{-\frac{1}{S}} + 2y^{\frac{2}{S}} + y^{-\frac{2}{S}}, \text{ где } 2(-\frac{1}{\mathrm{S}}) + 2\cdot\frac{2}{\mathrm{S}} + 1(-\frac{2}{S}) = 0 \end{aligned} \qquad ⑤$$

Очевидно, что позином $f(x_1,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_m)$ регулярен ттогда, когда все его компоненты $f_i(x_i)$ $(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}})$ регулярны. Так, позином ④ – регулярный, поскольку оба его компоненты ⑤ – регулярные.

Приведем теорему, к-ая полезна при проверке регулярности позиномов.

т6. Если позинома f, h – регулярные, то позиномы $\lambda f, f+h, f.h$ – также регулярные ($\lambda - плж.$ число). Д-во см. в [6].

Из т.6 получим сд. следствие.

сл1. Если $f(x_1,...,x_i,...,x_m)$ – регулярный позином, то любая его целая плж, степень к (т.е. позином f^k) – тоже регулярный позином.

п9. Рас-им регулярный позином $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ Согласно сл1 позином

$f^n(x) = (1+\dfrac{1}{x})^n = \sum\limits_{i=0}^{n} c_n^i x^i \dfrac{1}{x^{n-i}} = \sum\limits_{i=0}^{n} c_n^i x^{2i-n}$ – регулярный. $Сд-но, \sum\limits_{i=0}^{n} c_n^i (2i-n) = 0,$

$т.е. 2\sum\limits_{i=0}^{n} ic_n^i = n\sum\limits_{i=0}^{n} c_n^i = n2^n$, откуда получим известное биномиальное тождество

$$\sum_{i=0}^{n} ic_n^i = n2^{n-1}. \qquad ⑥$$

п10. Д-ть, что позином $f(x_1,...,x_m) = (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^2 (\sum x_i^{-2})$ регулярный (6а)

Д. Имеем

$$(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 (\sum_{i=1}^{m} x_i^{-2}) =$$
$$(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 2\sum_{k\prec j} x_k x_j)\sum_{i=1}^{m} x_i^{-2} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{-2} + 2\sum_{k\prec j} x_k x_j \sum_{i=1}^{m} x_i^{-2}. \qquad (6б)$$

Первое слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{-2} = m + \sum\limits_{k\prec j} \left(\dfrac{x_k^2}{x_j^2} + \dfrac{x_j^2}{x_k^2}\right)$ – регулярный позином, как сумма регулярных позиномов (т6).

Покажем, что вторая часть (6б) так же регулярный. Дсв-но,

$$\sum_{k\prec j} x_k x_j \sum_{i=1}^{m} x_i^{-2} = \sum_{k\prec j}\left(\frac{x_k}{x_j} + \frac{x_j}{x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i^{-2} \sum_{\substack{k\prec j \\ k,j\neq i}} x_k x_j. \qquad (6в)$$

$\sum\limits_{k\prec j} \left(\dfrac{x_k}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_k}\right)$ – регулярный по т6, т.к. $f_{kj} = x_k x_j^{-1} + x_k^{-1} x_j$ регулярен.

Остается показать, что позином $h(x_1,...,x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_j^{-2} \sum\limits_{k\prec j} x_k x_j$ также регулярен.

Фиксируем какую-нибудь пер-ю, н-р x_1, и рас-им все члены позинома $h(x_1,...,x_m)$, содержащее x_1. Нетрудно видеть, что сумма этих членов равна

$x_1^{-2}\sum_{\substack{k\prec j\\ k,j\neq 1}} x_k x_j + x_2^{-2}\sum_{\substack{1\prec j\\ j\neq 2}} x_1 x_j + x_3^{-2}\sum_{\substack{1\prec j\\ j\neq 3}} x_{1j} + ... + x_m^{-2}\sum_{\substack{1\prec j\\ j\neq m}} x_1 x_j.$ Заметим, что первая из этих сумм содержит C_{m-1}^2 слагаемых, остальные m-1 сумм – по m-2 слагаемых каждая. Сд-но, первый компонент позинома $h(x_1,\ ...,\ x_m)$ с точностью до пст-го слагаемого равна $h_1(x_1) = c_{m-1}^2 x_1^{-2} + (m-1)(m-2)x_1$. Поскольку $c_{m-1}^2(-2) + (n-1)(n-2) = 0,$ то компонент $h_1(x_1)$ регулярен.

По симметрии тем же св-ом обладают каждая компонента позинома $h(x_1,...,x_m)$. Значит, позином $h(x_1,...,x_m)-$ регулярный. Тогда позином $f(x_1,...,x_m)$ регулярный ■

Теперь рас-им нахождение нм-их значений регулярных позиномов.

Пусть $f(x_1,\ ...,\ x_j,\ ...,\ x_m) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_1^{\alpha_{1i}} ... x_i^{\alpha_{ij}} ... x_m^{\alpha_{mj}}$ ⑦

– регулярный позином, так что

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = 0,\ i = \overline{1,m}. \qquad ⑧$$

Эксл. св-ва регулярных позиномов выражает сд-ая

т7. Нм, значение регулярного позинома 7 равно сумме его коэф-ов и достигается при $x_1 = \cdots = x_i = \cdots = x_m = 1,$ т.е.

$$\min f\left(x_1,\ \dots,\ x_m\right) = f\left(1,\ 1,\ \dots,\ 1\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Д-во см, в $[6]$.

п11. Используя т7 найти нм. значения регулярных позиномов:

$f_1\left(x\right) = x + \frac{\sin\alpha}{x^{\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{x^{\cos\alpha}},\ \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$f_2\left(x\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$;

$f_3\left(x,y\right) = 2x^{\frac{4}{r}} y^{-\frac{1}{S}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{S}} + x^{-\frac{2}{r}} y^{-\frac{2}{S}},\ \mathrm{r}, s \neq 0$

Р. $\min f_1\left(x\right) = f_1\left(1\right) = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha; \min f_2\left(x\right) = f_2\left(1\right) = 2^n;$

$$\min f_3\left(x,y\right) = f_3\left(1{,}1\right) = 2 + 2 + 1 = 5.$$

Теперь рас-им общий метод для произвольных позномов, т.е. для к-ых условия ① или ③ не выполняются. Пусть

$$f\left(x_1,\dots,x_i,\dots,x_m\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_1^{a_{1j}} \dots x_i^{a_{ij}} \dots x_m^{\alpha_{mj}} \qquad ⑨$$

– произвольный позином. Рас-им систему алг-их ур-й:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} c_j x_i^{a_{i j}} \ldots x_i^{a_{ij}} \ldots x_m^{\alpha_{mj}} = 0,\ i=\overline{1,\mathrm{m}}. \qquad ⑩$$

т8. а) Каждое плж. решение $x_1 > 0, \ldots, x_m > 0$ системы ⑩ яв-ся точкой глобального мнм. позинома ⑨.

б) Обратно, каждая точка $(x_1, \ldots, x_m)$ глобального мнм. позинома ⑨ уд-ет системе ⑩.. Д-во см. в $[6]$.

Т.о., мнмз-я $f(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_m)$ сводится к решению системы ⑩ в плж-ых числах. При этом, если ⑩ не имеет плж-ых решений, то позином ⑨ не имеет точек глобального мнм-а (в обл $x_i > 0$).

Сделаем ряд полезных замечаний, касающихся вопроса нахождения плж-ых решений системы ⑩. Пусть дан позином ⑨. Обз-им через $u_j = c_j x_1^{a_{1j}} \ldots x_i^{a_{ij}} \ldots x_m^{a_{mj}}$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ j-й член позинома ⑨. Тогда система ⑩ может быть записана в виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots a_{mn}u_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (11а)$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 x_1^{a_{11}} \ldots x_i^{a_{i1}} \ldots x_m^{a_{m1}} = u_1 \\ c_2 x_1^{a_{12}} \ldots x_i^{a_{i2}} \ldots x_m^{a_{m2}} = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n x_1^{a_{1j}} \ldots x_i^{a_{ij}} \ldots x_m^{a_{mn}} = u_n \end{array}\right\} \qquad (11б)$$

Тогда нахождение плж-го решения $x_1^0, \ldots, x_m^0$ системы ⑩ равносильно поиску плж-го решения $x_1^0, \ldots x_m^0, u_1^0, \ldots\ , u_n^0$ ⑪; при этом

$$\min f(x_1, \ldots, x_m) = f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = u_1^0 + \ldots + u_n^0.$$

Система ⑪ состоит из двух подсистем (11а) и (11б), к-ых ств-но наз-ем u - системой и x -системой.

Задачу поиска плж-го решения системы ⑪ можно трактовать теперь так:

Найти такое плж. решение $u_1, \ldots, u_n$ u -системы, при к-ом x -система имеет плж. решение $x_1, \ldots, x_m$.

Понятно, что если u -система не имеет плж-ых решений, то система ⑪ тем более не имеет их. Тогда по т8 позином $f(x_1, \ldots, x_m)$ не имеет нм-го значения в обл $x_i > 0$. С другой стороны, не при всяком плж. решении $u_1 \ldots u_n$ u -системы будет иметь плж. решение $x_1, \ldots, x_m$ x -система. Этот вопрос решается на основе сд-ей

т9. Для того чтобы при данном плж. решении $u_1,\dots,u_n$ u – системы x – система имела плж. решение, нх-мо, чтобы выполнялось рав-во

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j}{u_j}\right)^{u_j}=1$$ ⑫

п12. Найти $\min f(x)=c_1x^{\alpha}+c_2x^{-\beta},\ c_1>0,\ c_2>0,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

Р. Система ⑩ для позинома $f(x)$ имеет вид $\alpha c_1x^{\alpha}-\beta c_2x^{-\beta}=0$. Это ур. имеет (единственное) плж, решение

$$x^0=\left(\frac{\beta c_2}{\alpha c_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$ ⑬

к-ое, согласно т8, доставляет позиному $f(x)$ нм. значение. Выч-я значение позинома $f(x)$ при x^0, получим после элр-ых прб-й

$$\min\left(c_1x^{\alpha}+c_2x^{-\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left(\frac{c_1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{c_2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$ ⑭

В част-ти, если $f(x)$-регулярный позином, т.е. $c_1\alpha-c_2\beta=0$, то $x^0=1$, $\min f(x)=c_1+c_2$.

8^0. Оптимизационные задачи с позиномами. Рас-им ряд примеров, чтобы представить, как на практике могут возникать оптз. задачи, сводящие-ся к нахождению нм-их значений позиномов.

з1 (О перевозке песка). Эта задача была сформулирована и решена в 1^0 и 2^0.

з2 (О минимальном весе корыта). Корыто имеет форму полуцилиндра (рис. 1). При каких размерах его вес будет мнм-ый, если толщина стенок равна **t**, емкость равна **V**, а удельный вес материала – γ.

Р. Пусть **r** – внутренний радиус корыта, l – внутренняя длина. Тогда вес торцовых стенок равен $G_1=\gamma\pi(r+t)^2t$, вес остальной части корыта равен $G_2=\frac{1}{2}\gamma l\left[\pi(r+t)^2-\pi r^2\right]=\frac{\gamma\pi t}{2}l(2r+t)$, или т.к. $V=\pi r^2\, l/2$, т.е $\frac{l}{2}=\frac{V}{\pi r^2}$, то $G_2=\gamma\pi t\frac{V}{\pi r^2}(2r+t)$. Сд-но $G=G_1+G_2=c(r+t)^2+\frac{cV}{\pi r^2}(2r+t)$, где $c=\gamma\pi t$, или $G=c\left[r^2+2rt+t^2+\frac{2V}{\pi r}+\frac{Vt}{\pi r^2}\right]$ или $G=c\left[r^2+2rt+t^2+\frac{2b}{r}+\frac{bt}{r^2}\right]$, где $b=\frac{V}{\pi}$.

Т.о. задача свелась к мнмз-и позинома

$$f(r)=r^2+2tr+\frac{2b}{r}+\frac{bt}{r^2}$$ ①

Применив ⑩ из 7^0 для ① получим ур-ие $2r^2+2tr-\frac{2b}{r}-\frac{2bt}{r^2}=0$ или $2r^4+2r^3t-2br-2bt=0 \Rightarrow 2r^3\left(r+t\right)-2b\left(r+t\right)=0 \Rightarrow 2\left(r+t\right)\left(r^3-b\right)=0.$ Отсюда $r=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{V/\pi}$, тогда $l=2V\big/\pi r^2=2\sqrt[3]{V/\pi}=2r$.

Итак, размеры корыта емкости V, при к-ых вес его мнм-ен, равны

$$r=\sqrt[3]{V/\pi},\ l=2\sqrt[3]{V/\pi}.$$

з**3**. Пусть ABC – треугольник, вершинами к-го яв-ся, центры A, B, C трех внешне касающихся окружностей радиусов а, в, с (рис. 2) Д-ть, что справедливо нерав-во:

$$ctg^2\frac{A}{2}Ctg^2\frac{B}{2}+Ctg^2\frac{A}{2}Ctg^2\frac{C}{2}+Ctg^2\frac{B}{2}Ctg^2\frac{C}{2}\geq 27. \qquad ②$$

Показать, что знак равенства в этом нерав-ве имеет место лишь в случае $a=b=c,$ т.е. если $<A=<B=<C$.

Д-ем сначала, что имеют места фм-ы:

$$tg^2\frac{A}{2}=\frac{bc}{pa},\ tg^2\frac{B}{2}=\frac{ac}{pb},\ tg^2\frac{C}{2}=\frac{ab}{pc}, \qquad ③$$

где $p=a+b+c$ – полупериметр ΔABC . Введем обз-я:

$AB=a+b=u,\ BC=b+c=\upsilon,\ AC=a+c=\omega.$ По теореме косинусов

$$\upsilon^2=u^2+\omega^2-2u\omega\cos A\ .$$

Отсюда $\cos A=\frac{u+\omega^2+\upsilon^2}{2u\omega}$,

тогда

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{\left(u+w\right)^2-v^2}{4uw}=\frac{\left(u+v+w\right)\left(u+w+v\right)}{4uw}=\frac{P\left(p-v\right)}{uw}=\frac{pa}{uw},$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{v^2-\left(u-w\right)^2}{4uw}=\frac{\left(u+v-w\right)\left(v+w-u\right)}{4uw}=\frac{\left(p-w\right)\left(p-u\right)}{uw}=\frac{bc}{uw}.$$

Сд-но, $tg^2\frac{A}{2}=\frac{bc}{pa}$. Аналогично находим $tg^2\frac{B}{2}=\frac{ac}{pb},\ tg^2\frac{C}{2}=\frac{ab}{pc}$. Преумножая и складывая почленно рав-ва ③, получим

$$tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}=\frac{abc}{P^3},$$

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}=\frac{1}{P}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)=\frac{abc}{P}\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}\frac{1}{c^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}}{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}}=ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}+ctg^2\frac{2A}{2}ctg^2\frac{2C}{2}+ctg^2\frac{A}{2}ctg^2\frac{B}{2}=$$

$$=P^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\left(a+b+c\right)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right). \qquad ④$$

Т.о., задача свелась к мнмз-и позинома $f(a,b,c)=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

Данный позином регулярный в силу п10 из 7^0, тогда по т7

$$\min f(a,\ b,\ c)=f(1,\ 1,\ 1)=27$$

Более того, этот мнм. достигается всегда, когда $a=b=c$ (т.е. когда радиусы данных окружностей равны). Сд-но нерав-во ② д-но.

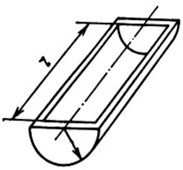


Рис. 1

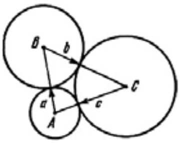


Рис. 2

з4 (Об асфальтированнии дороги). Пусть требуется положить асфальт с а-го км (от нек-го города Г) до b-го км. Для этого выделены бригады: Б$_1$, Б$_2$,…, Б$_n$, каждому из к-ых распределяются участки $(a+x_1),(x_1+x_2),...,(x_n+b)$. Дорожные расходы зависят только от длины участка, т.е. бригада Б$_1$ выделяется x_1 ед. руб., Б$_2$ – x_2 ед. руб., …, Б$_n$-x_n ед. руб. Требуется участки распределять так, чтобы распределение всей суммы денег x_1, x_2,…,x_n по участкам $(a+x_1)(x_1+x_2)...(x_n+b)$ было мкс-ым т.е. найти

$$maxF(x_1,\ldots,x_n)=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$ ⑤

при условии

$$a\le x_i\le b, i=\overline{1,n}$$ ⑥

Задачу решить при $a=1,\ b=243,\ n=4$.

Чтобы решить данную задачу сначала рас-им задачу Гюгенса, мт-ая модель к-ой совпадает моделью сформулированный задачи.

з4а (задача Гюгенса). Пусть a, b – два плж-ых числа и b>a. При каком выборе n чисел $x_1,x_2,...,x_{n,}$ заключенных между a и b, выражение

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\frac{x_1x_2{\ldots}x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)_{\ldots}(x_n+b)}$$ ⑦

будет нб-им.

Р. В задаче требуется найти $max\,F$, что равносильно найти min фк–и

$$G(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{F(x_1,\ldots,x_n)}=a\left(1+\frac{x_1}{a}\right)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{x_n}\right),$$ ⑧

при условий

$$a\le x_i\le b, i=\overline{1,n}.$$ ⑨

фк. $G(x_1,\ldots,x_n)$ яв-ся, очевидно, позиномом, Введем новые пер. $y_1, ..., y_n$, пологая $y_0 = \frac{x_1}{a},\ y_1 = \frac{x_2}{x_1},\ \ldots,\ y_n = \frac{b}{x_n}$. Т.к. $y_0\ y_1\ ...y_n = \frac{b}{a}$, то $y_0 = \frac{b}{ay_1\ ...\ y_n}$. Тогда позином $G(x_1,\ldots,x_n)$ прб-ся в позином $y(y_1,\ldots,y_n) = \left(a+\frac{b}{y_1,\ldots,y_n}\right)(1+y_1)...(1+y_n) = a\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)+b\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{y_i}\right)$ ⑩

и огр-ия (10) перейдут в огр-ия

$$\left.\begin{aligned} &1 \le y_{,\ldots} y_n \le \frac{b}{a} \\ &\frac{a}{b} \le y_i \le \frac{b}{a},\ i=\overline{1,n-1}, \\ &1 \le y_n \le \frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad ⑪$$

Теперь найдем $min\ g$ в области $y_i > 0,\ j=\overline{1,n}.$ Составим систему ур-й ③ из 7^0. Для этого позином g надо записать в стандартной форме вида ② из 7^0. С этой целью фиксируем нек-ое $i=\overline{1,n}.$ Тогда позином $g(y,\ldots,y_n)$ можно записать в виде

$$g(y,,\ldots,y_n) = a\prod_{k=1}^{n}(1+y_k)+b\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{y_k}\right) = a(1+y_i)\prod_{k\ne i}(1+y_k)+b\left(1+\frac{1}{y_i}\right)$$

$$\cdot\prod_{k\ne i}\left(1+\frac{1}{y_k}\right) = ay_i\prod_{k\ne i}(1+y_k)+\frac{b}{y_i}\prod_{k\ne i}\left(1+\frac{1}{y_k}\right)+a\prod_{k\ne i}(1+y_k)+b\prod_{k\ne i}\left(1+\frac{1}{y_k}\right).$$

Здесь сумма всех членов позинома $g(y,\ldots,y_n)$, содержащих пер-ю y_i, дается первыми двумя слагаемыми и умножив их на показатель степени, получим $i-e$ ур-ие системы ③ из 7^0

$$ay_i\prod_{k\ne i}(1+y_k)-\frac{b}{y_i}\prod_{k\ne i}\left(1+\frac{1}{y_k}\right)=0$$

или (после умн-ия обоих частей ур-ия на $1+y_i$)

$$ay_i\prod_{k\ne 1}^{n}(1+y_k)-b\prod_{k\ne 1}^{n}\left(1+\frac{1}{y_k}\right) \qquad ⑫$$

Вычитая из i -го ур-ия j-е ур-ие $(j\ne i)$ системы ⑫, получим

$$ay_i\prod_{k=1}^{n}(1+y_k)-ay_j\prod_{k=1}^{n}(1+y_k)=0$$

Отсюда $y_i = y_j \left(i, j = \overline{1,n}\right)$. Пологая $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = q$, из ⑫ получим

$$aq\left(1+q\right)^n = b\left(1+\frac{1}{q}\right)^n = \frac{b\left(1+q\right)n}{q^n} \Rightarrow q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Итак, $\min g\left(y_l,\ldots,y_n\right)$ в обл. $y_i > 0\left(i = \overline{1,n}\right)$ достигается в единственной точке $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ при огр-ях ⑪ , т.к.

$$y_0 = \frac{b}{ay_1,\ldots,y_n} = \frac{b}{aq^n} = \frac{b}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{b+1}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = q$$

Т.о. $maxF\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{x_1x_2\ldots x_4}{\left(a+x_1\right)\left(x_1+x_2\right)\ldots\left(x_n+b\right)}$ при условии, что $a \le x_i \le b\left(i = \overline{1,n}\right)$ достигается в точке $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, уд-ей рав-ам

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots = \frac{b}{x_n} = q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Иначе говоря, числа $a, x_1, \ldots, x_n, b$ должны образовать геом–ю прогрессию со знаменателем $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. При этом сам мкс. равен

$$maxF\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{x_1x_2\ldots x_4}{\left(a+x_1\right)\left(x_1+x_2\right)\ldots\left(x_n+b\right)} =$$

$$\frac{1}{a\left(1+\frac{x_1}{a}\right)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{x_n}\right)} = \frac{1}{a\left(1+q\right)^{n+1}}$$

Задача Гюгенса решена полностью.

Тогда з**4** имеет решение $maxF\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{1}{a\left(1+q\right)^{n+1}}, где\, q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

при $x_1 = aq,\ x_2 = aq^2,\ x_3 = aq^3, \ldots,\ x_n = aq^n$.

Если $a = 1,\ b = 243,\ n = 4$, то $q = \left(243\right)^{\frac{1}{5}} = 3,\ maxF\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{1}{1\left(1+3\right)^5} = \frac{1}{1024}\cdot$

4.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

4.1. СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ НП. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Вопросы для самопроверки

1. При каких условиях общая задача МП яв-ся: а) задачей ЛП и б) задачей НП?

2. Для какого класса задач НП разработаны методы решения?

3. В чем состоит отличие опт-го решения задачи НП от опт-го решения задачи ЛП?

4. Каким условиям должны уд-ть фк. $f(x_1,..,x_n)$, $\varphi_1(x_1,..,x_n),...,\ \varphi_m(x_1,..,x_n)$, что бы можно было применить метод Лагранжа?

5. Почему метод Лагранжа практически не применим для решения задач ЛП?

6. Когда мн-во точек наз. выпуклым и невыпуклым?. Приведите примеры.

7. Дайте опр-ия выпуклых и вогнутых фк-й. Приведите примеры.

8. В чем состоит классический метод поиска условного экс-ма?

9. В чем состоит суть метода множителей Лагранжа при поиске условного экс-ма ?

10. При каких условиях пара векторов X^0 и U^0 наз. седловой точкой?

11. В чем состоит условия Куна-Таккера?

12. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.

Задание для кр. работы: решить задачи НП и проиллюстрировать их с помощью геом-их построений.

1. $z = 4(x_1 - 6)^2 + 6(x_2 - 2)^2 (\min)$,

$$\left.\begin{array}{r} 0,5x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}\right\},$$

2. $z = 3(x_1 - 1,5)^2 + 6(x_2 - 1.5)^2 (\max)$,

$$\left.\begin{array}{r} 0,5x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}\right\},$$

3. $z = 3x_1 + 2x_2 (\max)$,

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 9,$$
$$x_{1,} x_2 \ge 0.$$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 (\max \quad u \quad \min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 \qquad \le 3 \end{array}\right\}.$$

$$5.\ z = 7(x_1-6)^2+3(x_2-4)^2(\min),$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_2 \geq 1 \\ x_1^2+x_2^2 \leq 9 \end{array}\right\}.$$

$$6.\ z = 8x_1^2+2x_2^2\,(\max)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_2 \geq 1 \\ x_1^2+x_2^2 \leq 9 \\ x_2 \leq 2 \end{array}\right\} x_1, x_2 \geq 0$$

$$7.\ z=6(x_1-5)^2+(x^2-4)^2\,(\min),$$

$$\left.\begin{array}{c} (x_1-1)(x_2-1) \leq 1 \\ x_1+x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$8.\ z=x_1x_2(\max),$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2 \leq 9 \\ 0{,}5x_1+x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$9.\ z=(x_1-2{,}5)^2+(x_2-3{,}5)^2\ (\max\ u\ \min),$$

$$\begin{array}{c} (x_1-3)(x_2-3) \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$10.\ z = (x-6)^2+(x-8)^2(\min),$$

$$\begin{array}{c} (x_1-3)(x_2-3) \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$11.\ z = 5x_1^2+3x_1-4x_2(\max\ u\ \min),$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2 \leq 5 \\ 0{,}3x_1+x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

$$12.\ z=x_1^2+x_2^2\ (\max\ u\ \min)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_2 \leq 4 \\ x_1+x_2 \geq 5 \\ x_1\ \ \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \end{array}\right\} x_{1,}x_2 \geq 0$$

$$13.\ z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2(\min\ u\ \max),$$

$$\left.\begin{array}{c} x_1+x_2 \geq 1 \\ 2x_1+3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\},$$

$$14.\ z=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2(\min\ u\ \max),$$

$$\left.\begin{array}{c} x_1+x_2 \geq 0 \\ 2x_1+3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\right\},$$

$$15.\ z = x_1x_2(\max)$$

$$\left.\begin{array}{c} x_1+2x_2 \geq 2 \\ x_1+x_2 \leq 6 \\ 2x_1+x_2 \leq 10 \end{array}\right\}$$

$$16.\ \mathrm{Z}=3\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2(\max),$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \geq 2 \\ \mathrm{x}_1^2+\mathrm{x}_2^2 \leq 16 \end{array}\right\}$$

$$17.\ \mathrm{Z}=(\mathrm{x}_1-6)^2+(\mathrm{x}_2-2)^2\,(\min\ \text{и}\ \max)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2 \leq 8 \\ 3\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2 \leq 15 \\ \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2 \geq 1 \end{array}\right\} \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \geq 0.$$

$$18.\ \mathrm{Z}=2(\mathrm{x}_1-7)^2+4(\mathrm{x}_2-3)^2\,(\min\ \text{и}\ \max)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2 \geq 2 \\ \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2 \leq 6 \\ 2\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2 \leq 11 \end{array}\right\} \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \geq 0.$$

$$19.\ \mathrm{Z}=4(\mathrm{x}_1-2)^2+2(\mathrm{x}_2-2)^2\,(\min\quad \mathrm{u}\quad \max),$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2 \leq 7 \\ 2\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2 \geq 8 \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{x}_1\quad \mathrm{x}_2\quad \geq 0$$

$$20.\ \mathrm{Z}=\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2\,(\min\quad \mathrm{u}\quad \max),$$

$$\begin{array}{c} (\mathrm{x}_1-2)(\mathrm{x}_2+1) \leq 16, \\ \mathrm{x}_1 \geq 0, \mathrm{x}_2 \geq 0. \end{array}$$

$$21.\ \mathrm{Z}=(\mathrm{x}_1-1)^2+(\mathrm{x}_2-1)^2\,(\min\quad \mathrm{u}\quad \max),$$

$$\begin{array}{c} (\mathrm{x}_1-2)(\mathrm{x}_2+1) \leq 16, \\ \mathrm{x}_1 \geq 0, \mathrm{x}_2 \geq 0. \end{array}$$

О:12. $\min Z(1,4)=\min Z(4,1)=17,\ \ \max Z(2/3,6)=\frac{328}{9},\ \ \max Z\left(7,\frac{4}{7}\right)=\frac{2417}{49}.$

13. $\min Z\left(\frac{24}{13},\frac{36}{13}\right)=\frac{196}{13},\ \ \max Z(1,0)=45,\ \ \max Z(6,0)=40.$

14. $\min Z(4,1)=0,\ \ \max Z(0,4)=25, \max Z(6,0)=5.$ 15. $\max Z(3,3)=9.$

16. $\max Z\left(\frac{6\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)=4\sqrt{10}.$ 17. $\min Z(4,5;1,5)=2,5.$

18. $\min Z\left(\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)=\frac{64}{3},\ \ \max Z(0,6)=134.$ 19. $\min Z(2,2)=0,\ \ \max Z(0,6)=66.$

20. $\min Z(0,0)=0,\ \ \max Z\to\infty.$ 21. $\min Z(1,1)=0, \max Z\to\infty.$

* * *

22. Графическим методом найти глобальные эксм. целевых фк-й в обл. решений нерав-в.

$$\begin{array}{l}1)\ \ Z=(x_1-4)^2+(x_2-8)^2;\ \ 2)\ \ Z=(x_1-2)^2+(x_2-4)^2;\\ 3)\ \ Z=(x_1-7)+(x_2-7)^2;\ \ 4)\ \ Z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2;\end{array}\ \begin{cases}2x_1+5x_2\le 30,\\ 2x_1+x_2\le 14,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$$

23. Графическим методом найти глобальные эксм. в обл. огр-й.

$$\begin{array}{l}1)\ \ Z=2x_1+x_2;\ \ 2)\ \ Z=-x_1+2x_2;\\ 3)\ \ Z=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2;\ \ 4)\ \ Z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2;\end{array}\ \begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 36\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

О:22. 1) $\min Z\left(\frac{80}{29},\frac{142}{29}\right)=\frac{2479}{179},\ \ \max Z(0,0)=80.$ 2) $\min Z(2,4)=0,$ $\max Z(7,0)=41.$ 3) $\min Z(5,4)=13,\ \ \max Z(0,0)=98.$ 4) $\min Z(6,2)=0,$ $\max Z(0,6)=52.$ 23. 1) $\min Z(0,0)=0,\ \ \max Z\left(2,4\cdot\sqrt{5};\ 1,2\cdot\sqrt{5}\right)=6\sqrt{5}.$ 2) $\min Z(6,0)=-6,\ \ \max Z(0,6)=12.$ 3) $\min Z(3.2)=\max Z\left(\frac{18}{\sqrt{13}},\frac{12}{\sqrt{13}}\right)=$ $=49-12\sqrt{13}.$ 4) $\min Z\left(\frac{12}{\sqrt{13}},\frac{18}{\sqrt{13}}\right)=88-24\sqrt{13}, \max Z(0,0)=52.$

24. Построить обл-и, заданные сд. системами рав-в, опр-ив, какая из них огр-ая или неогр-ая, открытая или замкнутая, указать границу обл-и.

$$1)\left.\begin{array}{r}x-2y\le 8\\ x+3y<6\\ x=0, y\ge 0\end{array}\right\};\ \ 2)\left.\begin{array}{r}x^2+y^2\le 16\\ x^2+y^2>4\end{array}\right\};\ \ 3)\left.\begin{array}{r}xy=4\\ 8x-y\ge 0\\ x-\frac{y}{3}\le 0\end{array}\right\};\ \ 4)\left.\begin{array}{r}4x^2+9y^2\le 36\\ x^2+4y^2\ge 4\end{array}\right\}.$$

25. Найти и построить графически обл. опр-ия сд-их фк-й, указав св-ва этой обл. (огр-ая или неогр-ая, открытая или замкнутая):

1) $z=\dfrac{1}{x}+y$. 2) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. 4) $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$. 5) $z=\dfrac{1}{x\text{-}2y}$. 6) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

26. Опр-ть, какие из фк-й, указанных в задаче 25, будут огр-ми, а какие – неог-ми в обл., заданном нерав-ом $x^2+(y-2)^2\le 1$.

27а. Д-ть, что сд-ие обл. будут выпуклыми:

1) $x^2+y^2\le 16$, 2) $4x^2+9y^2\le 36$, 3) $x^2\le y$, 4) $\left.\begin{matrix}(x\text{-}2)^2+(y-4)^2\le 9\\ (x-5)^2+(y-6)^2\le 4\end{matrix}\right\}$.

27. Исследовать св-ва выпуклости сд-х фк-ий:

1) $z=(x\text{-}2)^2+y^2$; 2) $z=x^2+2xy+y^2$; 3) $z=2x\text{-}x^2\text{-}y^2$; 4) $z=4\text{-}3x^2\text{-}2y^2+x$;

5) $z=x_1^2+x_2^2+3x_3+1$; 6) $z=x_1x_2$ при $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$; 7) $z=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$; 8) $z=|x|$;

9) $z=4x_1\text{-}x_1^2+x_2^2+3x_2$; 10) $z=x_2\text{-}|x_1-2|$; 11) $z=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ при $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$.

О: 1) вып.; 2) вып.; 3) вогн.; 4) вогн.; 5) вогн.; 6) вып.; 7) вып.; 8) вып.; 9) ни вогн., ни вып.;10) вог.; 11) вып.

28. Д-ть выпуклость обл-ей, заданных сд. нерав-ми, и построить их графически:

1) $x^2-2x\le 1$; 2) $y\text{-}x^2\ge 0$; 3) $\left.\begin{matrix}(x\text{-}5)^2+(y-5)^2\le 9\\ -3x+4y\le 12\end{matrix}\right\}$; 4) $\left.\begin{matrix}(x\text{-}5)^2+(y-5)^2\le 9\\ xy\ge 20\end{matrix}\right\}$;

5) $\left.\begin{matrix}4x^2+9y^2\le 36\\ x^2-y\le 0\end{matrix}\right\}$; 6) $\left.\begin{matrix}x^2+y\le 4\\ x^2-y\le 4\end{matrix}\right\}$.

В задачах 29-32 проверить, яв-ся ли точка x^o решением приведенных ниже задач ВП, и если яв-ся, то найти седловую точку Лагранжа.

29. $\min f(x) = x_1^2+x_2^2\text{-}2x_1\text{-}4x_2$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(x)=2x_1+3x_2-6\le 0\\ \varphi_2(x)=x_1+4x_2-5\le 0\end{matrix}\right\},x_1,x_2\ge 0;\ x^\circ=\left(\frac{13}{17},\frac{18}{17}\right).$$

30. $\min f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1-8x_2$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(x)=x_1+2x_2-4\le 0\\ \varphi_2(x)-3x_1-x_2+3\le 0\end{matrix}\right\},x_1,x_2\ge 0;x^\circ\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right).$$

31. $\min f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(x)=x_1^2+x_2^2-4x_1\le 0\\ \varphi_2(x)=-x_1-x_2+4\end{matrix}\right\},\ x_1,x_2\ge 0;\ x^\circ=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right).$$

32. min $f(x)=2x_1, x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x) = 2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0 \\ \varphi_2(x) = -x_1 + x_2 - 1 \le 0\end{array}\right\}, x_1, x_2 \ge 0;\ x^\circ=\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

O: 29. яв-ся $u^\circ=\left(0, \frac{8}{17}\right)$; 30. яв-ся $u^\circ=\left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right)$; 31. яв-ся $u^\circ=(0,3)$; 32. яв-ся $u^\circ=\left(\frac{14}{25}, \frac{78}{25}\right)$.

4.2. ДРОБРО-ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте модель задачи дробно-линейного программирования.

2. Как решается задача дробно-линейного программирования?

3. Дайте опр-ие квадратичной формы. Приведите примеры.

4. Когда квадратичная форма наз. плж-но (отц-но) опр-ой и в каком случае она наз. неотц-ой (неплж-ой)?

5. Напишите характеристическое ур. квадратичной формы и сформулируйте теорему о плж-ти (отц-но) кв. фк-и.

6. Сформулируйте теорему выпуклости и вогнутости кв-ой. фк.

7. Сформулируйте задачи кв-го прг-ия.

8. Сформулируйте теорему Куна-Таккера в кв-ом прг-и.

9. Как решается задача кв-го прг-ия?

Задания для кр. работы

1. Решить сд. задачи дробно-лин. прг-ия при $x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right)$:

1.1. $Z = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}$(max), $\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6\end{array}\right\}.$

1.2. $Z = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 +}$(max), $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\end{array}\right\}.$

1.3. $Z = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2}$(max), $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6\end{array}\right\}$

1.4. $Z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2}$(min), $\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3\end{array}\right\}.$

1.5. $Z = \dfrac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3}$(max), $\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 6x_2 + x_3 \le 12 \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 12 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 1\end{array}\right\}$

1.6. $Z = \dfrac{x_1 - x_2 + 3}{2x_1 + 3x_2 + 1}$(max), $\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \le 10\end{array}\right\}.$

1.7. $Z = \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2}(\min)$, 1.8. $Z = \dfrac{2x_1 - x_2 - 3}{x_1 + 2}(\max)$, 1.9. $Z = \dfrac{2x_1 - 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3}(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 7 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 17 \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \qquad &= 20 \\ 3x_1 - x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad + x_5 \quad &= 11 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_6 &= 35 \end{aligned}\right\}$$

O: 1.1. $Z_{\max} = \frac{4}{3}$ *при* $x_1 = 2,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 2$; 1.2. $Z_{\max} = 8/29$ *при* $x_1 = 14,\ x_2 = 6,\ x_3 = 0$;

1.3. $Z_{\max} = \frac{2}{3}$ *при* $x_1 = 2,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 4$; 1.4. $Z_{\min} = \frac{5}{6}$ *при* $x_1 = 2,\ 2,\ x_2 = 0{,}6,\ x_3 = x_4 = 0$

$x_5 = 0{,}2$; 1.5. $Z_{\max} = \frac{21}{38}$ *при* $x_1 = 5{,}5,\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = 0$; 1.6. $Z_{\max} = 3$ *при* $x_1 = x_2 = 0$;

1.7. $Z_{\min} = -\frac{1}{91}$ *при* $x_1 = 4{,}6,\ x_2 = 2{,}4$; 1.8. $Z_{\max} \to \infty$; 1.9. $Z_{\min} = -\frac{4}{13}$ *при* $x_1 = x_2 = 5,$

$x_3 = 10,\ x_4 = 0,\ x_5 = 16,\ x_6 = 0.$

2. Решить сд. задачи КП при $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$:

2.1. $Z = -x_1 - 2x_2 + x_2^2(\min)$, 2.2. $Z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2(\min)$,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \end{aligned}\right\}. \qquad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.$$

2.3. $Z = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2(\max)$, 2.4. $Z = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2(\max)$,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 16 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}\right\}. \qquad \left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \end{aligned}\right\}$$

0 : 2.1. $Z_{\min} = -\frac{22}{9}$ *при* $x_1 = \frac{14}{9},\ x_2 = \frac{2}{3}$; 2.2. $Z_{\min} = -\frac{273}{13}$ *при* $x_1 = \frac{4}{13},\ x_2 = \frac{33}{13}$;

2.3. $\mathrm{Z}_{\max} = 1{,}75$ при $x_1 = 1,\ x_2 = 0{,}5,\ x_3 = 4{,}5;\ x_4 = 8$; 2.4. $\mathrm{Z}_{\max} = 0$ при $x_1 = x_2,\ 0 \leq x_1 \leq \frac{10}{3}$.

3. В пятиугольнике с вершинами $D(0,0)$, $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(5,8)$, $\mathrm{D}(10,4)$ и $E(8,0)$ найти экс-мы сд-их кв-ых фк-й: 3.1.$\mathrm{Z} = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2(\min)$.

3.2.$\mathrm{Z} = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2(\max)$. 3.3.$\mathrm{Z} = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2(\max)$.

3.4.$\mathrm{Z} = x_1x_2(\max)$. 3.5.$\mathrm{Z} = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2(\min)$. 3.6.$\mathrm{Z} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2(\min)$.

O: 3.1. $\mathrm{Z}_{\min} = -13$ при $x_1 = 3,\ x_2 = 2$; 3.2. $\mathrm{Z}_{\max} = 35$ при $x_1 = 3,\ x_2 = 1{,}6$; 3.3. $\mathrm{Z}_{\max} = 154{,}8$ при $x_1 = 8,\ x_2 = 5{,}6$; 3.4. $\mathrm{Z}_{\max} = 45$ при $x_1 = 7{,}5,\ x_2 = 6$; 3.5. $\mathrm{Z}_{\min} = -344$ при $x_1 = 10,\ x_2 = 4$; 3.6. $\mathrm{Z}_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$.

4. Решить сд. задачи КП при $x_j \geq 0\left(j = 1, \overline{\text{n}}\right)$ или $\text{d}_\text{j} \leq x_j \leq \beta_j$:

4.1. $\text{Z} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \ (\min)$, 4.2. $\text{Z} = x_1 - x_2^2 - 2x_1x_3 \ (\max)$,

$$\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \end{matrix}\right\}. \qquad \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{matrix}\right\}.$$

4.3. $\text{Z} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 (\min)$, 4.4. $\text{Z} = x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_3^2 (\max)$

$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 4,$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6.$

$0 \leq x_3 \leq 6.$

O : 4.1. $\text{Z}_{\min} = -1$ при $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$; 4.2. $\text{Z}_{\max} = -12$ при $x_1 = x_2 = 4, x_3 = 0$; 4.3. $\text{Z}_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; 4.4. $\text{Z}_{\max} = 6$ при $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 3$.

* * *

5. Построить матрицы, ств-щие сд-им кв. фк-ям:

5.1. $\text{Z} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$. 5.2. $\text{Z} = x_1^2 - x_2^2$. 5.3. $\text{Z} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$. 5.4. $\text{Z} = x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2$. 5.5. $\text{Z} = 2x_1x_2$. 5.6. $\text{Z} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. 5.7. $\text{Z} = \text{x}_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_3^2$. 5.8. $\text{Z} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

6. Опр-ть св-ва кв-ых фк-й в задачах 5 (5.1. – 5.8.).

7. Опр-ть, используя **т2**, св-ва вогнутости сд-их кв. фк-й.

7.1. $\text{Z} = x_1^2 - x_1x_2$. 7.2. $\text{x}_1x_2 - x_1x_3$. 7.3. $\text{Z} = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$. 7.4. $\text{Z} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. 7.5. $\text{Z} = x_1x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

4.3. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит особенности градиентных методов?
2. В чем сущность градиентного метода при поиске безусловного экс-ма?
3. В чем сущность градиентного метода при поиске условного экс-ма?
4. Приведите геом-ю интерпретацию использования градиентных методов.
5. Как можно использовать градиентные методы при решении задач НП. Приведите примеры.

* * *

1. Выч-ть градиент сд-их фк-й в заданных точках:

1) $\text{Z} = x^2 - 2x_1x_2,\ x^0 = (0,1)$; 2) $\text{Z} = x_1^2 + x_2^2,\ x^0 = (2,1)$; 3) $\text{Z} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2},\ x^0 = (1,0)$.

2. Построить линии уровня, выч-ть и построить градиент сд-их фк-й в данных точках: 2.1. $\text{Z} = \left(x_1 - 2\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2, x^0 = (4,5)$; 2.2 $\text{Z} = \left(x_1 - 2\right)^2 -$

$-\left(x_2-3\right)^2$, $x^0=\left(6,4\right)$; 2.3. $Z=2\left(x_1-1\right)^2+3\left(x_2-2\right)^2$, $x^0=\pi\left(3,3\right)$; 2.4. $Z=2x_1-x_1^2-x_2$, $x^0=\left(1,2\right)$.

3. Д-ть, что градиент перпендикулярен линий уровня, проведенной через данную точку.

4. Д-ть, что перемещение вдоль градиента на дт-но малое удаление от заданной точки ств-ет мкс-му изменению фк-и.

5. Опр-ть градиент для лин-ой фк-и $Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ и объяснить графически полученный результат.

6. Построить линии наискорейшего спуска и наискорейшего подъема из звеньев с шагом $\lambda=0,2$ в задачах 2.1-2.4.

Задания для кр. работы

7. В сд-их задачах найти экс-м фк-й с помощью градиентного метода, начиная итерационный процесс с точки x^0 и сопровождая решение графическим изб-ем линий уровня и линий наискорейшего спуска (подъема):
7.1. $\min Z=9x_1^2+16x_2^2-90x_1-128x$, $x^0=\left(0.0\right)$, 7.2. $\min Z=x_1^2+2x_2^2-4x_1+$ $+2x_2$, $x^0=\left(1,0\right)$. 7.3.$\min Z=x_2^2+2x_1^2-12x_1$, $x^0=\left(5,3\right)$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$.
$\max Z=4x_1+8x_2-2x_1^2-2x_2^2$, $\mathrm{x}^0=\left(5,10\right)$

8. Найти, $\max Z=6x_1+32x_2-x_1^2-4x_2^2$, начиная итерационный процесс с точек: 8.1, $\mathrm{x}^0=\left(0,0\right)$; 8.2. $\mathrm{x}^0=\left(7,4\right)$; 8.3. $\mathrm{x}^0=\left(3,10\right)$; 8.4, $\mathrm{x}^0=\left(6,6\right)$.

0 : 7.1. $\mathrm{Zmin}=-481$ при $\mathrm{x}^*=\left(5,4\right)$; 7.2. $\mathrm{Z}\min=-4,5$ *при* $\mathrm{x}^*=\left(2,-\frac{1}{2}\right)$;
7,3. $\mathrm{Zmin}=-18$ при $x=\left(3,0\right)$; 7.4. $Z_{\max}=10$ при $x^*=\left(1,2\right)$. 8. $Z_{\max}=73$ при $x^*=\left(3,4\right)$.

9. Решить градиентным методом сд-ие задачи МП, начиная итерационный процесс с указанных точек x^0 и сопровождая решение задач графической иллюстрацией $\left(\text{пологая } x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\right)$:

9.1. $Z=20x_1+16x_2-2x_1{}^2-x_2{}^2\left(\max\right)$,

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2&\leq 16\\ 5x_1+2x_2&\leq 40\end{aligned}\right\},\ x^0=\left(2,3\right).$$

9.2. $Z=18x_1+6x_2-x_1{}^2-x_2{}^2\left(\max\right)$,

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=16\\ 5x_1+2x_2+x_4&=40\end{aligned}\right\},\ x^0=\left(2,4\right).$$

9.3. $Z=2x_1{}^2+4x_2{}^2\left(\max\right)$,

$$\left.\begin{aligned}6x_1+4x_2+x_3+x_4&=56\\ 4x_1\qquad\quad -x_3+x_4&=24\end{aligned}\right\},x^0=\left(5,2\right).$$

9.4. $Z=x_1{}^2+x_2{}^2-8x_1-4x_2$ $\left(\min\right)$,

$$\left.\begin{aligned}3x_1-2x_2-2x_3+x_4&=8\\ 11x_1+6x_2+x_3+2x_4&=96\end{aligned}\right\},\ x^0=\left(2,7\right).$$

9.5. $Z = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \ (\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60 \end{array}\right\}, \ x^0 = (2,2).$$

9.6. $Z = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 105 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 45 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 30 \end{array}\right\}, \ x^0 = (3,10).$$

9.7. $Z = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 \ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60 \end{array}\right\}, \ x^0 = (2,3).$$

9.8. $Z = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \ (\max)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60 \end{array}\right\}, \ x^0 = (3,5).$$

9.9. $Z = 2x_1^2 + x_2^2 - 32x_1 - 6x_2 \ (\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 60 \end{array}\right\}, \ x^0 = (2,6).$$

9.10. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \ (\min)$,

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15,$$

$$x^0 = (4,2,1).$$

9.11. $Z = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20 \end{array}\right\}, \ x^0 = (0,1,2).$$

9.12. $Z = x_1 + 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 \ (\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 15 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \end{array}\right\}, \ x^0 = (1,2,3).$$

О: 9.1. $Z_{\max} = 118,45$ при $x^* = (4,4;\ 5,8)$; 9.2. $Z_{\max} = 85,8$ при $x^* = (7,1;\ 7,1)$; 9.3. $Z_{\max} = 256$ при $x^* = (0,8)$; 9.4. $Z_{\min} = -20$ при $x^* = (4,2,8,16)$; 9.5. $Z_{\min} = -10$ при $x^* = (0,10,0,30)$; 9.6. $Z_{\max} = 164$ при $x^* = (8,3,13,11,4)$; 9.7. $Z_{\max} = 173$ при $x^* = (8,7)$; 9.8. $Z_{\max} = 173,3$ при $x^* = (5,2;\ 8,3)$; 9.9 $Z_{\min} = -137$ при $x^* = (8,3,13,4,14)$; 9.10. $Z_{\min} = 0$ при $x^* = (0,0,0)$; 9.11. $Z_{\max} = 11,25$ при $x^* = (1\ ;0,5;\ 0)$; 9.12. $Z_{\min} = 0$ при $x^* = (0,0,0)$.

10. Решить сд. задачи ЛП градиентным методом при $x_i \ge 0, j = \overline{1,n}$:

10.1 $z = 2x_1 - 3x_2$ (max), $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 40 \end{array}\right\}$,

10.2. $z = x_1 + 2x_2$ (max), $\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \end{array}\right\}$,

10.3. $z = 2x_1 - x_2$ (min), $\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60 \end{array}\right\}$,

10.4. $z = x_1 + 2x_2 + x_3$ (max), $\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \end{array}\right\}$,

10.5. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4$ (min), $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{array}\right\}$.

О: 10.1. $z_{\max} = 16$, $x^* = (8,0)$; 10.2. $z_{\max} = 22,5$, $x^* = (7,5;\ 7,5)$; 10.3. $z_{\min} = -10$, $x^* = (0,10)$; 10.4. $z_{\max} = 10$ при $x_2 \ge 0, x_3 = \frac{8}{3} + \frac{5}{3}x_2, x_1 = \frac{22}{3} + \frac{x_2}{3}$; 10.5. $z_{\min} \to \infty$.

4.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Какие классы задач НП могут быть сформулированы как задачи ГП?
2. Какое св. геом-го нерав-ва лежит в основе методов ГП?
3. Сформулируйте прямую задачу А и дв. задачу В.
4. Сформулируйте основную теорему ГП и покажите ее связь с теорией дв-ти.
5. Какой смысл имеет условие «сущ-ет такое решение t', что $f_к(t') < 1, к = \overline{1, P}$», используемое в основной теореме ГП?
6. Что такое степень трудности задачи ГП?

* * *

1. К источнику тока с э.д.с., равной E, и внутренним сопротивлением ρ подключают электронагревательный прибор. Сопротивление подводящих проводов равно r. При каком сопротивлении прибора R он будет выделять нб-ую мощность?

О: задача сводится к мнмз, позинома $f(R) = \dfrac{(r+\rho)^2}{R} + R + 2(r+\rho)$.

Ук: использовать закон Ома для полной цепи и закон Джоуля-Ленца:

$$J = \frac{E}{\rho + r + R} \text{ и } P = J^2 R.$$

Для решения многих задач полезна сд-ая

тА. Нм. значение фк-и

$$\varphi(z_1,\dots,z_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i \quad \text{при огр-ях } z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \dots z_n^{\gamma_n} = A > 0,\ z_i > 0,\ \beta_i > 0, Z_i > 0,\ \gamma_i > 0,\ i = \overline{1,n},$$

равно $\mu = \gamma\left[A \prod_{i-1}^{n} \left(\dfrac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ ①, где $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, и достигается в единственной точке $(\overset{*}{z}_1,\dots,\overset{*}{z}_n)$ с крд-ми $\overset{*}{z}_i = \dfrac{\gamma_i}{\beta_i}\left[A\ \Pi\left(\dfrac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_1}\right]^{\frac{1}{\gamma}} = \dfrac{\gamma_i}{\beta_i}\cdot\dfrac{\mu}{\gamma}$. ②

2. Найти $\min h(Z_1,\dots Z_m) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i Z_i + \dfrac{b}{Z_1^{\beta_1} \cdots Z_m^{\beta_m}}$ при $b > 0,\ \beta_i > 0,\ Z_i > 0,\ i = \overline{1,m}$.

Р. Положив $\beta_{m+1} = b$, $Z_{m+1} = Z_1^{-\beta_1} \dots Z_m^{-\beta_m}$ и заметив, что $Z_1^{\beta_1} \dots Z_m^{\beta_m} Z_{m+1} = 1$, можем пользоваться **тА**, в к-ой надо положить $n = m+1$, $\gamma_i = \beta_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, $\gamma_{m+1} = \perp$, $A = 1$, $\gamma = \beta_1 + \ldots + \beta_m + 1$. Сд-на в силу ① и ② получим $\mu = \min h\left(Z_1,\ldots,Z_m\right) = \gamma b^{\frac{1}{\gamma}}$, причем этот мнм. достигается в единственной точке $\left(b^{\frac{1}{\gamma}},\ldots,b^{\frac{1}{\gamma}}\right)$.

3. Работа, затрачиваемая на сжатие 1к воздуха в поршневом компрессоре от давления p_0 до давления $p\left(p > p_0;\text{ отн-ие } \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}_0}\text{ наз. степенью сжатия}\right)$, выражается фм-ой.

$$\mathrm{A} = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-\perp\right] \quad ③$$

где R – газовая постоянная (пст.), T_0–абс. температура воздуха до сжатия, $\gamma(\gamma>1)$– нек-ая пст., учитывающая конструктивные особенности компрессора. Для получения высоких давлений делают многоступенчатые компрессорные установки, состоящие из нескольких посл-но соединенных компрессоров (ступеней) с холодильными устройствами между ступенями.

Пусть проектируется п-ступенчатая компрессорная установка и предполагается воздух, поступающий в любую из ступеней, охлаждать до температуры T_0. Требуется при заданных $n,\ p_0,\ p,\ T_0$ опр-ть такие промежуточные значения давлений $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, чтобы работа, затрачиваемая на весь процесс сжатия, была мнм-на.

Р. В силу ③ работа, затрачиваемая на сжатие воздуха в $i-й$ ступени равна $\mathrm{A}_i = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]$, $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$, $\mathrm{P_n} = P$. Сд-но, при выбранных $p_1, \ldots, p_{n-1}$ работа, затрачиваемая на весь процесс сжатия, выразится фм-ой

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-n\right\}.$$

Т.о. задача свелась к поиску

$$\min g(p_1, \ldots, p_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad ④$$

где ф.к. g яв-ся позиномом. Для ее решения пологаем $x_i = \left(\frac{p_i}{p_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, $i=\overline{1,n}$. Тогда $\prod_{i=1}^{n}x_i = \left[\prod\left(\frac{p_i}{p_{i-1}}\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \equiv c$. Отсюда и на основании тА заключаем, что $\min\limits_{\substack{x_1\ldots x_n=c\\ x_i>0}}\sum_{i=1}^{n}x_i = nc^{\frac{1}{n}} = n\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}}$, и достигается он при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}}$ (и только при этих значениях).

Далее, нетрудно убедиться, что система ур-й $x_i = \left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}}$, $i=\overline{1,n}$, имеет плж. значение $p_1 = p_0 q,\ p_2 = p_1 q = p_0 q^2, \dots, p_{n-1} = p_{n-2} q = p_0 q^{n-1}$, где $q = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$. Значит, при данных $p_{1,\dots,} p_{n-1}$ позином ④ принимает нм. значение.

Т. о. работа, затрачиваемая на весь $n-$ ступенчатый процесс сжатия газа, мнм-на тогда, когда числа $p_{0,} p_{1,\dots,}\ p_n = p$ образуют геом. прогрессию со знаменателем $q = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$. Это также означает, что степень сжатия $\frac{p_i}{p_{i-1}}$ во всех ступенях должны быть одинаковы.

4. В ряде случаев использование тA требует нек-ой изобретатель-ности. Рас-им сд-ие две задачи.

а) Найти нб. значение фк-и

$$f\left(x_{1,\dots,}\ x_n\right) = \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\dots+x_n} \qquad ⑤$$

при огр-ях

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,\ x_j > 0\ (j=\overline{1,n}) \qquad ⑥$$

б) Найти нм-шее из нб-их слагаемых суммы ⑤ при огр-ях ⑥

Р. Введем новые пер. $Z_k = 1 - \frac{x_k}{1+x_1+\dots+x_k}$ $(k=\overline{1,n})$. Тогда $x_1 = Z_1^{-1} - 1$. $x_2 = Z_1^{-1}\left(Z_2^{-1}-1\right)$,…, $x_k = Z_1^{-1} Z_2^{-1} \dots Z_{k-1}^{-1}\left(Z_k^{-1}-1\right)$, $k=\overline{2,n}$. Суммируя эти рав-ва, получаем $x_1+x_2 = Z_1^{-1}-1+Z_1^{-1}\left(Z_2^{-1}-1\right) = Z_1^{-1}\left(1+Z_2^{-1}-1\right)-1 = Z_1^{-1}Z_2^{-1}-1$, .., $\sum_{k=1}^{n} x_k = Z_1^{-1}Z_2^{-1}\dots Z_n^{-1}-1$. Но $x_1+\dots+x_n = 1$, Сд-но, $Z_1 Z_2 \dots Z_n = \frac{1}{2}$.

Т. о., задачи а) и б) сводятся к сд. задачам:

а$_0$) Найти

$$\min\left(Z_1+\dots+Z_n\right)$$

при огр-ях

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n = \frac{1}{2}\ ,\ \ 0 < Z_k < 1\ ,\ k=\overline{1,n}. \qquad ⑦$$

б$_0$) Найти нб-шее из нм-их слагаемых Z_k суммы $Z_1+\ldots+Z_n$ при тех же огр-ях ⑦.

В силу тA $\min\limits_{\substack{Z_1\ldots Z_n=\frac{1}{2}\\ Z_i>0}}\left(Z_1+\ldots+Z_n\right)=n2^{-\frac{1}{n}}$. Этот мнм. достигается в единственной точке $(Z_1,\ldots,Z_n)$, $Z_i=2^{-\frac{1}{n}}$. Поскольку эта точка уд-ет огр-ям ⑦, то она будет точкой мнм-а и в задаче а$_0$). Т.о., возвращаясь к исходной задаче а), получим

$$\max_{\substack{x_1+\ldots+x_n=1\\ x_i>0}} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=n-n2^{-\frac{1}{n}},$$

он достигается при $x_k=2^{\frac{k-1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$, $k=\overline{1,n}$. Эта точка единственная. Причем числа $x_1,\ldots,x_n$ образуют геом. прогрессию со знаменателем $q=2^{\frac{1}{n}}$.

Что касается задачи б$_0$), то она тривиальна: ясно, что указанный maxmin (максимин) равен $2^{-\frac{1}{4}}$ и, значит, minmax (минимакс) исходной задачи б) равен $1-2^{-\frac{1}{n}}$.

5. При условии, что $x_j>0$ $(j=\overline{1,3})$, д-те нерав-ва:

5.1. $x_1^3+x_2^3+x_3^3\geq 3x_1x_2x_3$.

5.2. $\dfrac{x_1^2}{x_2x_3}+\dfrac{x_2^2}{x_1x_3}+\dfrac{x_3^2}{x_1x_2}+\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}\geq 9$.

5.3. $3x_1^2+2x_2^3+x_3^6\geq 6x_1x_2x_3$.

6. Пологая $m>0$, $n>0$, $a>0$, найти при условии

$$M=\min_{\substack{x>0,\,y>0,\,x^m y^n=a.}}(mx+ny)$$

O: $(m+n)a^{1/(m+n)}$ достигается при $x=y=(m+n)a^{1/(m+n)}$.

7. Скорость распространения в глубокой воде волны, длина к-ой равна λ, пропорциональна величине, $\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}+\dfrac{a}{\lambda}}$, где a – нек-ая константа. При какой длине волны $\lambda_{\min}$ скорость будет нб-ая?

O: $\lambda_{\min}=a$.

8. Найти нм. значения позиномов, предварительно уменьшив число перых.

8.1. $f(x, y, z) = 2x^{-1}y+3x^{2}yz^{3}+6x^{-1}y^{-2}z^{-3}$. О: $\min f(x, y, z)=f(\frac{\sqrt[3]{3}}{18}, \sqrt{3}, 1)=3\sqrt[3]{36}$

8.2. $f(x, y, z) = x^{-1}z^{-1}+2x^{2}y^{-1}z+4x^{-1}y$. О: $\min f(x, y, z)=f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)=6$.

8.3. $f(x, y, z)=2x^{1}yz^{-1}+4x^{2}y^{-1}z^{2}+x^{-1}z^{-1}$, О: $\min f(x, y, z)=f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = 6$.

9. Д-ть регулярность сд-их позиномов.

9.1. $g(x) = 1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}$.

9.2. $g(x) = \frac{nx}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt[k+1]{x}}$

Ук: получить сначала фм-у суммирования $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

9.3. $g(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}\right)$.

9.4. $g(x, y)=(x+y)^{n}(x^{-n}+y^{-n})$.

Задания для кр. работы

10. Найти нм. значения позиномов в обл-и их опр-ия.

10.1. $g(x)=\alpha x^{\beta}+\beta x^{-\alpha}$ $(\alpha_1\beta>0)$. О: $\alpha+\beta$.

10.2. $g(x)=\sqrt[r]{x}+\frac{S}{r\sqrt[s]{x}}$ $(r,s>0)$, О: $\frac{r+s}{r}$.

10.3. $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{k}$, О: n

10.4 $g(x)=\frac{n(n+1)}{2}x^{\frac{2n+1}{3}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x^{k}}$, О: $n(n+1)$.

10.5. $g(x,y)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{n}$. О: 2^{n}

10.6. $g(x,y)=y^3\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{y\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2y^2\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{3y^3\sqrt[4]{x}}$. О: $\dfrac{17}{6}$.

10.7. $g(x_1...,x_n)=\dfrac{1}{x_1...x_n}\sum_{k=1}^{n}x_k^n$. $O:n$.

11. Найти нм. значение позиномов в обл. их опр-ия.

11.1. $f(x,y)=xy+50x^{-1}+20y^{-1}.$ $O:\min f(x,y)=f(5,2)=30$.

11.2. $f(x,y)=4x+xy^{-2}+x^{-1}y.$ $O:\min f(x,y)=f\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)=4$.

11.3. $f(x,y)=Ax^{-\alpha}y^{\alpha\beta}+Bx^{1+\beta^2}y^{-\beta}+Cx^{-\alpha\beta}(A,\ B,\ C,\ \alpha,\ \beta>0)$.

$O:\min f(x,y)=f(x_0,y_0)=(1+\alpha+\beta)t_0$,

где $x_0=\left(\dfrac{C}{\beta t_0}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}}$, $y_0=\left[\dfrac{C{t_0}^{\beta-1}}{\beta A^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta^2}}$, $t_0=\left[\dfrac{AB^{\alpha}C\beta}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right]^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}$.

12. Запишите дв. задачи к задачам мнмз-и (без огр-й) сд. позиномов.

12.1. $g(x,y)=x^{-1}y+2x^2y+3x^{-1}y^{-2}.$ $O:v(б)=\max\left(\dfrac{1}{б_1}\right)^{б_1}\left(\dfrac{2}{б_2}\right)^{б_2}\left(\dfrac{3}{б_3}\right)^{б_3}$

при $\left.\begin{array}{l}-б_1+2б_2-б_3=0\\ б_1+б_2-2б_3=0\\ б_1+б_2+б_3=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}б_1>0\\ б_2>0\\ б_3>0\end{array}$.

12.2.

$g(x,y,z)=\dfrac{1}{2}xy^{-1}z+2x^{-1}y+\dfrac{1}{4}xz^{-1}+2z.$ $O:v(б)=\max\left(\dfrac{1}{2б_1}\right)^{б_1}\left(\dfrac{2}{б_2}\right)^{б_2}\left(\dfrac{1}{4б_3}\right)^{б_3}\left(\dfrac{2}{б_4}\right)^{б_4}$

$$\left.\begin{array}{l}б_1-б_2+б_3=0\\ -б_1+б_2=0\\ б_1-б_3+б_4=0\\ б_1+б_2+б_3+б_4=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}б_1>0\\ б_2>0\\ б_3>0\\ б_4>0\end{array}.$$

13. Найти нм. значение позиномов с помощью решения ств-ей дв задачи.

13.1. $f(x,y)=Ax^{-1}y+Bx^2+Cx^{-1}y^{-2}\ \ (A,B,C>0)$, $O:\min f(x,y)=f(x_0y_0)=3\sqrt[3]{ABC}$,

$$x_0=A^{-\frac{1}{3}}B^{-1}C^{-\frac{2}{3}},\ \ y_0=A^{-\frac{1}{3}}C^{\frac{1}{3}}.$$

13.2 $f(x,y)=Ax^{-2}y^2+Bx^2y+Cx^{-2}y^{-4}.$ $(A,B,C>0)$ $O:\min f(x,y)=f(x_0y_0)=$

$=2\sqrt{2}\left(AB^2C\right)^{\frac{1}{4}},x_0=2\left(AB^6C\right)^{-\frac{1}{6}},y_0=\left(CA^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$.

13.3. $f\left(x,y\right)=Ax^{-2}y^{2}+Bx^{\frac{5}{4}}y^{\frac{1}{4}}+Cx^{-1}y^{-5}\ \left(A,B,C>0\right)$ $\mathrm{O}:\min \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{f}(\mathrm{x}_0\mathrm{y}_0)$

$=\frac{7}{2}\left(\frac{A^2B^4C}{6}\right)^{\frac{1}{7}},x_0=2B^{-1}\left(2A^{-4}B^{-4}C^{-3}\right)^{\frac{1}{24}},y_0=\left(2^7\,A^{-4}B^{-4}C^{3}\right)^{\frac{1}{24}}$

14. Найти $\mu=\min\left(y+x^4y^{-4}\right)$ при огр-ях $x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\le 1,\ x>0,\ y>0.$

$O: x^*=\sqrt[6]{2},\ y^*=\sqrt[3]{2},\ \mu=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

15. Найти $\mu=\min\left(x^{-1}+2x^2y^{-1}\right)$ при огр-ях $x^{-1}y\le 1,\ x>0,\ y>0.$

$O: x^*=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y^*=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mu=2\sqrt{2}$.

16. Найти $\mu=\min\left(2x^{-2}+4x^5y^{-2}\right)$ при огр-ях $x^{-4}y^2\le 0,\ x>0,\ y>0.$

$O: x^*=1,\ y^*=1,\ \mu=6$

17. Найти нм. значение фк-й в обл. плж-ых значений пер-ых

17.1. $g\left(x\right)=\left(x+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x^3+6x^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$, $O:\min g\left(x\right)=g\left(1\right)=2\sqrt{2.}$

17.2. $g\left(x\right)=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+3x^2+1}$. Ук: сделайте замену пер-ых $y=\left(x+x^{-1}\right)^2$;

$O:\min g\left(x\right)=g\left(1\right)=\frac{4}{5}$.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ДП И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

> Повторяемость есть единственная форма
> постоянства, доступная природе.
> Сантаяна

ЛЕКЦИЯ 17

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДП

1°. Основные понятия и характерные особенности ДП. Динамическое программирование (ДП) – метод оптз-и, приспособленный (на основе рекуррентного стн-ия) к операциям, в к-ых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие операции наз-ся многошаговыми или многоэтапными. Т.о. ДП представляет собой мт-й аппарат, позволяющий осуществлять опт. планирование многошаговых процессов, зависящих от времени. Процесс наз. управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением (упл.) наз. совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. Так, в экономических процессах упл-ие заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Н-р, выпуск продукции любым предприятием – управляемый процесс, т.к. он опр-ся изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, вел-ой финансирования и т.д. А совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия (прд.) сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т.д. яв-ся управлением.

Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения (о вел-е капитальных вложений, о замене оборудования опр-го вида и т.д.). Под этапом обычно понимают хозяйственный (хоз.) год.

Планируя многоэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т.е. при принятии решения на отдельном этапе всегда нх-мо иметь в виду конечную цель.

Отметим, что для большинства задач ДП классические методы анализа или вариационного исчисления оказываются неэффективными, поскольку приводят первоначально поставленную задачу отыскания мкс-го значения фк-и к задаче, к-ая не проще, а сложнее исходной. ДП, используя поэтапное планирование, позволяет не только упростить решение задач, но и решить те из них, к к-ым нельзя применить методы мт-го анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения кол-ва исследуемых вариантов, т. к. вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение отс-но простых задач.

Однако ДП имеет и свои недостатки. В отличии от ЛП, в к-ом симплексный метод яв-ся универсальным, в ДП такого метода не сущ-ет. Каждая задача имеет свои трудности, и в каждом случае нх-мо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток ДП заключается также в трудоемкости решения многомерных задач.

ДП возникло и сформировалось в 1950–1953 гг. благодаря работам Р. Беллмана и его сотрудников. Первые задачи, к-ые привели к появлению вычт-го метода ДП, явились динамическими задачами упл-ия запасами.

2°. Постановка задачи ДП. Постановку задачи ДП иллюстрируем сд-ми **з1** (распределение средств между предприятиями). Рас-им инвестирование, связанного с распределением (расп.) средств между прд-ми. В результате упл-ия инвестициями система посл-но переводится из нач-го состояния S_0 в конечное S_n. Предположим, что упл-ие можно разбить на n шагов и решение принимается посл-но на каждом шаге, а упл-ие представляет собой совокупность n пошаговых упл-й. На каждом шаге нх-мо опр-ть два типа перых – пер-ю состояния системы S_j и пер-ю упл-ия x_j. Пер-я S_j опр-ет, в каких состояниях может оказаться система на расв-ом j-м шаге. В зв-сти от состояния S на этом шаге можно применить нек-ые упл-ия, к-ые характеризуются (хркз.) пер-ой x_j, к-ые уд-ют опр-ым огр-ям и наз. допустимыми.

Допустим, $x=(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$– упл., переводящее систему из состояния S_0 в состояние S_n, а S_j есть состояние системы на j-шаге упл-ия. Тогда посл-ть состояний системы можно представить в виде графа, представленного на рис. 1.

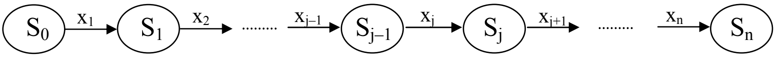


Рис. 1

Применение управляющего воздействия x_j на каждом шаге переводит систему в новое состояние $S^1(S,x_j)$ и приносит нек-ый результат W_j (S, x_j). Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных упл-й выбирается опт. упл-ие x^*_j, такое, чтобы результат, к-ый достигается за шаги с j-го по последней n-й, оказался бы опт-ым. Числовая характеристика (хркс.) этого результата наз. фк-ей Беллмана F_j (S) и зв. от номера шага j и состояния системы S.

Задача ДП формулируется так: требуется опр-ть такое упл. $x^* = (x_1^*,.., x_j^*,.., x_n^*)$, переводящее систему из нач. состояния S_0 в конечное состояние S_n, при к-ом целевая фк. принимает нб (нм) значение $F\ (S_0, x^*) \to$ эксм.

Особенности мт-ой модели ДП заключается в сд-ем:

1) Задача оптз-и формулируется как конечный многошаговый процесс упл-ия.

2) Целевая фк. яв-ся аддитивной и равна сумме целевых фк-й каждого шага:

$$F = \sum_{j=1}^{n} F_j\,(S_{j-1}\ x_j) \to эксм.$$

3) Выбор упл-я x_j на каждом шаге зв-т только от состояния системы S_{j-1} на этом шаге и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4) Состояние системы S_j зв. от предшествующего состояния системы S_{j-1} и его упр-ия x_j (отсутствие последствия), т.е. $S_j = f_j\ (S_{j-1}, x_j)$, $j=\overline{1,n}$.

5) На каждом шаге упр-е x_j зв. от конечного числа упл-щих пер-ых, а состояние системы S_j зв. от конечного числа параметров.

6) Опт. упл-ие представляет собой вектор $x^* = (x^*_1,..., x^*_j..., x^*_n)$ из посл-ти опт. пошаговых упл-й x_j^* ($j=\overline{1,n}$), число к-ых и опр-ет кол. шагов задачи.

Задача ДП решается в два этапа: 1) поэтапное планирование решения на каждом шаге от конца к началу $(S_n \to S_0)$ – ход назад; 2) Находится опт. решение как сумма целевых фк-й на каждом шаге от начала к концу $(S_0 \to S_n)$ – ход перед.

Заметим, что в многих задачах от нач. состояния S_o к конечному состоянию приходят различными путями с помощью ориентированных графов (теорию графов см. в [107]), н-р, рас-им сд. задачу.

з2 (поиск наискорейшего по времени пути). Пусть нам нужно добраться на машине из пункта А в пункт В в кратчайшее время. Имеется несколько возможных путей из А в В (рис. 2). Эти пути различны по качеству: среди них имеются участки первоклассных асфальтированных шоссе, а также менее благоустроенные и просто проселочные дороги; встречаются переезды, на к-ых движение задерживается, так что задача не сводится к отысканию просто кратчайшего пути; должен быть найден путь наискорейший.

Для поиска решения задачи представим весь процесс выбора пути в виде n посл-ых шагов (этапов). Разделим отрезок АВ на n равных частей и проведем через полученные точки прямые (0), (1), (2),..., (n–2), (n–1), (n). За «шаг» процесса будем считать перемещение с одной прямой на другую, т.е. преодоление 1/n расстояния АВ.

В каждом шаге будем выбирать элр-ый участок дороги, по к-ой нужно перебираться с одной прямой на сд-ю по порядку так, чтобы на все перемещение из А и В ушло мнм-ое время.

Правильно ли будет, если мы, переходя с прямой (0) на прямую (1), выберем тот участок пути, к-ый проходится за мнм-ое время. Очевидно, нет, т. к. в дальнейшем этот путь может привести нас на какой-нибудь трудно проходимый участок или переезд, где пропадет весь выигрыш во времени, полученный на первом участке (рис. 2).

Как же выбирать решение? Целесообразно планирование начинать с последнего шага В к нач. шагу А $(B \to A)$. Как можно спланировать последний шаг, если мы не знаем, чем кончится предпоследний? Очевидно, нужно сделать различные предположения о том, чем кончится последний шаг, и для каждого из них принять опт. решение на последний.

В условиях нашего примера последний шаг выводит нас на прямую (n-1) из точки B на прямой (n). На рис. 2 отмечены кружками на прямой (n-1) шесть возможных положений в конце представленного шага. Для каждого из этих положений сущ-ет вполне опр-ый кротчайший по времени путь в точку B. Отметим этот путь на рис. 2 черной линией. Т. о., для любого результата предпоследнего шага решение на последнем шаге выбрано.

Аналогично поступает с каждой точкой шага (n-1) и на прямой (n-2) отметим (рис. 2) треугольниками (туг.) девять возможных положений. Для каждого из этих положений сущ-ет вполне опр-ый кратчайший путь (отмеченный черной линией) точкам шага (n-1). Время перехода $t_{n-2,n}$ от прямой (n-2) до точки B состоит из времени $t_{n-2,n-1}$, потребного на выход с прямой (n-2) на прямую (n-1) и мнм-го времени $t^*_{n-1,n}$, потребного для выхода с прямой (n-1) в точку B по опт-му пути (жирной линии), т. е.

$$t_{n-2,n}= t_{n-2,n-1}+ t^*_{n-1,\, n} \qquad (1)$$

Для каждой из точек (туг-ов) на прямой (n–2) выберем тот путь на прямую (n–1), для к-го время выхода в точку B (рис. 2) будет мнм-но. Снова отметим этот путь на рис. 2 черной линией. Это будет решение на (n–1)– м шаге.

Продолжая такой процесс дальше, можно отметить все точки на прямой (n–3) и для каждой из них провести черной линией тот путь на линию (n–2), для к-го обращается мнм. время

$$t_{n-3,\, n}=t_{n-3,\, n-2} + t^*_{n-2,\, n-1} + t^*_{n-1,\, n,} \qquad (2)$$

причем все возможные варианты берутся только на этапе $(n-3)\to(n-2)$; остальные этапы берутся согласно ранее принятому опт. решению. Так продолжая до точка A, получим

$$t_{n-n,\, n}=t_{o,\, n}=t_{0,1} + t^*_{1,2} + t^*_{2,3} +...+ t^*_{n-1,\, n},\ \text{т.е. } t_{o,n} = t_{0,1} + \sum_{j=1}^{n-1} t^*_{j,\, j+1}, \qquad (3)$$

где для $t_{0,1}$ выберем тот путь на прямую (1), для к-го время выхода в точку на прямой (1) при $t^*_{1,2}$ мнм-но.

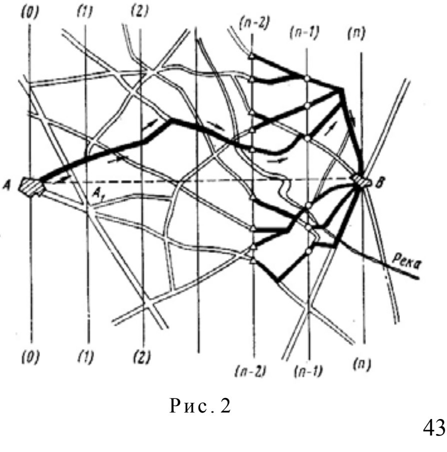


Рис. 2

зм1. Как уже было отмечено, в ДП универсального метода не сущ-ет. Так для з2 решение получим за один ход назад (B→A). многие задачи могут решаться за два этапа: ход назад$(S_n \to S_0)$ и ход перед$(S_0 \to S_n)$. А нек-е задачи могут быть удобно решены за два этапа: ход перед$(S_0 \to S_n)$ и ход-назад ($S_n \to S_0$) или за один ход-перед ($S_0 \to S_n$). Выбор метода зависит от структуры сформулированной задачи на языке ДП в виде рекуррентного стн-я.

3°. Сущность вычислительного метода.

Сущность вычислительного метода рас-им на след-ем примере:

з3. Найти

$$\max_{x_1,\dots x_n} Z=\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right); \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\ a_j>0,\ x_j\ge 0. \tag{5}$$

Целевая фк. задачи яв-ся суммой (сепарабельных) фк-й от одной пер-ой. Такая фк. наз. аддитивной. Если все $f_j(x_j)(j=\overline{1,n})$ – выпуклые (вогнутые), то для решения может быть применён метод множителей Лагранжа. Однако, если имеется много локальных мкс-ов, то этот метод даёт лишь одно из таких решений. В случае, если требуется найти глобальный мкс-м, метод множителей Лагранжа не применим.

Рас-им метод, обеспечивающий решение задачи. Считаем все $a_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ и b целыми числами. Предположим также, что в задаче все пер. $\left\{x_j\right\}$ могут принимать только цлч-ые значения.

Введём сд-ие обз-ия. Через Z^* обз-им абс-ый мкс. Z, при условии $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b.$ Выберем значение x_n и, зафиксировав его, мксз-ем Z по всем остальным пер. $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$. Предположим, что такая мксз, проведена для всех возможных значений Z. Формально этот процесс записывается так:

$$Z^*=\max_{x_1,\dots,x_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\right\}=f_n\left(x_n\right)+\max_{x_1,\dots,x_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1} f_j\left(x_j\right)\right\}, \tag{6}$$

причём $\sum_{j=1}^{n} a_j$ x_j $\le b-a_n$ x_n. Т. к. max $\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$ для неотрицательных целых чисел, уд-их условию $\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le b-a_n x_n$, зв. от $b-a_n x_n$, то обз-им

$$\max_{x_1,\dots x_{n-1}} Z\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)=w_{n-1}\left(b-a_n x_n\right) \tag{7}$$

Допустим, что мы вычислили $w_{n-1}\left(b-a_n x_n\right)$ для всех допустимых целых значений $x_n=\left\{0,1,\dots,\left[\frac{b}{a_n}\right]\right\}$, где $\left[\frac{b}{a_n}\right]$ обз-ет целую часть $\frac{b}{a_n}$. Очевидно, что

$$Z^*=\max_{x_n\ge 0}\left[f_n(x_n)+w_{n-1}(b-a_n x_n)\right]. \tag{8}$$

Для выч-ия (8) опр-ем значения $f_n(x_n)$ и $w_{n-1}(b-a_nx_n)$ для всех допустимых значений x_n и выбираем мкс-ое. Одновременно находим и x_n^*.Т.о., если бы была известна фк. $w_{n-1}(b-a_nx_n)$,то вся задача свелась бы к задаче с одной пер-ой.

Покажем, как можно выч-ть $w_{n-1}(b-a_nx_n)$

Очевидно, что $w_{n-1}(\lambda)=\max\limits_{x_1,\dots x_{n-1}}\sum\limits_{j=1}^{n-1}f_j(x_j)$ при $\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_jx_j\le\lambda.$

Рассуждая, как выше, получаем

$$w_{n-1}(\lambda)=\max_{x_{n-1}\ge 0}\left[f_{n-1}(x_{n-1})+w_{n-2}(\lambda-a_{n-1}x_{n-1})\right], \tag{9}$$

где

$$w_{n-2}(\lambda-a_{n-1}x_{n-1})=\max_{x_1,\dots x_{n-2}}\sum_{j=1}^{n-2}f_j(x_j), \tag{10}$$

причём мкс-м берём по всем неотц-ым целым $x_1,\dots, x_{n-2}$, уд-ив условию

$$\sum_{j=1}^{n-2}a_jx_j\le\lambda-a_{n-1}x_{n-1.}$$

Далее выч-ем $w_{n-2}(\lambda), w_{n-3}(\lambda)$ и т. д., пока в последнем шаге не придём к

$$w_1(\lambda)=\max f_1(x_1). \tag{11}$$

$$0\le x_1\le\left[\frac{\lambda}{a_1}\right]$$

Чтобы решить задачу, процесс выч-й нх-мо вести в обратном порядке, начиная с $w_1(\lambda)$. Зафиксировав начало интервала и изменяя верхний его конец λ, выч-ем $w_1(\lambda)=\max f_1(x_1), 0\le x_1\le\left[\frac{\lambda}{a_1}\right]$ для всех значений $\lambda=0$, 1,2,…,b.

Опт. решение первого шага обз-им через $\overline{x_1}(\lambda)$. Строим таб. 1. Выч-ив $w_1(\lambda)$, найдём $w_2(\lambda)$, используя стн-ие

$$w_2(\lambda)=\max\left[f_2(x_2)+w_1(\lambda-a_2x_2)\right] \tag{12}$$

$$0\le x_2\le\left[\frac{\lambda}{a_2}\right]$$

Выч-ем посл-но $W_2(\lambda)$ для всех λ=0, 1,…, b, используя результаты табл.1.

Таблица 1

λ	$w_1(\lambda)$	$\overline{x_1}(\lambda)$
0		
1		
…	…	…
b		

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Обз-им через} & \varphi_2(0,\lambda)=f_2(0)+w_1(\lambda). \\ \text{Тогда} & \varphi_2\left(\frac{\lambda}{a_2},\lambda\right)=f_2\left(\frac{\lambda}{a_2}\right)+w_1\left(\lambda-a_2\left[\frac{\lambda}{a_2}\right]\right) \\ & \varphi_2(1,\lambda)=f_2(1)+w_1(\lambda-a_2),\ldots \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Нб-е из этих чисел и есть $w_2(\lambda)$. Одновременно находим и $\overline{x_2}(\lambda)$, затем строим табл.1 для $w_2(\lambda)$ и $\overline{x_2}(\lambda)$ $(\lambda = 0,\ 1,\ ...,\ b)$. Так продолжаем до выч-ия $w_{n-1}(\lambda)$ для $\lambda = 0,\ 1,\ ...,\ b$. Фк-ю $w_n(\lambda)$ табулировать не нужно, т.к. дт-но опр-ть лишь $w_n(b) = z^*$. Одновременно находим и опт. значение для пер-ой $x^*_n(b)$.

Для нахождения значений всех остальных пер. $x^*_{n-1},\ x^*_{n-2},\ ...,\ x^*_1$ следует использовать уже выч-ые табл. (n-1)- го; (n-2)-го и т.д. шагов.

Из предыдущей табл. (n-1)-го шага находим $x^*_{n-1}= \overline{x}_{n-1}(b-a_n x^*)$. Для этого берем $\lambda = b-a_n x^*_n$. Аналогично опр-ем

$$x^*_{n-2}= \overline{x}_{n-2}(b-a_n x^*_n-a_{n-1}x^*_{n-1})$$

Как видим, ДП представляет собой направленный посл-ый перебор вариантов, к-ый обязательно приводит к глобальному мкс. Для применения метода ДП нх-мо табулировать фк-и $w_1(\lambda),\ldots, w_{n-1}(\lambda)$ для всех допустимых значений λ.

Рас-ю задачу можно трактовать как задачу распределения с одним огр-ым источником сырья $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$, где x_j – кол. сырья, используемое в j-м способе производства. Тогда $f_j(x_j)$; – доход от переработки j-м способом x_j, единиц сырья. Поэтому $w_к(\lambda)$ можно расв-ть как мкс-ый доход от первых к способов производства, когда общее кол. сырья равно λ единиц. Поэтому данная задача представляет собой n-шаговый процесс принятия решений, где на j-м шаге принимается решение, какое кол. сырья из общего его объема следует направить на переработку по j-му способу.

п1. Найти

$$\max z = f(x) = 3x^2_1-4x_2+ 3x^3_3$$

при огр-ях
$$4x_1+3x_2+2x_3 \le 8$$

$$x_j \geq 0,\ x_j – \text{целые}\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

Р. Целевая фк. f(x) аддитивная, т.к $f(x)=f_1(x_1)+ f_2(x_2)+f_3(x_3)$, где $f_1(x_1)=3x_1^2$, $f_2(x_2)=-4x^2$, $f_3(x_3)=3x_3^3$. Для удобства обз-им $w_1(\lambda)=f_1(\lambda)$ и далее. Используем стн-я (II)-(13).

Находим $f_1(\lambda)=\max\ 3x_1^2$, $0 \le x_1 \le \left[\frac{\lambda}{4}\right]$, λ =0,1,…,8, тогда $x_1 \in \{0,1,2\}$. Для каждого λ выч-ем $f_1(\lambda)$ и выбираем среди них мкс-ое. Далее выч-ем $f_2(\lambda)=\max\ \left[-4x_2+f_1(\lambda-3x_2)\right]$ для всех $0 \le x_2 \le \left[\frac{\lambda}{3}\right] \Rightarrow x_2 \in \{0,1,2\}$.
$f_3(8)=\max\left\{3x_3^3+f_2(8-2x_3)\right]$ для всех $0 \le x_3 \le \left[\frac{8}{2}\right] \Rightarrow x_3 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Все выч-ия приведены в табл. 2. Т.о., max f(x)= max $f^*_3(\lambda)=f^*_3(8)=192$. Опт-ю стратегию находим так: сначала устанавливаем, что $x_3^* = 4$ (ств-ет мкс-у значению 192). Значение x_2^* находим из ств-их граф табл. 2 для

$$\lambda = 8-2x_3^* = 8-2\cdot 4 = 0\Big(f_2(\lambda) = f_2(0) = 0 \text{ при } x_2^* = 0\Big).$$

Далее находим значение $x_1^* = 0$ для $\lambda = 8-2x_3^*-3x_2^* = 8-2\cdot 4-3\cdot 0 = 0$ $\Big(f_1(\lambda) = f_1(0) = 0 \; \textit{при} \; x_1^* = 0\Big)$. Т.о., опт. стратегия упл-ия равна $x^* = (0,0,4)$, $Z^* = f\left(x^*\right) = 192.$

Таблица 2

λ	$f_1(\lambda)$			$f_2(\lambda)$			$f_3(\lambda)$				
	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$
0	0			0							
1	0			0							
2	0			0							
3	0			0	–4						
4	0	3		0	–4						
5	0	3		0	–4						
6	0	3		0	–4	–8					
7	0	3		0	–1	–8					
8	0	3	12	0	–1	–8	12	6	27	81	192^*

4^0. Задачи о выборе траектории. Сначала рас-им сд. простую

з4. Пусть самолет находится на высоте H_0 и имеющий скорость V_0, должен подняться на высоту $H_к$ и иметь скорость $V_к$. известен расход горючего при подъеме самолета с любой высоты H_1 на любую высоту $H_2(H_2> H_1)$ при пост-ой скорости, а также расход горючего при увеличении скорости от любого значения V_1 до любого значения $V_2(V_2> V_1)$ при неизменной высоте.

Найти опт. упл-ие набором высоты и скорости, при к-ом общий расход горючего мнм-ен.

Р. Отметим на рис. 3 нач-ое $S_0\,(V_0, H_0)$ и конечное $S_к\,(V_к, H_к)$ состояния. Разобьем отрезок $(H_к - H_0)$ на n_1, а отрезок $(V_к - V_0)$ – на n_2 равных частей (этапов) и условимся считать, что за один этап (шаг) самолет может увеличить либо высоту на вел-у $\vartriangle H = \dfrac{H_к - H_0}{n_1}$, либо скорость на вел-у $\vartriangle V = \dfrac{V_к - V_0}{n_2}$. Для каждого $\vartriangle H_i$ и $\vartriangle V_j$ на рис. 3 приведены расходы горючего.

Очевидно, сущ-ет мн-во траекторий (упл-й), представляющих собой ломаные линии, по к-ым точка S может переместиться из S_0 в $S_к$. Решение задачи состоит в том, чтобы из мн-ва упл-й выбрать такое, к-ое позволит мнмз-ть расход горючего W, равный сумме расходов горючего на каждом этапе ств-ей ломаной линии, т. е. найти:

$$W^* = \min \sum_{i,j=1}^{K} W\left(\triangle H_i, \triangle V_j\right) \qquad (14)$$

Решение задачи с помощью перебора вариантов практически реализовать не возможно, т. к. даже для малых n_1= 2 и n_2=3 получаем n = $2\cdot 4+3\cdot 3=17$, $C^5{}_{17}$ = 6188 вариантов. Гораздо проще и быстрее задача решается методом ДП в два этапа: ход назад ($S_к \to S_0$) и ход вперед ($S_0 \to S_к$).

