ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
РАЗДЕЛ КИНЕМАТИКА.
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нафиков М.З.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

РАЗДЕЛ КИНЕМАТИКА. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

Направление подготовки бакалавра 110800 Агроинженерия
Профили:
Технические системы в агробизнесе;
Технический сервис в агропромышленном комплексе;
Электрооборудование и электротехнологии.

Направление подготовки бакалавра 140100 Теплотехника и теплоэнергетика
Профиль
Энергообеспечение предприятий

Уфа, Башкирский ГАУ, 2012

УДК 531(07)

ББК 22.21Я7

Н34

Рекомендованы к изданию методической комиссией факультета механизации сельского хозяйства (протокол № 7 от 25 апреля 2012 г.)

Нафиков М.З. Н34. Теоретическая механика. Раздел кинематика. Конспект лекций [Текст]: Учебное пособие /М.З. Нафиков. Уфа: Башкирский ГАУ, 2012. - 68 с.

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования РФ по направлению подготовки «Агроинженерия», а также примерной программой, рекомендованной Главным управлением высших учебных заведений по курсу «Теоретическая механика».

Пособие составлено на основе читаемого автором в течение многих лет курса теоретической механики на механическом факультете Башкирского государственного аграрного университета. Содержит многочисленные примеры кинематических расчетов сельскохозяйственной техники. Приводится методика и образцы решения задач кинематики по всем основным темам.

Составитель: доктор технических наук, профессор Нафиков М.З.

Рецензенты:

доктор физико-математический наук, доцент кафедры физики ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный аграрный университет» Лобанов В.М.,

кафедра «Основы конструирования механизмов и машин» института механики и энергетики ГОУВПО «Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева» (протокол заседания кафедры № 11 от 28 марта 2012 г.)

Ответственный за выпуск: заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, д.т.н., профессор Нафиков М.З.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и твердых тел с геометрической точки зрения, без учета их масс и действующих сил.

Под движением в теоретической механике понимается изменение с течением времени положения данного тела по отношению к другим телам. Время в теоретической механике рассматривают как универсальную, непрерывно изменяющуюся скалярную величину, играющую роль независимой переменной (аргумента).

В кинематике различают кинематику точки и кинематику твердого тела. Изучение кинематики начинается с изучения кинематики точки. При этом решаются две основные задачи: 1) установление математических способов задания (описания) движения точки по отношению к данной системе отсчета; 2) определение по заданному закону движения точки всех кинематических характеристик этого движения (траекторий, скоростей, ускорений и т.д.).

Движение точки считается заданным, если указан способ, позволяющий определить в положение точки в каждый момент времени относительно выбранной системы отсчета. В дальнейшем мы рассмотрим три наиболее распространенных способа задания движения точки: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

ЛЕКЦИЯ 1. ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1.1 Векторный способ задания движения точки

При векторном способе положение движущейся точки М задается ее радиусом-вектором $\bar{r}$ (рисунок 1.1). Должно быть известно векторное уравнение вида

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1), например, может выглядеть

$$\bar{r} = \sin(\pi t) \cdot \bar{i} + \cos(\pi t) \cdot \bar{j} + t \cdot \bar{k}.$$

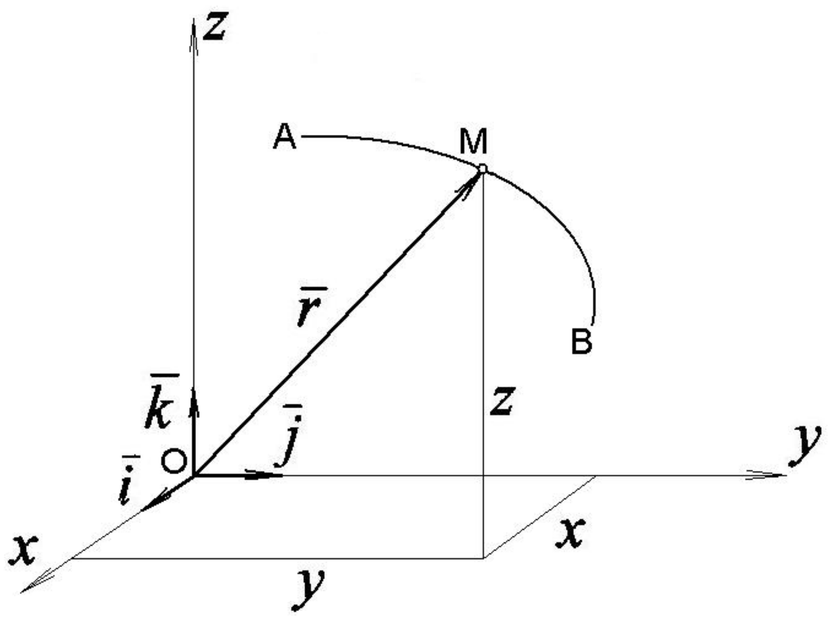


Рисунок 1.1 Радиус-вектор движущейся точки М

Траектория точки – это геометрическое место концов радиуса-вектора $\bar{r}$, следящего за движущейся точкой М.