При ($S_к \to S_0$) заполняем кружки мнм-ми суммами, начиная с $S_к$ сд-им образом. В точку $S_к$ можно прийти либо из точки A_1 и A_2, т. е. для каждой точки упр-ие единственное. Поэтому ств-ие расходы горючего 8 и 11 пишем в кружки A_1 и A_2 (рис. 4). Точкам A_1 и A_2 можно прийти из точек B_1, B_2 и B_3. Из точки B_1 можно прийти только в A_1, поэтому в кружки B_1 пишем 17=9+7. Из точки B_2 можно прийти в A_2 (24=13+11) и в A_1 (18=10+8), тогда в кружки B_2 пишем мнм-ю сумму 18. Из точки B_3 переходим только в A_2, поэтому в кружки B_3 пишем сумму 22=11+11. Точкам B_1, B_2 и B_3 можно прийти из точек C_1, C_2, C_3 и C_4. Из точки C_1 можно прийти только B_1, поэтому в кружки C_1 пишем сумму 27=10+17. Из $C_2 \to B_1$ (25 = 8+17) и $C_2 \to B_2$ (25=7+18), поэтому в C_2 пишем 25;Из $C_3 \to B_2$ (28=10+18) и $C_3 \to B_3$ (34=12+22), тогда в C_3 пишем 28; Из $C_4 \to C_4$ (34=12+22), поэтому в C_4 пишем 34 и. т. д. (рис.4).

Так продолжаем до точки S_0. На этом ход назад ($S_к \to S_0$) кончаются с получением W*=88.

Теперь ход перед ($S_0 \to S_к$) надо указать стрелками траекторию по кружкам из мнм-ых чисел: $88 \to 76 \to 67 \to 58 \to 51 \to 44 \to 34 \to 25 \to 17 \to 8 \to S_к$ (рис. 4). Задача решена полностью.

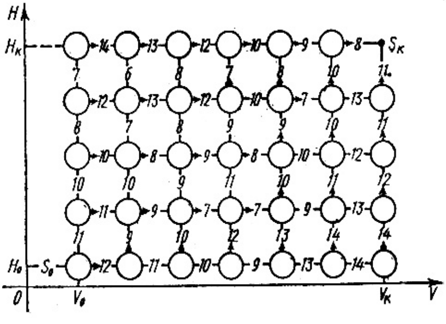


Рис. 3

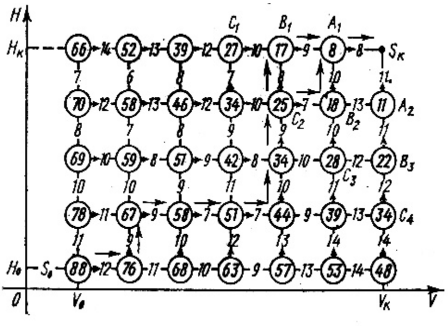


Рис. 4

На рас-ной задаче значительно упрощен процесс, т. к. не учитывается возможность одновременного набора высоты и увеличения скорости.

з5. Рассмотрим модель, учитывающую этот факт (рис. 5). Очевидно, что одновременному увеличению высоты и скорости на (рис 5)ств-ет движение по диагонали, идущие в направлении $S_к$. Проведем такие диагонали в каждом прямоугольнике и запишем над ним расход горючего. Теперь каждая узловая точка обл. возможных состояний, за исключением точек, лежащих на прямых $H=H_к$ и $V=V_к$, связана в направлении $S_к$ с тремя другими. Поэтому ранее использованный метод нумерации узловых точек по числу шагов, оставшихся до конца процесса, неприемлем, т. к. он не учитывает дпн-ю связь по диагонали. Нумерацию узловых точек удобнее всего провести по признаку их крд-т. Поэтому точка A_1, A_2, A_3 и A_4 фиксируем как на рис. 6. Для них путь движения в $S_к$ по вертикали единствен, а расход горючего ств-но равен 11, 22, 34 и 48 ед. Точкам $S_к$, A_1, A_2, A_3 и A_4 можно попасть из точек B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Из точки B_1 в точку $S_к$ путь единственный, поэтому в кружок B_1 пишем 8. Из точки B_2 возможны три пути: $B_2 \to B_1$ $(18 = 10 + 8)$, $B_2 \to S_к$ $(17 = 17 + 0)$ и $B_2 \to A_1$ $(24 = 13 + 11)$, тогда в кружок B_2 запишем 17. Из точки B_3 возможны также три пути: $B_3 \to B_2$ $(27=10+17)$, $B_3 \to A_1$ $(30=19+11)$, $B_3 \to A_2$ $(34=12+22)$, то в кружок B_3 пишем 27. Из B_4 выходит три пути: $B_4 \to B_3$ $(38 = 11 + 27)$, $B_4 \to A_2$ $(41 = 19 + 22)$, $B_4 \to A_3$ $(47 = 13 + 34)$, тогда в кружок B_4 запишем 38. Из B_5 выходит так же три пути: $B_5 \to B_4$ $(52 = 14 + 38)$, $B_5 \to A_3$ $(56 = 22 + 34)$, $B_5 \to A_4$ $(62 = 14 + 48)$, сд-но, в кружок B_5 пишем 52. Затем берем точки C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5, с к-мы поступаем так же, как с точками B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. Так продолжаем до тех пор, пока не дойдем до точки S_0 (рис. 6). Этап ход назад $(S_к \to S_0)$ закончен и получен опт. план $W^*= 86$. Для получения траектории делаем ход перед $(S_к \to S_0)$ по кружкам из мнм–ых чисел: $S_0 = 86 \to 65 \to 50 \to 33 \to 17 \to 8 \to S_к$ (рис. 6).

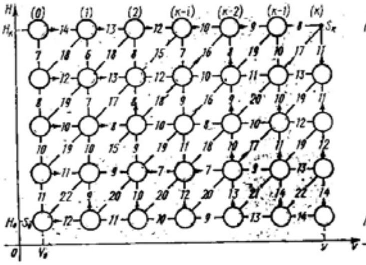


Рис. 5

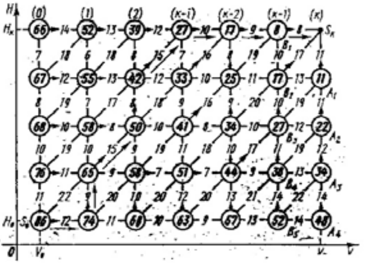


Рис. 6

5°. Задачи о маршрутизации. Методом ДП могут решаться задачи, приводящиеся к сетевым моделям, такие, как транспортные задачи с произвольной (не обязательно лин-ой) фк-ей затрат; задачи замены оборудования; задачи упл-ия запасами и др. задачи, в к-ых требуется найти кратчайший путь на ориентированной сети, т. е. на системе ориентированных граф-ов [107]. Рас-им сначала простую

з6 (о выборе кратчайшего пути). Дана ориентированная сеть, содержащая N точек (узлов). Найти кратчайший путь из точки 1 в точку N, если задана матрица (a_{ij}) расстояний из *I в j*. Если какие-либо точки i и j не соединены дугами, то следует считать, что ств-ие $a_{ij} = \infty$, а $a_{ii} = 0$.

Р. Построим динамическую модель выбора кратчайшего пути. Для этого обз-им через Z^*_i мнм-ый из точки i в N. Пусть из i можно перейти в j, расстояние между этими точками равно a_{ij}.. Точка j должна выбираться т. о., чтобы путь из j в N был частью опт-го пути из j в N. Обз-им мнм-ый путь из j в N через Z^*_j. Тогда j выбирается из условия мнмз-и суммы $a_{ij} + Z^*_j$. Т. о., получаем ур-ие Беллмана:

$$Z^*_i = \min_{j \neq i} \left\{ a_{ij} + Z^*_j \right\} \tag{15}$$

Для реализации ур-ия (15) разделим условно точки сети на n мн-в по числу шагов 1, 2, … n. К мн-ву τ_0 отнесем точки, из к-ых можно попасть в N не более чем за n шагов, к τ_1 – точки, из к-ых можно попасть в N не более чем за n–1 шагов и т. д. Если $i \in \tau_{к-1}$, то будем считать, что $j \in \tau_к$. Тогда ур-ия (15) примут вид:

$$Z^*_к(i) = \min\{ a_{ij} + Z^*_{к+1}(j) \}. \\ i \in \tau_{k-1} \\ j \in \tau_k \tag{16}$$

Условным опт. решением на к-м шаге яв-ся точка j, в к-ую следует перейти из i ; обз-им ее через $U^*_к$ (i).

Точку 1 (единственную) отнесем к мн-ву τ_o; тогда $Z_{\min} = Z^*_1(1)$. Ур-ия (16) будем решать графически, начиная с конца. Точку N (единственную) отнесем к мн-ву τ_n: тогда $Z^*_{n+1}(N) = 0$. Мн-во τ_{n-1} состоит из точек *i*, из к-ых можно попасть в N не более чем один шаг, поэтому:

$$Z^*_n(i) = \min\{a_{ij}\} = a_{iN},\ U^*_n(i) = N. \\ i \in \tau_{n-1} \\ j = N$$

Аналогично для точек $i \in \tau_{n-2}$ имеем

$$\underset{\substack{i \in \tau_{n-2} \\ j \in \tau_{n-1}}}{Z^*_{n-1}(i) = \min}\left\{a_{ij} + Z^*_n(j)\right\} = \underset{\substack{i \in \tau_{n-2} \\ j \in \tau_{n-1}}}{\min}\left\{a_{ij} + a_{jN}\right\}; U^*_{n-1}(i) \text{ и т. д.}$$

В итоге условной оптз-и получим совокупность условных опт-ых решений $U^*_k(i)$, используя к-ые, посл-но опр-им точки, ств-ие опт-му маршруту.

п2. Найти кратчайший путь для сети, изображенной на рис. 7.

Р. Воспроизведем рис. 7, преобозначив A_i на i и проставив расстояния a_{ij} на рис. 8.

Отнесем к мн-ву τ_4 точки 4 и 6, из к-ых можно попасть в точку 9 не более чем за один шаг; к τ_3 – точки 2, 5 и 8 (не более два шага до 9); к τ_2 – точки 3 и 7 (не более три шага до 9); к τ_1 точку 1 (не более чем четыре шага до 9); к τ_0 – точку 0.

Условные опт. маршруты $U^*_k(i)$,, начинающиеся в i изб-им на рис. 8 пунктирной стрелкой, идущей из i в j, а условные мнм. пути от i до N запишем в кружке точки i.

Сначала найдем $Z_5^*(4)=8, Z_5^*(6)=4, U_5^*(\tau_4)=9$. Далее опр-им

$$Z_4^*(2)=\min\begin{cases}16 & \text{при } U_4(2)=9\\ 10+8 & \text{при } U_4(2)=4\end{cases},\ \text{т.е. } Z_4^*(2)=16,\ U_4^*(2)=9;$$

$$Z_4^*(5)=\min\begin{cases}16+8 \text{ при } U_4(5)=4\\ 15+4 \text{ при } U_4(5)=6\end{cases},\ \text{т.е. } Z_4^*(5)=19,\ U_4^*(5)=6;$$

$$Z_4^*(8)=\min\begin{cases}9+4 & \text{при } U_4(8)=6\\ 14 & \text{при } U_4(8)=9\end{cases},\ \text{т.е. } Z_4^*(8)=13,\ U_4^*(8)=6;$$

и т. д. Получим, что опт-ый путь равен $Z_1^*(0)=24$. Ств-й маршрут на рис. 8 проходит через точки 0, 7, 6, 9 (на рис.7 опт-ый маршрут проходит через точки A, A_7, A_6, B).

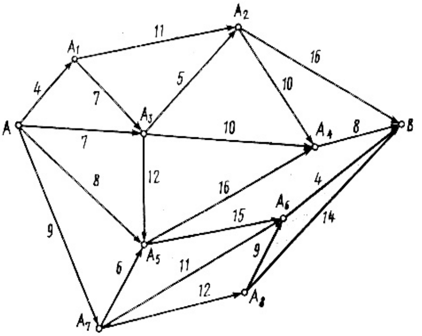


Рис. 7

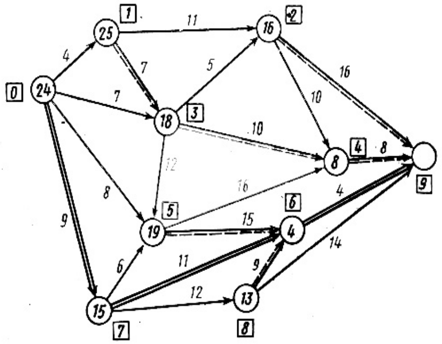


Рис. 8

зм2. Решение п2 можно было получить гораздо проще аналогичными процедурами к решениям з4 и з5, без использования материала 5^0. Однако здесь мы выбрали другой путь решения (хотя пришли почти к таким же процедурам), чтобы показать как можно формализовать эти процедуры как динамическую модель выбора кратчайшего пути. Решение п2 в два этапа: ход назад ($s_n \to s_o$) и ход перед ($s_o \to s_n$), как в з4, предоставляется читателю.

Теперь рас-им решение задачи по отысканию кратчайших расстояний от каждой точки до любой другой некоторой сети, используя процедуры решения з4 и з5. Такая задача возникает при решении транспортной (тр.) задачи по опр-ю мнм-ой суммарной стоимости C_{ij} ($i-$номер поставщика, $j-$ номер потребителя). Решение задачи по опр-ю кратчайших расстояний между поставщиками и потребителями по сущ-ей тр-ой сети яв-ся исходным этапом при решении таких экономических задач, как опт. закрепление потребителей за поставщиками, повышение производительности тр-та за счёт непроизводительного пробега и др.

Пусть на нек-ой пвх-ти взяты конечное число точек $P_i, P_2 ..., P_i ..., P_j, ..., P_n$, соединённых всевозможными непересекающимися отрезками линий *(P_iP_j)*, наз-ых звеньями или связями. Тогда совокупность точек и их связей наз. сетью (рис. 9). Сеть наз. дт-но связанной, если сущ-ет путь, состоящий из звеньев и соединяющий любые две точки из P_1, P_2, ..., P_n Сформулируем сд-ю

з7. Пусть задана дт-но связанная сеть, на к-ой каждому звену *(P_iP_j)* поставлено в ств-ие нек-ое дсв. неотц-ое число l_{ij} – его длина.

Найти кратчайшие расстояния по сети от каждой точки до всех остальных и ств-ие пути, по к-ым они проходят.

Р. Пронумерукм точки сети в любом порядке (н-р слева направо, сверху вниз) и укажем длину каждого звена. Две точки наз-ем соседними, если они непосредственно соединены связью. Это, н-р, P_1 и P_2, P_1 и P_3 и т.д. на рис. 9. Положим, что $l_{ij} = l_{ji}$. Нх-мо найти кратчайшие расстояния по сети от каждой точки до всех остальных, поэтому разобьем процесс на n этапов, а каждый этап – на n-1 шагов. Этап заключается в отыскании кратчайших расстояний и маршрутов, по к-ым они проходят, от какой-нибудь одной точки, заранее фиксированной, до всех остальных. Шаг состоит в отыскании кратчайшего расстояния от фиксированной точки до каждой из остальных через соседних, кратчайшие расстояния до к-ых уже опр-ны.

Задачу решим методом (с одн-ми процедурами к процедурам решения **з4** и **з5**) ДП. При этом связь, через какую проходит кратчайшее расстояние, после каждого шага отметим стрелкой. Для удобства точки обозначим кружками.

Приведем алгоритм решения задачи [55]. 1. Фиксируем точку P_i, до к-ой нх-мо рассчитать кратчайшее расстояние от всех остальных, и над кружкой обозначим эту точку, записываем нуль, т.к. расстояние от точки P_i до нее самой равно нулю. Это число, к-ое для других точек отлично от нуля, назовем характеристикой (хркс.) точки.

2. Опр-ем соседние точки по отношению к фиксированной. Около (над) кружках, обз-щих эти точки, записываем их хркс-ки $C_{ij=}0+l_{ij}$ и на связях ставим стрелки, направленные в точку P_i.

3. Отмечяем точку к P_i символом √, обз-щим, что операции над ней закончены.

4. Переходим к любой соседней с P_i точке, для к-ой хркс-ка уже найдена. Пусть эта точка P_i'. Опр-им соседние с ней точки и рассчитаем для них хркс-ки как сумму $C_{ij} + 1_{ji}{}' = C_{ji}{}'$.

5. Точку P_i' отмечаем знаком √ и переходим к п. 4 алгоритма, пока не анализируем все соседние точки расв-ой точки P_i.

6. При опр-и $C_{ji}{}'$ для соседних точек с P_i' может оказаться, что для некоторых из них C_{ij} уже рассчитаны. В этом случае $C_{ji}{}'$ сравниваем с C_{ij}. Если $C_{ji}{}' \geq C_{ij}$ для всех таких точек, то C_{ij} остаются без изменения; точку P_i' отмечаем знаком √ и переходим к п. 4. Если для нек-ой точки $C_{ji}{}' < C_{ij}$, то C_{ij} заменяем

на C_{ji}', ств-но изменяется связь (поставим новую стрелку, вычеркнув старую), через к-ую проходит кратчайшее расстояние. Точку P_i' отмечаем знаком √ только в том случае, если точка, у к-ой изменилась хркс-ка не была ранее отмечена.

7. Если изменилась хркс. отмеченной точки, пересчитываем хрк-ки точек, соседних с ней, а затем отмечаем точку P_i' и переходим п.4.

8. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будут отмечены все точки. После этого выписываем кратчайшие расстояния (хрк-ки точек) и маршруты, по к-ом они проходят. На этом первый этап заканчивается.

9. Переходим к сд. этапу, начиная с п.1 алгоритма. Расчет продолжаем до тех пор, пока не будут опр-ны кратчайшие расстояния от всех точек до каждой из них.

п3. На рис. 10 задана дт-но связанная сеть, где кружки означают точки; цифры, стоящие в кружках,– их номера; прямолинейные отрезки – связи; числа, стоящие над связями,– их длину (рис.10); числа, стоящие возле точек,– их хрк-ки, а стрелки указывают маршрут, по к-му проходит кратчайшее расстояние (рис.11).

Найти кратчайшее расстояние от всех точек до точки 8.

Р. Записываем возле точки 8 ее хрк-ку – нуль. Опр-им хрк-ки точек 4, 6 и 7 (ств-но 9, 18 и 27), соседних с ней, и стрелкой возле каждой точки указываем направление кратчайшей связи. Точку 8 отмечаем знаком √.

Рс-им точку 7. Опр-им хрк-ки точек 5, 6 и 8, соседних с ней. Хрк-ку точки 5, равную 39, запишем около нее и укажем стрелкой направление. Для точек 6 и 8 новые хрк-ки ств-но равны39>18, 54>0.Сд-но, ранее опр-ые для них хрк-ки оставляем без изменения. Точку 7 отмечаем знаком√.

Ра-им точку 6. Соседними яв-ся точки 2, 4, 5, 7 и 8. Хркс-ку точки 2, равную 23, запишем возле нее и укажем направление. Для точки новая хркс. 26>9, для точки 5 хркс-ка 26<39. Поэтому запишем новую хркс. и изменим направление кратчайшей связи. Для точек 7 и 8 новая хркс. ств-но равны 30>27 и 36>0, т.е хркс-ки оставим без изменения. Точку 6 отметим значком √.

Рас-им точку 4 и ее соседние точки 1,6 и 8. Хркс-ку точки 1, равную 11, запишем около нее и укажем направление. Для точки 6 новая хрк.17<18. Изменяем хркс-ку и направление для точки 6. Т.к. точка 6 отмечена знаком √, то пересчитываем хркс-ки точке 2, 5, 7 и 8, соседних с ней, и в случае нх-ти изменяем направление. Для точки 2 новая хркс. 22<23, сд-но, изменяем хркс-ку; хркс-ка точки 5 равна 25<26 – изменяем хркс-ку; для точек 7 и 8 ств-но имеем: 29>27 и 35>0 – хркс-ки не меняем, точку отмечаем знаком √.

Рас-им точку 5 и соседние точки 3,6 и 7. Хркс-ку точки 3, равную 31, запишем около нее и укажем направление. Хркс-ки точек 6 и 7 остаются без изменения. Точку 5 отмечаем знаком √.

Хрк-ки точки и соседние точки 2 и 5 остаться без изменения. Отмечаем точку 3 знаком √.

Рас- им точку 2 и соседние с ней точки 1, 3 и 6. Хркс-ки точки 1 и 6 остаются без изменения. Для точки 3 новая хркс. 26<31, сд-но, изменяем хрк-ку и направление, а т. к это точка уже отмечена, то пересчитываем хркс-ку соседний с ней точки 5. Хрк-ка точка 5 осталось без изменения. Отмечаем точку 2 знаком √.

Рас-им точку 1 и соседние точки 2 и4. Для точки 2 новая хркс. 13<22 – изменяем хркс-ку и направление. Точка 2 ранее отмечена, поэтому пересчитываем хркс-ки соседних с ней точек 3 и 6. Для точки 3 новая хркс. 17<26 – изменяем хркс-ку и пересчитываем хркс-ку точки 5. Т. к новая хркс. этой точки 23<25, то изменяем хркс-ку и направление точки 5 и перечитываем хркс-ки точек 6 и 7. Они остались без изменения. Хркс-ка точки 6 остаётся без изменения и при пересчёте со стороны точки 2. Для точки 4 хрк-ка не изменяется. Точку I отмечаем знаком √.

Все точки отмечены, поэтому первый этап закончен. Получено опт. решение: вел-а окончательной хрк-ки ств-ет кратчайшему расстоянию до точки 8, стрелка указывает соседнюю точку, через к-ю это расстояние проходит.

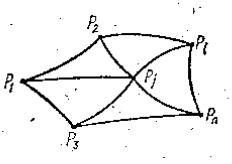


Рис. 9

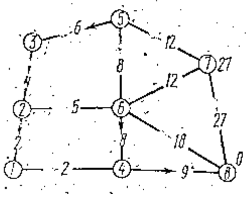


Рис. 10

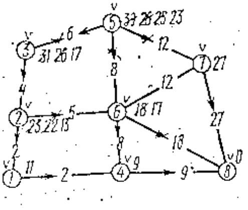


Рис. 11

Записываем опт. решение в табл. 3 и переходим к очередному этапу.

Процесс продолжает до тех пор, пока не будут рассчитаны кратчайшие расстояния от всех точек до каждой из них. Выч-ия значительно упрощается, если длины отрезков, изб-щих связи, задавать в одном и том же масштабе (что обычно имеет место при решении конкретных экономических задач). Если задача содержит более 50 точек, то её следует решать с помощью ЭВМ.

Таблица 3

Номера точек	Крат. расст	Маршут
1-8	11	1-4-8
2-8	13	2-1-4-8
3-8	17	3-2-1-4-8
4-8	9	4-8
5-8	23	5-3-2-1-4-8
6-8	17	6-4-8
7-8	27	7-8
8-8	0	8

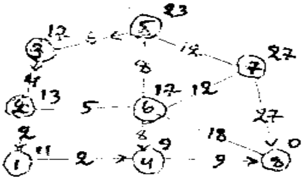


Рис. 12

зм3. Как уже говорилось выше, методы ДП могут иметь мн-во различных вариантов. Так п3 можно решать гораздо проще, используя этапы ход назад ($S_n \rightarrow S_o$), при этом двигаясь по самым мнм-ым значениям пути, и ход перед ($S_o \rightarrow S_n$). На рис. 12 приведено это решение.

Рассмотрим точку 8 (её хркс. равна 0) с соседними точками 4, 6 и 7. Начинаем с точки 4 (её хрк. $9 = \min\{9,18,27\}$), из которой кратчайшим путём попадём в 8 и указываем этой путь стрелкой, записываем хркс-ку 9 возле кружка 4.

Из точки 6 (её хрк. 17 = 8 + 9 $\leq$ 18) через 4 переходим в 8 и указываем направление. В точку 8 переходим из 7 (её харс-ка 27) и стрелкой указываем направление. В точку 4 переходим из 1, где пишем хрк-ку II и указываем направление. В точку 1- из 2 (хркс. 13, фиксируем направление). В точку 2- из 3 (хркс. 17 и указываем направление). К точке 3 приходим из точки 5 (т.к её хркс. 17 + 6 = 23 = $\min\ \{23,25,39\}$) и указываем направление.

Теперь ходом перед (So$\longrightarrow$ Sn) по указанным стрелкам получаем (рис. 12) тот же результат, как показано на рис. 11 и в табл. 3.

ЛЕКЦИЯ 18

5.2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Оптимальное распределение инвестиций. Задачи, затронутые в 2° и 3° из 5.1 и решаемые (так же др. задачи) методом функциональных ур-й, рас-им более подробно.

з1. Требуется распределить имеющиеся B единиц средств среди n предприятий (прд), доход $g_j(x_j)$ от к-ых в зависимости (зв). от кол-ва вложенных средств x_j опр-ся матрицей (nxn) приведенной в табл.1, так, чтобы суммарный доход со всех прд-й был бы мкс-ым.

Таблица1

g x	g_1	g_2	…	g_j	…	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$	…	$g_j(x_1)$	…	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$	…	$g_j(x_2)$	…	$g_n (x_2)$
…	…	…	…	…	…	…
x_j	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	…	$g_j(x_j)$	…	$g_n (x_j)$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	…	$g_j(x_n)$	…	$g_n (x_n)$

Запишем мт-ю модель задачи, найти

$$\max\ F(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j\ g(x_j), \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = B, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Р. Разобьем процесс на n шагов и будем на каждом k-м шаге оптз-ть инвестирование не всех прд-й, а только прд-й с k-го по n-е, для к-ых остаются средства $c_k \leq B,$ т.к. в остальные (с первого по k-1) тоже вкладываются средства. Вел. c_k яв-ся пер-ой состояния системы, а вел. x_k средств наз. пер-ой управления (упл.) на k-м шаге. В качестве фк-и Беллмана $F_k(c_k),$ на к-м шаге можно выбрать мкс-но возможный доход, к-ый можно получить с прд-й с k-го по n-е при условии, что на их инвестирование осталось c_k средств.

На первом шаге условной оптз-и (ходом назад $S_n \to S_0$) при $k=n$, фк-я (ур-ие) Беллмана представляет собой прибыль только с n-го прд-ия, т.е. $F_n(c_n)=g_n(c_n)$ и $x_n=c_n, 0 \leq c_n \leq B.$

На каждом последующем шаге для выч-ия фк-и Беллмана нх-мо использовать результаты предыдущего шага. Пусть на k-м шаге для инвестирования прд-й с k-го по n-е осталось c_k средств $(0 \le c_k \le B)$. Тогда от вложения в k-е прд-ие х$_к$ средств будет получена прибыль $g_к(c_к)$, а на инвестирование отальных прд-й (с k-го по п-е) останется $c_{к+1} = (c_к - x_к)$ средств. Мкс-но возможный доход, к-ый может быть получен с прд-й с k-го по п-е, будет равен:

$$F_к\left(c_к\right) = \max_{x_k \le c_k}\left\{g_к(x_к) + F_{к+1}(c_к - x_к)\right\}, к = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Мкс-ум выражения (4) достигается на нек-ом значении х$_к$ к-ое яв-ся опт-ым управлением на k-м шаге для состояния системы S_k. Действуя т.о., можно опр-ть фк-и Беллмана и опт-ые управления до шага $k = 1$.

Значение фк-и Беллмана $F_1\left(c_1\right)$ представляет собой мкс-но возможный доход со всех прд-й, а значения x_1^*, на к-ом достигается мкс. дохода, яв-ся опт-ым кол-ом средств, вложенных в первое прд-ие.

Далее на этапе безусловной оптз-и (ходом перед $S_0 \to S_n$) для всех последующих шагов выч-ся вел. $c_k = \left(c_{k-1} - x_{k-1}\right)$ и опт-ым упл-ем на k-м шаге яв-ся то значения x_k, к-ое обеспечивает мкс. дохода при ств-ем состоянии системы S_k

п1. На развитие трех прд-й выделено 5 млн.руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое прд-ие, заданная значением нелин-ой фк-и $g_j(x_j)$, представленной в табл. 2. Нх-мо распрделить выделенные средства между прд-ми т.о., чтобы получить мкс-ый суммарный доход.

Таблица 2

x	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Таблица 3

x_3 / c_3	0	1	2	3	4	5	$F_3\left(x_3\right)$	x_3^*
0	0						0	0
1		2,8					2,8	1
2			5,4				5,4	2
3				6,4			6,4	3
4					6,6		6,6	4
5						6,9	6,9	5

Р. I этап (ход назад $S_n \to S_0$). Условная оптз-ия.

1-й шаг: $k = 3$. Предположим, что все средства в кол. $x_3 = 5$ млн. руб. отданы третьему прд-ю. В этом случае мкс-ый доход (табл.3) составит $g_3(x_3) = 6,9$ млн. руб., сд-но: $F_3(x_3) = g_3(x_3)$.

2-й шаг: $k = 2$. Опр-ем опт-ю стратегию при распределении денежных средств между вторым и третьим прд-ми. При этом рекуррентное стн-ие Беллмана имеет вид

$F_2(c_2) = \max\limits_{x_2 \le c_2}\left\{ g_2(x_2) + F_3(c_2 - x_2)\right\}$, на основе к-го составлена табл. 4

Таблица 4

x_2 / c_2	0	1	2	3	4	5	$F_3(x_3)$	x_2^*
0	0+0						0	0
1	0+2,8	2+0					2,8	0
2	0+5,4	2+2,8	3,2+0				5,4	0
3	0+6,4	2+5,4	3,2+2,8	4,8+0			7,4	1
4	0+6,6	2+6,4	3,2+5,4	4,8+2,8	6,2+0		8,6	2
5	0+6,9	2+6,6	3,2+6,4	4,8+5,4	6,2+2,8	6,4+0	10,2	3

3-й шаг: $k=1$. Опр-ем опт-ю стратегию при распределении денежных средств между первым и двумя другими прд-ми по фм-е

$$F_1\left(c_1\right)=\max_{x\le c_1}\left\{g_1(x_1)+F_2(c_1-x_1)\right\}$$

на основе которого составлена табл. 5

Таблица 5

x_1 / c_1	0	1	2	3	4	5	$F_1(c_1)$	x_1^*
0	0+0						0	0
1	0+2,8	2,2+0					2,8	0
2	0+5,4	2,2+2,8	3+0				5,4	0
3	0+7,4	2,2+5,4	3+2,8	4,1+0			7,6	1
4	0+8,6	2,2+7,4	3+5,4	4,1+2,8	5,2+0		9,6	1
5	0+10,2	2,2+8,6	3+7,4	4,1+5,4	5,2+2,8	5,9+0	10,8	1

II этап (ход перед $S_0 \to S_n$). Безусловная оптз-ия.

1-й шаг. По данным из табл. 5 мкс-ый доход при распределении 5 млн. руб. между тремя прд-ми составляет: $c_1=5,\ F_1(5)=10,8$. При этом первому прд-ю нужно выделить $x_1^*=1$ млн. руб.

2-й шаг. Опр-ем вел-у оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю второго и третьего прд-й: $c_2=c_1-x^*_1=5-1=4$ млн. руб. По данным табл. 4 находим, что опт-ый вариант распределения денежных средств размером 4 млн. руб. между вторым и третьим прд-ми составляет: $F_2(4)=8,6$ при выделении второму прд-ю $x^*_2=2$ млн. руб.

3-й шаг. Опр-ем вел-у оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего прд-ия: $c_3=c_2-x_2^*=4-2=2$ млн. руб. По данным табл. 3 находим: $F_3\left(2\right)=5,4$ и $x_3^*=2$ млн. руб.

Т.о., опт-ый план инвестирования прд-й: $x^*=(1,2,2)$, к-ый обеспечивает мкс-ый доход, равный $F(5)=g_1(1)+g_2(2)+g_3(2)=2,2+3,2+5,4=10,8$ млн. руб.

2^0. ДП при непрерывных переменных. В отличии от др. вычт-ых методов ДП больше всего подходит для задач, где пер-ые – дискретны (дк). В то же время оно может быть приспособлено к задачам с непр-ми пер-ми (в данном и 3^0 пунктах ограничимся приведением таких задач к рекуррентным стн-ям). Для этого непр-ые пер. квантуют, причем шаг дискретизации выбирают из конкретного содержания задачи.

Рас-им, как решается задача о распределении ресурсов при непр-ых пер. Опр-им посл-ть фк-й состояния.

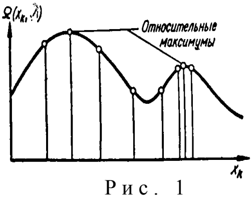


Рис. 1

$$\omega_k(\lambda) = \max \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j) \qquad (5)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le \lambda, k = \overline{1,n}$$

Основное рекуррентное стн. имеет вид:

$$\omega_k(\lambda) = \max_{0 \le x \le \lambda / a_k} \left[f_k(x_k) + \omega_{k-1}(\lambda - a_k x_k) \right],\ k = \overline{2,n} \qquad (6)$$

Главное отличие, по сравнению со случаем дк-ых пер. x_1, ..., x_n возникает в ходе выч-ия мкс-ма по x_k и способа построения таблицы значений $\omega_k(\lambda)$.

Рас-им задачу опр-ия $\omega_k(\lambda)$ при при фиксированном λ.

Обз-им $$\Omega_k(x_k,\lambda) = f_k(x_k) + \omega_{k-1}(\lambda - a_k x_k). \qquad (7)$$

Тогда $$\omega_k(\lambda) = \max \Omega_k(x_k,\lambda).$$

$$0 \le x_k \le \frac{\lambda}{a_k}.$$

Если $\omega_{k-1}(\lambda)$ известна, то значения фк-и $\Omega_k(x_k,\lambda)$ опр-ны для всех x_к. Предположим, что график $\Omega_k(x_k,\lambda)$ такой, как на рис. 1. Для опр-ия $\omega_k(\lambda)$ следует отыскать все отс-ые мкс-ы и выбрать абс-ый (глобальный).

Для этого фк-ю $\Omega_k(x_k,\lambda)$ табулируют. При табулировании целесообразно сначала применять сетку с более грубым шагом, а в окрестности «подозрительных точек перейти на более мелкий шаг».

Фк-и $\omega_k(\lambda)$ приходится табулировать при всех допустимых значениях λ, т.к. заранее неизвестно, какое из них может понадобиться при вычеслении $\omega_{k+1}(\lambda)$.

Задача выч-ия $\omega_k(\lambda)$ значительно упрощается при условии, что все $f_j(x_j)$ – выпуклы или вогнуты. Можно показать, что из выпуклости (вогнутости) всех $f_j(x_j)$, $j = \overline{1,n}$ следует выпуклость (вогнутость) $\omega_k(\lambda)$.

Случай 1. Все фк-и $f_j(x_j)$ – выпуклы. Поскольку $\omega_{k-1}(\lambda)$ – выпуклая фк. по x, то и $\omega_{k-1}(\lambda - a_k x_k)$ выпуклая отс-но x_k и, сд-но, $\Omega_k(x_k,\lambda) = f_k(x_k) + \omega_{k-1}(\lambda - a_k x_k)$

также выпукла по x_k. Нас интересует $\max\ \Omega_k\left(x_k,\lambda\right)$ при фиксированном λ. Как известно, мкс. выпуклой фк-и на замкнутом огр-ом мн-ве достигается в одной из крайних точек. В данном случае такими точками яв-ся $x_k=0$ и $x_k=\dfrac{\lambda}{a_k}$

Итак, в случае выпуклости всех $f_j\left(x_j\right)$, $j=\overline{1,n}$ для нахождения $\max\limits_{0\le x_k\le\frac{\lambda}{a_k}}\Omega_k\left(x_k\lambda\right)$ дт-но проверить только крайние точки $x_k=0$ и $x_k\le\lambda/a_k$.

Случай 2. Все фк-и $f_j(x_j)$ – вогнуты. В таком случае $\Omega_к(x_к,\Lambda)$ при каждом фиксированном Λ есть вогнутая фк. от $x_к$, сд-но, всякий ее отс-ый мкс-ум явся также глобальным.

3^0. ДП для задач с несколькими ограничениями и переменными. Задача распределения ресурсов при двух огр-ях. Пусть имеются два огр-ия: $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\le b_1,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\le b_2$. Поскольку в задаче имеются два вида ресурсов (b_1 и b_2), то нх-мо вести два параметра состояний Λ_1 и Λ_2.

Обз-им через

$$\omega_к(\Lambda_1,\Lambda_2)=\max_{x_1,\dots x_n}\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j)\qquad(8)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{к}a_{1j}x_j\le\lambda_1,\sum_{j=1}^{к}a_{2j}x_j\le\lambda_2,x_j\ge0(j=\overline{1,к}).\qquad(9)$$

Запишем основное рекуррентное стн-ие

$$\omega_k\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\max_{0\le x_к\le\delta_к}\left\{f_к(x_К)+\omega_{к-1}(\lambda_1-a_{1к}x_к,\lambda_2-a_{2к}x_к)\right\}$$

где

$$\delta_к=\min\left\{\left[\frac{\lambda_1}{a_{1к}}\right],\left[\frac{\lambda_2}{a_{2к}}\right]\right\}.$$

Одновременно с $\omega_k=\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$ опр-им и опт. значение $\overline{x_к}(\lambda_{1,}\lambda_2)$. На n-ом шаге опр-ем $\omega_n(b_1,b_2)$ и одновременно $x_n^*(b_1,b_2)$. Опт-ые значения остальных пер. $x_{n-1}^*,x_{n-2}^*,\dots x_1^*$, можно получить из табл. предыдущих шагов при помощи стн-й: $x_{n-1}^*=\overline{x}_{n-1}(b_1-a_{1n}x_n^*,b_2-a_{2n}x_n^*)$, $x_{n-2}^*=\overline{x}_{n-2}(b_1-a_{1n}x_n^*-a_{1n-1}x_{n-1}^*,$ $b_2-a_{2n}x_n^*-a_{2n-1}x_{n-1}^*)$ и т. д.

Задача с двумя переменными управления. Рас-им предыдущую задачу в несколько иной постановке, когда имеется две пер-ые упл-ия x_j, y_j и два типа ресурсов, а доход $f_j(x_j, y_j)$ есть фк-я количеств обоих типов ресурсов, распределяемых на данном шаге. Пусть требуется найти

$$\max \mathbb{Z} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j, y_j)$$

при условиях $$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \le b_2 .$$

В ств-и двум видам ресурсов (b_1, b_2) введем два параметра состояний λ_1, λ_2 Опр-им фк-ю состояния

$$\omega_k\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \max \sum_{j=1}^{\kappa} f_j(x_j, y_j)$$

$$x_1 ..., x_k$$

$$y_1 ..., y_k$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} = a_{1j} x_j \le \lambda \ , \sum_{j=1}^{\kappa} a_{2j} y_j \le \lambda_2$$

Основное рекуррентное стн. имеет вид

$$\omega_\kappa(\lambda_1, \lambda_2) = \max_{x_k, y_k} \left[f_\kappa\left(x_\kappa, y_\kappa\right) + \omega_{\kappa-1}(\lambda_1 - a_{1\kappa} x_\kappa, \lambda_2 - a_{2\kappa} y_\kappa)\right], \ k = \overline{2, n},$$

где max по x_κ и y_κ находят перебором всех возможных комбинаций. Н-р, если x_κ и y_κ могут принимать по 10^2 значений, то для нахождения ω_κ=(λ_1, λ_2) при фиксированных λ_1 и λ_2 следует перебрать 10^4 значений фк-й $\Omega_\kappa(x_\kappa, y_\kappa; \lambda_1, \lambda_2) = f_\kappa(x_\kappa, y_y) + \omega_{\kappa-1}(\lambda_1 - a_{1\kappa} x_\kappa, \lambda_2 - a_{2\kappa} x_\kappa)$.

В случае трех параметров λ_1, λ_2, λ_3 при тех же предположениях требуется выч-ть 10^6 значений фк-й $\omega_k\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$. Без специальных прб-й задачу, содержащую более трех параметров состояния, невозможно решить методом ДП даже на сверхбыстродействующих ЭВМ из-за огромного объема выч-й.

Итак, наиболее серьезным препятствием для практического применения ДП оказывается число параметров задачи. Это в свое время заставило Р. Беллмана заявить о так наз-ом «проклятии размерности». Поэтому рас-им нек-ые способы понижения размерности задачи.

4^0. Применение метода множителей Лагранжа для понижения размерности задачи. Метод Лагранжа, широко применяемый при решении задач НП, может быть применен для понижения размерности ДП. Рас-им такую задачу. Найти

$$\max \mathrm{Z} = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \tag{10}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2 \ . \tag{12}$$

От задачи (10) перейдем к задаче с одним огр-ем

$$\max \mathrm{Z}_1 = \max \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) - \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \tag{13}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1,\ x_j \geq 0\ . \tag{14}$$

Задача (13) имеет только один параметр состояния и потому несравненно проще исходной.

Параметр γ – множитель Лагранжа, к-ый играет роль цены на второй ресурс (b_2). Априори вел. γ неизвестна, и потому задачу (13) приходится решать при нескольких значениях γ. Опт. решение (13) будет зависеть от $\gamma : x_{j\ \text{опт}} = x_j^0\left(\gamma\right), j = \overline{1,n}.$. Если найденное решение $x^0\left(\gamma\right)$ уд-ся огр-ю (12), к-ое было отброшено, то оно яв-ся искомым решением задачи (10). В противном случае γ нужно скорректировать. В част., если окажется, что $\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^0\left(\gamma\right) > b_2$, то следует увеличить γ (т.к. по второму ресурсу имеется перерасход, то цену на него нх-мо увеличить). В противном случае значение γ требуется уменьшить.

Для быстрого опр-ия искомого γ применяют метод посл-ых прж-й, к-ый основан на инп-ой фм-е (15). Если уже опробованы два значения γ_1, γ_2 и для них найдены опт. решения $x_1^*\left(\gamma_1\right),\ x_2^*\left(\gamma_2\right)$, то на сд-ем шаге γ_3 оценивают из фм-ы

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{h_2 - h_1}(b_2 - h_1) + \gamma_1 \tag{15}$$

где

$$h_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^*\left(\gamma_2\right),\ h_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^*\left(\gamma_1\right) \tag{16}$$

Покажем, что если опт. решение задачи (13) x^* уд-ет условию (12), то x^* – опт-но и для задачи (10).

Предположим, что это неверно, и обз-им через x^0 решение задачи (10). Тогда

$$\mathrm{Z}\left(x^0\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j^0\right) \geq \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j^*\right) = \mathrm{Z}\left(x_j^0\right)$$

но, т.к. x^* – опт. решение для (13), то

$$\mathrm{Z}\left(x^*\right) = \mathrm{Z}\left(x^*\right) - \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^* \geq \mathrm{Z}\left(x^0\right) - \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^0$$

А поскольку $\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^* = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} x_j^0$, то должно быть $\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j^*\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j^0\right)$ ■

Основное рекуррентное стн. для задачи (13) имеет вид:

$$\omega_k(\lambda) = \max_{x_k}\left[f_k(x_k) - \gamma a_{2k}x_k + \omega_{k-1}(\lambda - a_{2k}x_k)\right] \tag{17}$$

Можно показать, что при возрастании γ от 0 до ∞ вел. $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j(\gamma)$ убывает монотонно [117]. Это важное св. значительно облегчает поиск γ при решении конкретных задач.

Теперь рассмотрим более общий случай огр-й. Найти

$$\max_{\{x_j\}\geq 0}\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq C_i,\ i = \overline{1,m};\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1,n}).$$

Вводя $k < m$ множителей Лагранжа, задачу можно сформулировать так. Найти

$$\max(\sum_{j=1}^{n} R_j(x_j) - \sum_{i=1}^{k}\gamma_i\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j), \tag{18}$$

при остальных m-к огр-ях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq C_i,\ i = \overline{k+1,m} \tag{19}$$

Т.о., задача сводится к опр-ю фк-й от m-к пер-ых вместе с поиском по k-мерному пр-ву пер-ых γ_i, уд-их первым k огр-ям. Исходная многомерная задача заменяется посл-ю задач значительно меньшей размерности, что позволяет сущ-но снизить требования к объему памяти ЭВМ.

5^0. Решение транспортной задачи методом ДП. Рас-им транспортную (тр.) задачу с двумя (m = 2) пунктами производства A_1, A_2 и n пунктами потребления $\text{B}_1,...,\text{B}_n$.

Обз-им через x_{ij} кол-во продукта, перевозимого из A_i в B_j, $y_{ij}(x_{ij})$ – стоимость перевозки по маршруту A_iB_j, $i = 1,2,\ j = \overline{1,n}.$ Тогда тр. задача формулируется так. Найти

$$\min_{\{x_{ij}\}}\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_{ij}) \tag{20}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ \ (i = 1,2) \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = b_j\ \ (j = \overline{1,n}). \tag{22}$$

Очевидно, если $g_{ij}(x_{ij}) = a_{ij}x_{ij}$, то задачи легко решаются методом ЛП (см. 1^0:3.5). Однако здесь мы рас-им случаи, когда $g_{ij}(x_{ij})$ – нелин. фк-и, и поэтому применим метод ДП.

Покажем, что несмотря на большое число огр-й, фк-ю состояния процесса можно списать одним параметром. Т.к. $x_{2j} = b_j - x_{1j}$, то ясно, что опр-ив x_{1j}, однозначно найдем и x_{2j}.

Рас-им случай, когда кол-во продуктов в пунктах A_1 и A_2 составляет λ_1 и λ_2 единиц. Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то $\lambda_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j - \lambda_1$, и поэтому λ_1 есть единственный параметр состояния.

Введем посл-ть фк-й

$$\omega_k(\lambda_1) = \min_{\{x_{ij}\}} \sum_{j=1}^{n} g_{1j}(x_{1j}) + g_{2j}(x_{2j}), \tag{23}$$

где min берут по всем $\{x_{ij}\}$, уд-им условиям:

$$\sum_{j=1}^{k} x_{1j} = \lambda_1,\ \sum_{j=1}^{k} x_{2j} = \sum_{j=1}^{k} b_j - \lambda_1,\ x_{1j} + x_{2j} = b_j,\ j = \overline{1,k}.$$

Основное рекуррентное стн. тогда прб-ся:

$$\omega_k(\lambda_1) = \min_{x_{1k}} \left[g_{1k}(x_{1k}) + g_{2k}(b_k - x_{1k}) + \omega_{k-1}(\lambda_1 - x_{1k}) \right], \tag{24}$$

где x_{1k} – уд-ет условию $0 \le x_{1k} \le \min \{\lambda_1, b_k\}$.

При проведении выч-й фк. $\omega_k(\lambda_1)$ должна табулироваться для всех $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_j$. На последнем шаге (при k = n) находим x_{1n}^* и $x_{2n}^* = b_n - x_{1n}^*$. Остальные x_{1n}^* находим посл-но из стн-й

$$x_{1}^{*}{}_{,n-j} = \bar{x}_{1}{}_{,n-1}\ (a_1 - \sum_{u=0}^{j-1} x_{1}^{*}{}_{,n-u}),\ j = \overline{1, n-1}.$$

Рас-им теперь ту же задачу, но с тремя пунктами производства A_1, A_2, A_3 и n пунктами потребления. Фк-я состояния здесь опр-ся так:

$$\omega_\kappa(\lambda_1, \lambda_2) = \min_{x_{ij} \ge 0} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(x_{ij}),\ \kappa = \overline{1,n}. \tag{25}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{\kappa} x_{1j} = \lambda_1,\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = \lambda_2,\ \sum_{j=1}^{n} x_{3j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \lambda_1 - \lambda_2, \tag{26}$$

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = b_j,\ j = \overline{1,n} \tag{27}$$

Рекуррентное стн. имеет вид:

$$\omega_k(\lambda_1,\lambda_2)=\min_{x_{1k}x_{2k}}\{q_{1k}(x_{1k})+q_{2k}(x_{2k})+q_{3k}(b_k-x_{1k}-x_{2k})+\omega_{k-1}(\lambda_1-x_{ik},\lambda_2-x_{2k})\} \tag{28}$$

при условиях

$$0\le x_{1k}\le\min(\lambda_1,b_k),\ 0\le x_{2k}\le\min\left(\lambda_2,b_k\right),\ x_{1k}+x_{2k}\le b_k,$$

$$x_{3k}=b_k-x_{2k}-x_{1k}\le\sum_{j=1}^{k}b_j-\lambda_1-\lambda_2 \text{ или } x_{1k}+x_{2k}\ge\lambda_1+\lambda_2-\sum_{j=1}^{k-1}b_j.$$

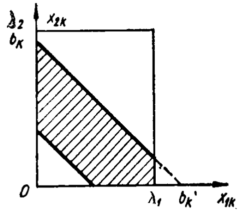


Рис. 2

Обл., в к-ой отыскивается мкс., показана на рис. 2. Фк-и $\gamma_k(\lambda_1,\lambda_2)$ должны табулироваться для всех целых λ1 и λ2, таких, что $\lambda_1+\lambda_2\le\sum_{j=1}^{k}b_j$.

Для сокращения размерности задачи применим метод множителей Лагранжа. Допустим временно, что нет огр-й на кол-во продукта, отправляемого из пункта A$_2$, а вместо этого каждой отправляемой отсюда единице продукции приписана цена γ. Решаем задачу вида

$$\mathbb{Z}=\min\sum_{j=1}^{n}\left[g_{1j}\left(x_{1j}\right)+g_{2j}\left(x_{2j}\right)+g_{3j}\left(x_{3j}\right)+\gamma\sum_{j=1}^{n}x_{2j}\right] \tag{29}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1j}=a_1,\ \ x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}=b_j,\ x_{ij}\ge0\ \left(i=\overline{1,3},j=\overline{1,n}\right)$$

для различных значений λ, пока не будет найдено такое, что опт. решение уд-ет $\sum_{j=1}^{n}x_{2j}=a_2$. Тогда автоматически уд-ся и третье огр-ие $\sum_{j=1}^{n}x_{3j}=a_3$.

Для решения задачи вводим фк-ию состояния

$$\omega_k\left(\lambda\right)=\min_{\{x_{ij}\}}\sum_{j=1}^{k}\left[q_{1j}\left(x_{1j}\right)+q_{2j}\left(x_{2j}\right)+\lambda x_{2j}+q_{3j}\left(x_{3j}\right)\right], \tag{30}$$

где

$$\sum_{j=1}^{k}x_{1j}=\lambda,\ \ x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}=b_j,\ \ j=\overline{1,n}\,.$$

Основное рекуррентное стн. ДП можно записать:

$$\omega_k\left(\lambda\right)=\min_{x_{1k},x_{2k}}\left[q_{1k}\left(x_{1k}\right)+q_{2k}\left(x_{2k}\right)+\lambda x_{2k}+q_{3k}\left(b_k-x_{1k}-x_{2k}\right)+\omega_{k-1}\left(\lambda-x_{1k}\right)\right],k=\overline{2,n}, \tag{31}$$

где $x_{1k}\ge0,\ x_{2k}\ge0,\ \mathrm{x}_{1\mathrm{k}}+x_{2k}\le b_k$.

Т.о., тр. задача с тремя пунктами производства и n пунктами потребления может быть сведена к посл-ти n шаговых задач с единственным параметром состояния.

6^0. Метод последовательных приближений. Одним из способов уменьшения размерности задачи яв-ся метод посл-ых прж-й. Схема метода состоит в сд-ем. Для заданного функционального ур-ия угадывается нач. прж-ое решение.

Если предполагаемое решение не яв-ся истинным, то делается поправка, к-ая дает лучшее прж. Пусть нх-мо решить уравнение T(u)=0 и пусть S(u) легче решить, чем исходное. Тогда исходное ур. записывается в виде

$$S(u)=S(u)-T(u).$$

Пусть за первые прж. u_0 взято решение ур-я S(u)=0. Тогда сд. прж-ие u_1 опр-ся так:

$$S(u_1)=S(u_0)-T(u_0),$$

а (n+1) – прж-ие находят из стн-ия

$$S(u_{n+1})=S(u_n)-T(u_n).$$

Если S(u) выбрано правильно, а T(u) обладает ствщ-ми св-ми, то посл-ть $\{u_n\}$ будет сходиться к решению ур-я T(и)=0.

Функциональное ур. ДП записывается так:

$$\omega(\lambda)=\max[f(x,\lambda)+\omega(T\{x,\lambda\})], \tag{32}$$

где λ – параметр состояния, x – решение (стратегия).

Если найти точное аналитическое решение x(λ) невозможно, то задаются нач-ой фк-ей $\omega_0(\lambda)$, а затем опр-ют посл-ть фк-й $\omega_1(\lambda),\omega_2(\lambda),...,\omega_n(\lambda)$ с помощью рекуррентного стн-ия:

$$\omega_{n+1}(\lambda)=\max_{x}\,[f(x,\lambda)+\omega_n(T\{x,\lambda\})],(n=1,2,...). \tag{33}$$

Заметим, что в (33) входят фактически две неизвестные фк-и $\omega(\lambda)$ *и* $x(\lambda)$. Н-р, рас-им метод прж-й в пр-ве стратегий. Он начинается с произвольного выбора нач-ой политики (решения) x_0. Тогда ств-ая фк. состояния $\omega_0(\lambda)$ опр-ся как решение ур-я

$$\omega_0(\lambda)=f(x_0,\lambda)+\omega_0[T(x_0,\lambda)], \tag{34}$$

где $x_0=x_0(\lambda)$

Для получения сд-го прж-ия опр-им $x_1=x_1(\lambda)$ как фк-ю, мксз-ую выражение

$$\max_{x_1}\{f(\lambda,x_1)+\omega_0[T(\lambda,x_1)]\}. \tag{35}$$

Затем опр-им $\omega_1(\lambda)$ с помощью стн-ия

$$\omega_1(\lambda)=f(\lambda,x_1)+\omega_0[T(\lambda,x_1)] \tag{36}$$

Продолжая т.о, получаем две посл-ти $\{x_n(\lambda)\}$ и $\{\omega_n(\lambda)\}$. Во многих случаях можно д-ть монотонную сх-ть этих фк-й к искомым: $\omega_n(\lambda)\to\omega(\lambda), x_n(\lambda)\to x(\lambda)$.

Применение этого метода рас-им для задачи с двумя пер-ми упл-ия. Пусть требуется найти

$$\max f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j,y_j) \tag{37}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=x,x_j\geq 0;\sum_{j=1}^{n}y_j=y,y_j\geq 0 \tag{38}$$

Пусть $x^0 = \{x_j^{\ 0}\}$ – нач. прж-ие в пр-ве решений. Опр-ем max $\sum_{j=1}^{n} f(x^0_{\ j}, y_j)$ по всем y_j, уд-щим (38). Вводим посл-ть фк-й состояния $\omega_1(\lambda),\ \omega_2(\lambda),\ ...,\ \omega_n(\lambda)$. Основное рекуррентное стн. тогда прб-ся:

$$\begin{gathered}\omega_k(\lambda) = \max[f_k(x^0_{\ k}, y_k) + \omega_{k-1}(\lambda - y_k)],\\ \omega_1(\lambda) = f_1(x^0_{\ 1}, \lambda), k = \overline{1,n}\end{gathered} \tag{39}$$

этот процесс для каждого значения λ дает мн-во значений $\left\{y_j^0\right\} = y^0$. Используя эти значения y_j^0, переходим к задаче мксз-и фк-и $\sum_{j=1}^{k} f_j\left(x_j, y_j^0\right)$. Решается она с помощью рекуррентного стн-ия, аналогично (39):

$$\omega_k(\lambda^1) = \max_{0 \le x_k^1 \le \lambda^1} [f_k(x_k^1, y^0_{\ k}) + \omega_{k-1}(\lambda^1 - y^1_{\ k})], \tag{40}$$

Многократное повторение этого процесса дает две посл-ти $\left\{x^n\right\},\ \left\{y^n\right\}, n = 1, 2, ...,$ к-ые при нек-ых общих условиях сх-ся к отп-ым $x^*,\ y^*$.

п2. Вернемся теперь к тр-ой задаче и решим ее методом посл-ых прж-й. Пусть число пунктов прз-ва или складов равно трем $\left(A_1,\ A_2,\ A_3\right)$, а пунктов потребления – десяти, т.е. $B_j,\ j = \overline{1,10}$.

Р. Схема выч-й такова. Продукты из пунктов A_3 произвольно распределяем по всем потребителям при условии, что $\sum_{j=1}^{n} x_{3j} = a_3$ и $x_{3j} = b_j$. В данном примере распределяли его равномерно. Затем вычитаем из величин спроса всех потребителей полученные ими кол-ва и для остатков решаем задачу с двумя складами A_1, A_2. Полученное решение $\left\{x_{1j}\right\}$ используем на второй итерации, где решается тр. задача для другой пары складов A_2 и A_3.

На сд-ей итерации фиксируем решение $\left\{x_{2j}\right\}$ предыдущего шага и решаем задачу для пары $A_1,\ A_3$. Процесс продолжаем до тех пор, пока не получится устойчивое распределение для всех трех вариантов пар.

Условия задачи приведены в таб. 6, а результаты после каждой итерации – в таб. 7.

Фк-и стоимости перевозок: $g_{ij}\left(x\right) = a_{ij}x + b_{ij}x^2 + c_{ij}\left(x\right)$, где $c_{ij}\left(x\right)$ – фиксированные издержки, так низ-мые организационные расходы. Коэф-ы a_{ij} приведены в столбце x (таб. 6), а b_{ij} – в столбце x^2.

Таблица 6

B_j	A_1			A_2			A_3			bj
	$Cij(x)$	x	x^2	$Cij(x)$	x	x^2	$Cij(x)$	x	x^2	
B_1		+ 1,0		+2,0	+3,1			+7,0		25
B_2	+1,0	+2,0			+4,1			+3,0		40
B_3		+3,0	+0,01		+2,1			+9,0		60
B_4		+1,5			+1,1	+0,10		+1,0		30
B_5		+2,5			+2,6			+1,0		20
B_6	+10,0	+5,0	-0,01		+3,0		+5,0	+2,0		30
B_7		+3,0			+1,0	+0,20		+4,0		35
B_8		+6,0		+5,0	+2,0		+6,0	+3,0		30
B_9	+8,0	+6,0	-0,05		+2,0			+5,0		25
B_{10}		+6,0			+5,0	+0,01		+6,0		40
	100			80			155			335

x_1 – запас на складе 1=100,
x_2– запас на складе 2=80,
x_3– запас на складе 3=155.

Результаты, полученные методом посл-ых прж-й, приведены в табл. 7.

Результаты трех последних операций полностью совпадают. Это свидетельствует о сходности процесса. Для сравнения в табл. 7. приведено точное решение, найденное другим методом.

Таблица 7

N B_j	1	2	3	4	5	6	7	Точное решение
B_1	10 0 15	10 15 0	10 15 0	25 0 0	25 0 0	25 0 0	25 0 0	25 0 0
B_2	25 0 15	25 0 15	40 0 0	40 0 0	40 0 0	40 0 0	40 0 0	40 0 0
B_3	5 40 15	5 55 0	5 55 0	0 60 0	0 60 0	0 60 0	0 60 0	5 55 0
B_4	15 0 15	15 0 15	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
B_5	5 0 15	5 0 15	0 0 20	0 0 20	0 0 20	0 0 20	0 0 20	0 0 20
B_6	0 15 15	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
B_7	20 0 15	20 0 15	35 0 0	35 0 0	35 0 0	35 0 0	35 0 0	30 0 5
B_8	0 15 15	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
B_9	0 10 10	0 10 15	0 10 15	0 10 15	0 20 05	0 20 5	0 20 5	0 25 0
B_{10}	20 0 20	20 0 20	10 0 30	0 10 30	0 0 40	0 0 40	0 0 40	0 0 40
$\Sigma_{g_{ij}}$	1125.25	966.00	921,25	874,00	853,00	853,00	853,00	847,75

ЛЕКЦИЯ 19

5.3. ЗАДАЧИ: УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И СКЛАДИРОВАНИЯ

1°. Основные понятия и общие сведения. Задачи управления (упл.) запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических (экнч.) задач, решение к-ых имеет важное н/х-ое значение. Особенно повышается значение этих задач в условиях рыночной экономики (экн.). Правильное и своевременное опр-ие опт-ой стратегии упл-ия запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что, в конечном счете, повышает эффективность используемых ресурсов.

Запасы – это любые денежные или материальные ценности, к-ые периодически пополняются (производятся, доставляются и т.д.) и нек-ое время сохраняются с целью расходования их в последующие промежутки времени. Уровень запасов в любой момент времени опр-ся начальным уровнем запасов плюс пополнение и минус расход за промежуток времени от нач-го момента до данного.

Упл-ие запасами в общем случае состоит в воздействии на стн-ие между основными факторами – пополнением и расходом. Цель упл-ия – оптз-ия нек-го критерия, зависящего от расходов на хранение запасов, стоимости поставок, затрат, связанных с пополнением, штрафов и т.д.

Если в задаче исходные данные опр-ны однозначно, то задачи наз-ся детерминированными; если же хотя бы часть данных носит случайный характер и заданы распределения вероятностей, то ств-щие задачи наз-ся стохастическими. В этом параграфе мы ограничимся детерминированными задачами упл-ия запасами.

Приведем основные хркс-ки моделей задач упл-ия запасами.

Эл-ми (системы) задачи упл-ия запасами яв-ся:

1. Система снабжения. Она делится на два вида: децентрализованные однокаскадные и централизованные многокаскадные.

2. Спрос на предметы снабжения. Спрос бывает: стационарный или нестационарный; детерминированный или случайный.

3. Возможность пополнения запасов. Различают такие способы пополнения запасов: мгновенная поставка, задержка поставок на фиксированный интервал времени, задержка поставок на случайный интервал времени.

4. Функции затрат. Они составляют в совокупности критерий (кт.) эффективности принятой стратегии упл-ия запасами и учитывают расходы на хранение, стоимость поставок, затраты, связанные с заказом каждой новой партии, затраты на штрафы.

Приведем возможные варианты составляющий фк-и затрат.

Расходы на хранение бывают: пропорциональные (прц.) среднему уровню плж-го запаса за период времени сущ-ия плж-го запаса; прц-ые остатку к концу периода.

Стоимость поставки бывает: прц-ой обьему поставки; постоянной; прц-ой числу номенклатур; прц-ой нх-му приросту интенсивности прз-ва.

Штрафы бывают таких видов: прц-ые средней плж-ой недостаче за период; прц-ые плж-ой недостаче к концу периода; постоянные; нелин. фк-и от средней недостачи и продолжительности ее сущв-ия.

5. Ограничения. Огр-ия в задаче упл-я запасами бывают: на мкс-ый объем запасов; мкс-ый вес; мкс-ю стоимость, среднюю стоимость; число поставок в заданном интервале времени; объем поставки; верт-ть недостачи.

6. Принятая стратегия управления запасами. Правильное и оперативное опр-ие стратегии упл-я запасами сущ-но повышает эффективность используемых ресурсов.

Рас-им простейшие модели упл-ия запасами.

2^{o}. Детерминированный стационарный спрос. Рас-им модель упл-ия запасами с пст-ой интенсивностью спроса μ и поставок λ. График изменения запасов показан на рис.1.

Полный цикл работы системы имеет продолжительность Т. Обз-им через $\hat{Y}$ предельный запас на складе. Считая расходы на хранение (штрафы) прц-ми среднему запасу (дефициту) и времени их сущв-ия ств-но, получим для фк-и затрат за цикл сд. выражение

$$L_T = g + s\int_{0}^{t_1+t_2} y(t)dt - p\int_{t_1+t_2}^{T} y(t)dt \tag{1}$$

где g – фиксированные расходы, связанные с запуском или заказом партии; s – удельные расходы на хранение единицы продукта в ед-у времени; *p* – удельный штраф за дефицит ед-ы запаса в течение ед-ы времени.

Очевидно, что

$$y(t)=\begin{cases}(\lambda-\mu)t \quad \text{при} \quad 0\le t\le t_1\\ \hat{Y}-\mu(t-t_1) \quad \text{при} \quad t_1<t\le t_1+t_2+t_3\\ -\hat{Y}_{Д}+(\lambda-\mu)(t-t_1-t_2-t_3) \quad \text{при} \quad t_1+t_2+t_3<t\le T.\end{cases} \tag{2}$$

Мкс-ый дефицит $\hat{Y}_{Д}$ выражается через $\hat{Y}$ как

$$\hat{Y}_{Д} = \frac{T-(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\hat{Y} \tag{3}$$

Подставив $t_1 = \dfrac{\hat{Y}}{\lambda-\mu}$ и $t_2 = \dfrac{\hat{Y}}{\mu}$, получим

$$\hat{Y}_{Д} = \frac{\mu}{\lambda}\left[(\lambda-\mu)T-\hat{Y}\right]. \tag{4}$$

Перепишем фк-ю затрат с учетом лин-сти изменения уровня запаса:

$$L_T = g + \frac{s\lambda \hat{Y}^2}{2\mu(\lambda-\mu)} + \frac{p\lambda}{2\mu(\lambda-\mu)}\left[\frac{\mu}{\lambda}(\lambda-\mu)T - \hat{Y}\right]^2, \tag{5}$$

откуда получим затраты на ед-цу времени

$$L_{cp} = \frac{L_{\text{T}}}{T} = \frac{1}{T}\left[g + \frac{(p+s)\lambda \hat{Y}^2}{2\mu(\lambda-\mu)}\right] + \frac{p\mu}{2\lambda}(\lambda-\mu)T - p\hat{Y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial L_{cp}}{\partial \hat{Y}} = \left[\frac{(p+s)\lambda \hat{Y}}{T\mu(\lambda-\mu)} - p\right] = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L_{cp}}{\partial T} = \frac{p\mu}{2\lambda}(\lambda-\mu) - \frac{1}{T^2}\left[g + \frac{(p+s)\hat{Y}^2\lambda}{2\mu(\lambda-\mu)}\right] = 0 \tag{8}$$

Решение системы (7) и (8) приводит к выражениям для опт-ых $\hat{Y}^0$, T^0 и при этом достигается мнм. затрат L^0 в ед-у времени:

$$\hat{Y}^0 = \sqrt{\frac{2\mu g\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{s\left(1+\frac{s}{p}\right)}}; \qquad T^0 = \sqrt{\frac{2g\left(1+\frac{s}{p}\right)}{\mu s\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}}; \qquad L^0 = \sqrt{\frac{2\mu gs\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{1+\frac{s}{p}}}. \tag{9}$$

Из полученных сты-й при различных допущениях получаются сд. известные фм. теории запасов:

а) недостачи (дефицит) полностью исключаются (рис. 2). Тогда, положив $p \to \infty$ и подставив $\frac{s}{p} = 0$ в (9), получим

$$\hat{Y}_1^0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}; \qquad T_1^0 = \sqrt{\frac{2g}{\mu s\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}}; \qquad L_1^0 = \sqrt{2\mu gs\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}. \tag{10}$$

б) высокая интенсивность восполнения запаса, случай мгновенной поставки (рис. 3). Положив $\lambda \to \infty$ и подставив $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ в (9), получим

$$\mathrm{Y}_2^0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s\left(1+\frac{s}{p}\right)}}; \qquad \mathrm{T}_2^0 = \frac{\sqrt{2g\left(1+\frac{s}{p}\right)}}{\mu s}; \qquad \mathrm{L}_2^0 = \sqrt{\frac{2\mu gs}{1+\frac{s}{p}}} \tag{11}$$

в) дефицит не допускается, заказы выполняются мгновенно (рис. 4). Положив $\lambda \to \infty, p \to \infty$ и подставив $\frac{\mu}{\lambda} = 0, \frac{s}{p} = 0$ в (9), получим

$$Y_3^0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}\ ;\ T_3^0 = \sqrt{\frac{2g}{\mu s}}\ ;\ L_3^0 = \sqrt{2\mu g s}\ . \qquad (12)$$

Равенства (12) наз. фм-ми Уилсона, а вел. Y_3^0 – экнч-им размером партии.

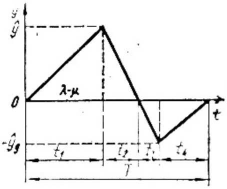


Рис. 1

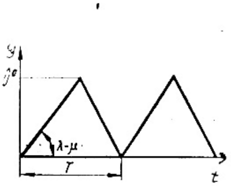


Рис. 2

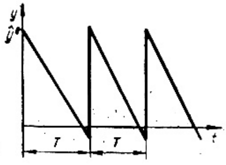


Рис. 3

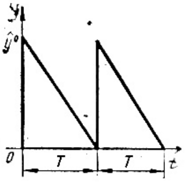


Рис. 4

3^0. Детерминированная модель при переменных издержках производства (переменная цена товара). В приведенной модели предполагалась, что, кроме пст-ых затрат на подготовку прз-ва g, прз-ные издержки не учитываются. В более общем случае можно предположить, что издержки прз-ва или приобретения запасов яв-ся неуб-ей фк-ей времени, т.е. вводим фк-ю

$$f(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y = 0, \\ g + c_1 y, \text{ если } 0 < y < y^*, \\ g + c_2 y, \text{ если } y \geq y^*. \end{cases} \qquad (13)$$

Иногда вводятся скидки при закупках товаров в опр-ых кол-ах, т.е. стоимость 1 ед-ы продукции зависит от приобретенного объема товара. Н-р, при закупке партии до 1000 шт. стоимость $c_1 = 1$ руб./шт.; а при закупке партии свыше 1000 шт. стоимость $c_2 = 95$ коп./шт.

При таких условиях иногда выгоднее превысить опт-ый размер партии, чтобы воспользоваться преимуществами скидки.

Итак, пусть μ – интенсивность спроса, s – затраты за хранение ед-ы продукции, g – пст. расходы на заказ, p – штраф за дефицит ед-ы запаса в 1 ед-у времени.

Примем фк-ю издержек прз-ва в виде (13). Тогда общие издержки за период $L(y) = s\frac{1}{2}yT + f(y)$, а издержки за ед-у времени

$$L_T(y) = \frac{L(y)}{T} = \frac{1}{2}sy + \frac{1}{T}f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}sy + \frac{g\mu}{y} + c_1\mu, если \quad y < y^*, \\ \frac{1}{2}sy + \frac{g\mu}{y} + c_2\mu, если\, y \geq y^*. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь использовано стн. $T=\dfrac{y}{\mu}$ и $\dfrac{1}{T}=\dfrac{\mu}{y}$ (рис. 5). Сд-но, фк. $L_T\left(y\right)$ терпит разрыв в точке $y=y^*$, и, очевидно, $\min L_T\left(y\right)$ достигается либо в точке, где $\dfrac{\partial L\left(y\right)}{\partial y}=0$, либо в точке разрыва. Опр-им эти точки: $\dfrac{\partial L_T\left(y\right)}{\partial y}=\dfrac{1}{2}s-\dfrac{g\mu}{y^2}=0$, отсюда $y^0=\sqrt{\dfrac{2g\mu}{s}}$.

Рассмотрим случаи, когда $y^0>y^*$ и $y^0<y^*$. Если $y^0\le y^*$, то опт. значение L_T достигается при $y=y^0$ и тогда

$$L\left(y^0\right)=c_1\mu+\sqrt{2\text{sg}\,\mu}\,. \tag{15}$$

С другой стороны, при заказе товара в кол. y^* ед. по более низкой цене затраты в ств-и с (13) составят

$$L\left(y^*\right)=c_2\mu+\frac{g\mu}{y^*}+\frac{1}{2}sy^*. \tag{16}$$

Сравнивая (15) с (16), видим, что выгодно заказывать товар партией y^* ттогда, когда $L\left(y^0\right)>L\left(y^*\right)$ (рис. 5), т.е. если

$$c_2\mu+\frac{g\mu}{y^*}+\frac{1}{2}sy^*<c_1\mu+\sqrt{2\text{sg}\,\mu} \tag{17}$$

или

$$c_1-c_2\ge\frac{1}{\mu}\left(\frac{g\mu}{y^*}+\frac{1}{2}sy^*-\sqrt{2\text{sg}\,\mu}\right).$$

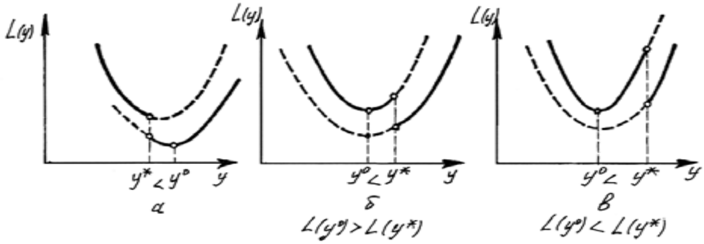


Рис. 5

4^0. Задача управления многономенклатурными запасами при ограничении на емкость склада. Пусть для i - го вида продукта (запаса) затраты на заказ составляют g_i, на хранения единицы продукта – S_i, спрос детерминированный с интенсивностью $\mu_i\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Предположим, что поставки заказов осуществляются мгновенно и дефицит не допускается, причем заказы по разным продуктам выполняются незвмо. Тогда общие затраты по всем номенклатурам в единицу времени (при замене $T_i = \frac{y_i}{\mu_i}$) опр-ся стн-ем

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} S_i y_i + \frac{g_i \mu_i}{y_i}, \qquad (18)$$

где y_i – размер заказа по i – й номенклатуре.

Если на запасы наложено огр. и средний суммарный уровень запасов не должен превышать емкости складов С, то нх-мо искать min L при огр-и

$$Y_{cp}^{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i \le C. \qquad (19)$$

Сначала опр-им опт. размер заказа по каждой номенклатуре по фм-ле Уилсона:

$$Y_i^0 = \sqrt{\frac{2\mu_i g_i}{S_i}}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (20)$$

Если $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Y_i^0 \le C,$ то огр-ие (19) выполняется и (20) опр-ет искомые значения $\left\{ Y_i^0 \right\}.$ В противном случае, нх-мо искать мнм. (18) при огр-и $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i = C.$ Для этого применим метод множителей Лагранжа. Составим фк-ю

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} S_i y_i + \frac{g_i \mu_i}{y_i} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - 2C \right). \qquad (21)$$

Опр-им $\frac{\partial L_1}{\partial y_i} = \frac{1}{2} S_i - \frac{g_i \mu_i}{y_i^2} + \lambda = 0, \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = 2C - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$ Тогда опт-ые значения $y_1^*, ..., y_n^*$ опр-ся решением сд-ей системы ур-й:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} S_i - \frac{g_i \mu_i}{y_i^2} + \lambda = 0, \\ 2C - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \end{cases} \qquad (22)$$

отсюда

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2 g_i \mu_i}{S_i + 2\lambda^*}}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (23)$$

причем λ^* опр-ся из выражения $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2 g_i \mu_i}{S_i + 2\lambda^*}} = 2C.$

5^0. **Нестационарный детерминированный спрос.** Выше были рас-ны статические задачи упл-я запасами, где расв-лось функционирование модели за один период. В ряде таких задач удалось получить аналитические выражения для опт. запаса y^0.

В случае, если расв-ся функционирование системы за n периодов, причем спрос непостоянен, приходим к динамическим моделям упл-ия запасами. Эти задачи, как правило, не поддаются аналитическому решению, однако опт-ые уровни запасов по периодам могут быть опр-ны, используя метод ДП.

з1. Пусть по n периодам (дни, месяцы, кварталы и т.д.) задан расход $d_k\left(k=\overline{1,n}\right)$, производимый в конце каждого периода. Известны нач-ый уровень запасов и зависимость (зв.) суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от среднего уровня хранимых запасов и их пополнения.

Требуется опр-ть размеры пополнения запасов в каждом периоде для уд-ия заданного расхода из условия мнмз-и суммарных затрат за весь планируемый период времени.

Р. Введем сд. обз-ия: x_k – запас (пополнение), создаваемый в к-й период (или заказ в к-м периоде); ξ_{k-1} – уровень запасов в начале к-го периода. Согласно условию, суммарные затраты в к-м периоде зависят от x_k и $\overline{\xi_k}$ – среднего уровня запасов в k-ом периоде, равного

$$\overline{\xi_k}=\xi_{k-1}+\frac{x_k}{2} \tag{24}$$

Сд-но, затраты в k-ом периоде можно расв-ть как фк-ю $f_k\left(\xi_{k-1},x_k\right)$. Тогда задачу можно сформулировать так: Найти

$$\min z=\sum_{k=1}^{n} f_k\left(\xi_{k-1},x_k\right), \tag{25}$$

опр-ив пер-ые x_k, к-ые связаны с пер-ми ξ_{k-1} балансовыми ур-ми

$$\xi_\kappa=\xi_{\kappa-1}+x_\kappa-d_\kappa, \tag{26}$$

выражающими уровень запаса ξ_κ в начале $(\kappa+1)$-го периода через сумму уровня запасов в начале k-го периода $(\xi_{\kappa-1})$ и пополнения запасов в этом периоде x_κ минус расход d_κ.

Кроме того, налагаются условия неотц-ти:

$$\xi_\kappa\geq 0,\kappa=\overline{1,n} \tag{27}$$

$$x_\kappa\geq 0,\kappa=\overline{1,n} \tag{28}$$

Поставленную задачу решим методом ДП, расв-ая ее как $n-$шаговый процесс оптз-и с параметрами состояния ξ_κ и пер-ми упл-ми x_κ. Тогда рав. (26) представляет собой ур-ие состояния. Здесь удобнее использовать прямую схему расчета, т.к. задано конечное состояние.

Обз-им через $Z_\kappa^*(\xi_\kappa)$ условные опт. затраты с 1-го по k-го периода, если в конце к-го периода уровень запасов равен ξ_κ.

Нач-ем с условной опт-и 1-го шага в предположении, что к концу этого шага система окажется в состоянии ξ_1:

$$Z_1^*(\xi_1) = \min_{x_1}\left\{f_1(\xi_0, x_1)\right\}. \tag{29}$$

На k-м шаге получим ств-но

$$Z_\kappa^*(\xi_\kappa) = \min_{x_\kappa}\left\{f_\kappa(\xi_{\kappa-1}, x_\kappa) + Z_{\kappa-1}^*(\xi_{\kappa-1})\right\}. \tag{30}$$

В ств-и с формой рекуррентных стн-й удобно и ур-ие состояния (26) записать в виде

$$\xi_{\kappa-1} = \xi_\kappa - x_\kappa + d_\kappa. \tag{31}$$

При решении локальных задач в ств-и с ур-ми (29) и (30) будем считать, что состояние ξ_κ в конце известно. Поэтому и нерав-во (27) удобно записать для $\xi_{\kappa-1,}$ т.е.

$$\xi_{\kappa-1} = \xi_\kappa - x_\kappa + d_\kappa \geq 0, \tag{27$'$}$$

откуда следуют огр-ия на x_κ:

$$x_\kappa \leq \xi_\kappa + d_\kappa. \tag{28$'$}$$

Фк-ю затрат также удобно привести к зависимости от состояния в конце шага, используя ур-ие (31):

$$f_\kappa(\xi_{\kappa-1}, x_\kappa) = f_\kappa(\xi_\kappa - x_\kappa + d_\kappa, x_\kappa).$$

Выполнив условную оптз-ю, получим посл-но

$$z_1^*(\xi_1), x_1^*(\xi_1); \ldots; z_k^*(\xi_k), x_k^*(\xi_k); \ldots; z_n^*(\xi_n), x_n^*(\xi_n).$$

Далее (безусловная оптз-я), находим $z_{\max} = z_n^*(\xi_n^*)$ при заданном конечном состоянии, или $z_{\max} = \max z_n^*(\xi_n)$ и ξ_n^*, если конечное состояние не задано. Затем посл-но опр-ем

$$x_n^* = x_n^*(\xi_n^*), \xi_{n-1}^* = \xi_n^* - x_n^* + d_n, x_{n-1}^* = x_{n-1}^*(\xi_{n-1}^*), \ldots, \xi_1^* = \xi_2^* - x_2^* + d_2, x_1^* = x_1^*(\xi_1^*).$$

Изложенная схема выч-ия используется ниже при решении двух конкретных задач, непр-ой и дк-ой.

п1 (непрерывная модель). Решить з1 при сд-их условиях: $n = 3$, $\xi_0 = 100$, $\xi_3 = 30$, $d_1 = 150$, $d_2 = 50$, $d_3 = 100$. Затраты не зависят от периодов и состоят из двух слагаемых:

$$f(\overline{\xi}_k, x_k) = \varphi(\overline{\xi}_k) + \psi(x_k), \tag{32}$$

где $\varphi(\overline{\xi}_k)$ (затраты на хранение) и $\psi(x_k)$ (затраты на пополнение) заданы фм-ми: $\varphi(\overline{\xi}_k) = 0{,}1\overline{\xi}_k, \psi(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_k = 0, \\ 6 + 0{,}04x_k & \text{при} \quad 0 < x_k \leq 150, \\ 12 + 0{,}16x_k & \text{при} \quad 150 < x_k < \infty. \end{cases}$

Графики этих фк-й изб-ны на рис. 6.

Из (24) и (31) имеем $\overline{\xi}_k = \xi_{k-1} + \frac{x_k}{2} = \xi_k - \frac{x_k}{2} + d_k$, тогда первое слагаемое (32) можно представить в виде

$$\varphi\left(\overline{\xi}_k\right) = 0,1\xi_k - 0,05x_k + 0,1d_k.$$

Теперь перейдем к выполнению условной оптз-и.

Для 1-го шага, согласно (29) и (32), получим

$$z_1^*\left(\xi_1\right) = \min_{x_1}\left\{0,1\xi_1 - 0,05x_1 + 0,1d_1 + \psi\left(x_1\right)\right\}.$$

В силу (31) для x_1 имеем единственное значение

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0 + d_1 = \xi_1 - 100 + 150 = \xi_1 + 50,$$

к-ое подставляем в выражение, содержащееся в фигурных скобках. Т.к. имеется три различных альтернативы для $\psi\left(x\right)$, то получим разные выражения и для $z_1^*\left(\xi_1\right)$. Но поскольку $x_1>0$, то остаются два выражения для $\psi\left(x\right)$. Если $\xi_1 \le 100$, то $x_1 \le 150$ и следует выбрать второе выражение, если же $\xi_1 > 100$ (тогда $x_1 > 150$) – то третье:

$$z_1^*\left(\xi_1\right) = 0,1\xi_1 - 0,05\xi_1 - 0,05\cdot 50 + 0,1\cdot 150 + 6 + 0,04\xi_1 + 0,04\cdot 50$$

$$z_1^*\left(\xi_1\right) = 0,1\xi_1 - 0,05\xi_1 - 0,05\cdot 50 + 0,1\cdot 100 + 12 + 0,16\xi_1 + 0,16\cdot 50$$

Окончательно получим

$$Z_1^*(\xi_1) = \begin{cases} 0,09\xi_1 + 20,5 & \text{при } \xi_1 \le 100, \\ 0,21\xi_1 + 32,5 & \text{при } \xi_1 > 100. \end{cases}$$

Переходим к оптз-и 2-го шага, согласно выражению

$$Z_2^*(\xi_2) = \min_{0 \le x_2 \le \xi_2 + 50}\left\{0,1\xi_2 - 0,05x_2 + 5 + \psi\left(x_2\right) + Z_1^*(\xi_1)\right\} = \min_{0 \le x_2 \le \xi_2 + 50} Z_2(\xi_2, x_2)$$

Развернутое выражение фк-и $Z_2\left(\xi_2, x_2\right)$ требует сочетание трех вариантов выражений $\psi\left(x_2\right)$ в зв-ти от значений x_2 и двух вариантов для $Z_1^*\left(\xi_1\right)$ в зв-ти от значений $\xi_1 = \xi_2 - x_2 + 50$, сд-но всего шесть вариантов. Однако в данном случае анализ можно упростить, учитывая, что в любом из указанных вариантов $Z_2\left(\xi_2, x_2\right)$ яв-ся лин-ой фк. от x_2, а лин-я фк. может принимать нб. и нм. значения лишь на границах интервала изменения, т.е. при $x_2 = 0$ или $x_2 = \xi_2 + 50$. Поэтому исследуем только эти две точки.

При $x_2 = 0$ имеем $\xi_1 = \xi_2 + 50$, а при $x_2 = \xi_2 + 50$ ств-но $\xi_1 = 0$. Для первой точки выбор варианта опр-ся выражением, $Z_1^*(\xi_1)_1$ поэтому нх-мо рас-ть два случая: $\xi_1 = \xi_2 + 50 \le 100$, откуда $\xi_2 \le 50$ и $\xi_1 + 50 > 100$, откуда $\xi_2 > 50$. Для второй точки выбор варианта опр-ся только выражением для $\psi\left(x_2\right)$, зависящим от значений $x_2 = \xi_2 + 50 \le 150$ и $\xi_2 + 50 > 150$, откуда $\xi_2 \le 100$ и $\xi_2 > 100$.

Итак, всего нх-мо проанализировать три интервала для ξ_2: $0 < \xi_2 \le 50$, $50 < \xi_2 \le 100$, $\xi_2 > 100$ и в каждом из них выбирать $\min \mathrm{Z}_2\left(\xi_2, x_2\right)$ в двух указанных точках. Для облегчения расчетов сведем их в табл. 1.

Выбор меньшей величины из двух выражений для ξ_2 в интервале $50 < \xi_2 \le 100$ решается сразу (меньшее значение подчеркнуто). В интервалах $0 < \xi_2 < 50$, и $\xi_2 > 100$ нх-мы дпн. исследования. Так, н-р, для интервала $0 < \xi_2 < 50$, нх-мо сравнить значения фк-й $\mathrm{Z}_2 = 0,19\xi_2 + 25,5$ $\mathrm{Z}_2 = 0,09\xi_2 + 31$, графически изб-мых пм-ми (рис. 7). Эти пм. пересекаются при $\xi_2 = 55$, т.е. в точке, лежащей вне исследуемого интервала. В данном интервале первая пм. лежит ниже второй, сд-но, $0,19\xi_2 + 25,5 < 0,09\xi_2 + 31$. Аналогично выбираем меньшее выражение при $\xi_2 > 100$. Подчеркнутые выражения $\mathrm{Z}_2^*(\xi_2)$ представляют собой искомые условные мнм-мы $\mathrm{Z}_2^*(\xi_2)$, а ств-ие им $x_2^*(\xi_2)$ – условные опт. упл-ия.

Оптз-ия 3-м шаге выполняется проще, т.к. задано конечное состояние $\xi_3 = 30$ и не требуется исследовать возможные различные значения. Имеем

$$\mathrm{Z}_3^*(\xi_3) = \min_{0 \le x_3 \le \xi_3 + 100} \left\{0,1\xi_3 - 0,05x_3 + \psi(x_3) + \mathrm{Z}_2^*(\xi_2)\right\} = \min_{0 \le x_3 \le \xi_3 + 100} \mathrm{Z}_3(\xi_3, x_3)$$

Вновь исследуем две крайние точки $x_3 = 0$ и $x_3 = \xi_3 + 100$, к-ым ств-ют $\xi_2 = \xi_3 + 100$ и $\xi_2 = 0$. При выборе вариантов для ψ и $\mathrm{Z}_2^*(\xi_2)$ учитываем заданное значение $\xi_3 = 30$. Тогда $\mathrm{Z}_3(\xi_3, 0) = 0,31\xi_3 + 74$ и $\mathrm{Z}_3(\xi_3, \xi_3 + 100) = 0,09\xi_3 + 40,5$. Очевидно, что при всех ξ_3 выполняется нерав-во $\mathrm{Z}_3(\xi_3, \xi_3 + 100) < \mathrm{Z}_3(\xi_3, 0)$, т.е. $\mathrm{Z}_3^*(\xi_3) = 0,09\xi_3 + 40,5$.

Перейдем к безусловной оптз-и. При $\xi_3^* = 30$ получаем $\mathrm{Z}_{\min} = 43,2$; $x_3^* = 130$. Далее находим $\xi_2^* = \xi_3^* - x_3^* + 100 = 0$, откуда $x_2^* = 0$ и $\xi_1^* = \xi_2^* - x_2^* + 50 = 50$, т.е. $x_1^* = \xi_3^* + 50 = 100$.

Таблица 1

ξ_2	x_2	$\psi(x_2)$	ξ_1	$Z_1^*(\xi_1)$	$\varphi(\xi_2)$	$Z_2^*(\xi_2)$
От 0 до 56	0	0	от 50 до 100	$0,09\xi_2+20,5$	$0,1\xi_2+5$	$0,19\xi_2+25,5$
	ξ_2+50	$8+0,04\xi_2$	0	20,5	$0,05\xi_2+2,5$	$0,09\xi_2+31$
От 50 до 100	0	0	от 100 до 150	$0,21\xi_2+32,5$	$0,1\xi_2+5$	$0,31\xi_2+37,5$
	ξ_2+50	$8+0,04\xi_2$	0	20,5	$0,05\xi_2+25$	$0,09\xi_2+31$
Более 100	0	0	более 150	$0,21\xi_2+32,5$	$0,01\xi_2+2,5$	$0,31\xi_2+35$
	ξ_2+50	$0,16\xi_2+2$	0	25	$0,05\xi_2+2,5$	$0,21\xi_2+43$

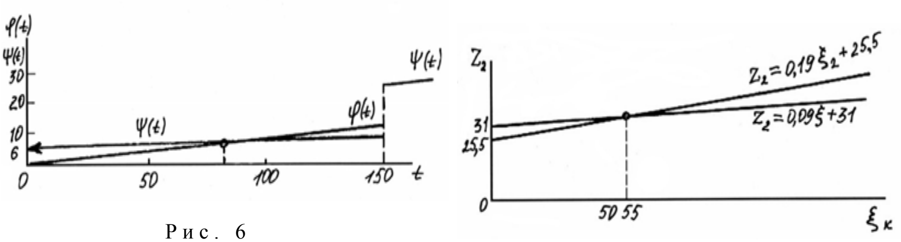


Рис. 6

Если нх-мо выяснить, как влияет на величину Z изменение конечного состояния, то следует обратиться к фм-ам для $Z_3^*(\xi_3)$. Из этих фм., в част., следует, что отс. изменение $\Delta Z_{\min}$ опр-ся рав-ом $\Delta Z_{\min} = 0,09\Delta\xi_3$.

6^0. Модель управления запасами с вогнутой функцией затрат. Пусть теперь фк-и $\psi_к(x_к)$ – затраты на прз-во и $\varphi_к(\xi_к)$ – затраты на хранение –явся вогнутыми. Тогда суммарные затраты $f_к(\xi_к, x_к)$ и целевая фк. $Z = \sum_{к=1}^{n} f_к(\xi_к, x_к)$ – также вогнутые фк. от пер-ых $\xi_к$ и $x_к$.

Вогнутость фк-й Z означает, что каждая дпн. ед-ца продукции (производимая, хранимая) стоит не больше предыдущей. Подобная ситуация чаще всего встречается в прз-ве.

Модель задачи с вогнутыми фк. затрат на прз-во и хранение наз. динамической моделью экнч-ски выгодного размера партии.

Вогнутость фк-и прз-ных затрат встречается, н-р, в случае, если выпуск продукции связан с затратами на дпн. операцию, переналадку оборудования или освоение нового оборудования. После этой подготовленной стадии процесс прз-ва (больших единовременных затрат) выпуску каждой дпн-ой ед-ци продукции ств-ют не меняющиеся пропорциональные (прц.) затраты.

Другим примером может служить модель задачи пополнения запасов у внешнего поставщика, к-ый нередко делает скидки в зв-ти от размера закупаемой партии, назначает ступенчатые цены. Н-р, фк-я

$$\psi_к\left(x_к\right)=\begin{cases} 20x_k & при \quad 0\le x_к\le 10, \\ 240+15\left(x_к-10\right) & при \quad 11\le x_к\le 30, \\ 690+5\left(x_к-20\right) & при \quad x_к\ge 30 \end{cases}$$

яв-ся вогнутой, т.к. коэф-нт при $x_к$ убывает с ростом $x_к$.

Структуру опт-го решения в случае вогнутой фк-й затрат см. в [44].

В част., известно, что глобальный мнм. вогнутой фк-и достигается по крайней мере в одной из угловых точек обл-и. В рас-ном выше случае обл. задана системой n лин-ых ур-й (26) и условиями неотц-ти (27) и (28). Угловым точкам ств-ют опорные решения системы (26), в каждом из к-ых, не более чем n пер-ых $x_к$ и $\xi_к$ плж-ны, а остальные равны нулю. Предположим, что все $d_к>0$ и $\xi_0=0$. Тогда при любом k, если $\xi_{n-1}=0$, то $x_k>0$, а если $x_k=0$, то $\xi_{k-1}>0$, иначе нечем будет обеспечить расход d_k к концу k-го периода. Одновременно $\xi_{k-1}>0$ и $x_k>0$ невозможно, тогда в опорном решении системы (26) оказалось бы больше чем n плж-ых составляющих.

Из ур. состояния (31) получим

$$\xi_{k-1}=\xi_k+d_k \text{ при } x_k=0,$$

$$\xi_{k-1}=0 \text{ при } x_k=\xi_k+d_k.$$

При проведении условной оптз-и на k-м шаге согласно ур-ю (30) дт-но сравнить и выбрать нм-е из двух значений в указанных двух точках, к-ые принимает выражение, содержащееся в фигурных скобках:

$$z_k^*(\xi_k)=\min\begin{cases} f_к(\xi_к+d_к,0)+z^*_{к-1}(\xi_к+d_к) & \text{при } x_к=0, \\ f_к(0,\xi_к+d_к)+z_{к-1}(0) & \text{при } x_к=\xi_к+d_к \end{cases}$$

Для 1-го шага (при k=1) имеем $x_1^*(\xi_1)=\xi_1+d_1$ и, сд-но,

$$z_1^*(\xi_1)=f_1(0,\xi_1+d_1),$$

Опт. упл-ие пополнением запасов x_k на любом k-м шаге имеет сд-й вид: 0 (при $\xi_{k-1}>0$), или d_k(при $\xi_{к-1}=0,\xi_к=0$), или $d_к+d_{к+1}$(при $\xi_{к-1}=0,\xi_{к+1}=0$),..., или $d_к+d_{к+1}+...+d_n+\xi_n$

7^0. Дискретная модель управления запасами. Рас-им сд-й

п2. Опр-ть опт. пополнение запасов в течение четырех периодов при сд-их условиях: $\xi_0=10,\xi_4=0;d_1=150,d_2=50,d_3=d_4=100;$ пополнение запасов может производиться партиями, кратными 50; фк-и затрат на хранение $\varphi(\overline{\xi}_k)$ и на пополнение $\psi\left(x_k\right)$, одинаковые для всех периодов времени, заданы в табл. 2

Таблица 2

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$\varphi(t)$	0	3	8	15	30	40	49	55	58	60	62	64	65
$\psi(t)$	0	–	22	–	32	–	35	–	50	–	70	–	90

Р. Задача носит дискретный (дк.) характер. Для упрощения (поскольку расход и пополнение кратны 50) расчеты производим в целых партиях. Т. о., $d_1 = 3,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2,\ d_4 = 2$, первые x_k и параметры ξ_k меняются с шагом в ед-цу. Выч-ия выполняем в ств-и с моделью, приведенной в з1:5^0. При выполнении 1-го этапа расчеты производим в таблицах: основной (табл. 3) и вспомогательных (табл. 4–7).

Для 1-го шага имеем единственное значение $x_1 = \xi_1 - \xi_0 + d_1 = \xi_1 + 1$. Поэтому $Z_1^*(\xi_1) = \varphi\left(\overline{\xi_1}\right) + \psi(\xi_1 + 1)$, где $\overline{\xi_1} = \xi_0 + 0,5x_1 = 2,5 + 0,5\xi_1$

Опр-им предельные значения для параметров состояния. Т. к. $\xi_4 = 0$, то даже при $x_4 = 0$ должно быть $\xi_3 = 2$, сд-но $\xi_3 \le 2$. Ств-но $\xi_2 \le 4$, $\xi_1 \le 5$.

Таблица 3 (основная)

ξ	1-й шаг		2-й шаг		3-й шаг	
	$Z_1^*(\xi_1)$	$x_1^*(\xi_1)$	$Z_2^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_2)$	$Z_3^*(\xi_3)$	$x_3^*(\xi_3)$
0	62	1	85	1	125	2
1	81	2	102	2	135	3
2	90	3	112	3	165	4
3	108	4	142	4	–	–
4	130	5	172	5	–	–
5	152	6	–	–	–	–

Выч-ие $Z_1^*(\xi_1)$ приведено в табл. 4

Таблица 4

ξ_1	0	1	2	3	4	5
x_1	1	2	3	4	5	6
$\overline{\xi_1}$	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi\left(\overline{\xi_1}\right)$	40	49	55	58	60	62
$\psi(\xi_1 + 1)$	22	32	35	50	70	90
$Z_1^*(\xi_1)$	$\underline{62}$	81	90	108	130	152

2-й шаг выполняем в табл. 5 согласно стн-ю $Z_2^*(\xi_2) = \min\limits_{0 \le x_2 \le \xi_2 + 1} \left\{ \varphi\left(\overline{\xi_2}\right) + \psi(x_2) + Z_1^*(\xi_1) \right\}$.

Таблица 5

ξ_2	0		1			2			
x_2	0	1	0	1	2	0	1	2	3
ξ_1	1	0	2	1	0	3	2	1	0
$\overline{\xi_2}$	1	0,5	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5
$\varphi(\xi_2)$	8	3	30	15	8	49	40	30	25
$\psi(x_2)$	0	22	0	22	32	0	22	32	35
$Z_1^*(\xi_1)$	81	62	90	81	62	108	90	81	62
$Z_2(x_2, \xi_2)$	$\underline{89}$	85	120	118	$\underline{102}$	157	152	143	$\underline{112}$

Продолжение табл. 5

ξ_2	3					4					
x_2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
ξ_1	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
$\overline{\xi_2}$	4	3,5	3	2,5	2	5	4,5	4	3,5	3	2,5
$\psi\overline{\xi_2}$	58	55	49	40	30	62	60	58	55	49	40
$\psi(x_2)$	0	22	32	35	50	0	22	32	35	50	70
$Z_1^*(\xi_1)$	130	108	90	81	62	152	130	108	90	81	62
$Z_2(x_2, \xi_2)$	188	185	171	156	$\underline{142}$	214	212	198	180	180	$\underline{172}$

Для 3-го шага имеем $\xi_2 = \xi_3 - x_3 + 2,\ x_3 \le \xi_2 + 2$ и

$Z_3^*(\xi_3) = \min\limits_{0 \le x_3 \le \xi_2 + 2} \left\{ \varphi\left(\overline{\xi_3}\right) + \psi(x_3) + Z_2^*(\xi_2) \right\}$ Выч-ие $Z_3^*(\xi_3)$ приведено в табл. 6

Таблица 6

ξ_2	0			1				2				
x_3	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
ξ_2	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
$\overline{\xi_3}$	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5	4	3,5	3	2,5	2
$\varphi\left(\overline{\xi_3}\right)$	30	15	8	49	40	30	15	58	55	49	40	30
$\psi(x_3)$	0	22	32	0	22	32	35	0	22	32	35	50
$Z_2^*(\xi_2)$	112	102	85	142	112	102	85	172	142	112	102	85
$Z_3(x_3, \xi_3)$	142	139	$\underline{125}$	191	174	164	$\underline{135}$	180	219	193	177	$\underline{165}$

Выч-ие $Z_4^*(0)$ приведено в табл. 7.

Таблица 7

ξ_4	0		
x_4	0	1	2
ξ_3	2	1	0
$\overline{\xi_4}$	2	1,5	1
$\varphi(\overline{\xi_4})$	30	15	8
$\psi(x_4)$	0	22	32
$Z_3^*(\xi_3)$	165	135	125
$Z_4(x_4,\xi_4)$	195	172	$\underline{165}$

Для 4-го шага имеем $\xi_4 = 0$. Сд-но, $\xi_3 + x_4 - 2 = 0$, откуда $\xi_3 = 2 - x_4$ и $x_4 \le 2$ (табл. 7). После выполнения мнмз-и получим $Z_{\min} = Z_4^*(0) = 165$ при $x_4^* = 2$.

Далее, посл-но выч-ем $\xi_3^* = 2 - x_4 = 0$, $x_3^*(0) = 2$; $\xi_2^* = \xi_3^* - x_3 + 2 = 0$, $x_2^*(0) = 1$, $\xi_1^* = \xi_2^* - x_2^* + 1 = 0$, $x_1^*(0) = 1$

8^0. Динамическая модель складирования. Особенностью задач складирования яв-ся наличие двух пер-ых управления (упл.) (двумерная модель). Однако решение этих задач значительно упрощается благодаря лин-сти целевой фк-и.

з2. Емкость склада по хранению запасов огр-на нек-ой вел. С. В каждом из n промежутков времени (периодов) запасы могут пополняться с затратами $\alpha_к$ на ед-у продукции и расходоваться с получением дохода $\beta_к$ за ед-у продукции, причем решение о пополнении или расходовании запасов принимается однократно в каждом периоде. Опр-ть опт-ю стратегию в упл-и запаса из условия мксз-и суммарной прибыли при заданном нач-ом уровне запасов.

При этом возможны три варианта в очередности пополнения и расходования запасов в каждом периоде: I вариант – пополнение предшествует расходу, II – расход предшествует пополнению и III – очередность любая, т.е. в каждом периоде I или II. Указанные варианты условий отразятся на форме огр-й модели задачи.

Р. Пер-ми упл-ия возьмем размеры пополнения $(x_к)$ и расхода $(y_к)$ запасов в к-м шаге. В качестве параметров состояния $\xi_{к-1}$ имеем запас товаров в начале к-го шага. Тогда ур-ие состояния, выражающее материальный баланс запасов, запишется в виде

$$\xi_к = \xi_{к-1} + x_к - y_к \qquad (33)$$

Решим задачу с помощью обратной вычт-ой схемы, т.е. по стн-ю

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right)=\max_{x_n,y_n}\left\{\beta_n y_n-\alpha_n x_n\right\}, \tag{34}$$

$$Z_к^*\left(\xi_{к-1}\right)=\max_{x_к,y_к}\left\{\beta_к y_к-\alpha_к x_к+Z_{к+1}^*\left(\xi_к\right)\right\} \tag{35}$$

при условиях

$$x_к\geq 0,\quad y_к\geq 0\quad \left(к=\overline{1,n}\right) \tag{36}$$

и дпн-ми огр. для всех *к*, зв-щих от варианта постановки задачи:

I вариант: $\xi_{к-1}+x_к\leq C,\quad y_к\leq\xi_{к-1}+x_к,$ (37)

II вариант: $\xi_{k-1}-y_k+x_k\leq C, y_k\leq\xi_{k-1},$ (37′)

III вариант: или (37), или (37').

Рас-им подробнее решение задачи в I варианте подстановки. Огр-ия (36) и (37) опр-ют при данном значении параметра ξ_{k-1} обл. допустимых значений (ОДЗ) x_k и y_k в виде выпуклого четырехугольника (чуг.) ABCD, изб-ю на рис. 8. Т.к. в этой обл-ти мксз-ся лин фк-я, то получается задача ЛП, опт. решение к-ой достигается, по крайней мере, в одной из вершин обл-и. На рис. 8 находим крд-ы всех четырех вершин: $A(0,0), B(0,\xi_{k-1}), C(c-\xi_{k-1},c), D(c-\xi_{k-1},0)$. Поэтому, вместо нахождения мкс-ма по стн-ям (34) и (35) при произвольных изменениях x_k и y_k дт-но выч-ть значения выражений, содержащихся в фигурных скобках, во всех четырех вершинах и путем сравнения выбрать среди них нб-шее.

При этом для последнего (п-го) шага имеем два выбора, т.к. значение $Z_n\left(x_{n,}y_n\right)=\beta_n y_n-\alpha_n x_n$ в точках A и D дает заведомо меньшее число, чем ств-но в точках B и C, т. е. для п-го шага получаем

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right)=\max\begin{cases}\beta_n\xi_{n-1} & (B)\\ \left(\beta_n-\alpha_n\right)c+\alpha_n\xi_{n-1} & (C)\end{cases} \tag{34′}$$

Для выполнения оптз-и на последующих шагах предварительно найдем из ур-я (33) значение ξ_k для каждой точки. Тогда получим: $\xi_k=\xi_{k-1}$ в точке A, $\xi_k=0$ в точке B, $\xi_k=0$ в точке C, $\xi_k=c$ в точке D. Вместо (35) имеем:

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)=\max\begin{cases}Z_{k+1}^*\left(\xi_{k-1}\right) & (A),\\ \beta_k\xi_{k-1}+Z_{k+1}^*(0) & (B),\\ \left(\beta_k-\alpha_k\right)c+\alpha_k\xi_{k-1}+Z_{k+1}^*(0) & (C),\\ \alpha_k\xi_{k-1}-\alpha_k c+Z_{k+1}^*(c) & (D)\end{cases} \tag{35′}$$

При выполнении практических расчетов оказывается дт-ым не табулировать фк-и $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ для всех значений ξ_{k-1}, а огр-ся выч-ем этих фк-й лишь для крайних значений ξ_{k-1}, т.е. для $\xi_{k-1}=0,\ \xi_{k-1}=c.$

В случае II варианта исходной постановки задачи получим обл-ть, изб-ю на рис. 9. В новой обл. изменяется лишь крд-ы вершины С; находим $x_k = c$, $y_k = \xi_{k-1}$. Аналогично предыдущему получим сд-ия фм. для выполнения условной мксз-и:

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right) = \beta_n \xi_{n-1} \qquad (B), \tag{34''}$$

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \max \begin{cases} Z_{k+1}^*\left(\xi_{k-1}\right) & (A), \\ \beta_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & (B), \\ \beta_k \xi_{k-1} - \alpha_k c + Z_{k+1}^*\left(c\right) & (C), \\ \alpha_k\left(\xi_{k-1} - c\right) + Z_{k+1}^*\left(c\right) & (D). \end{cases} \tag{35''}$$

Для III варианта на каждом шаге выбираем нб. число по фм. $(34'),(35')$ и сравниваем его с нб. числом, найденным по фм. $(34''),(35'')$. Сопоставив полученные т.о. два значения $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ выбираем из них нб-е и одновременно устанавливаем выгодную на данном шаге очередность пополнения и расхода запасов.

Поскольку выражение $(34'')$ содержится среди фм-л $(34')$, то для к-го шага дт-но производить только по стн-ю $(34')$.

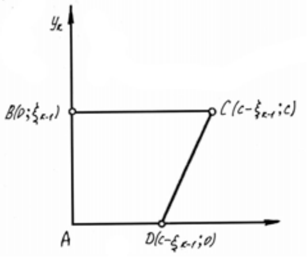


Рис. 8

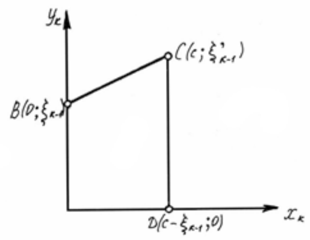


Рис. 9

Аналогично, т.к. среди четырех альтернатив в фм-е $(35'')$ только третья альтернатива отличается от выбираемых по фм-е $(35')$, то дт-но производить по фм-е $(35')$, добавив пятую альтернативу.

п3. Опр-ть опт. стратегию в упл-и запасами, включая опт-ю очередность пополнения и расходования запасов согласно условиям з2 при сд-их данных: $n = 5$, $c = 50$, α_k и β_k заданы в табл. 8.

Р. Задачу решим по изложенной выше схеме для III варианта постановки задачи. Как уже указывалось на каждом шаге дт-но выч-ть значения $Z_k^*(\xi_{k-1})$ только для двух значений периметра ξ_{k-1}.

Для 5-го шага, согласно стн-ю $(34')$, имеем

$$Z_5^*(\xi_4) = \max\begin{cases}\beta_5\xi_4 & (B),\\ (\beta_5-\alpha_5)c+\alpha_5\xi_4 & (C).\end{cases}$$

Таблица 8

к	1	2	3	4	5
α_k	5	16	12	15	18
β_k	15	10	8	15	22

Сд-но, нб. значение достигается в точке С:

$$Z_5^*(\xi_4)=18\xi_4+200 \text{ при } x_5^*(\xi_4)=50,\ y_5^*(\xi_4)=\xi_4.$$

Выполнение оптз-и на 4-м и последующих шагах проводится по фм-е $(35')$ с включением пятой альтернативы:

$$Z_4^*(\xi_3) = \max\begin{cases}18\xi_3+4c\ (A),\\ 15\xi_3+4c\ (B),\\ 15\xi_3+4c\ (C_1),\\ 15\xi_3+7c\ (D),\\ 15\xi_3+7c\ (C_2).\end{cases}$$

При k=4 имеем $Z_4^*(\xi_3)=15\xi_3+350$, ств-е точкам Д и C_2. Т. о, на этом шаге получаем альтернативное решение: $x_4^*(\xi_3)=50-\xi_3,\ y_4^*(\xi_3)=0$ при опережении пополнения, или $x_4^*(\xi_3)=50,\ y_4^*(\xi_3)=\xi_3$ при опережении расхода.

Аналогично, при k=3 получаем $Z_3^*(\xi_2)=12\xi_2+500$ ств-но при $x_3^*(\xi_2)=50-\xi_2,\ y_3^*(\xi_2)=0.$

Расчеты по условной оптз-и приведены в табл. 9, где показаны оптз-ия 3-го и 2-го шагов. При этом, нб. число в строке (т. е. при данном ξ) подчеркнуто.

Таблица 9

k	ξ	Вычисление					$Z_k^*(\xi_{k-1})$	$x_k^*(\xi_{k-1})$	$y_k^*(\xi_{k-1})$	Вариант
		A	B	C_1	D	C_2				
3	0	350	350	150	500	500	500	50	0	I, II
	50	1100	750	750	1100	900	1100	0	0	I
2	0	500	500	200	300	300	500	0	0	I
	50	1100	1000	1000	1100	800	1100	0	0	I
1	0	500	500	1000	850	850	1000	50	50	I

Теперь приступим к безусловной оптз-и.

Из 1-го шага сразу получаем $Z_{\max}=1000$ при $x_1^*=50$ и $y_1^*=50$ для I варианта очередности. Тогда $\xi_1^*=50$, откуда $x_2^*=y_2^*=0$. Ств-но получим $\xi_2^*=50$, при к-ом $x_3^*=y_3^*=0$ для I варианта, тогда $\xi_3=50$. Из результатов оптз-и 4-го шага имеем $x_4^*=y_4^*=0$ для I варианта, или $x_4^*=y_4^*=50$ для II варианта. Наконец, на 5-м шаге получаем $x_5^*=y_5^*=50$.

ЛЕКЦИЯ 20

5.4. СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДП

1^0. **Выбор оптимальной стратегии обновления оборудования.** Важной экономической (экн.) проблемой яв-ся своевременное обновление (обн.) оборудования (обр.): автомобилий, станков, телевизоров, магнитол и т.п. Старение оборудования включает физический и моральный износ, в результате чего растут затраты на ремонт и обслуживание, снижается производительность и ликвидная стоимость. Задача заключается в опр-и опт-ых сроков замены старого обр-ия. Критерием опт-ти яв-ся доход от эксплуатации (эпл.) обр-ия (задача мксз-и) или суммарные затраты на эпл-и в течение планируемого периода (задача мнмз-и).

Постановка задачи. Предположим, что планируется эпл-ция обр-ия в течение нек-го периода времени продолжительностью n лет. Обр-ие имеет тенденцию с течением времени стареть и приносить все меньший доход $r(t)$ (t – возраст обр-ия). При этом есть возможность в начале любого года продать устаревшее обр. на цену $S(t)$, к-ая также зависит от возраста t, и купить новое обр. за цену P. Под возрастом обр-ия понимается период эпл-и обр-ия после последней замены, опр-ый в годах.

Требуется найти опт-ый план замены обр-ия с тем, чтобы суммарный доход за все n лет был бы мкс-м, учитывая, что к началу эпл-и возраст обр-ия составлял t_0 лет.

Исходные данные задачи доход $r(t)$ и остаточная стоимость $S(t)$ задаются по годам $t=\overline{0,n}$ таблично:

t	0	1	…	n
r	r(0)	r(1)	…	r(n)
S	S(0)	S(1)	…	S(n)

Выберем в качестве шага оптз-ю плана замены обр-ия с k-го по n-й годы. Процесс оптз-и начнем с последнего шага ($k=n$). на вел-у t накладывается сд. огр-ие:

$$1 \le t \le t_0 + k - 1. \qquad (1)$$

Стн. (1) выражает то, что t не может превышать возраста обр-ия за (k-1)-й год его эпл-и с учетом возраста к началу первого года, к-ый составляет t_0 лет; и не может быть меньше ед-ы (этот возраст обр-ие будет иметь к началу k-го года, если замена его произошла в начале предыдущего (k-1)-го года).

Т.о., пер. t яв-ся пер-ой состояния системы на k-м шаге.

Пер-ой упл-ия на k-м шаге яв-ся логическая пер., к-ая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) обр-ие в начале k-го года:

$$x_k(t) = \begin{cases} С, если\ обр.\ сохраняется, \\ З, если\ обр.\ заменяется. \end{cases}$$

Фк-ю Беллмана $F_k(t)$ опр-ют как мкс-но возможный доход от эпл-и обр-ия за годы с k-го по n-й, если к началу k-го возраст обр-ия составляет t лет. Применяя то или иное упл-ие, система переходит в новое состояние. Так, н-р, если в начале k-го года обр-ие сохраняется, то к началу (k+1)-го года его возраст увеличится на ед-у (состояние системы станет t + 1), в случае замены обр-ия новое достигнет к началу (k + 1)-го года возраста t = 1 год.

Если в начале каждого года сохраняется обр-ие, возраст к-го t лет, то доход за этот год составит r(t). К началу (k + 1)-го года возраст обр-ия достигнет (t + 1) и мкс-но возможный доход за оставшиеся годы (с (k +1)-го по n-й) составит $F_{k+1}(t+1)$. Если в начале k-го года принято решение о замене обр-ия, то продается старое обр. возраста t лет по цене S(t) и приобретается новое за P ед., а эпл-ия его в течение k-го года нового обр-ия принесет прибыль r(0). К началу сд-го года возраст обр-ия составит 1 год и за все оставшиеся годы с (k + 1)-го по n-й мкс-но возможний доход будет $F_{к+1}$ (1). Из двух возможных вариантов выбирается тот, к-ый приносит мкс-ый доход. Т.о., ур-ие Беллмана на каждом шаге упл-ия имеет вид:

$$F_к(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_{k+1}\ (t+1) & (C), \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (3), \end{cases} \qquad (2)$$

где фк. $F_к(t)$ выч-ся на каждом шаге упл-ия для всех $1 \le t \le t_0 + к - 1$. Упл-ие, при к-ом достигается мкс. дохода, яв-ся опт-ым.

Для первого шага условной оптз-и при к = n фк-я представляет собой доход за последний n-й год:

$$F_n(t) = \max \begin{cases} r(t) \ \ (C) \\ S(t) - P + r(0) \ \ (3) \end{cases} \qquad (3)$$

Значение фк-и $F_n(t)$, опр-мые $F_{n-1}(t)$, $F_{n-2}(t)$ вплоть до $F_1(t)$, $F_1(t_0)$, представляют собой возможные доходы за все годы. Мкс. дохода достигается при нек-ом упл-и, применяя к-ое на первом году, опр-ем возраст обр-ия к началу второго года. Для данного возраста обр-ия выбирается упл-ие, при к-ом достигается мкс-м дохода за год со второго по n-й и т.д. В результате на этапе безусловной оптз-и опр-ся года, в начале к-ых следует произвести замену обр-ия.

п1. Найти опт. стратегию эпл-и обр-ия на период продолжительностью 6 лет, если годовой доход r(t) и остаточная стоимость S(t) в зв-сти от возраста t заданы в табл.1, стоимость нового обр-ия равна P =13, в возраст обр-ия к началу эпл-го периода составлял t_0 = 1 год.

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6
r (t)	8	7	7	6	6	5	5
S (t)	12	10	8	8	7	6	4

Р. I этап. Условная оптз-ия.

1 – шаг при k = 6 для возможных состояний $t=\overline{1,6}$ функциональное (фнц.) ур-ие имеет вид (3):

$$F_6(1) = \max \begin{Bmatrix} 7 \\ 10 - 13 + 8 \end{Bmatrix} = 7 \quad (C);$$

$$F_6(2) = \max\begin{Bmatrix} 7 \\ 8-13+8 \end{Bmatrix} = 7 \quad (C);$$

$$F_6(3) = \max\begin{Bmatrix} 6 \\ 8-13+8 \end{Bmatrix} = 6 \quad (C);$$

$$F_6(4) = \max\begin{Bmatrix} 6 \\ 7-13+8 \end{Bmatrix} = 6 \quad (C);$$

$$F_6(5) = \max\begin{Bmatrix} 5 \\ 6-13+8 \end{Bmatrix} = 5 \quad (C);$$

$$F_6(6) = \max\begin{Bmatrix} 5 \\ 4-13+8 \end{Bmatrix} = 5 \quad (C);$$

2-й шаг. k = 5. Для возможных состояний t = $\overline{1,5}$ фнц. ур-ие имеет вид:

$$F_5(t) = \max\begin{Bmatrix} r(t) + F_6(t+1), \\ S(t) - P + r(0) + F_6(1), \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{С}) \\ (\text{З}) \end{matrix} \quad 1 \le t \le 5,$$

$$F_5(1) = \max\begin{Bmatrix} 7+7 \\ 10-13+8+7 \end{Bmatrix} = 14 \quad (C);$$

$$F_5(2) = \max\begin{Bmatrix} 7+6 \\ 8-13+8+7 \end{Bmatrix} = 13 \quad (C) \quad ;$$

$$F_5(3) = \max\begin{Bmatrix} 6+6 \\ 8-13+8+7 \end{Bmatrix} = 12 \quad (C);$$

$$F_5(4) = \max\begin{Bmatrix} 6+5 \\ 7-13+8+7 \end{Bmatrix} = 11 \quad (C);$$

$$F_5(5) = \max\begin{Bmatrix} 5+5 \\ 6-13+8+7 \end{Bmatrix} = 10 \quad (C).$$

3-й шаг. k = 4

$$F_4(t) = \max\begin{Bmatrix} r(t) + F_5(t+1) \\ S(t) - P + r(0) + F_5(1) \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{С}) \\ (\text{З}) \end{matrix} 1 \le t \le 4,$$

$$F_4(1) = \max\begin{Bmatrix} 7+13 \\ 10-13+8+14 \end{Bmatrix} = 20 \quad (C);$$

$$F_4(2) = \max\begin{Bmatrix} 7+12 \\ 8-13+8+14 \end{Bmatrix} = 19 \quad (C);$$

$$F_4(3) = \max\begin{Bmatrix} 6+11 \\ 8-13+8+14 \end{Bmatrix} = 17 \quad (C/3);$$

$$F_4(4) = \max\begin{Bmatrix} 6+10 \\ 8-13+8+14 \end{Bmatrix} = 16 \quad (C/3).$$

4-й шаг. k=3

$$F_3(t)=\max\begin{Bmatrix} r(t)+F_4(t+1), \\ S(t)-P+r(0)+F_4(1), \end{Bmatrix}\begin{matrix}(C)\\(3)\end{matrix} \quad 1\le t\le 3,$$

$$F_3(1)=\max\begin{Bmatrix} 7+19 \\ 10-13+8+20 \end{Bmatrix}=26 \quad (C);$$

$$F_3(2)=\max\begin{Bmatrix} 7+17 \\ 8-13+8+20 \end{Bmatrix}=24 \quad (C);$$

$$F_3(3)=\max\begin{Bmatrix} 6+16 \\ 8-13+8+20 \end{Bmatrix}=23 \quad (3).$$

5-й шаг. k = 2

$$F_2(t)=\max\begin{Bmatrix} r(t)+F_3(t+1), \\ S(t)-P+r(0)+F_3(1), \end{Bmatrix}\begin{matrix}(C)\\(3)\end{matrix} \quad 1\le t\le 2,$$

$$F_2(1)=\max\begin{Bmatrix} 7+24 \\ 10-13+8+26 \end{Bmatrix}=31 \quad (C/3);$$

$$F_2(2)=\max\begin{Bmatrix} 7+23 \\ 8-13+8+26 \end{Bmatrix}=30 \quad (C).$$

6-й шаг. k = 1

$$F_1(t)=\max\begin{Bmatrix} r(t)+F_2(t+1), \\ S(t)-P+r(0)+F_2(1), \end{Bmatrix}\begin{matrix}(C)\\(3)\end{matrix} \quad 1\le t\le 2,$$

$$F_1(1)=\max\begin{Bmatrix} 7+30 \\ 10-13+8+31 \end{Bmatrix}=37 \quad (C).$$

Результаты выч-й $F_k(t)$ приведены в табл. 2, где k–год эпл-и, t – возраст обр-ия.

Таблица 2

t k	1	2	3	4	5	6
1	37					
2	31	30				
3	26	24	$\boxed{23}$			
4	20	19	17	16		
5	14	13	12	11	10	
6	7	7	6	6	5	5

В табл. 2 выделено значение фк-и, ств-е состоянию «З» – замена обр-я.

II этап. Безусловная оптз-ия. Она начинается с шага при k = 1. Мкс-но возможный доход от эпл-и обр-ия за годы с 1-го по 6-й составляет $F_1(1)=37$. Этот опт-ый выигрыш достигается, если на первом году не производить замены обр-ия. Тогда к началу второго года возраст обр-ия увеличится на единицу и составит: $t_2=t_1+1=1+1=2$. Безусловно, опт. упл-ие при k = 2, $x_2(2)$ = C, т. е. мкс. дохода за годы со 2-го по 6-й достигается, если обр-ие не заменяется.

К началу третьего года при k=3 возраст. обр-ия станет $t_3=t_2+1=3$. Безусловное опт. упл-ие $x_3(3)=3$, т. е. для получения мкс-ма прибыли за оставшиеся годы нх-мо провести замену обр-ия.

К началу четвертного года при k=4 возраст. обр-ия станет равным $t_4=1$. безусловное опт. упл-ие $x_4(1)=C$.

Далее ств-но: $k = 5,\ t_5 = t_4+1 = 2,\ x_5(2) = C$,

$k = 6,\ t_6 = t_5+1 = 3,\ x_6(3) = C$.

Т. о., за 6 лет эпл-и обр-ия замену надо произвести один раз – в начале третьего года эпл-и.

2^0. Простейшие стохастические задачи ДП. В практике планирования часто встречаются задачи, в к-ых на состояние системы и на значение критерия (кт.) влияют случайные факторы. В таких случаях упл-мый процесс не полностью опр-ся нач-ым состоянием системы и выбранным упл-ем, а в какой-то мере зависит от случая. Такие задачи наз. стохастическими (вероятностными (верт.)).

В стохастической модели прб-ие от i-го этапа к (i–1)-му содержит некую неопр-ть. В результате прб-ия V_i (S_i, U_i) известный вектор состояния S_i переходит в случайный вектор состояния Z_{i-1} с фк-ей распределения (расп.) ω (S_i, Z_{i-1}, U_i), к-ая зависит от известного состояния S_i, случайного состояния Z_{i-1} и упл-ия U_i. Поэтому, прежде чем принять решение на (i–1)-м этапе, нх-мо положить, что дсв-ое значение вектора состояния S_{i-1} наблюдалось и известно.

Для стохастического процесса, как и для детерминированного, можно схематично записать посл-ть прб-й:

$Z_{N-1}=V_N(S_N, U_N),\ Z_{N-2}=V_{N-1}(S_{N-1}, U_{N-1}),\dots,\ Z_0=V_1(S_1, U_1)$,

но нельзя выразить конечное состояние как фк-ю нач-го. Это обусловлено тем, что результаты прб-й известны только после непосредственных наблюдений.

Вел-ы Z_i – случайные, поэтому векторы упл-ия U_i также случайны в том смысле, что их применение даёт неопр-ый результат для вел-ы кт-ия.

Кт-й $W=\sum_{i=1}^{N} g_i(S_i,U_i)$ как фк-я случайных величин также вел. случайная, поэтому в качестве кт-ия используют средние возможных результатов, т. е. мт-ое ожидание. Св-во лин-ти $M(x_1+x_2+\dots+x_N)=M(x_1)+M(x_2)+\dots+M(x_N)$ позволяет упростить фнц-ые ур-ия, описывающие процесс, а св-во инвариантности $M[M(x_1)+M(x_2)+\dots+M(x_N)]=M(x_1)+M(x_2)+\dots+M(x_N)$ показывает, что будущие решения основываются только на состояние системы в данный момент и не зависит от её предыстории.

Пусть $f_N(S_N)$ – мкс. мт-го ожидания вел-ы кт-ия по Z_{N-1} в N-этапном процессе, начинающемся с состояния S_N, при использовании опт-ой стратегии j тогда

$$f_N(S_N)=\max_{U_i} M\{\sum_{i=1}^{N} g_i\ (V_i(S_i, U_i), U_i)\}=\max_{U_i} M\{\sum_{i=1}^{N} g_i\ (Z_{i-1},U_i)\}, \qquad (4)$$

откуда для дискретного (дк.) случая имеем

$$\mathrm{f_N(S_N)} = \max_{U_N} \{\Sigma[g_N(Z_{N\text{-}1}, U_N)+f_{N\text{-}1}(Z_{N\text{-}1})]\, P_j\}, \qquad (5)$$

где $\mathrm{P}_j(j = 1, \mathrm{m})$ – верт-ти m возможных дк-ых состояний, к-ые может принимать случайный вектор Z_{N-1}, $0 \le p_j \le 1$, $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.

3^0. Задача распределения ресурсов в стохастическом варианте. Пусть в результате деления средств x на вел-ы y и x–у вел-а $\mathrm{g}(y)$ принимает одно из двух значений: $\mathrm{g}_1(y)$ с верт-ю p_1 при уменьшении вел-ы y до значения a_1y и $\mathrm{g}_2(y)$ с вер-ю $\mathrm{p}_2 = 1 - \mathrm{p}_1$ при уменьшении вел-ы y до значения a_2y. Фк-я $\mathrm{h}(x–y)$ при наличии значения $\mathrm{h}_1(x–y)$ с вер-ю q_1 при уменьшении вел-ы $x–y$ до значения $\mathrm{b}_1(x–y)$ и значение $\mathrm{h}_2(x–y)$ с вер-ю $\mathrm{q}_2 = 1 - \mathrm{q}_1$ при уменьшении вел-ы $x–y$ до значения $\mathrm{b}_2\,(x–y)$. Т. к. эти события, происходящие ств-но с вер-ми p_1, p_2, q_1, q_2 незв-мы, то закон расп-ия можно записать в сд-ем виде:

	b_1	b_1	b_2	b_3
Кол. средств	$a_1y+b_1(x\text{-}y)$	$a_2y+b_1(x\text{-}y)$	$a_1y+b_2(x\text{-}y)$	$a_2y+b_2(x\text{-}y)$
Вероятности	$\mathrm{p_1q_1}$	$\mathrm{p_2q_1}$	$\mathrm{p_1q_2}$	$\mathrm{p_2q_2}$

Если положить $\mathrm{P_1{=}p_1q_1}$, $\mathrm{P_2{=}p_1q_2}$, $\mathrm{P_3{=}p_2q_1}$, $\mathrm{P_4{=}p_2q_2}$, то $\sum_{j=1}^{4} P_i = 1$, $0 \le p_i \le 1$.

Т. о., имеет место дк-ый закон расп-ия случайной вел-ы.

Опр-им $\mathrm{f_N}(x)$ как мт. ожидание полного дохода от N-этапного процесса, если соблюдается принцип опт-ти. Тогда получим сд. фнц-ые ур-ия:

$$\mathrm{f_N}(x) = \max_{0\le y\le x} \{p_1q_1[g_1(y) + h_1(x\text{-}y)+f_{N\text{-}1}(a_1y+b_1(x\text{-}y))] +$$

$$+p_1q_2[g_1(y) +h_2(x\text{-}y)+f_{N\text{-}1}(a_1y+b_2(x\text{-}y))]+p_2q_1[g_2(y)+h_1(x\text{-}y)+$$
$$+f_{N\text{-}1}(a_2y+b_1(x\text{-}y))]+p_2q_2[g_2(y)+h_2(x\text{-}y)+f_{N\text{-}1}(a_2y+b_2(x\text{-}\mathrm{y}))]\} \qquad (6)$$

$$f_1(x)= \max_{0\le y\le x} \{p_1q_1[q_1(y)+h(x\text{-}y)]+p_1q_2[g_1(y)+h_2(x\text{-}y)]+$$

$$p_2q_1[q_2(y)+h_1(x\text{-}y)+p_2q_2[g_2(y)+h_2(x\text{-}y)\}, \qquad (7)$$

где $0 \le a_1, a_2, b_1, b_2 \le 1$, $0 \le p_1, p_2, q_1, q_2, \le 1$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$.

Если вер-ти p_1, p_2, q_1, q_2 известны, то ур-ия (6) и (7) превращаются в ств-им ур-ям для детерминированного процесса. Однако кол-во выч-й на каждом этапе значительно возрастает, поскольку нх-мо расв-ть все четыре возможности.

4^0. Задача добычи полезного ископаемого. Пусть имеются два месторождения (мрж.) А и В полезного (плз.) ископаемого (иск.), запасы к-ых ств-но равны x и y ед. Для добычи иск-го используется одна машина, к-ая либо с опр-ой верт-ю добывает часть запаса, либо выходит из строя и в дальнейшем не используется. Если машина работает на мрж-и А, то с верт-ю P_1 она добывает часть r_1 имеющегося запаса и с верт-ю $1\text{-}\mathrm{P}_1$ выходит из строя. Если работает на мрж-и В, то с верт-ю P_2 она добывает часть r_2 имеющегося запаса и с верт-ю $1\text{-}\mathrm{P}_2$ выходит из строя.

В какой посл-ти следует использовать машину на мрж-ях, чтобы общее кол. плз. иск-го, добытого до выхода машины из строя, было мкс-ым?

Разобьем период работы машины на этапы. Опр-им фк-ю f_N (x, y) как ожидаемые кол. плз. иск-го, добытого до выхода машины из строя.

В одноэтапном процессе в случае первоначального выбора для разработки мрж-ия А среднее кол. добытого запаса составляет $p_1\ r_1\ x$ и $p_2\ r_2$ у при выборе мрж-ия В, сд-но,

$$f_1\ (x,y) = \max\ [p_1r_1x, p_2r_2y] \qquad (8)$$

Рас-им (N+1) – этапный процесс. Каким бы ни был первоначальный выбор, его продолжение на оставшихся N этапах должно быть опт-но. Ожидаемое кол. добытого плз. иск-го в (N+1) – этапном процессе при первоначальном выборе мрж-ия А имеет вид

$$f_A\ (x, y) = P_1[r_1x+f_N((1-r_1)x,y)], \qquad (9)$$

а при выборе мрж-ия В

$$f_B\ (x,y) = P_2[r_2y + f_N(x,\ (1\text{-}r_2)y)] \qquad (10)$$

По условию нх-мо мксз-ть общее кол. добытого плз. иск-го, поэтому, объединяя (9) и (10), получим фнц-ое ур-ие для (N + 1) – этапного процесса

$$\mathrm{f_{N+1}}\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y}) = \max[\mathrm{f_A}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{f_B}(\mathrm{x},\mathrm{y})] = \max\left\{\begin{matrix} p_1[r_1x + f_N((1-r_1)x, y) \\ p_2[r_2y + f_N(x,(1-r_2)y)] \end{matrix}\right\} \qquad (11)$$

п2. Опр-ть опт-ое поведение в трехэтапном процессе, если $x = 400$, $y = 200, p_1 = 0{,}7,\ r_1 = 0{,}6; p_2 = 0{,}8,\ r_2 = 0{,}8$.

Р. Рас-им одноэтапный процесс, используя ур.(8). Если в 1-м этапе работы начинать на мрж-и. А что добыча плз. иск-го составит в среднем

$$f_1\ (x,y) = p_1r_1x = 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 400 = 168\,ед.$$

Если в течение 1-го этапа машина не вышла из строя, то в начале 2-го этапа нх-мо сделать выбор: продолжать работу на мрж-и А или начинать работу на мрж. В. На мрж. А добыто r_1x ед. плз. иск-го и его остаток составляет $x - r_1x = (1 - r_1)x$ ед. На мрж. В запас остался прежнем. Решая фнц-ое ур-ие, получим

$$f_1[(1-r_1)x, y] = \max\begin{Bmatrix} p_1r_1(1-r_1)x \\ p_2r_2y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 400 \\ 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 67{,}2 \\ 128 \end{Bmatrix} = 128\ ед.$$

сд-но, на 2-м этапе машина должна работать на мрж. В

В начале 3-го этапа следует сделать выбор: продолжать работу на мрж. В или на мрж. А. На мрж. В добыто r_2y ед. плз. иск-го, его остаток составляет $y\text{-}r_2y=(1\text{-}r_2)y$ ед. Имеем

$$f_1[(1-r_1)x,(1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} p_1r_1(1-r_1)x \\ p_2r_2(1-r_2)y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 400 \\ 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 67{,}2 \\ 25{,}6 \end{Bmatrix} = 67{,}2\ ед$$

Сд-но, на 3-м этапе машина должна работать на мрж. А.

Т.о., если на 1-м этапе работа начата на мрж. А, то опт. поведение состоит в том, что на 2-м этапе надо начать работу на мрж. В, а на 3-м – продолжать работу на мрж. А.

Пусть работа начата на мрж. В. тогда на 1-м этапе добыча плз. иск-го составляет в среднем $f_1(x,y) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 200 = 128$ *ед.*

В начале 2-го этапа производим выбор:

$$f_1[x,(1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 x \\ p_2 r_2 (1-r_2)y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 168 \\ 25,6 \end{Bmatrix} = 168 \text{ ед}$$

В начале 3-го этапа также производим выбор:

$$f_1[(1-r_1)x,(1-r_2)y] = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 (1-r_1)x \\ p_2 r_2 (1-r_2)y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 67,2 \\ 25,6 \end{Bmatrix} = 67,2 \text{ ед}$$

т.е. следует работу продолжать на мрж. А.

Т.о., если на 1-м этапе работа начата на мрж. В, то опт. поведение состоит в том, что на 2-м и 3-м этапах добыча ведется на мрж. А.

Рас-им двухэтапный и трехэтапный процессы. Пологая посл-но N=1,2, из ур-ия (11) опр-ем вид фк-й, нх-ых для решения задачи.

При N=1

$$f_2(x,y) = \max\begin{Bmatrix} p_1[r_1 x + f_1((1-r_1)x,y] \\ p_2[r_2 y + f_1(x,(1-r_2)y]] \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

При N=2

$$f_3(x,y) = \max\begin{Bmatrix} p_1[r_1 x + f_2(1-r_1)x,y] \\ p_2[r_2 y + f_2(x,(1-r_2)y]] \end{Bmatrix} \qquad (13)$$

где:

$$f_2((1+r_1)x,y) = \max\begin{Bmatrix} p_1[r_1(1-r_1)x + f_1((1-r_1)^2 x,y)] \\ p_2(r_2 y + f_1((1-r_1)x,(1-r_2)y)] \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

$$f_2(x,(1-r_2)y) = \max\begin{Bmatrix} p_1[r_1 x + f_1(1-r_1)x,(1-r_2)y] \\ p_2[r_2(1-r_2)y + f_1(x,(1-r_2)^2 y]] \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

Т.о., кроме значений $f_1((1-r_1)x,y), f_1(x,(1-r_2)y)$ и $f_1((1-r_1)x,(1-r_2)y)$, нх-мо выч-ть кол-во добытого плз. иск-го в одноэтапном процессе для сд-их случаев

а) $f_1((1-r_1)^2 x,y) = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 (1-r_1)^2 x \\ p_2 r_2 y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,16 \cdot 400 \\ 0,8 \cdot 0,8 \cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 26,88 \\ 128 \end{Bmatrix} = 128$ *ед.*

если на 1-м и 2-м этапах машина работала на мрж. А, а на 3-м – на мрж. В.

б) $f_1(x,(1-r_2)^2 y) = \max\begin{Bmatrix} p_1 r_1 x \\ p_2 r_2 (1-r_2)^2 y \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0,7 \cdot 0,6 \cdot 400 \\ 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,04 \cdot 200 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 168 \\ 5,12 \end{Bmatrix} = 168$ *ед*

если на 1-ми 2-м этапах машина работала на мрж. В, а на 3-м – на мрж. А. Подставляя найденные значения фк-й в ур-ия (12)–(15) окончательно получаем:

для двухэтапного процесса

$$f_2(x,y) = \max\begin{Bmatrix} 0,7(0,6\cdot 400+128) \\ 0,8(0,8\cdot 200+168) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 257,6 \\ 262,4 \end{Bmatrix} = 262,4 \ ед$$

$$f_2((1-r_1)x,y) = \max\begin{Bmatrix} 0,7(0,6\cdot 0,4\cdot 400+128) \\ 0,8(0,8\cdot 200+67,2) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 156,8 \\ 181,76 \end{Bmatrix} = 181,76 \ ед$$

$$f_2(x,(1-r_2)y) = \max\begin{Bmatrix} 0,7(0,6\cdot 400+67,2) \\ 0,8(0,8\cdot 0,2\cdot 200+168) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 215,04 \\ 160 \end{Bmatrix} = 215,04 \ ед$$

т. е работу на 1-м этапе надо начинать на мрж. В;

для трехэтапного процесса

$$f_3(x,y) = \max\begin{Bmatrix} 0,7(0,6\cdot 400+181,76) \\ 0,8(0,8\cdot 200+215,04) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 295,262 \\ 300,032 \end{Bmatrix} = 300,032 \ ед.,$$

т.е. работу 1-м этапе надо начинать на мрж. В.

Т.о., чтобы в трехэтапном процессе добыть мкс. кол-во плз. иск-го (300,032 *ед*), нх-мо: на 1-м этапе вести работу на мрж-и В, а на 2-м и 3-м этапах – на мрж. А.

5.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДП

Вопросы для самопроверки

1. Для задач какой структуры возможно применение метода ДП?

2. Сформулируйте принцип опт-сти Беллмана и поясните его смысл.

3. Какой основной недостаток ДП?

4. В чем состоит постановка задачи ДП? Приведите примеры.

5. В чем сущность вычт-го метода ДП?

6. Сформулируйте задачи мнмз-и расхода горючего при наборе высота и скорости.

7. Приведите понятие сети. Какая сеть наз. дт-но связанной?

8. Сформулируйте задачу о выборе кратчайшего пути.

9. Сформулируйте задачу поиска кратчайшего расстояния по сети от каждой точки до всех остальных. В чем суть алгоритма ее решения?

Задания для кр. работы

1. Найти опт. управление (упл.) процессов набора высоты и скорости самолетом, позволяющее мнмз-ть общий расход горючего при сд. условиях:

1.1

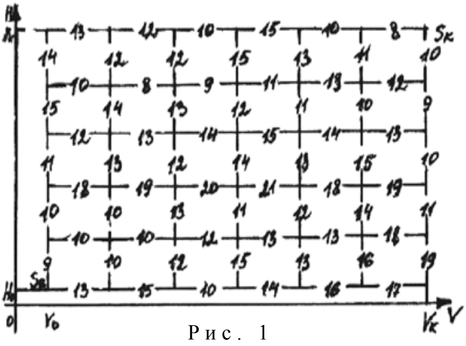


Рис. 1

1.2

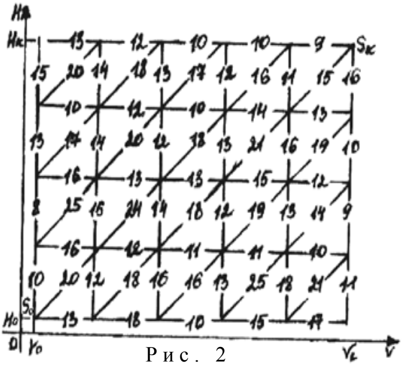


Рис. 2

1.3. Составить самостоятельно задачу, подобную к рис. 1 (задачи 1.1) при $n_1 = 6(\Delta H_i)$, $n_2 = 5(\Delta V_j)$ и решить ее.

1.4. Решить задачу как в 1.3. при $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$.

1.5. Составить задачу, подобную к рис. 2 (задачи 1.2) при $n_1 = 4$ и $n_2 = 5$.

1.6. Решить задачу как в 1.5 при $n_1 = 5$ и $n_2 = 4$.

2. Найти критические расстояния сети, изб-ой на рис. 3.

2.1. От всех точек до точки 1.

2.2. От всех точек до точки 3.

2.3. От всех точек до точки 5.
2.4. От всех точек до точки 8
2.5. От всех точек до точки 12

3. На рис. 4 проставлены цифры, (хркз.) стоимость a_{ij} проезда из пункта *i* в пункт *j*. Требуется:

3.1. Найти опт. путь из пункта 1 пункт 13. О: $Z_{min=}$14, 1–6–7–11–13.

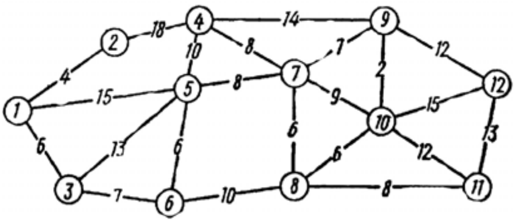


Рис. 3

3.2. Найти опт-ые пути из всех точек до точки 13.

4. На рис. 5 проставлены цифры хркз-ие длину a_{ij} расстояния из пункта i в пункт j. Требуется:

4.1. Найти опт. маршрут от A до B при условии, что он пройдет через пункт 8.
4.2 Найти опт. маршрут из A в B.

О: 4.1 Z_{min} = 35, 1–2–7–8–12–13. 4.2. Z_{min} = 25, 1–3–4–9–11–13.

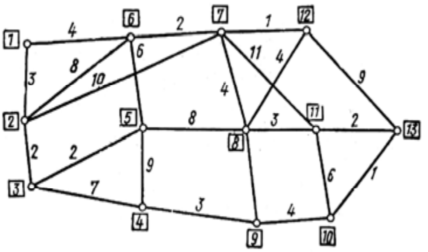


Рис. 4

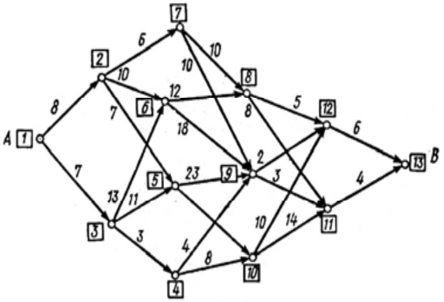


Рис. 5

5. На рис. 6 проставлены цифры, хрнз-ие длину a_{ij} из пункта i в пункт j. Требуется найти:

5.1. Кратчайшее расстояние (опт. путь) от A до B.
5.2. Опт. путь от всех точек до B
5.3. Опт. путь от всех точек до A_3
5.4. Опт. путь от всех точек до A_4
5.5. Опт. путь от всех точек до A_5
5.6. Опт. путь от всех точек до A_6

Ук: при нахождении опт. пути от всех точек до фиксированной точки направление стрелок, указанные на рис. 6, аналируются.

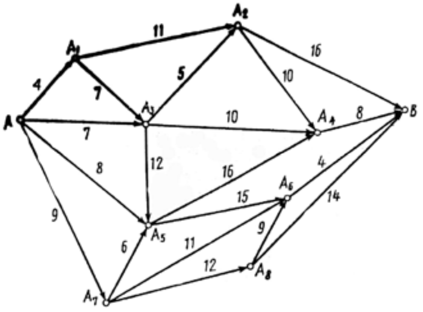


Рис. 6

5.2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самопроверки

1. Приведите мт-ю модель задачи опт-го распределения (расп.) инвестиций.
2. В чем суть условной и безусловной оптз-и этой задачи?
3. Как приводятся задачи к рекуррентным стн-ям в ДП при непр-ых пер-ых?
4. Напишите основное рекуррентное стн. для задачи расп-ия ресурсов при двух огр-ях.
5. Напишите рекуррентное стн. для задачи с двумя пер-ми упл.
6. Как применяется метод множителей Лагранжа для понижения размерности задачи.
7. Сформулируйте рекуррентное стн. для тр-ой задачи.
8. В чем суть метода посл-ых прж-й для уменьшения размерности задачи.

Задания для кр. работы

1. Расп-ть опт-ым образом денежные средства инвестра вел-ой X между четырьмя прд-ми. От выделенной суммы зависит прирост (g_j (x_j)) выпуска продукции на прд-ях, значения к-рых приведены в табл. 1.

1. N

Таблица 1

Денежные средства, X по Вар.		Прирост выпуска продукции на предприятиях			
		I	II	III	IV
0: 20	6: 40	9+*N*	11+N	13+N	12+N
1: 40	7: 60	17+N	33+N	29+N	35+N
2: 60	8: 80	28+N	45+N	38+N	40+N
3: 80	9: 100	38+N	51+N	49+N	54+N
4: 100		46+N	68+N	61+N	73+N
5: 120		68+N	80+N	81+N	92+N

2. На развитие четырех прд-й выделено X = 140 млн. руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое прд, заданная значением нелин-ой фк-и $g_j(x_j)$, представленной в табл. 2. Нх-мо расп-ть выделенные средства между прд-ми т.о., чтобы получить мкс-ый суммарный доход.

2. N

Таблица 2

Денежные средства , X по Вар.		Прирост выпуска продукции на предприятиях			
		I	II	III	IV
1: 40	6: 60	11+N	13+N	15+N	14+N
2: 60	7: 70	16+N	32+N	28+N	34+N
3: 80	8: 80	29+N	46+N	39+N	41+N
4: 100	9: 90	38+N	51+N	49+N	54+N
5: 120		45+N	67+N	60+N	72+N
0: 140		69+N	81+N	82+N	93+N

Ук: Студент выполняет тот вариант кр-ой работы, к-ый совпадает с последней цифрой (1. N или 2. N) его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра – нечетное число (1, 3, 5, 7, 9), то выполняет задания 1. № (табл. 1); если же предпоследняя цифра учебного шифра – четное число или нуль (2, 4, 6, 8, 0), то выполняет задание 2. № (табл. 2).

5.3. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Вопросы для самопроверки

1. Приведите основные хрк-ки упл-ия запасами.

2. В чем суть детерминированного стационарного спроса. Покажите на графике изменения запасов.

3. Как сформулируется детерминированная модель при пер-ых издержках прз. (пер. цена товара)?

4. Сформулируйте модель задачи упл-ия многономенклатурными запасами.

5. Составьте фнц-ые ур. для задачи нестационарного детерминированного спроса.

6. Приведите фнц. ур-ия модели упл-ия запасами с вогнутой фк. затрат.

7. В чем суть дискретной модели упл-ия запасами?

8. В чем отличие фнц-ых ур-й динамической модели складирования для различных вариантов очередности пополнения и расходования запасов.

Задания для кр. работы

1. Пусть по n периодам задан расход d_k ($k = \overline{1,n}$), производимый в конце каждого периода. Известны нач-ый (ξ_0) и конечный (ξ_n) уровень запасов и зв-ть суммарных затрат на хранение $(\varphi(\xi_k))$ и пополнение $(\psi(x_k))$ запасов в данном периоде.

Требуется опр-ть размеры пополнения запасов (x_k) в каждом периоде для уд-ия заданного расхода из условия мнмз-и суммарных затрат за весь планируемый период времени (см. з1, п1 : 5^0, п2 : 7^0) при сд-их исходных данных.

1.1 п = 4; $\xi_0 = 2$, $\xi_4 = 0$; $d_1 = 6$, $d_2 = 5$, $d_3 = 15$, $d_4 = 20$; $\psi(x_k) = 5+2\,x_k$,

$\varphi(\xi_k) = 0{,}4\ \overline{\xi_k}\ \left(\mathrm{k} = \overline{1,4}\right)$.Ежемесячные пополнения запасов не больше 15 ед.

1.2. В задаче 1.1 положить $\xi_0 = 0$, $\xi_4 = 5$.

1.3. В задаче 1.1. положить $\psi\,(x_к) = \begin{cases} 2x_к & \text{при } 0 \le x_к \le 5, \\ 3x_к - 5 & \text{при } 5 < x_к \le 10, \\ 4x_к - 15 & \text{при } x_к > 10. \end{cases}$

1.4. В задаче 1.1. принять $\psi\,(x_к) = \begin{cases} 4x_к & \text{при } 0 \le x_к \le 5, \\ 3x_к + 5 & \text{при } 5 < x_к \le 15. \end{cases}$

1.5 В задаче 1.1 положить n = 3; $\xi_0 = 10$, $\xi_3 = 0$; $d_1 = 15$, $d_2 = 5$, $d_3 = 10$, $\varphi(\bar{\xi}_k)$, $\psi(x_k)$ заданы таблично:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(\bar{\xi}_k)$	0	1	3	5	9	18	20	28	40	42	47	55	65	70	90	100
$\psi(x_k)$	0	–	–	–	–	20	–	–	–	–	30	–	–	–	–	35

Пополнение производиться кратными 5.

1.6. В задаче 1.1. положить $\psi\left(x_к\right) = 6 + x_к$, $\varphi\left(\bar{\xi}_к\right) = 0,3\bar{\xi}_к$.

1.7. В задаче 1.1. принять $\xi_0 = 2$, $\xi_4 = 5$.

1.8. В задаче 1.1. принять $\psi\ \left(x_к\right) = \begin{cases} 3x_к & \text{при } 0 \le x_к\ \le 5, \\ 4x_к - 5 & \text{при } 5 < x_к \le 10, \\ 4x_к - 10 & \text{при } x_к > 10. \end{cases}$

1.9. В задаче 1.1. положить $\psi\ \left(x_к\right) = \begin{cases} 3x_к & \text{при } 0 \le x_к \le 5, \\ 4кx + 5 & \text{при } 5 < x_к \le 15. \end{cases}$

1.10 в задаче 1.5. принять $\xi_0 = 0$, $\xi_3 = 5$

О: 1.1 $Z_{max} = 120$. $x^* = (4, 10, 15, 15)$. 1.2. $Z_{max}=140$. $x^* = (6, 15,15, 15)$ 1.3. $Z_{max} = 242, 6$; $x^* = (9, 10, 10, 15)$. 1.4. $Z_{max} = 272, 6$; $x^* \in \{(4,\ 10,\ 15,\ 15,),(14,\ 0,\ 15,\ 15)\}$

2. Емкость склада по хранению запасов огр-на вел-ой С ед. В каждом из n периодов запасы могут пополняться с затратами $\alpha_к$ на ед. продукции и расходоваться с получением дохода $\beta_к$ за ед. продукции, причем решение о пополнении или расходовании запасов принимается однократно в каждом периоде.

Опр-ть опт. стратегию в упл-и запасами из условия мксз-и суммарной прибыли при заданном нач. уровне запасов (см. з2, п3:8^0) для сд-их исходных данных.

2.1 n = 4, c = 10, $\xi_0 = 0$, $\xi_4 = 0$; α_k и β_k заданы таблично:

к	1	2	3	4
$\alpha_к$	10	15	10	6
$\beta_к$	7	12	9	8

2.2. В задаче 2.1 положить с = 12, $\xi_0 = 5$.

2.3. В задаче 2.1 принять n = 5, c =15, $\xi_0 = 4$, $\xi_5 = 10$; α_k и β_k заделаны таблично:

к	1	2	3	4	5
$\alpha_к$	10	18	8	11	12
$\beta_к$	15	13	10	7	9

2.4. Решите задачу 2.1 при пер-ой емкости склада: $c_1=14$, $c_2=10$, $c_3=15$, $c_4=9$, $c_5=12$.

2.5 В задаче 1.4 считать, что затраты на пополнение $\psi\left(x_к\right)$ и хранение $\varphi\left(\bar{\xi}_к\right)$ не прц-ны ств-но $\alpha_к$ и $\beta_к$, а заданы таблично:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi\left(\bar{\xi}_к\right)$	10	15	20	22	25	27	30	35	45	60
$\psi\left(x_к\right)$	7	12	15	20	25	30	35	39	48	55

2.6. В задаче 2.1. принять С = 14, $\xi_0 = 3$.

2.7. В задаче 2.3. положить С = 12, $\xi_5 = 8$

2.8. В задаче 2.3. положить С = 14, $\xi_0 = 2$, $\xi_5 = 6$.

2.9. Решить задачу 2.3. при пер-ой емкости: $C_1 = 14, C_2 = 10, C_3 = 15, C_4 = 9$.

2.10. В задаче 2.1. принять $\xi_0=4$, $\xi_4=2$

О: 2.1. $\acute{Z}_{\max} = 90$, $x^* = (10, 0, 10, 0)$, $y^* = (0, 10, 10, 0)$. 2.2. $\acute{Z}_{\max} = 111$, $x^* = (7, 0, 12, 4)$, $y^* = (0, 12, 12, 0)$. 2.3. $\acute{Z}_{\max} = 100$, $x^* = (0, 15, 0, 15)$, $y^* = (4, 15, 0, 5)$. 2.4. $\acute{Z}_{\max} = 34$, $x^* = (0, 6, 0, 9, 3)$, $y^* = (0, 10, 0, 9, 0)$. 2.5. $\acute{Z}_{\max} = 52$, $x^* = (0, 8, 3, 8)$, $y^* = (2, 10, 1, 10)$ или х* = (0, 8, 4, 0), $y^* = (2, 10, 2, 10)$ или $x^* = (0, 8, 5, 8)$, $y^* = (2, 10, 3, 10)$.

5.4. СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДП.

Вопросы для самопроверки

1. Что яв-ся пер-ой упл-ия и пер-ой состояния в задаче выбора опт-ой стратегии обновления (обн) оборудования (обр.)?

2. Запишите фнц-ые ур-ия, используемые в каждом шаге упл-ия в задаче выбора опт-ой стратегии обн-ия обр-ия.

3. Какие задачи наз. стохастическими?

4. Какой критерий яв-ся мерой качества поведения при решении стохастических задач ДП?

5. Сформулировать и вывести фнц-ые ур-ия задачи расп-ия ресурсов в стохастическом варианте.

6. Составить фнц-ые ур-ия для задачи добычи полезного ископаемого на трех месторождениях.

Задачи для кр. работы

1. Найти опт. план замены оборудования на период с продолжительностью Т лет, если годовой доход r (t) и остаточная стоимость S (t) в зависимость от возраста t заданы в табл., стоимость нового оборудования Р, а возраст оборудования к началу эксплуатационного периода t_0 год.

1.1. $T = 6, p = 7, t_0 = 1; r(t) и$ S(t) заданы в табл:

T	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	9	8	7	7	7	6	6
S(t)	7	6	5	4	4	3	2

1.2. В задаче 1.1 принять $t_0=0$.

1.3. В задаче 1.1 полагать $t_0=2$.

1.4. В задаче 1.1 вместо r(t) взять r(t+1).

1.5. В задаче 1.1 вместо S(t) взять S(t-1) и р=6.

1.6. В задаче 1.1 вместо r(t), S(t) взять r(t+1), S(t-1) и р=6.

1.7. В задаче 1.1 принять t_0=3.

2. Предприниматель закупил и установил за R млн. руб. новую деревообрабатывающую линию станков для прз-ва стройматериалов. Динамика объемов z(t) продажи стройматериалов, затраты б(t) на эксплуатацию станков и их остаточная стоимость s(t) по годам приведены в табл.

Опр-ть опт. план замены станков, обеспечивающий мкс-ый объем продажи стройматериалов.

2.1. R=40 млн. руб., z(t), б(t) и s(t) приведены в табл:

Показатели	Время эксплуатации станков, лет				
	0	1	2	3	4
Объемы продаж, млн руб.	100	80	70	60	55
Затраты на эксплуатацию млн руб.	20	25	30	35	45
Остаточная стоимость, млн руб.	38	36	30	20	15

2.2. В задаче 2.1 вместо z(t) взять z(t+5).
2.3. В задаче 2.1 вместо z(t) взять z(t-5).
2.4. В задаче 2.1 вместо б(t) взять б(t+5).
2.5. В задаче 2.1 вместо б(t) взять б(t-5).
2.6. В задаче 2.1 вместо s(t) взять s(t+5) и R=45 млн. руб.
2.7. В задаче 2.1 вместо s(t) взять s(t-5) и R=35 млн. руб.

3. Опр-ть опт-ый срок эксплуатации и продажи нового легкого автомобиля ВАЗ 2106 и ств-но замены его на другой на период с продолжительностью T лет. Динамика изменения ликвидационной стоимости Ц(t) и затрат З(t) на ремонт в отс-ых единицах к цене $Ц_0$ нового автомобиля, а также вел-а d(t) ежегодного пробега приведены в табл.

3.1. T=6 лет, вел-ы Ц(t) / $Ц_0$, З(t) / $Ц_0$ и d(t) даны в табл:

Показатели	Время эксплуатации автомобиля, лет						
	0	1	2	3	4	5	6
Ликвидационная стоимость, Ц(t)/$Ц_0$	1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Затраты на ремонт, З(t)/$Ц_0$	0,1	0,06	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25
Пробег, тыс. км.	1	20	20	20	20	20	20

3.2. В задаче 3.1. полагать T = 5 лет.
3.3. В задаче 3.1. принять Ц(t)/$Ц_0$ = {1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4}.
3.4. В задаче 3.1. принять Ц(t)/$Ц_0$ = {1; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2}.
3.5. В задаче 3.1. в место З(t)/$Ц_0$ взять 3(t + 0,02)/$Ц_0$.
3.6. В задаче 3.1. в место З(t)/$Ц_0$ взять 3(t - 0,02)/$Ц_0$.
3.7. В задаче 3.1. полагать d(t) = {1, 25, 25, 25, 25,25,26}.

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

> Начиная с незыблемого, человек всегда кончит сомнениями, но если он сможет начать с сомнений, то придет к незыблемому.
>
> Фр. Бекон

ЛЕКЦИЯ 21

6.1 МОДЕЛИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1^0. Предмет теории игр, основные понятия. Одна из задач теории опт-ых решений – принятие решения в условиях неопределенности (неопр.). Для обоснования решений разработаны специальные мт. методы, к-ые расв-ся в теории игр. Она возникла в 1944 г., когда вышла в свет монография Неймана Моргенштерна «Теория игр и экономического поведения».

Теория игр – это теория мт-их моделей, интересы участников к-ых различны (противоположны), причем они достигают своей цели различными путями. Столкновение противоположных интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций. В таких случаях теория игр позволяет найти лучшее решение для поведения участников.

Чтобы исключить трудности, возникающие при анализе практических конфликтных ситуаций в результате наличия многих несущественных факторов, строится упрощенная модель ситуации. Такая модель наз. игрой. Конфликтная ситуация в игровой модели развивается по совокупности предварительно оговоренных правил и условий игры. Естественной базой для анализа конфликтных ситуаций служат широко распространенные игры – шахматы, шашки, карточные игры, рулетка, покер и т.д.

В теорию игр вводится сд. терминология: «партия» (связана с частной возможной реализацией оговоренных правил и условий игры), «игроки» (стороны, участвующие в конфликте), «выигрыш» (исход конфликта) и т.д.

Неопр-сть результата игры вызывается сд. причинами:

1. Особенности правил игры вызывает такое разнообразие в ее развитии, что подсказать результат игры заранее невозможно. Неопр-ти такого вида наз. комбинаторными, а ств-ие игры – также комбинаторными (н-р, игры: шахматы, шашки). Однако комбинаторная сложность игр носит исторически преходящий характер, т.к. с развитием ЭВМ и использованием ств-го мт. аппарата для целого ряда комбинаторных игр может быть найдены выигрышные комбинации путем решения логических задач (н-р, для шахматной игры).

2. Неопр-ти, вызванные случайными факторами (причинами). Они возникают при азартных играх (игра в кости; угадывание, какой стороной выпадет монета; рулетка).

3. Неопр-ти, возникшие из-за отсутствия информации о действиях противника, о его стратегии. Игры такого рода наз. стратегическими.

Основное содержание теории игры состоит в изучении сд-ей проблемы, поставленной фон Нейманом: «Если n партнеров (игроков) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ играют в данную игру Г, то как должен вести i-й игрок для достижения наиболее благоприятного для себя исхода».

Предполагается, что в конце каждой партии игрок Pi получает сумму денег v_i – выигрыш. При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью мксз-и общей суммы получаемых им денег. В большинстве случаев салонных игр (н-р, покере) общая сумма денег, теряемых проигравшими игроками, равна сумме денег, получаемых выигравшими партнерами, т.е.

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_i + \ldots + v_n = 0. \qquad (1)$$

При этом, если $v_i > 0$, то ств-ет выигрышу, $v_i < 0$ – проигрышу и $v_i = 0$ – ничейному исходу.

Игры, для к-ых имеет место стн. (1), наз. играми с нулевой суммой. В этих играх средства переходят с одного партнера к другому, не поступая извне.

Игры можно делить на кооперативные и некооперативные. В первых играх партнеры имеют возможность образовать коалиции и играть как команды, тогда как в последних каждого игрока интересует лишь его собственный результат.

Игры также классифицируются по числу игроков и числу возможных ходов. Шахматы яв-ся игрой двух партнеров с конечным числом возможных ходов, покер-игрой многих партнеров также с конечным числом ходов. Ходом наз. выбор одно из предположенных правилами игры действий и его осуществление. Стратегией игрока наз. план, по к-му он совершает выбор в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации. При этом игрок принимает решения по ходу игры или решения, принимает заранее с учетом всевозможных случаев. Тогда совокупность этих решений составляет его стратегию. В зависимости от числа стратегий имеет конечные и бесконечные игры.

Задачей теории игр яв-ся выработка рекомендаций для игроков, т.е. опр-ие для них опт-ой стратегии. Опт-ой наз. стратегия, к-ая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку мкс–но возможный средний выигрыш.

Простейший вид стратегической игры – игра двух лиц с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Рас-им

n1 (игра чет-нечет или сравнение монет). Правила. Первый игрок P_1 выбирает одну из двух сторон монеты. Второй игрок P_2, не зная выбора первого, также выбирает одну из его сторон (т.е. как игра «выбрасывания» одного или двух пальцев). После того как оба игрока произвели свой выбор, P_2 платить 1 игроку P_1, если выбранные стороны совпали (т.е. четное число пальцев) и – 1 в противном случае (нечетное число пальцев). Требуется произвести анализ игры.

Р. Здесь 1 ств-ет выигрышу первым игроком одной ед-ы, а – 1 ств-ет проигрышу им одной ед-ы. В этом предположении мы говорим, что P_1 играет на мкс, а P_2 – на мнм. В дальнейшем изложении всегда будем считать P_1 играющим на мкс и записывать платежи в форме его выигрыша.

Если обз-им стратегии P_1 через S_1 (орел) и S_2 (решка), а стратегии P_2 – через t_1 (орел) и t_2(решка), то всю игру можно представить в виде сд-ей таблицы:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad (2)$$

где строки ств-ют возможным выборам для P_1, а столбцы – возможным выборам для P_2. Как только P_1 выбирает строку и P_2 – столбец, партия заканчивается и P_1 выигрывает величину, стоящую на пересечении выбранных строки и столбца.

При этом P_1 может сделать свой выбор случайным образом (н-р, выбрасыванием монеты). Тогда верт. выбора игроком P_1 равна $\frac{1}{2}$, верт. выбора решки также равна $\frac{1}{2}$. Предположим, что игрок P_1 делает свой выбор именно т.о. Если P_2 выбирает орла (t_1), то P_1 имеет мт. ожидание выигрыша (т.е. сумму произведений верт-ти выбора каждой строки на ств-й выигрыш), равное

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(-1)=0$$

Если P_2 выбирает решетку (t_2), мт. ожидание выигрыша для P_1 равно

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0\cdot$$

Сд-но, средний выигрыш P_1 равно нулю. Указанная тактика игры для P_1 явся единственной, не связанной с риском среднего проигрыша. Чтобы показать это, представим, что P_1 выбирает орла с верт-ю $x \neq \frac{1}{2}$ и решку – с верт. (1–x), где $0 \leq x \leq 1$. Если P_2 выбирает орла, то средний выигрыш для P_1 равен

$$E_0 = x\cdot 1+(1-x)(-1)=2x-1,$$

если же P_2 выбирает решку, мт. ожидание выигрыша для P_1 равно

$$E_p = x(-1)+(1-x)\cdot 1=1-2x$$

При $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $E_0 < 0$ и при $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $E_p < 0$. Сд-но, для достижения нулевого значения мт-го ожидания выигрыша P_1 должен выбирать орла и решку с равной верт-ю $x=\frac{1}{2}$. То же самое справедливо для P_2.

п1а (игра сравнение монет). Правила. Каждый игрок случайным образом кладет на стол монету. Если обе монеты выложены одной стороной (четно), то они достаются игроку P_1, если же одна лежит орлом вверх, а другая – решеткой (т.е. нечетно), то их забирает игрок P_2.

Сразу видно, что такая игра, по сути дела, равносильна предыдущей. Пусть стратегия выбора орлов и решеток двумя игроками обз-ны через S_0, S_p и t_0, t_p .Тогда матрицы выигрышей есть

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{t}_\mathrm{o} & \mathrm{t}_\mathrm{p} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{S}_0 \\ \mathrm{S}_\mathrm{p} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Разница между таблицами (2) и (3) заключается только в названиях стратегий и денежных единицах. Однако ни одно из этих различий не оказывает влияния на ход игры, поэтому игру можно отождествить ее матрицей выигрышей.

Итак, все игры, имеющие одинаковые матрицы выигрышей, будут далее расв-ся, как одна и та же игра, т.е. игры с матрицами (2) и (3) экв-ны.

п2 (игра Морра). Правила. Игроки одновременно показывают один или два пальца, и в тот же момент каждый из игроков называет число. Если число, названное одним из игроков, совпадет с общим числом пальцев, показываемых обоими игроками, то игрок получает со своего противника выигрыш, равной этому числу (если оба игрока угадают верно, то чистый платеж каждого равен 0).

Требуется составить матрицу игры.

Р. Здесь каждый игрок имеет 4 возможные стратегии. Так P_1 может показать один палец и сказать, что в сумме будет два или три, или показать два пальца и сказать, что всего их будет три или четыре (конечно, имеются и др. возможности, н-р, показать один палец и сказать четыре, но такая стратегия, очевидно, никогда не может привести к выигрышу. Поэтому ее можно сразу исключить из рас-ия). Если обз-ть через S_{ij} и t_{ij} стратегии «показать i пальцев и назвать число j» ств-но для первого и второго игроков, то получим сд. матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} t_{12} & t_{13} & \mathrm{t}_{23} & t_{24} \end{array} \\ \begin{array}{c} S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \\ S_{24} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4}$$

Отсюда имеем, н-р, если игрок P$_1$ выбирает S_{13}, а $P_2 - t_{24}$, то это значит, что P_1 показывает 1 палец и называет число три, P_2 – два пальца (называет число четыре), что в сумме составляет три – число, названное P_1. Сд-но, P_1, выигрывает 3 у P_2, как указано в матрице (4).

Обобщая рас-ые примеры приходим к основным опр-ям.

2^0. Принцип минимакса. Решение игры в смешанных стратегиях. Рас-им конечные парные игы с нулевой суммой. Пусть игрок P_1 имеет m стратегий $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ и игрок P_2 – n стратегией $B_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Составим табл. 1.

Таблица 1

P$_2$ P$_1$	B$_1$	B$_2$	…	B$_j$	…	B$_n$	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A$_1$	a$_{11}$	a$_{12}$	…	a$_{1j}$	…	a$_{1n}$	α_1
A$_2$	a$_{21}$	a$_{22}$	…	a$_{2j}$	…	a$_{2n}$	α_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	…
A$_i$	a$_{i1}$	a$_{i2}$	…	a$_{ij}$	…	a$_{in}$	α_i
⋮							
A$_m$	a$_{m1}$	a$_{m2}$	…	a$_{mj}$	…	a$_{mn}$	α_m
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	β_1	β_2	…	β_j	…	β_n	α β

о1. Матричная игра Г опр-ся любой матрицей $A=\left(a_{ij}\right)$ табл. 1 с m строками и n столбцами, каждый эл-т к-ой яв-ся произвольным дсв-ым числом. Матрица A наз. матрицей выигрышей (для первого игрока P_1). Эл. a_{ij} представляет сумму, уплачиваемую игроком P_2 игроку P_1, если P$_1$ выбирает ход, ств-й i-й строке, и P_2 выбирает ход, ств-й с j-м столбцом.

о2. Под смешанной стратегией игрока P_1 будем понимать такой вектор-строку $X=\left(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{i}, ..., \mathrm{x}_\mathrm{m}\right)$ с неотц. компонентами x_i, что

$$x_1 + ... + x_i + ... + x_m = 1.$$

Аналогично под смешанной стратегией для P_2 понимается такой вектор столбец $Y=\left(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_\mathrm{i}, ..., \mathrm{y}_\mathrm{n}\right)$ с неотц. компонентами y_j, что

$$y_1 + ... + y_j + ... + y_n = 1.$$

Эл-ты x_i и y_j представляют ств-но частоты, с к-ми P_1 выбирает свой i-й ход (строку) и P_2 выбирает свой i-й ход (столбец). В п1 смешанными стратегиями игрока P_1, в част., яв-ся (1, 0), (0, 1), (1/2, 1/2). Игрок P_2 может использовать аналогичные смешанные стратегии.

о3. Для каждого i=1, 2, ..., m смешанная стратегия, i -я компонента к-ой равна 1, а остальные – нулю, наз. i -й чистой стратегией игрока А и обз-ся через i . Аналогично опр-ся j -я чистая стратегия для игрока В: $y_j = 1$, $y_k = 0,\ \mathrm{k} \neq j,\ \mathrm{k} = \overline{1, n}$

Рас-им теперь матричную игру $A = \left(a_{ij}\right)$ табл. 1. Если игрок P_1 выбирает любую чистую стратегию i , он уверен, что выиграет по крайней мере $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Поскольку P_1 может выбрать любое i , то он выберет такую чистую стратегию i , при к-ом $\min\limits_j a_{ij}$ достигает мкс-ма. При использовании этой чистой стратегии А может выиграть не менее

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \ . \tag{5}$$

Если игрок P_2 выбирает j, то наихудшем случае он проиграет $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Тогда P_2 может выбрать такую чистую стратегию j, при к-ой мнмз-ся его проигрыш. При использовании этой чистой стратегии P_2 может быть гарантирован, что P_1 не может выиграть больше, чем

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \tag{6}$$

Вел-а α наз. нижней ценой игры или максиминным выигрышем P_1 , а β наз. верхней ценой игры или минимаксным проигрышем P_2 . При этом всегда $\alpha \leq \beta$.

Принцип, согласно к-му игроки выбирают эти стратегии, наз. принципом максимина (для P_1) или минимакса (для P_2)

Если имеет место стн-ие

$$\max_\mathrm{i} \min_\mathrm{j} \mathrm{a}_\mathrm{ij} = \min_\mathrm{j} \max_\mathrm{i} \mathrm{a}_\mathrm{ij} = \mathrm{V}, \tag{7}$$

где $\mathrm{V} = a_{i_0 j_0}$ – эл. яв-ся одновременно мнм-ым в строке i_0 и мкс-ым в своем столбце j_0 . Любой такой эл-т наз. седловой точкой. А игра наз. игрой с седловой точкой. Указанные чистые стратегии с учетом фм-л (5)–(7) наз. опт-ми чистыми стратегиями.

п3. Опр-ть нижнюю и верхнюю цены для игр заданных платежными матрицами: 1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Р. 1) По $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ находим $\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right) = \left(0,\ 1,\ -1\right)$, отсюда опр-ем $\alpha = \max\limits_\mathrm{i} d_\mathrm{i} = \max\left(0, 1, -1\right) = 1$. По $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ опр-им $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \left(4, 5, 3, 4\right)$, тогда $\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\left(4,\ 5,\ 3,\ 4\right) = 3$. Итак, $\alpha = a_{22} = 1$ и $\beta = a_{23} = 3$, т.е. $\alpha < \beta$.

2) $\alpha=\max_i \min_j a_{ij}=\max_i(1,\,2,\,\text{-}1)=2$, $\beta=\min_j \max_i a_{ij}=\min_j(3,4,2,5)=2$. Итак, $\alpha=\beta=V=a_{23}=2$, к-ое яв. мнм-ым в строке $i=2$ и мкс-ым в своем столбце $j=3$. Число $V=2$ яв-ся седловой точкой.

зм1. Используя табл. 1, решение п3 можно получить проще:

$$1)\quad \begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \alpha_j=\min_j a_{ij} \\ \hline A_1 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ A_2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ A_3 & 4 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \beta_j=\max_i a_{ij} & 4 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=a_{22}=1,\\ \beta=a_{23}=3.\end{matrix}$$

$$2)\quad \begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \alpha_i=\min_j a_{ij} \\ \hline A_1 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ A_2 & 3 & 4 & \boxed{2} & 3 & 2 \\ A_3 & 0 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ \hline & & & & & 2 \\ \beta_j=\max_i a_{ij} & 3 & -4 & 2 & 5 & 2 \end{array} \Rightarrow \alpha=\beta=\nu=a_{23}=2.$$

Поскольку не все матричные игры могут опт-но разыгрываться с помощью чистых стратегий (н-р, выбор стороны монеты в п 1), нх-мо ввести понятие опт-ой смешанной стратегии.

о4. Фк-я выигрыша для игрока P_1 (иначе: фк-ия потерь для игрока P_2), т.е. мт. ожидание выигрыша этого игрока, опр-ся в виде

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{XAY}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{x_i}\ \mathrm{a_{ij}}\ \mathrm{y_j}\,, \tag{8}$$

где $X=(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{i},\dots,\mathrm{x}_\mathrm{m})$ и $Y=(\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_\mathrm{j},\dots,\mathrm{y}_\mathrm{n})$ – произвольные смешанные стратегии для игроков P_1 и P_2 ств-но.

Для иллюстрации о4 рас-им игру, заданную матрицей $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Если P_1 выбирает смешанную стратегию $X=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$ и P_2 – смешанную стратегию $Y=(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3)$, то фк-ия выигрыша $\mathrm{E}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ равно

$$f(X,\ Y)=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\left[(x_2-x_3),\ (-x_1+x_3),\ (x_1-x_2)\right]\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=$$

$$=(x_2-x_3)y_1+(-x_1+x_3)y_2+(x_1-x_2)y_2$$

Если $X=(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5)$ и $Y=(0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4)$, то $f(X,Y)=-0{,}03$.

Сд-но, если P_1 *и* P_2 используют эти смешанные стратегии, то P_1 может ожидать проигрыша 0,03 ед.

о5. Стратегии X^* *и* Y^* наз. опт-ми, если выполняются нерав-ва

$$f(X,\ \mathrm{Y}^*)\le f(X^*,\ \mathrm{Y}^*)\le f(X^*,\ \mathrm{Y}), \tag{9}$$

где $f(x^*,\,y^*)=\max_x \min_y XAY=\min_y \max_x XAY=V$

Применение игроком P_1 опт-ой стратегии x^* должно обеспечивать ему при любых действиях игрока P_2 выигрыш не меньше цены V. Поэтому выполняются сд. стн-ия:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq V,\ j = \overline{1,n} \tag{10}$$

Аналогично, для игрока P_2 опт. стратегия Y* должна обеспечить при любых стратегиях игрока P_1 проигрыш не более V, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V,\ i=\overline{1,m} \tag{11}$$

Стн-ия (10) и (11) далее будут использованы для решения игры. Вообще, задача решения игры, если ее матрица не содержит седловой точки, тем сложней, чем больше m и n. Поэтому при возможности нх-мо сократить размерность матриц, исключая дублирующие строки и заведомо невыгодные доминирующие столбцы. Если все эл. к-й строки матрицы меньше ств-их эл-ов i-й строки, то к-я стратегия для игрока P_1 наз. дублирующей и ее можно вычеркнуть. Если все эл. τ -го столбца больше ств-их эл-ов j -го столбца, то τ -я стратегия для игрока P_2 наз. доминирующей и его можно вычеркнуть. В результате получим экв-ые матрицы меньшего размера, н-р,

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся стратегии (после вычеркивания дублирующих и доминирующих) наз. активными стратегиями.

Далее исследуем матрицу с активными стратегиями. Находим $\alpha_1 = \min\ (6,4) = 4,\ \alpha_2 = \min\ (2,6) = 2$, откуда $\alpha = \max_i\ \alpha_i = \max\ (4,2) = 4$. Аналогично, $\beta_1 = \max\ (6,2) = 6, \beta_2 = \max\ (4,6) = 6$, отсюда $\beta = \min_i\ \beta_j = \min\ (6,6) = 6$.

Т.к. $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки и ее решением будет смешанная стратегия, которая рас-на далее.

п4 (игра в жулика). Каждому из двух игроков выдается по тузу бубен и треф. P_1 получает также бубновую двойку, а P_2 – трефовую двойку. При первом ходе P_1 выбирает и откладывает одну из своих карт, и P_2, не знающий выбора карты игроком P_1, также откладывает свою карту. Если были отложены карты одной масти, выигрывает P_1, в противном случае выигравшим считается P_2.

Размер выигрыша опр-ся картой, отложенной победителем (тузу приписывается одно очко, двойке – два). Если отложены две двойки, выигрыш равен нулю, тогда матрица выигрышей имеет вид:

$$\begin{array}{c|ccc} & \Diamond & * & 2* \\ \hline \Diamond & 1 & -1 & -2 \\ * & -1 & 1 & 1 \\ 2\Diamond & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Исследовать игру и найти ее опт-ю решение.

Р. Игра на первый взгляд кажется беспроигрышной для обоих игроков, т.е. имеющий цену $v=0$. Но это не так. Прежде всего, освободимся от дублирующей строки $i=1$ ($a_{1j} \le a_{3j}$, $j=\overline{1,3}$) и доминирующего столбца $j=3$ ($a_{i\,2} \le a_{i\,3}$, $i=\overline{2,3}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc|c} & & \alpha_i \\ \left(\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \\ \beta_j \; 2 & 1 & \end{array}$$

Откуда имеет $\alpha = \max \alpha_i = -1$, $\beta = \min \beta_j = 1$, т.е. $\alpha < \beta$, седловой точки не сущ-ет. Найдем решение – смешанные стратегии.

Используя (10) и (11), находим опт. решение игры

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ge v \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = v \\ x_1 - x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{5}, \\ x_2 = \frac{2}{5}. \\ v = \frac{1}{5}. \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \le v \Rightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 = v \\ 2y_1 - y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = \frac{2}{5}, \\ y_2 = \frac{3}{5}, \\ v = \frac{1}{5}. \end{matrix}$$

Итак, $x^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ (т.е. $x^* = (0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ для исх. матрицы), $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ $\left(\text{т.е. } y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) \text{ для исх. матрицы}\right)$ и $f(x^*y^*) = v = \frac{1}{5.}$

Сд-но, эти игра более выгодны для P_1.

Читатель может также легко проверить, что для любых др. возможных смешанных стратегий $x = (0, x, 1\text{-}x)$ и $y = (y, 1\text{-}y, 0)$ имеет место $f(x, y^*) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y)$ или $\max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y) = f(x^*, y^*) = v$,

где $f(x,y) = XAY = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$ (см.(8)).

Т.о., при решении игры m x n следует:

а) проверить, не содержит ли матрица седловой точки;

б) если седловой точки нет, то нужно сравнить между собой элементы строк и столбцов для исключения дублирующих и доминирующих стратегий;

в) решить игру в смешанных стратегиях.

о6. Матица $A=(a_{ij})$ $(i, j = \overline{1,n})$ наз. кососимметрической матрицей, если $a_{ij} = -a_{ji}, н-р, A = \begin{pmatrix} 0 & \text{-}1 & 2 \\ 1 & 0 & \text{-}3 \\ \text{-}2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Симметричная игра имеет кососимметрическую матрицу. Цена симметрической игры равна нулю и опт-ые стратегии обоих игроков совпадают.