Определим вектор скорости точки в данный момент времени, пользуясь кинематической схемой на рисунке 1.2.

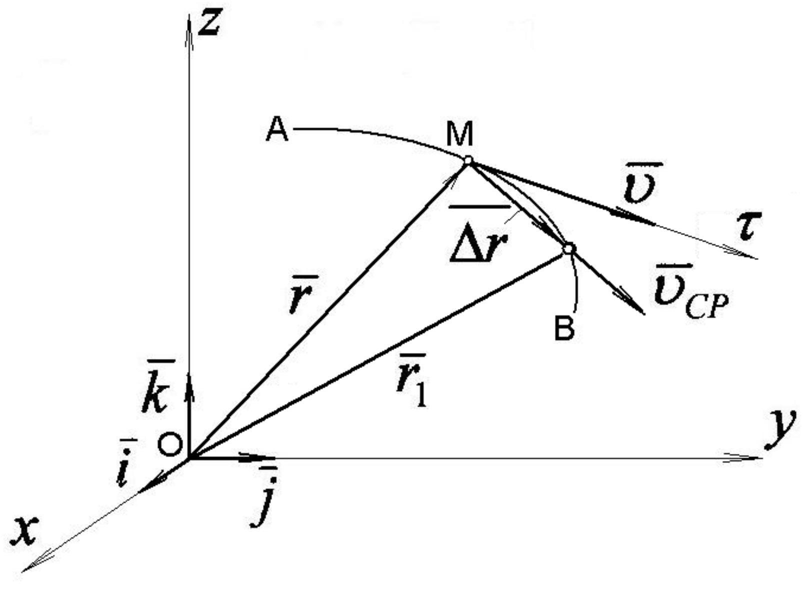


Рисунок 1.2 Определение скорости точки М в данный момент времени

Пусть в момент времени t точка находится в положении М на траектории АВ, ее радиус- вектор $\bar{r}$: $t \to M \to \bar{r}$. Через промежуток времени Δt точка находится в положении M_1, ее радиус вектор $\bar{r}_1$: $t + \Delta t \to M_1 \to \bar{r}_1$. Изменение $\overline{\Delta r}$ радиус-вектора $\bar{r}$ направлено по хорде MM_1. Средняя скорость точки $\bar{\upsilon}_{CP}$ за рассматриваемый промежуток времени Δt равна

$$\bar{\upsilon}_{CP} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}.$$

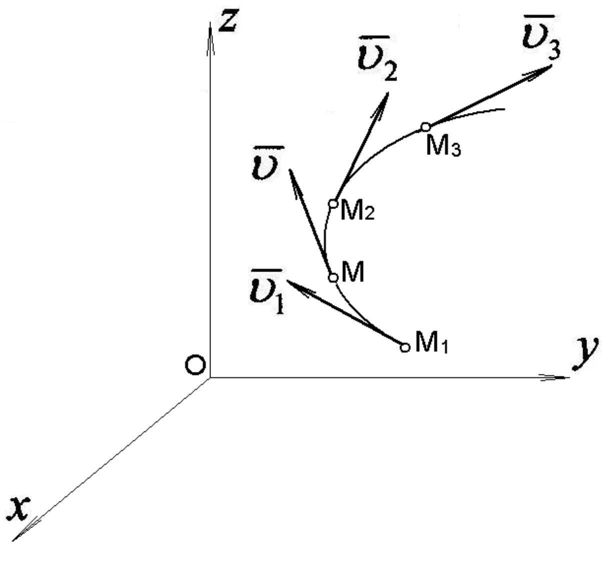
Направлен вектор $\bar{\upsilon}_{CP}$ так же, как вектор $\overline{\Delta r}$, т.е. по вдоль хорды MM_1.

Предел, к которому стремится вектор средней скорости при стремлении промежутка времени Δt к нулю, называется вектором скорости точки в данный момент времени и обозначается $\bar{\upsilon}$:

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{\upsilon_{CP}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}; \quad \bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} . \qquad (1.2)$$

Вектор скорости точки в данный момент равен первой производной по времени от радиус-вектора этой точки по времени и направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения. В системе единиц СИ скорость измеряется в м/с. Нередко в технике скорость точки измеряют в км/час. 1 м/с соответствует 3,6 км/час.

Введем понятие <u>годографа вектора скорости</u>. Годограф вектора скорости точки представляет собой геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки, отложенных от одной и той же произвольной точки пространства.