п5 (игра «камень, бумага, ножницы») Два игрока P_1 и P_2 одновременно и незв-мо друг от друга выбирают камень (К), бумага (Б) или ножницы (Н). Комбинация (Б,К) ств-ет выигрышу одной ед. тем из игроков, к-ый выбрал бумагу (камень может быть обернут бумагой); (К, Н) дают тот же выигрыш игроку, назвавшему камень (камень ломает ножницы); комбинация (Н, Б) дает победу ножницам (ножницы режут бумагу). Выигрыш равен нулю при выборе одинаковых предметов. Исследовать игру и найти решение.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & К & Б & Н & \alpha_i \\ \hline К & 0 & -1 & 1 & -1 \\ Б & 1 & 0 & -1 & -1 \\ Н & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \beta_j & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Р. Игра имеет симметрическую матрицу Отсюда $\alpha = \max \alpha_i = -1$, $\beta = \min \beta_j = 2$, т.е. $\alpha < \beta$ матрица не содержит седловую точку. Используя (10) и (11) находим:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_3 &= V \\ -x_1 \qquad x_3 &= V \\ x_1 - x_2 \qquad &= V \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Складывая первые три ур, имеет 0=3V, тогда V=0, т.е. игра с нулевой суммой. Откуда $x_2=x_3$, $x_1=x_2$, $x_3=x_1$, $x_1=x_2$, т.е. $x_1=x_2=x_3$, отсюда, в силу 4-го ур., получим $X=(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Аналогично, из $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \le V \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\ y_2 + y_3 = V \\ y_1 \quad - y_3 = V \\ -y + y_2 \quad = V \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Y^* = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$

Наиболее простая игра имеет матрицу А=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если седловой точки нет, то решением игры яв-ся смешанные стратегии X = (x_1,x_2), У = (y_1,y_2). По (10) и (11) имеет

$$- \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V \end{array}\right\} \quad \overline{(a_{11} - a_{12})x_1 - (a_{22} - a_{21})x_2 = 0}$$

Т.к. $x_1 + x_2 = 1$, т.е. $x_2 = 1\text{-}x$,
то $(a_{11}\text{-}a_{12})\, x_1 \text{-} (a_{22}\text{-}a_{21}) + (a_{22}\text{-}a_{21})x_1 = 0$
$(a_{11}\text{+}a_{22}\text{-}a_{12}\text{-}a_{21})x_1\text{=}(a_{22}\text{-}a_{21})$, откуда

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\; x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \text{ (из } x_1\text{=}1\text{-}x_2) \qquad (12)$$

Подставляя значения x_1 и x_2 в одно из ур-й системы, получим

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (13)$$

Составляя аналогичную систему ур-й, найдем опт. стратегию для P_2:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\; y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (14)$$

п6. Найти решение игры, заданной матрицей А=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Р. Имеем $\alpha = 1,\ \beta = 2,$ значит, матрицы не имеет седловой точки. По (12)–(14) находим $X^*=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $У^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $V = \frac{5}{3}$

3^0 Графическое решение матричных игр. Решение игры с матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ можно найти графически с помощью сд-их построений. На оси абсцисс отложим отрезок ед-ой длины. Левый конец отрезка (x=0) ств-ет стратегии A_1, правый – стратегии A_2. Промежуточные точки x ств-ют нек-ым смешанным стратегиям X=(x_1, x_2)=(1-x, x). На концах выбранного отрезка проведем прямые, перпендикулярные (прп.) оси абсцисс, на них будем откладывать выигрыш при ств-их чистых стратегиях. Если игрок P_2 применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока P_1 при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет ств-но a_{11} и a_{21}. Отложим эти точки на прямых и соединим полученные точки прямой B_1B_1. Если P_1 применяет смешанную стратегию, то его выигрышу ств-ет нек-ая точка M, лежащая на этой прямой (рис. 1).

Аналогично можно построить прямую B_2B_2, ств-ю стратегии B_2 игрока P_2 (рис. 2). Ломаная B_1 к B_2 – нижняя граница выигрыша, получаемого игроком P_1. Точки К, в к-ой он максимален, опр-ет цену игры V и ее решение. Для нахождения опт-ой стратегии игрока P_2 воспользуемся фм-ми

$$y_1 = \frac{\llcorner B_2}{\llcorner B_2 + \llcorner B_1},\ y_2 = \frac{\llcorner B_1}{\llcorner B_2 + \llcorner B_1}$$

В справедливости этих стн-й можно убедиться, если в фм-ы, выражающие y_1 и y_2, подставить вместо $\angle B_2$ *и* $\angle B_1$ их значения: $\llcorner B_2 = V - a_{22}$, $\llcorner B_1 = a_{21} - V$. Выражая V из (13), получаем значение y_1 и y_2, совпадающие с (14).

Можно рас-ть и задачу мнмз-и верхней границы выигрыша для игрока P_2, поменяв местами при решении игроков P_1 *и* P_2 (рис. 4).

Используя геом. интерпретацию, можно найти решение игр, заданных матрицей $2 \times n$. Каждой их n стратегий игрока P_2 ств-ет прямая. Построив эти прямые, находим нижнюю границу выигрыша. Точка К, лежащая, на нижней границе, для к-ой вел-а выигрыша нб-ая, опр-ет цену игры и ее решение. При этом опр-ся активные стратегии игрока P_2 (ств-ие им прямые пересекаются в точке К): из геом-их соображений можно найти значения y_j, ств-ие активным стратегиям P_2, как на рис. 3.

Аналогично может быть решена игра с матрицей $mx2$, только в этом случае верхнюю границу выигрыша и на ней опр-ем мнм., как на рис. 4.

п7. Найти решение игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 1\ 4 \\ 4\ 2\ 3\ 1 \end{pmatrix}$.

Р. Прямые на рис. 3 ств-ют стратегиям игрока P_2. Ломаная B_3 к B_4 ств-ет нижней границе выигрыша. Опт-ые стратегии P_2 – третья и четвертая. По фм-ам (12)–(14) находим решение игры: $X^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $Y^* \left(0, 0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $V = \frac{11}{5}$.

Сд-но, игрок P_1 применяет стратегию A_1 с вероятностью $\frac{2}{3}$, а стратегию A_2 – с вероятностью $\frac{3}{5}$. При этом его выигрыш в среднем составляет $\frac{11}{5}$ ед.

п8. Найти решение игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 4\ 3 \\ 2\ 4 \\ 0\ 5 \\ \text{-}1\ 6 \end{pmatrix}$

Р. Матрица имеет размерность 2 x 4, поэтому решение задачи находим для игрока P_2. На рис. 4 построены прямые ств-ие стратегиям игрока P_1.Жирной линией на рис. 4 изб-на верхняя граница выигрыша игрока P_1. Отрезок NK опр-ет цену игры V. Активными стратегиями для игрока P_1 яв-ся первая и четвертая. Решение игры таково: $X^* = \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)$, $Y^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, $V = \frac{27}{8}$.

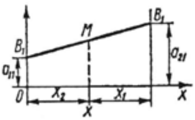


Рис. 1

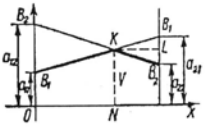


Рис. 2

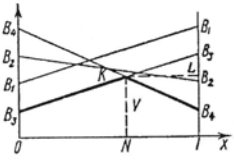


Рис. 3

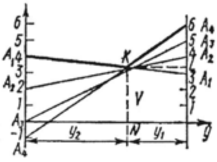


Рис.4

4^0. Инвариантность оптимальных стратегий матриц $(a_{ij})u(a_{ij}+w)$. Основная теорема матричных игр. Приведем инвариантность опт-ых стратегий.

Если $v-$ цена игры с матрицей (a_{ij}), то ценой игры с матрицей $(a_{ij}+w)$ будет $v+\omega$, т.е опт-ые стратегии игры не меняются для матриц $(a_{ij})u(a_{ij}+w)$. Покажем это.

Дсв-но, по опр-ю $f_1(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$, а с учетом $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$, получим $f_2(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i (a_{ij}+w) y_j = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j + w\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j =$ $= \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j + w = f(X,Y) + w.$ Тогда опт-ые стратегии не изменятся, т.е. $f_2(X^*,Y^*) = f_1(X^*,Y^*) + w = v + w$

Теперь сформулируем основную теорему матричных игр.

т1. Каждая матричная игра имеет решение. Для каждой матричной игры $\max\limits_{X}\min\limits_{Y} f(X,Y) = \min\limits_{Y}\max\limits_{X} f(X,Y) = f(X^*,Y^*) = V,$ т.е. $f(X^*,Y^*) = \max\limits_{X}\min\limits_{Y} XAY =$ $\min\limits_{Y}\max\limits_{X} XAY = V$.

5^0. Сведения матричной игры к задаче ЛП. Рас-им игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$. Матрица не содержит седловой точки, поэтому решение игры представим в смешанных стратегиях: $X=\left(x_{1,}x_2...x_m\right)$ $и$ $Y=\left(y_1,y_2,...y_n\right)$. При опт-ой стратегии игрока P_1 выполняется условие (10), а опт-ой стратегии игрока p_2 уд-ет условие (11). Тогда можно рас-ть задачу отыскания опт-ой стратегии P_1, для к-ой имеют место сд-ие огр-ия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\geq\nu \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\geq\nu \\ .... \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\geq\nu \end{cases} \qquad (15)$$

Вел. ν (цена игры) неизвестна, однако можно считать, что $\nu>0$. Последнее условие выполняется всегда, если эл-ы матрицы неотц-ы, а этого можно достигнуть, прибавляя ко всем эл-ам матрицы нек-ое плж. число ω (см. 4^0).

Из (15), разделив все члены нерав-в на ν получим

$$\begin{cases} a_{11}t_1+a_{21}t_2+...+a_{m_1}t_m\geq1 \\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+...+a_{m_2}t_m\geq1 \\ .... \\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+...+a_{mn}t_m\geq1, \end{cases} \qquad (16)$$

где $t_i=x_i/\nu, i=\overline{1,m.}$

Из условия $x_1+x_2+...+x_m=1$, следует, что

$$t_1+t_2+...+t_m=\frac{1}{\nu}. \qquad (17)$$

Решение игры должно мксз-ть значение ν, значит, фк-я $\mathbb{Z}=\sum_{i=1}^{m}t_i$ должна принимать мнм-ое значение. Т.о., получена задача ЛП: Найти $\min\mathbb{Z}=\sum_{i=1}^{m}t_i$ при огр-ях (16) и дпн-ых условиях неотц-ти пер-ых $t_i\geq0,\ \ i=\overline{1,m}$. Решая ее, находим значения t_i, затем опр-ем значения $x_i=\nu t_i$.

Для опр-ия стратегии игрока P_2 запишем сд-ие условия:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n\leq\nu \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n\leq\nu \\ .... \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n\leq\nu. \end{cases} \qquad (18)$$

Разделив все члены нарав-в на ν, получим

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \leq 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + u_{2n}u_n \leq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + u_{mn}u_n \leq 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $u_j = \dfrac{y_j}{\nu}$, $j = \overline{1,n}$. Пер-ые u_1, $u_2, \dots$, u_n должны быть выбраны так, чтобы выполнять условия (19) и достигался мкс фк-и

$$\omega = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{\nu} \tag{20}$$

Т.о., для решения игры имеем пару дв-ых симметричных задач ЛП. Используя св-во симметричночти, можно решить одну из них, требующую меньших выч-ий, а решение второй найти на основании опт-го плана дв-ой.

Д-ем, что задача имеет решение, т.е. сущ-ют опорные планы и мнмз-мая фк. огр-на снизу.

При построении системы (15), из к-ой получена система (16), предполагалась, что платежная матрица преобразована так, что все ее эл. плж-ны. Обз-им нм-й эл-т матрицы через $\mu = \min\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Покажем, что план $T = \left(t_1 = \dfrac{1}{\mu}, t_2 = 0, \dots, t_m = 0 \right)$ явл-ся опорным. Дев-но, подставив указанные значения пер-ых в (16), убеждаемся в том, что они уд-ют заданной системе огр-й.

Огр-сть целевой фк-и снизу следует из неотц-ти пер-ых t_i и плж-ти коэф-ов при них в выражении $\mathbb{Z}$. Сд-но, значении фк-и $\mathbb{Z}$ огр-но снизу нулем.

Т.о., сущ-ет решение рас-ой задачи ЛП, а значит, имеют решения дв-ная ей задача и ств-щая им матричная игра.

п9. Найти решение игры, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Р. Для опр-я опт-ой стратегии игрока P_1 имеем сд. задачу ЛП:

$$\min \mathbb{Z} = t_1 + t_2 + t_3$$

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1 \qquad t_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}. \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1, \end{cases} \tag{21}$$

Дв. задача для опр-ия опт-ой стратегии игрока P₂ формулируется так: найти

$$\max W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

при огр-ях

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \le 1 \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \le 1 \qquad u_j \ge 0,\, j = \overline{1,4}. \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \le 1, \end{cases} \tag{22}$$

Р. В табл. 2 приведено решение для игрока P₂. Предварительно, с помощью дпн-ых неотц. пер-ых u_5, u_6, u_7 нерав-ва (22) были прб-ны в ур-ия. Первоначальный базис образуют единичные векторы B₅, B₆, B₇. Решение получаем в 3-й итерации табл. 2 симплекс методом (см. 3.4). Опт-ый план задачи имеет вид: $U^* = \left(\frac{3}{14},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{14}\right)$, $\mathrm{W}_{\max} = \frac{1}{\nu} = \frac{2}{7}$, $\nu = \frac{7}{2}$. Учитывая стн-ия $Y_j = \nu U_j$, получаем опт. стратегию игрока $P_2 : Y^* = \left(\frac{3}{4},\ 0, 0,\ \frac{1}{4}\right)$.

Таблица 2

i	C	Базис	b	1	1	1	1	0	0	0	$\sum$
				B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	
1	0	B_5	1	$\boxed{4}$	3	4	2	1	0	0	15
2	0	B_6	1	3	4	6	5	0	1	0	20
3	0	B_7	1	2	5	1	3	0	0	1	13
$m+1$	$W_j - C_j$		0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	-4
1	1	B_1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{4}$
2	0	B_6	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	3	$\boxed{\frac{7}{2}}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{35}{4}$
3	0	B_7	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	-1	2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{11}{2}$
m+1	$W_j - C_j$		$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$
1	1	B_1	$\frac{3}{14}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{2}$
2	1	B_4	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	1	$-\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{5}{2}$
3	0	B_7	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{19}{7}$	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{4}{7}$	1	$\frac{1}{2}$
m+1	$W_j - C_j$		$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	1

Опт-ый план задачи (21) получим, используя оценки $(m+1)$-й строки последней итерации, находящиеся в столбцах B₅, B₆, B₇: $t_1=\frac{1}{7}+0=0, t_2=\frac{1}{7}+0=\frac{1}{7}, t_3=0+0=0.$ Т.о., $T^*=(\frac{1}{7},\frac{1}{7},0)$. Учитывая стн-ия $x_i=\nu t_i$, получим опт. стратегию игрока $P_1:X^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ с выражением $\nu=\frac{7}{2}.$

6^0. Игра с природой. В рас-ых выше задачах теории игр предполагалась, что в них принимают участие два участника, интересы к-ых противоположны. Поэтому действие каждого игрока направлены на увеличение выигрыша для *P₁* (уменьшение проигрыша для *P₂*). Однако во многих задачах, приводящихся к игровым, неопр-сть вызвана отсутствием информации об условиях, в к-ых осуществляется действие. Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной дсв-сти, к-ую принято наз-ть природой. Такие игры наз. играми с природой. Человек Q в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя, н-р, минимаксную стратегию, позволяющую получить нм-й проигрыш. Второй игрок *P* (природы) действует совершенно случайно, возможные стратегии опр-ся как ее состояния (н-р, условие погоды в данном районе, спрос на опр. продукцию, объем перевозок, нек-ое сочетание производственных (прз.) факторов и т.д.). В нек-ых задачах для состоянии природы может быть задано расп-ие верт-ей, а в др-х – оно не известно. Условие игры, как и в рас-ых выше задачах, задаются в виде матрицы $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$ Эл. a_{ij} равен выигрышу игрока Q, если он использует стратегию A_i, а состояние природы $(P)-B_j$.

В ряде случаев при решении игры расв-ют матрицу рисков R. Эл-ы r_{ij} матрицы *R* представляют собой разность между выигрышем, к-ый получил бы игрок Q, если бы знал состояние B_j, и выигрышем, к-ый он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i, т.е.

$$r_{ij}=\beta_j-a_{ij},$$

где $\beta_j=\max_i a_{ij}$.

Рас-им ряд критериев (кт.), используемых при решении игр с природой. При известном расп-и верт-ей различных состояний природы кт-ем принятия решения яв-ся мкс. мт-го ожидания выигрыша (мнм мт-го ожидания риска). Если верт-ти состояния природы *P* равны $P_j(j=\overline{1,n}), \sum_{j=1}^{n}P_j=1,$ то выбор *i*-й стратегии обеспечивает мт-ое ожидание выигрыша, равное $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}P_j.$ Принимается решение об использовании стратегии, для к-ой имеет место $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$. В ряде случаев, когда верт-ти состояний природы неизвестны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно к-му все состояния природы полагаются равновероятными. Используют также и др. методы оценки верт-ти для отдельных состояний природы. Однако во всех случаях нельзя утв-ть, что принятое решение опт-ое, опт-ым оно яв-ся только отс-но принятого расп-ия верт-ей состояний природы.

Если вопросы расп-ия вер-ой состояний природы не решен, то используют сд-ие кт-и.

Максимальный критерий Вальда, к-ый совпадает с кт-ем, выбора, позволяющим получить нижнюю цену игры для двух лиц с нулевой суммой. Согласно этому кт-ю выбирается стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыша, не меньше чем $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$

Критерий минимального риска Севиджа, рекомендующий выбирать стратегию, при к-ой вел-а риска принимает нм. значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$.

Как кт-й Вальда, так и кт-й Севиджа основаны на самой пессимистической оценке обстановки. В отличии от них

Критерий Гурвица учитывает как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации. Принимается решение о выборе стратегии, при к-ой имеет место $\max\limits_i \left\{ \lambda \min\limits_j a_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_j a_{ij} \right\}$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение λ выбирают на основании субъективных соображений. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к ед-е значение λ.

п10. Возможно строительство четырех типов электростанции: $А_1$ (тепловых), $А_2$ (при плотинных), $А_3$ (бесшлюзовых) и $А_4$ (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимость топлива и его перевозки и т.п. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из к-ых означает опр-ое сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Состояние природы (P) обз-им через B_1, B_2, B_3, B_4. Экнч-ая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зв-ти от состояний природы и задана матрицей

$$\begin{array}{rccccl} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \\ A = & \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 4 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} А_1 \\ А_2 \\ А_3 \\ А_4 \end{matrix} \end{array}$$

Согласно кт-ю Вальда $\max_i \min_j a_{ij} = \max\ (2{,}2{,}3{,}1) = 3,$ следует предусмотреть строительство бесшлюзного (A_3) ГЭС.

Воспользуемся кт-ем Севиджа. Построим матрицу рисков:

$$r_{ij} = \beta_i - a_{ij},\ \beta_{\mathrm{j}} = \max_{\mathrm{i}} a_{ij} = (8,\ 5,\ 8,\ 12). \text{ Тогда } \mathrm{R}= \begin{pmatrix} 3\,3\,0\,8 \\ 6\,2\,4\,0 \\ 0\,0\,5\,2 \\ 7\,1\,0\,4 \end{pmatrix}.$$

Согласно кт-ю Севиджа опр-ем $\min_i \max_i r_{ij} = \min(8,\ 6, 5, 7) = 5.$ В ств-и с этим кт-ем также предполагается решение A_3.

Воспользуемся кт-ем Гурвица. Пусть λ=0,5. Тогда

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{2}(2,\ 2,\ 3,\ 1) + \frac{1}{2}(8,\ 12,\ 10,\ 8) \right\} =$$

$$= \max(5;\ 7;\ 6{,}5;\ 4{,}5) = 7,$$

т.е. следует принять решение о строительстве приплотинных (A_2) ГЭС.

Если предположить известным расп. верт-ей для различных состояний природы, н-р считать эти состояния равно вероятными ($P_1=P_2=P_3=P_4=\frac{1}{4}$), то для принятия решения следует найти мт. ожидания выигрыша:

$$M_1 = 5\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

$$M_2 = 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 12\cdot\frac{1}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

$$M_3 = 8\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{4} = \frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$$

$$M_4 = 1\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Т.к. $\max_i \{M_i\} = \max\left\{ 4\frac{3}{4},\ 5\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4} \right\} = 6\frac{1}{2},$ то следует выбрать решение A_3.

Итак, по трем кт-ям рекомендуется строительство бесшлюзного (A_3) ГЭС.

7^0. Меры риска. Примеры. В пункте 6^0 рас-ли матрицу риска $R = (r_{ij})$. Под риском принято понимать верт-ть (угрозу) потери лицом или организацией части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дпн-ых расходов в результате осуществления опр-ой прз-ой или финансовой политики. Различают сд. виды рисков: прз-ый, кредитный, процентный, инвестиционный, рыночный, риск ликвидности (обусловленный неожиданным изменением кредитных и депозитных потоков).

Теперь введем меру риска. Обычно за мерой риска, н-р, коммерческого (финансового) решения или операции принимается среднеквадратичное отклонение S ($S=\sqrt{D}$, D - дисперсия) значения показателя эффективности этого решения или операции. Дсв-но, поскольку риск обусловлен недетерминированностью исхода решения (операции), то, чем меньше сброс (дисперсия) результата решения, тем более он предсказуем, т.е. меньше риск. Если вариация (дисперсия). результата равна нулю, то риск полностью отсутствует. При этом показателем эффективности финансового решения (операции) служит прибыль.

Рас-им в качестве иллюстрации выбор нек-ым лицом Q одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска. Пусть имеется два проекта А и В, в к-ые лицо Q может вложить средства. Проект А в опр-ый момент в будущем обеспечивает случайную вел-у прибыли. Предположим, что ее среднее ожидаемое значение (мт. ожидание) равно m_A с дисперсией $D = S_A^2$. А для проекта В эти хрк-ки равны m_B и S_B^2. Среднеквадратичное отклонения равны ств-но S_A и S_B. Возможно сд. случаи:

1) $m_A = m_B$, $S_A < S_B$, следует выбрать проект А,

2) $m_A > m_B$, $S_A < S_B$, следует выбрать проект А,

3) $m_A > m_B$, $S_A = S_B$, следует выбрать проект А,

4) $m_A > m_B$, $S_A > S_B$,

5) $m_A < m_B$, $S_A < S_B$,

В последних двух случаях решение о выборе проекта А или В зв-т от отношения к риску лица принимающего решения (ЛПР). В част., в случае 4) проект А обеспечивает более высокую среднюю прибыль, однако он и более рискован. Выбор при этом опр-ся тем, какой дпн-ой вел-ой средней прибыли компенсируется для ЛПР заданное увеличение риска. В случае 5) для проекта А риск меньший, но и ожидаемая прибыль меньше. Субъективное отношение к риску мы уже в 6^o привели в виде различных критерий к риску.

п11. Пусть имеются два инвестиционных проекта А и В. Первый (А) с верт-ю 0,6 обеспечивает прибыль 15 млн руб., однако с верт-ю 0,4 можно потерять 5,5 млн. руб. Для проекта В с верт-ю 0,8 можно получить 10 млн. руб. и с верт-ю 0,2 потерять 6 млн. руб. Какой проект выбрать?

Р. Даны А: $\begin{array}{c|c|c} x_i & 15 & -5{,}5 \\ \hline P_i & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}$, В: $\begin{array}{c|c|c} x_i & 10 & -6 \\ \hline p_i & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}$, Опр-им

$m_A = 15 \cdot 0{,}6 + (-5{,}5)0{,}4 = 6{,}8$; $m_B = 10 \cdot 0{,}8 + (-6)0{,}2 = 6{,}8$, т.е. $m_A = m_B$.

Находим $S_A=\left[(15-6{,}8)^2 0{,}6+(-5{,}5-6{,}8)^2 0{,}4\right]^{\frac{1}{2}}=10{,}04,\quad S_B=\left[(10-6{,}8)^2 0{,}8+\right.$ $\left.+(-6-6{,}8)^2 0{,}2\right]^{\frac{1}{2}}=6{,}4,$ т.е. $S_A>S_B$, поэтому более предпочтителен проект В.

Хотя среднеквадратичное отклонение эффективности решения используется часто в качестве меры риска, но не совсем точно отражает реальность. Н-р, если под риском понимать риск разорения, то величина риска должна зв-т от вел-ы исходного капитала. В таких случаях используются правило «трех сигма» из закона нормального расп-ия.

п12. Акционерному обществу (АО) предлагается два рисковых проекта:

	Проект 1			Проект 2		
Наличные поступления, млн руб.	40	50	60	0	50	100
Вероятность события	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4

Учитывая, что фирма имеет долг в 80 млн руб., какой проект должны выбрать акционеры и почему?

Р. Выч-им $m_1=40\cdot 0{,}2+50\cdot 0{,}6+60\cdot 0{,}2=50$ млн руб.
$m_2=0\cdot 0{,}4+50\cdot 0{,}2+100\cdot 0{,}4=50$ млн руб. $\Bigg|\Rightarrow m_1=m_2$

Опр-им среднеквадратичные отклонения σ_1 и σ_3

$$\sigma_1=\left[\mathrm{M}(x-m_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(40-50)^2\cdot 0{,}2+(50-50)\cdot 0{,}6+(60-50)^2\cdot 0{,}2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{40}=6{,}324$$

$$\sigma_2=\left[\mathrm{M}(x-m_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(0-50)^2\cdot 0{,}4+(50-50)^2\cdot 0{,}2+(100-50)^2\cdot 0{,}4\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2000}=44{,}72$$

Отсюда находим коэф-ы вариабельности $v_1=\frac{\sigma_1}{m_1}=\frac{6{,}324}{50}=0{,}126;$ $v_2=\frac{44{,}72}{50}=0{,}894$. Т.к. $m_1=m_2, 6{,}324=\sigma_1<\sigma_2=44{,}72$ согласно случаю 1) следует выбрать проект 1, ибо при равных мт. ожиданиях $(m_1=m_2=50)$ среднеквадратичное отклонение $\sigma_1=6{,}324$ для проекта 1 по сравнению с аналогичным показателем для проекта 2 $\sigma_2=44{,}72$ более 7 раз меньше $\left(\frac{v_2}{v_1}=\frac{0{,}894}{0{,}126}=7{,}09\right)$, т.е. проект 1 при средней прибыльности, равный 50, обладает более чем в 7 раз меньше вариабельностью (рисковостью). Казалось бы, без сомнений следует принимать проект 1.

Однако надо учесть, что фирма имеет фиксированные платежи по долгам 80 млн руб., и этот факт может изменить решение на противоположное.

Дсв-но, если предположить, что доходность P_r по проектам 1 и 2 расп-на по нормальному закону, то с верт-ю 0,997 (практически достоверно) возможные значения выигрышей и платежей по проектам 1 и 2 ств-но оказываются (по правилам «трех сигма») в диапазонах $m_i \pm 3\sigma_i$, а именно:

Проект 1: $Pr=50 \pm 3 \cdot 6,324$; $31,03 \le Pr \le 68,97$

Проект 2: $Pr=50 \pm 3 \cdot 44,72$; $-84,16 \le Pr \le 184,16$

Итак, при выборе сущ-но менее рискового проекта 1 АО может в большей степени преуменьшить свой долг в 80 млн руб. Но без дпн-ых финансовых источников (а условие задачи они не предусмотрены) от долгов АО полностью не освободиться.

Сильно рискуя, при принятии проект 2 АО (если повезет) может полностью освободиться от долгов, получив при этом еще и немалую прибыль, При неудачи АО ожидает банкротство. Др. варианты возможных соглашений об отсрочке долгов условиями задачи не предусматриваются. Все-таки, принимая рисковый проект 2, можно оказаться в ситуации «или пан, или пропал», тогда как, выбрав безрисковый проект 1, от долгов не уйти ни при каких обстоятельствах.

ЛЕКЦИЯ 22

6.2. МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1^0. Понятие многокритериальной задачи. Неопределенность. До сих пор расв-ли однокритериальные задачи. Однако в практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (опт-го) решения при наличии различных не сводимых друг к другу критериев (кт.) опт-ти. Н-р, при выборе конструкции самолета проектировщикам следует учитывать мн-во кт-ев: технических (высотность, скорость, маневренность, грузоподъемность, длительность полета и т.д.), технологических (связанных с будущим процессом серийного изготовления самолетов), экономических (опр-щих затраты на прз–во, эксплуатацию и обслуживание машин, их конкурентоспособность), социальных (в част., уровень шума, загрязнение атмосферы), эргономических (условия работы экипажа, уровень комфорта для пассажиров) и пр. При выборе кандидата на должность важнейшими кт-ми оценки яв-ся: квалификация, образование, эрудиция, возраст, коммуникабельность и т.п. Даже в обыденной жизни при выборе мы используем каждый раз мн-во критерий: вспомните хотя бы затруднения при выборе подарка ко дню рождения, при выборе транспорта, чтобы ехать на работу и т.д.

Если такого рода задачи решаются методом МП, то говорят о задачах многокритериальной (мкт) оптз-и, т.е. многообразием целей. Они возникают в тех случаях, когда имеются несколько целей, к-ые не могут быть отражены одним критерием (н-р, стоимость и надёжность). Задачи мкт-ой оптз-и могут носить как лин-ый, так и нелин-ый характер.

Основная сложность логического анализа мкт-ых задач состоит в том, что в них, в отличии от «обычных»(однокритериальных) задач появляется эффект несравнимости исходов (решений). Н-р, если исходы оцениваются по двум кт-ям, несводимым один по другому, и исход a_1 лучше исхода a_2 по первому кт-ю, но хуже по второму, то исходы a_1 и a_2 несравнимы между собой. Несравнимость исходов яв-ся формой неопр-ти, к-ая в отличие стратегической неопр-ти (1^0;6.1), связана со стремлением ЛПР «достичь противоречивых целей» и может быть названа ценностной неопр-ю. Выбор между несравнимыми исходами яв-ся сложный концептуальной проблемой и составляет основное содержание мкт-ой оптз-и.

Мт-ая модель мкт-ой задачи МП может быть представлена в виде:

$$q(x)=\{q_1(x),\dots,q_s(x),\dots,q_k(x)\}\to \max \qquad (1)$$

$$\varphi_i(x)\le 0,\quad i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0, т.е. x_j\ge 0, j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

Если фк-и $q_s(x)$, s=$\overline{1,к}$ и $\varphi_i(x)$; i=$\overline{1,m}$, лин-ны отс-но пер-ых $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, то имеем мкт-ую задачу ЛП. Если же хотя бы одна из фк-й $q_s(x)$, $\varphi_i(x)$ нелин-на отс-но хотя бы одной пер-ой x_j, то получим мкт. задачу НП.

Обз-им орг-ия (2) и (3) через Д и задачу (1)–(3) сформулируем кратко

$$q=\max_{x\in Д}\left\{q_s(x)\right\},\ s=\overline{1,k}, \tag{4}$$

где Д – мн-во допустимых решений (исходов), q_s – числовая фк., заданная на мн. Д; при этом $q_s(x)$ есть оценка исхода $x\in D$ по s-му кт. $\left(s=\overline{1,k}\right)$. Такая модель ств-ет задаче принятия решения (ЗПР) в условиях неопр-ти, в к-ой мн-во альтернатив отождествляется с мн-ом допустимых исходов, а оценочная структура задается вектором $(q_1,q_2,...,q_k)$.

2^0. Годные программы. Оптимум Парето. Иногда (в простейших случаях), придавая ств-щие веса различным целям q_s и суммируя их, можно получить единую целевую фк-ю.

Но нетрудно найти примеры, когда непосредственное опр. весов отдельных целей невозможно. Н-р, в условиях натурального хозяйства трудно найти веса для таких продуктов, как яблоки и велосипеды, школы и больницы и т.п., и складывать кол-во этих продуктов. В этих случаях невозможно опр-ть единую целевую фк. и применить для их решения обычные методы МП. Оказывается, однако, что и в таких случаях иногда возможно применять методы МП, если задачи надлежащим образом сформулированы.

Допустим, что дан какой-то производственный (прз.) процесс, состоящий в прз-ве k различных продуктов $q_1,q_2,...,q_k$ при помощи n средств $x_1,x_2,...,x_n$. Сд-но, дана не одна, а k целевых фк-й $q_s=q_s\left(x_{1s},x_{2s},...,x_{ns}\right)$, где $s=\overline{1,k}$, к-ые опр-ют ств-щие кол-во отдельных видов продукции в зв-ти от кол-в средств, израсходованных на их прз-во.

Если отдельным продуктам придать заранее установленную цену $p_1,p_2,...,p_n$, то, очевидно, возможно найти сумму $Z=\sum_{s=1}^{k}p_sq_s$, к-ая обз-ет общую стоимость продукции. Программа (прг.), к-ой соств-ет мкс. значение этой суммы, будет считаться опт-ой.

Но возьмем случай оптз-и прз-ва в условиях натурального хозяйства, когда опр-ие общей стоимости продукции невозможно. Тогда целесообразно сделать сд-ие допущения: 1) степень достижения общей цели возр-ет, если увеличивается степень достижения всех частных целей; 2) степень достижения общей цели возр-ет, если увеличивается степень достижения нек-ых целей, а степень достижения остальных целей не уменьшается.

Приняв исходный уровень достижения цели равным нулю, можно выразить второе допущение так: $q_s \geq 0 \left(\mathrm{s}=\overline{1,\mathrm{k}}\right)$ и, по меньшей мере, для одного продукта $q_s > 0$.

Положение, в к-ом уже нельзя дальше увеличить объем прз-ва одного продукта, не уменьшая прз-ва хотя бы одного из остальных продуктов, опр-ет годную прг-у. Это понятие было введено В. Парето и опр-ся термином «оптимум(или максимум) Парето». Это понятие Парето использовал, изучая проблемы благосостояния и доходов населения. Он рассуждал сд-им образом. Если увеличивается доход одной группы населения, но снижаются доходы др-х групп, то сопоставление общего «благосостояния» в этом случае невозможно. Это случай несопоставимости. Можно, однако, констатировать, что происходит рост общего благосостояния, если увеличивается доход, по меньшей мере, одной группы лиц, и доход др-х групп не снижается. В этом заключаются тезисы Парето.

3^0. Решение задачи с помощью дифференциального программирования. Исходя из положений предыдущего параграфа, опр-им условия, к-ые должны выполняться для того, чтобы выпуск одного из продуктов достиг мкс-а, а выпуск др. продуктов не понизился, причем эту задачу надо решить для каждого продукта в отдельности.

Обз-им через x_{is} затраты i-го фактора, нх-ые для прз-ва продукта S; и $x_{is}\left(i=\overline{1,n}; s=\overline{1,k}\right)$ опр-им так, чтобы, н-р, продукт 1 выпускался в мкс-ом объёме, а др. продукты не понизились, т. е найти

$$q_1 = f_1\left(x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}\right) = \max q_1 \tag{5}$$

при условиях

$$q_s = f_s\left(x_{1s}, x_{2s}, ..., x_{ns}\right) = q_s^0, s = \overline{2,k}. \tag{6}$$

Условие (6) означает, что при мксз-и продукта q_1 остальные продукты $q_s^0\left(s=\overline{2,k}\right)$ не снижаются.

Цель (5) и побочные условия (6) можно аналогично сформулировать для каждого продукта $q_s\left(s=\overline{1,k}\right)$.

Решим эту задачу для s=1, заметив, что кроме побочного условия (6), должно выполняться ещё условие

$$\sum_{S=1}^{k} x_{is} = X_i, i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где X_i – ресурсы отдельных средств. Кроме того, предполагается, что имеется возможность трансформации (взаимозаменяемость) этих средств (факторов); это условие можно записать в виде:

$$F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = 0 \tag{8}$$

и выполняются условия

$$x_{is} \geq 0\left(i = \overline{1,n}, s = \overline{1,k}\right), \tag{9}$$

откуда, с учётом (7), следует, что $X_i \geq 0\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Т.о. задача (5)–(9) представляет собой формулировку годной прг-ы в случае многообразия целей. Решим эту задачу для s=1 методом множителей Лагранжа.

Построим фк-ю Лагранжа L, для s=1 (фк-и Лагранжа $L_2, L_3, ..., L_k$ для остальных продуктов имеют аналогичный вид):

$$L_1 = f_1\left(x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}\right) + \sum_{S=2}^{k} \lambda_s \left[f_s\left(x_{1s}, x_{2s}, ..., x_{ns}\right) - q_s^0\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\sum_{s=1}^{k} x_{is} - \mathrm{X}_i\right] - \lambda F\left(\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n\right) \tag{10}$$

Найдём частные производные фк. L_1 по $x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}$ и приравняем их к нулю.

Имеем сд. нх-ые условия сущв-ия мкс-а фк-и Лагранжа L_1 и фк-и продукции $q_1=f_1(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})$ (с учётом, что второе слагаемое фк-и L_1 не содержит пер-ю x_{i1}, т. е. $\frac{\partial f_s}{\partial x_{i1}} = 0$; аналогично нулю равняется частная производная третьего слагаемого фк-и Лагранжа, т. к. $\frac{\partial x_{i1}}{\partial x_{i1}} = 1$ и по (7) также имеем $\frac{\partial x_i}{\partial x_{i1}} = 1$):

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_{i1}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{i1}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_i} . \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_{i1}} = 0\left(i = \overline{1,n}\right) \tag{11}$$

Поскольку $\frac{\partial x_i}{\partial x_{i1}} = 1$, что вытекает из (7), то (11) можно писать в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{i1}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_i}\left(i = \overline{1,n}\right) \tag{12}$$

Из ур-й (12) следует, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{i1}} : \frac{\partial f_1}{\partial x_{j1}} = \frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_i} : \frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_j}\left(i, j = \overline{1,n}\right) \tag{13}$$

Условие (13) означает, что «оптимум Парето» будет достигнут, если предельная норма взаимозаменяемости, ств-щая целевой фк-и $q_1=f_1$ (x_{11}, x_{21}, …, x_{n1}) отс-но i-го и j-го факторов, равна норме взаимозаменяемости этих факторов в фк-и трансформации для народного хозяйства (н/х) в целом: F (X_1, X_2, …, X_n)=0.

Идентичные результаты можно получить для условий, при к-ых фк-и q_2, q_3, …, $q_к$ достигают мкс-а, т. е. вместо (13) получим:

$$\frac{\partial fs}{\partial x_{is}}:\frac{\partial fs}{\partial x_{js}}=\frac{\partial F}{\partial X_i}:\frac{\partial F}{\partial X_j}\left(i,j=\overline{1n}\right) \qquad (14)$$

Т.о. программа прз-ва яв-ся годной, если распределение средств (факторов прз-ва) таково, что в каждом прз-ом процессе отн-ия производительности двух произвольно взятых факторов одинаковы и равны норме взаимозаменяемости этих факторов в фк-и трансформации для н/х в целом.

Полученный результат проиллюстрируем на конкретном

п1. Показатели предельной производительности факторов a и b и двух видов продукции I и II заданы в табл. 1. Данная программа (прг.) яв-ся ли годной. Если нет, то перемещением факторов получить годную прг-у.

Р. Из табл. 1 видно, что стн-ия показателей предельной производительности обоих факторов не равны друг другу (3:4>5:10), и сд-но, прг-ма не яв-ся годной и оказывается выгодным переместить нек-ое кол. факторов прз-ва с изготовления продукта II на изготовление продукта I.

Дсв-но, если переместить ед-у фактора a с прз-ва продукта II на прз-во продукта I, получим увеличение выпуска продукта I на 3 ед-ы при одновременном уменьшении выпуска продукта II на 5 ед.. Чтобы компенсировать это уменьшение, переместим дпн-но $\frac{1}{2}$ ед-ы фактора b из прз-ва продукта I на прз-во продукта II. В результате этого второго перемещения выпуск продукта I уменьшится на 2 ед-ы, а продукта II – увеличивается на 5 ед. Общий результат обоих перемещений показан в табл. 2.

Таблица 1

q_s x_i	I	II
a	3	5
b	4	10

Таблица 2

q_s x_i	I	II
a	+3	– 5
b	– 2	+5
Итого	1	0

Таблица 3

q_s x_i	I	II
a	3	5
b	6	10

В итоге табл. 2 оказывается, что прз-во продукта II не изменилось, а прз-во продукта I увеличилось на ед-у. Итак, благодаря перемещению средств достигнуто увеличение прз-ва одного продукта без снижения другого. Но вся прг. в отличие от предыдущей яв-ся годной.

Если стн-ия предельной производительности факторов в отдельных технологических процессах равна как в табл. 3, то прг-а яв-ся годной.

Т. о. задача на оптз-ю в случае многообразия целей сводится к построению годных прг-м. При этом можно применить методы пргв-ия, к-ые основываются на исключение технологических процессов, не яв-хся годными.

Проанализируем подробнее формулировку и решение задачи на оптз-ю в случае многообразия целей. Характерная (хрк.) особенность этой задачи состоит в том, что условие оптз-и (5) относится к одной цели, а остальные цели переходят в побочные условия (6). Их можно записать в виде:

$$q_{1\max} = \psi_1\left(q_2^0, q_3^0, \ldots, q_k^0; F\right),$$

$$q_{2\max} = \psi_2\left(q_1^0, q_3^0, \ldots, q_k^0; F\right),$$

....

$$q_{k\max} = \psi_k\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_{k-1}^0, F\right).$$

Заметим прежде всего, что эти решения зв-т от фк-и трансформации между факторами прз-ва F (X_1, X_2, …, X_n) = 0 для н/х в целом и что значения $q_1^0, q_2{}^0, \ldots$ можно заменить предварительно исчисленными значениями $q_{1\max}, q_{2\max}, \ldots$ ств-но.

Так находим опр-ю зв-сть между мкс. значениями $q_1, q_2, \ldots q_k$, к-ю можно выразить в виде сд-ей неявной фк.:

$$T\left[q_{1\max}, q_{2\max}, \ldots, q_{k\max}, F\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right] = 0, \tag{15}$$

наз-мая общей фк. трансформации, к-ая дает возможность осуществлять трансформацию и между отдельными целями.

Общая фк. трансформации позволяет исчислить показатели предельных стн-й трансформации целей $\frac{\partial q_{i\max}}{\partial q_{j\max}}\left(i, j = \overline{1,k}\right)$. Они показывают, насколько должна уменьшиться степень достижения цели q_i, чтобы в годной прг-е было достигнуто повышение степени достижения цели q_j на ед-у.

Опр-ие условий, к-ым должна ств-ть опт. прг-а (с точки зрения опт-а Парето), сводится к мксз. фк-и Лагранжа (10), к-ую можно записать в упрощенном виде

$$L_1 = f_1\left(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}\right) + \sum_{s=2}^{\kappa} \lambda_s f_s\left(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}\right) - \lambda F\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right). \tag{16}$$

Выражение $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{S=1}^{k} x_{is} - X_i \right)$ в (10) здесь опущено, ибо частная производная этого выражения по x_{is} всегда равна нулю. По тем же причинам в (16) опущена пст. q_s^0, к-ая не воздействует на отыскание условий достижений опт-а посредством фк-и L_1.

Фк-ю Лагранжа можно упростить еще больше, объединив две слагаемые:

$$L = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s f_s\left(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}\right) - \lambda F\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

или еще проще:

$$L = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s q_s - \lambda F\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right). \tag{17}$$

Это прб. возможно потому, что фк. Лагранжа (16) может служить для опр-ия условий мксз-и через произвольную пер-ю q_1, q_2, …, $q_к$, причем устанавливая мкс. для произвольного q_i , принимаем, что ств. значение $\lambda_i = 1$.

Из фм. (17) следует, что множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ представляет собой как бы весы отдельных целей, мксз-ия фк-и Лагранжа сводится к мкс-и нек-ой взвешанной суммы целей минус нек-ая фк. трансформации средств, умн-ная на опр-ый вес λ .

Рас-им подробнее, что означают весы отдельных целей $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Оказывается в годных прг-ах стн-ия отдельных множителей λ равны ств-им отн-ям трансформации целей. Сд-но, множители λ , один из к-ых равен 1, опр-ют,от какого значения одной из целей приходится отказаться, чтобы получить единицу значения другой цели.

Сумма $\sum_{s=1}^{k} \lambda_s q_s$ наз. совокупным показателем общей цели, а разность $\sum_{s=1}^{k} \lambda_s q_s - \lambda F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ – чистым показателем общей цели.

Если сумма $\sum_{s=1}^{k} \lambda_s q_s$ есть стоимостное выражение валовой продукции, а величина $\lambda F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ есть стоимостное выражение затрат, то их разность вида (17) есть стоимостное выражение чистой продукции.

Если сказанное выше отнести к н/х-у в целом и если цены продуктов установлены на уровне множителей $\lambda_s \left(S = \overline{1,k}\right)$, то фк. L опр-ет размеры национального дохода. В таком случае расв-я задача сведется к мксз-и национального дохода.

На этот факт обратил внимание уже В. Парето, проведя исследование проблем всеобщего благосостояния. Анализ Парето как раз и основывался на положении о том, что если национальный доход увеличился и в то же время имеется возможность произвольного распределения этого прироста, то всегда есть возможность компенсировать потери, нанесенные отдельными лицами, и еще останется некоторый излишек. Это означает, что рост национального дохода опр-ет повышение общего благосостояния. Проведенный здесь мт-й анализ подтверждает выводы Парето. Т. о., оптимум Парето выражается мкс-ом фк-и Лагранжа вида (17), к-ую можно расв-ть как национальный доход при условии, что цены продуктов установлены на уровне множителей λ , исчисленных с помощью диф-го пргв-ия. Одновременно здесь показали, что задача при многообразии целей решаема как если бы частные цели были соизмеримы.

В заключение укажем, что рас-ю проблему можно представить в виде дв-ой задачи. Вместо того чтобы мксз-вать прз-ую фк. вида (17) можно мнмз-вать совокупные затраты факторов прз-ва при данных показателях степени достижения целей, т. е. мнзм-ть фк-ю

$$-L = \lambda\left[F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) - C\right] - \sum_{S=1}^{k} \lambda_S\left[f_S\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - q_S^0\right].$$

4^0. Многообразие целей и линейное программирование. Задачу оптз-и с многообразием целей можно также решить с применением ЛП, если задача лин. отс-но пер-ых.

Пусть имеется n продуктов и для каждого из них справедливо балансовое ур.:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i \left(i = \overline{1, n}\right), \tag{18}$$

где X$_i$ – вел. валового продукта, y_i – вел. конечного продукта i-й отрасли, a_{ij} – технологические коэф.

Имеется также балансовое ур. рабочей силы:

$$X_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{oj} X_j + y_0 \tag{19}$$

где a_{oj} – кол. рабочей силы нх-ое для прз-ва единицы валовой продукции j-й отрасли. Сд-но, $\sum_{j=1}^{n} a_{0j} X_j$ есть совокупные затраты общественного труда, нх-ые для осуществления прг-ы прз-ва в масштабе н/х-а, X$_0$ есть совокупные ресурсы рабочей силы общества, к-ые можно вовлечь в прз-во, а y$_0$-кол. общественного труда, не вовлеченного в прз-во.

Задачу оптз-и этой прз-ой прг-мы можно сформулировать так: нх-мо мнмз-вать затраты общественного труда по н/х-у в целом, т. е. найти

$$\min q = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} X_j \tag{20}$$

при выполнении данной прг-ы по конечной продукции $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$, т. е. при побочных условиях

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = y_i^0 \left(i = \overline{1, n}\right) \tag{21}$$

и граничных условиях

$$X_j \geq 0, y_i^0 \geq 0 \left(i, j = \overline{1, n}\right) \tag{22}$$

Прб-ем эту задачу в дв-ю, к-ую сформулируем сд-им образом: опр-ть такие множители λ_1, λ_2,..., λ_n, чтобы фк-я «суммарного веса балансовых лимитов» была мкс-ной, т.е. найти

$$\max \nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \tag{23}$$

при побочных огр-ях

$$\lambda_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\lambda_i \le a_{oj}\,(j = \overline{1,n}) \tag{24}$$

и граничных огр-ях

$$\lambda_j \ge 0(j = \overline{1,n}) \tag{25}$$

Рас-им подробнее, на чем основывается такая формулировка дв-ой задачи. Вопрос здесь состоит в мксз-и взвешенной суммы конечных продуктов н/х. Весами этой суммы является множители λ_1, λ_2,…, λ_n, к-ые представляют собой как оценки отдельных конечных продуктов $y_1, y_2, ..., y_n$. Если множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ расв-ть как цены ств-щих конечных продуктов, то сумма (23) есть размер национального дохода.

Побочные условия (24) означают, что превышение цены единицы продукта над общей стоимости материальных затрат не может превосходить ств-щий величины a_{oj}, т.е. кол-во рабочей силы, нх-ой для прз-ва этой единицы. Записав эти условия в виде $\lambda_j \le a_{oj} + \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\lambda_i$, заметим, что они экв-ны допущению, что ни одна цена не превышает сумму затрат труда и материальных затрат, т.е. издержек прз-ва данного продукта.

Т.о., задача, состоящая в мнмз-и затрат общественного труда в масштабе н/х при условии выполнения установленной прг-ы по конечной продукции, экв-на дв-ой задаче: мксз-ть национальный доход при наличии цен, не превышающих издержки прз-ва.

По теореме дв-сти (3°:3,4) имеем, что $v_{\max} = q_{\min}$ Поэтому в условиях опт-ой прг-ы возникает важная зв-ть:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \tag{26}$$

Если множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, принятые в качестве цен отдельных продуктов, прц-ны затратам общественного труда, то зв-ть (26) выражает закон стоимости.

Из приведенного анализа следует, что рас-ные варианты задачи экв-ны еще одной модификации задачи ЛП, к-ая состоит в мксз-и конечного продукта одной из отраслей н /х при сохранении уровня прз-ва других отраслей и сохранении баланса затрат общественного труда, н-р, найти

$$\max y_1 = X_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{X}_j \tag{27}$$

при огр-ях

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{X}_j \ge y_i^0\,(i = \overline{1,n}) \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{oj}X_j \le X_0 \tag{29}$$

$$X_j \ge 0\ (j = \overline{1,n}) \tag{30}$$

Условия (29) означает, что совокупные затраты общественного труда не могут превышать нек-ой вел-ы X_0.

Из вышеизложенного следует, что задача на опр-ие «мкс-а Парето» сводится к построению годных прг-м, а в случае, когда задача лин-на и диф-го пргв-ия применить нельзя, сводится к нек-ой задаче ЛП вида (27)–(30). Есть и др. методы (подходы) решения задач мкр-ой оптз-и, к-ые рас-им в сд-их параграфах.

5^0. Метод последовательных уступок. В 1^0 отметили, что выбор между несравнимыми исходами яв-ся сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание мкт-ой оптз-и. При этом нек-ые частные кт-и могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи – индифферентны, безразличны друг к другу. Поэтому процесс решения мкт-ых задач неизбежно связан с экспертными оценками (см. $[10]$) как самих кт-ев, так и взаимоотношений между ними.

Метод посл-ых уступок решения задач мкр-ый оптз-и применяется в случае, когда частные кт-и могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Пусть все частные кт. мксз-ся и пронумерованы в порядке убывания их важности кт-я в обл. допустимых решений (ОДР) путем решения однокритериальной задачи

$$z_1(x) \to \max, \quad x \in Д.$$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается вел-а допустимого отклонения δ_1 >0 (экнч-ки оправданной уступки) кт-я z_1 и находится мкс. значение второго кт. z^*_2 при условии, что значение первого кт. не должно отклониться от своего мкс. значения более чем на вел-у допустимой уступки, т.е. решается задача

$$\begin{gathered} z_2(x) \to \max, \\ z_1(x) \ge z^*_1 - \delta_1, \\ x \in Д. \end{gathered}$$

Снова назначается вел-на уступки δ_2>0 по второму кт-ю, к-ая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного мкс. z^*_3 третьего частного кт-я:

$$\begin{gathered} z_3(x) \to \max \\ z_1(x) \ge z^*_1 - \delta_1, \\ z_2(x) \ge z^*_2 - \delta_2, \\ x \in Д. \end{gathered}$$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет найдено мкс. значение последнего по важности кт-я $z_к$ при условии, что значение каждого из первых к-1 частных кт-ев отличается от ствщ-го условного мкс. не более чем на вел-у допустимой уступки по данному кт-ю. Полученное на последнем этапе решения считается опт-ым. Следует заметить, что этот метод не всегда приводит к эффективному решению.

п2. $$z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max, \tag{31}$$

$$z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{31а}$$

$$z_3 = x_1 - 3x_2 \to \max, \tag{31б}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{matrix}\right\} \tag{32}$$

где, на основе экспертных оценок, частные кт. упорядочены (уп.) в указанном ($z_1 \to z_2 \to z_3$) порядке убывания их важности.

Р. Т.к. в данных частных кт-ях коэф-ы при одних и тех же пер-ых имеют разные знаки, то в заданной обл. допустимых решений (ОДР) невозможно одновременно улучшить все частные кт-и, т.е. в расв-ом случае обл-ть компромиссов (обл. Парето) совпадает с ОДР (32).

Для опр-сти будем считать, что допустимые уступки по первым двум кт-ям заданы: $\delta_1 = з$, $\delta_2 = 5/3$. Ясно, что искомые решения задачи зв-т от значений уступок по кт-ям.

Мксз-ем фк-ю z_1 в ОДР (32), т.е. решаем однокритериальную задачу (31), (32) графическим методом решения задач ЛП (см.4°:33). Из рис.1 видно, что $\max z_1 = z_1^* = z_1(A) = 7$ при $x^*_1 = 1$, $x^*_2 = 4$. т.к. $z^*_1 - \delta_1 = 4$, то дпн. огр-ие имеет вид:

$$-x_1 + 2x_2 \ge 4 \tag{32а}$$

Задачу (31а), (32), (32а) также решает графически (рис. 2):

$$\max z_2 = z_2^* = z_2(B) = \frac{26}{3} \text{ при } x^*_1 = \frac{8}{3},\ x^*_2 = \frac{10}{3} \text{ из } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Тогда $z^*_2 - \delta_2 = 7$, откуда получаем дпн. огр-ие

$$2x_1 + x_2 \ge 7. \tag{32б}$$

Мксз-ем z_3 при условиях (32), (32а), (32б) графическим способом (рис. 3):

$$\max z_3 = z_3^* = z(c) = -7 \text{ при } x^*_1 = 2,\ x^*_2 = 3 \text{ из } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

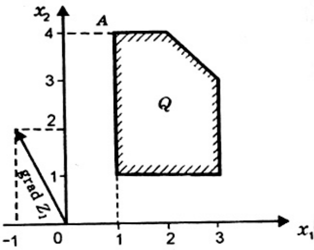


Рис.1

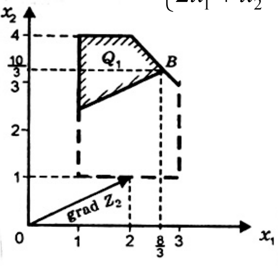


Рис.2

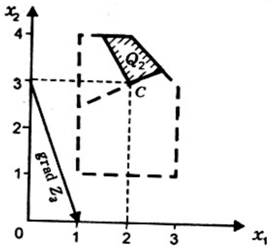


Рис.3

Т.о. получаем опт. решение расв-ой трехкт-ой задачи: $x_1=2$, $x_2=3$. Ств-ие значения частных кт-ев при этом составляют $z_1= 4$, $z_2= 7$, $z_3= -7$.

зм1. Отметим, что искомые решения мкр-ой задачи зависят и от уп-сти частных кт-ев в порядке убывания их важности. Н-р, решим п2, уп-чив частных кт-и в порядке $z_2 \to z_1 \to z_3$ и оставив прежних значений уступок без изменения, т.е. $\delta_1=3$, $\delta_2 = 5/3$.

Тогда графическим способом (аналогично рис. 1, 2, 3) получим:

$$\max z_2= z_2^* = z_2(B) =9 \text{ при } x^*_1= 3, x^*_2= 3 \text{ из } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 = 3. \end{cases}$$

Из z^*_2 - $\delta_2 = 9 - \frac{5}{3} = \frac{22}{3}$ получим дпн. огр-ие виды

$$2x_1+x_2 \geq \frac{22}{3} \qquad (32')$$

Задачу (31), (32), (32′) также решаем графически $\max z_1= z_1^*= z_1(A)= \frac{19}{3}$

при $x^*_1=\frac{5}{3}$, $x^*_2=4$ из $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22/3, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Тогда $z^*_1 - \delta_1 = \frac{19}{3} - 3 = \frac{10}{3}$, откуда получим дпн. огр-ие

$$-x_1+ 2x_2 \geq \frac{10}{3}. \qquad (32'')$$

Наконец, решив задачу (31б), (32), (32′), (32″) получим

$$\text{мах } z_3= z_3^*= z_3(C) = -\frac{92}{15} \text{ при } x_1^*=\frac{34}{15}, x^*_2=\frac{42}{15} \text{ из } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22/3, \\ -x_1 + 2x_2 = 10/3 \end{cases}$$

Итак, получим опт. решение задачи: $x_1 = \frac{34}{15}$, $x_2 = \frac{42}{15}$ со ств. значениями частных критериев $z_2=\frac{110}{15}$, $z_1 = \frac{10}{3}$, , $z_3=-\frac{92}{15}$, к-ые отличаются от решений п2 при $z_1 \to z_2 \to z_3$.

6⁰. Нахождение Паретовского множества альтернатив. Пусть дана мкр. задача

$$Z=\max_{x \in Д} \left\{ f_s(x) \right\} (s=\overline{1,k}). \qquad (33)$$

И пусть $У_s$ – мн. значений фк-и f_s, т.е. мн. всех оценок по s-му кт-ю $(s = \overline{1,k})$. Тогда мн. $У=\prod_{s=1}^{k} Y_s$ $У_s$, состоящее из всевозможных уп-ых наборов оценок по кт-ям 1, 2,…,к, наз. мн-ом векторных оценок. Любой эл. $у \in У$

представляет собой вектор $y = (y_1, y_2,\ldots y_к)$, где $y_s \in У_s$. Для всякого исхода $a \in Д$ набор его оценок по всем кт-ям, т.е. набор $y(a) = f_1(a), f_2(a),\ldots, f_k(a)) = (y_1, y_2, \ldots,y_k)$ есть векторная оценка исхода а. Векторные оценки у (a_1) и у (a_2) позволяют сравнить исходы a_1 и a_2 между собой. Дадим сд-ие

о1. Говорят, что векторная оценка $y=(y_1,\ldots,y_к)$ доминирует по Парето векторную оценку $y'=\left(y'_1,...y'_k\right)$ и пишут $\overset{Par}{y>y'}$, если для всех $s=\overline{1,k}$ выполняется неравенство $y_S \ge y'_S$, причем по крайней мере для одного индекса $s=\overline{1,k}$ нерав. должно быть строгим.

о2. Пусть $Q \subseteq У$ – нек-ое мн. векторных оценок. Векторная оценка $y^* \in Q$ наз. Парето-оптимальной в Q, если она яв-ся мкс. эл-ом мн-ва Q отс-но Парето-доминирования, т. е. если в мн. Q не сущ-ет такой векторной оценки у, к-ая доминирует по Парето векторную оценку y^*.

о3. Говорят, что исход a_1 доминирует по Парето исход a_2 и пишут $\overset{Par}{a_1>a_2}$ если $\overset{Par}{y(a_1)>y(a_2)}$.

о4. Исход $a^* \in Д$ наз. Парето-опт. исходом в мн. Д, если он не доминируется по Парето никаким другим исходом, а из мн. Д, т. е. если в мн. Q не сущ-ет такой вектор у(а), к-ая доминирует по Парето векторную оценку у (a^*).

Парето-опт-ть исхода a^* означает, что он не может быть улучшен ни по одному из кт-ев без ухудшения по какому-нибудь другому кт-ю.

Для геом. представления доминирования по Парето и Парето-опт-сти рас-им случай двух кт-ев f_1 и f_2, когда мн. допустимых исходов яв-ся дискретным (конечным) как на рис. 4. Здесь Парето-опт-ми яв-ся исходы {4, 5, 7, 8,}. При этом каждый исход, не яв-йся Парето-опт-ым, доминируется по Парето нек-ым Парето-опт. исходом (не обязательно одним). Н-р, $\overset{Par}{6<5}$, $\overset{Par}{6<7}$, $\overset{Par}{10<7}$, $\overset{Par}{10<5}$ и т. д.

Если мн. допустимых исходов яв-ся непр-ым, их векторные оценки «заполняют» нек-ю обл. Q. Н-р, для двух кт-ев f_1 и f_2 (рис.5) мн-во Парето-опт-ых исходов представляет собой «северо-восточную» границу Q, отмеченную жирной линией γ. Здесь также любой исход, не яв-йся Парето-опт-ым, доминируется по Парето нек-ым Парето-опт. исходом.

Теперь рас-им основную проблему опт-ти для мкр-ых ЗПР. Сформулировать единый принцип опт-ти для таких задач невозможно, т.к. понятие векторного опт-ма не опр-но. Укажем вначале нх. условие опт-ма: если исход $a \in Д$ не яв-ся Парето-опт-ым, то он не может быть опт-ым исходом. Дсв-но, в этом случае сущ-ет такой допустимый исход $a' \in$ Д, что $\overset{Par.}{a'>a}$; тогда ЛПР предпочтёт исход a' исходу a, значит, исход a не опт-ен.

Итак, «кандидатом» на опт. решение мкр-ой ЗПР яв-ся только Парето-опт. исход.

Однако, как видно из выше приведённых примеров, в типичных случаях Парето-опт-ых исходов может быть несколько (а в непр-ом случае – беск-ое мн.)

Какой же из Парето-опт. исходов следует считать опт-ым? Чтобы ответить на этот вопрос, нх-мо иметь дпн-ой информации о кт-ях на основе одного из сд-их подходов.

1) Для заданной мкр-ой ЗПР находится множество её Парето-опт. исходов, а выбор конкретного опт. исхода из мн. Парето-опт-ых представляется ЛПР.

2) Производится сужение мн-ва Парето-опт. исходов (в идеале – до одного эл-та) с помощью нек-ых формализованных процедур, что облегчает окончательный выбор опт-го исхода. Причём такое сужение может быть произведено только при наличии дан-ой информации о кт-х или о св-ах опт-го решения.

Рас-им нек-ые простейшие способы сужения Парето-опт-го мн-ва для мкт-ой задачи (33).

а) Указания нижних границ кт-ев. Дпн-ая информация об опт-ом исходе $a^* \in$ Д дается в виде

$$f_S(a^*) \geq \gamma_s\ (s = \overline{1,k}\ ).$$

Ясно, что при увеличении значений γ_s ($s = \overline{1,k}$) Парето-опт. мн-во «сокращается». Пример, представлений на рис. 6, демонстрирует это обстоятельство для двух критериев f_1 и f_2. Причем на рис-ке кружком отмечены Парето-опт-ой границы Q; $'$ означает концы части Парето-опт. границы, полученной при огр-ях f_S $(a^*) \geq \gamma_s'$; $''$ означает границы при $f_S(a^*) \geq \gamma''$ s.

Окончательный выбор Парето-опт. исхода производится из суженного Парето-опт. мн-ва ЛПР на основе субъективных соображений.

б) Субоптимизация: выделяют один из кт-ев, а по всем остальным кт-ям назначают нижние границы. Опт-ым при этом считается исход, мксз-щий выделений кт-й на мн-ве исходов, оценки к-ых по остальным критериям не ниже назначенной.

Пусть, н-р, f_1– выделенный кт-й и γ_S – нижняя граница для s-го кт-я, где $s = \overline{2,k}$. Тогда опт-ым считается тот исход $a^* \in$ Д, на к-ом достигает мкс-ма фк-я f_1, расв-мая на мн-ве Д$_1$=$\left\{a \in Д : f_S\left(a\right) \geq \gamma_S\left(s = \overline{2,к}\right)\right\}$. Так для ЗПР, представленной на рис. 6, в качестве выделенного кт-я f_1, а в качестве нижней границы по кт-ю f_2 вел-у γ_2^1; тогда опт. решение ств-ет точке пересечения горизонтальной прямой, проведенной через γ_2^1, с Парето-опт. границей. Ясно, что при увеличении нижней границы кт-я f_2 мкс. фк-и f_1 уменьшается (см. рис. 6).

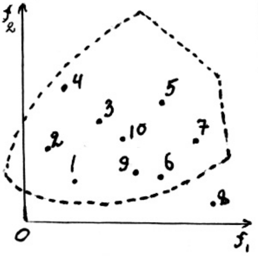


Рис. 4

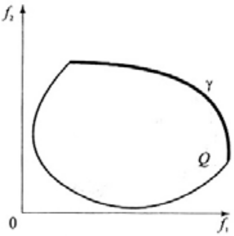


Рис. 5

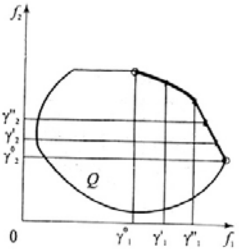


Рис. 6

С помощью метода субоптимизации задачи мкт-ой опт-и превращается в задачу «обычной» (скалярной) опт-и на суженном допустимом мн-ве. Выделение одного из кт-в, а также указания нижних границ для остальных кт-в основано на дпн-ой информации, получаемой от ЛПР. Сд-но, окончательное решение здесь также имеет субъективный характер.

в) Лексикографическая оптз-я основана на упорядочении (уп) кт-в по их отс-ой важности. После этого на первом шаге отбирают исходы, к-ые имеют мкс. оценку по важнейшему кт-ю. Если такой исход единственный, то его считают опт-ым. Если же таких исходов несколько, то среди них отбирают те, к-ые имеют мкс. оценку по сд-му за важнейшим кт-ю и т. д. В результате такой процедуры всегда остается (по крайнем мере, в случае конечного мн-ва исходов) единственный исход – он и будет опт-ым.

Проиллюстрируем рас-ные в этом пункте методы нахождения опт-го решения в мкт-ых ЗПР на сд-ем

п3 (Выбор места работы). Пусть требуется выбрать место работы из 9 вариантов, представленных в табл. 4. В качестве основных кт-в взяты: зарплата З, длительность отпуска Д, время поездки на работу В. Т. к. кт-й В имеет характер потерь, оценки по этому кт-ю берутся со знаком «минус». Какой вариант яв-ся опт-ым?

Таблица 4

Варианты	Критерий		
	Зарплата (руб.)	Длительность отпуска (дни)	Время поездки (мин)
1	900	20	– 60
2	500	30	– 20
3	700	36	– 40
4	800	40	–50
5	400	60	– 15
6	600	30	– 10
7	900	35	–60
8	600	24	–10
9	650	35	– 40

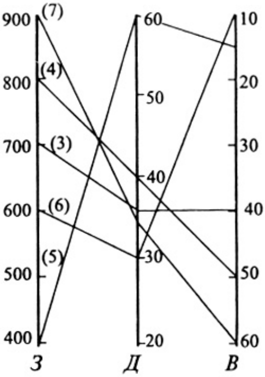


Рис.7

Р. Выделим вначале Парето-опт. варианты

$$3 \overset{Par}{>} 9, \quad 6 \overset{Par}{>} 2, \quad 6 \overset{Par}{>} 8, \quad 7 \overset{Par}{>} 1,$$

а др-х пар, находящихся в отн-и доминирования по Парето, нет. Отбрасывая доминируемые по Парето варианты $\{1,2,8,9\}$, получаем Парето-опт. мн-во $\{3,4,5,6,7\}$, к-ое можно представить и геом-им способом как на рис. 7.

При отсутствии информации об отс-ой важности разв-х кт-в, а также о каких-либо дпн-ых св-ах опт-го решения дальнейшее сужение Парето-опт. мн-ва произвести нельзя, т. е. имеет первый подход. Тогда формальный анализ заканчивается указаниям Парето-опт. мн-ва и окончательный выбор опт. варианта производится ЛПР из этих пяти вариантов на основе каких-то дпн-ых соображений.

Рас-им теперь второй подход, к-ый приводит к сужению Парето-опт. мн-ва на основе дпн-ой информации, получаемой от ЛПР.

а) Указание нижних границ. Наложим, н-р, сд-ие огр. на опт. решение:
зарплата – не менее 600 руб.,
длительность отпуска – не менее 30 дней,
время поездки – не более 40 мин.

Варианты, уд-ие этим дпн. огр-ям: $\{3,6,9\}$; из них опт-ми по Парето яв-ся варианты $\{3,6\}$. Остается делать окончательный выбор между вариантами 3 и 6.

б) Субоптимизация. Пусть в качестве выделенного кт. выступает кт-й зарплата; огр-ия: длительность отпуска – не менее 30 дней, время поездки – не более 40 мин. Отбросим варианты, к-ые не уд. данным огр-иям; остаются варианты: $\{2,3,5,6,9\}$. Из них мкс. зарплату имеет вариант 3. Этот вариант будет и опт-ым.

в) Лексикографическая оптимизация. Уп-им кт-и по отс-ой важности, н-р, так: З > В > Д. Мкс. значение по З имеют варианты 1 и 7. Эти варианты сравниваем по кт-ю В. Т. к. время поездки для этих вариантов одинаково, переходим к третьему кт-ю Д, для нее лучшим яв-ся вариант 7, к-ый и яв-ся здесь опт-ам.

зм2. Легко установить, что при уп-и В > Д > З опт-ым будет вариант 6, а при уп-и Д > З > В опт-ым становится вариант 5.

Здесь наглядно проявляется недостаток лексикографической оптз. – фактический учет одного (важнейшего) кт-я. Н-р, в последнем случае в качестве опт-го выступает вариант 5, к-ый имеет самую низкую оценку по кт-ю зарплата.

7^0. Метод построения обобщенного критерия. Локальный коэффициент замещения и карта безразличий. Под построением обобщенного кт-я в мкт-ой ЗПР понимается процедура, к-ая «синтезирует» набор оценок по заданным частным кт-ям, в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность этого набора оценок. Формально обобщенный кт-й для мкт-ой задачи (33) представляет собой фк-ю $\varphi : У_1 х У_2 х ... х У_k \to R,$ где $У_S$ – мн-во оценок по S-му кт-ю. Если обобщенный кт-й φ построен, то для каждого допустимого исхода $a \in$ Д может быть найдена численная оценка его полезности (ценности, эффективности): $f(a) = \varphi\left(f_1(a),...,f_k(a)\right)$. Т. о., задание обобщенного кт-я сводит задачу мкт-ой опт-и к задаче однокт-ой опт-и с целевой фк. f.

Наиболее распространенным обобщенным кт-ем яв-ся «взвешенная сумма частных кт-в», к-ая превращает векторную оценку $y = (y_1,...,y_k)$ в скалярную оценку

$$\varphi(y) = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k, \tag{34}$$

где $\alpha_S \geq 0, s = \overline{1,k}$ (иногда дпн-то требуют выполнене условия $\sum_{S=1}^{k} \alpha_S = 1$).

Числа $\{\alpha_S\}$ наз-ют весовыми коэф-ми, к-ые выражают отс-ой важности кт-в: чем больше α_S, тем больше «вклад» s-го кт-я в итоговую оценку $\varphi(y.)$

Справедливы сд. утв-ия (правила).

Правило 1. Пусть Q$\subseteq$У– произвольное мн. векторных оценок.

Если векторная оценка $y^* = \left(y_1^*,...,y_k^*\right)$ доставляет мкс. фк-и $\varphi(y) = \sum_{S=1}^{k} \alpha_S y_S$, где $\alpha_S > 0\left(s = \overline{1,k}\right)$, то векторная оценка y^* яв-ся Парето-опт-ой в мн-ве Q.

Д. Предположим противное, т.е. сущ-ет векторная оценка $y' = (y_1',...,y_k') \in Q$, к-ая доминирует по Парето векторную оценку y^*. Тогда при всех $s = \overline{1,k}$ выполняется нерав. $y_s' \geq y_s^*$, причем хотя бы для одного индекса s нерав-во выполняется как строгое. Умн-я эти нерав-ва на $\alpha_S > 0$, получим $\sum_{S=1}^{k} \alpha_S y_s' > \sum_{S=1}^{k} \alpha_S y_S^*$, т.е. $\varphi(y') > \varphi\left(y^*\right)$, что противоречит с тем, что y^* есть точка мкс-ма фк-и φ на мн-ве Q.

Обратное утв. верно не всегда, но в случае, когда мн. Q яв-ся выпуклым, обратное утв. также имеет место, т. е. верно сд.

Правило 2. Пусть Q$\subseteq$ $У$– выпуклое мн., $У^* \in Q$ – Парето-опт. векторная оценка на мн-ве Q. Тогда найдутся такие неотц. числа $\alpha_S \geq \left(s = \overline{1,k}\right)$, что фк. $\varphi(y) = \sum_{S=1}^{k} \alpha_S y_S$, достигает мкс-ма на мн-ве Q в точке y^*.

Рас-им это утв. для случая двух кт-в u и v. Изб-им мн. векторных оценок Q на крд-ой пл-ти пер-ых (u,v). Пусть M^* (u^*, v^*) – Парето-опт. векторная оценка мн-ва Q (рис. 8). Проведем в точке M^* касательную l к линии γ, яв-йся Парето-опт, границей обл. Q (предполагая, что в нек-ой окр-ти точки

M^* эта линия гладкая). Пусть N (A, B) – вектор нормали к пм. l, ор-ой так, чтобы N был направлен вне Q. Тогда касательная l опр-ся ур-ем вида Au+Bv+C=0, а нерав. Au+Bv+C$\le$0 опр-ет полупл-ть, огр-ую пм. l и содержащую обл. Q. Т. о., для любой точки M_1 (u_1, v_1) выполняется нерав. Au+Bv+C$\le$0 , а для точки M^* (u^*, v^*) имеет место рав. Au^*+Bv^* +C=0, поэтому Au^*+Bv^* $\ge$ Au_1+Bv_1. Т. к. числа (A, B) – крд. вектора N – неотц-ны, получаем, что лин. фк. $\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v})=Au+B\mathrm{v}$ яв-ся искомой: мкс. фк-и φ(u,v) в обл. Q достигается в точке M^* (u^*, v^*).

зм3. Если линия γ , составляющая Парето-опт. границу, не яв-ся гладкой в окр-ти точки M^*, то вместо касательной прямой в точке M^* возьмем прямую (рис. 9) – ее сущ-ие обеспечивается выпуклостью обл. Q. Наконец, в случае к кт-в, где к > 2, надо опорную прямую заменить гиперпл-ю.

В общем случае правило 2 гарантирует сущв-ие неотрц-ых коэф-ов λ_s (s=$\overline{1,к}$), при к-ых мкс. лин-ой фк. $\varphi(y)=\sum_{s=1}^{\kappa}\lambda_s Y_s$ достигается в заданной Парето-опт. точке; сущв-ие требуемых плж-ых коэф-ов λ_s имеет место не всегда. Рис. 10 поясняет это обстоятельство для случая двух кт-в. Здесь обл.Q представляет собой четверть круга. Для Парето-опт. точки M^*_1 имеем фк-ю $\varphi_1(u,\upsilon)=Au$, где A>0, а для Парето-опт. точки M^*_2 – фк-ю вида $\varphi_2(u,\upsilon)=B\upsilon$, где B>0.

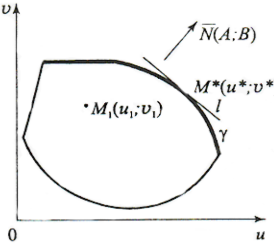


Рис. 8

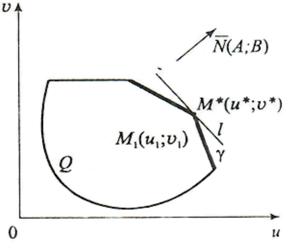


Рис. 9

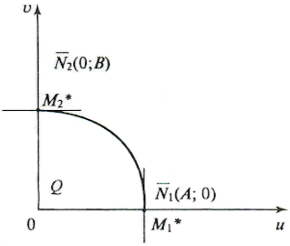


Рис. 10

Правила 1,2 указывают «способ перебора» Парето-опт. точек заданного мн. Q: зафиксировав плж-й вектор весов $\lambda \le (\lambda_1,...,\lambda_\kappa)$ и найдя max взвешанной суммы $\sum_{s=1}^{\kappa}\lambda_s y_s$, получаем нек-ю точку Парето-опт. мн-ва; в случае выпуклого мн.Q все Парето-опт. точки мн-ва могут быть получены таким способом при нек-ых $\lambda_s \ge 0(s=\overline{1,\kappa})$.

п4 (Оптимизация производственного процесса). Любой производственный (прз.) процесс формально можно описать парой векторов (x, y), где x – вектор затрат и y – вектор выпусков. Н-р, если в процессе прз-ва затрачиваются продукты n типов и выпускаются продукты m типов, то x= $(-x_1,\ldots,-x_n)$, где x_i – кол. затрачиваемого продукта (ресурса) i-го типа и y=$(y_1,\ldots, y_m)$, где y_j – кол. выпускаемого продукта j-го типа (i=1ˉn, j=1ˉm). Пара (x,y) наз. вектором затрат-выпусков и формально отображает экнч. содержание прз-го процесса. Как правило, имеющая прз. технология позволяет реализовать не один, а мн. прз-ых процессов, каждому из к-ых ств-ет свой вектор затрат-выпусков, мн-во всех таких векторов затрат-выпусков наз. прз-ым мн-ом (или технологическим мн-ом). С экнч-ой точки зрения изучения прз-ва может быть представлено как изучение структуры прз-го мн-ва. Расс-им структуры прз. мн-ва с позиций мкт-ой оптз-и.

Пусть прз-ое мн. T представлено как нек-ое мн. векторов в пр-ве R^{n+m}. Что означает в данном случае доминированные по Парето? Возьмём две прз-ых процесса.

$$П^1= (-x^1{}_1, \ldots ,-x^1{}_n, y^1{}_1,\ldots,y^1{}_m),$$
$$П^2= (-x^2{}_1,\ldots,-x^2{}_n, y^2{}_1,\ldots, y^2{}_m).$$

Условие $\overset{Par}{П^1 > П^2}$ сводится к тому, что $x^1{}_i \leq x^2{}_i$ и $y^1{}_j \geq y^2{}_j$ для всех $i=\overline{1,n}$ - и $j=\overline{1,m}$ (хотя бы одно нерав. должно быть строгим). Т.о прз-ый процесс $П^1$ доминирует по Парето прз. процесс $П^2$ тогда, когда для прз. процента $П^1$ затрата ресурсов каждого типа не превосходит затрат при прз-ом процессе $П^2$, т.е $x_i^1 \leq x_i^2$; а выпуск продукта каждого типа при прз-ом процессе $П^1$ не меньше, чем при $П^2$, т.е $y_i^1 \geq y_i^2$.

Для анализа Парето-опт-ых векторов воспользуемся правилами 1 и 2. Пусть $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ – векторы с плж. компонентами. В силу правила 1 имеем:

А) Всякий вектор затрат-выпусков $(x^*,y^*) = (-x^*{}_1,\ldots,-x^*{}_n, y^*{}_1,\ldots,y_m{}^*)$ к-ый доставляет на мн-ве T max фк-и

$$\varphi(x,y) = (\lambda, x) + (\beta, y) = (\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m) - (\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n), \qquad (35)$$

яв-ся Парето-опт-ым.

В случае, когда мн. T яв-ся выпуклым (содержательной точки зрения, это означает возможность «дробления» затрачиваемых и произведённых продуктов), справедливо и обратное утв.

Б) Если прз-ый процесс $(x^*,y^*) \in T$ опт-лен в T по Парето, то найдутся также векторы λ и β неотц. компонентами, что (x^*,y^*) доставляет max фк-и φ на мн. T.

Экнч. интерпретация этих утв-й такова. Векторы λ и β можно расв-ть как гипотетические (назначенные произвольно) векторы цен на затрачиваемые и на выпускаемые продукты (λ_i– цена ед-ы затрачиваемого ресурса i-го типа, β_j – цена ед. выпускаемого продукта j=го типа). Тогда φ(x,y) – прибыль от реализации пзв-го процесса (x,y) по ценам (λ, β). Утв. А) имеет при этом сд-й экнч. смысл: всякий прз. процесс, к-ый мксз-ет прибыль при нек-ых гипотетических ценах, яв-ся Парето-опт-ым.

Утв. Б) означает, что всякий Парето-опт. прз-ый процесс будет мксз-ть прибыль при нек-ых гипотетических векторах цен α и β (в этом случае нек-ые компоненты этих векторов могут быть равны нулю).

Теперь рас-им трудности, возникающие при построении обобщённого кт-я на основе нек-ой реальной системы (объекта). Частные кт-и системы можно разбить на две группы: кт-и, отражающие эффективность системы, и кт-и, связанные со стоимостью системы. Предположим, что уже удалось построить обобщённый кт. эффективности(Э) и обобщённый кт. стоимости(С). Как теперь соединить кт-и стоимости и эффективности в один кт-й? Наиболее естественными яв-ся в качестве такой оценки взять «удельную эффективность», т.е. отн-ие эффективности к стоимости: U = Э/С. Т.к. обобщённый кт. указывает «итоговую» оценку полезности системы для ЛПР, то по вел-не обобщённого кт. устанавливается предпочтение между сравниваемыми объектами.

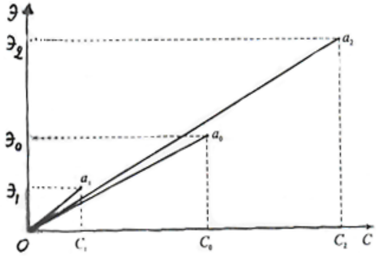


Рис. 11

Изучим теперь показатели стоимости и эффективности для трёх систем a_0, a_1, a_2, представленные на рис.11. Здесь U_0=$Э_0$/$С_0$, U_1=$Э_1$/ $С_1$, U_2=$Э_2$/$С_2$, причём U_1>U_0, U_2>U_0. Т.о., по обобщённому кт-ю U=Э/С системы a_1 и a_2 яв-ся более предпочтительными, чем система a_0. Однако система a_1 имеет очень низкую эффективность, а система a_2 – очень высокую стоимость. Ясно, что практической точки зрения ни система a_1, ни система a_2 не могут расв-ся как уд-ые. Поэтому кт-й U = Э/С не может претендовать на роль «адекватного» обобщённого кт-я. Отметим, что даже при объединении частных кт-в эффективности в единый обобщённый кт-й (Э) могут возникать сущ-ые трудности, особенно в случае наличия кт-в, хркз-щих объект с разных сторон (н-р, скорость автомобиля и его надёжность).

Рас-им теперь проблему построения обобщённого кт-я в виде взвешенной суммы частных кт-в(см.фм-у(34)). Предложено мн-во различных способов нахождения весовых коэф-ов, однако ни один из них не может претендовать на роль универсального. Рас-им в качестве примера ед-й способ нахождения весовых коэф-ов: $\alpha_s = \dfrac{1}{M_s}$, где $M_s = \max\limits_{a \in Д} \left| f_s\left(a\right) \right|$. В этом случае итоговой численной оценкой исхода a яв-ся сумма нормированных оценок $f_s(a)/M_s$ по всем кт-ям, т.е. вместо (34) получим:

$$f(a) = \sum_{s=1}^{\kappa} \frac{f_s(a)}{M_s} \tag{36}$$

На первый взгляд обобщённый кт-й (36) кажется вполне уд-ым. Однако, сд-й пример ваявляет один сущ-ный недостаток этого кт-я.

Пусть требуется сравнить два альтернативных вариантов (см.п3) место работы А и Б, заданные с векторными оценками: А=(З, Д, В)=(900, 20,-60), Б=(500, 30,-40). Здесь M_1=900, M_2=30, M_3=60, откуда имеем

$$f(A)=\frac{900}{900}+\frac{20}{30}-\frac{60}{60}=\frac{2}{3},\quad f(Б)=\frac{500}{900}+\frac{30}{30}-\frac{40}{60}=\frac{8}{9}.$$ Т.к f(Б)>f(A),

то альтернатива Б более предпочтительна (прч.), чем альтернатива А. Пусть теперь вместе с А и Б появилась ещё одна альтернатива С = (400, 60,-100). В этом случае M^1_1 = 900, M^1_2 = 60, M^1_3 = 100. Тогда

$$f(A)=\frac{900}{900}+\frac{20}{60}-\frac{60}{100}=\frac{22}{30},\qquad f(Б)=\frac{500}{900}+\frac{30}{60}-\frac{40}{100}=\frac{59}{90},\qquad f(C)=\frac{400}{900}+\frac{60}{60}-\frac{100}{100}=\frac{4}{9}.$$

Получим, что альтернатива А более прч-на , чем Б (f(A)>f(Б)), т.е. порядок прч-я альтернатив А и Б получился в этом случае обратным. Итак, наличие ещё одной альтернативы С меняет прч-я между альтернативами А и В. Это парадоксальное св-во наз. нарушением незв-ти прч-й отс-но посторонних альтернатив. При этом дпн. альтернатива С здесь не конкурирует ни с А, ни с В, т.к. А и В прч-е, чем С.

Подведём нек-ые итоги. Принципиальная сложность построения обобщённого кт-я заключена в том, что приходится «соотносить» друг с другом кт-и, хркз-щие объект с разных сторон; эти кт-и имеют часто совершенно различную природу, в силу чего оценки по ним даются в разных шкалах. Построения итоговой («интегральной») оценки невозможно без соизмерения кт-в между собой, что требует большой дпн. информации об отс-ой важности этих кт-в для ЛПР, т.е. как построить обобщённую кт-ю α и какому требованию она должна отвечать. Единственное требование состоит в том, что это отб-ие должно «сохранять» отн-ие доминирования по Парето. Поэтому дадаим сд-ие

о5. Под обобщённом кт-ем будем понимать отб. φ :RxR$\rightarrow$ R, уд-щее условию

$$(u_1,\vartheta_1)\overset{Par}{>}(u_2,\vartheta_2)\Rightarrow\varphi(u_1,\vartheta_1)>\varphi(u_2,\vartheta_2). \tag{37}$$

Иногда расв-ют ослаблённый вариант условия (37), состоящий в импликации

$$(u_1,\vartheta_1)\overset{Par}{\geq}(u_2,\vartheta_2)\Rightarrow\varphi(u_1,\vartheta_1)\geq\varphi(u_2,\vartheta_2). \tag{38}$$

Различие между стн-ми (37) и (38) в том, что взвешанная сумма (34) с неотц. весовыми коэф. $(\alpha_s\geq 0)$ уд-ет условию (38), а с плж-ми $(\alpha_s>0)$– более сильному условию(37).

о6. Обобщённые кт. φ_1 и φ_2 наз. экв-ми, если для любых векторных оценок $(u_1,\vartheta_1)u(u_2,\vartheta_2)$ выполняется равносильность

$$\varphi_1(u_1,\vartheta_1)\geq\varphi_1(u_2,\vartheta_2)\Leftrightarrow\varphi_2(u_1,\vartheta_1)\geq\varphi_2(u_2,\vartheta_2) \tag{39}$$

Н-р, обобщённые кт-и

$$\varphi_1(u,\vartheta)=2u+3\vartheta,\varphi_2(u,\vartheta)=0,4u+0,6\vartheta,\varphi_3(u,\vartheta)=e^{2u+3\nu}$$

экв-ны между собой. Если φ – обобщённый кт-и, то фк. $\Psi = \lambda\varphi$, где λ произвольно возрастающая фк., также яв-я обобщенным кт-ем, к-ый экв-тен кт-ю φ.

Теперь выясним данные, к-ые требуются для построения обобщенного кт-я. Предположим, что обобщенный кт-й $\varphi(u,\vartheta)$ построен. Тогда ур. $\varphi(u,\vartheta)=c$ при каждом фиксированном значении с орп-ет на пл-ти пер-ых (u,ϑ) нек-ю кривую $\llcorner$, к-ая наз. кривой безразличия, $\varphi(u_{1,}\vartheta_1)=\varphi(u_{2,}\vartheta_2)$, поэтому ЛПР будет расв-ть векторные оценки $(u_1,\vartheta_1)u(u_2,\vartheta_2)$ как равноценные.

Фиксируем нек-ю точку $\mathrm{M}(u,\vartheta)$ и проанализируем, что происходит при переходе от точки М к точке $\mathrm{M}'(\mathrm{u}',\vartheta')$ при движении по кривой безразличия $\llcorner$ (рис. 12). Если обз-им $\vartriangle \mathrm{u} = \mathrm{u}' - \mathrm{u}$, $\vartriangle\vartheta = \vartheta' - \vartheta$, то при переходе от точки М к точке M' оценки по первому кт. увеличивается на вел-у $|\vartriangle u|$, а по второму кт. уменьшается на вел. $|\vartriangle\vartheta|$ (причем $\vartriangle u$ и $\vartriangle\vartheta$ всегда имеют разные знаки для одной кривой $\llcorner$). Т.к. ЛПР расв-ет оценки (u,ϑ) и (u^1,ϑ^1) как равноценные, то для него потеря $|\vartriangle\vartheta|_{ед}$ по вторному кт. компенсируется прибавкой $|\vartriangle u|$ ед. по первому кт. или в экв. форме: прибавка $|\vartriangle\vartheta|$ ед. по второму кт. компенсирует потерю $|\vartriangle u|$ ед. по первому кт-ю.

Плж. число – $(\vartriangle\vartheta/\vartriangle u)$, указывающее отн. «потерь-прибавок» зависит в какую точку M^1 мы сместимся из точки М по кривой безразличия. Чтобы исключить зв-сть от точки M^1 надо сместиться из точки M^1 к точке М и найти предел $\left(-\frac{\vartriangle\vartheta}{\vartriangle u}\right)$ при $\mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}$, т.е. при $\vartriangle u \to o$.

о7. Плж. число

$$\text{к} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(-\frac{\Delta\vartheta}{\Delta u}\right)=\frac{d\vartheta}{du}.=\frac{d\vartheta}{du}. \qquad (40)$$

наз. локальным коэф-ом замещения (ЛКЗ) в точке $\mathrm{M}(u,\vartheta)$. конечно, в общем случае ЛКЗ зависит от точки М, т.е. $\mathrm{K}=\mathrm{K}(u,\vartheta)$.

Содержательный смысл ЛКЗ заключает в сд-ем. Если $\vartriangle u$, мало, то можно считать, что – $\vartriangle\vartheta \approx к\vartriangle u$; взяв $\vartriangle u = 1$, получим $|\vartriangle\vartheta| = -\vartriangle\vartheta \approx к$. Т.о., ЛКЗ приблизительно равен той мнм-ой прибавке по второму кт., которая компенсирует для ЛПР потерю ед-ы по первому кт-ю (рав-во тем точнее, чем меньшей взята ед. по первому кт-ю).

Геом-й смысл ЛКЗ ясен из рис. 12: т.к. $\vartriangle\vartheta/\vartriangle u$ есть тангенс угла наклона к оси абсцисс, то переходя к пределу при $\vartriangle u \to o$, получим сд. правило.

Правило 3. ЛКЗ в точке М$\left(u,\vartheta\right)$ равен взятому со знаком «минус» тангенсу угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к кривой безразличия в точке М.

Пусть Q$\subseteq R^2$ – нек-ое мн. векторных оценок. Из опр-я кривой безразличия следует, что через каждую точку М$\in$Q проходит одна и только одна кривая безразличия. Мн-во всех кривых безразличия составляет карту безразличия в обл. Q; типичный вид карты безразличий представлен на рис. 13. Будем считать, что кривые безразличия яв-я гладкими, т.е. имеют касательную в каждой точке.

Правило 4. Задание в обл.Q карты безразличий равносильно заданию ЛКЗ для каждой точки М$\in$Q.

Дсв-но, если дана карта безразличий К=$\left\{L\right\}$, то в каждой точке можно провести касательную и построить поле ЛКЗ и обратно, если дана для каждой точки ЛКЗ $\left\{k\left(u,v\right)\right\}$, то можно в каждой точке провести касательные и построить по полю направлений карте безразличий.

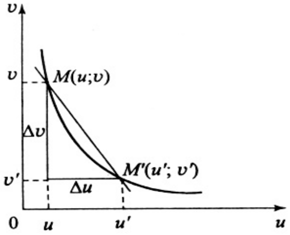


Рис.12

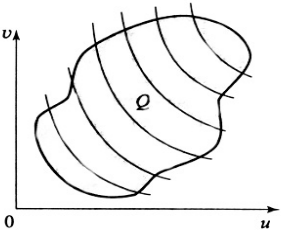


Рис.13

Теперь найдем условия, при к-ых ЛКЗ яв-ся пст-ым.

1) Если в обл. вертикальных оценок Q$\subseteq R^2$ ЛКЗ к пст-нен, то семейство кривых, составляющих карту безразличий обобщенного кт-я, опр-ся диф-ым ур-ем $\frac{dv}{du} = -k$, откуда v = -ku+c, т. е. карта безразличий К семейство параллельных (прл., 11) с угловым (угл.) коэф-ом –*k*.

2) Пусть в области Q задана карта К, состоящая из семейства прл. прямых с угл. коэф-ом –*k*. Тогда обращенный кт-й γ(u,v) = ku+v совместимый с картой К, т.к. его карта безразличий состоит параллельных прямых ku + v = c с угл. коэф-ом –k, т. е. совпадает с картой К. Итак, в этом случае обобщенный кр-й совместимый с картой К, может быть представлен в виде взвешенной суммы кт-ев u и v с плж-ми пст. коэф-ми, т. е. φ (u,v) = ku+v, α_1= k>0, α_2=1>0.

3) Предположим, что обобщенный кт-й γ представим в виде взвешенной суммы φ (u,v) = αu+βv, где α>0, β>0 – пст-ые. Тогда кривые безразличия его опр-ся ур-ем αu+βv = c, где с пст-я, т. е. яв-ся пм-ми с угл. коэф-ом k=-$\frac{\alpha}{\beta}$; по правилу 3 (см. и о7) в этом случае ЛКЗ равен $\frac{\alpha}{\beta}$ и яв-ся пст-ым.

Сд-ие три условия экв-ны между собой:

а) Обобщенный кт. φ представим в виде взвешенной суммы частных кт-в.

б) Карта безразличий обобщенного кт-я φ состоит из семейства прл. прямых.

в) ЛКЗ в обл. Q пст-нен.

Т.о., представимости обобщенного кт-я в виде взвешенной суммы частных кт-ев нх-мо пст-ство ЛКЗ. Это очень сильное требование, к-ое в большинстве экн-их задач не выполняется (см. п5 и п6).

Итак, построение «какого-нибудь» обобщенного кт-я не трудно, н-р, фк. $\varphi(u,v) = \alpha u+\beta v$ при любых α, $\beta > 0$ всегда яв-ся обобщенным кт-ем, т. е уд-ет условию (37). Однако, при изменении весовых коэф-ов α, β меняются и прч-ия между векторными оценками (сд-но, и опт. решение в заданной обл-ти векторных оценок). Для незв-ти прч-й векторных оценок от изменений весовых коэф-ов α, β нх-мо, чтобы обобщенные кт. были экв-ми между собой (см. о6)

Предположим, что для мкт-ой ЗПР с обл-ю векторных оценок $Q \subseteq R^2$ обобщенный кт-й $\varphi(u,v)$ построен, тогда в обл. Q задается ств-ая ему карта безразличий (ее ур-ие: $\varphi(u,v) = C$, где C – пст-я).Если перейти от обобщенного кт-я φ к экв-у ему обобщенному кт. ψ, то, в силу (39) имеем

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow \psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2) \tag{41}$$

откуда следует, что для обобщенных кт-ев φ и ψ их карты без различий совпадают, т. е. получам сд-е

Правило 5. Задание в области векторных оценок Q обобщенного кт-я с точностью экв-ти – опр-ет единственным образом в обл. Q карту безразличий.

Осталось выяснить вопрос, в какой мере карта безразличий опр-ет обобщений кт-й? Для этого введем сд. понятие.

Пусть в обл. $Q \subseteq R^2$ задана нек-я карта K (т. е. такое семейство кривых, что через каждую точку обл-ти Q проходит точно одна кривая этого семейства). Пусть $\varphi(u,v)$ – обобщенный кт-й, заданий в обл. Q. Будем говорить,что обобщенный кт-й φ совместим с картой K, если его карта безразличий в пределах обл-ти Q совпадает с картой K.

Поставленный вопрос состоит из двух частей:

1) Всегда ли по заданной карте можно настраивать совместимый с ней обобщенный кт-й?

2) Будут ли кт-и, совместимое с заданной картой экв-ми между собой?

Решение этих вопросов сводится к решению сд-их задач:

а) Указать условия, при к-ых для заданной карты K совместимый сущ-ет совместимый с ней обобщенный кт-й.

б) Дать полное описание всех обобщенных кт-ев, совместимых с заданной картой K.

Эти задачи решаются в т1, предполагая условия, накладываемые на обл. Q и на и карту :.

1) обл. Q яв-ся выпуклой;

2) карта К представляет собой одно параметрическое семейство кривых, заданных ур-ем Ф (u, v, c) = 0, где с – параметр;

3) фк-я Ф яв-ся непр-но диф-ой в обл. Q;

4) в обл. выполнены условия сущв-ия неявных фк-й c=c (u,v),v=v (u,c);

5) для фк. v (u, c) при любом фиксированном с выполнено условие dv\d$u$<0.

m1. 1^*.Неявная фк. $c = c\ (u,\ v)$, опр-ная ур-ем Ф (u, v, c) = 0,яв-ся обобщённым кт-ем, совместимым с картой К.

2^*. Для того, чтобы фк. φ = φ (u, v), была обобщённым кт-ем, совместимым с картой К, нх-мо и дт-но, чтобы она имела вид φ = λ˙ c, где λ – монотонно возр-ая фк. одной пер-ой.

Д.1^***.** Покажем, что фк. c (u, v) яв-ся обобщённым кт-ем. В самом деле фк. c (u, v) уд-ет тождеству Ф (u, v, c(u, v)) = 0. Диф-уя это тождество по u и v, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial u}=0\,,\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial v}=0,\ откуда\ ,$$

$$\frac{\partial c}{\partial u}\bigg/\frac{\partial c}{\partial v}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\bigg/\frac{\partial\Phi}{\partial v}. \tag{42}$$

С другой стороны, фк. v=v (u, c) уд-ет тождеству $\phi\big(u,v(u,c),c\big)=0,$ диф-уя её по u при произвольном фиксированном c, имеем $\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial u}=-\frac{\partial\phi}{\partial u}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial v}$ и, в силу (42), получим $\frac{\partial c}{\partial u}\Big/\frac{\partial c}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial u}.$

Согласно предположению 5), $\frac{\partial v}{\partial u}<0$, поэтому $\frac{\partial c}{\partial u}\Big/\frac{\partial c}{\partial v}>0$. Тогда $\frac{\partial C}{\partial U}>0$, $\frac{\partial c}{\partial v}>0$ (если $\frac{\partial c}{\partial u}<0$, $\frac{\partial c}{\partial v}<0$, то меняем знак c (u, v)). Возьмём теперь в обл. Q любые две точки M (u,v) и M' (u',v') такие, что $\overset{\text{Par}}{(\mathrm{u}',\mathrm{v}')>(\mathrm{u},\mathrm{v})}.$ Положим $\vartriangle$u = u′ – u, $\vartriangle$ v = v′⁻v. Выполняется нерав-ва $\vartriangle \mathrm{u}\geq o,\ \vartriangle v\geq 0$, причём по крайней мере одно нерав. строгое. Имеем c (u',v') – c (u,v) = =(grad c) $\overline{MM\,'}$, где grad c надо взять в нек-ой точке M'', лежащей между M и M' (причём $M\,''\in Q$ в силу 1)). Учитывая, что крд-ми вектора grad c яв-ся частные производные $\frac{\partial c}{\partial u}>\ 0$, $\frac{\partial c}{\partial v}>\ 0$, а крд-ы вектора $\overline{MM\,'}$ суть $\Delta u\geq 0,\Delta v\geq 0$, получим $C\big(u^{,},v^{,}\big)-C\big(u,v\big)=\frac{\partial c}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial c}{\partial v}\Delta v>$ 0, откуда $C\big(u',v'\big)>$ C(u,v), т. е. выполняется (37), значит, C(u, v) – обобщённый кт-й в обл. Q.

Проверим, что обобщёный кт. $c(u,v)$ совместим с картой К. Дсв-но, пусть точки $M_1(u_1,v_1) и\ M_2(u_2,v_2)$ обл-ти Q лежат на одной кривой, принадлежащей карте К. Эта кривая опр-ся нек-ым значением параметра $c = c_{0.}$ Тогда $c(u_1,v_1)=c_0, c(u_2,v_2)=c_0$, откуда получим $c(u_1,v_1)=c(u_2,v_2)$.

2*. $\lambda -$ монотонно возр-ая (в строгом смысле) фк. одной пер-ой. Т. к. из $(u',v')^{Par}_{>}(u,v) \Rightarrow c(u',v') > c(u,v)$, то $\lambda\cdot c(u',v')>\lambda\cdot c(u,v)$ и получаем выполнимость условия (37) для фк-и $\lambda\cdot c$. Аналогично проверяется для фк. $\lambda\cdot c$ условие совместимости с картой К.

Осталось показать, что если нек-ая фк. $\varphi(u,v)$ яв-ся обобщённым кт-ем, то φ представима в виде $\varphi=\lambda\cdot c$, где λ – монотонно возр-ая фк. Дсв-но, опр-им фк-ю λ одной пер. ω сд. образом

$$\lambda(\omega)=\varphi(u,v), \text{ где } \omega=c(u,v) \qquad (43)$$

Убедимся в корректности этого опр-я. Предположим, что $\omega=c(u_1,v_1)$ и $\omega=c(u_2,v_2)$.Тогда $c(u_1,v_1)=c(u_2,v_2)$, т.е. точки $M_1(u_1,v_1)$ и $M_2(u_2,v_2)$, лежат на одной кривой, принадлежащей карте *К*. Согласно условию совместимости обобщенного кт. φ с картой *К*, получим $\varphi(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$. Проверим, что фк. λ яв-ся монотонно возр-ей. Пусть $w_1>w_2$, т. е. найдутся такие точки $M_1(u_1,v_2)$ и $M_2(u_2,v_2)$, что $w_1=c(u_1,v_1), w_2=c(u_2,v_2)$ и $c(u_1,v_1)>$ $>c(u_2,v_2)$. Из карты безразличия ясно, сто на кривой безразличия, проходящей через точку M$_1$, должна найтись такая точка $M_1'(u_1',v_1')$, к-ая сравнима по Парето с точкой $M_2(u_2,v_2)$, т. е. выполняется $(u_1',v_1')^{Par}_{>}(u_2,v_2)$ или $(u_2,v_2)^{Par}_{>}(u_1',v_1')$ (рис. 14). Условие $(u_2,v_2)>(u_1',v_1')$ влечёт с$(u_2,v_2)>$ $>c(u_1',v_1')$=с(u_1,v_1), что приводит к противоречию. Т.о., $(u_1',v_1')>(u_2,v_2)$, и т.к. φ- обобщённый кт., то $\varphi(u_1',v_1')> \varphi(u_2,v_2)$. Учитывая, что точки M$_1(u_1,v_1)$и $M_1'(u_1',v_1')$лежат на одной кривой безразличия, получаем по условию совместимости φ с картой К: $\varphi(u_1,v_1)= \varphi(u_1',v_1')$, откуда $\varphi(u_1,v_1)> \varphi(u_2,v_2)$, т.е. $\lambda(w_1)>\lambda(w_2)$. А в силу (43) имеем $\varphi(u,v)=\lambda(c(u,v))$, т.е. $\varphi=\lambda\bullet c$. ■ Полученные результаты о взаимозаменяемости факторов сравни с результатами 3^0.

сл1. Пусть φ_1 и φ_2 – два обобщённые кт-я, совместимые с картой К. Тогда кт-и φ_1 и φ_2 экв-ны (в смысле о6).

Обратно: если обобщённые кт-и φ_1 и φ_2 экв-ны, то для них карты безразличий совпадают, и оба совместимы с общей для них картой К.

Итак, приходим сд. принципиальному выводу.

Правило 6. Карта безразличий опр-ет обобщённый кт-й с точностью до экв-ти.

На основании правил 4–6 получим важный результат: дпн-ая информация отс-но частных кт-ев, к-ая требуется для построения в обл.Q обобщённого кт-я, опр-го с точностью до экв-ти, состоит в задании в этой области карты безразличий (что, в силу правила 4, равносильно ЛКЗ в каждой точке обл. Q)

п5 (сравнение объектов по прч-ти). Пусть оценка нек-ых реальных систем (объектов) производится по двум кт-ям: U и ϑ. Известен ЛКЗ к=к(u,ϑ) в любой точке $M(u,\vartheta)$ обл-ти Q. Требуется сравнить по прч-ти два объекта, для к-ых даны их векторные оценки: А(3;3) и В(3,5;2,3), где $k=\frac{2\vartheta}{u}$.

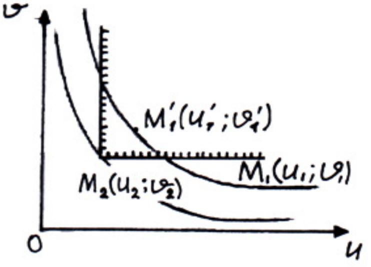


Рис. 14

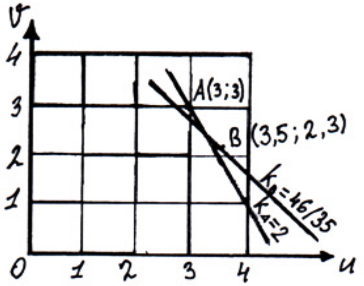


Рис. 15

Р. Попробуем в начале сравнить объекты А и В по прч-ти, используя стн-ия «потер-прибавок» $\left(-\frac{\Delta\upsilon}{\Delta u}k \Rightarrow -\Delta\upsilon \approx k\Delta u \Rightarrow -\Delta\upsilon \approx k\ при\ \Delta u=1\right)$. В точке А ЛКЗ имеем $K_A=\frac{2\cdot 3}{3}=2$, т.е. при смещении из точки А в другую точку обл. Q прибавка одной ед. $(\Delta u=1)$ по первому кт. компенсирует потерю двух ед. по второму кт-ю. В равсв-ом случае $\Delta u=3{,}5-3=0{,}5$, значит, компенсировать должны потерей $\Delta\upsilon=1$, а фактически при переходе от А к В мы теряем всего 0,7 ед., сд-но, В прч-но, чем А, т.е. В $\succ$ А.

Проанализируем теперь переход из В к А. В точке В ЛКЗ имеем $K_B=\frac{2\cdot 2{,}3}{3{,}5}=\frac{46}{35}$, т.е. потеря одной ед. $(\Delta u=-1)$ по первому кт-ю компенсируется прибавкой $\frac{46}{35}$ ед. по второму кт-ю. В данном случае теряем $\vartriangle u = 3-3,5=$ $=-0,5$, поэтому компенсировать должны прибавкой $\vartriangle \upsilon = \frac{23}{35} \approx 0,66$, а фактически прибавку имеем 0,7 по второму кт-ю, значит, объект А прч-е, чем В, т.е. А $\succ$ В.

Итак, пришли к парадоксу, причина к-го кроется в том, что в обл. Q ЛКЗ яв-ся пер-ным. Правильное решение получим так: при пер-ом ЛКЗ, заданном в виде $k = k(u,\upsilon)$ вначале надо найти кривые безразличия, т.е. карту К, на основе к-ой строим обобщенный кт-й (см. т1), используя правило 3 (см. (40)), т.е. нахлодим кривую безразличия из диф. ур-я $\frac{dv}{du} = -k(u,v)$. В данном случае $\frac{d\upsilon}{du} = -\frac{2\upsilon}{u} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{v} = -2\frac{du}{u} \Rightarrow u^2\upsilon = c.$ Это ур-ие при любом фиксированном $c > 0$ опр-ет кривую безразличия, а их семейство в обл. Q образует карту безразличия К. согласно т1 фк. $c(u,\upsilon) = u^2\upsilon$ яв-ся обобщенным кт-ем, совместимым с картой К (значит, и с ЛКЗ $k(u,\upsilon) = \frac{2\upsilon}{u}$).

Находим c (А) = $3^2 \cdot 3 = 27$, $c(\text{В}) = 3,5^2 \cdot 2,3 \approx 28,2$. Т. о., по обобщенному кт-ю $c(u,\upsilon) = u^2\upsilon$ (значит, и по любому обобщенному кт-ю, имеющему в качестве ЛКЗ фк. $k(u,\upsilon) = \frac{2\upsilon}{u}$) объект В более предпочтительно, чем объект А, т.е. В $\succ$ А.

зм4. Согласно т1, в качестве обобщенного кт-я, совместного с картой К, может быть взята любая фк. вида $\varphi = \lambda \cdot c$, где $\lambda -$ монотонно возр-я фк. одной пер-ой. Н-р, для п5, взяв $\lambda(\omega) = \sqrt{\omega}$ по (43) получим обобщенный кт-й $c_1(u,\upsilon) = u\sqrt{\upsilon}$. Откуда $c(\text{А}) = 3\sqrt{3} \approx 5,2$; $c(\text{В}) = 3,5\sqrt{2,3} \approx 5,3$, т.е. опять В $\succ$ А.

Теперь рас-им задачи, решаемые при наличии карты безразличий. Дело в том, что метод построения карты безразличий, рас-ный при решении п5, осуществим только тогда, когда ЛКЗ задается аналогически в виде фк-и $k = k(u,\upsilon)$ из нек-ых теоретических соображений. Это бывает редко. В большинстве практических случаев карта безразличий строится прж-но на основе получаемой от ЛПР дан-ой информации о замещениях между кт-ми.

Рас-им один из таких методов для ЗПР с двумя кт-ми, оценки по к-ым обз-им через u и υ. Пусть $a \le u \le b, c \le \upsilon \le d$. На крд-ой пл. (u,υ) построим пуг-к П (рис. 16). Разобьем интервал $[a,b]$ на n равных частей: $a = u_o < u_1 < \ldots < u_n = b$, взяв одну такую часть за ед-у измерения первого кт. Проведем через каждую точку деления прямую $u = u_i \left(i = \overline{1,n}\right)$, прл-ю оси ординат.

Построим часть кривой безразличия, лежащую между прямыми $u=u_{i-1}, u=u_{i+1}$ и проходящую через точку (u_i,υ_j). Отметим на пм. $u=u_{i+1}$ точку (u_{i+1},υ_{j-1}), используя стн-ие «потер-прибавок» $-\frac{\upsilon_{j-1}-\upsilon_j}{u_{i+1}-u_i}=\frac{\upsilon_j-\upsilon_{j-1}}{u_{i+1}-u_i}=k$, т. е. уступка $\upsilon_j-\upsilon_{j-1}=k$ ед. по второму кт, компенсируется прибавкой $(u_{i+1}-v_i)=1$ ед-ей по первому кт. Причем ЛКЗ, равный *k*, в точке (u_i,υ_j) выдает ЛПР. Аналогично на пм. $u=u_{i-1}$ отметим точку (u_{i-1},υ_{j+1}), для к-ой разность $\upsilon_{j+1}-\upsilon_j$ равна ЛКЗ в точке (u_{i-1},υ_{j+1}) (рис. 17). Ломаная с вершинами $(u_{i-1},\upsilon_{j+1}),(u_i,v_j)(u_{i+1},\upsilon_{j-1})$ представляет собой кусочно-лин. аппроксимацию части кривой безразличия, лежащей между пм. $u=u_{i-1}$ и $u=u_{i+1}$ и проходящую через точку (u_i,υ_j).

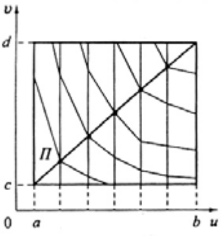


Рис. 16

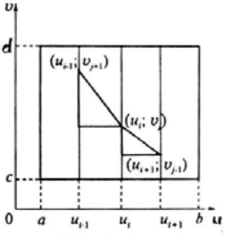


Рис. 17

Для построения карту безразличий в пуг-ке П проведем в ней диагональ (рис. 16). В качестве «опорных узлов» возьмем точки пересечения диагонали с пм. $u=u_i\left(i=\overline{1,n}\right)$. Для каждого опорного узла строим указанным выше способом узлы на соседних прямых до тех пор, пока не дойдет до одной из прямых $u=a, u=b, \upsilon=c, \upsilon=d$. Соединяя полученные узлы ломаной, получим карту безразличий на рис. 16.

Предположим, что в обл. $Q\subseteq R^2$ карта безразличий построена. Согласно т1, это дает возможность задать обобщенный кт-й. Однако, большинство задач, связанных с векторными оценками по двум кт-ям, можно решить и без построения обобщенного кт-я, используя только карту безразличий. Рас-им две важнейшие задачи.

з1. Сравнить по прч-нию две векторные оценки из обл. Q.

Р. Пусть $(u_1,\upsilon_1),(u_2,\upsilon_2)-$ две векторные оценки обл. Q, снабженной картой безразличий. Возможны три случая:

а) Векторные оценки (u_1,υ_1) и (u_2,υ_2) сравнимы по Парето. Пусть, н-р, $(u_1,\upsilon_1)\overset{Par}{>}(u_2,\upsilon_2)$. Тогда (u_1,υ_1) прч-е, чем $(u_2,\upsilon_2):(u_1,\upsilon_1)\succ(u_2,\upsilon_2)$.

При изб-и на крд-ой пл-ти векторные оценки, сравнимые по Парето с векторной оценкой (u_1,υ_1), располагаются от нее либо в «северо-восточном», либо в «юго-западном» направлении; остальные векторные оценки несравнимы с ней по Парето (рис. 18).

б) Точки $\text{M}_1(u_1,\upsilon_1)$ и $\text{M}_2(u_2,\upsilon_2)$ лежат на одной кривой безразличия. Тогда векторные оценки (u_1,υ_1) и (u_2,υ_2) считаются экв-ми (записывается $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_2,\upsilon_2)$). Содержательно это означает, что для ЛПР безразлично выбирать исход, имеющий векторную оценку (u_1,υ_1) или исход, векторная оценка к-го (u_2,υ_2).

в) Векторные оценки (u_1,υ_1) и (u_2,υ_2) несравнимы по Парето и не лежат на одной кривой безразличия. Рас-им проходящую через точку $\text{M}_1(u_1,\upsilon_1)$ кривую безразличия. Точку $\text{M}_2(u_2,\upsilon_2)$ возьмем как на рис. 19. Тогда, двигаясь по кривой безразличия от точки M_1 вниз, найдем на ней такую точку $\text{M}_1'(u_1',\upsilon_1')$, для к-ой векторная оценка (u_1',υ_1') доминирует по Парето векторную оценку $(u_2,\upsilon_2):(u_1',\upsilon_1')\overset{Par}{>}(u_2,\upsilon_2)$ (рис. 19). Согласно п. а) выполняется условие $\frac{Par}{(u_1',\upsilon_1')>(u_2,\upsilon_2)}$, а согласно п. б) – условие $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_1',\upsilon_1')$, сд-но, $(u_1,\upsilon_1)\succ(u_2,\upsilon_2)$.

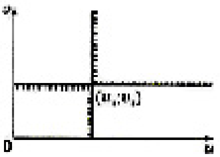


Рис. 18

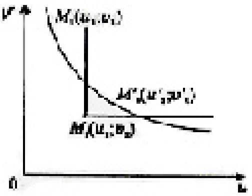


Рис. 19

Отсюда получаем сд. простое

Правило 7. для любых двух векторных оценок $(u_1,\upsilon_1),(u_2,\upsilon_2)$ обл. Q:

1) условие $(u_1,\upsilon_1)\succ(u_2,\upsilon_2)$ выполняется ттогда, когда точка $\text{M}_1(u_1,\upsilon_1)$ лежит на более высокой кривой безразличия, чем точка $\text{M}_2(u_2,\upsilon_2)$;

2) условие $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_2,\upsilon_2)$ выполняется ттогда, когда точки $\text{M}_1(u_1,\upsilon_1)$ и $\text{M}_2(u_2,\upsilon_2)$ лежат на одной кривой безразличия.

зм5. Запись $(u_1,\upsilon_1)\succ(u_2,\upsilon_2)$ читается так: «векторная оценка» (u_1,υ_1) более прч-на, чем «векторная оценка» (u_2,υ_2); $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_2,\upsilon_2)$ – «векторная оценка» (u_1,υ_1) экв-на по прч-ти векторной оценке (u_2,υ_2). Условие $(u_1,\upsilon_1)\succsim(u_2,\upsilon_2)$ означает, что выполняется $(u_1,\upsilon_1)\succ(u_2,\upsilon_2)$ или $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_2,\upsilon_2)$ и читается «векторная оценка (u_1,υ_1) не менее прч-на, чем векторная оценка (u_2,υ_2)». Отн-ие $\succ$ наз. отн-ем строгого прч-я, $\succsim$ – отн-ем нестрогого прч-я, $\sim$ – отн-ем строгого экв-ти прч-й. Слово прч-е можно заменить словом важнее.

Отн-ие нестрого прч-я $\succsim$ позволяет любые две векторные оценки сравнить между собой по прч-ти. Формально это означает выполнимость сд-их двух аксиом.

a_1. Аксиома транзитивности: для любых трех векторных оценок $(u_1,\upsilon_1),(u_2,\upsilon_2),(u_3,\upsilon_3)$ обл. Q из условий $(u_1,\upsilon_1)\succsim(u_2,\upsilon_2)$ и $(u_2,\upsilon_2)\succsim(u_3,\upsilon_3)\Rightarrow(u_1,\upsilon_1)\succsim(u_3,\upsilon_3)$.

a_2. Аксиома линейности (сравнимости): любые две векторные оценки $(u_1,\upsilon_1),(u_2,\upsilon_2)$ обл. Q сравнимы между собой, т.е. $(u_1,\upsilon_1)\succsim(u_2,\upsilon_2)$ или $(u_2,\upsilon_2)\succsim(u_1,\upsilon_1)$.

Отн-ия, уд-ие аксиомам a_1 и a_2 наз. отн-ем лин-го квазипорядка. Т.о., от-ие $\succsim$ яв-ся отн-ем лин-го квазипорядка. Причем отн-ие прч-я $\succsim$ уд-ет сд-им двум дпн-ым условиям:

(A_1) отн-ие Парето – доминирования $\overset{\text{Par}}{>}$ содержится в отн-и строгого прч-я $\succ$;

(A_2) отн. $(u_1,\upsilon_1)\sim(u_2,\upsilon_2)$ выполняется ттогда, когда точки $\text{M}_1(u_1,\upsilon_1),\text{M}_2(u_2,\upsilon_2)$ лежат на одной кривой безразличия.

Сформируем теперь сд-й принципиальный результат.

т2. Пусто $Q\subseteq R^2$ – мн. векторных оценок, на к-ом задана карта безразличий. Сущ-ет единственное отн. лин-го квазипорядка на мн-ве Q, уд-е данным условиям (A_1) и (A_2).

Построенное при решении з1 отн-ие прч-я векторных оценок $\succsim$ наз. каноническим лин. квазипорядком на мн-ве векторных оценок. По т2 всякое отн. лин-го квазипорядка на Q, уд-е условиям (A_1) и (A_2), совпадает с каноническим лин. квазипорядком.

На основе т2 для обобщенного кт. φ и Q и совместимо с картой К, получим:

$$(u_1,\upsilon_1)\overset{\varphi}{\succsim}(u_2,\upsilon_2)\Leftrightarrow\varphi(u_1,\upsilon_1)\ge\varphi(u_2,\upsilon_2). \tag{44}$$

При этом из т2 имеем сд. следствие:

сл2. Отн-ие прч-я векторных оценок, устанавливаемое по любому обобщенному кт. совместимому с картой безразличия, совпадает с каноническим квазипорядком $\succsim$.

Итак, получаем сд. правило.

Правило 8. При введении прч-й на мн-ве векторных оценок – будем ли мы его вводить с помощью обобщенного кт-я, совместимого с картой безразличий, или с помощью нек-го лин. квазипорядка, уд-го условиям (A_1) и (A_2) – оно совпадает с прч-ем, определяемым каноническим квазипорядком.

Рассмотрим ещё одну задачу, решаемую при наличии карты безразличии.

з2. В области векторных оценок Q, снабжённой картой безразличии, найти наиболее прч-ю векторную оценку.

Р. На основании правил 8 и 7 получаем, что наиболее прч-ой будет векторная оценка (u*, v*), для к-ой точка M*(u*, v*) находится в области Q и лежит на самой «высокой» кривой безразличия, ещё пересекающий обл. Q (рис. 20)

Сд-я экн. задача решается так же построением карты безразличий.

п6 (Задача о потребительских предпочтений). а) построить отн-я прч-ия наборов потребительских благ и б) найти опт-го набора потребительских благ.

Под потребительскими благами в экн-е понимают товары, продукты и услуги. Для унификации терминологии будем далее использовать термин «товары». Тогда набор товаров можно представить в виде вектора $x=(x_1,\dots x_i,\dots x_n)$, где $x_i \geq 0$ - кол, товара в этом наборе.

Р. Основной постулат, принимаемый в экн-е, состоит в том, что каждый потребитель имеет отн-ия прч-я $\overset{\text{cons}}{\gtrsim}$ на мн-ве потребительских наборов (cons – от анг. consumer – потребитель.)

а) выявление (построение) отн-я прч-я данного потребителя рас-им для случая $n=2$ с товарами T_1 и T_2. Всякий набор этих товаров можно представить в виде пары неотц-ых чисел (x_1, x_2), где x_1 – кол, товара T_1 и x_2 – кол. товара T_2. Множество таких наборов можно отождествлять с множеством векторных оценок по двум критериям: x_1 – первая. кт. x_2 – вторая. кт. Тогда задачу можно решить, используя результаты данного пункта. Для этого в начале отметим, что отн-ие прч-я $\overset{\text{cons}}{\gtrsim}$ обладает сд. св-ми: Во-первых оно должно быть отн-ем лин-го квазипорядка. Во вторых, при увеличении компонент потребительского набора его прч-ие для потребителя возрастает, т.е. если $x_1 \geq x_1^{\,1}$ и $x_2 \geq x_2^{\,2}$ (хотя бы одно из них строгое), то

$$(x_1,x_2)\overset{cons}{\succ}(x_1',x_2')\cdot \qquad (45)$$

В экн-е аксиому (45) наз-ют аксиомой ненасыщения. Формально условие (45) означает, что набор (x_1, x_2) доминирует по Парето набор (x_1', x_2'), т.е. отн-е $\overset{cons}{>}$ содержит отн-ие $\overset{Par}{>}$. Отсюда получим сд-й

Вывод. Нх-ым и дт-ым условием выявления отн-я прч-я потребителя на заданном мн-ве потребительских наборов яв-ся нахождение на этом мн-ве его карту безразличий.

Согласно правилу 4 построение карты безразличий в нек-ой обл-ти экв-но заданию ЛКЗ в каждой точке этой области. В расв-ом случае ЛКЗ в точке (x_1, x_2), равный $k=k(x_1,x_2)$, имеет сд-й содержательный смысл: потеря товара T_2 на K ед. компенсируется для потребителя увеличением на ед-у кол-ва товара T_1 в наборе (x_1, x_2). Причём по мере движения вправо вдоль очи абсцисс ЛКЗ уменьшается, что ств-ет общеизвестному принципу: при увеличении кол-ва продукта его ценность для потребителя уменьшается, а при уменьшении кол. продукта его ценность увеличивается (н-р, если у путешественника имеется одна буханка хлеба, то потеря 50 г хлеба для него будет малосущественной, но если у него всего 100 г хлеба, то потеря тех же 50 г весьма ощутима). Кроме того, уменьшение ЛКЗ влечёт выпуклость кривой безразличия; крайний случай – когда кривые безразличия превращается в прямые. Этот случай ств-ет тому, что ЛКЗ явл-ся пст-ым. Однако на практике это условие осуществляется очень редко, т.е. как правило, ЛКЗ явл-ся пер-ым.

Итак, при задании в обл-ти потребительских наборов карты безразличий, искомое отн-ие прч-я $\overset{\text{cons}}{\underset{\sim}{>}}$ потребительских наборов опр-ся однозначно и представляется в сд-ем виде: набор (x_1, x_2) яв-ся для потребителя более прч-ым, чем набор (x_1', x_2') ттогда, когда точка $M_1(x_1, x_2)$ лежит на более «высокий» кривой безразличия, чем точка $M_1'(x_1', x_2')$. В случае, когда эти точки лежат на одной кривой безразличия, данные наборы считаются экв-ми, т.е. потребителю безразлично – какой из этих наборов выбирать.

б) Для нахождения оптового набора потребительских благ надо учитывать возможности потребителя, т.е. его доход d (под доходом понимается сумма, к-ую потребитель может потратить на приобретение какого-нибудь набора потребительских благ). Пусть $p = (p^1, ..., p^i, ..., p^n)$ – вектор цен, где p^i – цена ед-ы товары i, тогда стоимость набора $x = (x_1, ...x_i, ...x_n)$, ограничивается доходом в виде нерав-ва

$$\sum_{i=1}^{n} p^i x_i \le d, \tag{46}$$

к-ое низ. бюджетным огр-ем. При $n = 2$ из стн. (46) получим $p^1 x_1 + p^2 x_2 = d$, $x_1 \ge o, x_2 \ge o$ (рис. 21). Теперь, построив карту безразличий в области Д, найдём наиболее прч-й набор (x_1*, x_2*), для к-го проходящая через точку, $M*(x_1*, x_2*)$ кривая безразличия касается граничной прямой *l*: $p^1 x_1 + p^2 x_2 \ge 0$ (рис. 21), у к-ой угл. коэф. $k = -\frac{p_1}{p_2}$. Тогда для точки М* ЛКЗ $\kappa = \frac{p_1}{p_2}$. Итак, получаем сд-е

Правило 9. В точке $M*(x_1*, x_2*)$, являющейся опт. набором потребителя ЛКЗ равен отн-ю цен p_1 / p_2.

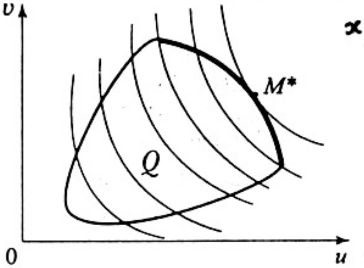


Рис.20

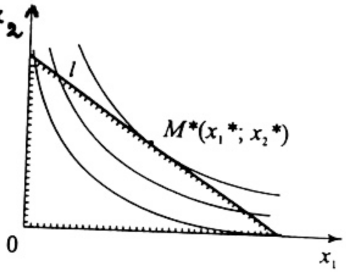


Рис.21

зм6. Существует ещё один, часто применяемый способ сведения мкт-ую задачу к однокт-ой – это выделить один (главный) кт-й f_1 и найти $\max\limits_{x \in \text{Д}} f_1(x)$, наложив на остальные огр-я $f_s(x) \geq \alpha_s (s = \overline{2,k})$. Н-р, при опт-и плана работы предприятия можно потребовать, чтобы прибыль была мкс-на, план по ассортименту – выполнен или перевыполнен, а себестоимость продукции – не выше заданной.

ЛЕКЦИЯ 23

6.3. СЛОЖНАЯ СИСТЕМА И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1^0. Сложная система – объект исследования имитационного моделирования. Все рас-ые до сих пор математические модели (ММ), т. е. при модельном исследовании объектов, имели очень важные черты. Для каждой моделируемой ситуации была известна цель (или несколько целей), достижение к-ой (к-ых) считалось желательным. Однако далеко не все ситуации таковы. В особенности ими изобилует современный этап прикладных исследований, когда приходится иметь дело со сложными системами, в к-ых не только наличествует мн. целевых фк-й, но далеко не все ясно с количественным выражением этих фк-й. Здесь речь может идти не столько о решении тех или иных оптз-ых задач (хотя и это тоже есть), сколько об исследовании сложных систем, о прогнозировании их будущих состояний в зв-ти от избираемых стратегий упл-ия. Напомним (см. **2^0**:1.2), что:

Система – мн. эл-ов, находящихся в отн-ях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ую целостность, единство.

Сложная система – мн. неоднородных эл-ов, находящихся в отн-ях и связях друг с другом, к-ое образует опр-ую целостность, единство.

Коль скоро практика настоятельно потребовала метод исследования сложных систем, он появился. Этот метод наз. имитационным моделированием (ИМв) или имитационным исследованием (ИИс).

ИИс используются для анализа сложных систем в таких непохожих областях науки, как исследования ядерных реакторов и изучение психологии человека, мдв-ие боевых действий и анализ биологических систем в природе, изучение распространения эпидемий и мдв-ие исторических процессов, автоматизированное проектирование сложных систем и оценка воздействия лечебных процедур на организм человека. Особенно важное место ИИс занимает в анализе экнч-их процессов. В экнч-их исследованиях имитация используется в широком диапазоне задач, от отдельных вопросов массового обслуживания и оперативного планирования производства до изучения перспектив развития экн-ки нашей планеты в целом. Итак, объектами исследования Имв яв-ся сложные системы. ИМв яв-ся также эффективным методом для ЛПР при решении многих важных прикладных задач.

2^0. Имитационное моделирование и его основные свойства. ММв для анализа сложных систем можно применять только до опр-ой степени сложности этой системы. Эту фиксированную степень сложности системы назвем пороговым уровнем и боз-им через $П_0$. За пороговым уровнем $П_0$ возникают опр-ые трудности при попытке построить ММ сложной системы, содержащей очень много связей между эл-ми, разнообразные нелин-ые огр-ия, большое число параметров. Трудности возникают и тогда, когда изучаемый процесс невозможно описать аналитическими методами, или для моделируемой системы еще не разработана теория, объясняющая все аспекты ее функционирования, или, вообще, не изучена сложная система.

Все перечисленные трудности преодолеваются более гибким методом ИМв, т. е. применение метода ИМв полезно в тех случаях, когда исследуемая сложная система выходит за рамки порогового уровня $П_0$.

Идея ИМв состоит в том, чтобы реальному объекту (оригиналу) сопоставить не слишком сложную его модель (в рамках порогового уровня $П_0$) и алгоритм функционирования этого оригинала. Тем самым упор делается на феноменологическом (саморазвивающем) описании объекта.

Чтобы представить различие между ММв и ИМв, приведем их ств-ие схемы модельных (рис.1) и имитационных (рис. 2) исследований.

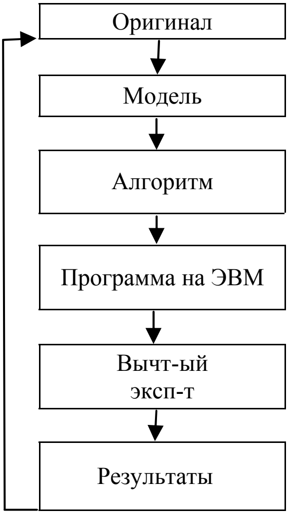


Рис.1

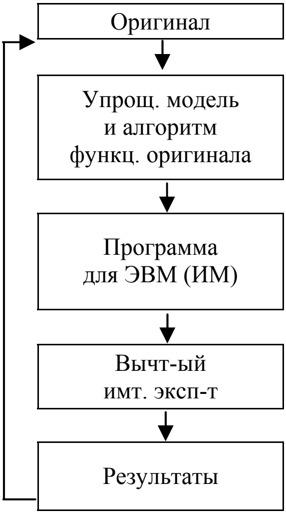


Рис. 2

Итак, имитационной моделью (ИМ) реального процесс (объекта, явления, т.е. оригинала) наз. программа для ЭВМ, реализующая упрощенную модель этого процесса вместе с алгоритмом, описывающим течение этого процесса. Когда компьютер выполняет эту программу, он «имитирует» течение реального процесса. Меняя различные параметры программы, можно имитировать течение реального процесса в различных условиях. Т. о., возникает возможность осуществления сд-го диалога:

Вопрос (его задает исследователь, ЛПР и др.): «Что произойдет с процессом (оригиналом), если...?»

Ответ (его отдает ЭВМ, «проигрывая» заложенную в нее ИМ): «В заданных условиях с процессом (оригиналом) произойдет сд-е...»

Организованный т.о. диалог человека с компьютером позволяет проводить те или иные эксп-ы (они наз-ся имитационными (имт.), вычислительными (вычт.) или машинными), получая информацию о реальном процессе. Это позволяет воспроизвести широкий спектр свойств процесса, использовать в модели эмпирического материала, уточнить модели и др.

Понятие ИМв включает в себя как процесс создания модели, так и ее исследование (проведение вычт-ых эксп-ов) с помощью ЭВМ.

Р. Шеннон дает сд. опр-ие: «…имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки эксп-ов на этой модели с целью оценить (в рамках огр-й, накладываемых нек-ым кт-ем или совокупностью кт-ев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы».

Из этого опр. видно, что ИМв не очень приспособлено для выяснения причин того или иного явления (оно не дает ответа на вопрос: «Почему?». Его роль гораздо прагматична (практична) – давать ответ на вопрос:«Что будет, если…?».

3^0. Построение имитационной модели на примере управления водохранилищем. Процесс построения каждой ИМ в многом носит неформальный характер, алгоритмизировать его дт-но сложно. Объясним это на сд-ем конкретном примере.

Представим себе, что для различных хоз-ых нужд требуется образовать опр-ый запас пресной воды и управлять этим запасом так, чтобы в течение пяти лет наилучшим образом уд-ть возникшие потребности в пресной воде. Пусть таким запасом яв-ся вода в водохранилище (вдх.).

Возникает вопрос, что нужно знать для того, чтобы правильно выбрать политику уд-ия потребностей в пресной воде? Очевидно, для этого нужно знать, каким запасом воды в вдх-ще располагаем в данный момент и как этот запас будет изменяться в расв-ый период, т. е. на протяжении 5 лет, под влиянием различных факторов. Введем сд-ие обз-ия: X^t – запас воды в вдх-ще в момент t. Выделим факторы, к-ые влияют на вел-у X^t. К ним относятся прежде всего природные факторы:

1) приток по реке PR^t, на к-ой построено вдх-ще;

2) положение запаса воды за счет боковой приточности PB^t;

3) выподание осадков на поверхность (пвх.) вдх-ща PO^t;

4) испарение воды с пвх-ти вдх-ща RU^t;

5) фильтрация воды нижнем створе вдх-ща $R\Phi^t$.

Помимо этого есть факторы антропогенного происхождения:

а) вода расходуется на нужды нескольких потребителей (для простоты положим, что их два – с/х-во $Z^t_{c/x}$ и коммунальное водоснабжение $Z^t_{к/в}$);

б) часть воды пропускается через плотину дальше по реке $R\Pi^t$.

Предполагается, что запас воды в вдх-ще не должен становиться меньше нек-ой мнм-ой вел.– $\mathrm{X}_{\min}$, а также не должен превышать объема вдх-ща V. Кроме того, будем считать, что распределение воды между потребителями осуществляется прц-но их запросам, т. е. прц-но заданным вел. $S^t_{c/x}$ и $S^t_{к/в}$.

Схематично динамика запаса воды в вдх-ще представлена на рис. 3

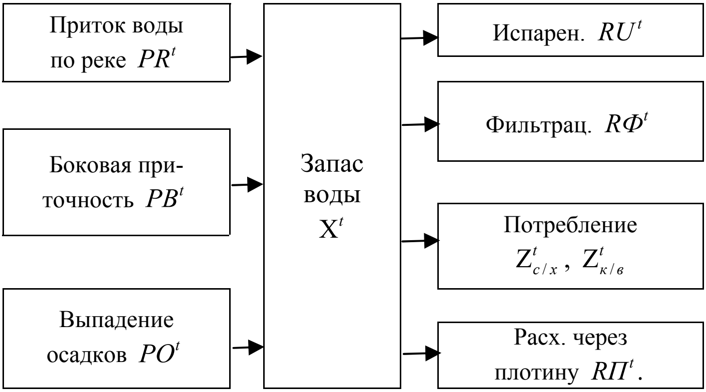


Рис. 3

Теперь рас-им вопрос, к-ый касается величин этих факторов, их изменений во времени. Естественно предположить, что изменения этих величин (PO^t, PR^t и PB^t ств-но) в ближайшие 5 лет будут происходить примерно так же, как и в предшествующие 20 лет. Что значит «примерно так же»? Ответы на него могут быть разными.

1. Можно считать, что в каждый момент времени t на протяжении всех 5 лет значения величин PO^t, PR^t и PB^t равны среднему значению этих величин за 20 лет в ств. момента времени, т.е.

$$PR^t(T) = \overline{PR}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PR^t(\tau)$$

$$PB^t(T) = \overline{PB}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PB^t(\tau)$$

$$PO^t(T) = \overline{PO}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PO^t(\tau)$$

$$T = 21,\ \ 22,\ \ 23,\ \ 24,\ \ 25.$$

В этом случае вел-ы PR^t, PB^t и PO^t яв-ся детерминированными и законы их изменения в течение года опр-ют по имеющимся данным за 20 лет.

2. Однако разумнее было бы предположить, что процессы формирования речного стока, боковой приточности и осадков носят случайный характер. Тогда для их исследования нх-мо применить стохастические методы. Для иллюстрации приведем два из них.

а. По известным рядам наблюдений построить фк-и расп-ия случайных величин PR^t, PB^t и PO^t, т. е. решить задачу проверки статистических гипотез, а затем по найденным законам расп-ия в течение 5 лет задавать случайным образом значения ств-их величин (генерированием случайных чисел).

б. По известным рядам наблюдений за 20 лет построить фк-и

$$PR^t(T) = f_R^t(T) + U_{Rt},$$

$$PB^t(T) = f_B^t(T) + U_{Bt},$$

$$PO^t(T) = f_O^t(T) + U_{Ot},$$

где $f_R(T)$, $f_B(T)$, $f_O(T)$ – детерминированные или систематические составляющие речного стока, боковой приточности и осадков, зв-щие от времени T, а U_{Rt}, U_{Bt}, U_{Ot} – случайные составляющие, незв-щие от T. Здесь детерминированные составляющие – это нормы стоков, боковой приточности и климатическая норма осадков, к-ые можно считать либо средними за 20 лет, либо опр-ять, решая задачу мнмз-и функционала

$$F = \sum_{\tau=1}^{T}\left(f^t(\tau) - f_\phi(\tau)\right)^2,$$

где $f_\phi(T)$ – фактическая траектория изменений ств-щей вел. за прошедший период времени.

Решение этой оптз-ой задачи $\overline{f}^t(\tau)$ будет задавать посл-ть значений детерминированной составляющей в течение года.

Для пер-ых PR^t, PB^t, и PO^t можно предположить, что U_{Rt}, U_{Bt}, U_{Ot} расп-ны равномерно. Прогнозные значения этих вел-ин, т.о., будут получаться генерированием равномерно расп-ых случайных чисел на заданном отрезке.

Итак, рас-ли 2 варианта представления величин PR^t, PB^t, PO^t и прогнозирования их значений за 5 лет – детерминированный и стохастический.

Перейдем к рас-ю процессов расходования воды. Один из них испарение. В отличие от вел-н PR^t, PB^t, и PO^t, испарение воды с пвх-ти вдх-ща не измеряется и динамику этой вел-ы нельзя опр-ть описанными методами, поскольку отсутствуют ряды наблюдений. Однако известно, что вел-а испарения RU^t зависитот нек-ых факторов: температуры воды и воздуха, дефицита влажности воздуха, скорости ветра и т. п. А для этих факторов имеются 20-летние ряды наблюдений. Очевидно, что для опр-я вел-ы RU^t дт-но выявить эту зв-сть. Для иллюстрации выделим один, наиболее сущ-ный фактор – дефицит влажности воздуха D^t и будем считать, что вел. RU^t прямо прц-на дефициту влажности воздуха, т. е.

$$RU^t = \alpha D^t, \tag{1}$$

где α – эмпирический коэф. прц-ти. Вел-у D^t, так же как и осадки, можно моделировать (мдв.) с помощью описанных выше методов. Используя стн-ие (1), по найденным вел-ам D^t можно выч-ть вел-ы RU^t.

Вел-а объема воды, профильтровавшейся в нижнем стволе вдх-ща в момент времени $t - R\Phi^t$, так же не измеряется. Предположим, что вел. $R\Phi^t$ прц-на объему воды в вдх-ще и зв-т от типа грунтов, его подстилающих, т. е.

$$R\Phi^t = kX^t, \tag{2}$$

где k – коэф. прц-ти, ств-ий по типу грунта.

Расход воды через плотину $R\Pi^t$ – вел. регулируемая и уд-ед условиям

$$P\Pi^t = \begin{cases} 0, & для \quad X^t \le V, \\ X^t - V, & для \quad X^t > V. \end{cases}$$

Вел-ы потребления $Z^t_{с/х}$ и $Z^t_{к/в}$ также яв-ся упл-ми вел-ми и формируются в зв-ти от объема воды в вдх-ще и запросов на воду со стороны потребителей – $S^t_{с/х}$ и $S^t_{к/в}$.

Итак, рас-ны все процессы формирования воды в вдх-ще, причем известно, что сохраняется баланс, т. е. запас в каждый момент времени увеличивается на вел-у «прихода» и уменьшается на вел-у «расхода». Запишем этот закон сохранения массы воды

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Pi^t - Y^t,$$

где

$$\Pi^t = PR^t + PB^t + PO^t,$$

$$Y^t = RU^t + R\Phi^t + R\Pi^t + Z^t,$$

$$Z^t = Z^t_{с/х} + X^t_{к/в}.$$

В итоге получено ур-ие изменения запаса воды в вдх-ще в зв-ти от природных условий и стратегии расп-ия этого запаса между потребителями. Это ур-ие называют ур-ем водного баланса. Отсюда, задавая условия пополнения и расходования запаса воды и решая ур-ие водного баланса, можно получить ответ на поставленную задачу: чему равен запас воды в вдх-ще в каждый момент времени *t*.

Т. о., построена ИМ, позволяющая прогнозировать вел-у запаса воды в вдх-ще, к-ая схематично приведена на рис. 4.

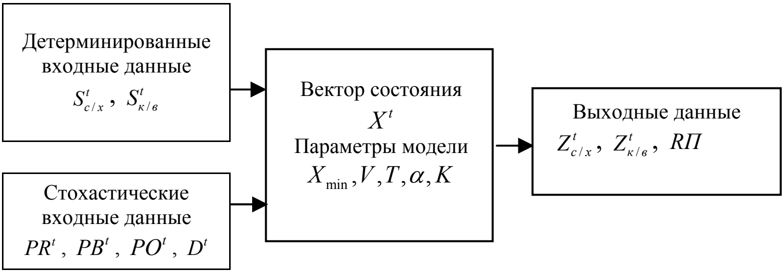


Рис. 4

Итак, рас-ли (на примере упл-ия вдх-щем) как можно построить ИМ. В дальнейшем случае нх-сти в качестве иллюстрации используем построенную модель.

4^0. **Основные этапы имитационного моделирования**. Процесс ИМв-ия (создание алгоритма функционирования реального объекта, создание программы и проведение вычт-ых эксп-ов) яв-ся итеративным. При этом системный анализ чередуется и сочетается с составлением модели и алгоритма, вычт-ми экспериментами, корректировкой модели и т. п. ИМв состоит из сд. взаимозависимых и, зачастую, пересекающихся по времени этапов:

1. Постановка проблемы, формулировка цели мд-ия. Здесь нх-мо перечислить те вопросы, на к-ые ответы должны быть получены в ходе вычт-ых эксп-ов. Начиная с этого этапа в разработках нх-мо участие человека (или группы людей), к-ый будет использовать будущую модель для решения поставленной проблемы, т.е. ЛПР. С ЛПР надо согласовать список поставленных вопросов и решать вопросы о масштабах задачи: о ее объеме, границах в пр-ве, продолжительности мдм-го отрезка времени и т.д.

2. Системный анализ мдм-го объекта и построение концептуальной модели. С учетом целей мдв-ия следует выявить сущ-ные особенности изучаемого объекта, осуществить отбор всевозможных нх-мых сведений о нем и построить так наз-мую концептуальную модель объекта. Эта модель представляет собой неформализованное описание объекта (словесное описание, представление в виде схем, диаграмм и т.п.), яв-йся основой для создания ИМ. Построение концептуальной модели предполагает:

– выявление основных процессов, к-ые должны учитываться при мдл-и;

– выявление основных харкс-ик, нх-ые для решения исходной проблемы;

– опр-ие мн-ва пер-ых и параметров, к-ые влияют на динамику этих харкс-ик;

– опр-ие мн-ва входных и выходных данных модели;

– установление границ и законов взаимодействия объекта с окружающей средой (в част-ти, опр-ие законов случайных воздействий на объект);

– разработку причинно-следственных связей, временных отн-й и гипотез, согласно к-ым осуществляется взаимоувязка всех перечисленных компонент в единую систему, в ИМ.

Все сказанное демонстрируем на модели вдх-ща, где основной хркс-ой яв-ся вел-а запаса воды в каждый момент времени t. Границей яв-ся естественна граница вдх-ща. Взаимодействия с внешней средой хркз-ся вел-ми притока воды по реке, боковой приточностью, осадками, испарением, фильтрацией, водопотреблением и расходом воды через плотину. В зв-сти от желания исследователя эти взаимодействия могут учитываться либо как стохастические, либо как детерминированные. В последнем случае используются усредненные хркс-ки процессов. В качестве входных выступают метеорологические и гидрологические данные, а также вел-ы потребностей в воде. В качестве выходных – вел-ы объемов воды, предназначенной для потребления. Взаимосвязь эл-ов модели описывается схемами, приведенными на рис. 3 и 4.

3. Составление модели и алгоритма функционирования реального объекта (при нх-сти – структуризация модели). В данном этапе осуществляется переход от качественных зв-тей концептуальной модели к точному алгоритмическому описанию, исходя из вектора состояния

$$X^t = \left(X_1^t, ..., X_i^t, .., X_n^t\right),$$

где компоненты $X_i^t \left(i = \overline{1,n}\right)$ яв-ся хркс-ми изучаемого объекта, к-ые выделены при построении концептуальной модели как базовые. В общем случае каждая компонента вектора X^t есть фк-я от времени t, мн-ва значений параметра $\{A\}$, нек-го подмн-ва $\widetilde{X}^t \subset X^t$, мн-ва внешних факторов η^t и уплщих воздействий U^t, т.е.

$$X^t = X^t\left(\tilde{X}^t, \eta^t, A, U^t, t\right).$$

В мд. вдх-ща вектор состояния содержит одну компоненту X^t- запас воды в вдх-ще в момент времени t.

Далее вводится так наз-мое системное время, моделирующее ход времени в реальной системе. Различают два типа шкал модельного времени:

1) Равномерная. В этом случае вектор состояния модели расв-ся в моменты $t + k\vartriangle t$, где k – целое плж. число $(t + k\vartriangle t \le T$, в случае вдх-ща T = 5 лет). Здесь каждому моменту реального времени t_i^p ставится в ств-ие момент модельного времени $t_i^м$, причем

$$t_1^м - t_2^м = \alpha\left(t_1^p - t_2^p\right),$$

где α – масштабный коэф. прц-ти.

2) Событийная. В этом случае отсчет времени модели ведется «по событиям», по мере наступления нек-го события.

Здесь нет опр-го рецепта по выбору той или иной шкалы модельного времени. Однако для систем массового обслуживания традиционным стал событийный подход, тогда как в экологических системах изменения времени считается равномерным. Так для мд. вдх-ща также удобно принять равномерную шкалу времени с различными интервалами: 1 сутки, 5 суток, 10 суток, месяц, год и т. д. При этом вел-а временного шага опр-ся целью исследования и объема доступной информации.

Очень важным моментом в этом этапе яв-ся декомпозиция модели и выявления ее блочной конструкции, если в этом есть нх-сть. Для большинства задач такая нх-сть дсв-но есть. Поэтому производится декомпозиция модели в виде комплекса взаимосвязанных подмоделей – блоков (содержащих «однородные» пер-ые). Блочный принцип построения модели используется при создании сложных ИМ. Это позволяет повышать возможности вычт-ой техники, полнее использовать знания специалистов в узких областях (в конкретных блоках) и преодолеть трудности, возникших от разной степени изученности аспектов, составляющих исследуемый оригинал. Поскольку блоки списывают различные подсистемы, процессы, факторы, то системное время для каждого из них может быть различным. Так для мд. вдх-ща удобно мдв-ть отдельными блоками внешние факторы, опр-щие интенсивность потоков.

После завершения декомпозиции модели нх-мо приступить к разработке отдельных блоков: уточнять гипотезы, опр-ть ств-щее подмн-во входных и выходных данных, формировать мн-во параметров, формализовать основные законы взаимодействия эл-ов блока. Часто при формализации приходится вводить эмпирические зв-сти, коэф-ты и т. п., полученные на основе наблюдений, т. е. пользоваться экспертными оценками. При этом на качество разработки отдельных блоков оказывает выбор различных мт-их средств мдв-ия – аппарата диф-ых ур-й, статистического мдв-ия, методов теории опт-го упл-ия, использование методов дискретной мт-ки и т. п., а также их сочетания.

4. Программная реализация и вычт-ые эксп-ты. В этом этапе происходит объединение блоков в ИМ на базе стандартного или специального мтч-го обеспечения. Здесь важную роль играет выбор языка прг-ия: либо это будут универсальные языки типа Алгол, ФОРТРАН, ПЛ/1 и т. п., либо специализированные языки, разработанные специально для представления алгоритмов мдв-ия: СОЛ, GPSS, ДИНАМО, СИМУЛА и др.

Составлению программ, реализующих ИМ в целом, предшествуют испытания и обработка различных схем взаимодействия блоков. При этом надо ИМ расв-ть как совокупность детерминированных или стохастических автоматов. Тогда работу ИМ можно рас-ть как изучение с помощью ЭВМ совокупного поведения этих автоматов. На этом заканчиваются первые четыре этапа с получением ИМ, приведенный на рис. 5.

5. Анализ результатов эксп-тов и коррекция модели, алгоритма, программы. Обычно построенная ИМ без ошибок не бывает. Для отыскания этих ошибок используются вычт-ые эксп-ты как с отдельными блоками, так и с системой в целом. Причем нх-мо проведение таких эксп-тов, результат к-ых по тем или иным причинам может быть предсказан. Тогда отклонение результатов от прогнозируемого яв-ся указанием на наличие ошибок либо в модели, либо в алгоритме, либо в программе, либо сразу в нескольких местах. При этом устранение ошибок нх-мо продолжать до тех пор, пока результаты эксп-ов придут в ств-ие с прогнозируемыми. После этого считается, что ИМ создана.

Однако, до использования ИМ надо еще решить задачи:

1) Идентификации: выбрать числовые значения неопр-ых пока числовых параметров. Наиболее распространенной считается сд. постановка задачи идентификации. Пусть $\overline{y}-\overline{y}\left(t,\overline{\alpha}\right)$ – вектор выходных хркс-ик ИМ, зв-ай от набора параметров $\overline{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$. Предположим, что имеется ряд известных векторов $\overline{y}(t)$, $\left(t\in[t_1,t_2]\right)$ – результаты натурных наблюдений за оригиналом. Промежуток $[t_1,t_2]$ разобъем на две части $[t_1,\tau]$ – обучающий

промежуток, $\left[\tau, t_2\right]$ – экзаменующий промежуток. Найти такой набор параметров $\bar{\alpha}$, к-ый доставляет

$$\min Z = \sum_{t=t_1}^{\tau} \left(\bar{y}(t - \bar{y}\left(t, \bar{\alpha}\right) \right)^2 . \tag{3}$$

Используя известные численные методы нахождения экс-ма фк-и многих пер-ых, решим задачу (3) и находим вектор $\bar{\alpha}^*$. Отсюда получим выходные хркс-ки в виде $\bar{y} = \bar{y}\left(t, \bar{\alpha}^*\right)$, т. е. задача идентификации решена.

2) Верификации (проверка адекватности): убедиться, что при этих значениях параметров модель хорошо ств-ет оригиналу, адекватна ему. Здесь нх-мо убедиться, что на экзаменующем промежутке $\left[\tau, t_2\right]$ полученная расчетная траектория $\bar{y} = \bar{y}\left(t, \bar{\alpha}^*\right)$ близка к фактической. Сравнение этих двух траекторий позволяет судить об адекватности модели к оригиналу. Сущ-ет несколько методов оценки близости траекторий. Один из них состоит и в выч-и коэф-та несовпадения

$$u = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{\tau} \left(\bar{y}(t) - \bar{y}^*(t) \right)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{\tau} \left[\bar{y}(t) \right]^2} + \sqrt{\sum_{t=1}^{\tau} \left[\bar{y}^*(t) \right]^2}} \quad \left(0 \le u \le 1\right), \tag{4}$$

где $\bar{y}^*(t) = \bar{y}\left(t, \alpha^*\right)$. Из стн. (4) следует, что чем ближе u к нулю, тем ближе модельная траектория к фактической. Если $u = 1$ или $u \to 1$, то модель не яв-ся адекватной и требует либо перестройки структуры модели, замены или уточнения гипотез, либо идентификации по более полным и достоверным данным.

Однако даже при близости траекторий нет гарантии, что модель адекватна оригиналу. Нх-мо еще выполнение сд-их условий:

а) Машинная реализация ств-ет формальной модели.

Под ств-ем машинной и формальной моделей понимается идентичность их алгоритмических структур и совпадение обл-ей варьирования компонент вектора состояния формальной и машинной моделей.

б) Динамика модели ств-ет динамике оригинала.

Чтобы использовать эти динамические свойства нх-мо проводить серии тестовых расчетов. по сд. двум типам:

1) Задаются правдоподобные значения входов и упл-щих воздействий. Если расчеты по модели не противоречат известным законам поведения оригинала, то модель адекватна оригиналу. Если нет, то нх-мо найти причины несогласованности и перестроить модель.

2) Тестовый расчет основывается на использовании критических ситуаций, т.е. данных, к-ые не характерны для оригинала, но могут иметь место.

в) Результаты мдв-ия правильно интерпретируются.

Если результаты исследований с помощью модели сущ-но изменяются при малых возмущениях параметров и незначительных отклонениях от начальных данных (т.е. модель не яв-ся устойчивой), то модель не адекватна оргиналу (при условии, что оргинал обладает устойчивостью в этом смысле). Требование устойчивости тем важнее, чем менее точно могут быть опр-ны параметры модели.

Проверка условий а), б) и в) на адекватность осуществляется на основе экспертных оценок и статических методов. При этом следует помнить о цели исследования, о проблеме, для к-ой разрабатывается модель. Т. к. модель может вполне отвечать одной цели и быть совершенно непригодной для решения других задач, т.е. нх-мо выявить вопрос об обл. применимости модели. Модель пригодна только тогда, когда она реализует цель исследования.

Итак, модель идентифицирована, верифицирована (проверка на адекватность). Если все этапы выполнены успешно, то они яв-ся готовым инструментом исследования поставленной проблемы и можно переходить к сд.. главному этапу.

6. Проведение имт-ых экспт-ов в целях решения поставленной проблемы. В этом этапе осуществляется планирование имт-го эксп-та и обработка результатов этого эксп-а. Рас-им их более подробно.

Планирование имт-ых эксп-ов представляет собой отдельную и довольно сложную задачу. Здесь нх-мо решить ряд вопросов, н-р, при каких внешних воздействиях проводить расчеты, сколько расчетов проводить для того, чтобы быть уверенным в верности полученного решения и т.д. В основном методы планирования экс-ов были разработаны для натуральных эксп-ов. Имп-ый эксп-т сохранил хрк-ые черты натуральных эксп-ов. Основная разница между ними состоит в том, что экп-т здесь проводится не объектом (оригиналом), а с его аналогом – моделью. Поэтому многие результаты теории планирования натуральных эксп-ов могут быть использованы в обл-ти имт-ых исследований. Рас-им нек-ые акспекты планирования эксп-ов.

Итак, цель эксп-та – установить связь между воздействиями на модель и ее откликом на это воздействие. Причем то, как формируется этот отклик при проведении имт-ых эксп-ов исследования нас не интересует, т.е. отклик можно расв-ть как нек-ый процесс в черном ящике. Поэтому на этом этапе модели можно представать в виде фк-и

$$y = f(x),$$

где x – воздействие на модель или фактор;

y – результат воздействия или реакции;

f – поверхность (пвх) реакции.

В общем случаи x и y есть вектор – функции, зв-щие от времени. Любой имт-ый эксп. в этом случае может быть направлен либо на исследование пвх-ти реакции (задачи прогнозирования и др.), либо на поиск эксм-ма пвх-ти реакции в нек-ом пр-ве факторов (задачи опт-го упл-ия объектом и т.п.). При этом факторы могут быть либо количественными, либо качественными.

Еще одной типичной задачей планирования эксп-та яв-ся аппроксимация истиной пвх-ти реакции f нек-ой фк-ей φ_n, зв-ей от тех же факторов. Как правило, удается построить лин-ю зв-сть

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0$$

н-р, для двух факторов получим $\varphi_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0$.

В случае неуд-ой аппроксимации строим полином второй степени, н-р, $\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{12} x_1 x_2$. Его коэф-ты находятся за счет дпн-ых изменений на основе новых эксп-ов. Процесс продолжается до тех пор, пока аппроксимация не даст уд-ых результатов.

По цели исследования эксп-ты делятся на два типа: дескриптные (они проводятся в целях исследования объекта) и оптимизационные (для выявления наилучших стратегий упл-ия исходным объектом).

Результаты имт-ых эксп-ов должны быть обработаны специальными методами и представлена пользователю в удобном для него виде.

Итак, рас-м все этапы ИМ (рис. 5). В каждом этапе велика роль человека в имт-ых исследованиях (ИИ). Поэтому при решении крупных н/х-ных проблем задача ИМ-ия становится непосильной для одного человека и к ИИ привлекаются целые творческие коллективы, состоящие из специалистов различных профессий. Причем место и функции каждого специалиста четко опр-ся. На рис. 5 приведена общая схема участия специалистов по этапам ИМ с указанием типов специалистов (здесь МТ – математик, ЭКСТ – эксперт, ПР-СТ – программист, ЛПР – лица, принимающие решение) в том порядке, в каком порядке они должны работать друг за другом в данном этапе.

5^0. Пример построения имитационной модели работы железнодорожной кассы. Основные этапы ИМв могут дополняться, усложняться или, наоборот, упрощаться в зв-ти от степени сложности оригинала. Н-р, для этого сравним задачу упл-ия вдх-ем со сд. задачей.

п1. Построить ИМ работы кассы для компостирования и продажи железнодорожных билетов. Целью мд-ия этой системы может быть изучение таких хркс-ик, как длина очереди и время ожидания в очереди в зв-ти от интенсивности потока пассажиров и производительности кассира для получения рекомендаций о кол-ве касс или целесообразности автоматизации и пр.

Р. Поскольку моменты прихода пассажиров в кассу – случайные вел.,то длина очереди и время ожидания также будут случайными. Поэтому в результате мд-ия надо опр-ть их статистические хркс-ки: среднее значение, дисперсию, гистограмму. Функционирование кассы можно описать сд-ем образом.

В кассу приходят два типа пассажиров: один – для компостирования билета (время обслуживания для них равно τ_1), другие – для покупки билета (время обслуживания равно τ_2). Пусть τ_1, τ_2 – пст-ые вел. (расв-ые как коды) для простоты изложения (при нх-ти модель можно видоизменить так, чтобы τ_1 и τ_2 были случайными вел. с заданным законом расп-ия).

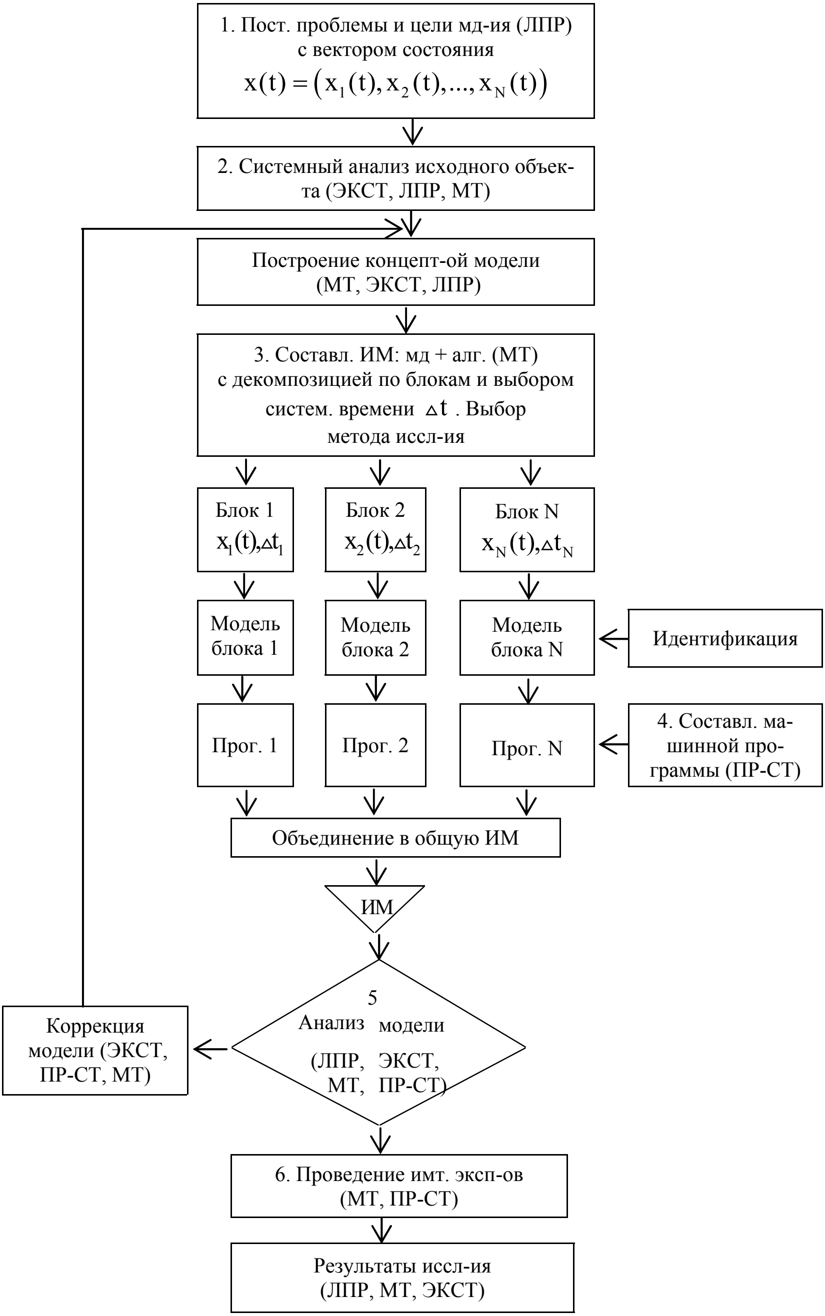

1. Пост. проблемы и цели мд-ия (ЛПР) с вектором состояния $x(t)=\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)\right)$
2. Системный анализ исходного объекта (ЭКСТ, ЛПР, МТ)
Построение концепт-ой модели (МТ, ЭКСТ, ЛПР)
3. Составл. ИМ: мд + алг. (МТ) с декомпозицией по блокам и выбором систем. времени Δt . Выбор метода иссл-ия
Блок 1 $x_1(t), \Delta t_1$
Блок 2 $x_2(t), \Delta t_2$
Блок N $x_N(t), \Delta t_N$
Модель блока 1
Модель блока 2
Модель блока N
Идентификация
Прог. 1
Прог. 2
Прог. N
4. Составл. машинной программы (ПР-СТ)
Объединение в общую ИМ
ИМ
5 Анализ модели (ЛПР, ЭКСТ, МТ, ПР-СТ)
Коррекция модели (ЭКСТ, ПР-СТ, МТ)
6. Проведение имт. эксп-ов (МТ, ПР-СТ)
Результаты иссл-ия (ЛПР, МТ, ЭКСТ)

Рис. 5

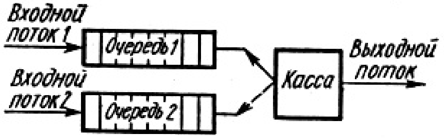


Рис. 6

В кассу может образоваться две очереди: 1 для пассажиров компостирующих билеты и 2 – покупающих билеты. А касса может обслуживать одновременно только одного пассажира. Причем обслуживание пассажиров производится в таком порядке: в момент освобождения кассы начинается обслуживание пассажира, стоящего первым в 1 очереди. Только если эта очередь пуста, то обслуживается первый пассажир из 2 очереди. Т. о. на вход обслуживающей системы с ожиданием поступают два незв-ых потока 1, 2 требований (заявах), обслуживаемых по правилу отс-ых приоритетов. Формализованная схема показана на рис. 6. На рис. 7 изб-на временная диаграмма, иллюстрирующая работу системы. Оба потока пассажиров, приходящих в кассу, можно описать фк-ей (эта фк. будет своя для каждого потока) расп-ия $A(t)$ промежутков времени между моментами прибытия их в очередь, т. е. $A(t)=P(Q<t)$. При мдв-и фк. $A(t)$ уже должна быть известна (ее можно получить, н-р, путем регистрации и последующего статистического анализа моментов прибытия пассажиров в очередь в реальных условиях). Обычно ее берут в виде пуассоновского потока

$$A(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & \text{для } \ t\geq 0,\\ 0 & \text{для } \ t<0,\end{cases} \qquad (5)$$

где λ – вел., обратная среднему интервалу времени между заявками (интенсивность потока).

Если временная диаграмма, отражающая работу системы за дт-но длинный промежуток времени Т, построена так, что случайные вел. Q_{1i} и Q_{2i} ств-ет реальным законам расп-ия, то статистические хркс. работы системы можно получить анализом этой временной диаграммы. Предположим, что интерес представляет среднее время ожидания в очереди для пассажиров потоков 1 и 2. Для каждого пассажира i время ожидания w_i в очереди равно разности времени прихода и начало обслуживания в кассе. Среднее время ожидания составляет

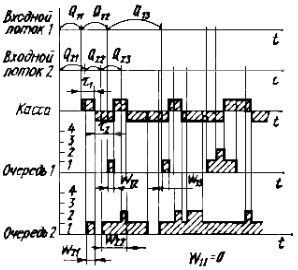


Рис. 7

$$w_{1cp}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}w_{1i};\ w_{2cp}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}w_{2i}, \qquad (6)$$

где n_1 и n_2 – число пассажиров ств-но потоков 1 и 2, обслуженных системой за время Т.

Суммируя значения кол-ва пассажиров в очереди через небольшие промежутки времени и разделив полученную сумму на число суммирований, получим среднее значение длины очереди:

$$L_{1cp}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}m_{1i};\ \mathrm{L}_{2\text{ср}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}m_{2i}, \qquad (7)$$

где m_{1i} и m_{2i} – кол. пассажиров в 1 и 2 очередях в момент наблюдения i; N–число моментов наблюдения (моментов снятия статистики) за время Т.

Из стн. (6) и (7) получим дисперсию величины w и L:

$$Dw_1 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(w_{1i} - w_{1cp}\right)^2; \qquad Dw_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(w_{2i} - w_{2cp}\right)^2; \tag{8}$$

$$DL_1 = \frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N}\left(m_{1i} - L_{1cp}\right)^2; \qquad DL_2 = \frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N}\left(m_{2i} - \alpha_{2cp}\right)^2. \tag{9}$$

Фм-ы (8) и (9) удобнее прб-ть в такой вид:

$$Dw_1 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1} w_{1i}^2 - \frac{n_1}{n_1 - 1} w_{1cp}^2; \qquad Dw_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2} w_{2i}^2 - \frac{n_2}{n_2 - 1} w_{2cp}^2; \tag{8′}$$

$$DL_1 = \frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N} m_{1i}^2 - \frac{N}{N - 1} L_{1cp}^2; \qquad DL_2 = \frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N} m_{2i}^2 - \frac{N}{N - 1} L_{2cp}^2. \tag{9′}$$

Используя результаты полученных фм-л, можно построить и гистограммы, хркз-ие расп-ие вел-н w и L.

Т. о., для получения статистических хркс-ик работы системы дт-но иметь временную диаграмму (рис. 7), в к-ой случайные вел. должны подчиняться заданным законам расп-ия. При этом не обязательно временная диаграмма должна быть целиком (для всего временного интервала от О до Т). Статистику можно накапливать постепенно, в процессе работы системы или модели.

Наблюдение секундомера за работой реальной системы яв-ся длительным и трудоемким процессом, не позволяющем исследовать систему в условиях изменения ее параметров. В этом случае на помощь может прийти модель – имитатор системы. Для ее построения прежде всего надо уметь имитировать моменты поступления в очередь пассажиров каждого потока.

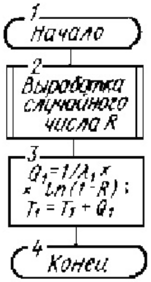


Рис. 8

Для потока 1 $Q_{1i+1} = t_{1i} + Q_{1i}$, где величины Q_{1i} расп-ны по закону $A_1(t)$. Нетрудно показать, что если имеется случайная вел. R, расп-ая равномерно в интервале (0, 1), то для получения вел-ны Q, имеющий закон расп-ия $A(t)$, надо решить ур-ие $A(Q) = R$ отн-но Q. Тогда из стн. (5) получим $A(Q) = 1 - e^{-\lambda Q} = R.$ Отсюда

$$Q = -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1\text{-R})\ . \tag{10}$$

Т.о, получение Q сводится к нахождению R с равномерным расп-ем и выч-ю Q по (10). А R находим обращением к стандартной программе (СП), откуда получаем псевдослучайные числа, посл-ть к-ых подчиняется равномерному расп-ю в интервале (0, 1). Опр-ие одного такого числа требует одного обращения к этой СП.

Т.о., алгоритм получения момента времени прихода сд-го пассажира в очередь можно изб-ть в виде схемы, показанной на рис. 8 для потока 1, в предположении, что этот поток пуассоновский. Далее нх-мо составить алгоритм, описывающий логику работу очереди (очевидно, алгоритм будет идентичным для обоих очередей). Предположим, что очередь имеет мкс-ю длину LM (число мест для ожидания). Одномерный массив P, состоящий из эл-ов (ячеек) $P_1, P_{2,} ..., P_{2m}$, имитирует «места» этой очереди. Каждая из этих ячеек может быть свободной или «занятой» пассажиром. В качестве экв-нта пассажира удобно брать момент его прихода в очередь – эта информация понадобится для опр-ия времени ожидания им в очереди.

Ячейка X используется в качестве рабочей ячейки при записи очередного пассажира в очередь или при выборе из очереди.

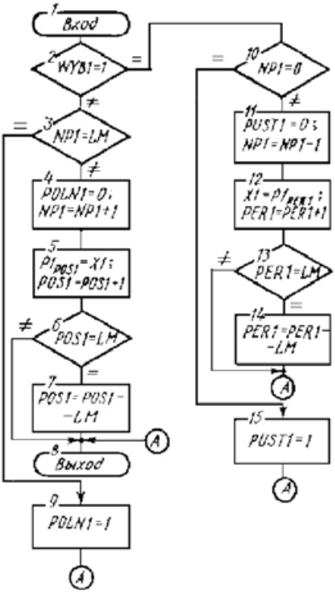


Рис. 9

Ячейки PER и POS содержат информацию, позволяющую опр-ть ств-но первого и последнего пассажиров в очереди. Этой информацией яв-ся номер (индекс) ств-ей ячейки массива P.

В момент выбора пассажира из очереди содержимое ячейки PER увеличивается на ед-у по правилу выбора из очереди в порядке поступления. Содержимое ячейки POS увеличивается на ед-у при записи в очередь нового пассажира. Мкс. значение пер-ых PER и POS равно LM, поэтому их изменение происходит в ств-и с фм-ми:

$$PER = \begin{cases} PER + 1, & \text{если PER < LM;} \\ PER + 1 - LM & \text{если нет;} \end{cases}$$

$$\mathrm{POS} = \begin{cases} \mathrm{POS} + 1, & \text{если POS < LM;} \\ \mathrm{POS} + 1 - LM, & \text{если нет.} \end{cases}$$

Пер-ая NP-число пассажиров в очереди; при выборе из очереди NP уменьшается на ед-у, а при записи в очередь – увеличивается на ед-у.

Пер. PUST равна ед-це, если в очереди нет пассажиров и равна нулю, в противном случае.

Пер. POLN равна ед., если в очереди нет свободных мест (в этом случае новый пассажир не может быть записан в очередь).

Пер. WYB должна принимать значение 1, если обращение к алгоритму, имитирующему работу очереди, производится с целью выборки из последней. Если же обращение к этому алгоритму производится для записи, то нх-мо установить WYB = 0.

Схема алгоритма, имитирующего работу очереди 1, приведена на рис. 9 (все пер-ые этого алгоритма в отличие от пер-ых алгоритма очереди 2 имеют в своих названиях цифру 1).

Работу кассы можно описать признаком «свободно – занято», изменяющимся во времени. В качестве этого признака можно взять двоичную пер. KSW (KSW = 1, если касса свободна; KSW = 0, если касса занята).

Пусть предыдущий момент освобождения кассы будет T_3. Тогда в ств-и с логикой работы системы производится обращение к очереди 1, и если она не пуста, сд-й момент освобождения кассы будет $\mathrm{T}_3 = \tau_3 + \tau_1$. Если же очередь1 пуста, то происходит обращение к очереди 2. Здесь возможны два варианта: 1) если эта очередь не пуста, то сд-й момент освобождения кассы будет $\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_3 + \tau_2$; 2) если очередь 2 пуста, то устанавливается значение KSW = 0.

В момент выбора из очереди можно посчитать время ожидания пассажира, выбираемого из очереди на обслуживание кассой, по фм-е $W = T_3 - X$.

Для последующего опр-ия среднего времени ожидания и дисперсии этой величины надо производить накапливание (суммирование) времени ожидания и квадрата этой вел-ы: $SW = SW + W$; $SW2 = SW2 + W^2$; $N = N + 1$. Схема алгоритма, имитирующего логику работы кассы и одновременно производящего накопления статистических данных, приведены на рис. 10.

В опр-ые моменты времени (с периодом DT) надо производить выч-ие и печать сд. статистических хркс-ик: $WSR = \frac{SW}{N}$; $DW = \frac{SW2}{N-1} - \frac{N}{N-1} WSR^2$.

Остается составить алгоритм, обеспечивающей правильную посл-ть чередования событий в модели системы. Такими событиями явл-ся приход в систему пассажиров 1-го или 2-го потока, освобождения кассы, печать статистических хркс-ик. Для работы этого алгоритма вводится системное время, к-ое используется для представления упорядоченных во времени событий. Системное время меняется дискретно, проходя посл-но через все моменты совершения событий. Роль алгоритма, управляющего посл-ю событий, заключается теперь в опр-и момента наступления ближайшего события и передаче тем алгоритмам, к-ые имитируют это событие. Моменты наступления ближайшего события можно опр-ть, если найти мнм-ый эл-т в списке будущих событий, представляющей собой ближайшие моменты прихода пассажиров 1-го и 2-го потоков, ближайший момент освобождения кассы, ближайший момент печати статистических хркс-ик. Этот мнм-ый эл-т опр-т новое значение системного времени и то, какое событие должно быть в этот момент сущ-но. После осуществления этого события производится обновление списка будущих событий путем выч-ия нового момента времени, ств-щего типу совершившегося события. Н-р, если мнм-ый эл-т списка яв-ся моментом прихода пассажира 1-го потока, но нх-мо обратится к подпрг-е, реализующей алгоритм работы очереди 2, с целью записи пассажира в эту очередь, а затем выработать значение момента прихода сд-го пассажира 1-го потока (новое будущее событие) в ств-и с алгоритмом, изб-ом на рис. 8.

Схема алгоритма всей модели приведена на рис. 11. В этой схеме в список будущих событий T_i включен также момент окончания мдв-ия.

Из вышеизложенного следует, что модели систем удобно строить по блочному принципу, причем каждый блок подчиняется собственной логике работы, имитирующей опр-ый процесс или устройство моделируемой системы. Нек-ые из этих блоков могут быть реализованы как СП.

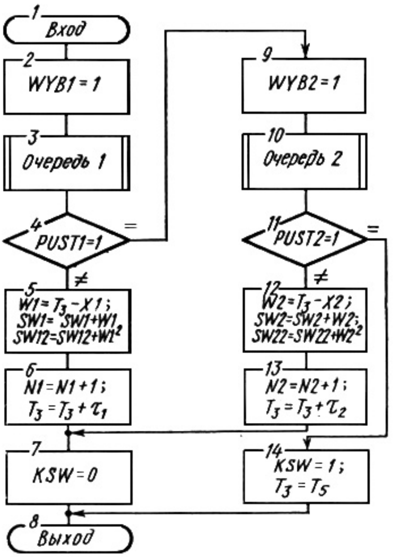


Рис. 10

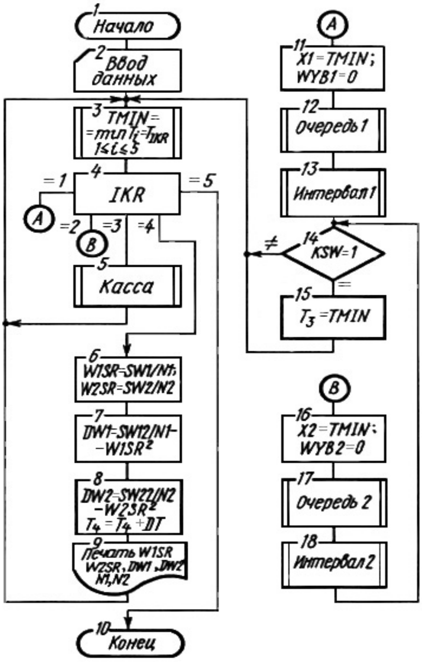


Рис. 11

6⁰. Имитационное моделирование – не панацея для анализа всех сложных систем. Главный вопрос моделирования. Исходя из вышеизложенного можно сказать, что ИМв позволяет исследовать дт-но сложные системы по сравнению с ММв. Однако и ИМв не яв-ся панацеей для анализа всех сложных систем. Сущ-ют сложные системы, для исследования к-ых нх-мо привлечь методы принятия решений на основе теории нечетных мн-в [37, 38, 71, 104.]

Кроме того, в последние годы на основе методов распознавания образов, обучающихся распознающих систем и систем обучения интенсивно ведутся исследования по созданию интегральных роботов и искусственных интеллектов, способных к целенаправленным действиям в сложных условиях. Их действия становится более гибким с помощью исследований эргономических основ разработки сложных систем «человек-машина». Эти вопросы и их модели (как теоретическом, так и практически действующем плане) приведены в обширной литературе, н-р, [1, 14, 15, 28, 36, 65, 116, 127], т. е. на сегодняшней день разработаны модели дт-но сложных систем.

Однако в настоящее время возникает главный вопрос: насколько полезны и эффективны разработанные или планируемые к разработке модели, или целесообразно ли ликвидировать исправно работающей модели командно-административным решением без ввода заменяющей и обновленной модели вместо ликвидированной. Н-р, правильно ли было уничтожение одним махом модели колхозных и совхозных систем повсеместно без учета местных условий, нарушая принципы постепенности, многоукладности и т. д., оставляя сельских жителей на произвол судьбы. Стоит ли сейчас тратить на освоение Космоса (конечно, это тоже надо, но не сейчас) слишком большие средства, когда огромное кол-во народа живут за чертой бедности и смертность превышает рождаемость (в настоящее время население РФ убывает 800 тыс. чел. в год), когда большие площади плодородных с/х-ых угодий не обрабатываются и не используются, а жители села в поисках работы бродят по всей стране. Но и в городах обеспеченность с работой и создание новых рабочих мест крайне низка, т. к. заводы и фабрики закрываются, а новые открываются слишком медленно. Все это ведет к трудно исправимой проблемой ситуации.

Как быть дальше? Прежде всего надо провести тщательное исследование по выяснению эффективности и полезности для каждой существующей или планируемой к разработке модели, а также для каждой ликвидируемой модели (здесь нужна особая осторожность: прежде чем ликвидировать модель, должна быть готова новая или обновленная модель, заменяющая ликвидированную; при ликвидации модели надо соблюдать принципы постепенности, многоукладности и учета местных условий и т. д.). Только после такого предмодельного исследования можно принять решение на право сущв-ие, разработке или ликвидации модели.