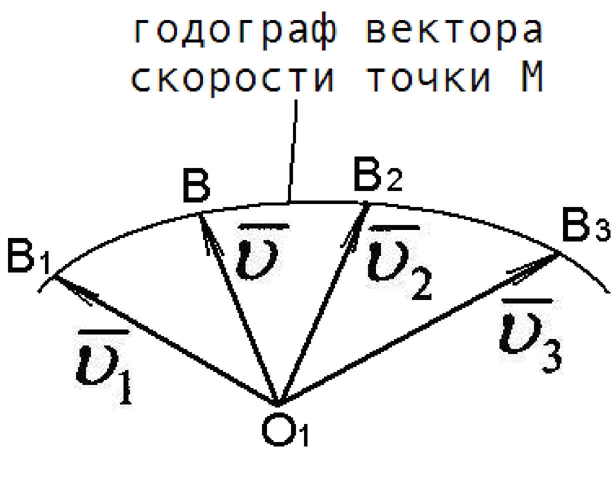


Рисунок 1.3 Построение годографа скорости точки

На рисунке 1.3, а показана точка движущаяся точка М, занимающая на траектории положения M_1, M_2, M_3 и т.д. Вектора скорости точки в различные моменты времени $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$ и т. д. Перенесем вектора скоростей в одну произвольную точку O_1 (рисунок 1.3, б), через их концы B_1, B_2, B_3 и т.д. проведем плавную линию – годограф вектора скорости.

Во многих случаях вектор скорости точки меняется как по величине, так и по направлению. Об изменении вектора скорости судят по ускорению точки.

Пусть в момент времени t точка занимает на траектории положение М, имеет в данный момент скорость $\bar{\upsilon}$. Через промежуток времени Δt положение точки на траектории M_1, ее скорость $\bar{\upsilon}_1$.

$$t \to M \to \bar{r} \to \bar{\upsilon}\,; \quad t + \Delta t \to M_1 \to \bar{\upsilon}_1.$$

Вектор изменения скорости $\overline{\Delta\upsilon}$ показан на рисунке 1 .4 как сторона параллелограмма скоростей.

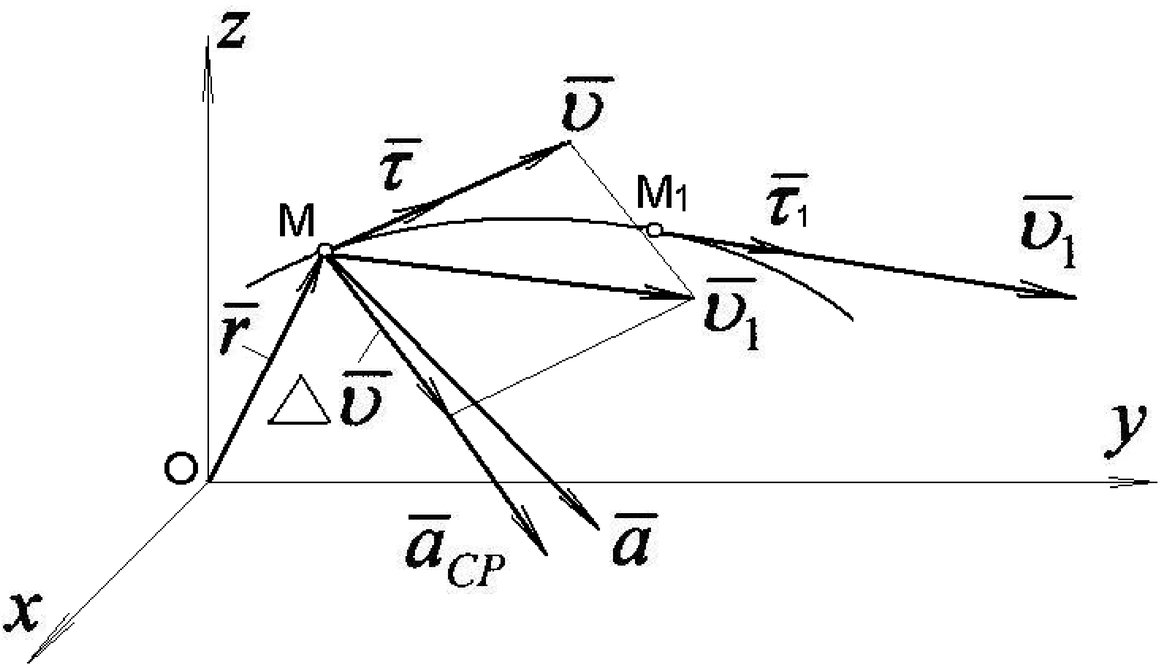


Рисунок 1.4 Определение ускорения точки М в данный момент времени

Среднее за промежуток времени Δt ускорение точки равно

$$\bar{a}_{CP} = \frac{\overline{\Delta\upsilon}}{\Delta t}.$$

Предел, к которому стремится вектор среднего ускорения при стремлении промежутка времени Δt к нулю, называется вектором ускорения точки в данный момент времени, обозначается $\bar{a}$ и определяется:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{a}_{CP}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta \upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \dot{\bar{\upsilon}} = \ddot{\bar{r}} . \quad (1.3)$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной от радиус-вектора. Вектор $\bar{a}$ всегда лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости криволинейной траектории. Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости в соответствующей по времени точке.

В системе единиц СИ ускорение измеряется в м/с^2.