Как это делать? Для этого необходимо:

1. Для каждого параметра, участвующего в той или иной модели, должна быть предназначена некая шкала (т. е. коридор или нижний и верхний потолок). Эл-ты этих параметров не должны выйти за пределы этой установленной шкалы, иначе будет нарушение установленного порядка, закона. Н-р, не допустимо, чтобы зарплата продавца или уборщицы была 700 руб. в месяц, а начальник предприятия получал 70 тыс. руб. в месяц (к-ый зарплату сам и назначает), т.е. разница в зарплате выражается 100 кратным числом. Конечно, если это предприятие дсв-но работает эффективно и ее начальник заслуженно получает 70 тыс. руб. в месяц, то тогда его подчиненные должны получать не меньше 7 тыс. руб. в месяц, т. е. 10 раз меньше его, но не 100 раз. Приведем еще пример по использованию должностным лицом различных льгот служебным положением в корыстных целях с элементами вседозволенности, пренебрежением своим подчиненным, их заботам и принятием не обоснованных решений в ущерб общего дела. Такие действия должностных лиц должны быть немедленно пересечены и исправлены. Для этого тоже надо некоторая шкала, оценивающая лояльность, честность, доброжелательность, компетентность этого должностного лица.

2. При предмодельном исследовании по выяснению эффективности и полезности конкретной модели обычно приходится выбирать наилучший вариант модели из нескольких альтернативов. Это можно делать с помощью сравнительных оценок, специально разработанной, для этой модели с учетом информации, заложенных в шкалах параметров, входящих в расв-ой модель. Здесь могут быть также использованы эвристические приемы, экспертные оценки (мнения) различных специалистов и др. информации под руководством ЛПР. Причем предмодельное исследование в зв-сти от предназначения делится на три типа:

а) для существующих моделей;

б) для планируемых к разработке моделей;

в) для планируемых к ликвидации или обновлению моделей.

3. Создание новых или обновленных моделей, взаимосвязанных и отвечающих современным требованиям с учетом предмодельного исследования. Здесь возможны различные подходы и методы. Причем один и тот же процесс (оргинал) может иметь несколько различных моделей, адекватных в различной степени этому оргиналу. В дальнейшем мы изложим один из этих возможных вариантов мдв-ия.

К затронутым здесь вопросам вернемся еще в гл. 7.

7^0. Человеческий фактор – важный элемент при разработке и эксплуатации модели. Большинство моделей действуют при участии человеческого фактора. А каждый человек работает в рамках циклического биологического ритма, от к-го зв-ит его работоспособность. Н-р, установлено, что понедельник отмечается нек-ый спад производительности труда, затем постепенно во вторник, среда, четверг темп работы возрастает и в пятницу снова понижается в связи с накопившейся усталостью. Поэтому, н-р, при составлении модели расписания учебных занятий наиболее трудные предметы надо в расписание включить во вторник, среду, четверг, а остальные предметы – в другие дни. Ясно, что и в дневные периоды времени человек имеет различные степени производительности труда и т.д. Установлено также, что большая часть дорожно-транспортных происшествий – ДТП за неделю падает на пятницу и понедельник. В остальные дни ДТП значительно меньше. Причем исследование водителей, летчиков и т.д., к-ые совершили аварии, показало, что они находились период критических дней [108]. Расим эти вопросы.

Вся Вселенная пронизана ритмами. Начиная от вращения планет Солнечной системы и кончая ритмическими делениями клетки – все подчинено закону колебательного движения, ритмичности.

Как наука, биоритмология возникла в 1960 г. Именно тогда в американском городе Колд-Спринг-Харбор проходил международный симпозиум, посвященный исследованию ритмов в живых системах. Здесь произошло объединение в одну систему (науку) огромного числа известных фактов и наблюдений.

Из всего многообразия биоритмических процессов, протекающих в человеческом организме, наибольшее значение имеет три типа: физический, эмоциональный и интеллектуальный.

Физический цикл. Длится 23 дня и влияет на силу, сопротивляемость организма болезням, хорошее физическое самочувствие и физиологические процессы.

Эмоциональный цикл. Длится 28 и управляет творчеством, психическим здоровьем, мышлением и восприятием окружающего мира.

Интеллектуальный цикл. Длится 33 дня и регулирует функции мышления, память, восприимчивость к знаниям.

Основоположниками этих трех циклов был профессор психологии Венского университета Герман Свобода, известный немецкий отоларинголог Вильгельм Фляйссе и австрийский инженер Альфред Тельтшер. Рас-им более подробно эти циклы.

В день рождения человека каждый из биоритмов (обз-им их ств-но $f_{\phi}(t)$, $f_{\text{э}}(t)$, $f_{\text{и}}(t)$; если тип биоритмов не имеет значения, то обз-им через $f(t)$) стартует с нулевой точки и начинает возрастать в позитивной фазе (рис. 7). В это время энергия и способности человека довольно высоки. Доходя до max ств-но $f_{\phi}^{*}=f(5{,}75)$, $f_{\text{э}}^{*}=f(7)$, $f_{\text{и}}^{*}=f(8{,}25)$ (причем f_{ϕ}^{*}, $f_{\text{э}}^{*}$, $f_{\text{и}}^{*}$ не равны) циклы, постепенно уменьшаясь, проходят нулевую точку (т. е. $f_{\phi}(11{,}5)=f_{\text{э}}(14)=f_{\text{и}}(16{,}5)=0$) и переходят в негативную фазу. Затем, доходя до min, опять начинает возрастать и, проходя нулевую точку, переходят в позитивную фазу, завершая один полный цикл (рис. 7) и так повторяется за всю жизнь, начиная от рождения человека. Причем на эти ритмы оказывает влияние положение Солнца, Луны и др. планет.

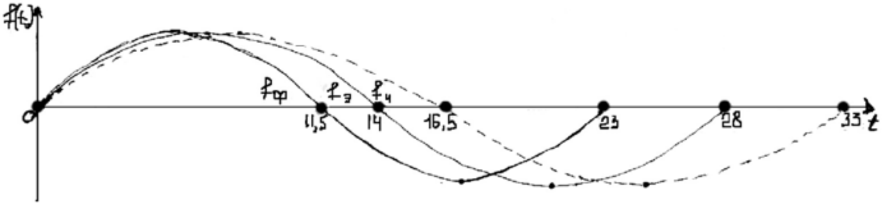


Рис. 7

Отметим также, что сила физического, эмоционального и интеллектуального ритмов у разных людей различна. Человек, с детства одаренный талантом художника или писателя, всегда будет иметь более ярко выраженный интеллектуальный цикл, прирожденный «атлет» будет отличаться физическими достоинствами, артист – эмоциональными.

По длительности циклы неодинаковы, одновременное пересечение ими оси крд-ти случается очень редко, поэтому мы живем под смешенным влиянием трех ритмов. Редко бывает, чтобы все ритмы находился в позитивной (хорошие дни) или негативной (плохие дни) фазе.

Дни перехода из одной фазы в другую наз. критическими. Такие дни могут быть очень опасны для человека. Если, допустим, у вас критический день физического цикла, то организм ослаблен физически, его сопротивляемость на низшей точке, поэтому вы быстрее можете заболеть, получить травму, показать низкие спортивные результаты. В критический день эмоционального цикла вы легко раздражаетесь, становитесь вспыльчивыми и даже несколько агрессивны. Если наступил критический день интеллектуального цикла, то можно ожидать ослабления памяти, снижение способности к анализу и восприятию нового. В этот день не стоит заключать важных договоров, принимать ответственных решений.

В критические дни человек должен проявлять осторожность во всех своих действиях и поступках, поскольку физиологические функции организма снижены. Но еще опасней «двойные» или даже «тройные» критические дни,когда два или три ритма находятся в негативной фазе или пересекают нулевую точку. По методике, приведенной в [108] можно вычислить свои биологические циклы и узнать критические, или «неудачные», дни. Имея ежемесячный график биоритмов, вы сможете регулировать свои поступки и планы. Критические дни составляют 20% жизни каждого человека. Оставшиеся 80% яв-ся смешанными, носят изменчивый характер и зависят от многих факторов.

Установлено, что периоды повторяющейся активности живых организмов колеблются в очень широком диапазоне. Некоторые из них составляет тысячной доли секунды, другие вмещаются в секунду или час. Наиболее важным периодом яв-ся 24 часа. Суточным ритмом человека яв-ся опр-ый ритм температуры, ритмы артериального давления, работы почек. Поэтому очень важно учитывать (хронотерапия) при данном заболевании в какое время суток принимать лекарства. Это относится и к физиотерапевтическим, бальнеологическим воздействиям, процедурам массажа и др.

При занятии трудом или спортом и при приеме пищи или лекарства нх-мо выбрать активный период того или иного органа, ств-ми этим процессам. Н-р, на 5–6, 8–12, 15–19 часов приходится самая высокая работоспособность (из них самая высокая производительность в 5–6 часов, а самая низкая активность в 13-15 ч и с 23ч), чувство голода возникает 5–6, 11–12 (но обедать лучше в 13 ч), 16–17, 20–21 часов. Т. о. целесообразно подъем 5 ч, завтрак 7 ч, обед 13 ч, отдых 13–15 ч, ужин 18 ч, легкий ужин (н-р, кефир) 21 ч, отбой в 23 ч.

Для приема лекарств и процедур надо учесть, что наиболее активно работают желчный пузырь в 1–3 часов, печень в 3–5 ч, легкие в 5–7 ч, желудок и кишечник 7–9 ч, поджелудочная железа и селезенка в 11–13 ч, сердечная деятельность 13–15 ч, тонкий кишечник 15–17 ч, мочевой пузырь 17–19 ч, лимфатическая система и селезенка 17-20 ч, почки 19–21 ч, сосудистая система 21–23 ч и начало сна 23 ч. Более подробно см. в [108].

Итак, здоровье каждого человека улучшается и ухудшается циклически и эффект лечения зависит от времени применения лекарства.

Кроме того, нх-мо учитывать, что лечение нельзя начинать в новолуние и полнолуние, а также на 4 фазу луны, а надо начинать в начале I четверти луны и заканчивать в конце I четверти. В период растущей Луны человек и растения более активны, биоритмы у них поднимаются. А в период убывания Луны жизнеспособность организма снижается, человек менее активен, чувствует усталость, все у него продвигается «со скрипом». В ств-и с этим надо планировать свои дела по их сложности и важности. Особое внимания надо обратить на фазу полнолуния (3 дня) и фазу новолуния (тоже 3 дня). Полнолуние неблагоприятно действует на психику человека. Поэтому в полнолуние растет число ДТП, тяжелых преступлений, немотированных ссор. Лекарства, принятые в полнолуние, действуют активнее, но сильнее проявляется и их побочные действия. Ученые-хирурги зафиксировали увеличение послеоперационных кровотечений в полнолуние на 82%. Спиртные напитки в полнолуние вовсе противопоказаны – человека тянет на «подвиги», поступки его зачастую непредсказуемы. Поэтому торжественные мероприятия лучше не проводить в полнолуние. Отметим также, что брачные циклы многих животных связаны с лунными циклами, н-р, некоторые виды рыб мечут икру только ночью в полнолуние.

В полнолуние возрастает работоспособность человека и возбудимость его нервной системы, повышается раздражительность, а в новолуние наблюдается обратное (слабость, снижение активности, упадок творческих сил и способностей).

Столь же неблагоприятно действует на человека и новолуние. В это время организм находится на самой низкой точке жизненной активности, иммунитет наиболее слаб, возрастает опасность ошибок и сбоев в поведении, нередки и заболевания. В новолуние и в несколько последующих за ним дней чаще проходит кровоизлияния, инфаркта, приступы эпилепсии и бронхиальной астмы.

На динамику ритмических процессов, происходящих в организме человека, кроме Луны оказывают влияние Солнце и др. космические факторы. Великий русский ученый А. Л. Чижевский доказал сущв-ие прямой связи между солнечной активностью и вспышками болезнетворных микробов, на основе к-ой возникла новая научная дисциплина – гелиобиология, к-ая яв-ся частью биоритмологии, исследует влияние магнитных и гравитационных сил планет и солнца, звезд и галактики, т. е. всей Вселенной на земную жизнь и функционирование биосферы в целом.

Каждый цикл периода солнечной активности составляет в среднем 11,1года. Вспышки эпидемии чумы, холеры, оспы, набеги саранчи совпадают с усилением активности Солнца. Столь же четко прослеживается периодичность урожайных и неурожайных годов. Почти 90% переломных моментов в истории человечества приходится на те же года. Когда отмечалась повышенная солнечная активность.

В современном мире любая профессия предъявляет человеку повышенные требования. Все большее число операций, однообразных и монотонных, поручается машинам, за к-ым следит оператор. Человек, занимающий эту должность должен обладать умением мгновенно принимать важные решения, ибо от этого зависит жизнь многих людей. Нетрудно представить, что будет, если ошибется пилот в аэропорту или диспетчер на железной дороге. В подтверждение сказанного приведем факты.

Американский ученый Анерсон, исследовал влияния биоритмов на промышленный травматизм и пришел к выводу, что 70% из них произошли в критические дни циклов пострадавших людей. И 90% случаев произошли в те дни, когда два ритма находились в критической фазе.

Японская фирма «Оми рэйлвэй компании» собрала данные на всех своих работников. Были выч-ны критические дни каждого из них, и перед выездом водители получили карточку с предупреждением быть особенно внимательным в тот или иной день. Эффект поразительный: число ДТП (с 1969 г.) сразу уменьшилось два раза в первый же год и неуклонно снижается до сих пор. Это используется теперь во многих компаниях.

Американские авторы дают ряд примеров, из к-ых ясно видно связь авиакатастроф с биологическими ритмами летчиков. 23 июля 1973 г. случилась катастрофа в Сент-Луисе. Капитан Арвид Линке переживал физический критический день и негативную фазу интеллектуального цикла; 24 июня 1975 г. самолет Восточных Авиалиний потерпел крушение в аэропорту Кеннеди, в к-ом погибло 112 человек. У капитана Джона В. Кливера был интеллектуальный критический день и др. примеры.

Аналогичные примеры можно привести из спортивной жизни. Мухаммед Али, знаменитый боксер-тяжеловес, сражался 31 марта 1973г. с Кеном Нортоном, боксером не очень известным, и проиграл. Для Али этот день был критическим; Бенни Парет в тройной (очень редкий случай) критический день 24 марта 1962 г. вышел на ринг для схватки с Эмилом Гриффитом. Парет был нокаутирован и через 10 дней скончался в больнице в сд-й критический день своего биоритма.

Возвратившись к началу данного параграфа, отметим, что не только система составления расписания учебных занятий яв-ся моделью. Но и моделью яв-ся любая система целесообразно принятых решений (действий), н-р, система целесообразно принятый режим действий, направленный на воспроизводства конкретных научных исследований, или на лечение конкретного человека от данной болезни, или на достижения мкс-го долголетия жизни и т. д. системы и режим тренировок на основе биоритма, целесообразно направленный на достижение высоких спортивных достижений, также является моделью. Кроме того свойства биоритмологии еще более успехом можно использовать при мдв-и систем «человек-машина» в таких, как «летчик-самолет», «водитель-автомобиль» и т. д. Т. о. человеческий фактор с учетом биоритмологии яв-ся важным эл-ом при разработке модели и ее эксплуатации.

6.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

6.1. МОДЕЛИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Какие причины вызывают неопр-сть результатов игр?

2. Как опр-ть нижнюю и верхнюю цену матричной игры, какое стн-ие сущ-ет между ними?

3. Какие сущ-ют методы упрощения игр?

4. Приведите геом-ие методы решения игр с матрицами $2\times n$ и $m\times 2$ и их применение.

5. Сформулируйте теорему теории матричных игр.

6. На чем основана связь матричной игры и задачи ЛП?

7. В чем состоит отличие игры с природой от стратегических игр?

8. Перечислите основные критерии решения игр с природой.

9. Что такое риск?

10. Какие бывают риски?

11. Какие параметры нб-ие часто используются в качестве меры риска?

Задания для кр. работы

1. Для сд-их платежных матриц опр-ть нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловых точек. В последнем случае опр-ть опт. решение игры.

$$1.1.\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}.\quad 1.2.\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\quad 1.3.\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.\quad 1.4.\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1.5.\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.\quad 1.6.\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

O: 1.1. $\alpha=\alpha_3=0{,}4$, $\beta=\beta_2=0{,}6$, 1.2. $\alpha=\beta=\vartheta=4$, (A_2,B_3). 1.3. $\alpha=\beta=5$, (A_2,B_2). 1.4. $\alpha=\alpha_2=4$, $\beta=\beta_1=\beta_3=6$. 1.5. $\alpha=\beta=\vartheta=6$, (A_3,B_2). 1.6. $\alpha=$ $=\beta=\vartheta=6$, $(A_{2,}B_3)$

2. Исследовать игры (с учетом дублирующих и доминирующих стратегий из 2^0), заданные сд. матрицами:

$$2.1.\begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 2.2.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2.3.\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

О. 2.3. Исключаются посл-но B_2, B_3, B_4, A_1, A_3, B_5 и A_2; получаем $\vartheta = 4\, и\, x^* = (0,0,0,1)$, $y^* = (1,0,0,0)$. 2.4. Исключаются A_1, B_2, B_3 и A_3. $П=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. Решить и провести графическую иллюстрацию игр, заданных сд. матрицами:

$$3.1.\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 3.2.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 3.3.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad 3.4.\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad 3.5.\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \quad 3.6.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ук: Для графической иллюстрации удобно предварительно привести все эл. платежной матрицы плж-ым числам, добавив ко всем эл-ам плж. число (см. задачу 5).

О: 3.1. $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vartheta = 0$. 3.2. $x^* = (1,0)$, $y^* = (1,0)$, $\vartheta = 2$.

3.3. $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vartheta = \frac{3}{2}$. 3.4. $x^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $y^* = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$, $\vartheta = \frac{7}{2}$.

3.5. $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vartheta = 0{,}3$. 3.6. $x^* = (0,1)$, $y^* = (0,1)$, $\vartheta = 0$.

4. Найти решение сд-их игр:

$$4.1.\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \quad 4.2.\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 4.3.\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 4.4.\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.5.\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad 4.5.\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4.6.\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 4.7.\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}. \quad 4.8.\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 4.9.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ук: Задачи 4.5–4.9 решаются аналогично предыдущим, но отс-но игрока В. Ств-но этому строится ломанная, к-ая хркз-ет верхнюю границу выиграша и на к-ой находится точка с мнм-ой ординатой.

О: 4.1. $x^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), y^* = \left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, 0\right), \vartheta = \frac{39}{7}$. 4.2. $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), y^* = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\vartheta = \frac{7}{2}$. 4.3. $x^* = (1, 0), y^* = (0, 1), \vartheta = 3$. 4.4. $x^* = \left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right), y^* = \left(0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}\right), \vartheta = \frac{4}{7}$.

4.5. $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \vartheta = \frac{11}{3}$. 4.6. $x^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\vartheta = \frac{21}{5}$. 4.7. $x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$, $y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \vartheta = 4$. 4.8. $x^* = \left(\frac{7}{9}, 0, 0, \frac{2}{9}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right), \vartheta = \frac{44}{9}$. 4.9. $x^* = \left(0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), y^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \vartheta = \frac{7}{6}$.

5. Решить с помощью построения дв-ой пары задач (см. 5^0) игры, платежные матрицы к-ых приведены в сд-их задачах:

$$1)\,1.1.\;\; 2)\,1.2.\;\; 3)\,1.3.\;\; 4)\,1.4.\;\; 5)\,1.5.$$

О: 1) $x^* = (0,\ 4;\ 0;\ 0,\ 6), y^* = (0,\ 2;\ 0,\ 8\ ;0)$, $\vartheta = 0{,}54$. 2) $x^* = (0,\ 1,\ 0)$, $y^* = (0,\ 0,\ 1)$, $\vartheta = 4$. 3) $x^* = (0,\ 1,\ 0), y^* = (0,\ 1,\ 0)$, $\vartheta = 5$. 4) $x^* = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $y^* = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vartheta = 6$. 5) $x^* = (0,\ 0,\ 1,\ 0), y^* = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\vartheta = 6$

6. Построить платежные матрицы игр, экв-ых сд-им задачам ЛП (приведена одна из пар дв-ых задач):

6.1. $Z = 2x_1 - x_2\,(\max)$, 6.2. $Z = -x_1 + x_2\,(\max)$, 6.3. $Z = x_1 + 2x_2\,(\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. Предприятие может выпускать три вида индукции (А, Б, В), получая при этом прибыль, зв-щую от спроса. Спрос в свою очередь может принимать одно из четырех состояний (I, II, III, IV). В сд-ей матрице эл-ы a_{ij} хркз-ют прибыль, к-ую получит предприятие при выпуске i-й продукции и j-м состоянии спроса

$$\begin{array}{c|cccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \hline А & 8 & 3 & 6 & 2 \\ Б & 4 & 5 & 6 & 5 \\ В & 1 & 7 & 4 & 5 \end{array}$$

Опр-ть опт-ые пропорции выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопр-ым, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

О: Выпускать 50% продукции А и 50% продукции В. При этом $V = 5$.

8. Для отопления помещения нх-мо приобрести топливо. Однако расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время (мягкая, нормальная, суровая; см. табл.)

Погода	мягкая	нормальная	суровая
Расход. т	5	10	18
Цена, руб/т	10	16	20

В настоящее время уголь может быть приобретен по мнм-ой цене (10 руб/т) и излишек неиспользованного угля можно реализовать весной по цене 5 руб/т. можно избрать одну из трех стратегий в закупке угля: A_1–5 т, A_2–10 т и A_3–18 т.

Предполагая, что подобных помещений 100, опр-ть опт-ю стратегию в образовании запаса, руководствуясь „минимаксным критерием”.

О: следует применять стратегию A_3, т.е. закупать 18 т угля.

9. Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов (А, Б, В). Их реализация, а сд-но, и получаемая магазином прибыль (a_{ij}) зависит от вида товара и состояния спроса. Предпологая, что последний может хрк-ся тремя состояниями (I, II, III) и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, опр-ть опт-ые пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при сл-ей матрице прибылей:

$$\begin{array}{c} \\ А \\ Б \\ В \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

О: 17% товара А и 83% товара В.

* * *

10. Игрок А записывает числа 1 (стратегия A_1), или 2 (A_2), или 3 (A_3). Игрок В в свою очередь записывает 1 (B_1), 2 (B_2), 3 (B_3) или 4 (B_4). Если сумма чисел четна, то А выиграет сумму этих чисел, если сумма чисел нечетна, то В выиграет сумму этих чисел. Составить платежную матрицу, опр-ть нижнюю и верхнюю цену игры и минимаксные стратегии.

Р. согласно условию, платежная матрица игры имеет сд-й вид

В А	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	–3	4	–5	$\boxed{-5}$
A_2	–3	4	–5	6	$\boxed{-5}$
A_3	4	–5	6	–7	–7
B_j	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	6	6	–5 4

Нижняя цена игры $\alpha = \max \alpha_i = -5$, верхняя цена игры $\beta = \min \beta_j = 4$. Сд-но, для игрока А максиминными стратегиями яв-ся A_1 или A_2, при к-ых ему обеспечен «выигрыш» не менее $\alpha = -5$ (т.е. проигрыш не более 5). Для игрока В ств-но минимаксными стратегиями яв-ся B_1 или B_2, к-ые обеспечивают проигрыш не более 4. Игра не имеет седловой точки ($\alpha < \beta$).

11. Д-ть, что цена игры υ уд-ет стн-ям $\alpha \le \upsilon \le \beta$.

12. Записать платежную фк. для игры, задаваемой матрицей

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ опр-ть цену игры и проверить справедливость нерав-в:

$$f\left(x, y^*\right) \le f\left(x^*, y^*\right) \le f\left(x^*, y\right).$$

$O: 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3,\ \alpha = \beta = \upsilon = 2_1\left(A_2, B_2\right),$ $x^* = (0,1),\ y^* = (0,1,0),\ f\left(x^*, y^*\right) = 2 = \upsilon,\ f\left(x, y^*\right) = x_1 + 2x_2 = 2 - x_1, .$ $f\left(x^*, y\right) = 4y_1 + 2y_2 + 5y_3 = 2 + 2y_1 + 3y_3$

13. Рассчитать вел-у платежа для игр заданных матрицами задач 1.1, 1.2 при $x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ $и$ $y = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

14. Д-ть, что решение игры не изменится, если ко всем эл-ам a_{ij} платежной матрицы прибавить нек-ое пст. число. Как при этом изменится цена игры.

15. Исцледовать игру, заданной матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Р. Стратегия A_4 заведомо невыгодна по сравнению с A_2 и может быть исключена, т. е. получим матрицу $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ из к-ой исключим стратегии B_1 и B_4, тогда имеем $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, в к-ой вновь оказались заведомо невыгодными стратегии A_1 и A_3. Их исключение дает матрицу $(6,8)$. Отсюда

$$\alpha = \min_j a_{ij} = \min(6,8) = 6, \alpha = \max_i \alpha_i = \max 6 = 6.$$

Аналогично, $\beta_1 = \max_i a_{i1} = \max 6 = 6,\ \beta_2 = \max_i a_{i2} = \max 8 = 8,$ откуда $\beta = \min \beta_j = m \min(6,8) = 6$, т. е. $\alpha = \beta$.

Т.о. окончательно получим решение игры в виде чистых стратегий A_2 и B_2 и цену игры $\upsilon = 6$. Полученное решение в виде чистых стратегий говорит о том, что исходная матрица имеет седловую точку $a_{22} = 6$, что можно было установить прямым исследованием

$$\begin{array}{cc}
 & \alpha_i \\
\begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ \boxed{6} \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \\
\beta_j \quad 8 \quad \boxed{6} \quad 8 \quad 9 &
\end{array}$$

Сд-но, $\alpha = \max \alpha_i = \max(3,6,2,2) = 6$

. $\beta = \min \beta_j = \min(8,6,8,9) = 6$

$и\ \alpha = \beta = 6 = \vartheta.$

16. Исследовать и решить игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Р. Прежде всего проверяем наличие седловой точки. Имеем $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, откуда α=maxα_i=max(-1,1)=1; $\beta_1=3$, $\beta_2=2$, отсюда $\beta=\min\beta_j=\min(3,2)=2$. Сд-но, $\alpha\neq\beta$ и седловой точки нет. Найдем опт-ой смешанной стратегии. Пусть для игрока А стратегия задается вектором $x=(x_1,x_2)$, для игрока B – Y=(y$_1$, y_2) и цена игры есть ϑ. Тогда по (10) и (11)

из $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\geq\vartheta\Rightarrow\begin{cases}-x_1+3x_2=\vartheta\\ 2x_1+x_2=\vartheta\\ x_1+x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x_1+2x_2=0\\ x_1+x_2=1\end{cases}\Rightarrow x_1^*=\frac{2}{5}, x_2^*=\frac{3}{5}$ и ϑ=$\frac{7}{5}$

Аналогично, из $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\leq\vartheta\Rightarrow\begin{cases}-y_1+2y_2=\vartheta\\ 3y_1+y_2=\vartheta\\ y_1+y_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_1+y_2=0\\ y_1+y_2=1\end{cases}\Rightarrow y_1^*=\frac{1}{5}, y_2^*=\frac{4}{5}$.

Сд-но, решением игры яв-ся смешанные стратегии $x^*=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$, $y^*=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$ и цена игры $\vartheta=\frac{7}{5}$.

17. Построить игру, экв. дв-ой паре задач, одна из к-ых имеет вид:

$$\max Z=x_1+2x_2+x_3$$

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2-x_3\leq 1\\ 2x_1-3x_2+x_3\leq 2\end{aligned}\right\}, x_j\geq 0 (j=\overline{1,3})$$

Р. В данной задаче $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $C=(1,2,1)$

сд-но, $A'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B'=(1,2)$ и $C'=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, откуда П=$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$

6.2. МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Вопросы для самопроверки

1.В чем состоит суть многокритериальной (мкт.) задачи? Приведите примеры.

2. Как понимаете несравнимость исходов и неопр-ть в мкт-ой задаче?

3. Как формулируется мт. модель мкт-ой задачи?

4. Как определяется годная программа, введенная В. Парето?

5. Как решается мкт. задача с помощью диф-го прг-ия?

6. Как можно получить годную программу (см. п1:3^0)?

7. Как осуществляется многообразие целей в ЛП?

8. Как формулируется дв. задача и ее экнч. интерпретация?

9. В чем состоит суть метода посл-ых уступок?

10. Характеризуйте метода нахождения Паретовского мн. альтернатив.

11. Что понимаете под методом обобщенного критерия?

12. Что такое локальный коэф. замещения и карта безразличий. Как они связаны?

13. Какие трудности возникают при построении обобщенного критерия?

Задачи для кр. работы

1. Дана задача трехкт-ой оптз-и вида

$$\begin{aligned} &\max Z_1 = -x_1 + 3x_2 \\ &\max Z_2 = x_1 + 2x_2 \\ &\max Z_3 = 2x_1 - x_2 \end{aligned} \quad \text{при огр-ях} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 1 \le x_1 \le 6 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{cases}$$

Найти решение методом посл-ых уступок $\delta_1 = 2, \delta_2 = 1$ и $\delta_3 = \frac{1}{2}$, ств-ие кт-ям Z_1, Z_2 и Z_3 при сд-ем порядке убывания их важности: 1.1. $Z_1 \succ Z_2 \succ Z_3$. 1.2. $Z_2 \succ Z_3 \succ Z_1$. 1.3. $Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2$. 1.4. $Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$. 1.5. $Z_3 \succ Z_2 \succ Z_1$. 1.6. $Z_1 \succ Z_3 \succ Z_2$.

2. Найти решение задачи 1 с уступками $\delta_1 = 1, \delta_2 = \frac{3}{2}, \delta_3 = 2$ для:
2.1. $Z_1 \succ Z_2 \succ Z_3$. 2.2. $Z_2 \succ Z_3 \succ Z_1$. 2.3. $Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2$. 2.4. $Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$. 2.5. $Z_3 \succ Z_2 \succ Z_1$. 2.6. $Z_1 \succ Z_3 \succ Z_2$.

3. Найти решение задачи методом посл-ых уступок

$$\begin{aligned} &\max Z_1 = -3x_1 + x_2, \\ &\max Z_2 = x_1 + 2x_2, \\ &\max Z_3 = x_1 - 2x_2. \end{aligned} \quad \text{при огр-ях} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 \le x_1 \le 6 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{cases}$$

заданными уступками $б_1 = 2$, $б_2 = 3$, $б_3 = 1$ по важности кт-й:
3.1. $Z_1 \succ Z_2 \succ Z_3$. 3.2. $Z_2 \succ Z_3 \succ Z_1$. 3.3. $Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2$. 3.4. $Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$. 3.5. $Z_3 \succ Z_2 \succ Z_1$. 3.6. $Z_1 \succ Z_3 \succ Z_2$.

4. Найти решение 3 с уступками $б_1 = \frac{3}{2}$, $б_2 = 2$, $б_3 = 3$ для:
4.1. $Z_1 \succ Z_2 \succ Z_3$. 4.2. $Z_2 \succ Z_3 \succ Z_1$. 4.3. $Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2$. 4.4. $Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$. 4.5. $Z_3 \succ Z_2 \succ Z_1$. 4.6. $Z_1 \succ Z_3 \succ Z_2$.

5. При выборе квартиры в качестве сущ-ных кт-в взяты: p_1 – метраж (в м^2), p_2 – время поездки на работу (в мин), p_3 – время поездки в зону отдыха (в мин). Сравните по прч-ти семь вариантов, представленных в табл. 1. Для всех заданий (5.1–5.6) в начале выделите Парето-опт. варианты (см. п3:6^0)

Таблица 1

	Критерий		
вариант	p_1	p_2	p_3
1	60	–50	–30
2	50	–45	–25
3	45	–30	–20
5	60	–40	–30
6	42	–20	–10
7	45	–30	–15
8	48	–45	–25

5.1. а) Указать нижних границ при огр-ях:

p_1 – не менее 48 м^2

p_2 – не более 30 мин

p_3 – не более 25мин

б) Для субоптз-и выделятся кт-я p_1 при тех теогр-ях p_2, p_3.

в) При лексикографической оптз-и важнось кт-й взять в порядке $p_1 \succ p_2 \succ p_3$.

5.2. а) При огр-ях $p_1 \ge 50$, $p_2 \le 30$, $p_3 \le 25$.

б) Выделить кт-й p_2 при тех же огр-ях p_1, p_2, т.е. при а)

в) $p_2 \succ p_3 \succ p_1$

5.3. а) При огр-ях $p_1 \ge 50$, $p_2 \ge 30$, $p_3 \ge 30$

б) Выделить p_2 при а) в) $p_3 \succ p_1 \succ p_2$.

5.4. а) $p \ge 45$, $p_2 \le 30$, $p_3 \le 25$. б) Выделить p_3 при а). в) $p_1 \succ p_3 \succ p_2$

5.5. а) $p \ge 45$, $p_2 \le 40$, $p_3 \le 25$. б) Выделить p_1 при а). в) $p_2 \succ p_1 \succ p_3$

5.6. а) $p \ge 48$, $p_2 \le 40$, $p_3 \le 20$. б) Выделить p_3 при а). в) $p_3 \succ p_2 \succ p_1$.

6. Используя в качестве обобщенного кт-я для задачи 5 кт-й (36), постройте полное ранжирование вариантов мест работы. ств-ет ли полученное ранжирование вашим прч-ям?

7. Постройте полное ранжирование, указанных в табл. 2, векторных оценок по кт-я u и v, зная, что в обл. векторных оценок ЛКЗ имеет вид: $k\left(u,v\right) = \frac{2v}{3u}$ (см. п 5: 7^0)

Таблица 2

	Критерий	
Вариант	u	v
1	5	2
2	3	3
3	2	4
4	1,5	4,5
5	1,3	5

6.3. СЛОЖНАЯ СИСТЕМА И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Вопросы для самопроверки

1. Что такое система и сложная система?
2. Какие сложные системы можно анализировать с помощью ИИс?
3. В чем состоит основное отличие ИМ от ММ?

4. Объясните построение имт-ой модели на примере упл-ия вдх-щем.

5. Из каких основных этапов состоит ИМв?

6. Расскажите построение имт-ой модели работы железнодорожной кассы.

7. Какие сложные системы можно анализировать, а какие нет с помощью ИМ?

8. Почему человеческий фактор нх-мо учитывать при разработке и эксплуатации модели?

Задачи для самостоятельной работы

1. Построить ИМ работы кассы автостанции для компостирования и продажи автобусных билетов с целью изучения длины очереди и время ожидания в очереди в зв-ти от интенсивности потока пассажиров и производительности кассира для получения рекомендации о кол-ве касс или о целесообразности автоматизации их.

2. Сформулируйте аналогично к задаче 1 работы кассы аэропорта для компостирования и продажи билетов на самолет и решите ее.

3. Сформулируйте аналогично к задаче 1 работы: а) двух касс; б) трех касс; в) n касс.

4. Сформулируйте аналогично к задаче 2 работы авиа кассы для: а) двух касс; б) трех касс; в) n касс.

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ И ВЕСОВОЙ МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

> Новая теория, как бы ни был специален круг ее применения, редко или вообще никогда не бывает простой добавкой к тому, что уже известно. Она требует перестройки предшествующей теории и переоценки предыдущих фактов, подлинно преобразующего процесса, который редко завершается одним человеком и никогда не бывает одноэтапным.
>
> Томас Кун

ЛЕКЦИЯ 24

7.1. ВЕСОВОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

1^0. Основные свойства нечеткого множества и ее анализ с помощью весового метода. Проблемы принятия решения при анализе задач с неопределенными (неопр.) параметрами занимают все большее место в современной науке. Теоретической их основой яв-ся нечеткие (небулярные, размытые) мн-ва. Описанию и использованию нечетких мн-в посвящено много работ [37, 56, 71 и др.]. Причем в последние годы их число значительно возросло. Это связано как с отсутствием в данной области общепринятой (законченной) теории, так и с наличием большего числа неясных вопросов как теоретического, так и практического характера.

В этом пункте предлагается весовой подход к анализу нечетких мн-в. Суть подхода состоит в установлении предпочтительности (прч.) эл-ов (векторов) нечеткого мн-ва с помощью весовых функций (фк.) [97] на основе совместного учета критериев (кт.), характеризующих (хркз.) координаты (крд.) векторов и позволяющих анализировать нечеткие мн. в целом.

Обоз-им через $\left(x_1,...,x_j,...,x_n\right)$ эл-ты нечеткого мн. N. Для сравнительного анализа рас-им и обычное (четкое) мн. M (его эл-ы и др. параметры обз-им также, как в N). И напомним, что множество – исходное (базисное) понятие, поэтому имеет не опр-ие, а лишь описание (понятие) того, как обращаться с этим неопр-мым понятием. Так, под мн-ом M понимается совокупность предметов или понятий (наз-мых эл-ми), объединенных некоторым общим законом или св-ом $Q\left(x\right)=Q\left(x_1,...,x_n\right)$ и записывается

$$M=\left\{x:Q\left(x\right)\right\}. \tag{1}$$

н-р, $M=\left\{x:1\le x\le 3\right\}$, $M=\left\{x:f\left(x\right)=\sin x\right\}$ и т.д. Иногда M задается перечислением эл-ов: $M=\left\{1,\ 4,\ 7\right\}$, мн-во студентов в данной аудитории и т.д. Запишем их также в общем виде (1), полагая $Q\left(x\right)=\left\{1,\ 4,\ 7\right\}$. В обоих случаях здесь четко устанавливается $x\in M$ или $x\overline{\in} M$, чего нельзя сказать отс-но *N*.

Компоненты (крд-ы) $\{x_j\}$ вектора x нечеткого мн-ва N наз-ся лингвистическими (лнгв) пер-ми, к-ые употребляются в обычной разговорной речи и яв-ся нечеткими. Н-р, системность, сложность, высота, холод, эффективность и качество, молодость, работоспособность и т.д. Причем каждая лнгв. (нечеткая) пер-ая x_j принимает нек-ые значения совокупности u_j. Н-р, нечеткая пер. системность принимает [97] значения: u_j = {несистемно, почти системно, системно, более системно, очень системно, тесно системно, теснее системно, ультрасистемно, суперсистемно}.

Совокупность принимаемых значений x_j, выражаемых числами, назовем шкалой и обз-им через V_j, а крайние значения V_j, ств-щие крайним значениям u_j, назовем границей, к-ую обз-им через $G(x)$. Обычно $G(x_j)=\left[\alpha_j^0,\alpha_j\right]\ni x_j$. Н-р, если для x_j (системность) $G(x_j)=[0,\ 2;\ 1{,}8]$, то 0,2 означает несистемно (конкретным выражением может совокупность объектов: кусок сахара, ежик, самолет), 0,4 – почти системно (пружина, потолок, груз), 0,6 – системно (пружина с грузом, приклепленная к потолку) и т.д. 1,8 – суперсистемно (головной мозг).

Заметим, что $\left[\alpha_j^0,\alpha_j\right]\ni x_j$ не совпадает с обл-ю опр-ия $\left[a_j,b_j\right]\ni x_j$, понимаемое в обычном смысле, к-ое устанавливается исходя из самого $Q(x)$.

Если $\left[\alpha_j^0,\ \alpha\right]$ или $\left[a_j,\ b_j\right]$ не заданы, то будем полагать, что $x_j\in X_j$ или $x\in X$. Кроме того G может указать на объект, к-ый хрк-ет x_j. Так высота может означать рост человека или высоту здания, для к-ых G имеет различные значения. Поэтому вместе $G(x_j)$ целесообразно взять $G_i(x_j)$, где i – вид объекта.

Введение G позволяет лнгв. пер-ые x_j выразить числами из не-кой шкалы, т.е. получить ств-ие $U_j\leftrightarrow V_j$, хотя нек-ые авторы против этого, мотивируя тем, что лнгв. пер-ые высказывания (отнс-но их) нельзя выразить числами (это принципиальное исходное положение, на к-ом в дальнейшем мы неоднократно будем останавливаться). Нам кажетсяочень важным введение G. Дело в том, что в целях практического использования нечеткого мн-ва понимание между экспертами имеет принципиальное значение. Н-р, от нечеткой пер-ой x_j (холодно) со значением очень холодно для «южанина» и почти холодно – «северянина» мы не можем извлечь никакой полезной информации. Но та же информация окажется полезной, если южанин и северянин укажут границы G пер-ой x_j (холодно), исходя из своих представлений. Тогда, сопоставляя эти информации с указанными шкалами, мы можем понять южанина, что для него очень холодно означает (скажем) -20^0, а почти холодно для северянина -35^0. Анализировать и использовать на практике такую информацию нетрудно, если ортонормировать границы. Т.о. польза от введения G двойная: указывая G, эксперт становится более объективным в своих оценках – это во-первых, а во-вторых, его лучше (правильно) понимают др. эксперты.

Причем для нек-ых лнгв. пер-ых x_j (н-р, для системности) границы и шкалы изменений можно установить заранее. В этом случае для них $m=1$ $\left(G_i(x),\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}\right)$ и границы пст-ны. Так, зная границы системности, эксперт легко может опр-ть, что электронные часы (скажем) более системны.

Для остальных x_{j} (н-р, высота ($\mathrm{m}>1$), холод (границы непст-ны) и т.д.) границы устанавливаются экспертами, оценивающими параметры лнгв. пер-ых.

Пусть, для простоты, $\mathrm{n}=1\left(\mathrm{x}=\left(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_{\mathrm{j}},\ldots,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\right),\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}\right)$. Тогда $\mathrm{x}_{\mathrm{j}}=\mathrm{x}$, т.е. лнгв. пер-ая сама яв-ся эл-ом нечетного мн-ва N. В этом случае эл-ты $\mathrm{x}\in\mathrm{N}$ будут одномерным, о них пойдет речь в дальнейшем. Если x – многомерная $(\mathrm{n}>1)$, то каждый раз будем делать оговорку.

Эл-ты x нечетного мн. N, как и эл-ты мн. M обладают св-ми $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$. Но каждый эл. $\mathrm{x}\in\mathrm{N}$ обладает этим св-ом с опр-ой интенсивностью, наз-мой фк-ей принадлежности $\mu=\mu(\mathrm{x})\in[0,1]$. В частности, если $\mu=0$ для x, то x не обладает св-ом $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$, сд-но, $\mathrm{x}\overline{\in}\mathrm{N}$, а если $\mu=1$, то четко $\mathrm{x}\in\mathrm{N}$. Остальные значения μ принимает из $]0,1[$ и отражает степень принадлежности x в N. Исходя из приведенных рассуждений, дадим сд. понятие.

Под нечетким мн-ом N понимается совокупность нечетких предметов или понятий (наз-мых эл-ми) x с опр-ой границей $G_i(x)$ и обладающей св-ом $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ с нек-ой степенью-функцией принадлежностью $\mu(\mathrm{x})$ и записывается

$$\mathrm{N}=\left\{\mathrm{x}:\mathrm{Q}(\mathrm{x}),\mathrm{G}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}),\mu(\mathrm{x})\right\}. \tag{2}$$

Геом-й смысл стн-ия (2) ясен из рис. 1, где $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ указана с обл-ю опр-ия $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, а фк. принадлежности $\mu(\mathrm{x})$ с границей $\mathrm{G}(\mathrm{x})=\left[\alpha^0,\alpha\right]$ может двигаться по всей линии $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$. Причем $\mu\left(\alpha^0\right)=\mu(\alpha)=0,\mu(\gamma)=1,$ где точка $(\gamma,\mathrm{Q}(\gamma))$ лежит на кривой $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$. Для др. точек $\mathrm{x}\in\left]\alpha^0,\alpha\right[$ имеем $\mu(\mathrm{x})\in]0,1[$.

Нечетное мн. N наз. нормальным, если выполнено рав-во: $\mathrm{Sup}\mu(\mathrm{x})=1,\mathrm{x}\in\mathrm{X}.$ В противном случае нечетное мн. наз. субнормальным.

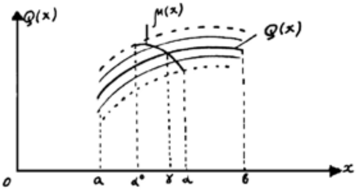


Рис. 1

Субнормальное мн. можно прб-ть к нормальному (нормализовать), разделив фк-ю принадлежности $\mu(x)$ этого мн-ва на $\sup\limits_{x \in X} \mu(x)$

Отметим, что фк. принадлежит $\mu(x)$ может совпадать с одной из элр-ых фк-й (или их нек-ой комбинацией), т.е. базисной системой:

$$H^0 = \{x, x^a, a^x\ (x > 0),\ \lg_a x (a > 0),\ \sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,$$

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \mathrm{arc}\,tgx,\ \mathrm{arc}\,ctgx,\ const\}.$$

Рас-им различные возможные случаи стн-ия (2).

1*. Если $G(x) = \left|\alpha - \alpha^0\right| = 0$, то $\mu(x) = 1 = const$ и стн-ие (2) переходит в (1), т.к. здесь задавать $G(x)$ и $\mu(x)$ нет нх-сти, т.е.

$$N = \{x; Q(x), 0, 1\} \Rightarrow M = \{x : Q(x)\}.$$

В этом случае над мн-ми M_1 и M_2 вводятся известные операции: $\bigcup$ – объединение, $\setminus$ – разность (в част., $\overline{M_2}$ – дополнение, Δ – симметрическая разность) и $\bigcap$ – пересечение с использованием логических знаков $\vee$ – дизъюнкции (или), $\wedge$ – конъюнкции (и):

$$M_1 \bigcup M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ или } x \in M_2\} = \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}, \tag{3}$$

$$M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_2 \text{ и } x \bar{\in} M_2\} = \{x : x \in M_1 \wedge x \bar{\in} M_2\}, \tag{4}$$

$$S \setminus M_2 = CM_2 = C_S M_2 = M_2^{'} = \overline{M_2} = \{x : \in S \wedge x \bar{\in} M_2\}, \tag{5}$$

$$M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \bigcup (M_2 \setminus M_1) = \{x : (x \in M_1 \wedge x \bar{\in} M_2) \vee (x \in M_2 \wedge x \bar{\in} M_1)\}, \tag{6}$$

$$M_1 \bigcap M_2 = \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}. \tag{7}$$

Здесь M_1, $M_2 \subset S$, где S – универсальное мн.

Использование мн-ва M на практике обычно сводится к нахождению ее вектора, опт-го в опр-ом смысле. Н-р, рас-им задачу МП:

$$Z = \max \varphi(x), \tag{8}$$

$$f_i(x) \le b_i, i = \overline{1, m}, \tag{9}$$

$$x \ge 0, \tag{10}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ – n-мерный вектор, а $\varphi(x)$ и $\{f_i(x)\}$ – скалярные фк-и, на к-ых в конкретных случаях накладываются дпн-ые условия.

Если обз-им через $M = \left\{ x : x \geq 0, f_i(x) \leq b_i, i = \overline{1,m} \right\}$, то задача (8)–(10) сводится к нахождению опт-го вектора $x \in M$:

$$Z = \max \varphi\left(x\right),$$

$$x \in M \tag{11}$$

Решение задачи (11) находится точно или прж-но с помощью известных методов или весового метода [97, 102] в ств-и с оценкой исходных параметров задачи.

2^*. Пусть в стн. (2) $\mu(x)$ и $G_i(x)$ заданы, причем $i = 1$ и x – одномерная. В качестве примера рас-им нечеткое мн., описываемые понятиями «молодой» и «старый» с границей [0, 100], с фк-ей предпочтительности $a\left(1 - \sin\dfrac{x}{l}\right)$. Тогда в стн. $N = \left\{x : Q(x), G(x), \mu(x)\right\}$ означают $Q(x) = \{$молодой, старый$\}$, $\mu(x) = c\left(1 - \sin\dfrac{x}{l}\right)$, $G(x) = \left[\alpha^0, \alpha\right] = \left[0, 100\right]$ совпадает с обл-ю $\left[a, b\right] = \left[0, l\pi\right]$ эх. На рис. 2 приведен график мн-ва N при $c = 2$, $l = 32$.

Ясно, что график мн-ва N можно улучшить в желаемом направлении с помощью изменения параметров c, l, α^0, α и подбора комбинаций из др. элр-ых фк-й H^0.

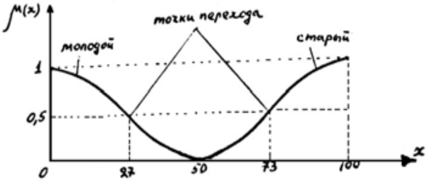


Рис. 2

2^0. Основные операции над нечеткими множествами. Операции (н-р, объединение и пересечение) над нечеткими мн. опр-ся различными способами. Причем из операций нечетких мн-в должны вытекать операции (3)–(7), как частные случаи ввиду того, что $M \subset N$. Поэтому вопрос состоит в опр-и фк-й принадлежности этих операций.

Пусть N и E – нечеткие мн. В X (X – универсальное нечеткое мн.), а $\mu_N(x)$ и $\mu_E(x)$ – их фк-и принадлежности ств-но.

Говорят, что E содержит в себе N (т.е. $N \subset E$), если $\forall x \in X$. ($\forall$ – квантор общности) выполнено нерав-во $\mu_N(x) \leq \mu_E(x)$.

Мн-ва N и E совпадают (экв-ны), если $\mu_N(x) = \mu_E(x)$, $\forall x \in X$.

Фк-я принадлежности для объединения $N \bigcup E$ опр-ся как

$$\mu_{N \bigcup E}(x) = \max\left\{\mu_N(x), \mu_E(x)\right\}, \qquad x \in X,$$

или

$$\mu_{N \bigcup E}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\mathrm{N}}(x) + \mu_E(x) \geq 1, \\ \mu_{\mathrm{N}}(x) + \mu_E(x) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

для пересечения $N \bigcap E$:

$$\mu_{N \bigcap E}(x) = \min\{\mu_N(x), \mu_E(x)\}, \qquad x \in X,$$

или

$$\mu_{N \bigcap E}(x) = \mu_N(x) \cdot \mu_E(x).$$

Для дополнения $\overline{N}$ нечеткого мн. N в X опр-ся

$$\mu_{\overline{N}}(x) = 1 - \mu_N(x), \qquad x \in X,$$

причем, в общем случае, здесь $N \bigcap \overline{N} \neq \varnothing$.

Для разности $N \setminus E$ фк-я принадлежности имеет вид

$$\mu_{N \setminus E}(x) = \begin{cases} \mu_N(x) - \mu_E(x), & \text{если } \mu_N(x) \geq \mu_E(x), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что для указанных операций фк-и принадлежности могут иметь и др. виды. Кроме того, имеются и др. операции, к-ые относятся только к N .

Выпуклой комбинацией нечетких мн-в $N_1, N_2, ..., N_K$ в X наз. нечеткое мн. N с фк-ей принадлежности вида

$$\mu_N(x) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mu_i(x),$$

где $\lambda_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,k},\ \ \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1.$

Выпуклые комбинации могут применяться, н-р, в задачах принятия решений с несколькими нечеткими огр-ми.

Операции концентрирования (CON) и растяжения (DIL) нечеткого мн. N опр-ся

$$CON\ N = N^2,\ \ DIL\ N = N^{0,5},$$

где $\mu_{N^\alpha}(x) = \mu_N^\alpha(x),\ \ x \in X,\ \ \alpha > 0.$

Применение операции концентрирования означает уменьшение «нечеткости» мн-ва, н-р, в связи с поступлением новой информации о данном мн-ве. Аналогично, операция растяжения может применяться для мдв-ия ситуаций, связанных с потерей информации.

3^0. Нечеткое множество является основой анализа сложных систем. Теория нечетких мн-в яв-ся основой сложных систем, встречающихся повседневно в жизни, производстве и природе. Процессы и явления, протекаемые в сложных системах, настолько сложны и неопределенны, что стн. (2) выражает самое простое из них. Обычно на практике оказываются неизвестными $G_i(x)$ и $\mu(x)$, к-ые в нек-ых случаях неизвестны с $Q(x)$.

Такая сложность систем в практических задачах возникают в силу сд-их причин:

1) многоцелевостью системы;

2) многоэкстремальностью;

3) большой размерностью;

4) неопределенностью (нечеткостью) параметров;

5) смешанностью параметров: часть пер-ых – обычные, часть – лнгв-ие. В свою очередь каждый из них могут быть непр-ми или дк-ми.

6) сложной взаимосвязанностью параметров (н-р, нелин-ю огр-й и фк. цели);

7) область системы – нечеткое мн. может быть односвязной или многосвязной.

Естественно при анализе таких сложных систем (нечетких мн-в) речь может идти лишь о прж-ом описании (мдв-и) системы (мн-ва) и нахождении наилучшего вектора с точностью в ств-и мдв-ия или о нахождении хотя бы одного вектора системы (мн-ва), наилучшего лишь в нек-ом смысле без указания точности.

Конечно, здесь могут быть использованы самые различные методы мт-ки. Мы используем идею весового метода [97, 100]. Как при нахождении наилучшего вектора, так и при мдв-и (если это возможно). Причем мдв-ть будем на языке МП, к-ым ограничиваются разв-мые сложные системы (мн-ва).

4^0. Основные идеи весового метода. Исходные положения. Идея весового метода основывается на естественном предположении, что неизвестные параметры (в том числе лингвистические пер.) нечеткого мн-ва можно анализировать (выражать) через весовые фк-и, зависящие от критериев (устанавливаемых в зв-ти от исходных положений, цели и т.д. системы – мн-ва), хрк-щих эти параметры. Выражение параметров (н-р, пер-ой) через весовые фк-и дает возможность численно установить прч-ть каждого пер-го по сравнению с остальными и ранжировать их по прч-ти, что позволяет анализировать мн. (сложную систему) в целом. Дадим формальное описание сказанного.

Рас-им нек-ое нечеткое мн. N с векторами (эл-ми) $x^0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ с конечным (n) или беск-ым $(n=\infty)$ числом пер-ых $\left\{x_j^0\right\}$, каждая из к-ых обладает конечным набором критерий (св-в) $k=\left(k_1,...,k_m\right)$. Причем каждое св. k_i пер-ой x_j^0 может быть с помощью простой процедуры (н-р, обработкой экспертных оценок) L_i оценено числом $P_i\left(P_i\in\left[0,H_i\right]\right)$, выражающим объем (интенсивность или степень) этого св-ва.

Пер. x_j^0 наз. предпочтительной (хорошей) по сравнению с остальными, если для нее все св-ва принимают нб-шие значения из возможных, т.е. $P_i=H_i,\ i=\overline{1,m}.$ В част., если для x_τ^0 имеет место $P_i=0,\ i=\overline{1,m}$, то эл. x_τ^0 будет самым не предпочтительным (плохим).

Ясно, что при хрк-ке пер-ой x_j^0 по прч-ти разнообразные св-ва P_i вносят в нее разный вклад. Поэтому св-ва $\left\{P_i\right\}$ целесообразно разделить на сущ-ные и несущ-ные.

Св. P_i наз сущ-ным, если без учета этого св-ва невозможно охарактеризовать (классифицировать) по прч-ти пер-ые x_j^0 вектора $x^0 \in N$. Если такую хрк-ку можно производить без учета этого св-ва, то P_i наз. несущ-ым св-ом.

Пусть из заданных m св-ва $\{P_i\}$ выбрано s сущ-ых св-в $P = \{P_1, P_2, ..., P_S\}$, $s << m$, тогда всегда можно построить такую весовую фк. β_j^0 [97], к-ая совместно учитывает все св-ва и численно выражает предпочтительность пер-ой x_j^0 :

$$\beta_j^0 = \beta_j^0\left(P_1, P_2, ..., P_S\right). \tag{12}$$

Отличие весовой фк-и от обычной состоит в том, что в выражении $f(x)$ символ f расв-ся как пер-ая, а x – как фиксированная вел.

Из совокупности чисел $\left\{\beta_j^0\right\}$ образуем неубывающую посл-ть

$$\beta = \left\{\beta_j\right\} = \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right), \tag{13}$$

где $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$.

Ств-но посл-ти (13) упорядочим пер-ые x_j^0 вектора $x^0 \in N$ и получим уп-ый вектор

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \tag{14}$$

наз-мое уп-ым мн-ом.

Нашей задачей яв-ся найти такой опт-ый вектор x мн-ва N, у к-го пер-ые x_j принимают нб-ие значение в ств-и своим весовым фк-ям β_j

Группируем пер-ые (начиная с первого) вектора (14) по ℓ пер-ых в каждом, из к-ых образуем непересекающиеся подвектора

$$x^r = \left(x_{(r-1)\ell+1}, x_{(r-1)\ell+2}, ..., x_{r\ell}\right), \quad r = \overline{1, R}, \tag{15}$$

где $(R-1)\ell < n \leq R\ell$. Отсюда следует, что последний подвектор может содержать меньше, чем ℓ пер-ых.

Сформулируем так наз-мый закон предпочтительности (прч.):

Каким бы простым по своей структуре не были процедуры оценки $\{L_i\}$ и весовые фк. $\left\{\beta_j^0\right\}$, всегда можно найти такое ℓ, когда подвектор $x^r = \left(x_1, x_2, ..., x_\ell\right)$, $r = 1$ будет прч-е по сравнению с остальными подвекторами:

$$x^r = \left(x_{(r-1)\ell+1}, x_{(r-1)\ell+2}, ..., x_{r\ell}\right), \ r = \overline{2, R},$$

а x^2 прч-е, чем x^r, $r = \overline{3, R}$ и т.д.

Если процедура оценки $L_i\left(i = \overline{1, S}\right)$ выбрана опт-но и дальнейшее ее уточнение невозможно, а весовая фк. $\beta_j^0\left(j = \overline{1, n}\right)$ объективно (опт-но) отражает связь между св-ми $\{P_i\}$ и дальнейшее ее уточнение также невозможно, то так называемый закон прч-ти справедлив и при

$$\lim_{\ell \to 1} x^r = \lim_{\ell \to 1} \left(x_{(r-1)\ell+1}, x_{(r-1)\ell+2}, \dots, x_{r\ell} \right) = x_r, \ \mathrm{r} = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Приведем несколько замечаний отс-но закона прч-ти.

зм1. Закон прч-ти предполагает беспристрастное отн-ие к каждой пер-ой вектора расв-го мн-ва при фиксировании числа P_i с помощью процедуры L_i. Н-р, при приеме в вуз $[100]$ контингент студентов формируется (на основе выделения «хороших» абитуриентов из числа подавших заявлений в вуз о поступлении) с помощью процедуры (машинного экзамена), реализуемого только с помощью ЭВМ без вмешательства человека. Только тогда даже с помощью простых по структуре процедур $\{L_i\}$ и весовых фк-й $\{\beta_j^0\}$ в итоге правильно будет установлена прч-ть пер-ых вектора отн-но друг друга, а по группам пер-ых тем более. Так в указанном примере вектор x делится лишь на два под вектора: x^1 – принятых в вуз, x^2 – не принятых.

зм2. Закон прч-ти выражает такое качество расв-ой системы (мн-ва) N, когда при правильном выборе сущ-ых св-в $\{P_i\}$ пер-ых $\{x_j\}$ векторов $x \in N$ всегда можно выбрать весовую фк. β_j^0 (т.е она сущ-ет), совместно учитывающую эти св-ва и численно выражающую прч-ть x_j по сравнению с остальными пер-ми, тем более это верно для совокупности пер-ых.

На основе каких соображений выделить сущ-ные св-ва (критерии) изучаемой системы (мн-ва)? Этот вопрос затрагивает методологию изучения и анализа расв-ой системы, от к-ой зависит сам подход исследования, а также выбор метода в достижении поставленной цели.

Основой этого, как нам кажется, яв-ся выделение и четкая формулировка основных (исходных) положений (принципов) изучаемой системы, к-ые обз-им через $\Pi = \{\Pi_\tau\}, \quad \tau = \overline{1,T}$.

Ясно, что суть и кол-во $\{\Pi_\tau\}$ зависит от расв-го класса сложной системы, т.е в зв-сти от выделения конкретной сложной системы и положения $\{\Pi_\tau\}$ может конкретизироваться и уточняться.

Сформулируем исходные положения в самом общем виде для изучения нечетких мн-в N, т.е сложных систем вообще.

П₁. Принимаемые значения U_j лнгв. пер-ых x_j (сд-но, и нечеткое мн. N) могут быть описаны при помощи ств-их чисел V_j, т.е. $U_j \leftrightarrow V_j$.

П₂. Нечеткое мн. N может быть изучено с помощью прж-ых мт-их методов с точностью, ств-ей точности выбора и описания (модели) исходных параметров мн-ва и широкого привлечения экспертных оценок в различных этапах при анализе расв-го мн-ва или ств-ей сложной системы.

Допущение здесь двух крайностей (невозможность сведения лнгв. пер-ых к числам, сд-но, невозможность изучения нечетких мн-в с помощью мт-их методов или, наоборот, возможность изучения нечетких мн-в только с помощью мт-их методов) не только неправильно, но и вредно. Т.е. нек-ые лнгв. пер-ые (молодость, холодно, высота, работоспособность и т.д.) можно свести к числовым выражениям, а другие (ритмичность в смысле 7^0 : 6.3, совесть, доброжелательность и т.д.) несводимы к числовым выражениям. Поэтому их ств-но назовем сводимыми и несводимыми лнгв. пер-ми. Сводимые лнгв. пер-ые учитываются в моделях сложных систем через числовые шкалы как обычные пер-ые. А несводимые лнгв. пер-ые в моделях могут учитываться через опр-ые периоды отрезков времени (н-р, недельные и суточные биоритмы студентов (отражающие их работоспособность) при составлении модели расписаний учебных занятий); или по рекомендации, изложенной в 7^0 : 6.3 через включения в модель процедуры, позволяющей исключить несводимых лнгв. пер-ых из модели (н-р, исключение некомпонентных, недоброжелательных к простому народу административных чиновников; однако в этом случае придется их некомпетентность, недоброжелательность, корыстность оценить через модель (расв-ая ее как сложная система $[90,94]$), учитывающая мнение народа, экспертных данных, результаты работы за Δt лет и т.д.) и через др. способы учета несводимых лигв. пер-ых, если это возможно, н-р, введением ств-их шкал и принципа «коридор».

П3. Чем сложнее нечеткое мн. и ств. сложная система, тем меньше точность анализа мн-ва (сложной системы), т.е сложность и точность не совместимы.

П4. На практике любое нечеткое мн., сд-но, сложная система анализируется совместно с целью F действия при изучении мн-ва (системы). Если цель F меняется, то изменяется и выбор параметров системы, а также критерии, их хрк-мые, меняется даже план и метод исследования.

Нечеткое мн. N, снабженное целью F, становится экв-ой сложной системе. Поэтому в дальнейшем, говоря об одном из них, будем подразумевать и другое. Причем нельзя отождествлять цель F мн-ва N с целевой фк-ей $Z=\varphi(x_1,...,x_n)$ модели, т.е. F есть более общее понятие.

П5. Любая лнгв. пер. x_j вектора $x \in N$ может быть оценена и охарактеризована с помощью весовой фк-и β_j^0, к-ая совместно учитывает числовые значения $\{p_i^j\}$ набора критериев (св-в) $k^j=(k_1^j,...,k_s^j)=\{k_i^j\}$ $(j=\overline{1,n}, i=\overline{1,s})$, полученных на основе исходных положений $\{П_\tau\}$.

Отметим, что вышеприведенная методика изучения нечетких мн-в с помощью привлечения весовых фк-й и закона прч-ти при нахождении желаемого вектора x нечеткого мн. N основана именно на только что сформулированных исходных положениях $П_1 - П_5$. Причем формулировка исходных положений и основных критериев исследуемого объекта яв-ся одной из особенностей весового подхода, позволяющей дпн-но выявить особенности нечеткого мн-ва и тем самым анализировать ее, хотя многое о нем мы конкретно не знаем.

Заметим также, что введение весовых фк-й при изучении нечетких мн-в позволяет некоторые лнгв. пер-ых расв-ть как весовые фк-и, если они зависят от др. лнгв. пер-ых. Н-р, рас-им лнгв. пер-ую x_j – работоспособность, к-ая зависит от возраста человека, здоровья, образования, квалификации, производительности, заинтересованности в работе и т.д., хрк-щей работоспособность. Тогда весовая фк. $\beta_j^0 = \beta_j^0\left(p_1,...,p_s\right)$ хрк-ет x_j и яв-ся ее числовой оценкой.

При таком (весовом) подходе вопрос анализа нечетких мн-в (сложных систем) можно сформулировать в виде общей задачи, из к-ой вытекает частные задачи, ств-щие различным случаям стн-ия (2)

5^0. Постановка задач. Анализ нечетких мн-в N в зв-ти от поставленной цели F можно провести в различных аспектах. Поэтому сначала целесообразно сформулировать постановки задачи. В данном пункте приведем основные идеи, изложенном в [103].

Общая задача. Пусть некоторым образом задано или описано нечеткое мн. N с эл-ма (векторами) $x=\left(x_1,...,x_n\right)$. Пусть каждая пер. x_j хрк-ся некоторым набором критерий $k=\left(k_1,...,k_m\right)$, среди к-ых выделяются сущ-ные критерии $k=\left(k_1,...,k_s\right)$, $s << m$ со ств-ми числовыми значениями $p=\left(p_1,...,p_s\right)$ на основе исходных положений $\Pi=\left(\Pi_1,...,\Pi_\tau\right)$. И пусть сформулирована цель F нечеткого мн. N.

Требуется найти вектор $\bar{x}=\left(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n\right)$, близкий к опт. вектору $x^*=\left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ или из окрестности x^* с заданной точностью ξ.

При такой постановке задачи нечеткость пер-ых x_j вектора $x\in N$ отражается в критерии $\{p_i\}$, учитываемых совместно в весовой фк-и (12), к-ая хрк-ет и упорядочивает (уп-ет) пер-ые x_j и тем самым позволяет найти вектор $\bar{x}$, учитывая цель F задачи.

Отметим, что общая задача, сформулированная в таком виде, охватывает очень широкий класс, обладающий специфичными факторами, к-ые могут оказаться решающими при анализе конкретных систем. Поэтому целесообразно конкретизировать общую задачу на основе различных описаний нечеткого мн-ва, т.е продолжим рас-ие других случаев стн-ия (2)

3*. Пусть $Q(x)$ известно отс-но некоторых параметров, а $\mu(x)$ и $G(x)$ – нечеткие (некоторые параметры могут быть также нечеткими), причем система сложная в смысле 1)-7). В этом случае нам не обязательно знать все векторы (эл-ты) мн-ва N, а дт-но найти опт-ый вектор, в смысле цели F исследования.

Допустим, справедливы исходные положения $\Pi_1 - \Pi_5$ и они дпл-ны и уточнены в ств-и с этим случаем. Кроме того система допускает мдв-ие на языке МП. Тогда этот случай, исходя из общей задачи, можно сформулировать в виде:

Задачи Б. Пусть содержательно описано мн. N и задана ее цель F. Требуется на основе F и описания N сформулировать математическую модель (ММ) системы (мн-ва N) на основе критерий $\{k_i\}$, оцениваемые числами $\{p_i\}$, полученных из исходных положений $\{\Pi_\tau\}$ и найти вектор $\bar{x}$, близкий к опт-му.

Из формулировки задачи следует несколько этапов ее решения: выделяются параметры, уточняется описание (содержательно) системы, где отражены закономерности, хрк-ные для исследуемого процесса и конкретизирована цель системы; формулируется ряд исходных положений, к-ый яв-ся принципиальной основой изучения системы, где отражается суть системы, а также от исходных положений зависят все остальные этапы анализа системы; на основе исходных положений фиксируются критерии, хрк-щие параметры задачи и структуру модели.

Параметры оцениваются с помощью весовых фк-й от критерий. Пусть (как весовые фк-и) получили параметры задачи: коэф-ов

$a_{ij} = a_{ij}\left(p_1^a, ..., p_s^a\right)$ – огр-й, $c_j = c_j\left(p_1^c, ..., p_s^c\right)$ – целевой фк-и,

$b_i = b_i\left(p_1^b, ..., p_s^b\right)$ – свободных членов, $\alpha_j^0 = \alpha_j^0\left(p_1^\alpha, ..., p_s^\alpha\right)$ и

$\alpha_j = \alpha_j\left(p_1^\alpha, ..., p_s^\alpha\right)$ – границы пер-ых, $s_j = s_j\left(p_1^s, ..., p_s^s\right)$ – структура модели.

Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = \max \varphi(x_1, ..., x_n) \tag{17}$$

$$f_j(x_1, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1,m}, \tag{18}$$

$$\alpha_j^0 \le x_j \le \alpha_j, j = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Заметим, что модель (17)–(19) нечеткая в силу прж-ных опр-й ее параметров на основе весовых фк-й от нечетких критерий, хрк-щих нечеткие перые вектора $\mathrm{x} \in \mathrm{N}$, сд-но, нечеткое мн. N отражается в самой модели. Однако, несмотря на это, модель позволяет целенаправленно анализировать нечеткое мн-во и найти вектор $\bar{\mathrm{x}} \in \mathrm{N}$, близкий к опт. вектору x^*.

Исходя из задачи Б, на основе изложенной методики сформулированы и решены практические задачи: составление расписаний учебных занятий и семестровых экзаменов, распределение учебных нагрузок на кафедрах, к-ые рас-им в 7.3.

4*. Пусть $\mathrm{Q(x)}, \mu(\mathrm{x}), \mathrm{G_i(x)}$ – нечеткие (некоторые из них или часть их параметров могут быть даже неизвестными), ств-ая система – сложная. А нечеткое мн. N описано лишь содержательно и указана цель F исследования.

В этом случае мы не можем построить мт-ю модель сложной системы и речь здесь может идти лишь в нахождении хотя бы одного вектора мн-ва N, наилучшего лишь в нек-ом смысле без указания точности и в ств-и цели F. Здесь и используемый мт-й аппарат может быть неоднозначным и очень прж-ым, нечетким.

И в этом случае мы будем использовать весовые фк-и от критерий (нечетких), хрк-щих лнгв. пер-ые нечеткого мн. N. Исходя из этого и на основе общей задачи сложную систему сформулирует в сд-ем виде.

Задача В. Пусть некоторым образом (нечетко) содержательно описано нечеткое мн. N с указанием цели F исследования. Найти вектор $\bar{\mathrm{x}}$ мн-ва N, отвечающей цели и описанию N на основе весовой фк-и β_{j} от критерий $\{\mathrm{P_i}\}$, хрк-щих пер-го $\mathrm{x_j}$ вектора $\mathrm{x} \in \mathrm{N}$ и установленных исходя из основных положений $\{\Pi_\tau\}$.

В отличие от общей задачи здесь главную роль играет цель F задачи.

Задача решается в несколько этапов. Формируются исходные положения, на их основе фиксируются критерии, к-ые совместно учитываются в весовой фк-и $\overset{\circ}{\beta}_j$, хрк-щей лнгв. пер-ю x_j и тем самым позволяющей найти наилучший вектор $\bar{x} \in N$ в ств-и цели F.

Отметим, что задачу B нельзя назвать опт-ой в смысле задачи МП, здесь лишь целенаправленно анализируется нечеткое мн. с целью нахождения хотя бы одного наилучшего вектора $\bar{x} \in N$, на основе дпн-го изучения нечетного мн. с помощью весовых фк-й. При этом используются самые простые мт-ие обработки величин как, н-р, среднеариф-ие, среднечеом-ие и т. д.

С помощью задачи B сформулированы нек-ые проблемы и получены результаты, полезные на практике: к определению системы и ее сложности, количественная оценка эффективности и качества вузовского учебника математики и т. д. Их рас-им в 7.4.

Теперь рас-им сд-й случай.

5*. Пусть $Q(x)$ задано с помощью мт-их стн-й, $G(x)=0,\ \mu(x)=1.$ А цель F исследования совпадает с целевой фк-ей. Однако расв-ая система остается сложной и поэтому ее целесообразно изучать так же, как нечеткое мн. N.

В этом случае предполагается, что мт-ая модель системы сформулирована. Однако из-за указанных трудностей 1) – 7) решение задачи становится очень сложным, н-р, при преодолении ситуаций, связанных с многокритериальностью, многоэкстремальностью, большой размерностью, нелинейностью огр-й и целевой фк-и. И в этом случае мы будем использовать идею весового метода.

В данном случае задача сформулируется сд-им образом:

Задача А. Пусть дано нечеткое мн. N, связанное с оптз-ой задачей $Z = \max\limits_{x \in M} \varphi(x)$, где $M = \left\{x : x \geq 0, f_i(x) \leq b_i, i = \overline{1,m}\right\}$, $x = \left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right)$ при наличии сложностей (трудностей) $1)-7)$.

Требуется найти решение x^* (или, в крайнем случаи, вектор $\bar{x}$ из окрестности точки x^*) задачи с помощью весовой фк-и β_j от критерий $\{p_i\}$ (полученных из параметров задачи), установленных исходя из основных положений $\{\Pi_r\}$ общей задачи.

Задача А конкретизирована и решена для некоторых сложных случаев $1)-7)$, к-ые рас-ны в 7.2.

Исходя из вышеизложенного отметим, что весовой подход используется (в трех аспектах) как: анализ трудных понятий (задачи В), способ моделирования (задачи Б) и метод решения задач МП (задача А).

Т.о. Отличие весового подхода от других подходов к анализу нечеткого мн-ва состоит в сд-ем:

1) Вместо фк-и предпочтительности вводятся весовые фк-и.

2) Пер-ые нечеткого мн-ва выражаются числами из ств-ей шкалы для конкретного пер-го.

3) До построения модели нечеткого мн-ва предварительно формулируются исходные положения, из них выводятся основные критерии как параметры исходной системы. Выделение критерии в дальнейшем учитываются совместно для получения весовых фк-й, хрк-их систему в целом. Причем весовые фк., полученные в ств-и задачам A, B и С, позволяют найти их решения, исходя из постановки цели этих задач.

ЛЕКЦИЯ 25

7.2. ВЕСОВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1^0. Весовые функции и их основные свойства. При количественном анализе экнч-их и др. задач (т.е. задача A из 5^0: 7.1) зачастую невозможно найти прямое их решение из-за сложности и неопр-ти структуры и большой размерности этих задач. В таких случаях очень важно отыскать предварительную оценку прч-ти пер-ых. В этом пункте опр-ся весовые фк-и, используемые в качестве подобных оценок [92, 97]. Пусть дана задача МП в виде

$$Z = \max_{x \in M} \varphi(x), \tag{1}$$

где $M = \left\{ x : x \geq 0, f_i(x) \leq b_i,\ i = \overline{1,m} \right\}$, $x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$. Причем $\varphi(x)$, $\{f_i(x)\}$ как фк-и многих пер-ых составляются из комбинаций фк-и базисной системы:

$$H^0 = \left\{ x_j \pm x_k,\ x_j x_k,\ x_j / x_k,\ x_j^a,\ a^{x_j} (a > 0),\ \lg_a x_j (a > 0),\ \sin x_j,\ \cos x_j,\right.$$
$$\left. tgx_j,\ ctgx_j,\ \arcsin x_j,\ \arccos x_j,\ arctgx_j,\ arcctgx_j,\ const \ \right\},$$

Для любых векторов $x^k, x^q \in M$ будем считать, что пер. x^k более прчна, чем x^q и обз-им $x^k \overset{прч}{\geq} x^q$ (или $x^k \geq x^q$ в прч-ом смысле), если

$$\varphi(x^k) \geq \varphi(x^q) \tag{2}$$

В част., вектор $\overline{x}^k \in M$ наз. локально-опт. точкой, если $\varphi(\overline{x}^k) > \varphi(x^k)$ для любого вектора $x^k \in M$ окрестности точки $\overline{x}^k$. Вектор $\overline{x} \in M$ наз. глобально-опт. точкой, если $\varphi(\overline{x}) = \max\limits_k \varphi(\overline{x}^k)$.

Отметим, что если фк-и в мн. M заданы в виде $f_i(x) = b_i$ или $f_i(x) \geq b_i$, то они легко приводятся к виду $f_i(x) \leq b_i$. Более того из огр-й $x_j \geq 0$ можно перейти к огр-ю $0 \leq x_j \in [\alpha_j^0, \alpha_j] = \alpha^j$, а из отц-ых коэф-ов при фк-й базисной системы (входящих в $\varphi(x), \{f_i(x)\}$) можно перейти к плж-ым коэф-ам, как будет показано далее. При этом структуру фк-й $\varphi(x), \{f_i(x)\}$, связанной с пер. x_j, обз-им через S^j.

Так заданное (набором числовых св-в) мн. M отнесем к случаю A_1. В общем случае A_2 мн. M и функционал (фнц.) $\varphi(x)$ не задаются явно, а лишь отс-но векторов $x \in M$ хрк-ся описательными св-ми. Случай A_2 более неопр-ый, чем A_1.

Рас-им мн. E, эл-ты к-го есть фиксированные неупорядоченные (неуп.) наборы числовых или описательных св-в, хрк-щих компоненты $\{x_j\}$ вектора $x \in M$. Обз-им их через $\left\{ a_{ij}, b_i, c_j, \alpha^j, s^j \right\} = C \in E$.

Если мн. M задано случаем A_1, то $C \in E$ яв-ся набором числовых св-в, где a_{ij}, c_j – коэф-ты ств-их пер-ых или фк-й базисной системы.

Если же мн. M задано случаем A_2, то $C \in E$ есть набор описательных св-в. Они могут обз-ть различные критерии, специальные требования к оптз-мой системе, описания нек-го технологического процесса и т. д. В этом случае фнц. $\varphi(x)$ задается тоже с помощью описательных св-в. В принципе описательные св-ва можно прб-ть в наборы чисел (как в 5°:7.1), поэтому и здесь эл-ты $C \in E$ рас-им как неуп-ые наборы чисел.

Пусть на основе эл-ов мн-ва E требуется охарактеризовать и сравнить между собой компоненты x_j вектора $x \in M$, чтобы найти опр-ый вектор (н-р, в смысле решения задачи (1)) этого мн-ва. Исходя из такой постановки проблемы, получим конкретные опр-ия.

о1. Компоненты x_j вектора $x \in M$ наз. весовой фк-ей β_j набора чисел $C \in E,$ если каждому набору $\left\{a_{ij}, b_i, c_j, \alpha^j, S^j\right\} = C$ по опр. закону или правилу ставится в ств-ие опр. значение x_i :

$$x_j \doteq \beta^j(C),\ j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Вопреки классической традиции здесь в выражении $f(x)$ символ f расв-ем как пер-ую, а x – как фиксированную вел.

Конкретно β_j строится исходя из практических целей и имеет различные формы. Н-р, для нахождения прж-го, близкого к опт-му решения задачи булевого пргв-ия [97] можно рекомендовать форму

$$x_j \doteq \beta^j(C) = c_j / \max_i \frac{a_{ij}}{b_i} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}}{b_i},\ j = \overline{1,n}. \tag{3$'$}$$

Из стн-ия (3) образуем невозрастающую (невзр.) посл-ть

$$\begin{gathered}\beta_0 = \left(\beta_0^1,\ \beta_0^2,\ \ldots,\ \beta_0^n\right),\\ где\ \beta_0^1 \geq \beta_0^2 \geq \ldots \geq \beta_0^n\end{gathered} \tag{4}$$

о2. Невозр-ая посл. β_0 наз. упорядоченной (уп.) весовой фк-ей вектора $x \in M$, порядок расположения пер-ых x_j к-го находится в ств-и с весовыми фк β_0^j стн-ия (4).

Такое расположение пер-ых x_j позволяет установить их очередность при проверке огр-й задачи (1) и тем самым найти конкретный (желательный) вектор.

Из посл-ти (4) образуем посл-ть

$$\beta_1 = \left(\beta_1^1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^n\right), \tag{5}$$

$$где\ \beta_1^1 \geq \beta_1^2 \geq \ldots \geq \beta_1^n,\ \beta_1^{\mathrm{j}} = (\beta_0^j)^2 / \left[\left(\beta_0^1\right)^2 + \left(\beta_0^2\right)^2 + \ldots + \left(\beta_0^n\right)^2\right],\quad \sum_{j=1}^{n} \beta_1^j = 1.$$

Н-р, для $\beta_0 = (4,\ 3)$ получим $\beta_1 = \left(\frac{16}{25},\ \frac{9}{25}\right).$

о3. Весовая фк. (5) наз. нормированной весовой фк-ей, относящейся к вектору $x \in M$, причем

$$0 \le \beta_1^j \le 1,\ j = \overline{1,n} \tag{6}$$

Заметим, что из $x \in [a,\ b]$ можно перейти к $y \in [0,\ 1]$ по фм. $y = \dfrac{x-a}{b-a}$. Затем заменяя у снова на х, получим $x \in [0,\ 1]$. Тогда в ств. (6) из огр. $x_j \in [\alpha_j^0, \alpha_j] = \alpha^j$ $(где\ \ 0 \le \alpha_j^0 < \alpha_j)$ можно получить

$$0 \le x_j \le 1,\ \ j = \overline{1,n} \tag{7}$$

Весовые фк-и обладают сд. св-ми.

с1. Весовая фк. β^j, найденная по стн-ю (3) и ств-ся компоненту x_j вектора $x \in M$, яв-ся в опр-ом смысле лишь числовой оценкой предпочтительности (прч.) одного компонента вектора, перед др-ми. Это стн. не означает, что x_j равен или прж-но равен β^j и не выражает их фнц-ой зв-ти, поэтому употребляем знак $\doteq$

с2. Весовая фк. β^j как бы указывает на потенциальную возможность x_j принимать как можно большие значения по сравнению с др. компонентами, индекс к-ых меньше j. Н-р, если $\beta^j > \beta^k$, то это означает, что x_j в расв-ом процессе более прч-ен, чем $x_к$. Но отсюда не следует, что $x_j > x_k$ в обычном смысле. Поэтому обз-им в виде $x_j \overset{прч}{>} x_k$ (или $x_i > x_к$, добавляя слово «в прч-ом смысле»).

с3. Если векторы x^1, x^2, x^3, … ств-щие очередности $(\beta_1^\circ, \beta_2^\circ, ..., \beta_n^\circ)$, $(\beta_2^0,\ \beta_3^0,\ ...\ ,\ \beta_n^0,\ \beta_1^0)$, $(\beta_3^0,\ ...\ ,\ \beta_n^0,\ \beta_1^0,\ \beta_2^0)$, ... получены при проверке огр-й задачи (1), то $\varphi\ (x^1)\ \ge\ \varphi\ (x^2)\ \ge\ \varphi\ (x^3) \ge \ldots$ Отсюда и по (2) следует, что $x^1 \ge x^2 \ge x^3 \ge\ \ldots$ в прч-ом смысле.

с4. От нормирования пер-ых x_j вектора $x \in M$ и компонентов β_j весовой фк. β^1 инвариантность опр-ия весовой фк. не нарушается, т.е. для компонентов, уд-щих нерав-ам (6) и (7), также имеет место (3).

с5. Нормированная весовая фк., ств-щая нормированному вектору, яв-ся псевдоасимптотой, понимаемый в смысле

$$\beta^1 - x^1 = \min_k(\beta^1 - x^k),\ \ 1 \le k \le n$$

с6. Числовые значения компонентов x_j вектора $x \in M$ при проверке огр-й задачи (1) в ств-и с (5) или (4) тем ближе к нулю, чем индекс j ближе к n , и при этом лишь немногие x_j могут отличаться от нуля. Это дает возможность разделить компоненты x_j вектора $x \in M$ на существенные (сущ.) и несущ-ные и тем самым избежать трудностей, связанных с размерностью задачи.

2^0. Исходные положения и основные критерии для построения весовой функции. Для удобства изложения сначала рас-им простой (лин-ой) вириант задачи (1), записанный в виде:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8}$$

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \tag{9}$$

$$0 \le x_j \le 1,\ j = \overline{1,n} \tag{10}$$

Пусть $c_j > 0,\ a_{ij} > 0,\ b_i > 0\ \ (j = \overline{1,n},\ \ i = \overline{1,m})$. Вместо (9) возьмем

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \le 1, \quad i = \overline{1,m} \tag{9$'$}$$

где $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{b_i}\ \ (j = \overline{1,n},\ \ i = \overline{1,m})$. И пусть требуется построить весовые фк. $\left\{\beta^j\right\}$ пер-ых x_j задачи (8)–(10) на основе формулировки исходных положений, справедливость к-ых очевидна или вытекает из интуитивных соображений. Рас-им коэф-ы задачи как критерии $k^j = (a_{ij}, b_i, c_j)$ и сформулируем исходные положения, позволяющие (шаг за шагом) совместно учитывать критерии и построить весовые фк.

П$_1$. Если коэф-ы матрицы огр-й задачи (8)–(10) постоянные (пост.) н-р, все $a_{ij} = 1$, то вместо весовых фк-й можно взять уб-ю посл-ть

$$\left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right) = \left(c_1,\ c_2,\ \dots, c_n\right) \tag{11}$$

где $\mathrm{c}_1 \ge c_2 \ge \dots \ge c_n$

П$_2$. Если коэф-ы целевой фк. и матрицы огр-й (по столбцам) пст-ны, н-р, $\left\{c_j\right\} = 1, \quad \left\{a^1_{ij}\right\} = \lambda_j$, то вместо весовых фк-й можно взять взр-ю посл-ть любой строки (н-р, первой) матрицы огр-й:

$$\left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right) = \left(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n\right) \tag{12$'$}$$

где $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$

Если эл-ты столбца матрицы огр-й различаются лишь на малые вел-ы, то вместо (12^1) аналогичным образом можно построить

$$\left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} a'_{i1},\ \sum_{i=1}^{m} a'_{i2},\ \dots,\ \sum_{i=1}^{m} a'_{in}\right), \tag{12}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{m} a'_{i1} \le \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{i2} \le \dots \le \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{in}$. Причем $(12')$ следует из (12), т.к. $\lambda_j = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_j$.

П$_3$. Если коэф-ы целевой фк. и все эл-ты матрицы огр-й пст-ны, кроме одного эл-та каждого столбца, к-ый намного больше пст-ых эл-ов (н-р, $\{c_j\} = 1,\ \{a^1_{ij}\} = 1,\ i \neq k,\ a^1_{kj} = \gamma_j$), то в качестве весовых фк-й можно взять взр-ю посл-ть, составленную из непст-ых эл-ов каждого столбца:

$$\left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right) = \left(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_n\right), \qquad (13^1)$$

где $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n$

Если же в каждом столбце матрицы огр-й больше одного эл-та, отличающегося от пст-ых эл-ов на большие вел-ы, то в качестве весовых фк-й можно взять

$$\left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right) = \left(\max_i a^1_{i1},\ \max_i a^1_{i2},\ \dots,\ \max_i a^1_{in}\right) \qquad (13)$$

где $\max\limits_i a^1_{i1} \leq \max\limits_i a^1_{i2} \leq \ldots \leq \max\limits_i a^1_{in}$

Ясно, что (13^1) следует из (13) как частный случай при $\max\limits_i a^1_{ij} = \gamma_j,\ j = \overline{1,n}$.

Стн-ия (11), (12) и (13) назовем весами, ств-им исходным положением П$_1$, П$_2$ и П$_3$.

Очевидно, что в общем случае, когда $\{a'_{ij}\},\ \{c_j\}$ – любые, то для нахождения весовых фк-й нх-мо каким-то способом совместно учесть все стн-ия (11), (12) и (13). Такие способы могут быть различными. Приведем наиболее эффективный из них, к-ый в свою очередь яв-ся исходным положением.

П$_4$. Если коэф-ы $\{a^1_{ij}\},\ \{c_j\}$ – любые, то в качестве весовых фк-й пер-ых x_j задачи (8)–(10) можно взять посл-ть, составленную из вел-н, прямо пропорциональных (прц.) вел-ам стн-ия (11) и обратно прц-ых вел-ам стн-й (12) и (13):

$$\beta_0^j = c_j / \max_i a^1_{ij} \sum_{i=1}^{m} a^1_{ij},\ j = \overline{1,n} \qquad (14)$$

Отсюда, учитывая $a^1_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{b_i}$, для пер-ых задачи (8)–(10) получим

$$\beta_0^j = c_j / \max_i \frac{a_{ij}}{b_i} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}}{b_i},\ j = \overline{1,n}\ . \qquad (15)$$

Из найденных т.о. чисел $\{\beta_0^i\}$, построив уб-ю посл-ть, получим

$$\beta = \left(\beta^1,\ \beta^2,\ \dots,\ \beta^n\right), \qquad (16)$$

где $\beta^1 \geq \beta^2 \geq \ldots \geq \beta^n$

Стн-ие (16) позволяет ранжировать пер-ые по прч-ти и, уд-ив условия задачи (8)–(10), найти ее прж. решение $\bar{x} = \left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \dots,\ \bar{x}_n\right)$, близкое к опт-му $x^* = \left(x^*_1,\ x^*_2,\ \dots,\ x^*\right)$. Такова цель нахождения весовых фк-й на основе исходных положений П$_1$–П$_4$.

зм1. Аналитически д-ть справедливость каждого из положений $П_1$–$П_4$ (как и всех эвристических методов) нельзя. Но и возражать против какого-либо исходного положения $П_i$ также невозможно, но совершенствовать можно. Поэтому сформулированные исходные положения $П_1$–$П_4$ можно считать вполне приемлемыми. Не исключена возможность появления новых положений как результат более глубокого изучения процессов, что не противоречит сути весового метода, а наоборот, подчеркивает его динамизм и гибкость.

зм2. Весовые фк-и могут иметь различные формы, как выше было сказано, н-р, вместо стн-ия (15) можно взять:

$$\beta_0^j = c_j / \sqrt{\min_i \frac{a_{ij}}{b_i} \max_i \frac{a_{ij}}{b_i} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}}{b_i}}, j = \overline{1,n}\,. \tag{17}$$

3^0. Нахождение весовой функции и решение задачи МП. Рас-им случай, когда коэф-ы a_{ij}, b_i, c_j – любые (плж., отц. и нек-ые нули), а огр-ие (10) задано в виде

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}\,. \tag{10^1}$$

В этом случае весовые функции находим в сд. порядке:

1. Из огр-й (9) находим $M = \max x_j$.