1.2 Координатный способ задания движения точки

Положение точки в пространстве (рисунок 1.1) можно определить по трем ее декартовым, пользуясь зависимостями вида:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.4)$$

Например, эти уравнения могут иметь вид:

$$x = \sin(\pi t); \quad y = \cos(\pi t); \quad z = t .$$

Уравнения (1.4) называются законом движения точки в координатной форме.

В случае движения точки в плоскости xOy ее положение определяется двумя уравнениями:

$$x = x(t); \quad y = y(t). \quad (1.5)$$

Если исключить из параметрических уравнений (1.4) или (1.5) время t, то получим уравнения траектории точки в координатной форме.

Определим скорость точки. Представим радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки М, как $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ и продифференцируем по времени:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} ;$$

$$\bar{\upsilon} = \upsilon_x \cdot \bar{i} + \upsilon_y \cdot \bar{j} + \upsilon_z \cdot \bar{k}\,. \qquad (1.6)$$

Отсюда проекции вектора скорости $\bar{\upsilon}$ на оси координат равны:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \qquad (1.7)$$

По трем составляющим определяется полная скорость точки, как диагональ прямоугольного параллелепипеда на рисунке 1.5:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2} + \upsilon_z^{\ 2}}\,.$$

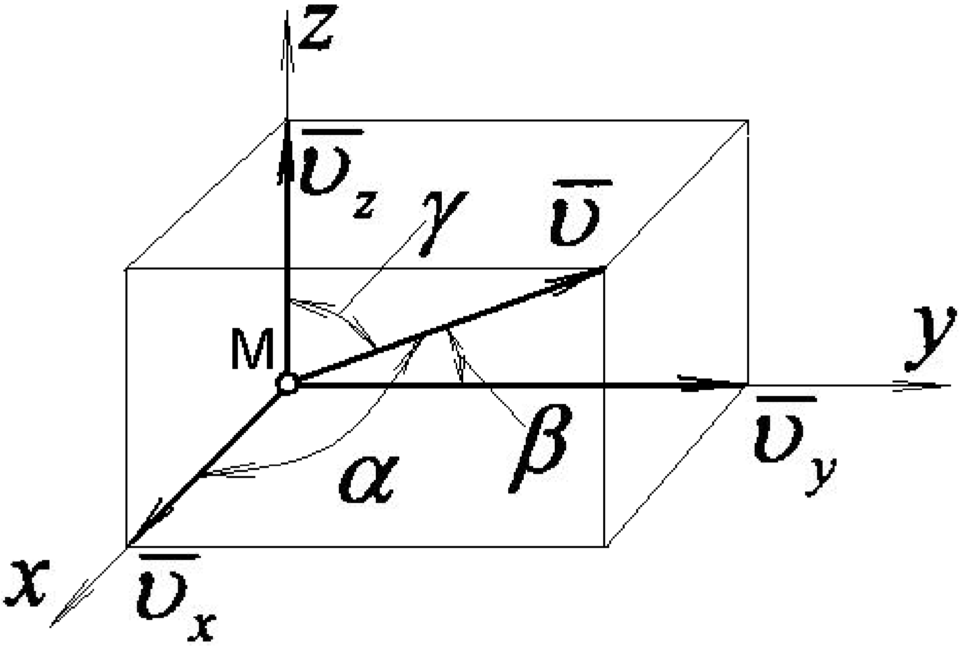


Рисунок 1.5 Определение величины и направления вектора скорости точки

Направление вектора $\bar{\upsilon}$ определяется по направляющим косинусам:

$$cos\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,; \quad \cos\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,; \quad \cos\gamma = \frac{\upsilon_z}{\upsilon} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,.$$

Ускорение точки определяется аналогично скорости:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k}\,; \quad \bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}\,;$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}\,; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}\,; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}\,; \qquad (1.8)$$

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\,;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}\,; \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}\,; \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}\,.$$

1.3 Естественный способ задания движения точки

Этот способ применяется в тех случаях, когда заранее известна траектория точки. Чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо знать (рисунок 1.6): 1) траекторию точки; 2) начальное положение точки на траектории; 3) закон движения точки по траектории в виде зависимости $s = s(t)$, где s - дуговая координата точки в м; t - время в с. Например, подобная зависимость может иметь вид $s = \pi \cdot t^2$.

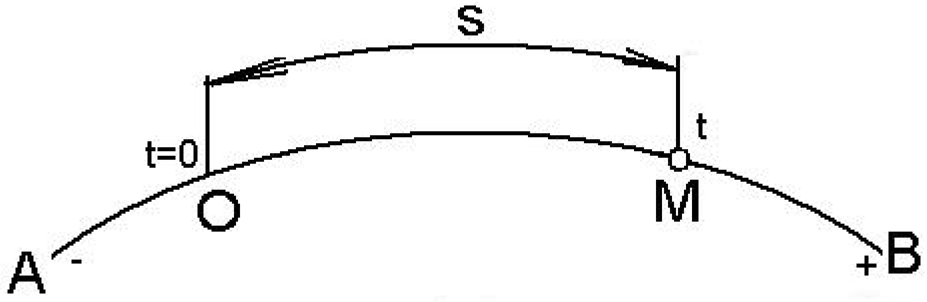


Рисунок 1.6 Естественный способ задания движения точки

Определим скорость точки $\bar{\upsilon}$. Известно, что средняя за промежуток времени Δt скорость равна

$$\bar{\upsilon}_{CP} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs - длина дуги MM_1 на рисунке 1.8. Вектор скорости точки в данный момент времени равен

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}) = \lim_{\Delta t \to o}(\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}) = \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\overline{\Delta r}}{\Delta s}) \cdot \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\Delta s}{\Delta t}) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau}^o;$$

$$\bar{\upsilon} = \upsilon \cdot \bar{\tau}^o; \quad \upsilon = \upsilon_\tau = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.9)$$

Проекция вектора скорости точки на направление касательной к заданной траектории равна первой производной от криволинейной координаты s точки по времени.

При естественном способе задания движения точки ее ускорение определяют не по проекциям на неподвижные оси координат $Oxyz$, а по проекциям ускорения на подвижные оси $M\tau nb$ – оси естественного трехгранника на рисунке 1.7.

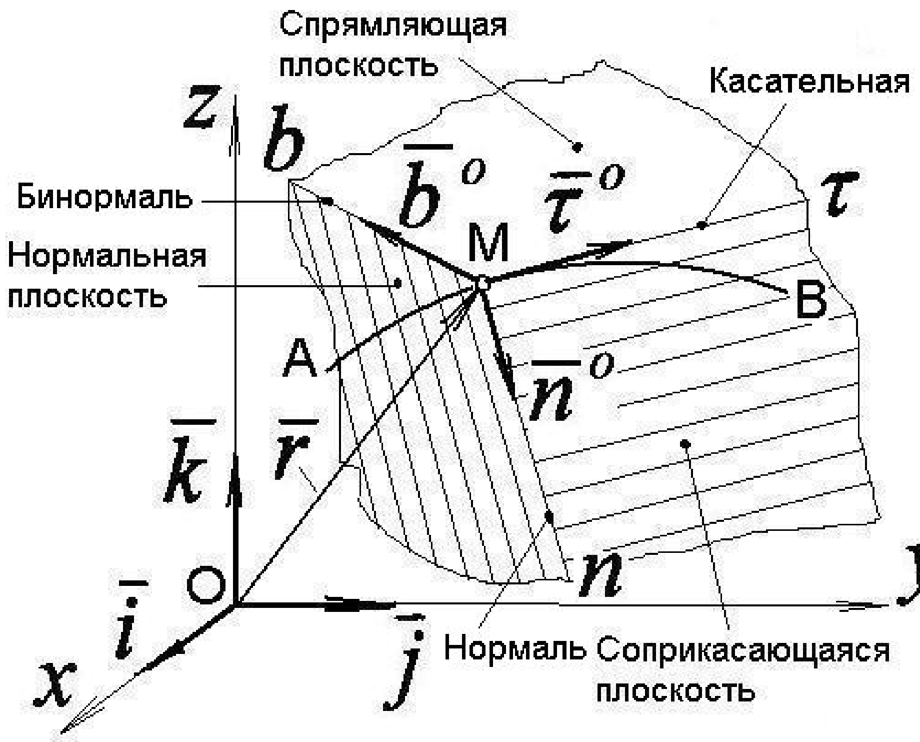


Рисунок 1.7 Естественный трехгранник

Естественные оси координат это: Мτ – касательная, направленная в сторону положительного отсчета координаты s; Мn – нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости и направленная в сторону вогнутости траектории; Мb – бинормаль, перпендикулярная двум первым осям и направленная так, чтобы она образовывала с ними правую систему осей.

Выше было показано, что вектор скорости точки $\bar{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории точки, как показано на рисунке 1.4.

Определим радиус кривизны траектории точки М, пользуясь рисунком 1.8. В точке М траектории проведем касательную Мτ и укажем единичный орт $\bar{\tau}^o$. Укажем на чертеже близкую точку M_1, проведем касательную Мτ_1 с единичным ортом $\bar{\tau}_1^o$. Угол $\Delta\theta$ между единичными ортами $\bar{\tau}^o$ и $\bar{\tau}_1^o$ является углом смежности. Кривизной кривой k в точке М называется предел вида

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}(\Delta\theta / \Delta s) = d\theta / ds.$$