2. Введем новые пер. $x_j = My_j, j = \overline{1,n}$.

3. Освобождаемся от отц-ых коэф-ов a_{ij} и c_j, полагая $y_j = 1 - y_j^1$, для к-ых $a_{ij} < 0$ или $c_j < 0$.

4. Если $C_к$=0 при пер-ой y_k или y_k^1, то получаем $c_k = \xi$, где $\xi << \min c_j, j = \overline{1,n^1} \left(n \leq n^1\right)$.

5. Огр-ия (9) с новыми пер. делим ств-но на $\{b_i\}$, к-ые плж-ны в силу $\{a_{ij}\} \geq 0$.

Заметим, что выполнение пунктов (п.) 1–5 позволяет вычислить весовую фк. в виде (14), как и для простого случая (8)–(10).

6. Если задача МП задана в общем виде (1), то сначала (т.е. до п. 1) фк-и φ(x) и $\{f_i(x)\}$ напишем в виде фк-й базисной системы. В этом случае вместо нек-ых пер-ых x_j могут оказаться базисные фк-и, к-ые при нахождении весовых фк-й расв-ем как обычные пер., но при поиске решений задачи учитываем их как базисные фк-и. Тем самым в весовой фк-и будет учтено и структура S^j задачи.

Т.о. после осуществления пунктов 1–6 в весовой фк-и будет учтены все параметры задачи и получим весовую фк. (3). Причем параметры α^j, s^j, b_i учитываются в структуре весовой фк-и, а параметры a_{ij}, c_j учитываются в самой фм-е весовой фк-и, т.е. получим

$$\beta^j = c_j / \max_i a_{ij} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \ j = \overline{1,n'} \left(n \leq n'\right). \tag{18}$$

Теперь рас-им решение задачи МП. Поиск ее решения будем осуществлять по сд. шагам:

Шаг 1. Пусть для данной задачи МП выч-ны весовые фк-и по фм-е (18) (равносильной фм-ле ($3'$)), из к-ых, построив уб-ю посл-ть, получим стн (4). Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Из посл-ти (4) образуем нормированную посл-ть (5). Исходя из (4) нормирующую посл-ть (при нх-ти) образуем также для каждой пары весовых фк-ий, ств-их пер-ым y_j, $y_j' \in [0,1]$:

$$\beta_1 = \left(\beta_1{}^j,\ {}'\beta_1{}^j\right),\ j = \overline{1,n} \tag{19}$$

где $\beta_1^j + {}'\beta_1^j = 1$, $\beta_1^j = \left(\beta_0^j\right)^2 / \left[\left(\beta_0^j\right)^2 + \left({}'\beta_0^j\right)^2\right]$, ${}'\beta_1^{\mathrm{j}} = \left({}'\beta_0^j\right)^2 / \left[\left(\beta_0^{\mathrm{j}}\right)^2 + \left({}'\beta_0^{\mathrm{j}}\right)^2\right]$, $\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}$

зм3. Поскольку в прб-ой задаче пер-ые и весовые фк-и уд-ют условиям y_i, $y_j' \in [0,1]$ при $y_j+y_j'=1$ и β_1^j, ${}'\beta_1^j \in [0,1]$ при $\beta_1^j + {}'\beta_1^j = 1$, $\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}$, то при нахождении y_j и y_j' вместо их можно взять β_1^j и ${}'\beta_1^j$, допуская (при нх-ти) при этом нек-ое отклонение, н-р, можно взять $\beta_1^j + \varepsilon$ и ${}'\beta_1^{\mathrm{j}} - \varepsilon$ или $\beta_1^j - \varepsilon$ и ${}'\beta_1^{\mathrm{j}} + \varepsilon$, где ε допустимая точность решения задачи, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Подставляя прб-ым огр-ям β_1^j и ${}'\beta_1^j$, вместо y_j и y_j' $\left(j=\overline{1,n}\right)$ находим конкретные значения этих пер-ых, уд-ая этих огр-й. Причем не исключено, что нек-ые огр-ия могут быть не уд-ны в пределах нек-ой точности б. Это означает, что найденное решение $\{y_j, y_j'\}$ находится в окрестности опт-го решения $\{y_j^*, y_j^{*'}\}$, уд-го огр-ям или вне огр-й на расстоянии б. Если полученное решение с точностью б уд-ет поставленной цели, то решение получено и переходим к шагу 5. Если нет, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Используя любой итерационный метод (н-р, метод Гаусса-Зайделя) и взяв в качестве начальной точки $\{y_j, y_j'\}$, приближаемся к искомой опт. точке $\{y_j^*, y_j^{*'}\}$ до тех пор, пока не получим решение с допустимой точностью ε, уд-щей поставленной цели. Найденную точку принимаем за решение $\{y_j^*, y_j^{*'}\}$ задачи. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Находим старые пер. $\left\{x_j^*\right\} = M\left\{y_j^*\right\}$ и $\varphi_{\max} = \varphi\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*\right)$. Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Печатаем результаты $x = \left(x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*\right)$ и $\varphi_{\max} = \varphi\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*\right)$. Останов.

Демонстрируем выше сказанное с помощью сд-их примеров.

п1. $Z = \max\left(2x_1 + x_2\right)$,

$$\left.\begin{array}{l} (1)\, x_1 + x_2 \le 6 \\ (2)\, x_1 - x_2 \le 1 \\ (3)\, 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ (4)\, x_1 - 2x_2 \ge -8 \end{array}\right\}\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Р. Построив огр-ия (рис. 1), графически найдем $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $Z_{\max} = \frac{19}{2}$. Решим эту задачу весовым методом с помощью выше изложенных процедур.

$$y_j + y_j^{'} = 1,\ x_j = My_j,\ M = 6 \text{ (см. рис. 2).}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\, x_1 + x_2 \le 6 \\ (2)\, x_1 - x_2 \le 1 \\ (3)\, 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ (4)\, x_1 - 2x_2 \ge -8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -2x_1 - x_2 \le -6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6y_1 + 6y_2 \le 6 \\ 6y_1 - 6y_2 \le 1 \\ -12y_1 - 6y_2 \le -6 \\ -6y_1 + 12y_2 \le 8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lr} 6y_1 + 6y_2 & \le 6 \\ 6y_1 & +6y_2^{'} \le 7 \\ & 12y_1^{'} + 6y_2^{'} \le 12 \\ & 12y_2 + 6y_1^{'} \quad \le 14 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{lr} y_1 + y_2 & \le 1 \\ 6/7\, y_1 & +6/7\, y_2^{'} \le 1 \\ & y_1^{'} + 1/2\, y_2^{'} \le 1 \\ & 6/7\, y_2 + 3/7\, y_1^{'} \quad \le 1 \end{array}\right\}$$

Возьмем $Z = \max\left(12y_1 + 6y_2\right)$, полагая $c_k = \varepsilon = 0{,}1$, если $c_k = 0$. Найдем $\beta^j = c_j \Big/ \max\limits_i a_{ij} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$. $\beta^1 = \dfrac{12}{1 \cdot \frac{13}{7}} = 6{,}46$; $\beta^2 = \dfrac{6}{1 \cdot \frac{13}{7}} = 3{,}23$; $\beta^3 = \dfrac{0{,}1}{1 \cdot \frac{10}{7}} = 0{,}07$;

$\beta^4 = \dfrac{0{,}1}{\frac{6}{7} \cdot \frac{19}{14}} = 0{,}09$. Откуда получим невозр. посл-ть $\beta_0 = \left(\beta_0^1,\ \beta_0^2,\ \beta_0^4,\ \beta_0^3\right) =$ $= \left(6{,}46;\ 3{,}23;\ 0{,}09;\ 0{,}07\right)$. Из посл-ти β_0 получим нормированную невзр. посл-ть $\beta_1 = \left(\beta_1^1,\ \beta_1^2,\ \beta_1^4,\ \beta_1^3\right) = \left(0{,}7998;\ 0{,}1999;\ 0{,}0002;\ 0{,}0001\right)$

где $\beta_1^j = \left(\beta_0^j\right)^2 \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n^{'}} \left(\beta_0^j\right)^2$, $\sum\limits_{j=1}^{n^{'}} \beta_1^j = 1$ $\left(n^{'} \ge n\right)$.

Возьмем $\left.\begin{array}{l} y_1 = 0{,}8 \\ y_2 = 0{,}2 \end{array}\right|$ тогда $\left.\begin{array}{l} y_1^{'} = 0{,}2 \\ y_2^{'} = 0{,}8 \end{array}\right|$ или $\left.\begin{array}{l} x_1 = M \cdot y_1 = 4{,}8 \\ x_2 = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ Огр-ия (1), (3), (4) уд-ся. Огр-ие (2) не уд-ся.

Заметив, что $y_1 = y_2^{'} = 0{,}8$, проверяем (2) $\frac{6}{7}y_1 + \frac{6}{7}y_1 = 1 \Rightarrow \frac{12}{7}y_1 = 1$ $\Rightarrow y_1 = \frac{7}{12} = 0{,}58$ или $x_1 = 6 \cdot 0{,}58 = 3{,}5$, тогда $x_2 = 2{,}5$ в силу огр. (1). Теперь все огр-ия (1)–(4) выполняются. Получили решение $x_1^* = \frac{7}{2}$, $x_2^* = \frac{5}{2}$ и $Z_{\max} = \frac{19}{2}$, к-ое совпадает с решением, полученным графическим методом (рис. 1). Геом. интерпретация введения новой пер-ой $y_j + y_j^{'} = 1$, $x_j = My_j$ показано на рис. 2.

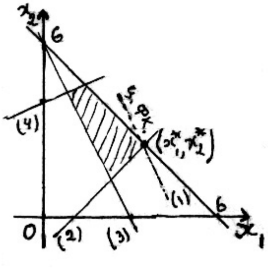


Рис. 1

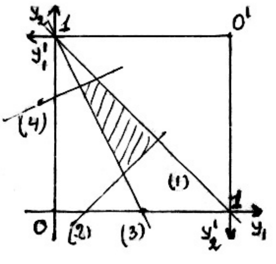


Рис. 2

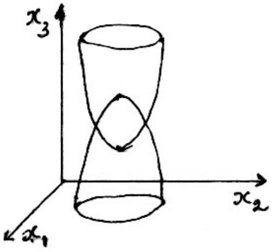


Рис. 3

зм4. Если задача решается на $\min Z = \varphi(x)$, то ее обращаем на $\max Z = -\varphi(x)$ и находим решение $Z_{\max} = -\varphi(x^*)$, а затем, поменяв знак, опр-ем $Z_{\min} = \varphi(x^*)$.

п2. Найти $\min Z = x_1 + x_2$ при огр-ях п1.

Р. Переходим к задаче $\max Z = -x_1 - x_2$ или $\max Z = -6y_1 - 6y_2$ при новых пер. $y_j + y_j^{'} = 1,\ x_j = My_j$, М=6. Отсюда $\max Z = 6y_1^{'} + 6y_2^{'} - 12$. Если Ск=0, то полагаем Ск=$\varepsilon = 0{,}1$, тогда $\max Z = 0{,}1y_1 + 0{,}1y_2 + 6y_1^{'} + 6y_2^{'} - 12$.

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \mathrm{x}_1 + x_2 \le 6 \\ (2)\ \mathrm{x}_1 - x_2 \le 1 \\ (3)\ 2\mathrm{x}_1 + x_2 \ge 6 \\ (4)\ \mathrm{x}_1 - 2x_2 \ge -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lr} y_1 + y_2 & \le 1 \\ {}^{6}\!/_{7}\,\mathrm{y}_1 \quad + \quad {}^{6}\!/_{7}\,\mathrm{y}_2^1 & \le 1 \\ y_1^1 + {}^{1}\!/_{2}\,y_2^1 & \le 1 \\ {}^{6}\!/_{7}\,y_2 + {}^{3}\!/_{7}\,y_1^1 & \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta^{\mathrm{j}} = \frac{c_j}{\max\limits_i\ \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}}:$$

$$\beta^1 = \frac{0{,}1}{1\cdot\frac{13}{7}} = 0{,}05;\ \beta^2 = \frac{0{,}1}{1\cdot\frac{13}{7}} = 0{,}05;\ \beta^3 = \frac{6}{1\cdot\frac{10}{7}} = 4{,}2;\ \beta^4 = \frac{6}{\frac{6}{7}\cdot\frac{19}{14}} = 5{,}16.$$

Отсюда имеем невозр. посл-ть $\beta_0 = (\beta^4, \beta^3, \beta^2, \beta^1)$=(5,16; 4,2; 0,5; 0,5). Из посл-ти β_0 образуем нормированную невозр. посл-ть $\beta_1 = (\beta_1^4, \beta_1^3, \beta_1^2, \beta_1^1) = (0{,}594;\ 0{,}394;\ 0{,}006;\ 0{,}006)$. То же находим по (19) для каждой пары $\left(\beta_1^4,\ \beta_1^2\right) = (0{,}991;\ 0{,}009)$, $\left(\beta_1^3,\ \beta_1^1\right) = (0{,}986;\ 0{,}014)$.

Выч-им $y_2^1 = \dfrac{0{,}594 + 0{,}991}{2} = 0{,}793 \approx 0{,}79;\ \mathrm{y}_1^1 = \dfrac{0{,}394 + 0{,}986}{2} = 0{,}689 \approx 0{,}69,$ что может еще измениться в зв-ти от y_2^1.

Полагаем $y_2^1 = 0,79$ и уд-ем огр.(3), содержащее пер-ых y_2^1 и y_1^1: : $y_1^1 + \frac{1}{2}\cdot 0,79 = 1 \Rightarrow y_1^1 = 0,61$. Тогда $y_1 = 1 - y_1^1 = 0,39$. Уд-ая огр.(2), получаем $\frac{6}{7}\cdot 0,39 + \frac{6}{7} y_2^1 = 1 \Rightarrow y_2^1 = 0,78$, тогда $\mathrm{y}_2 = 0,22$.

Все огр-ия (1)–(4) задачи выполняются. Решением задачи будет $x_1 = y_1 \cdot M = 0,39\cdot 6 = 2,34$, $\mathrm{x}_2 = 0,22\cdot 6 = 1,32$ *и* $\mathrm{Z}_{\max} = -2,34 - 1,32 = -3,66$, тогда $\mathrm{Z}_{\min} = 3,66$. Точное решение: $x_1 = \frac{7}{3} = 2{,}33...$, $x_2 = \frac{4}{3} = 1{,}33...$; $Z_{\min} = \frac{11}{3} = 3{,}66...$

п3 $\max Z = x_1 + x_2$

$$\left.\begin{aligned}&(x_1-1)^2+(x_2-2)^2-x_3\le -1\\&(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+x_3\le 3\end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$$

Р. Орг-я запишем через фк-и базисной системы, опр-им $м = \max x_j$, введем новые пер. $\{x_j\} = M\,\{y_j\}$ и освободимся от отц-ых коэф-ов.

$$\left\{\begin{aligned}&x_1^2-2x_1+1+x_2^2-4x_2+4-x_3\le -1\\&x_1^2-4x_1+4+x_2^2-2x_2+1+x_3\le 3\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&M=3\\&y_j+y_j^1\end{aligned}\right|\begin{aligned}&9y_1^2+9_2^2-6y_1-12y_2-3y_3\le -6\\&9y_1^2+9y_2^2-12y_1-6y_2+3y_3\le -2\end{aligned}\left|\Rightarrow\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&9y_1^2+9y_2^2+6y_1^1+12y_2^1+3y_3^1\le 15\\&9y_1^2+9y_2^2+12y_1^1+6y_2^1+3y_3\le 16\end{aligned}\right|\Rightarrow\begin{aligned}&\frac{3}{5}y_1^2+\frac{3}{5}y_2^2+\frac{2}{5}y_1^1+\frac{4}{5}y_2^1+\frac{1}{5}y_3^1\le 1\\&\frac{9}{16}y_1^2+\frac{9}{16}y_2^2+\frac{3}{16}y_3+\frac{3}{4}y_1^1+\frac{3}{8}y_2^1\le 1\end{aligned}$$

Полагая $C_к = E = 0{,}1$ при $C_к = 0$, возьмем $\max Z = 3y_1 + 3y_2 + 0{,}1y_3 + 0{,}1y_1^1 + 0{,}1y_2^1 + 0{,}1y_3^1$ и найдем весовые фк-и, ств-им этим пер-ым.

$$\beta^1 = \frac{3}{\frac{3}{5}\,\frac{93}{80}} = 4,3;\ \beta^2 = \frac{1}{10\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{16}} = 2,84;\ \beta^4 = \frac{1}{10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{23}{20}} = 0,12;$$

$$\beta^5 = \frac{1}{10\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{47}{40}} = 0,11;\ \beta^6 = \frac{1}{10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}} = 2,5$$

Откуда получим $\beta_0 = \left(\beta_0^1,\ \beta_0^2,\ \beta_0^3,\ \beta_0^6,\ \beta_0^4,\ \beta_0^5\right) = \left(4,3;\ 4{,}3;\ 2{,}84;\ 2{,}5;\ 0{,}12;\ 0{,}11\right)$

Из посл. β_0 получим нормальную невозр. посл-ть по (5), используя табл. 1

Т.к. $y_j,\ \mathrm{y}_\mathrm{j}^1 \in \left]0,1\right[,\ \beta_1^\mathrm{j} \in \left]0,1\right[$, то по результатам табл.1 вместо y_3 можно прж-но взять $y_3 = 0,56$ $\left(\text{тогда } \mathrm{y}_3^1 = 0,44\right)$, учитывая, что y_3 и y_3^1 в столбцах β_1 и $\left(\beta_1^\mathrm{j},\ \beta_1^{\mathrm{j}+3}\right)$ табл. 1 мало отличаются друг от друга; т.к. $\beta_0^2 = 0,99935 >$

$> 0{,}99924 = \beta_0^1$, то $\left(\text{взяв } \varepsilon{=}0{,}01\right)$ $\mathrm{y}_2 = \dfrac{0{,}36025 + 0{,}99935}{2} - 3\varepsilon = 0{,}6798 - 0{,}03 = 0{,}65$, откуда $y_2^1 = 0{,}35$; $\mathrm{y}_1 = \dfrac{0{,}36025 + 0{,}99924}{2} = 0{,}67975$, к-ое может измениться в зв-ти от y_3 и y_2 при проверке огр-й. Причем огр-ия можно проверить, переходя к старым пер: из $y_3 = 0{,}56$ и $\mathrm{y}_2 = 0{,}65$ следует $x_3 = 1{,}68$ и $\mathrm{x}_2 = 1{,}95$. Тогда $\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(1{,}95 - 2\right)^2 - 1{,}68 = -1 \Rightarrow \mathrm{x}_1 = 1{,}823$ и $\mathrm{x}_1 = 0{,}177$. Возьмем $x_1 = 1{,}823$, откуда $y_1 = 0{,}6$, тогда $y_1^1 = 0{,}4$. Проверим огр-ия с новыми пер-ми при $y_1 = 0{,}6$ и $\mathrm{y}_1^1 = 0{,}4$; $\mathrm{y}_2 = 0{,}65$, $\mathrm{y}_2^1 = 0{,}35$; $\mathrm{y}_3 = 0{,}56$, $\mathrm{y}_3^1 = 0{,}44$

$$\frac{3}{5}0{,}6^2 + \frac{3}{5}0{,}65^2 + \frac{2}{5}0{,}4 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}35 + \frac{1}{5}0{,}44 = 0{,}216 + 0{,}252 + 0{,}16 + 0{,}28 + 0{,}088 = 0{,}996 \le 1.$$

$$\frac{9}{16}\cdot 0{,}6^2 + \frac{3}{16}\cdot 0{,}65^2 + \frac{3}{16}\cdot 0{,}56 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}4 + \frac{3}{8}\cdot 0{,}35 = 0{,}2025 + 0{,}2363 + 0{,}105 + 0{,}3 + 0{,}131 = 0{,}975 \le 1.$$

Таблица 1

пер.	β_0	$зп_1\beta_0$	β_0^2	$\beta_1 = \beta_0^2 / 51{,}326$	$\left(\beta_1^j,\ \beta_1^{\mathrm{j+3}}\right)$
y_1	β_0^1	4,3	18,49	0,36025	0,99924
y_2	β_0^2	4,3	18,49	0,36025	0,99935
y_3	β_0^3	2,84	8,07	0,15723	0,56355
y_3'	β_0^6	2,5	6,25	0,12177	0,43645
y_1'	β_0^4	0,12	0,014	0,00027	0,00076
y_2'	β_0^5	0,11	0,012	0,00023	0,00065
			51,326	1,00000	1,00000

Итак, огр-ия уд-ся и нашли точку $\left(y_1,\ \mathrm{y}_2,\ \mathrm{y}_3\right) = \left(0{,}6;\ 0{,}65;\ 0{,}56\right)$ т.е. $x^* = \left(x_1^*,\ \mathrm{x}_2^*,\ \mathrm{x}_3^*\right) = \left(1{,}8;\ 1{,}95;\ 1{,}68\right)$ из окрестности опт-ой точки. Если точность уд-ет, то решение задачи найдено $Z_{\max} = 3{,}75$ при $x_1^* = 1{,}8$; $\mathrm{x}_2^* = 1{,}95$ и $\mathrm{x}_3^* = 1{,}68$. Если же точность не уд-ет, то точку $x^* = \left(1{,}8;\ 1{,}95;\ 1{,}68\right)$ уточняем до получения уд-го решения с помощью любого метода ВП, т.к. окрестность, в к-ой входит найденная точка x^*, образует выпуклое мн-во.

4^0. Весовой подход как ускорение сходимости симплекс-метода. Симплекс-метод яв-ся основным методом ЛП, самого разработанного раздела в МП. Однако сходимость симплекс-метода резко ухудшается с возрастанием размерности задач, к-ые часто встречаются на практике.

В данном пункте предлагается использование весового метода вместе с симплекс-методом для сущн-го ускорения его сходимости при решении больших задач. Такую комбинацию назовем симплексно-весовым методом.

Суть симплексно-весового метода состоит в предварительном нахождении весовых фк-й, оценивающих прч-ть пер-ых и возможности их ранжирования для включения в число базисных пер-ых. Это позволит в одной итерации включить в базис сразу совокупность прч-ых пер-ых, что равносильно движению к опт-ой вершине мгр-ка, минуя остальные его вершины. В этом и состоит отличие-преимущество симплексно-весового метода от симплекс-метода. Чтобы демонстрировать это преимущество приведем конкретный пример.

п4. $\max Z = \quad -x_2 + 3x_3 - 2x_4,$

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & +3x_2 & -x_3 + & 2x_4 & & \le \ 7 \\ -x_1 & -2x_2 & + \ 4x_3 & & -x_5 & \le \ 1 \\ & -4x_2 & +3x_3 & +8x_4 & +x_5 & \le 10 \end{array}\right\},$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

Р. Вводя дпн. пер-ые, сначала решим пример на табл. 2 симплекс-методом. В индексной строке табл. 2 нет отц. чисел, значит, процесс окончен. Т.о., решение задачи получено за 4 итерации: $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right) = \left(0,\ 4{,}5,\ 0,\ 11\right)$, $Z_{\max} = -1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 11 = 11.$

Теперь решим эту же задачу симплексно-высовым методом. Аналогично п1:3$^{\text{o}}$ задачу прб-ем и найдем весовые фк. $\left\{\beta_0^j\right\}$, выражающие прч-ти пер-ых $\left\{x_j\right\}$.

$$\max Z = -x_2 + 3x_3 - 2x_4. \quad \mathrm{M} = \max x_j = 10, \quad x_j = 10y_j \Rightarrow \max Z = -10y_2 + 30y_3 - 20y_4$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\, x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le 7 \\ (2) - x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_5 \le 1 \\ (3) - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 + x_5 \le 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10y_1 + 30y_2 - 10y_3 + 20y_4 \le 7 \\ -10y_1 - 20y_2 + 40y_3 - 10y_5 \le 1 \\ -40y_2 + 30y_3 + 80y_4 + 10y_5 \le 10 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \qquad\qquad y_j \in [0,1], j = \overline{1,n}.$$

Освободившись от отц. коэф-ов, находим по табл. 3 весовые фк. пер-ых, полагая $c_k = \varepsilon = 0{,}1$, если $c_k = 0$. Весовую фк-ю находим по фм-е $\beta_0^4 = c_k \max a_{ij} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$. В столбце y_4^1 табл. 3 эл-ы $a_{i4} = 0$, тогда $\beta_0^4 = \infty$. Значит, $y_4^1 = 1$, откуда $y_4 = 0$, тогда $x_4 = 0$, т.е. x_4 в базис не входит. Т.к. $\beta_0^3 = 19{,}51$ и $\beta_0^5 = 5{,}5$, то x_3 и x_5 входят в базис. Остается выяснить, входит x_2 в базис или нет. Для этого убедимся, что $y_2^1 < 1$, тогда $y_2 > 0$ из $y_2^1 + y_2 = 1$, откуда $x_2 > 0$, значит, x_2 входит в базис. Дсв-но, полагая противное, $y_2^1 = 1$, и исходя из $\max\left\{\frac{20}{40}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5}$, обозреваем огр (3). Т.к. $\left(\beta_0^3, \overline{\beta}_0^3\right) = (19{,}51; 0{,}29)$, то должно быть $y_3 \geq \frac{1}{2}$, поэтому, взяв $y_3 = \frac{1}{2}$, получим $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} y_5 + \frac{4}{5} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} y_3 = -\frac{1}{10}$. Получили противоречие, значит, $y_2^1 < 1$, т.е. x_2 входит в базис.

Таблица 2

	I	C	Базис	b	0	-1	3	-2	0	0	0	0	Σ
					X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
	1	0	X_6	7	1	3	-1	2	0	1	0	0	13
	2	0	X_7	1	-1	-2	$\boxed{4}$	0	-1	0	1	0	2
	3	0	X_8	10	0	-4	3	8	1	0	0	1	19
	m+1	$Z_j - C_j$		0	0	1	-3	2	0	0	0	0	0
I	1	0	X_6	29/4	$\boxed{3/4}$ -	5/2	0	2	-1/4	1	1/4	0	27/2
	2	3	X_3	1/4	1/4	-1/2	1	0	-1/4	0	1/4	0	1/2
	3	0	X_8	37/4	3/4	-5/2	0	8	7/4	0	-3/4	1	35/2
	m+1	$Z_j - C_j$		3/4	-3/4	-1/2	0	2	-3/4	0	3/4	0	3/2
II	1	0	X_1	29/3	1	10/3	0	8/3	-1/3	4/3	1/3	0	18
	2	3	X_3	8/3	0	1/3	1	2/3	-1/3	1/3	1/3	0	5
	3	0	X_8	2	0	-5	0	6	$\boxed{2}$	-1	-1	1	4
	m+1	$Z_j - C_j$		8	0	2	0	4	-1	1	1	0	15
III	1	0	X_1	10	1	$\boxed{5/2}$	0	11/3	0	7/6	1/6	1/6	36/3
	2	3	X_3	3	0	-1/2	1	5/3	0	1/6	1/6	1/6	17/3
	3	0	X_5	1	0	-5/2	0	3	1	-1/2	-1/2	1/2	2
	m+1	$Z_j - C_j$		9	0	-1/2	0	7	0	1/2	1/2	1/2	17
IV	1	-1	X_2	4	2/5	1	0	22/15	0	7/15	1/15	1/15	112/15
	2	3	X_3	5	1/15	0	1	12/5	0	2/5	1/5	1/5	47/5
	3	0	X_5	11	1	0	0	20/3	1	2/3	-1/3	2/3	62/3
	m+1	$Z_j - C_j$		11	1/5	0	0	116/15	0	11/15	8/15	8/15	311/15

Таблица 3

i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1^1	y_2^1	y_3^1	y_4^1	y_5^1	b
$m+1$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	30	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	10	$\frac{1}{10}$	20	$\frac{1}{10}$	-30
1	10	30		20				10			17
2			40			10	20			10	41
3			30	80	10		40				50
1	$\frac{10}{17}$	$\frac{30}{17}$		$\frac{20}{17}$				$\frac{10}{17}$			1
2			$\frac{40}{41}$			$\frac{10}{41}$	$\frac{20}{41}$			$\frac{10}{41}$	1
3			$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$				1
β	0,29	0,03	19,51	0,02	5,5	1,68	9,71	0,29	∞	1,68	

Теперь, взяв дпн-ые пер. x_6, x_7, x_8 и включив пер-ые x_2, x_3, x_5 в первой же итерации в базис, задачи решим по табл. 4 симплексно-висовым методом. Причем базисные пер. можно включить в базис в любой посл-ти, начиная с тех, у к-ых в ств-их столбцах многие эл-ы нули. Кроме того, если структура задачи позволяет, то базисную пер. надо выделить сразу, прб-уя в нули остальные эл. (и индексной строки) данного столбца до использования симплексной табл. Это позволит сущ-но сократить объем выч-й.

Решим п4 по табл. 4, включив в базис пер-ию x_5 (в этом случае пер-ию x_8 можно было исключить) первым (см. исходные данные табл. 2 и 3), затем включим в базис $x_2 \, и \, x_3$. При этом индексные строки напишем отдельно от матрицы симплексной табл.

Таблица 4

	i	c	Базис	в	0	-1	3	-2	0	0	0	0	Σ
					x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$	x$_5$	x$_6$	x$_7$	x$_8$	
	1	0	x$_6$	7	1	$\boxed{3}$	-1	2	0	1	0	0	13
	2	0	x$_7$	11	-1	-6	7	8	0	0	1	1	21
	3	0	x$_8$	10	0	-4	3	8	1	0	0	1	19
1	m+1	$Z_j - C_j$		0	0	1	-3	2	0	0	0	0	0
I	1	-1	x$_2$	7/3	1/3	1	-1/3	2/3	0	1/3	0	0	13/3
	2	0	x$_7$	25	1	0	$\boxed{5}$	12	0	2	1	1	47
	3	0	x$_5$	58/3	4/3	0	5/3	32/3	1	4/3	0	1	109/3
II	1	-1	x$_2$	4	2/5	1	0	22/15	0	7/15	1/15	1/15	112/15
	2	3	x$_3$	5	-1/3	0	1	12/5	0	2/5	1/5	1/5	47/5
	3	0	x$_5$	11	1	0	0	20/3	1	2/3	-1/3	2/3	62/3
2	m+1	$Z_j - C_j$		-1/7	-1/3	0	-8/3	4/3	0	-1/3	0	0	-13/3
3	m+1	$Z_j - C_j$		11	1/5	0	0	116/15	0	11/15	8/15	8/15	311/15

По табл. 4 получим те же результаты за две итерации: $x^*(0,4,5,0,11)$, $Z_{\max} = 11$. Причем, в какой бы посл-ти пер-ы x_2, x_3, x_5 ни ввели в базис, на последней индексной строке всегда получим одни и те же цифры (см. табл. 2 и 4).

5^0. Использование весового метода для решения многоэкстремальных задач. Пусть дана общая задача НП и требуется найти ее глобальный эксм:

$$\begin{gathered} Z = \max \varphi \ (x). \\ x \in M \end{gathered} \tag{20}$$

где $M = \left\{ x : x \geq 0, f_i(x) \leq b_i, i = \overline{1,m} \right\}, x = \left(x_1, ..., x_i, ..., x_n \right)$. Фк-и $\varphi(x) \; и \; \left\{ f_i(x) \right\}$ составляются из комбинаций фк-и базисной системы H °:1°

Решение задачи начинаем с нахождения весовой фк. по (3):1°, 2°, 3°

$$x_j = \beta^j \left(a_{ij}, b_i, c_j, \alpha^j, S^j \right), \tag{21}$$

где S^j – структура задачи для пер. $x_j, \alpha_j \left[\alpha_j^{\circ}, \alpha_j \right] \ni x_j \geq 0$.

При нахождении весовых фк-й (см. [99]) по (21) и решения x_{ij}^* задачи (20) будем осуществлять (см.[102] те же процедуры и шаги, как в 3° и в п 3. Все сказанное демонстрируем на конкретном

п5. Найти (см. п 3. и рис. 5 из 2°:4·1)

$$\max \mathbb{Z} = 25(x_1 - 2) + (x_2 - 2)^2,$$

при огр-ях

$$\left.\begin{array}{l} (1)\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 2 \\ (2)\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 \geq -2 \\ (3)\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 6 \\ (4)\mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 \leq 2 \end{array}\right\} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Р. Целевую фк. запишем через фк-и базисной системы, опр-им $M = \max x_i$, введем новые пер. $x_i = My_i$; и освободимся от отц-ых коэф-в.

$\max \mathbb{Z} = 25x^2{}_1 - 100x_1 + 100 + x^2{}_2 - 4x_2 + 4$. Из огр-й получим, что $M = 6$, отсюда $x_i = 6y_i$, тогда $\max \mathbb{Z} = 900y^2{}_1 + 36y^2{}_2 - 600y_1 - 24y_2 + 104 \Rightarrow$ $\Rightarrow \max Z = 900y^2{}_1 + 364^2{}_2 + 600y^1{}_1 + 24y^1{}_2 - 520$

$$\begin{array}{ll} (1) & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ (2) & -x_1 - x_2 \leq 2 \\ (3) & x_1 + x_2 \leq 6 \\ (4) & x_1 - 3x_2 \leq 2 \end{array} \left.\begin{array}{l} -6y_1 - 6y_2 \leq -2 \\ -6y_1 + 6y_2 \leq 2 \\ 6y_1 + 6y_2 \leq 6 \\ 6y_1 - 18y_2 \leq 2 \end{array}\right\} \begin{array}{lr} \qquad 6\mathrm{y}^1{}_1 - 6\mathrm{y}^1{}_2 & \leq 10 \\ 6\mathrm{y}_2 + 6\mathrm{y}^1{}_1 & \leq 8 \\ 6\mathrm{y}_1 + 6\mathrm{y}_2 & \leq 6 \\ 6\mathrm{y}_1 \qquad + 18\mathrm{y}^1{}_2 & \leq 20 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{lr} \qquad 3/5y_1^1 + 3/5y_2^1 & \leq 1 \\ 3/4y_2 + 3/4y_1^1 & \leq 1 \\ y_1 + y_2 & \leq 1 \\ 3/10y_1 \qquad + 9/10y_2^1 & \leq 1 \end{array}$$

По фм. $\beta^j = c_j / \max\limits_i a_{ij} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ вычислим весовые фк-и:

$$\beta^1 = \frac{900}{\frac{13}{10}\cdot 1} = 692{,}3;\ \beta^2\ \frac{36}{\frac{7}{4}\cdot 1} = 20{,}6;\ \overline{\beta}^1 = \frac{600}{\frac{27}{20}\cdot\frac{3}{4}} = 592{,}6;\ \overline{\beta}^2\ \frac{24}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{10}} = 17{,}8.$$

Откуда по табл. 5 получим нормированные невзр. посл-ти.

Таблица 5

y	β_0	зн. β_0	β_0^2	$\beta_1 = \frac{\beta_0^2}{831195{,}25}$	$\left(\beta^j{}_1, \overline{\beta^j{}_1}\right)$	$\left(\beta^1{}_1, \beta^2{}_1\right)$
y_1	β_0^1	692,3	479279,29	0,57661	0,57713	0,9991
$y^1{}_1$	$\overline{\beta}_0^1$	592,6	351174,76	0,42249	0,42287	0,9991
y_2	β_0^2	20,6	424,36	0,00051	0,57253	0,9991
$y^1{}_2$	$\overline{\beta}_0^2$	17,8	316,84	0,00039	0,42747	0,0009
			831195,25	1,00000	1,00000	1,0000

Здесь важную роль играет нормированная прч-ть y_1 отс-но y_2: $\left(\beta^1{}_1, \beta^2{}_1\right) = \left(0,9991; 0,0009\right)$. Откуда следует, что x_1 должен принимать нб. значение по сравнению с x_2. А таких значений можно найти из огр-й (3) и (4): $x_1 = 5,\ x_2 = 1$. Это будет и глобальным решением задачи, т. е.

$$\left(x^*{}_1, x^*{}_2\right) = \left(5,1\right),\ Z_{\max} = 226.$$

Чтобы найти локальные мкс-ы поступаем так. Из столбца $\left(\beta_1^j, \overline{\beta}_1^j\right)$ табл. 5 видно, что сд-ей по прч-ти нб. значение имеет y_2. Поэтому x_2 должен иметь нб. значение, чем x_1. Такие значения дают огр-ия (1) и (2), откуда $x_1 = 0,\ \ x_2 = 2$, т.е. $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(0,2\right), \mathrm{Z}_{\max} = 100.$ И, наконец, учитывая сд-ей по прч-ти $\overline{\beta}_1^2 = 0,42747$, причем $\beta_1^2 > \overline{\beta}_1^2$, делаем вывод, что x_2 должен иметь нб. значение, чем x_1, т.е. расв-ем огр-ия (2) и (3), откуда $x_1 = 2, x_2 = 4$, тогда $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2,4\right), \mathrm{Z}_{\max} = 4.$ Аналогично, взяв сд-ей по прг-ти $\beta_1^{-1} = 0,42249$ (причем $\beta_1^1 > \beta_1^{-1}$), тогда x_1 должен иметь нб. значение, чем x_2, сде-но, расв-ем огр-ия (2) и (3), отсюда $x_1 = 2, x_2 = 0$, т.е. $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2,0\right), \mathrm{Z}_{\max} = 4.$

Итак, найдены все локальные мкс-ы, среди к-ых опт-ым яв-ся $x_1^* = 5, x_2^* = 1, \mathrm{Z}_{\max} = 226.$

зм5. Из п5 видно, что подбор строк при нахождении мкс-а вызывает затруднения. Эти затруднения можно избежать, если найти прч-ти этих строк, переходя из исходной задачи к двойственной. Этот вопрос выходит за рамки данной книги, поэтому останавливаться на нем не будем.

Идея весового метода может быть использована и для решения более общих задач НП, когда МДР состоит из двух отдельных частей, ни одна из к-ых не выпукла. Демонстрируем сказанные на сд-ем

п6. Найти min и max $\mathrm{Z} = \left(x_1 - 1\right)^2 + x_2^2$ (см. п 4 и рис. 6 из 2^0 : 4.1) при огр-ях

$$\left.\begin{array}{l} (1)\left(x_1 - 1\right)x_2 \le 1 \\ (2)\, x_1 + x_2 \ge 3,5 \\ (3)\, 0 \le x_1, x_2 \le 5 \end{array}\right\}$$

Р. Огр-ия (1) и (2) пересекаются. Найдем эти точки, решив систему $\begin{cases} \left(x_1 - 1\right)x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3,5 \end{cases} \Rightarrow \left(2,5 - x_2\right)x_2 = 1 \Rightarrow x_2^2 - \dfrac{5}{2}x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2, x_2 = \dfrac{1}{2}$ и учитывая рав. $x_1 + x_1 = 3{,}5$, получим $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ и $\mathrm{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$. Сд-но, $\mathrm{Z}_{\min} = \dfrac{17}{4}$ достигается в точках А и В. Заметим, если бы имели $Z(A) \neq Z(B)$, то из задачи min Z переходили бы к задаче $\max Z^1 = -\min Z$ и выч-ив прч-ти пер-ых, нашли бы решение отдельно для Z (A) и Z (B).

Для нахождения max Z целевую фк. запишем через фк-и базисной системы, из огр. (3) опр-им M=5, введем новые пер. $x_j = 5y_j$, освободимся от отц-ых коэф-ов и найдем прч-ти пер-ых. Полагаем $C_к = \varepsilon = 0,1,$ если $C_к = 0.$

$$\max Z = x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 \Rightarrow \max Z = 25y_1^2 + 25y_2^2 - 10y_1 + 1 \Rightarrow \max Z = 25y_1^2 + 25y_2^2 + 10y_1^1 - 9$$

$$\left.\begin{matrix} x_1x_2 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 \leq 712 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 25y_1y_2 - 5y_2 \leq 1 \\ -10y_1 - 10y_2 \leq 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 25y_1y_2 & & +5y_2^1 \leq 6 \\ & 10y_1^1 & +10y_2^1 \leq 27 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{25}{6}y_1y_2 & & +\frac{5}{6}y_2^1 \leq 1 \\ & +\frac{10}{27}y_1^1 & +\frac{10}{27}y_2^1 \leq 1 \end{matrix}\right\}$$

При выч-и прч-ти пер-ых полагаем $C_1 = C_2 = \sqrt{25} = 5,$ коэф-т при y_1y_2 возьмем равным $\sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2,041.$ Тогда $\beta^1 = \frac{5}{2,041 \cdot 2,041} = 1,2;$ $\beta^2 = 1,2;$ $\overline{\beta}^1 = \frac{10}{\frac{10}{27} \cdot \frac{10}{27}} = 72,9;$

$\overline{\beta}^2 = \frac{1}{10 \cdot \frac{65}{54} \cdot \frac{5}{6}} = 0,1.$ Откуда получим невзр-ю посл. $\left(\overline{\beta}_0^1, \beta_0^2, \beta_0^1, \overline{\beta}_0^2\right) =$ $= (72,9;\ 1,2;\ 1,2;\ 0,1).$ Отсюда ясно, что y_2^1 имеет нм. значение, тогда y_2 – нб. значение, значит, x_2 должен иметь нб. значение, чем x_1, т.е. $x_2=5$, тогда из (x_1-1) $x_2=1$ имеем $x_1=\frac{6}{5}$. Откуда в точке $C\left(\frac{6}{5}, 5\right)$ получим локальный мкс. $Z_{\max} = Z(c) = \frac{626}{25} = 25,04.$ Теперь сд-ет по прч-ти нб. значение должен иметь x_1, т.е. полагаем $x_1=5$, тогда из (x_1-1) $x_2=1$ получим, что $x_2=\frac{1}{4}$, значит, точка $D\left(5, \frac{1}{4}\right)$ удовлетворяет $Z_{\max} = Z(D) = \frac{257}{16} = 16,06.$

Т.о. точка $C\left(\frac{6}{5}, 5\right)$ яв-ся точкой глобального мкс-а, к-ую нашли первой среди локальных мкс-ов. Это есть одно из важных преимуществ весового метода по сравнению с др. методами. Об этом подробнее остановимся в сд-ем пункте.

6^0. Геометрическая интерпретация основных этапов весового и других методов и их различия. При поиске опт-ой точки почти всем методам МП св-но движение от одной точки допустимой обл. к другой, начиная от нач-й точки до опт-ой, по опр-му пути [97]. При этом за нач. точку берется любая точка допустимой обл. X.

По характеру (хрк.) пути движения от нач. точки до опт-ой методы МП делятся на два больших класса (рис. 4).

1. Движение по ломаной от нач. точки до опт-ой, н-р, метод Гаусса-Зайделя, симплекс-метод, метод градиентов, метод наискорейшего спуска и др.

2. Движение по коридору, соединяющему нач. точку с опт-ой, н-р, метод ДП, метод штрафных фк-й, методы с эл-ми самообучения, метод ветвей и границ, методы целенаправленного случайного поиска и пр.

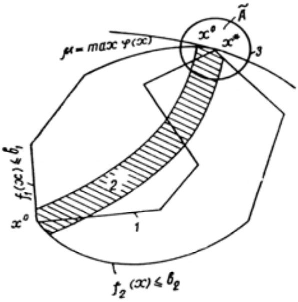


Рис. 4

Плж-ое каждого класса этих методов то, что с нач. точки x^0 все они целенаправленно идут к опт-ой точке x^*.

Отц-ым яв-ся то, что они сильно реагируют на размерность задачи, мало пригодны в многоэкстремальных задачах.

3. Возникает естественный вопрос: нельзя ли сразу найти точку (в качестве нач-ой) $x^0 \in \tilde{A}$, дт-но близкую к опт. точке x^*. Причем в общем случае окрестность $\tilde{A}$ (к-ую мы назвали псевдоэкстремальным мн-ом) точки x^* таковы, что $\tilde{A} \not\subset X$, но $V\left(\tilde{A}\right) \ll V\left(X\right)$ (см. [97]). Именно к этому классу относится весовой метод (см. рис. 4). Здесь $V\left(\tilde{A}\right)$ есть мера мн. $\widetilde{A}$

Исходя из приведенной классификации, можно назвать основные отличия весового метода от других методов МП.

а) В методах МП задается нач. точка x^0, к-ая не связана с опт. точкой x^*, т.е. в качестве нач. точки может служить любая точка $x^0 \in x$.

В весовом методе нач. точка x^0 не задается, а ищется, процесс же поиска осуществляется т.о., что точка $x^0 \in \tilde{A}$ тесно связана с опт. точкой x^*;

б) В методах МП найденная точка x^* может быть точкой как локального оптимума, так и глобального. Причем анализ глобальной опт-ти и переход от локального опт. к глобальному принципиально труден при решении многоэкстремальных задач.

В весовом же методе на основании закона прч-ти (см. 4^0:7,1) и т2 о глобальном эксм. (см. [97]) найденная точка (после уточнения точки x^0) x^* есть точка глобального опт-ма, поэтому отмечанные трудности не возникают.

в) В методах МП опознание точки на опт-сть начинается с первой же точки после нач-ой и итерация организуется до нахождения опт-ой точки. Опознание опт-ти и используемая итерация выражают суть метода. Поскольку опознание и итерации могут быть различными, то и методы носят разные названия.

Суть весового метода – в нахождении псевдоэкстремальной точки $x^0 \in \tilde{\text{А}}$ с помощью весовых фк-й. Опознание точки на опт-ть начинается с псевдоэкстремальной точки x^0. В случае недт-ой близости x^0 к опт. точке x^* организуется итерация, причем могут быть использованы итерационные процессы любого метода.

Заметим, что методы первых двух классов объединяет то общее, что они основаны на целенаправленном итерационном движении от произвольной нач. точки до опт-ой. Поэтому основные этапы реализации этих методов сд-ие:

1) выбор нач. точки $x^0 \in x$;

2) организация итерации;

3) опознание опт-ти точки (из опт-ти точки не следует, что она будет точкой глобального опт.) и организация разветвления: переход 2) или 4);

4) конец счета и выдача результата.

Основными этапами реализации весового метода служат:

1) нахождение псевдоэкстремальной точки $x^0 \in \tilde{\text{А}}$;

2) опознание опт-ти точки (если точка опт-на, то она одновременно будет точкой глобального опт.) и организация разветвления: переход 3) или 4);

3) организация итерации и переход 2);

4) конец счета и выдача результата.

Т.о. весовой метод принципиально отличается от др. методов МП. Именно это позволяет использовать весовые методы не только в решении стандартных задач МП, но и тех, в к-ых ММ не укладывается в модели стандартных задач, н-р, для задач с логическими условиями $\left[97\right]$. Кроме того весовые методы позволяют разработать ММ сложных систем. Эти вопросы рас-им в сд-ем параграфе.

ЛЕКЦИЯ 26

7.3. ВЕСОВОЙ МЕТОД КАК ПРОЦЕСС МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1^0. Основные идеи весового метода при составлении математических моделей сложных систем. Одной из задач (задача Б) анализа сложных систем яв-ся составление их моделей (см. 5°:7.1). Сложные системы обычно сводятся к эксл-ым задачам, многие из к-ых (н-р, о диете, раскрое, назначении, распределении ресурсов и др., рас-ые в 3.1) явно сформулированы на языке МП, а методы их решения в опр-ой степени разработаны. Однако на практике часто встречаются задачи (н-р, составление расписаний занятий и экзаменов, распределение учебных нагрузок на кафедрах и др.), не допускающие явной формулировки из-за нечеткости и неопр-ти параметров модели. В таких случаях сами параметры, участвующие в моделях, опр-ся с помощью весовых фк-й от др-их параметров, хркз-их эти параметры, т. е.параметры опр-ся через параметры. Затронутые здесь вопросы сначала были изложены в [91, 93, 96, 97], а затем обобщены в [100, 101]. В данном параграфе мы изложим лишь нек-ые результаты этих работ, но дт-ых для общего представления.

Введем сд. обз-ия: N – нек-ая сложная система или мн-во; $x=\left(x_1,...,x_j...,x_n\right)$ – п-мерный вектор, т. е. эл-т мн. N; $\left\{x_j\right\}$ – компоненты, т. е. координаты (крд.) вектора x, наз-мые пер-ми; $\Pi = \left\{\Pi_1,..,\Pi_q\right\}$ – исходные положения, хркз-ие мн. N в целом; $k=\left(k_1,..,k_r\right)$ – критерии, хркз-ие пер-ые; F – цель получения желаемого результата (вектора мн. N); $Z=\varphi\left(x_1,..,x_n\right)$ – целевая фк. поиска опт-го вектора $x^* = \left(x_1^*,..x_n^*\right) \in N$, т. е. Z фнц-но выражает F с помощью уточнения, анализа задачи $\bar{x}=\left(\bar{x}_1,..\bar{x}_n\right)$ – вектора, близкого к опт-му x^*; ε – оценка точности.

Сформулируем постановку задачи.

Пусть содержательно описано мн. N и задана цель F. Требуется (исходя из цели и описания N) сформулировать мт-ю мд. системы (мн. N) и найти точку $\bar{x}$, близкую к опт-ой.

Из основной идеи весового метода следует несколько этапов решения задачи.

1. Содержательное описание системы, в к-ом излагаются закономерности, хрк-ые для исследуемого процесса, и устанавливается цель.

2. Формулировка исходных положений, служащих принципиальной основой изучения системы, отражающих ее суть и опр-щих все остальные этапы анализа.

3. На основе исходных положений фиксируются основные критерии, хркз-щие параметры задачи и структуру модели.

4. Конкретные параметры строятся из полученных критериев на основе их совместного учета с помощью весовых функций, т. е. получаем коэф-ты $a_{ij} = a_{ij}\left(k_1^a, k_2^a, ..., k_{r_a}^a\right)$ – огр-й, $c_j = c_j\left(k_1^c, k_2^c, ..., k_{r_c}^c\right)$ – целевой фк., $b_i = b_i\left(k_1^b, k_2^b, ..., k_{r_b}^b\right)$ – свободных членов, $A_j^0 = A_j^0\left(k_1^\alpha, k_2^\alpha, ..., k_{r_\alpha}^\alpha\right)$ и $A_j = A_j\left(k_1{}^a, k_2{}^a, ..., k_{r_a}{}^a\right)$ – границы первых, $S_j = S_j\left(k_1^S, k_2^S, ..., k_{r_S}^S\right)$ – структуры модели.

5. ММ системы формулируются на языке МП на основе указанных параметров и имеет вид

$$Z = \max \varphi\left(x_1, ..., x_n\right) \tag{1}$$

$$\varphi_l\left(x_1, ..., x_n\right) \le b_i, i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\alpha_j^0 \le x_j \le \alpha_j, j = \overline{1,n} \tag{3}$$

В зв-ти от конкретной системы модель может упрощаться (целевая фк., огр-ия линейны и т. д.) или усложняться (на пер-ые налагаются логические условия [97] и др.)

6. Поиск точки $\bar{x}$, близкой к опт. точке x^*, производится (см. 7.2) на основе совместного учета параметров модели (1)–(3) с помощью весовых фк-й

$$\beta_j = \beta\left(a_{ij}, c_j, b_i, \left[\alpha_j^0, \alpha_j\right], S_j\right)\left(j = \overline{1,n}\right), \tag{4}$$

ств-щих пер-ым $x_j\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Весовые фк. $\left\{\beta_j\right\}$, опр-мые по (4), яв-ся числовыми значениями при-ти пер-ых $\left\{x_j\right\}$ и позволяют найти точку $\vec{x}$, близкую к опт. x^*, с оценкой ε.

Отметим, что формулировка исходных положений сводится к анализу изучаемого процесса в целом с выделением его сущ-ных и несущ-ных параметров и целенаправленному опр-ю условий задачи и ее постановки, т. е. в общем случае имеет сд-й вид.

П₁. Представить, из каких компонентов состоит изучаемая система, как взаимосвязаны эти компоненты и какова степень этой взаимосвязи (теснота связи).

П₂. Выяснить, какие огр. накладываются на систему, нарушение к-ых строго запрещается.

П₃. Выделить основные параметры системы, позволяющие строить фк-ю цели для данной системы.

П₄. Опр-ть числовые коэф. фк-и цели и огр-й с помощью весовых фк-й на базе основных критерий, полученных из исходных положений.

П₅. Установить структуру $\left(S_j\right)$ предполагаемой модели (линейность, нелинейность, дискретность и т. д.) отс-но пер-ых $\left\{x_j\right\}$ задачи.

П₆. Сформулировать постановку задачи на языке МП, исходя из конкретной исследуемой системы.

П$_7$. Построить ММ задачи исходя из коэф-ов, опр-ых в П$_4$ и $\left(S_j\right)$.

П$_8$. Проверить адекватность ММ с реальной системой. В случае неадекватности пересмотреть исходные положения и уточнить основные критерии в ств-и исправленным исходным положениям.

Заметим, что кол-во исходных положений может меняться в зв-ти от сложности конкретных систем.

На основе выше изложенного сформулированы и решены практические задачи: составление учебного расписания, а также семестровых экзаменов, распределение учебных нагрузок на кафедрах и др. В этом параграфе приведем лишь нек-ые из них.

Т.о., весовой подход яв-ся наиболее общим методом при мдв-и сложных систем и позволяет количественно анализировать конкретные системы.

2$^{0.}$ Постановка и математическая модель задачи составления учебного расписания. Основным назначением расписания яв-ся осуществление взаимоувязки преподавателя, группы, аудитории и номера пар занятий недели. Причем эта увязка [100] должна быть опт-ой в смысле уд-ия педагогических, учебных, административных и организационных требований, предъявляемых к расписанию.

Поэтому составление расписания учебных занятий яв-ся важной проблемой принятия решений в сложных условиях и призвано научно организовать учебный процесс, экономно расходовать ресурсы времени преподавателей и студентов и добиваться эффективности их труда.

Расписание учебных занятий яв-ся основным организационным документом. Оно определяет распорядок и ритм жизни вуза. От качества расписания зависит не только эффективность чтения лекций и проведения практических, семинарских и лабораторных занятий, но самостоятельная, аудиторная, учебно-методическая и научная деятельность преподавателей и студентов и даже их производственная дисциплина. Т. о., в расписании отражается степень научности организации учебного процесса.

Расписание занятий должно быть твердым и оно составляется на весь учебный семестр. Составление его на более короткий срок, частые изменения и поправки лишают расписание значения основного организационного документа. Такое меняющееся расписание не обеспечивает твердого порядка в учебном процессе, приносит большой вред, снижая качество, как преподавания, так и усвоения знаний студентами.

При составлении расписания нх-мо равномерно распределять учебную нагрузку в течение семестра, т.е. с первых же дней вводить лекционные, практические и лабораторные занятия.

Расписание играет немаловажную роль и в правильном распределении аудиторного фонда. Высококачественное расписание должно рационально использовать аудиторный фонд, обеспечивать мкс-ю пропускную способность учебной площади и её равномерную загрузку в течение семестра.

Качественное составление расписания невозможно без целенаправленной опз-и основных его параметров. Важным моментом здесь оказывается постановка самой задачи составления расписания и создание её мт-ой модели с учётом предъявляемых к нему требований и с конкретным указанием того, что должны оптз-ть и при каких огр-ях.

Исходя из этого, в данной работе задачи составления расписания формулируется на языке МП на базе основной идеи весового метода при составлении мт-их моделей сложных систем, изложенной в 1^0.

Рас-им процесс составления расписания как сложную систему. Причём исходные положения и основные критерии, хркз-ие этот процесс, назовём основными требованиями, предъявленными к расписанию. Оптимально составленное расписание должно учесть все основные требования. Поэтому до постановки задачи следует хорошо уяснить эти требования. Важную роль играет обоснованная их классификация. Для этого целесообразно требования к расписанию рассмотреть как пер-ые, нек-ые из к-ых могут принимать и пст-ые значения.

В процессе составления расписания используются два класса пер-ых: U= $(u_1, u_2, ..., u_R)$ – непосредственные требования (преподавателей, группы, аудиторного фонда и т.д.) и V= $(u_1, u_2, \dots, u_q)$ – опосредственные требования (педагогические, учебные, кафедральные, деканатские и др.)

В свою очередь каждая пер. u_r $\left(r = \overline{1, R}\right)$ может состоять из нескольких элр-ых пер-ых u_r= $(u_r^1, u_r^2, \dots, u_r^B)$.Н-р, если u_r – требования студенческой группы, то u может означать: u_r^1 – в расписании не было окна, u^2_r – кол. учебных часов в неделю не превышало 36 часов и т.д. Аналогично, $v_q = \left(v_q^1, v_q^2, \dots, v_q^D\right)$, q= $\overline{1, Q}$. Н-р, если v_q – педагогические требования, то v может означать: v^1_q – трудные предметы были бы во второй паре занятий, а более лёгкие – в первой или третьей; v^2_q – в расписании должны чередоваться общественные и естественные предметы и т.д.

Т.о. требования к расписанию классифицированы на четырёх уровнях $u^ь_r$ (r= $\overline{1, R}$, $ь = \overline{1, B}$), $V_q^d \left(q = \overline{1, Q}, d = \overline{1D}\right)$, к-ые яв-ся исходными положениями, т.е. $П_S^h = \left\{u_r^ь, v_q^d\right\}, s = \overline{1, R} + Q, h = \overline{1, B + D}$.

Приведём непосредственных требований U

По преподавателям (прд.) u_1:

u_1^1 – число прд-ей – не более 800;

u_1^2 – прд-ль в течение одной пары может проводить занятие с группой, подгруппой или потоком;

u_1^3 – прд. может иметь резервное время для внеурочной работы, н-р, научный день;

u_1^4 – прд. по возможности не должен иметь окна;

u_1^5 – прд. не должен иметь стыки в занятиях;

u_1^6 – часть прд-й может проводить занятия в строго опр-ой ауд. и в строго опр. время;

u_1^7 – расписании (рсп.) могут быть учтены личные, вполне обоснованные пожелания прд-й, если они не нарушают основных педагогических требований.

По учебным группам (гр.) u_2 :

u_2^1 – число гр. в смену – не более 140;

u_2^2 – учебная гр., подгр., поток не должны иметь стыки в занятиях;

u_2^3 – гр. может иметь резервное время для внеучебной работы (день само подготовки, производственная практика и т.д.);

u_2^4 – окна для гр. строго запрещены.

По занятиям и парам u_3 :

u_3^1 – число планируемых пар для одной гр. – не более 4;

u_3^2 – часть занятий может иметь преимущество по сравнению с др-ми в отн-и их проведения и размещения в ауд-ях;

u_3^3 – часть занятий можно проводить в строго опр-ых ауд-ях или строго опр-ой паре;

u_3^4 – занятия по хрк-у могут делится на 4 типа: лк-ые, пр-ие, лаб-ые и прочие.

По предметам u_4 :

u_4^1 – число предметов для одной гр. – не более 10;

u_4^2 – для непр-ых занятий по одному предмету в одной гр. или на одном потоке может быть отведено не более двух пар;

u_4^3 – предметы по своей специфике делятся на 4 вида: общественные, естественные, специальные и прочие;

u_4^4 – занятия по специальным предметам проводятся в ств-их ауд-ях;

По аудиторному (ауд.) фонду u_5 :

u_5^1 – число ауд-й – не более 120;

u_5^2 – в одной ауд. в течении одной пары проводится не более одного занятия;

u_5^3 – мкс. число студентов, занимающихся в одной ауд., не должно превышать нормы ее вместительности;

u_5^4 – число гр. в потоках должно быть не более пяти;

u_5^5 – в ауд. могут проводиться как любые, так и строго опр. занятия;

u_5^6 – ауд-ия в опр. время может находится в резерве для внеурочной работы;

u_5^7 – ауд. не должна иметь стыка.

Опосредственные требования V .

По предметам v_1 :

v_1^1 – общественные предметы проводить на первой или третьей паре;

v_1^2 – естественные – на второй или третьей паре;

v_1^3 – специальные и прочие – на первой или второй паре;

v_1^4 – предметы с четырьмя парами в неделю могут быть назначены в смежные дни;

v_1^5 – с тремя – с интервалом в один день;

v_1^6 – с двумя – с интервалом два–три дня;

v_1^7 – с одной – в любой день;

v_1^8 – нек-ые лаб. занятия – на смежных парах, н-р, по физике, электротехнике и др.;

v_1^9 – общественные, естественные, специальные и прочие предметы – чередовать;

v_1^{10} – для каждой гр. или потока – не более двух пар лекций в день;

v_1^{11} – пр. занятия – не более одной пары в день, в редких случаях две пары;

Учебные требования v_2 :

v_2^1 – для каждой гр. назначается куратор, к-ый проводит беседу в опр. ауд. в опр. время;

v_2^2 – часть прд-ей может иметь свободные пары в опр. дни для участия в советах института и в др. общественных работах;

v_2^3 – по заявке учебной части нек-ые ауд. в опр. время резервируются для проведения общественных, методических и др. работ.

Кафедральные требования v_3 :

v_3^1 – выделить во вторник для проведения заседаний кафедры или научно-методического семинара опр. пару. На это время прд-ли освобождаются от занятий;

v_3^2 – часть прд-ей можно освободить от не «удобных» пар, н-р, по состоянию здоровья;

v_3^3 – не допускать двух или трехсменной работы прд-ей;

v_3^4 – предоставить прд-ям, к-ые учатся в заочной аспирантуре или интенсивно занимаются научной работой, в свободные от занятий дни;

Деканатские требования v_4 :

v_4^1 – часть прд-ей факультета может иметь свободные пары в строго опр-ый день для участия на советах факультета;

v_4^2 – для кураторской работы выделяется опр-я ауд. в строго опр. время;

v_4^3 – по заявкам деканата нек-ые ауд. могут резервироваться на опр. время для самостоятельной работы студентов.

Специальные требования v_5 :

v_5^1 – допускать двух, или трехсменную работу прд-й в исключительных случаях;

v_5^2 – предусмотреть сессии заочников в опр. периоды по опр. курсам;

v_5^3 – строго учитывать в расписании работы прд-ей и групп вне института, н-р, на учебных полигонах;

v_5^4 – строго учитывать в расписании занятия прд-ей и групп подготовительного факультета с занятыми ими ауд-ми.

Теперь на базе исходных положений формулируется основные категории по опр. шкалам, численно хркз-им эти положения.

Введем пер-ые

$$x_{ijk}^t = \begin{cases} 1, \text{если прд. } i \text{ проводит в гр.j и ауд. к занятие на паре t,} \\ 0 \text{ впротивном случае} \end{cases}$$

и ств-ие им коэф-ы a_{ijk}^t , из к-ых можно перейти по табл. 1 к двух индексным пер-ым a_s^t . Тогда в клетках табл. 1 можно записать коэф-ы a_i^t= [0,6; 1,5] модели при связки пар в недели с прд-ми, связанными в тоже время с гр-ми и ауд-ми. Причем a_i^t= [1,1; 1,5] яв-ся запретами для ведения задания на паре t прд-ю i. В част. a_i^t= 1,5 означает, что прд. i на паре t не ведет занятие; 1,4 – участие в советах (в нескольких парах); 1,3 – участие в кафедральных работах (заседание кафедры фиксируется строго на одной паре); 1,2 – работа в метод совете; 1,1 – свободный день прд-ля или освобождение его по состоянию здоровья.

Таблица 1

Преподаватели	1					…	m
Группы	1			…	n_1		
Аудитория	1	…	q_1				
Общая нумерация	1	…					N
Пары недели: 1 2 . . . 18							

Далее заполним табл. 1 коэф-ми { a_i^t }<1 для каждого прд-ля i. Для этого видам занятий– лк-ям, пр-им и лаб-ым, занятиям присвоим коэф-ы ств-но 0,7; 0,8; 0,9. Учитывая категорию предметов (общественных – 1-я или 3-я пара, естественных – 2-я или 3-я пара и специальных – 1-я и 2-я пара дня, начиная ств-но с понедельника, вторника и среды) и кол-во пар v = (3, 2, 1) предметов за неделю, заполним табл. 1 ств-щими коэф-ми (0,7; 0,8; 0,9) по v + 1 раз на свободных клетках (или v раз, если кол-во свободных клеток не позволяет). Коэф-ом $a_i^t = 0,6$ заполняется клетка, если занятие прд-я i нх-мо назначить на паре t. После заполнения клеток табл. 1 коэф-ми $\left\{a_i^t\right\}$> 1 и $\left\{a_i^t\right\}$< 1 все оставшиеся пустыми клетки заполняются ед-ми, т. е. полагается, что все остальные $\left\{a_i^t\right\} = 1$.

Итак, клетки табл. 1 заполняли коэф-ми $\left\{a_i^t\right\} \in \left[0,6;1,5\right]$. Причём из коэф-ов $\left\{a_i^t\right\}$по табл. 1 можно обратно перейти коэф-ам a_{ijk}^t, т. е. получить a_{ijk}^t = [0,6; 1,5], i= $\overline{1,\mathrm{m}}$, j = $\overline{1,n}$, k = $\overline{1,\mathrm{q}}$, t = $\overline{1,\mathrm{T}}$, T = 18.

Теперь опишем процесс формирования коэф-ов целевой фк. $\left\{c_i^t\right\}$ и установим совместимость задачи для прд-ей.

Пусть прд-ль i имеет недельную нагрузкуV$_\mathrm{i}$ пар и W$_\mathrm{i}$ пар тех клеток табл.1 для к-ых $\left\{a_i^t\right\} \leq 1$. Если $V_i \leq W_i$,то для прд-ля i задача совместна. Если $V_i > W_i$, то для прд. i задачи несовместна. Её можно сделать совместной, освободив прд-я *i* от нек-ых запретных пар, или назначив ему занятие в нулевых парах.

При формировании $\left\{c_i^t\right\}$ исходим из того положения, что при прочих одинаковых условиях первым должен быть уд-ен тот прд-ль (т. е. ему назначено занятие), к-ый имеет самую большую недельную нагрузку. По кол-ву пар данного предмета первым должен быть уд-ен тот прд-ль, недельная нагрузка $V_{i\delta}$ к-го по предметам δ 3 пары, затем 2 пары и 1 пара. Им ств-но присвоим числа V$_\delta$ = (1,1; 1; 0,9) Причём виды занятий B (лк-ые, пр-ие, лаб-ые) учитываются отдельно. По категории r предметов δ первым должен быть уд-ен тот прд-ль, к-ый ведёт специальные, затем естественные и общественные предметы. Им присвоим ств-но числа r$_\delta$ = (1,1; 1; 0,9). Отсюда получим

$$C_i^t = \frac{V_i{}'}{W_i} = \frac{\sum\limits_{\delta} V_{i\delta} V_\delta r_\delta}{W_i}, i = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Исходя из стн. (1) коэф-ы $\left\{c_i^t\right\}$ можно записать в клетках табл. 1 вместе ств. коэф-ми $\left\{a_i^t\right\}$. Причём из коэф-ов $\left\{c_i^t\right\}$ по табл. 1 можно перейти к коэф-ам c_{ijk}^t. Более того, умн-ив на ств. коэф-ы, можно их взять $c_i^t =]0,1[u C_{ijk}^t =]0,1[$.

Теперь сформируем постановку задачи.

Пусть в вузе имеются *m* преподавателей, *n* групп и потоков, *q*–аудиторий и за неделю проводится *T* пар занятий, каждый из которых обз-им ств-но через*, i j, k* и *t.* И пусть введены пер-ые $x_{ijk}{}^{t} = 0$ или 1, коэф-ы эффективности (т. е. целевой фк.) $C^{t}{}_{ijk} =]0{,}1[$ и матрица огр-й $a^{t}{}_{ijk} = [0{,}6;\ 1{,}5]$, к-ые формируются на основе требований, предъявляемых к расписанию.

Требуется мксз-ть сумарную эффективность при условии, что на паре *t* каждый прд.*i*, каждая гр. *j* и каждая ауд. *k* могут обеспечить не более одного занятия.

Исходя из поставки задачи ММ можно сформулировать так:

$$maxZ = \sum_{i,j,k,t} C^{t}\,\mathrm{X}^{t}{}_{ijk}, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J_i}\sum_{k} a_{ijk}{}^{t} x^{t}{}_{ijk} \le 1, \quad i = \overline{1,m},\ t = \overline{1,T}, \tag{3}$$

$$\sum_{j\in J_i}\ \sum_{k} a^{t}{}_{ijk} x^{t}{}_{ijk} \le 1, \quad j = \overline{1,n},\ t = \overline{1,T}, \tag{4}$$

$$\sum_{j\in J_i}\sum_{i\in J_i} a^{t}{}_{ijk} x^{t}{}_{ijk} \le 1, \ k = \overline{1,q},\ t = \overline{1,T}, \tag{5}$$

$$x^{t}{}_{ijk} = 0 \text{ или } 1,\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,q},\ t = \overline{1,T}, \tag{6}$$

где J_i – совокупность *j* тех групп, в к-ых занятие ведет прд-ль *i*;

J_j – совокупность *i* прд-ей, к-ые могут обслуживать группу *j*.

Условия означают: (3) – прд. i на паре t может провести не более одного занятия; (4) –гр. j на паре t может участвовать не более чем в одном занятии; (5) –ауд. *k* на паре t может обеспечить не более одного занятия.

Задача (2)–(6) многоиндексная, легко сводится [91] к одно индексной

$$maxZ = \sum_{s=1}^{N} c_s x_s, \tag{7}$$

$$\sum_{s=1}^{N} a^{t}{}_{S} x_s \le 1, t = \overline{1,T}, \tag{8}$$

$$x_s = 0 или 1, s = \overline{1,N}. \tag{9}$$

Однако при решении задачи (7)–(9) возникают дпн. трудности. связанные с размерностью задачи.

Задачу (2)–(5) (или (6)–(18) целесообразно решать с помощью весового метода (см. 7. 2.) с учетом логических условий $[97]$ в три этапа (связь парами недели прд-ей, затем групп и, наконец, ауд-й) с использованием одной и той же табл., наз-мой исходной. Причем проверку условий совместности задачи нх-мо произвести по ходу решения задачи.

3^0. Постановка и математическая модель задачи составления расписания семестровых экзаменов. Составление расписания семестровых экзаменов яв-ся логическим продолжением расписания учебных занятий и в качестве исходной информации использует в основном ее результаты.

Исходя из основных критерий, фиксированных на базе опр-ых требований (т. е. исходных положений) можно сформулировать (аналогично расписания учебных занятий из 2^0) постановку задачи $[100]$ составления расписания семестровых экзаменов.

Пусть в вузе m преподавателей-экзаменаторов, n экзаменующихся групп, q аудиторой и T_j экзаменационных дней для j-й группы и пусть по основным критериям опр-ны коэф. эффективности (целевой фк.) $C^t_{ijk} \in \;]0,\ 1\ [$ и матрицы огр-й $a^t_{ijk} \in [0,6;1,5]$ и введены пер.

$$x^t{}_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если прд. } i \text{ принимает экз. в гр.} j \text{ ауд. } k \text{ на } t\text{-й день экз-го периода} \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется мксз-ть суммарную эффективность при условии, что в любой экз-ный день t каждый прд. i и каждая гр. j могут обеспечить проведение не более одного экз-на, а каждая ауд. k обеспечить прием экз-ов не более чем в у двух групп (первый и второй смены) в день.

Исходя из постановки задачи получим сд-ю ее ММ:

$$\max \mathrm{Z} = \sum_{i,j,k,t} c^t_{ijk} x^t{}_{ijk} \tag{10}$$

$$\sum_{j,k} a^t{}_{ijk} x^t{}_{ijk} \le 1{,}1 \, \mathrm{i} = \overline{1,m}, t = \overline{1,T} \tag{11}$$

$$\sum_{i,k} a^t{}_{ijk} x^t{}_{ijk} \le 1{,}1;\ j = \overline{1,n}, t = \overline{1,T}, \tag{12}$$

$$\sum_{j \in J_1 i} \sum_{i} a_{ijk} x_{ijk} \le 1{,}1; k = \overline{1,q}, t = \overline{1,T}, \tag{13}$$

$$\sum_{j \in J_2} \sum_{i} a^t{}_{ijk} x^t{}_{ijk} \le 1{,}1; k = \overline{1,q}, t = \overline{1,T}, \tag{14}$$

$$\mathrm{x}^{\mathrm{t}}{}_{\mathrm{ijk}} = 0 \text{ или } 1,\ \ \mathrm{i} = \overline{1,m},\ \mathrm{j} = \overline{1,q} = \overline{1,T}, \tag{15}$$

где J_1 – совокупность групп первой смены; J_2 – совокупность групп второй смены и заочного факультета.

Обз-им через P_i общее кол. экз-ов прд. . Тогда при связке P_i и T_j возможны два случая:

$$P_i \le \underset{j \in J_i}{U} T_j; \tag{16}$$

$$P_i > \underset{j \in J_i}{U} T_j; \tag{17}$$

где J_i – совокупность групп, к-ые сдают экз-ы прд. i.

Приведённые условия означают: (11) – прд.i в экз-ный день t может принимать экз. не более чем от одной группы и для к-го имеет место (16), а $j \in J_1 \mathrm{U}\, J_2$. Если для прд. i ств-ет (17), то условие (11) проверяется дважды:1) для $i \in J_1 \mathrm{U} J_2$, как в предыдущем случае; 2) при фиксированном t, если $i \in (J_1 \mathrm{U} J_2) \mathrm{U} J_1 = 0$, то $j \in J_1$, а если $J \in (J_1 \mathrm{U} J_2) \mathrm{U} J_1 = J_1$, то для $j \in J_2$; (12) – гр. i в экз-ный день t может сдать не более одного экзамена.

Условия (13) и (14) означают, что ауд. k на экз-ный день t может обеспечить приём экз-ов от не более чем одной группы ств-но первой и второй смен.

Отметим, что аналогичным образом сформулирорована математическая модель распределения учебных нагрузок на кафедрах [96]. С точки зрения приемственности использования необходимой информации целесообразно объединить три системы (распределения учебных нагрузок на кафедрах, составление расписания учебных занятий и составление расписания семестровых экзаменов) в одно и рас-ть их как единая система.

ЛЕКЦИЯ 27

7.4. ВЕСОВОЙ МЕТОД КАК СПОСОБ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1^0. Количественная оценка по определению системы и ее сложности. Системное понимание окружающего мира есть методология, в основе к-ой лежат идеи целостности, сложной организованности исследуемых объектов и их внутренней активности и динамизма. Хрк-ой особенностью ее яв-ся те аспекты предметов или событий, к-ые вытекают из общих св-в систем, а не из конкретного содержания. Поэтому все зависит от того, сущ-ют ли в дсв-сти св-ва, присущие всем системам, и если да, то можно ли вывести практические результаты из этих св-в. Это, в свою очередь,зв-ит от того, как опр-ся «система» и понимается ее «сложность».

В данном пункте система и ее сложность опр-ся как весовые фк-и от опр-ной совокупности общих св-в и признаков (см. [90, 94]), хркз-их их. Такой способ к опр-ю системы и ее сложности назовем весовым способом, к-ый позволяет численно оценить степени системности и сложности систем, а также классифицировать их исходя из этих оценок.

Конечно, есть и др. опр-ия системы и сложности (см. 2^0: 1.2 и [90]). Мы их здесь приводить не будем. Лишь отметим, что все авторы явно или неявно признают связь системы с окружающей средой. В опр-и системы нет единого мнения, а обилие всевозможных вариантов свидетельствует о его сложности и отсутствие общего подхода к нему. Если по опр-ю системы в литературе много работ, то по опр-ю ее сложности их сравнительно мало. Общее опр. сложности систем все еще остается не разработанной проблемой, что объясняется по нашему мнению, принципиальными и методическими трудностями опр-ия «сложности» вообще, а также отсутствием количественной оценки меры сложности. Для удобства и кратности изложения введем обз-ия: S – система; $\{m\}$ – объекты системы; m $\in$ S; V – сложность системы; SV – система и ее сложность при совместном рас-и; C – окружающая среда.

При опр-и SV мы исходим из исходных положений, к-ые сформулируем так:

П$_1$. S и V взаимно связаны друг с другом;

П$_2$. Опр-ия S и V динамичны во времени;

П$_3$. Опр-ия S и V должны быть не очень широкими (общими) и не очень узкими (специфичными). Мт-й подход к ним должен быть промежуточным между словесным опр-ем мт-ой моделью;

П$_4$. Опр-ие SV не должно основываться на уровнях абстрагирования и организованности систем (механических, физических, биологических, организмических);

П$_5$. Признаки, участвующие при опр-и S и V, не должны зависеть от существующей классификации систем (открытые и закрытые, органические и неорганические, естественные и искусственные, целенаправленные и хаотичные и т.д.);

П$_6$. S и V едины и неотделимы от С;

П$_7$. Понятия «объект» и «система» относительны. Так, двигатель – объект системы (самолета), если изучается качество самолета на управляемость. Но двигатель есть система, если при опр-и надежности он расв-ся как единое целое;

П$_8$. Любая S устойчива при выборе поведения (переходе из одного состояния в другое) и при адаптации к изменяющейся среде.

Нас будут уд-ть только такие опр-ия S и V, к-ые отвечают исходным положением П$_1$-П$_8$ и к-ые назовем опт-ми их опр-ми. Однако эти положения сами по себе не дают опр-ия SV, нх-мо еще выработать основные критерии (кт), характеризующие (хркз.) их, а также мт-й аппарат, связывающий эти признаки.

Сформулируем основные кт. K_i, хркз-ие S и V

К$_1$ – характеристика (хркс.) объектов системы: их кол-во, классификация и т.д.;

К$_2$ – хрк-ка св-в системы: их кол., классификация, однозначно опр-ые исходя из цели исследования;

К$_3$ – хркс-ка отн-ия объектов и св-в: их кол., классификация, форма и т.д.;

К$_4$ – теснота связи объектов ситемы: ко-во объектов, поддающихся изменению одного объекта, и степень этого влияния;

К$_5$ – динамичность системы и ее сложность во времени: степень динамичности, временное изменение, обновление, уточнение и т.д.;

К$_6$ – связь системы с внешней средой: виды связи, степень адаптации системы, степень взаимоизменения среды и системы и т.д.;

К$_7$ – выявление поведения системы: степень устойчивости системы, изучение «пути» поведения, установление функции цели, изоморфной поведению; анализ конечного состояния (конечной цели) и т.д.;

К$_8$ – возможность постановки проблемы исходя из конкретной системы, формализация объектов, установление их взаимосвязи, формулировка задачи:

К$_9$ – создание мт-ой модели системы: установление формы модели,функции цели и допустимой области;

К$_{10}$ – выяснение внутренней структуры модели: классификация (механические, физические, биологические, организмические, экономические), характер изменения пер-ых (непр-ые, дискретные, смешанные, вероятностные), расплывчатость – нечеткость параметров (частично или полностью пер-ые лингвистические); постановка задачи и модель – нечеткие;

К$_{11}$ – анализ размерности системы (задачи): кол-во пер-ых, свойств, отношений и их связь, а также кол-во процедур реализации;

К$_{12}$ – подготовка исходной информации: форма и период подготовки, их классификация, систематизация, хранение и использование;

К$_{13}$ – точность системы: постановка, модель, внутренняя структура, исходные материалы и согласованность их точности;

К$_{14}$ – выбор и разработка метода решения задачи: выбор и согласованность метода с точностью, разработка нового метода;

К$_{15}$ – мт-ое обеспечение системы: программирование, счет и анализ результатов;

$К_{16}$ – проверка изоморфности модели и системы: анализ степени ств-ия модели объективной системе и уточнение модели в случае нести-ия. Процесс может повторяться неоднократно до получения уд-ой изоморфности;

$К_{17}$ – эксплуатация системы: форма и порядок эксплуатации, установление моментов ремонта и обновления и т.д.

Дальнейшим шагом анализа опр-ия SV яв-ся присвоение числовых коэф-ов основным кт-ям $К_1$ – $К_{17}$ и установление их важности, т.е. предпочтительности (прч.). для этого вводим девятибальную шкалу.

$\{i\} = 1, 2, \ldots, 9$, которая может иметь различные формы при $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0{,}2$; $\alpha_3 = 0{,}1$ и т.д.:

$\{i_1\} = \{i\alpha_1\} = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;$

$\{i_2\} = \{i\alpha_2\} = 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1; 1{,}2; 1{,}4; 1{,}6; 1{,}8;$

$\{i_3\} = \{i\alpha_3\} = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9;$

Девятибальная шкала обладает рядом преимуществ:

а) более гибко и точнее хркз-ся изучаемый процесс, чем пятибальная шкала;

б) наличие срединных значений {5; 1; 0,5} позволяет сравнивать равновесные процессы, что яв-ся важным моментом по сравнению с десятибальной шкалой;

в) кол-во баллов вполне дт-но, чтобы уловить нюансы изучаемого процесса.

Сформулируем постановку проблемы.

Пусть фиксированный неупорядоченный набор критериев $К_1$ –$К_{17}$, хркз-их систему S и сложности систем V, оценены с помощью девятибальной шкалы $\{i_2\}$.

Требуется сформировать опт-ое (в смысле $П_1$–$П_8$) опр-ие S и V на основе совместного учета кт-ев $К_1$ –$К_{17}$ по их прч-ти. Такая постановка проблемы позволяет целенаправленно прийти к опр-ям системы и сложности систем с помощью простых расчетов. Для этого в качестве мт-го аппарата используется понятие весовых фк-й, впервые введенные автором, а затем неоднократно использованное для получения ряда практических результатов.

Идея весовой фк-и состоит в том, что в выражении *f (x)* символ *f* расв-ся как пер-ая, а *x* – как фиксированная величина. На основе этой идеи системы и их сложности опр-им как весовые фк-и S и V от фиксированных кт-ев $К_1$–$К_{17}$:

$$S = S\ (К_1, К_2, \ldots, К_6), \qquad (1)$$

$$V = V\ (К_0, К_1, К_5, \ldots, К_{17}), \qquad (2)$$

где K_0 – совокупность кт-ев $К_1$ – K_3, хкрз-их систему в целом. Причем каждый $К_i$ зависит от остальных, что устанавливается с помощью попарного сравнения $К_i$ и $К_j$ на основе экспертных оценок [30] для соотношений (1) и (2) в отдельности.

Чтобы найти числовые оценки для хркс-ик «сравнение», «система» и «сложность», целесообразно расв-ть их как величины и ввести единицы их измерений (без наименования) ств-но: важность, системность (сравнимость и связность) и реализуемость, к-ые обз-им коэф-ми, причем сравнение $к_1$ с $к_j$ выразим попарной важностью, а общее сравнение $к_i$ с остальными – важностью:

Наименование величины	*Единица измерения*	*Условные обозначения коэффициентов*	
		для (1)	для (2)
Сравнение	Попарная важность	a_{is}	b_{ij}
	Важность	a_i	b_i
Система	Системность (сравнимость, связность)	α_{i}	–
Сложность	Реализуемость	–	γ_i

Исходя из этого установим взаимно однозначное ств-ие между степенями единицы измерения и баллами по шкале$\{i_2\}$, что приведено в табл. 1; для объяснения ее рассмотрим примеры. Так, для клетки α_I (0,2) (соответствующей «не системно» – несравнимо, несвязано) можно взять совокупность объектов: кусок сахара, самолет и ежик, к-ые не образуют систему, т.е. совокупность несистемна. Для α_I (0,4) – потолок, пружина, груз, к-ые не образуют систему, но могут ее образовать, т.е. совокупность почти системна. Для α_I (0,6) – прикрепленная к потолку пружина с грузом – совокупность системна.

Далее теснота системности возрастает, и в α_I (1,6) системность становится настолько тесной – ультра системной, что система превращается в единую целую (неотделимую) вещь (объект). Причем сущность объекта скрыта от исследователя, т.е. мы выходим за пределы системы. В качестве примеров можно привести: ручные электронные часы, головной мозг и т.д. Для α_I (1,8) системность еще более возрастает и переходит в суперсистемность, когда система, превращаясь в объект, становится не только внутренно-скрытой, но и недоступной; например, отдельные системы (объекты) галактики.

Степени реализуемости и важности системы отражены в табл.1. Причем слово «реализуемость» является лишь единицей измерения сложности и нельзя считать, что сложность измеряется только с точки зрения реализуемости. Это раскрывается по конкретному содержанию того или иного критерия. Более того, вследствие сложности нек-ых систем они могут перейти в объект. Превращаясь в объект, система приобретает свойства ультрасистемности и суперсистемности. Здесь нет противоречия: при любой степени системности, в частности ультрасистемности и суперсистемности, система существует объективно, и лишь понятие о системе накладывает ограничения на возможность называться системой из-за недостаточности наших знаний. Если накопившийся объем знаний позволит досконально изучить, н-р головной мозг, то он перейдет из разряда объекта (ультрасистемности) в разряд системы (теснее системности), а затем в разряд тесносистемности и т.д. поэтому опр-ие системы является отс-ым понятием.

Приведенные рассуждения относятся и к определению сложности систем: сложность – также относительное понятие, с накоплением знаний реализуемость не раньше 6! лет для конкретной системы может перейти в реализуемость не раньше 5! лет и т.д. Причем это изменение для нек-ых систем происходит очень быстро.

Таблица 1

Коэф.	i_2								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
a_{ij}, b_{ij}	Неважно	Чуть важно	Маловажно	Более важно	Одинаково важно	Важнее	Очень важно	Ультра важно	Суперважно
a_i	Несистемно (несравнимо, несвязно)	Почти системно сравнимо, несвяно)	Системно (сравнимо, связно)	Более системно (очень сравнимо связно)	Очень системно (очень сравнимо, очень связно)	Тесно системно (тесно сравнимо, связно)	Теснее системно (тесно сравнимо, тесно связано)	Ультрасистемно (ультра сравнимо и связано)	Суперсистемно (суперсравнимо и связно)
γ_I	Реализовано (действует)	Реализуемо просто	Реализуемо	Реализуемо сложно в течение 1-2 лет	Реализуемо нее раньше 2! = 2 лет	Реализуемо не раньше 3! = 2 лет	Реализуемо не раньше 4! = 24 лет	Реализуемо не раньше 5! = 120 лет	Реализуемо не раньше 6! = 720 лет

Конкретные выч-ия S и V осуществляются в несколько этапов. Прежде всего нх-мо установить коэф-ты a_{ij} попарной важности κ_i по сравнению с κ_j по девятибальной шкале вида $\{i_2\}$. Пусть P (κ_i) означает важность κ_i. Тогда будем полагать, что $a_{ij} = 1$, если $P(\kappa_\text{i}) = \text{P}(\kappa_\text{j})$; $a_{ij} = \{0{,}2 \mid 0{,}4 \mid 0{,}6 \mid 0{,}8\}$ (| - знак «или»), если $P(\kappa_\text{i}) < \text{P}(\kappa_\text{j})$; $a_{ij} = \{1{,}2 \mid 1{,}4 \mid 1{,}6$ $1{,}8\}$, если $P(\kappa_\text{i}) > \text{P}(\kappa_\text{j})$.

Коэф-ты a_{ij} обладают сд-ми легкопроверяемыми св-ми: а) $a_{ii} = 1$; б) $a_{ij} = 2 - a_{ji}$.

Все сказанное отс-но a_{ij} справедливо и для коэф-ов b_{ij}, причем a_{ij} для κ_4, κ_5, κ_6 в (1) может не совпадать с ств-щими коэф. b_{ij} в (2), так как в разных отн-ях они выполняют различные роли, и степень важности их различная.

Коэф.-ты $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ для отн-й (1) и (2) приведены ств-но в табл. 2 и 3; они составлены на основе табл. 1 и экспертных оценок.

По значениям $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ коэф.-ты важности a_i и b_i кт-я κ_i в (1) и (2) выч-ся ств-но с помощью формул

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad n = 6, \tag{3}$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}, \quad n = 15. \tag{4}$$

Коэф.-ты системности α_i и реализуемости γ_i каждого кт-я κ_i опр-ся на основании табл. 1 для каждой системы и ее сложности в отдельности. Связь между a_i и α_i, а также b_i и γ_i устанавливается как средние геом-ие этих величин, отсюда получим конкретные стн-я для опр-ия системы и ее сложности;

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i\ \alpha_i}, \quad n = 6, \tag{5}$$

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i\ \gamma_i}, \quad n = 15. \tag{6}$$

Для пользования стн-ми (5) и (6) нх-мо опр-ть крайние степени системности и реализуемости. Выберем такие системы и сложности, к-ые ств-ют их крайним положениям. Рас-им (см. приведенный выше пример) совокупность объектов (S'_0): кусок сахара, самолет и ежик, которая несистемна. Ясно, что в данном случае для каждого $к_i$ имеет $\alpha_i = 0{,}2$, $i = \overline{1,6}$. Тогда

$$S'_0 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \sqrt{a_i \bullet 0{,}2} = 0{,}182.$$

Таблица 2

Кри-терий	$к_1$	$к_2$	$к_3$	$к_4$	$к_5$	$к_6$	$\sum a_{ij}$	a_i	α_i	$a_i\alpha_i$	$\sqrt{a_i\alpha_i}$
$к_1$	1	1,2	1,2	0,8	1,2	1	6,4	0,178	0,8	0,142	0,377
$к_2$	0,8	1	1,2	0,8	1,2	1	6,0	0,167	0,8	0,134	0,366
$к_3$	0,8	0,8	1	0,8	1,2	1,2	5,8	0,161	1	0,161	0,401
$к_4$	1,2	1,2	1,2	1	1,4	1,4	7,4	0,205	1,2	0,246	0,496
$к_5$	0,8	0,8	0,8	0,6	1	0,8	4,8	0,133	1	0,133	0,365
$к_6$	1	1	0,8	0,6	1,2	1	5,6	0,156	0,8	0,125	0,353

Рас-ев аналогичный пример (галактика), получим:

$$S'_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \sqrt{a_i \bullet 1{,}8} = 0{,}547.$$

Исходя из сегмента $[S'_0, S'_1]$, учитывая данные табл. 1 и экспертные оценки, для опр-ия системы строим под сегмент $[\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1]$ со сд-ми числовыми значениями: $[S_0, S_1]=[0{,}228; 0{,}498]\subset[0{,}182; 0{,}547] = [\mathrm{S}'_0, \mathrm{S}'_1]$.

о1. Совокупность объектов, уд-щая кт-ям $\{k_i\}$ стн-ия (1) и выч-ная на основе табл. 1, наз. системой (S), если $S\in[0{,}288; 0{,}498]$.

Если $S\overline{\in}[0{,}288; 0{,}498]$, то S – не система. Если же в результате вычисления получим $S\in[0{,}182; 0{,}288]$, то совокупность объектов системой не являются и для них степень сложности не устанавливается. Однако при $\mathrm{S}\in[0{,}498; 0{,}547]$ объект имеет потенциальную возможность называться системой по мере накопления наших знаний о нём. Поэтому для таких объектов степень сложности устанавливается как крайнее положение сложности.

п1. Требуется выяснить, является ли системой процесс составления учебного расписания, конечной целью к-ой служит опт. связка совокупности преподавателей, учебных групп, аудиторий и номеров пар занятий за неделю. Для этого, исходя из табл. 1, заполняем колонку α_i табл. 2 и выч-ем стн-ие (5):

$$S = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\sqrt{a_i\alpha_i} = 0{,}393,$$

где $\mathrm{S} = 0{,}393\in[0{,}288; 0{,}498]$. Следовательно, процесс составления учебного расписания является системой.

Таблица 3

Крите-рий	κ_0	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	κ_9	κ_{10}	κ_{11}	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	κ_{16}	κ_{17}	$\sum a_{ij}$	b_i	γ_i	$b_i\ \gamma_i$	$\sqrt{b_i\ \gamma_i}$
κ_0	1	1	1,2	1,2	1,4	1	1,2	1	1,2	1,4	1,4	1	1,2	1,2	1,2	17,6	0,078	1,2	0,094	0,307
κ_4	1	1	1,4	1,2	1,2	0,8	1	1	1	1,2	1,2	0,8	1	1	1,2	16,0	0,071	1,0	0,071	0,266
κ_5	0,8	0,6	1	0,6	1	0,2	0,4	0,6	0,6	0,8	0,8	0,4	0,6	0,6	1,2	10,2	0,045	0,8	0,036	0,190
κ_6	0,8	0,8	1,4	1	1,2	0,6	0,8	0,8	0,6	1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	15,0	0,067	0,8	0,054	0,232
κ_7	0,6	0,8	1	0,8	1	0,4	0,6	0,8	0,6	1	1	0,4	0,8	0,8	1	11,6	0,052	1,2	0,062	0,249
κ_8	1	1,2	1,8	1,4	1,6	1	1,8	1	1	1,8	1,6	0,8	1,4	1,6	1,4	20,4	0,091	1,4	0,127	0,356
κ_9	0,8	1	1,6	1,2	1,4	0,2	1	0,8	0,4	1,8	1,6	0,2	1,2	1,6	1,4	16,2	0,072	1,2	0,086	0,293
κ_{10}	1	1	1,4	1,2	1,2	1	1,2	1	0,8	1,6	1,8	0,6	0,8	1	1	16,6	0,074	1,2	0,089	0,298
κ_{11}	0,8	1	1,4	1,4	1,4	1	1,6	1,2	1	1,8	1,8	1	1	1,2	1,4	19,0	0,084	1,4	0,118	0,344
κ_{12}	0,6	0,8	1,2	1	1	0,2	0,2	0,4	0,2	1	1	0,2	0,4	0,6	0,8	9,6	0,043	0,8	0,034	0,184
κ_{13}	0,6	0,8	1,2	0,8	1	0,4	0,4	0,2	0,2	1	1	0,2	0,4	0,6	0,8	9,6	0,043	0,8	0,034	0,184
κ_{14}	1	1,2	1,6	0,8	1,6	1,2	1,8	1,4	1	1,8	1,8	1	1,8	1,8	1,8	21,6	0,096	1,2	0,115	0,339
κ_{15}	0,8	1	1,4	0,8	1,2	0,6	0,8	1,2	1	1,6	1,6	0,2	1	1,2	1,2	15,6	0,069	1	0,069	0,263
κ_{16}	0,8	1	1,4	0,8	1,2	0,4	0,4	1	0,8	1,4	1,4	0,2	0,8	1	1,2	13,8	0,061	1	0,061	0,247
κ_{17}	0,8	0,8	0,8	0,8	1	0,6	0,6	1	0,6	1,2	1,2	0,2	0,8	0,8	1	12,2	0,054	1,2	0,065	0,255

Определим теперь крайние степени реализуемости.

Предположим, что с помощью выч-й установлено: будильник есть система. Расс-м сложность управления будильником. Очевидно, что $\gamma_i = 0{,}2$ для всех k_i стн-ия (2). Тогда получим

$$V_0' = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\sqrt{b_i \cdot 0{,}2} = 0{,}114.$$

Аналогично, рассмотрев сложность других крайних систем (головной мозг, галактика), найдём

$$V_1' = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\sqrt{b_i \cdot 1{,}8} = 0{,}343.$$

Устанавливая закономерности изменения интервалов при переходе от одного балла к другому, сегмент $[V_0, V_1]=[0{,}114; 0{,}343]$ разобьем на пять подсегментов, каждому из к-ых присвоим название, выражающее степень сложности:

1)	ультра простая система	$[0{,}114; 0{,}170] = V_1$,
2)	простая система	$[0{,}171; 0{,}223] = V_2$,
3)	сложная система	$[0{,}224; 0{,}284] = V_3$,
4)	ультра сложная система	$[0{,}285; 0{,}319] = V_4$,
5)	суперсистема	$[0{,}320; 0{,}343] = V_5$.

Фактически подсегменты 1)–5) представляют собой классификацию системы по сложности.

о2. Система S сложности V называется сложной системой, если $V \in V_3$. Для каждой конкретной системы её сложность вычисляется отдельно заполнением колонки γ_i табл. 3 с учётом данных табл. 1.

п2. Требуется опр-ть сложность системы расписания учебных занятий. Заполняем колонку γ_i табл. 3 и выч-ем стн-ие (6):

$$V = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\sqrt{b_i\gamma_i}. = 0{,}267$$

Так как $0{,}267 \in [0{,}224; 0{,}284]$, то расписание составления учебных занятий является сложной системой.

Опр-ия 1 и 2 системы S и сложности системы V ств-но уд-ют исходным положениям $П_1$–$П_8$ и дт-но общие, в то же время они позволяют анализировать конкретные системы.

Заметим, что в табл. 1 для γ_i указанные годы 2! = 2, 3! = 6 и т. д. выражают фактическое положение лишь приближённо, поэтому не следует понимать их буквально. Они меняют свой оттенок в зв-сти от конкретного k_i и могут указывать степень сложности k_i по сравнению с k_j. Так, в табл. 3 $\gamma_1 = \gamma_7 = \gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{14} = \gamma_{17} = 1{,}2$ для ств-щих $\{k_i\}$, по сравнению с которыми k_8 и k_{11} яв-ся более сложными. Поэтому полагаем $\gamma_8 = \gamma_{11} = 1{,}4$, хотя для их реализуемости потребуется не обязательно 4! = 24 года.

В практическом смысле исследованию подлежат в основном сложные системы, так как ультра простые и простые системы или полностью исследованы и уже действуют, или настолько просты, что не представляют интереса. Ультра сложные системы и суперсистемы в данный момент не могут быть изучены из-за недостаточности наших знаний о них.

Следует подчеркнуть, что нек-ые моменты работы могут уточняться, в частности, перечень критериев стн-й (1) и (2), коэф-ты таблиц 2 и 3 и сегменты 1)–5). Однако главное здесь заключается в самой методике и весовом подходе и опр-ию систем и сложности систем, позволяющих практически осмыслить конкретные системы. Причём такой подход является настолько общим и гибким, что он может быть использован и для опр-ия других понятий, а также для практических целей, в част., при оценке эффективности вузовского учебника мт-ки, при оценке эффективности и качества научной работы и т. д.

2^0. Весовой подход к оценке эффективности и качества вузовского учебника математики. Написание учебника (или учебного пособия) – сложный и трудный процесс. Объясняется это тем, что отсутствует модель учебника, в к-ом перечислялись бы основные требования и принципы, к-ым должен отвечать вузовский учебник, в т.ч. математики (мт.). Исходя из этого вопрос оценки эффективности и качества написанного учебника приобретает важное значение.

Рас-им учебник как сложную систему и фиксируем исходные положения, на основы к-ых сформулируем основные критерии [98], предъявляемые к учебнику конкретного предмета. В исходных положениях должна фиксироваться суть системы и её сложности, а в основных критериях – конкретные проявления характерных (хрк.) особенностей (свойств) системы и кол-ные отн.этих св-в.

Положения и критерии конкретной системы вырабатываются на основе интуитивных соображений здравого смысла с дальнейшей всесторонней проверкой на практике, что в определенном смысле аналогично установлению аксиом (или постулатов) при изучении того или иного предмета. Причем сформулированные положения и критерии системы должны удовлетворять следующим требованиям – независимости, полноте и непротиворечивости. Только в этом случаи они будут считаться качественными.

При фиксировании исходных положений мы исходим из того, что математика единая целостная система и ее единство заложено в самой сущности мт-ки.

Следует отметить, что в последнее время на многих кафедрах стали практиковать создание методических пособий и контрольных работ по отдельным темам и разделам мт-ки с указанием обширного кол-ва литературы, для изучения к-ых у студента не хватает времени. Поэтому наряду с этими пособиями студент должен иметь учебник по общей математике, где под рукой было все: и теория, и практика, и образцы решенных примеров, и даже контрольные задачи, т.е. учебное пособие в целостном изложении по отдельным циклам мт-ки (математический анализ, теория вероятной с математической статистикой и т.д.)

Современную мт-у нельзя изучать без широкого внедрения НИРС, сдно, учебник должен охватить и ряд научных тем, выходящих за программный материал, что фиксируется в критериях.

Известно, что мт-ка является абстрактной наукой, изучающей мт-ие структуры (в частности, мт. модели реальных явлений), у к-ых описан ряд отн-ий между их эл-ми. Однако абстрактность мт-ки должна быть на разумных уровнях и развиваться в учебнике постепенно (это также отражается в критериях). Иначе она окажется тормозом в овладении мт-ой.

В современных условиях мы должны четко уяснить, чему и как учить студентов. Поэтому в положениях и критериях должно быть фиксировано все, что способствует эффективному обучению, в частности, учебник должен развивать интерес к самостоятельному мышлению, творческому подходу к решению задач и т.д.

Установлено, что и глубина усвоения студентами изучаемого материала зависит от разумного сочетания разнообразных методических, психологических и др. приемов обучения. Поэтому в положениях и критериях должны быть учтены эти приемы, в частности, разумная наглядность, демонстрационные примеры, эвристика, элементы обучения и т.д.

В последние годы **особое** внимание уделяется также проблемному обучению, предусмотрению в нужных местах учебника проблемных ситуаций, которое должно быть также фиксировано в положениях учебника.

Перечисленные факты убедительно свидетельствуют о необходимости создания учебника общей математики, основанного на этих положениях и критериях, без которых невозможно целенаправленное изложение материала учебника и его количественная оценка.

Для удобства и краткости изложения вводим обз-ия:

U – учебник по общей мт-ке; φ – эффективность и качество U; П = $\{\Pi_i\}$ – исходные положения; К = $\{k_i\}$ – основные критерии (кт.), основанные на П и хркз-ие эффективность и качество U; a_{ij} – прч-ть (важность) кт. k_i над k_j, α_j – оценка важности кт. k_j по сравнению с остальными $\{k_i\}$ и опр-ные на основе $\{\Pi_i\}$ и $\{a_{ij}\}$.

Следует особо отметить, что объем (V_u) учебника U очень важное понятие, без четкого опр. к-го невозможно и оценить U. Причем в V_u должны учитываться не только физический объем учебника, но и его содержание (фактический материал).

Поэтому объем V_u учебника U целесообразно измерять через среднее затраченное время читателя на чтение (освоение) этого учебника. Предположить, за I академический час (45 мин) студент может в средним прочитать и усвоить 2 стр. данного учебника и по математическим предметам для самостоятельной работы студенту отведено 400 часов. Тогда учебник должен иметь объем около 800 стр.

Кроме того, нам нх-мо еще фиксировать объем уровней обладания мт-ой, хркз-ие глубину усвоения и степень применимости ее на практике, к-ые измеряются также через затраченное время студента на чтение. Обз-им их сд-им образом:

$W_{\text{в}}$ – объем высокого уровня, который позволяет с помощью мт-ки исследовать новые неизученные объекты и явления, описать их на языке мт-ки и получить кол-ные результаты. На этом уровне возможно развитие самой мт-ки;

$W_{\text{н}}$ – необходимый минимум объема знаний, к-ый позволяет дт-но широко использовать мт-у для описания реальных явлений;

$W_{\text{с}}$ – объем среднего уровня, позволяющего полученные знания по мт-ке использовать на ств-щих местах при работе по своей специальности;

W_0 – объем ознакомительного уровня мт-ки, позволяющий читать и разбираться с математическими понятиями, к-ые встречаются в литературе по своей специальности, а также безошибочно выполнять алгоритм решения несложных задач. Математическое образование любого студента ниже уровня W_0 не допускается. И пусть W_u – содержательный объем учебника U.

Ясно, что $W_0<W_{\text{с}}<W_u<W_{\text{в}}$, к-ые можно оценить и по пятибальной системы: $2 \le W_0$, $W_0 \le 3 \le W_{\text{с}}$, $W_{\text{с}} < 4 \le W_{\text{н}}$, $W_{\text{н}} < 5 \le W_u$.$W_u < 5^* \le W_{\text{в}}$, где 5^* – оценка особо одаренных учащихся.

Кроме того, обз-им через

V_n – объем программного материала предметов учебника U с физическим объемом $V_{\text{м}}$;

$V_{\text{л}}$ – объем лекционного материала, читаемого по программе с объемом V_n;

$\triangle V = V_u - V_n$ –разность объемов учебного и программного материалов.

Учитывая введенные обз-ия сформулируем исходные положения.

$П_1$. Математика – наука о математических (мтч.) структурах, у к-ых описаны опр-ные отн-ия между их эл-ми. Мтч-ие структуры делятся на два типа, взаимосвязанные между собой.

Мтч-ие структуры первого типа связаны с реальными явлениями опосредственно с помощью цепи понятий и логических структур, к-ые являются продуктами внутреннего развития мт-ки и выражают абстрактность мт-ки, придавая ей силу, универсализм и общность. Здесь изучаются не отдельные конкретные обекты, а опр-ые классы объектов, устанавливаются общие методы и алгоритмы решения широкого круга задач.

Мтч-ие структуры второго типа яв-ся непосредственными моделями реальных (физических, химических, биологических, экономических, социальных и др.) явлений, т.е. мт-ка с помощью способов описания самых разнообразных явлений реального мира выполняет функцию языка.

В ств-и с двумя типами мтч-их структур мт-у условно делят на чистую и прикладную; они взаимосвязаны и неотделимы друг от друга.

$П_2$. По своей сути мт-ка едина, а внешняя ее разобщенность (деление на отдельные мтч-ие предметы, на чистую и прикладную, на элементарную и высшую и т. д.) условна. Единство математики – важнейший принцип ее дальнейшего развития.

П$_3$. Смысл мтч-го понятия не зависит от области его дальнейшего применения, в частности от специализации студентов. В современных условиях растет потребность в специалистах, которые могут быстро ориентироваться и правильно оценивать происходящие изменения, что в свою очередь требует ведение в вузах мт-ки по единой программе независимо от факультета. Эти качества прививаются студентам не узкоспециальным образованием, а широким общим образованием университетского типа.

В связи с этим учебники мт-ки делятся на три типа: учебники U для вузовских студентов, использующих в своей специальности мт-у (сюда относятся и университетские студенты не мт-ки), учебники U_1 для университетских студентов – математиков; учебники U_2 для педвузовских студентов – математиков.

Здесь речь идет только об учебнике U.

П$_4$. Математизация – это характерная тенденция современной науки и техники. Ныне всем ясно, что знание делается точным только тогда, когда для его описания удается использовать математическую модель. Это является реальным подтверждением слова К. Маркса о том, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Такая тенденция современности требует обратить внимание на прикладную направленность мт-ки на основе повышения уровня фундаментальной подготовки студентов. Нельзя обучать приложениям мт-ки, не изучив самой мт-ки.

П$_5$. Материал учебника должен быть более обширным, чем программный, а так же лекционный материал. Ясно, что лекционный материал не может превышать программного. Отсюда следует, что

$$V_л \leq V_п < V_u$$

П$_6$. В мт-ке, самостоятельное познание играет главную роль по сравнению с другими формами познания. Кроме того, современный уровень мт-ки и ее применение таково, что мт-у усвоить и использовать можно лишь на основе самостоятельного ее изучения. Поэтому лекции преподавателя играют лишь подчиненную роль, а учебник U – главную роль в учебном процессе. Самообучение по книгам – это самое главное.

П$_7$. Обучение мт-ке, как и другим наукам, неотделимо от воспитания личности. Обучение и воспитание взаимосвязаны, поэтому мт-у нельзя свести к одним формулам, теоремам и доказательствам.

П$_8$. В мт-ке вопрос, как учить важнее вопроса, чему учить. Поэтому после тщательного выбора объема и содержания мтч-их курсов нх-мо основательно и продуманно опр-ть цели обучения, правильно сочетать широту и глубину изложения, строгость и наглядность, умело применять аксиоматический, интуитивный и эвристический подходы к изложению, разумно использовать основные логические процессы: индукцию и дедукцию, анализ и синтез, аналогию и обобщение. Надо использовать каждый из них на своем месте и в взаимосвязи между собой.

П$_9$. Положения, сд-но, и критерии динамичны, поэтому они могут уточняться, изменяться и дополняться на основе опыта и в ств-и с развитием методических, педагогико-психологических и др. наук. Причем критерии динамичнее, чем положения и при оценке эффективности учебника в основном учитываются критерии, к-ые ств-ют принятым положениям. Отсюда учебник должен быть динамичным, постоянно развиваться, обновляться, показывать противоречия, движущие процессы в данной области науки, раскрывать пути их преодоления и тенденции дальнейшего развития. Однако все это не мешает учебнику оставаться относительно стабильным.

П$_{10}$. Содержание и объем учебника должны быть строго фиксированы. По содержанию студент должен усвоить фундаментальные знания, необходимые в его практической деятельности, приобрести навыки творческого мышления, быть подготовленным читать специальную и монографическую литературу. По объему учебник должен укладываться во время, выделенное студентам на самостоятельную работу по мтч-им дисциплинам. Причем при опр-ии содержания W_u и объема V_u учебника мы должны добиваться к $V_u \to W_н$ и $\mathrm{W}_u \to \mathrm{W}_в$.

Учитывая предыдущие положения и опр-ия $\{W_i\}$,$\{V_i\}$, получаем сд. цепочку неравенств:

$$W_0 < V_л \le V_п \le W_c < V_u \le W_u < W_в \qquad (7)$$

П$_{11}$. Внедрение вычт-ой техники в нашу жизнь требует знания специалистом таких мтч-их дисциплин, как мтч-ая логика, теория графов, алгоритмов, информации, игр, широкого использования методов оптимизации, мтч-го мдв. и т. д. Все это в учебнике должно учитываться.

П$_{12}$. В настоящее время математические модели (ММ) используются во всех областях науки и реальных явлениях, поэтому в учебнике U нх-мо уделять должное внимание вопросам математического моделирования (ММв). Студент должен использовать ММ как язык познания объективной реальности.

П$_{13}$. Роль мт-ки для человечества огромна. Мт-ка не только применяется в других науках, но и яв-ся мощным методом для познания мира, для изучения его закономерностей. Кроме того, мт-ка совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ум, приучает человека рассуждать , воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации.

П$_{14}$. Студенты постоянно развиваются. Поэтому и изложение в учебнике должно изменяться. Н-р, сначала надо повторять школьную мт-ку и связать ее с вузовской, на базе к-ых изложить фактический материал и в конце подготовить их к самостоятельному изучению специальной и монографической литературы. Принимать во внимание, что мтч-ие познания возникают и развиваются поэтапно.

П$_{15}$. Любая человеческая деятельность, в том числе написание учебника, может быть анализирована и кол-но оценена при разумном выборе критериев $\{K_i\}$ на основе сформулированных положений.

Теперь сформулируем кт-и $\{k_i\}$,хркз-ие эффекцивность и качества φ учебника U полученные из исходных положений $\{П_i\}$

К$_1$. Учебник должен научить студента не только решать задачи (модели), но и приобрести навыки составления задач (модели), описания изучаемого процесса на языке мт-ки.

К$_2$. В ученике все темы должны быть взаимосвязаны и излагаться как единая система, соблюдая преемственность между разделами, предметами, а также между мт-ой школьной и вузовской.

К$_3$. В учебнике должны строго соблюдаться основные педагогические принципы: от простого к сложному, от конкретного к абстрактному, от интуитивного к логическому, от наглядного к обобщению и т.д. Надо помнить, что умело подобранные чертежи и рисунки сущ-но помогают пониманию и усвоению материала учебника.

К$_4$. Учебник есть главный источник знаний студентов и играет главную роль в обучении, а лекции преподавателя – подчиненную. Поэтому самостоятельная работа студентов над книгой является основой основ в учебном процессе. Нх-мо добиться, чтобы каждый студент участвовал в НИРС. Материалом для НИРС является разность $\Delta V = V_u - V_n$ (автор должен учесть эту роль учебника). Если его не дт-но, то привлекается специальная и монографическая литература.

К$_5$. Учебник должен иметь прикладную направленность на основе фундаментальной подготовки студентов, сд-но, должен содержать в дт-ом кол-ве упражнения, демонстрационные примеры, различные задачи и т.д.

К$_6$.Учебник должен иметь воспитательную направленность. Воспитание и обучение в учебнике должны быть связаны в единую систему. Их умелое сочетание при формулировке задач, примеров устранит навязчивость в изложении.

К$_7$. Учебник есть совокупность минимума нх-ых знаний V_u (причем $V_u \le W_н$ в силу (7)) и дальнейшее его углубление и расширение очень важно. Поэтому в учебнике надо приводить список специальной и монографической литературы и делать в нужных местах учебника ссылки на них.

К$_8$. Объем учебника V_u, выраженный через затраченное время на его усвоение, строго фиксируется равенством

$$V_и = \beta V_л \ (1 \le \beta \le 2) \qquad (8)$$

где $V_л$ – количество лекционных часов, отводимое вузовской программой для факультетов с нб-ой мтч-ой подготовкой.

Стн-ие (8) можно обобщать. Пусть $V_и^i$ – объем i-го предмета н-р, математики, географии, или же русского языка и т.д.);

β_i – коэффициент, ств-й i-му предмету ; $V_л^i$ – объем лекционных часов по программе i -го предмета. Тогда

$$V_и^i = \beta_i V_л^i \ (1 \le \beta_i \le 2,\ i = 1,\ 2,...)\ , \qquad (9)$$

Отсюда можно найти полный резерв времени студентов для самостоятельной работы

$$V = \sum_{i} \beta_i V_л^i \tag{10}$$

В формуле (10) коэ-ты β_i можно уточнять дпн-но, исходя из верхней границы V. Предложим, установлено, что за неделю студентам для самостоятельной работы отводиться V= 24 час., а $V_л^i$ известны по программе. Тогда β_i можно уточнять на основе прч-ти предметов.

$К_9$. Программный материал излагается только в фиксированном объеме $V_п < V_u$. В ств-и с этои автор должен разумно применять аксиоматический и индуктивно-эвристические подходы изложения, эффективно использовать основные дидактические принципы индукции и дедукции, анализа и синтеза, аналогии и обобщения.

$К_{10}$. Учебник должен отвечать современным требованиям и подготавливать студентов к широкому использованию вычт-ой техники.

$К_{11}$. В учебнике не только излагаются известные факты, к этим фактам студентов надо подвести, учебник учит студентов самостоятельно мыслить, развивает у них тренировочную любознательность

$К_{12}$. Ключевые темы U надо выделить и излагать прежде, чем остальные темы. Например, векторы и определители излагать прежде аналитической геометрии, производные – до рядов и т. д.

$К_{13}$. Накопление новых понятий, опр-ий в мт-ке важно также, как и накопление словарного запаса при изучении иностранного языка. Кроме того, удачная символика и обз-ия понятий, формул и т.д. яв-ся залогом успешного усвоения мт-ки. Поэтому этим вопросам автор учебника U должен уделять должное внимание.

$К_{14}$.Изложение в учебнике должно быть кратким, наглядным, логически четким, но не сухим.

$К_{15}$. Учебник должен демонстрировать внутреннюю красоту, стройность мт-ки, ее симметрии, периодичности, соотношение размеров и т.д., пробуждать у читателя эстетические чувства.

$К_{16}$. Учебник должен иметь строгую и обоснованную внутреннюю структуру. Каждая глава, параграф и пункт должны быть взаимостыкованы и согласованы по объему, содержанию, изложению и т.д.

Теперь сформулируем постановку задачи.

Пусть фиксированный непорядочный набор K_1-K_{16}, хркз-их φ, опр-ен на основе экспертных оценок с помощью девятибалльной шкалы с учетом степени важности каждого из этих критериев отс-но остальных.

Требуется найти опт-ую (в смысле $П_1$-$П_{15}$) оценку φ с помощью совместного учета $К_1$-K_{16}. Такая постановка задачи позволяет целенаправленно написать учебник общей мт-ки и получить его оценку с помощью простых расчетов, мтч-им аппаратом к-ых являются весовые функции [97]

Итак, эффективность и качество φ учебника U опр-им как весовую фк. от $k_1 - k_{16}$ (для удобства K$_i$ обз-им через k_i):

$$\varphi = \varphi\left(k_1, k_2, ..., k_{16}\right). \tag{11}$$

Заметим, что эффективность и качество учебника можно рассмотреть и отдельно, аналогично работе [95].

В отношении (11) каждый k_i не одинаково важен отс-но остальных критериев, т.е. зависит от остальных, что устанавливается с помощью попарного сравнения k_i и k_i.

Причем результат сравнения – превосходство k_i над k_i выразим через «важно», превосходно k_i над остальными $\{k_i\}$ – через «предпочтительно», а эффективность и качество U учебника – через, «эффективно». А степени a_{ij} сравнения k_i над k_j и коэффициенты α_{i} эффективности (табл. I) выражаются в баллах $\{i_2\}$ по девяти бальной шкале.

Таблица 4

i_2	a_{ij}	α_i
0,2	неважно	неэффективно
0,4	чуть важно	чуть эффективно
0,6	маловажно	мало эффективно
0,8	более важно	менее эффективно
1,0	одинаково важно	эффективно
1,2	важнее	более эффективно
1,4	очень важно	очень эффективно
1,6	ультроважно	ультраэффективно
1,8	суперважно	суперэффективно

Пусть P (k_i) – важность k_i. Тогда a$_{\text{ij}}$ = I, если P (k_i) = P (k_j); $a_{ij} = \{0,2/0,4/0,6/0,8\}$, если P (k_i) < P (k_{j}); $a_{ij} = \{1,2/1,4/1,6/1,8\}$. если P (k_i) > P (k_j), где / знак или. Причем a_{ij} обладают св. a_{ii} = 1 и a_{ij} = 2 – a_{ji} На основе экспертных оценок $\{a_{ij}\}$ заполнены в табл. 5.

Исходя из $\{a_{ij}\}$ можно опр-ть коэф-ты $\{a_i\}$ прч-ти k_i над (k_j) по

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, n = 16. \tag{12}$$

Для практического использования коэф-та $a_i = [\alpha, \beta] = [\min a_i, \max a_i] = [0,036; 0,086]$ (см. табл. 5) нх-мо ее прб-ть в $a_i = [a, b] = [0,2; 1,8]$ по фм-е

$$a_i^0 = \frac{b - a}{\beta - \alpha} a_i + \frac{\beta a - \alpha b}{\beta - \alpha}. \tag{13}$$

Из (13), подставив числовые значения вместо параметров, получим

$$a_i^0 = 32 a_i - 0,952. \tag{14}$$

Значения a_i^0 даны в табл. 5. В част., $a_3^0 = 1,8$ *и* $a_{12}^0 = 0,2$ остальные расположены между ними.

Коэф-ты эффективности α_i^0 (без учета α_i^0) каждого k_i отн-ия (11) опр-ся (табл. 5) с помощью оценок каждого учебника в отдельности. Отсюда с учетом α_i^0 получим среднее значение эффективности

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^0 \alpha_i^0}, \quad n = 16 \cdot \tag{15}$$

Таблица 5

k	k_2	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	$k1_4$	k_{15}	k_{16}	$\sum a_{ij}$	a_i	a_i^0	α_i^0	$\sqrt{a_i^0 \alpha_i^0}$
k_1	1,0	0,8	0,6	0,4	1,2	0,6	1,8	0,8	0,4	0,6	0,2	1,4	1,2	0,8	1,2	0,6	13,6	0,053	0,744	1,0	0,863
k_2	1,2	1,0	0,4	0,6	1,0	0,8	1,6	1,0	0,8	0,8	0,4	1,2	1,4	0,6	1,4	0,8	15,0	0,059	0,836	1,4	1,082
k_3	1,4	1,6	1,0	1,6	1,4	1,2	1,8	1,2	1,2	1,0	0,8	1,8	1,8	1,2	1,8	1,2	22,0	0,086	1,800	1,6	1,697
k_4	1,6	1,4	0,4	1,0	1,2	1,4	1,6	1,4	1,4	1,2	1,0	1,8	1,8	1,4	1,6	1,2	21,4	0,084	1,736	1,2	1,443
k_5	0,8	1,0	0,6	0,8	1,0	0,8	1,4	1,4	1,0	1,0	0,8	1,4	1,2	1,0	1,2	1,0	16,4	0,064	1,096	1,8	1,405
k_6	1,4	1,2	0,8	0,6	1,2	1,0	1,8	1,6	0,8	0,8	1,0	1,6	1,6	1,2	1,2	1,2	19,0	0,074	1,416	0,8	1,064
k_7	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,2	1,0	0,6	0,8	0,6	0,4	0,8	0,8	0,8	1,8	1,2	10,8	0,042	0,392	0,2	0,280
k_8	1,2	1,0	0,8	0,6	0,6	0,4	1,4	1,0	1,0	1,2	0,8	1,2	1,2	0,8	1,0	1,2	15,4	0,060	0,968	0,2	0,440
k_9	1,6	1,2	0,8	0,6	1,0	1,2	1,2	1,0	1,0	1,4	1,2	1,6	1,6	1,2	1,2	1,4	19,2	0,075	1,448	1,6	1,522
k_{10}	1,4	1,2	1,0	0,8	1,0	1,2	1,4	0,8	0,6	1,0	0,8	1,4	0,8	0,6	1,6	1,4	17,0	0,066	1,160	0,2	0,482
k_{11}	1,8	1,6	1,2	1,0	1,2	1,0	1,6	1,2	0,8	1,2	1,0	1,8	1,6	1,6	1,4	1,2	21,2	0,083	1,704	1,2	1,430
k_{12}	0,6	0,8	0,2	0,2	0,6	0,4	1,2	0,8	0,4	0,6	0,2	1,0	0,8	0,6	0,2	0,6	9,2	0,036	0,200	1,8	0,600
k_{13}	0,8	0,6	0,2	0,2	0,8	0,4	1,2	0,8	0,4	1,2	0,4	1,2	1.0	0,8	0,6	0,8	11,4	0,045	0,488	1,4	0,827
k_{14}	1,2	1,4	0,8	0,6	1,0	0,8	1,2	1,2	0,8	1,4	0,4	1,4	1,2	1,0	0,8	1,0	16,2	0,063	1,064	1,2	1,130
k_{15}	0,8	0,6	0,2	0,4	0,8	0,8	0,2	1,0	0,8	0,4	0,6	1,8	1,4	1,2	1,0	1,6	13,6	0,053	0,744	1,6	1,091
k_{16}	1,4	1,2	0,8	0,8	1,0	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6	0,8	1,4	1,2	1,0	0,4	1,0	14,6	0,057	0,872	1,6	1,182

Чтобы пользоваться стн-ем (15) нх-мо еще опр-ть крайнюю степень эффективности α. Для этого рас-им заведомо плохой учебник, не отвечающий указаным кт-ям, для к-го $\alpha_i^0 = 0,2 \quad (i=\overline{1,16})$. Отсюда по (15) имеем $\underline{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0}\cdot 0,2=0,443$ и $\overline{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\cdot 1,8}=1,328$ для заведомо отличного учебника.

Сегмент [$\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$] = [0, 443; 1, 328] разделим (табл. 6) на пять подсегментов {φ_i} и дадим оценку учебнику по общепринятой пяти-балловой шкале.

Таблица 6

		Оценка
1	0,443; 0,619	Очень плохо
2	0,620; 0,796	Плохо
3	0,797; 0,973	Удовлетворительно
4	0,974; 1,150	Хорошо
5	1,151; 1,328	Отлично

п3. Пусть требуется оценить учебник (Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I, II. М., 1967, 1970) по предложенной методике.

Р. Заполняем колонку α_i^0 (хркз-ю св-ва этого учебника) табл. 5. Затем, используя стн-ие (15), находим α = 1,034. Т.к. α = 1,034 $\in$ [0,974; 1,150], то данный учебник оценивается на «хорошо».

зм1. Нек-рые моменты работы могут уточняться, в част., формулировка и перечень исходных положений и основных кт-й, коэф-ты табл. 5 и 6. Однако главное здесь – в методике и весовом подходе анализа учебника мт-ки с целью выработки опр-го направления в усилии авторов и кол-ой оценки их труда.

зм2. Творческие особенности авторов здесь не ущемляются, т.к. каждый критерий автором будет решаться по его индивидуальным возможностям.

зм3. Учебные пособия, охватывающие целые предметы, будут создаваться и в дальнейшем, как это делается сейчас. Но они будут рассматриваться как специальная литература и некоторые из них окажутся источниками создания учебника с помощью общих усилий родственных кафедр.

3^0. Сравнительная оценка динамичного развития страны на основе эффективной и качественной работы государства. Как были указано в 1^0:1.2 и 6^0:6.3, в настоящее время очень важно «предмодельное» исследование как перед созданием новой модели, так и при планировании по ликвидации или обновлении старой модели. Но это можно делать только на государственном уровне, т.к. низовые уровни не могут брать на себя ответственность, чтобы выполнять такую работу из-за научной серьезности этой проблемы и финансового недостатка. Это дсв-но так. Вспомним создание за один год по всей стране модели колхозного строя, ликвидацию церквей, мечетей (тем самым отняв веру народа), а затем через 70 лет административно-командным решением уничтожение моделей колхозного (в т.ч. совхозного) строя, не думая об обновлении их или о направлении их по многоукладному руслу. Если бы провели предмодельное исследование, прежде чем принять такие необоснованные решения, не имели бы таких катастрофических результатов, к-ые имеем в данный момент (генофонд ухудшается, смертность превышает рождаемость, основная масса народа беднеет и т.д.).

Сейчас неотлагательно необходимо объединиться всем вместе и изменить ситуацию в сторону динамичного развития, иначе будет поздно. Мы исходим из того, что в данный момент и государство (в т.ч. и низовые уровни), и наука, и религия должны вместе спасать простой народ деревень и городов, создать рабочие места, усилить обеспечение жильем и питанием, оказать повседневную помощь, чтобы народ верил, расправил крылья и включился в общее дело динамичного развития страны.

В данной статье делается попытка осмыслить с чего начинать и как изменить ситуацию в лучшую сторону, а так же дать количественную оценку этому процессу.

Здесь мы имеем дело с социальной системой (моделью) *S*.

Под социальной системой будем понимать любую часть общества такую, что эту часть можно отделить от др-их. У такой «системы» есть нек-ые собственные потребности и способы их уд-ия, неодинаково возможные как с точки зрения самой системы, так и с точки зрения среды. При этом естественным образом возникает взаимоподчиненность систем. Н-р, деятельность любого подразделения организации зависит от деятельности организации в целом (бригада – цех – завод – отрасль), деятельность, развиваемая в отдельном регионе страны, – от деятельности в системе регионов и т.д. Причем в социальной системе процесс происходит на основе личных интересов индивида и его поведения.

В социальной системе S возникает категория зависимости. Н-р, если офицер начинает руководить действиями солдата, то солдат обязан подчиняться его распоряжениям, что означает, что солдат должен зависеть от офицера. Это относится ко всем видам управления (упр.) людьми и группами лиц и организациями.

Понятие зависимость приводит к понятию руководства и власти. Если условиться, что власть зиждется на возможности руководства или упл-ия людьми или группами лиц, то основой должна быть зависимость руководимых (S_1) от того или тех, кто руководит (S_2). Причем S_2 иногда наз-ют доминирующей системой или средой.

Зависимость и власть не одно и то же.

Власть – это возможность для доминирующей системы упл-ть (или руководить) поведением зависимой системы на основе зависимости. Доминирующая система направляет действия зависимой системы посредством «наказаний» или «поощрений». Причем зависимость должна быть пропорциональна «наказанию» или «поощрению».

Аналогичные подтверждения сказанного можно найти в области международных, политических и экономических или имущественных отношений и т.д. Понятие зависимости одной страны от другой яв-ся в этом смысле совершенно классическим. В частности, известны примеры зависимости развивающихся стран от поставок продуктов питания из других стран, примеры зависимости от поставок сырья и военной техники и т.д. Сокращение или прекращения этих поставок есть наказание, а увеличение размеров поставок – поощрение.

В социальной системе опр-ые зависимости постоянно возникают и отмирают. История человечества яв-ся на самом деле историей зависимостей между людьми.

В дальнейшем обз-им через S_2 – государство, s_2^τ – индивид τ ($s_2^\tau \in S_2$), S_1 – зависимая система, s_1^r – индивид r ($s_1^r \in S_1$), φ – эффективность и качество работы, П = $\left\{П_j\right\}$ - исходные положения, К = $\left\{k_i\right\}$ - основные критери (кт.), характеризующие (хркз.) φ на основе П, a_{ij} – важность, т.е. предпочтительность (прч.) кт. k_i над кт. k_j.

По нашему мнению, вся работа S_2 по эффективности и качества для динамичного развития страны сводится к выполнению двух основных задач: 1. Постоянно развивать и улучшать генофонд, а все остальные (обеспечение народа жильем и питанием, образованием и воспитанием, работой и медицинским обслуживанием) подчинены и исходят из этой глобальной задачи.

2. Строго соблюдать принцип коридора по зарплате (если s_2^τ получает в месяц 70 тыс. руб., а s_1^r – 700 руб., то это есть полное нарушение принципа коридора), по установленной демократии, по принятым законам (все $\left\{s_2^\tau\right\} u \left\{s_1^r\right\}$ должно быть одинаковы перед демократией и законом) и по принятым или установленным кодексом общественной и семейной жизни. Основная причина коррупции властей и возникновение терактов в регионах или странах кроется именно в несоблюдении принципа коридора.

Теперь сформулируем исходное положение, учитывая введенные обз-ия.

П$_1$. Постоянно улучшать генофонд, как основного принципа развития страны.

П$_2$. Жилье должен иметь каждый человек.

П$_3$. Питание должно быть научно обоснованным.

П$_4$. Образование должно быть бесплатным для простого народа.

П$_5$. Воспитание должно быть постоянным и обдуманным. Радио, телевидение, вся печатная информация и др. воспитательные организации должны находиться под строгим контролем S_2.

П$_6$. Постоянно заботиться обеспечением работой каждого трудоспособного человека.

П$_7$. Медицинская помощь должна быть бесплатной для простого народа.

П$_8$. Всем $\left\{s_2^\tau\right\}$ и $\left\{s_1^r\right\}$ соблюдать принцип коридора.

П$_9$. S_2 должна держать народные богатства в своих руках, беречь и преумножать их для нужды народа.

На основе исходных положений П$_1$-П$_9$ фиксируем основные кт-и $\left\{k_i\right\}$, хркз-ие φ.

k$_1$ – анализировать генофонд как фк-ю, зв-ую от ств-их параметров, к-ых надо выявлять и работать над их улучшением и изменением.

k₂ – обеспечением жилья должны заниматься $\left\{S_2^\tau\right\}$ всех уровней, с участием самих нуждающихся; при этом надо предусмотреть выделение субсидии остро нуждающимся.

k₃ – правильное питание есть самое главное в жизни человека; поэтому институты по питанию должны разработать научно обоснованные рекомендации и рекламировать их всеми доступными средствами.

k₄ – в области образования необходимо избегать двух кратностей (все бесплатно или все платно), целесообразно придерживаться принципа 50 на 50, т.е. простой народ, к-ый не имеет возможности, должен получать бесплатное образование, ибо терять Ломоносовых преступно.

k₅ – воспитанием должны заниматься все $\left\{S_2^\tau\right\}$ и $\left\{S_1^r\right\}$ всех уровней постоянно и обдуманно, начиная от рождения человека до его старости, оберегая от дурных влияний, устраняя мешающие факторы и создавая ств-ие условия для выполнения этого благородного дела, считая это глобальной задачей всего общества.

k₆ – работа яв-ся первейшей необходимостью каждого человека, любой трудоспособный человек должен работать, чтобы он не терял человеческого качества; поэтому все $\left\{S_2^\tau\right\}$ всех уровней должны стараться создать рабочие места, обеспечив работой трудоспособное население, и всегда держать этот вопрос под контролем.

k₇ – медицинское обслуживание населения быть бесплаченым не может, и в то же время простой народ, к-ый не имеет возможности, не должен оставаться без медицинской помощи; врачебное деление населения по группам инвалидности ничего не дало, а наоборот, ситуацию осложнило, т.к. часть населения разными путями добились группы, но часть дст-но больных осталась за бортом; поэтому в этой области S_2 должен установить твердый порядок и объективно подходить к этому важному делу и срочно изменить ситуацию в лучшую сторону.

k₈ – соблюдение принципа коридора со всеми индивидами $\left\{S_2^\tau\right\}$ и $\left\{S_1^r\right\}$ всех уровней настолько важен, что без этого принципа разговор о динамичном развитии страны быть не может, ибо это есть установление твердого и в то же время гибкого порядка во всех сферах жизни, учитывая индивидуальные особенности индивидов общества в пределах допустимой возможности; этот коридор по зарплате, по демократии, по принятым законам, по кодексам общественной и семейной жизни устанавливаются законом на прозрачной основе; после установления коридора, все должны подчиняться принципу коридора, т.е. все одинаковы в пределах этого коридора; кто осмеливается выйти за пределы этого коридора, должен получить строгое наказание.

k₉ – народные богатства (земля, лес, энергитические ресурсы, полезные ископаемые, рыбные ресурсы и др.) должны принадлежать народу; их приватизация и обогащение отдельных лиц за счет этого богатства не допустимо;

также не допустимо особо важные объекты (выпуск вино-водочных изделий, крупные заводы, фабрики и т.д.), приносящие солидные доходы, отдавать частным лицам.

$\boldsymbol{k_{10}}$ – многоукладность в сферах, как производственных (в сельском хозяйстве, строительстве и. т.д.), научно-воспитательных (наука, образование, религия и.др.), обслуживающих (медицина, почта, бизнес и.т.д.) и др. сферах играет важную роль, т.к. через них привлекаются разные творческие силы работоспособного населения; поэтому S_2 должна обращать внимание на принципы многоукладности и заниматься их развитием, держа под контролем.

Теперь сформулируем постановку задачи.

Пусть фиксированный неупорядоченный набор $k_1 – k_{10}$, хркз-их φ на базе $П_1$–$П_9$ опр-ен на основе экспертных оценок с помощью девятибалльной шкалы с учетом степени важности каждого из этих кт-ев отс-но остальных.

Требуется найти опт-ю (в смысле $П_1$–$П_{10}$) оценку φ с помощью совместного учета $k_1 – k_{10.}$

Такая постановка задачи позволяет целенаправленно организовать работу и получить его оценку с помощью простых расчетов, математическим аппаратом к-ых яв-ся весовые фк-и $[97]$. Итак, эффективность и качество работ S_2 опр-им как весовые фк. от k_1–k_{10}:

$$\varphi = \varphi\ (k_1, k_2,\ldots, k_{10.}) \qquad (16)$$

В отн. (16) каждый k_i не одинаково важен отс-но остальных кт-ев, т.е. зависит от остальных, что устанавливается с помощью попарного сравнения k_i. Причем результат сравнения – превосходство k_i над k_j выразим через «важно», превосходство k_i над остальными $\{k_i\}$ – через «предпочтительно», а эффективность и качество работы φ – через «эффективно». А степени a_{ij} сравнения k_i над k_j и коэф-ты α_j^0 эффективности (табл.7) выражаются в баллах $\{i_2\}$ по девятибалльной шкале.

Таблица 7

i_2	a_{ij}	α_i
0,2	неважно	неэффективно
0,4	чуть важно	чуть эффективно
0,6	маловажно	мало эффективно
0,8	более важно	менее эффективно
1,0	одинаково важно	эффективно
1,2	важнее	более эффективно
1,4	очень важно	очень эффективно
1,6	ультраважно	ультраэффективно
1,8	суперважно	суперэффективно

Пусть $P(k_i)$ – важность k_i. Тогда $a_{ij} = 1$, если $P(k_i) = P(k_j)$; $a_{ij} = \{0{,}2/0{,}4/0{,}6/0{,}8\}$, если $P(k_i)<P(k_j)$; $a_{ij} = \{1{,}2/1{,}4/1{,}6/1{,}8\}$, если $P(k_i)>$ $>P\ (k_j)$, где / – знак или. Причем a_{ij} обладают свойствами $a_{ii} = 1$ и $a_{ij} = 2– a_{ji}$. На основе экспертных оценок $\{a_{ij}\}$ заполнены в табл. 8.

Таблица 8

k	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	$\sum a_{ij}$	a_i	$a^0{}_i$	α_i^0	$\sqrt{a^o{}_i \alpha^0{}_i}$	$\beta^0{}_i$	$\gamma^0{}_i$	$\sqrt{\alpha^0{}_i \beta^0{}_i}$	$\sqrt{\alpha^0_i \gamma^0_i}$
k_1	1,0	0,4	0,6	1,0	0,8	0,2	0,4	1,0	1,6	1,4	8,4	0,084	0,780	1,2	0,967	0,6	1,8	0,684	1,185
k_2	1,2	1,0	1,8	1,4	1,2	0,8	0,6	0,2	1,2	1,0	10,8	0,108	1,188	1,4	1,290	1,6	1,2	1,379	1,194
k_3	1,4	0,2	1,0	0,4	0,8	0,2	0,6	0,4	1,4	0,8	7,2	0,072	0,576	1,4	0,898	1,4	1,6	0,898	0,960
k_4	1,0	0,6	1,6	1,0	1,2	1,2	0,8	0,6	1,6	1,2	10,8	0,108	1,188	1,8	1,462	1,4	1,6	1,290	1,379
k_5	1,2	0,8	1,2	0,8	1,0	0,4	0,2	0,8	1,4	1,6	9,4	0,094	0,950	1,6	1,233	1,2	1,8	1,068	1,308
k_6	1,8	1,2	1,8	0,8	1,6	1,0	0,8	1,2	1,8	1,8	13,8	0,138	1,699	1,6	1,649	0,8	1,6	1,166	1,649
k_7	1,6	1,4	1,4	1,2	1,8	1,2	1,0	0,4	1,6	1,8	14,4	0,144	1,800	1,8	1,800	0,4	1,6	0,849	1,697
k_8	1,0	1,8	1,6	1,4	1,2	0,8	0,6	1,0	1,8	1,4	12,6	0,126	1,495	0,8	1,094	0,6	1,4	0,947	1,447
k_9	0,4	0,8	0,6	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	1,0	0,4	5,0	0,050	0,200	1,6	0,566	0,4	1,8	0,283	0,600
k_{10}	0,6	1,0	1,2	0,8	0,4	0,2	0,2	0,6	1,6	1,0	7,6	0,076	0,644	0,2	0,359	0,8	1,8	0,718	1,077
Σ	11,6	9,2	12,8	9,2	10,6	6,2	5,6	7,4	15,0	12,4	100	1,000	10,520	13,4	11,318	9,2	16,2	9,282	12,496

Исходя из $\{a_{ij}\}$ можно опр-ть коэф-ты $\{a_i\}$ прч-ти k$_i$ над $\{k_j\}$:

$$a_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ ,\ \text{n}=10 \qquad (17)$$

Для практического использования коэф-та $a_i=[\alpha,\beta]=[\min a_i,\max a_i]=$ $=[0,050;0,144]$ (см. табл. 8) необходимо ее прб-ть в $a_i^0=[a,b]=[0,2;\ 1,8]$ по

$$a^0{}_i=\frac{b-a}{\beta-\alpha}a_i+\frac{\beta a-\alpha b}{\beta-\alpha} \qquad (18)$$

Из (18), подставив числовые значения вместо параметров, получим

$$a_i^0=17,021a_i-0,65 \qquad (19)$$

Значения $a^0{}_i$ даны в табл. 8. В частности, $a^0{}_7=1,8$ и $a^0{}_9=0,2$, остальные расположения между ними.

Коэф-ты эффективности α_i^0 (без учета a_i^0) каждого k_i отн-ия (16) опр-ся (табл.8) с помощью оценок каждого S$_2$ в отдельности. Отсюда с учетом a_i^0 получим среднее значение эффективности

$$\alpha=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\alpha_i^0},\quad n=10 \qquad (20)$$

Чтобы пользоваться стн-ем (20) необходимо еще опр-ть крайнюю степень эффективности α. Для этого рас-им заведомо плохой работы S$_2$, не отвечающий указанным кт-ям, для к-го α_i^0=0,2 $(i=\overline{1,10})$. Откуда по (20) имеем $\underline{\alpha}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\cdot 0,2}=0,443$ и $\overline{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^0\cdot 1,8}=1,334$ для заведомо отлично работающего S$_2$.

Сегмент $[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]=[0,443;\ 1,334]$ разделим на пять сегментов {φ$_i$} и дадим оценку (табл. 9) эффективности работы S$_2$ по общепринятой пятибальной шкале

Таблица 9

№	φ_i	Оценка
1	0,443; 0,621	Очень плохо
2	0,622; 0,798	Плохо
3	0,799; 0,977	Удовлетворительно
4	0,978; 1,155	Хорошо
5	1,156; 1,334	Отлично

п4. Пусть требуется оценить эффективность и качества работы государства S$_2$ по предложенной методике.

Р. Заполняем колонку α_i^0 (хркз-ю S$_2$ по кт-ям k$_1$-k$_{10}$) табл. 8. Затем, используя стн. (20) находим α=1,132. Т.к. 1,132 Є $[0,978;\ 1,155]$, то работа S$_2$ оценивается на «хорошо».

п5. Пусть требуется оценить эффективность и качество работы двух государств S_2^1 *и* S_2^2 и получить сравнительную оценку их работы.

Р. Заполняем колонки β_i^0 *и* γ_i^0 (хркз-ие работы ств-но S_2^1 *и* S_2^2 по кт-ям k_1-k_{10}) табл. 8. По стн-ям (20) находим $\beta = 0,928$ и $\gamma = 1,250$. Т.к. $\beta = 0,928 \in [0,799; 0,977]$ и $\gamma = 1,250 \in [1,156; 1,334]$, то работа государств S_2^1 *и* S_2^2 оцениваются ств-но на «удовлетворительно» и «отлично».

Отметим, что по этой же методике оценена эффективность и качество научной работы [95].

зм4. Некоторые моменты предложенной методики могут уточняться, н-р, формулировка и перечень исходных положений и основных кт-й, а также коэф-ты табл. 8. Однако главное здесь – в методике и весовом подходе к анализу оценки эффективности и качества работы S_2 или сравнительной оценки работ S_2^1 и S_2^2. Сама формулировка исходных положений и основных критерий уже позволяет осмыслить, как улучшить работу, а получение сравнительных оценок работ позволяет количественно анализировать эти работы.

зм5. Методику, предложенную в 7.4 можно использовать и при оценке эффективности и качества работы профессорско-преподавательского состава того или иного ВУЗа для установления рейтинга каждого преподавателя в отдельности. Т.к. здесь учитывается важность отдельного вида работы P_i по сравнению со всеми остальными работами $\{P_j\}$, а вычислительная схема легко может быть автоматизирована, то предложенная методика существенно упрощает и поднимает уровень объективности при оценке эффективности и качества работы конкретного преподавателя по сравнению с аналогичной работой по установлению рейтинга преподавателей без учета важности отдельного вида работы и без введения ств-ей шкалы для каждой из них.

7.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

7.1. ВЕСОВОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ.

Вопросы для самопроверки

1. В чем причина широкого использования нечеткого мн-ва в последние годы?

2. Что такое лнгв. пер-ые и какими св-ми они обладают?

3. Чем отличаются нечеткое мн. N от обычного мн. M?

4. Перечислите основные операции нечеткого мн-ва.

5. Почему нечеткое мн-во яв-ся основой сложных систем?

6.В чем состоит основные идеи весового подхода при анализе нечеткого мн.?

7. Сформулируйте постановки задач в трех аспектах использования весового метода.

Задания для кр. работы: на базе 1°–5° анализировать нечеткие множества (НМ), описываемые сд. лингвистическими (лнгв.) пер-ми.

1. Высота; 2. Холод; 3. Доброта; 4. Работоспособность; 5. Конкурентоспособность.

Ук: выбрать вид объекта, шкалу изменения лнгв. пер-ой и фк-ю принадлежности $\mu(x)$.

7.2. ВЕСОВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие весовой фк-и и ее основных свойств.

2. Что понимаете под исходными положениями и основными критериями.

3. Как находится весовые фк. для решения задач МП?

4. В чем состоит суть весового подхода для ускорения сходимости симплекс-метода?

5. Как используется весовой метод для решения многоэкстремальных задач.

6. Дайте геом. интерпретацию основных этапов весового и других методов и их различия.

Задания для кр. работы: по образцу рас-ых примеров в 3°–5° решить задачи:

1^*. 35-54 стр. 314.

2^*. 1-20 стр. 316.

3^*. 1-20 стр. 414.

7.3. ВЕСОВОЙ МЕТОД КАК ПРОЦЕСС МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается основные идеи весового метода при составлении мт-их моделей сложных систем?

2. Как формулируются исходные положения и основные критерии мт-ой модели задачи составления учебного расписания?

3. Приведите мт-ю модель составления расписаний учебных занятий.

4. Сформулируйте постановку мт-ой модели задачи составления расписания семестровых экзаменов.

5. Приведите мт-ю модель расписания семестровых экзаменов.

Задания для кр. работы: по образцу рас-ых примеров в 1^o–3^o решить задачи:

1. Сформулировать постановку и мт. модель составления учебного расписания с конкретными параметрами в школе, где вы учились.

2. Сформулировать постановку и мт. модель составления расписания экзаменов с данными параметрами в школе, где вы учились.

7.4. ВЕСОВОЙ МЕТОД КАК СПОСОБ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Вопросы для самопроверки

1. Почему нх-ма кол. оценка опр-ия системы и ее сложности?

2. Как формулируются исх. полож. и основные кт. для анализа системы.

3. Как получается кол. оценка при анализе сложных систем.

4. Расскажите основные идеи весового подхода к оценке эффективности и качества вузовского учебника мт-ки.

5. Почему необходимо предмодельное исследование?

6. Как можно получить сравнительную оценку динамического развития страны на основе эффективной и качественной работы государства?

Задания для кр. работы: по образцу рас-ых примеров в 1^o–3^o решить задачи:

1. Сформулировать исх. положения П_i ($i = \overline{1,m}$) и ств-ие им основные кт. К_j ($j=\overline{1,n}$) по девятибалльной шкале, хркз-ие эффективность и качество работы трудящихся отрасли, где вы работаете, или где вы желаете работать.

Требуется найти опт-ю (в смысле П_1–П_m) оценку φ с помощью совместного учета кт-й к_1–к_n и получить численную оценку производительности работы конкретного работника.

2. Сформулируйте исх. положение $\text{П}=\{\text{П}_i\}$ и ств-ие им основные кт. $\text{К}=\{\text{К}_j\}$, хркз-ие качество знаний студента, будущего хорошего работника по своей специальности.

Требуется найти опт-ю (в смысле $\{\text{П}_i\}$) оценку φ с помощью совместного учета кт-й $\{\text{К}_j\}$ с целью выпуска специалистов, отвечающим современным требованиям уровни науки, техники и жизни.

3. Сформулируйте исх. положения $\{\text{П}_i\}$и основные кт. $\{\text{К}_j\}$ для опт-ой оценки φ (аналогично задач 1 и 2) с целью динамичного развития с/х и поднятия уровня жизни сельского населения.

4. Сформулируйте задачу (аналогично к задаче 3) с целью динамичного развития промышленности и поднятия уровня жизни городского населения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И.** Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М., «Наука», 1970, 384 с.

2. **Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.** Сборник задач по оптимизации. М., «Наука», 1984, 288 с.

3. **Амелькин В. В.** Дифференциальные уравнения в приложениях. М., «Наука», 1987, 160 с.

4. **Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.** Анализ синтез планирование решений в экономике. М., «Финансы и статистика», 2001, 368 с.

5. **Багриновский К. А., Бусыгин В. П.** Математика плановых решений. М., «Наука», 1980, 224 с.

6. **Бекишев Г. А., Кратко М. И.** Элементарное введение в геометрическое программирование. М., «Наука», 1980, 144 с.

7. **Беленький В. З., Волконский В.А.** и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. М., «Наука», 1974, 240 с.

8. **Бергстром А.** Построение и применение экономических моделей. М., «Прогресс», 1970, 176 с.

9. **Бертсекас** Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М., «Радио и связь», 1987, 400 с.

10. **Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Экспертные** оценки в принятии плановых решений. М., «Экономика», 1976, 79 с.

11. **Браверман Э. М.** Математические модели планирования и управления в экономических системах. М., «Наука», 1976, 367 с.

12. **Брусиловский Б. Я.** Математические модели в прогнозировании и организации науки. Киев, «Наукова думка», 1975, 232 с.

13. **Бусленко Н. П.** Моделирование сложных систем. М., «Наука», 1978, 400 с.

13 а. **Вагнер Г.** Основы исследования операций. М., «Мир», Том 1, 1972, 336 с. Том 2, 1973, 488 с.

14. **Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.** Теория распознавания образов. М., «Наука», 1974, 416 с.

15. **Васильев В. И.** Распознающие системы (справочник). Киев, «Наукова думка», 1983, 423 с.

16. **Вуколев Э. А., Ефимов А. В.** и др. Сборник задач по математике (для вузов). Специальные курсы. М., «Наука», 1984, 608 с.

17. **Гасс С.** Линейное программирование (методы и приложения). М., «ФИЗМАТГИЗ», 1961, 304 с.

18. **Гейл Д.** Теория экономических моделей. М., Изд. иностранной литературы, 1963, 419 с.

19. **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций. М., «Наука», 1971, 384 с.

20. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Новые направления в линейном программировании. М., «Советское радио», 1966, 524 с.

21. **Гольштейн Е. Г.** Выпуклое программирование (элементы теории). М., «Наука», 1970, 68 с.

22. **Горстко А. Б.** Познакомьтесь с математическим программированием. М., «Знание», 1991, 160 с.

23. **Гутер Р. С., Янпольский А. Р.** Дифференциальные уравнения. М., «Высшая школа», 1976, 304 с.

24. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. М., Изд. физ-мат. лит., 1963, 660 с.

25. **Джефферс Дж.** Введение в системный анализ: применение в экологии. М., «Мир», 1981, 256 с.

26. **Дубров А. М.** Последовательный анализ в статистической обработке информации. М., «Статистика», 1976, 160 с.

27. **Дубров А. М., Лагоша Б. А.** и др. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. М., «Финансы и статистика», 2001, 224 с.

28. **Дуда Р., Харт П.** Распознавание образов и анализ сцен. М., «Мир», 1976, 512 с.

29. **Дудорин В. И.** Моделирование в задачах управления производством. М., «Статистика», 1980, 232 с.

30. **Евланов Л. Г., Кутузов В. А.** Экспертные оценки в управлении. М., «Экономика», 1978, 133 с.

31. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., «Наука», 1982, 432 с.

32. **Емеличев В. А., Комлик В. И.** Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М., «Наука», 1981, 208 с.

33. **Ермаков С. М., Жиглявский А. А.** Математическая теория оптимального эксперимента. М., «Наука», 1987, 320 с.

34. **Ермольев Ю. М., Ястремский А. И.** Стохастические модели и методы в экономическом планировании. М., «Наука», 1979, 254 с.

35. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика. М., «Наука», 1979, 320 с.

36. **Ефимов Е. И.** Решатели интеллектуальных задач. М., «Наука», 1982, 317 с.

37. **Заде Л. А.** Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. Сб. «Математика сегодня». М., «Знание», 1974, с. 5-49.

38. **Зайченко Ю. П.** Исследование операций. Киев, «Вища школа», 1972, 392 с.

39. **Зангвилл У.** Нелинейное программирование. М., «Советское радио», 1973, 312 с.

40. **Заславский Ю. Л.** Сборник задач по линейному программированию. М., «Наука», 1969, 256 с.

41. **Иванилов Ю. П., Лотов А. В.** Математические модели в экономике. М., «Наука», 1979, 304 с.

42. **Иозайтис В. С., Львов Ю. А.** Экономико-математическое моделирование производственных систем. М., «Высшая школа», 1991, 192 с.

43. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974, 480 с.

44. **Калихман И. Л., Войтенко М. А.** Динамическое программирование в примерах и задачах. М., «Высшая школа», 1979, 125 с.

45. **Калихман И. Л.** Сборник задач по математическому программированию. М., «Высшая школа», 1975, 270 с.

46. **Канторович Л. В., Горстко А. Б.** Оптимальные решения в экономике. М., «Наука», 1972, 232 с.

47. **Карр Ч., Хоув Ч.** Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. М., «Мир», 1966, 464 с.

48. **Кейслер Г. Дж., Чень-чунь Чэн.** Теория непрерывных моделей. М., «Мир», 1971, 184 с.

49. **Комаров В. Ф.** Управленческие имитационные игры и АСУ. Новосибирск, «Наука», 1979, 256 с.

50. **Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.** Дискретное программирование. М., «Наука», 1969, 368 с.

51. **Кравченко Р. Г.** Экономико-математические модели задач по сельскому хозяйству. М., «Экономика», 1965, 312 с.

52. **Крэйн М., Лемуан О.** Введение в регенеративный метод анализа моделей. М., «Наука», 1982, 104 с.

53. **Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.** Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1975, 624 с.

54. **Кузин Л. Т.** Основы кибернетики. Т. 2. Основы кибернетических моделей. М., «Энергия», 1979, 584 с.

55. **Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. В.** Математическое программирование. М., «Высшая школа», 1980, 300 с.

56. **Кулик В. Т.** Небулярные множества. Сб. «Промышленная кибернетика», Киев, 1971.

57. **Кучин Б. Л., Якушева Е. В.** Управление развитием экономических систем. М., «Экономика», 1990, 157 с.

58. **Лоран П. Ж.** Аппроксимация и оптимизация. М., «Мир», 1975, 496 с.

59. **Ляшенко И. Н.** и др. Линейное и нелинейное программирование. Киев, «Вища школа», 1975, 372 с.

60. **Макаров И. М.** и др. Теория выбора и принятия решений. М., «Наука», 1982, 328 с.

61. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., «Наука», 1982, 320 с.

62. Математика в социологии: моделирование и обработка информации. Под ред. А. Г. Аганбегяна и Ф. М. Бородкина. М., «Мир», 1977, 552 с.

63. Математическая энциклопедия. Т. 3. М., «Советская энциклопедия», 1982, 1183 с.

64. Математическое моделирование: Проблемы и результаты. М., «Наука», 2003, 478 с.

65. **Мейстер Д.** Эргономические основы разработки сложных систем. М., «Мир», 1979, 456 с.

66. **Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.** Методы оптимизации. М., «Наука», 1978, 352 с.

67. **Моисеев Н. Н.** Математика ставит эксперимент. М., «Наука», 1979, 223 с.

68. **Мордухович Б. Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М., «Наука», 1988, 360 с.

69. **Моришима М.** Равновесие, устойчивость, рост (многоотраслевой анализ). М., «Наука», 1972, 280 с.

70. **Норкин С. Б., Берри Р. Я.** и др. Элементы вычислительной математики. М., «Высшая школа», 1966, 208 с.

71. **Орловский С. А.** Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М., «Наука», 1981, 206 с.

72. **Оскар Ланге.** Оптимальные решения. М., «Прогресс», 1967, 286 с.

73. **Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.** Введение в системный анализ. М., «Высшая школа», 1989, 368 с.

74. **Петров А. В., Алексеев В. Е.** и др. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. М., «Высшая школа», 1984, 320 с.

75. **Погорелов А. В.** Основания геометрии. М., «Наука», 1968, 152 с.

76. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. М., «Наука», 1982, 256 с.

77. **Пойа Д.** Математика и правдоподобные рассуждения. М., «Наука», 1975, 464 с.

78. **Пойа Д.** Математическое открытие. М., «Наука», 1970, 452 с.

79. **Положий Г. Н., Пахарева Н. А.** и др. Математический практикум. М., Изд. физ-мат. лит., 1960, 512 с.

80. **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., «Наука», 1980, 320 с.

81. **Райветт П., Акофф Р. Л.** Исследование операций. М., «Мир», 1966, 144 с.

82. **Райфа Г.** Анализ решений (введение в проблему выбора в условиях неопределенности). М., «Наука», 1977, 408 с.

83. **Розен В. В.** Математические модели принятия решений в экономике. М., «Высшая школа», 2002, 288 с.

84. **Саульев В. К.** Вероятностно-статистические методы теории исследования операций. М., «Знание», 1973, 54 с.

85. **Скурихин В. И., Шифрин В. Б., Дубровский В. В.** Математическое моделирование. Киев, «Техника», 1983, 270 с.

86. **Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.** Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений. М., «Наука», 1965, 512 с.

87. Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей. М., «Наука», 1982, 392 с.

88. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1979, 286 с.

89. **Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.** Рассказы о прикладной математике. М., «Наука», 1979, 208 с.

90. **Тухватов М. Б.** К определению системы и ее сложности I. Изв. АН УзССР. Серия техн. наук, 1978, № 6, с. 3-6.

91. **Тухватов М. Б.** Постановка и математическая модель задачи составления учебного расписания. Вопросы кибернетики. Вып. 100. Ташкент, 1978, с. 74-88.

92. **Тухватов М. Б.** Весовые функции и их основные свойства. Докл. АН УзССР. 1978, № 12, с. 15-17.

93. **Тухватов М. Б.** Математическая постановка составления расписания семестровых экзаменов. Автоматизация принятия решений и обработка данных в высшей школе. Ташкент: Таш ПИ, 1978. Вып. 251. с. 23-31.

94. **Тухватов М. Б.** К определению системы и ее сложности II. Изв. АН УзССР. Серия техн. наук, 1979, № 3, с. 3-8.

95. **Тухватов М. Б.** Количественная оценка эффективности и качества научной работы. Научные труды ТИНХ: Математические методы в экономике. Вып. 160. Ташкент, 1979, с. 79-98.

96. **Тухватов М. Б.** Постановка и экономико-математическая модель распределения учебных нагрузок на кафедрах. Научные труды ТИНХ: Математические методы в экономике. Вып. 180. Ташкент, 1980, с. 26-41.

97. **Тухватов М. Б.** Весовые методы в математическом программировании. Ташкент, «ФАН», 1981, 160 с.

98. **Тухватов М. Б.** Весовой подход к оценке эффективности и качества вузовского учебника математики. Научные труды ТИНХ: Применение математических методов в экономических исследованиях. Вып. 205. Ташкент, 1982, с. 66-79.

99. **Тухватов М. Б.** Формирование весовых функций для переменных многоэкстремальных задач. Докл. АН УзССР. 1982, № 11, с. 3-5.

100. **Тухватов М. Б.** Задачи и принципы построения АСУ ВУЗ. Деп. 20.08.82 г. № 399-82, 160 с.

101. **Тухватов М. Б.** Весовой подход к моделированию сложных систем. Докл. АН УзССР. 1983, № 4, с. 8-10.

102. **Тухватов М. Б.** Весовой метод решения многоэкстремальных задач. Изв. АН УзССР. Серия техн. наук. 1983, № 2, с. 11-14.

103. **Тухватов М. Б.** Некоторые задачи сложных систем. Изв. АН УзССР. Серия техн. наук, 1983, № 4, с. 7-10.

104. **Тухватов М. Б.** Весовой подход к анализу нечетких множеств. Деп. в ВИНИТИ 14.03.83. № 1332-83, 22 с.

105. **Тухватов М. Б.** Весовой поиск решений многоцелевой задачи математического программирования. Изв. АН УзССР. Серия техн. наук, 1984, № 6, с. 19-21.

106. **Тухватов М. Б.** Лекции по математике (для поступающих в вузы и самообразования). Уфа – 1997, 640 с.

107. **Тухватов М. Б.** Лекции по общей математике. Часть I. Множества и их отображения. Дискретная математика. Уфа. Изд. БГАУ, 2002, 396 с.

108. **Ужегов Г. И.** Биоритмы. Смоленск, «Русич», 1997, 400 с.

109. **Уилкс С.** Математическая статистика. М., «Наука», 1967, 632 с.

110. **Фан Лянь-Цэнь, Вань Чу-Сен.** Дискретный принцип максимума. М., «Мир», 1967, 180 с.

111. **Федосеев В. В., Гармаш А. Н.** и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. М., «ЮНИТИ», 1999, 392 с.

112. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., «Мир», 1972, 240 с.

113. **Флейшман Б. С.** Основы системологии. М., «Радио и связь», 1982, 368 с.

114. **Фомин Г. П.** Математические методы и модели в коммерческой деятельности. М., «Финансы и статистика», 2001, 544 с.

115. **Фомин С. В., Беркинблит М. Б.** Математические проблемы в биологии. М., «Наука», 1973, 200 с.

116. **Хант Э.** Искусственный интеллект. М., «Мир», 1978, 558 с.

117. **Хедли Дж.** Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967, 507 с.

118. **Цлаф Л. Я.** Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., «Наука», 1970, 192 с.

119. **Цурков В. И.** Декомпозиция в задачах большой размерности. М., «Наука», 1981, 352 с.

120. **Чигинадзе В. К.** Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М., «Наука», 1983, 256 с.

121. **Шелобаев С. И.** Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. М., «ЮНИТИ», 2001, 368 с.

122. **Шеффе Г.** Дисперсионный анализ. М., «Наука», 1963, 626 с.

123. **Ширяев А. И.** Статистический последовательный анализ. М., «Наука», 1969, 232 с.

124. **Эйдельнант М. И.** и др. Сборник задач по курсу математического программирования. Ташкент – 1972, 177 с.

125. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., «Мир», 1979, 400 с.

126. **Эльстер К. Х.** и др. Введение в нелинейное программирование. М., «Наука», 1985, 264 с.

127. **Эндрю А.** Искусственный интеллект. М., «Мир», 1985, 265 с.

128. **Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.** Линейное программирование (теория и конечные методы). М., «ФИЗМАТГИЗ», 1963, 776 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ (КС)

В конце опр-й приводятся номера страниц книги, где встречаются данные термины. Поэтому КС может использоваться и как предметный указатель. Кроме того, даются английские эквиваленты терминов.

АВТОМАТ (automic machine, от греч. «самодействующий») – устройство, самостоятельно выполняющее некий процесс по заложенной в него программе. Программа может фиксироваться либо непосредственно в устройстве автомата, либо на вводимом в автомат носителе. 50, 53, 557

АВТОМАТИЗАЦИЯ (abtomation) – внедрение автоматов в практическую деятельность (н-р, автоматизация управления, нефтедобычи, медицинской диагностики, погрузочных работ и т. п.). 32, 560

АГРЕГАТ (aggregate, от лат. «присоединять») – любая выделенная совокупность, от неструктурированной (множество, конгломерат) до высокоорганизованной системы. 41

АГРЕГИРОВАНИЕ (aggregation) – 1) операция образования агрегата; 2) преобразование многомерной модели в модель меньшей размерности. 41

АЛГОРИТМ (algorithm, от имени узбекс. мт-ка IX в. Аль-Хорезми) –1) полное описание посл-ти действий, выполнение к-ых в конце посл-ти приводит к достижению цели; 2) конечный текст, записанный на алгоритмическом языке. Первоначально сугубо мт. понятие алгоритма в настоящее время расширено: допускается включение в алгоритм и указаний на неформализуемые действия, лишь бы они правильно понимались и выполнялись людьми (н-р, алгоритм изобретения). Алгоритм, воспринимаемый и исполняемый автоматом, наз. программой. 44, 555

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ (algorithmization) – 1) составление алгоритма для проектируемого процесса (н-р, алгоритмизация решения задачи); 2) выявление алгоритма, формализация существующего процесса (обычно в целях изучения, совершенствования или автоматизации). 44

АЛЬТЕРНАТИВА (alternative) – вариант, одна из двух или более возможностей; то, что можно иметь, использовать и т. д. вместо чего-то еще. На множестве альтернатив осуществляется выбор. 50, 526

АНАЛИЗ (analysis, от греч. «расчленение») – 1) мысленное или реальное разделение целого на части (н-р, химический анализ вещества, декомпозиция глобальной цели и т. д.); 2) до недавнего времени – синоним научного исследования вообще («подвергнуть анализу» означало «изучать»); 3) метод познания, основанный на 1). Познание не сводится к анализу; только в сочетании, переплетении, единстве с синтезом становится возможным познание реальности. 566, 626

АРЕАЛ (лат. arealis площадь, пространство) биол. Область естественного распространения како-л. группы (вида, рода и т. п.) растений или животных. (см. популяция). 34, 47

БИО (гр. bios жизнь), в сложных словах указывает на отношение данных слов к жизни, жизненным процессам, биологии: биография, биостанция, биохимия, биоценоз, биосистема. 33, 39

БИОЛОГИЯ (био + гр. logos понятие, учение), наука о жизни на Земле, жизненных процессах и формах – животных, растениях и микроорганизмах. 33

БИОСФЕРА (био + гр. sphaira шар), область распространения жизни на Земле; населенная организмами поверхность суши с ее водами, толща морей и океанов (гидросфера) и нижняя часть атмосферы (тропосфера). 33

БИОЦЕНОЗ (био + гр. koinos общий), совокупность растений и животных, населяющих участок среды обитания с более или менее однородными условиями жизни (биотоп): животные и растительные организмы того или иного озера, луга, береговой полосы, лесного массива. 33, 46

ВЫБОР (choise) – 1)операция, входящая во всякую целенаправленную деятельность и состоящая в целевом суждении мн-ва альтернатив (обычно, если позволяют условия,– до одной альтернативы; 2) принятие решения. 39

ГИПОТЕЗА (hypothesis) – 1) предположение; утверждение, требующее д-ва или проверки; 2) форма развития науки. 40, 49

ГОМЕОСТАЗ, гомеостазис (гр. $\delta\mu o\tau o\xi$, подобный, одинаковый и $\sigma\tau\alpha\sigma\iota\xi$, состояние), свойства организма поддерживать свои параметры и физиологич. функции в определ. диапазоне, основанное на устойчивости внутр. среды организма по отношению к возмущающим воздействиям внеш. среды. В понятии Г. отражается диалектика изменчивости и устойчивости, присущая как природным, так и искусств. системам. 39, 46

ДЕКОМПОЗИЦИЯ (decomposition) – 1) операция разделения целого на части с сохранением признака подчиненности, принадлежности; 2) повторное или многократное такое разделение, в результате чего получаются древовидные иерархические структуры. 27, 41, 44

ИЕРАРХИЯ (греч. hierarchia) – порядок подчинения нижестоящих органов и должностных лиц вышестоящим по строго опр-ым ступеням – «иерархическая лестница», к-ый позволяет обозреть взаимодействие этих органов и должностных лиц.

Аналогично иерархическая упорядоченность мира – сложной системы (в природе, технике, обществе) позволяет обозреть их многообразие и понять сущ-ие в них закономерности. 32, 34

ИСБЫТОЧНОСТЬ (redundancy) – свойство сигналов и систем, обеспечивающее их устойчивость против разрушительного воздействия помех, шумов, отказов эл-ов, непредвиденных обстоятельств и т. д. Это свойство состоит во включении в структуру системы или сигнала большего числа эл-ов, чем это минимально необходимо при отсутствии помех. Если критерии эффективности связан с минимизацией числа эл-ов, то при отсутствии помех избыточность яв-ся излишней (отсюда – ее название), а при наличии помех – полезной, но возникает задача минимизации. 34

ИНГЕРЕНТНОСТЬ (inherence) – 1) согласованность модели с окружающей ее средой; принадлежность модели этой среде; 2) условие, необходимое для проявления, реализации модельных свойств модели. 41

ИНЕРЦИИ ЗАКОН квадратичных форм – теорема Сильвестра, утверждающая, что при любом способе приведения квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{S} a_{ij}x_i x_j$ с дев. коэф-ми к сумме квадратов $\sum_{i=1}^{S} b_i y_i^2$ посредством линейной замены переменных $\left(x_1,...,x_S\right)=\left(y_1,...,y_S\right)$Q, где Q – невыражденная матрица с дев. коэф-ми, число p (ствн. n) таких индексов i , что $b_i > 0$ (ствн. $b_i < 0$), остается неизменным (это в классич. форме).

В современной форме И. з. – это сд. утверждение о св-ах квадратичной формы над упорядоченными полями. Пусть E конечномерное пр. над упорядоченным полем K , снабженное невыражденной симметрич. билинейной формой f . Тогда сущ. такое целое число $p \leq 0$, что для любого ортогонального отс-но f базиса $e_1,...,e_S$ в E среди S эл-ов $f\left(e_i,e_i\right), i=\overline{1,S}$ имеется в точности P плж-ых и в точности $n=S-P$ отц-ых. Пара $\left(p,n\right)$ наз. сигнатурой билинейной формы f , а число n – ее индексом инерции. Две экв-ые формы имеют одинаковую сигнатуру. Если K – евклидово поле, то равенство сигнатур яв-ся достаточным условием экв-ти билинейных форм. Если индекс инерции $n=0$, форма наз. плж-но определенной, а при $p=0$ – отц-но определенной. Эти случаи характеризуются тем, что $f\left(x,x\right)>0$ (ствн. $f(x,\, x)<0$) для любого ненулевого вектора $x \in E$. Из И. з. вытекает, что сумма пр-в

$E = E_+ \oplus E_-$, таких, что сужение f на E_+ яв-ся плж-но определенной, а сужение f на E_- – отц-но определенной билинейной формой и $\dim E_+ = p,\ \dim E_- = n$ (так что размеренности пр-в E_+ и E_- не зависят от способа разложения).

Иногда сигнатурой форм f наз. разность $\sigma(f) = p - n$. 17, 364

ИНТЕЛЛЕКТ (intellect, от лат. «разум», «рассудок») – 1) интеллект естественный; внутренне – способность к абстракции; внешне – способность ориентироваться в незнакомых условиях и находить решение слабо формализованных задач; 2) интеллект искусственный – техническая имитация определенных возможностей естественного интеллекта (н-р, узнавания, образования понятий, принятия решений, синтеза речевых и эстетических сигналов и т.д.). 40, 49

ИНФОРМАТИКА (informatics, computer science) – 1) наука о научной и технической информации и ее циркуляции в обществе; 2) в последние годы информатикой называют научное направление, акцентирующее внимание на использовании ЭВМ в самых разнообразных областях человеческой деятельности. 36

ИНФОРМАЦИЯ (information) – 1) в обыденной речи – любые сведения, известия, сообщения, новости и т.д. 2) в научно-технических приложениях – то, что несет на себе сигнал; 3) как философская категория – всеобщее свойство материи, являющееся аспектом свойства отражения, допускающим количественное описание. 42, 43

КИБЕРНЕТИКА (cybernetics, от греч. «управлять») – в широком смысле – наука об управлении в системах произвольной природы. 32, 36

КЛАССИФИКАЦИЯ (classification) – 1) операция отнесения заданного объекта к одному из классов, внутри к-ых объекты считаться неразличимыми; результат этой операции; 2) простейший вид моделирования; в частности, самый слабый вид измерения. 32, 140

КОД (code) – совокупность условий и правил образования сигнала, использование к-ых на передающем и на приемном концах позволяет передавать и получить информацию с помощью сигнала. 41, 51, 560

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ (quantity of information) – числовая мера информации, содержащейся в одном случайном объекте. Опр-ся как некий функционал от ств-щих распределений вероятностей (н-р, по Шеннону, по Фишеру, по Кульбаку-Лейблеру и др.), либо как объем вычислений, необходимых для алгоритмического опр-ия состояния объекта. 51

КОНФИГУРАТОР (configurator, от англ., «формировать») – набор различных языков описания изучаемой системы, достаточной для проведения системного анализа данной проблемы. Определяется природой проблемосодержащей и проблеморазрешающей систем с целью анализа. 33

КОНЦЕПЦИЯ (лат. conceptio восприятие). Система взглядов на те или иные явления; способ рассмотрения каких-л. явлений, понимание чего-л; общий замысел (художника, поэта, ученого и т.д.) 53

КРИТЕРИЙ (criterion) – 1) средство для вынесения суждения; стандарт для сравнения; правило для оценки; 2) мера степени близости к цели; в этом смысле – модель цели. 515, 592, 599, 621, 627

МОДЕЛИРОВАНИЕ научн. Исследование объектов познания на моделях; построение и изучение моделей реально сущ-их предметов и явлений (органич. и неорганич. систем, инженерных устройств, разнообразных процессов – физических, химических, биологических, социальных) и конструируемых объектов для определения либо улучшения их характеристик, рационализации способов их построения, управления ими и т. п. Формы М. разнообразны и зависят от используемых моделей и сферы применения М. По характеру моделей выделяют материальное (предметное) и знаковое (идеальное) М.

Предметным наз. М., в ходе к-го исследование ведется на модели, воспроизводящей определенные геом., физические, динамические либо функциональные характеристики объекта М. (оргинала). При знаковом М. моделями служат схемы, чертежи, формулы, предположения в нек-ом алфавите (естест. или искусств. языка) и т.п. Важнейшим видом такого М., яв-ся математическое М., производимое выразительными и дедуктивными средствами математики и логики.

Понятие М. яв-ся гносеологич. категорией, характеризующей один из важных путей познания. Она основана на том, что модель в опред. смысле отображает (воспроизводит, моделирует) какое-либо стороны изучаемого объекта (оргинала). См. модель. 16, 555

МОДЕЛЬ (лат. modulus мера, образец, норма). 1. Образец какого-н. изделия или образец для изготовления чего-н., а также предмет, с к-го воспроизводится изображение. Н-р, новая М. платья; М. для литья; модели для скульптур. 2. Уменьшенное (или в натуральную величину) воспроизведения или макет чего-н. Н-р, М. корабля, летающая М. самолета. 3. Тип, марка конструкции. Н-р, новая М. автомобиля. 4. Схема какого-н. физического объекта или явления (спец.). Н-р, М атома; М искусственного языка. 5. Предмет изображения в искусстве, н-р, натурщица. 6. В логике и методологии науки-аналога (схема, структура, знаковая система) определ. фрагмента природной или социальной реальности, порождения человеч. культуры, концептуально-теоретич. образования и т.п.– оригинала М. Этот аналог служит для хранения и расширения знания (информации) об оргинале, конструирования оргинала, преобразования или управления им. С гносеологич. т. зр. М.– это «представитель», «заместитель» оригинала в познании и практике (см. моделирование). 16, 551

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ (uncertainty) – неоднозначность любого происхождения при описании системы. **Неопределенность расплывчатая** (fuzziness) – неопределенность, связанная с нарушением аксиом тождественности – неоднозначностью классификации. Описывается с помощью фк-и принадлежности. 493, 515, 549

НЕЧЕТКОЕ (размытое, расплывчатое, небулярное) множество, содержащее хотя бы один такой эл-т, о к-ком нельзя однозначно сказать принадлежит ли он или нет этому мн-у (мт-ая модель расплывчатой неопределенности). Степень уверенности выражается фк-ей принадлежности, принимающей значения из интервала $\left[0,1\right]$. 582

ОБЩЕСТВО, 1. Совокупность людей, объединенных исторически обусловленными социальными формами совместной жизни и деятельности. Н-р, феодальное о., капиталистическое о. 2. Круг людей, объединенных общностью положения, происхождения, интересов. Н-р, дворянское о., крестьянское о. 3. Добровольное, постоянно действующее объединение людей, для какой-н цели. Н-р, о. любителей книги, спортивное о. 4. Та или иная среда людей, компания. Н-р, попасть в дурное о. 5. Узкий круг избранных людей. Н-р, в о. старых друзей.644

ОСОБЬ – самостоятельно сущ-щий организм, индивидуум. Многообразие особей растительного мира, животного мира и т.д. 34

ПОПУЛЯЦИЯ (фр. population население) биол. Совокупность особей растительного или животного мира определенного ареала, принадлежащих к тому или иному виду; форма существования вида (см. ареал). 34, 47, 48

ПРОБЛЕМА (problem, от греч, «задача») – 1) проблема развития – неуд. состояние системы, изменение к-го к лучшему яв-ся непростым делом; 2) проблема функционирования – уд. состояния системы, сохранение к-го требует постоянных и непростых усилий (н-р, проблема выживания) 29, 567

ПРОБЛЕМНАЯ СТУАЦИЯ (problem situation) – такая ситуация, когда неуд-сть существующего положения осознана, но не ясно, что следует сделать для его изменения. 29, 567

СИГНАТУРА (signore, лат, «обозначать»), 1) С. алг-ой системы – совокупность отношений и операций, действующих на основном мн-ве данной алг. системы, вместе с указанием их арностей. Алг. система (универсальная алг.) с сигнатурой Ω наз. также Ω – системой (соответственно Ω – алг-ой). 2) С. квадратичной или симметричной билинейной формы $\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_i x_j$ над упорядочным полем – пара целых чисел (p, q), где p – положительный, а q – отрицательный индекс инерции данной формы (см. инерции закон). Иногда С. квадратичной формы наз. число $p - q$. 17, 364

СИНТЕЗ (synthesis, от греч, «соединение») – 1) мысленное или реальное соединение частей в единое целое; 2) метод познания, основанный на 1). познание яв-ся единением, сочетанием анализа и синтеза. 32

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ (systems analysis) – 1) с практической стороны системный анализ есть система методов исследования или проектирования сложных систем, поиска, планирования и реализации изменений, предназначенных для ликвидации проблем; 2) с методологической стороны системный анализ яв-ся прикладной диалектикой, т.к. реализует идеи материалистической диалектики применительно к конкретным практическим задачам, особенность к-ых состоит в необходимости выяснения причин их сложности и устранения этих причин; 3) с методической стороны системный анализ отличается междисциплинарным и над дисциплинарным характером и вовлечением в работу как неформальных, эвристических, экспертных методов, так и эмпирических, экспериментальных методов, а также при возможности и необходимости – строгих формальных мт-их методов. 36, 37, 44, 555

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД (systems approach) – в настоящее время расв-ся либо как одна из ранних форм системного анализа, либо как начальная фаза современного системного анализа, этап первоначального, качественного анализа проблемы и постановки задачи. 33

СООБЩЕСТВО, 1. Объединение людей, народов, государств, имеющих общие интересы, цели. Н-р, международное с., мировое с. 2. Группа растительных или животных организмов, живущих вместе. Н-р, муравьиное с. 35, 644

СТРУКТУРА (straature, от лат. «строение») – совокупность связей между частями системы. 18, 33, 41, 43

ФУНКЦИЯ ВЫБОРА (choise function) наиболее общая мт. модель выбора; отображение совокупности мн-в в совокупность их подмн-в без подэлементного отображения одного мн-ва на другое и без отображения мн-в числовую ось. 39.

ТЕЛЕОЛОГИЯ – учение, считающие, что все в мире осуществляется в ств-и с заранее предопределенной Богом или природой целью. 53

ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ (loss function) – функция, выражающая потери, к-ые вынужден нести пользователь статистического решения, отличающегося от истинного суждения. 499

ФУНКЦИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ (membership function) – функция, характеризующая расплывчатое мн, и принимающая для каждой альтернативы значение из интервала $[0,\ 1]$, выражающее степень принадлежности данного эл-та этому расплывчатому мн-у. 584

ШКАЛЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ (measurement scales) – мн-во, обозначающий, используемых для регистрации состояния наблюдаемого объекта; в зв-ти от введенных отношений на этом мн-ве, шкалы различаются по их силе; сила измерительной шкалы должна согласовываться с природой наблюдаемого явления. 567

ЭКСПЕРТНЫЕ МЕТОДЫ (expert methods) – методы системного анализа, в к-ых для выполнения тех или иных не формализуемых операций используются знания, опыт, интуиция, изобретательность, интеллект экспертов, специалистов в нужной области. 38

ЭКОЦИД – нарастающее ухудшение окружающей человека естественной среды из-за неконтролируемого глобального воздействия современной техники и технической иерархии на естественные (природные) иерархии. Это обстоятельства заставляет человечество, и притом безотлагательно, посмотреть на этот мир и свою деятельность (приводящей к экологическому конфликту) со всей ответственностью. 34, 48

ЭМЕРГЕНТНОСТЬ, ЭМЕРДЖЕНТНОСТЬ (emergence, от англ. «внезапное появление») – 1) особенность систем, состоящая в том, что свойства системы не сводятся к совокупности свойств частей, из к-ых она состоит и не выводятся из них; 2) внутренняя целостность системы. 34, 37, 46

ЭНТРОПИЯ (entropy, от греч, «превращение») – мера неопределенности случайного объекта. 54

Учебное издание

Тухватов Миндигали Бадретдинович
профессор, доктор технических наук

Лекции по общей математике

Часть 4

Математические модели и методы их решения

Учебное пособие для вузов

Сдано в набор 16.05.06 г. Подписано к печати 02.07.06 г. Формат 60 x 90 $^1/_{16}$.
Бумага и печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Печ. листов 41,69. Усл. печ. листов 38,77. Тираж 100. Заказ № 211.
Цена договорная

Отпечатано в типографии ПЛ-1 г. Уфы
450001, г. Уфа, бульвар Х. Давлетшиной, 3