Радиусом кривизны кривой ρ в точке М называется величина, обратная кривизне в этой точке, и равная

$$\rho = 1/k = ds/d\theta.$$

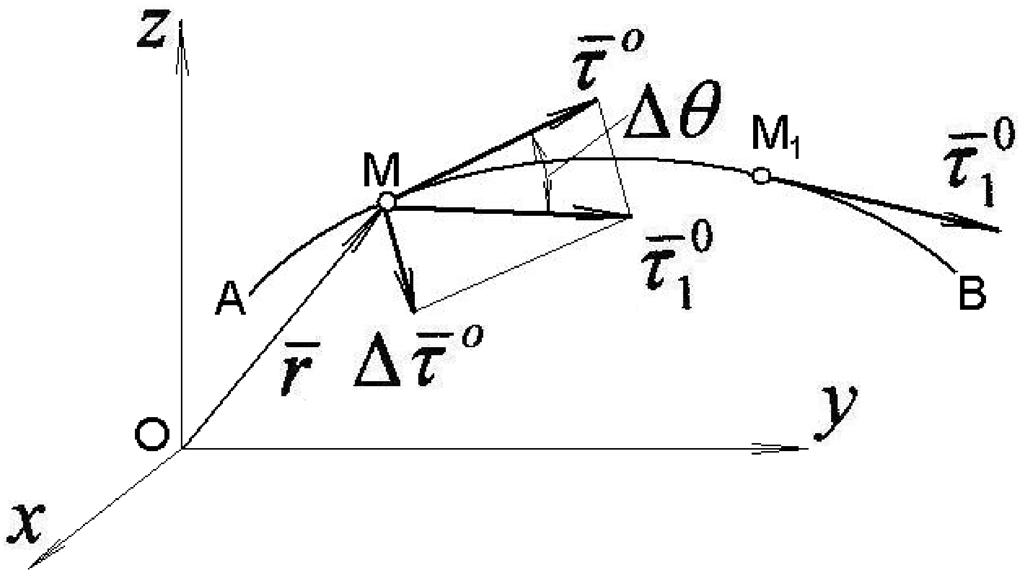


Рисунок 1.8 К определению радиуса кривизны траектории точки М

Вычислим радиус кривизны для точки М, движущейся по окружности радиуса R. По схеме на рисунок 1.9 определяем:

$$\Delta s = MM_1 = R \cdot \Delta\theta\ ; \quad k = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{R \cdot \Delta\theta} = \frac{1}{R}; \quad \rho = \frac{1}{k} = R\,.$$

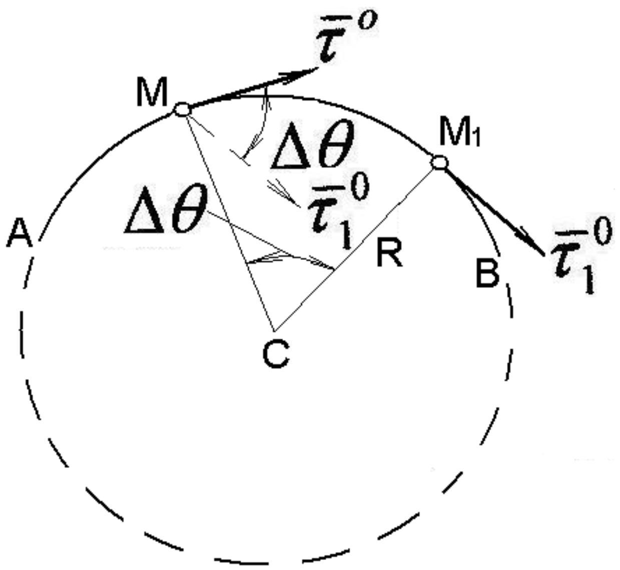


Рисунок 1.9 Движение точки М по окружности радиуса R

Произведем дифференцирование единичного вектора $\bar{\tau}^o$. По схеме на рисунке 1.10 с учетом $\left|\Delta\bar{\tau}^o\right| = \left|\Delta\bar{\tau}_1^o\right| = 1$ получим

$$\left|\Delta\bar{\tau}^o\right| = 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2}\,.$$

Для малых углов

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}=\frac{\Delta\theta}{2}; \quad \left|\Delta\bar{\tau}^o\right|=1\cdot\Delta\theta=\Delta\theta .$$

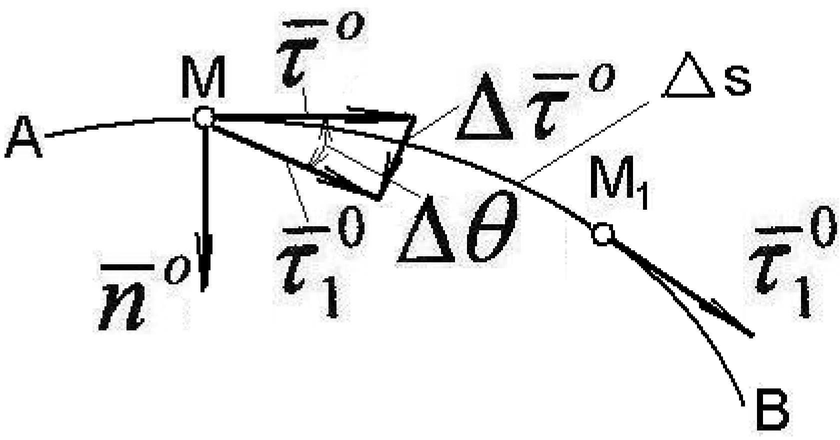


Рисунок 1.10 Дифференцирование единичного вектора $\bar{\tau}^o$

Найдем модуль производной

$$\left|\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}\right|=\frac{d\theta}{dt}.$$

Определим направление производной $\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}$. Для этого продифференцируем выражение $\left(\bar{\tau}^o\right)^2=\bar{\tau}^o\cdot\bar{\tau}^o=1$ и получим:

$$\bar{\tau}^o\cdot\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}=0.$$

Так как скалярное произведение вектора $\bar{\tau}^o$ на вектор $\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}$ равно нулю, то вектор $\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}$ перпендикулярен вектору $\bar{\tau}^o$. Кроме того, вектор $\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}$ лежит в соприкасающейся плоскости, направление этого вектора совпадает с положительным направлением главной нормали траектории, т.е. совпадает с направлением главного орта $\bar{n}^o$. Таким образом:

$$\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}=\left|\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}\right|\cdot\bar{n}^o=\frac{d\theta}{dt}\cdot\bar{n}^o=\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\bar{n}^o=\frac{\upsilon}{\rho}\cdot\bar{n}^o.$$

Определим ускорение точки $\bar{a}$:

$$\bar{a}=\frac{d}{dt}(\upsilon_\tau\cdot\bar{\tau}^o)=\frac{d\upsilon_\tau}{dt}\cdot\bar{\tau}^o+\upsilon_\tau\cdot\frac{d\bar{\tau}^o}{dt}. \tag{1.10}$$

Вектор ускорения $\bar{a}$ раскладывается на две составляющие, направленные по естественным осям координат (рисунок 1.11). Первый из двух составляющих векторов направлен по касательной; сомножитель $\frac{d\upsilon_\tau}{dt} = a_\tau$ является проекцией вектора полного ускорения $\bar{a}$ на касательную. Этот вектор принято называть <u>касательным ускорением</u> точки. Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине.

Определим вторую составляющую ускорения $\bar{a}$.

$$\upsilon_\tau \cdot \frac{d\bar{\tau}^o}{dt} = \upsilon_\tau \cdot \frac{\upsilon_\tau}{\rho} \cdot \bar{n}^o = \frac{\upsilon^2}{\rho} \cdot \bar{n}^o = \bar{a}_n \qquad (1.11)$$

Эта составляющая, направленная по нормали к центру кривизны траектории, называется <u>нормальным ускорением</u> точки. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Таким образом

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}^o + a_n \cdot \vec{n}^o. \qquad (1.12)$$

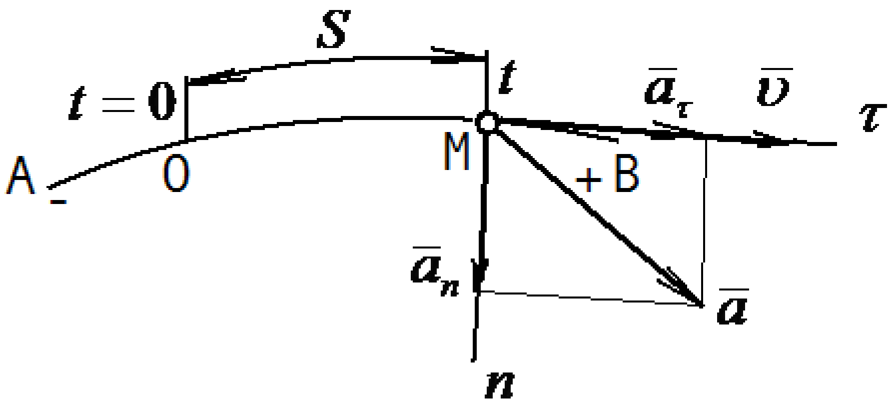


Рисунок 1.11 Скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения

При движении точки по прямой линии $\bar{a}_n = 0$, $\bar{a} = \bar{a}_\tau$. Скорость и ускорение точки в этом случае направлены по прямой линии (рисунок 1.12).

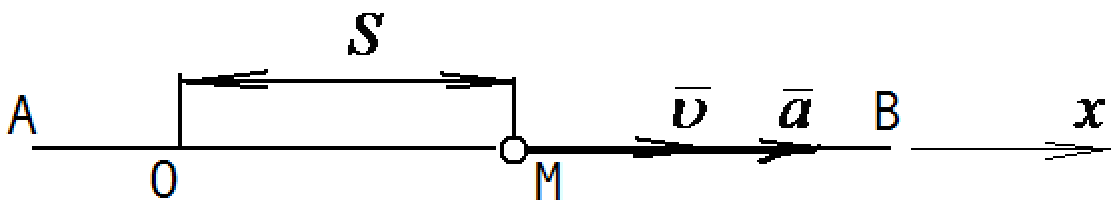


Рисунок 1.12 Движение точки М по прямой АВ

Примеры решения задач

Задача 1.1 Уравнения движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x = 0{,}75\cos 4t^2$, $y = 0{,}75\sin 4t^2$ (x, y – в метрах, t – в секундах). Найти траекторию, скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

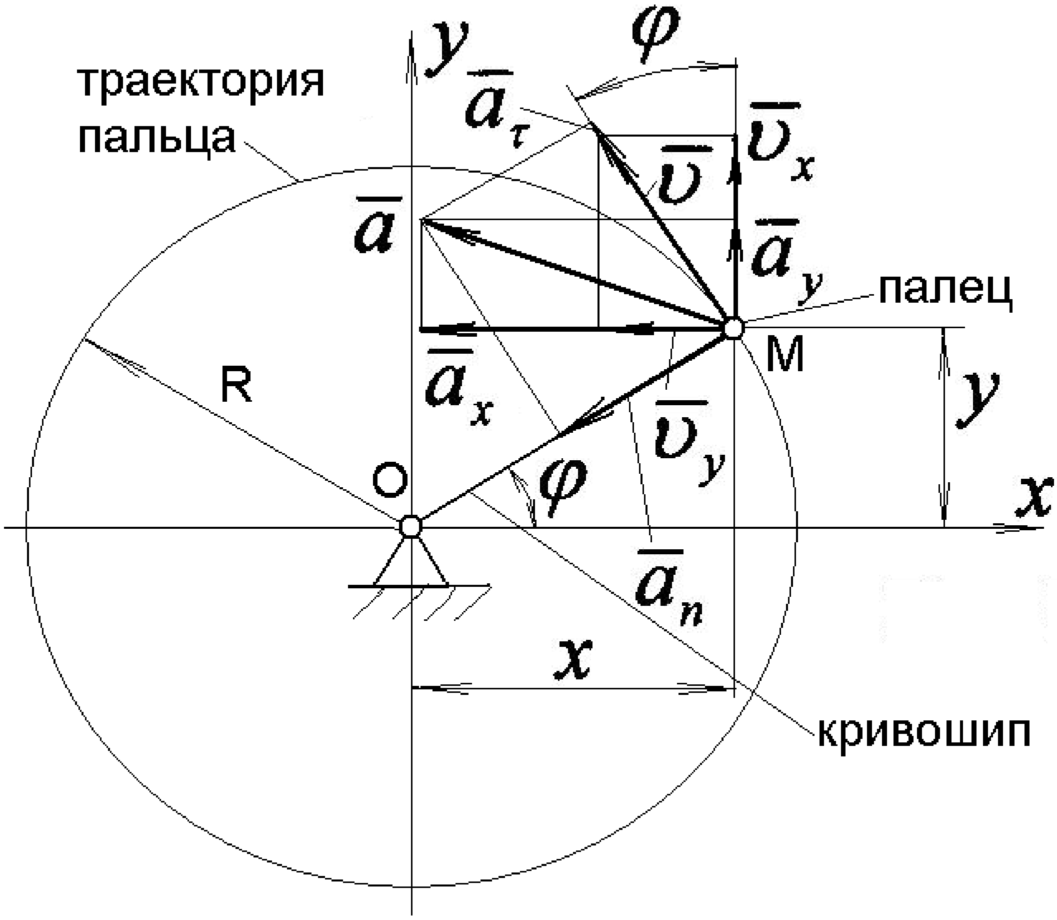


Рисунок 1.1.1 Исследование движения пальца кривошипа

Решение. 1. Движение точки M задано координатным способом. Исключив из кинематических уравнений движения пальца аргумент t, определим траекторию точки:

$$x^2 + y^2 = 0{,}75^2 \cdot \cos^2(4t^2) + 0{,}75^2 \cdot \sin^2(4t^2) = 0{,}75^2.$$

Палец M движется по окружности радиуса R = 0,75 м с центром в начале осей координат.

2. Скорость точки определяем по проекциям на оси координат:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -6t \cdot \sin(4t^2); \quad \upsilon_y = \dot{y} = 6t \cdot \cos(4t^2);$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(-6t \cdot \sin(4t^2))^2 + (6t \cdot \cos(4t^2))^2} = 6t \text{ м/с}.$$

3. Определим полное ускорение точки:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = -6(\sin(4t^2) + t \cdot 8t \cdot \cos(4t^2)); \quad a_y = \dot{\upsilon}_y = 6(\cos(4t^2) - t \cdot 8t \cdot \sin(4t^2));$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{36(\sin(4t^2) + 8t^2 \cdot \cos(4t^2))^2 + 36(\cos(4t^2) - 8t^2 \cdot \sin(4t^2))^2} = 6\sqrt{1 + (8t^2)^2}\,.$$

4. Нормальное и касательное ускорения точки М равны:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(6t)^2}{0{,}75} = 48t^2; \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 6\,.$$

5. Определим полное ускорение по нормальной и касательной составляющим:

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau; \quad a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2} = \sqrt{(48t^2)^2 + 6^2} = 6\sqrt{1 + (8t^2)^2}\,.$$

Значение полного ускорения совпадает с ранее найденным в п.3 значением.

Задача 1.2 На проволочной окружности радиуса R = 10 см надето колечко М; через него проходит стержень ОА, который равномерно вращается вокруг точки О, лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 секунд. Определить скорость υ и ускорение a колечка М.

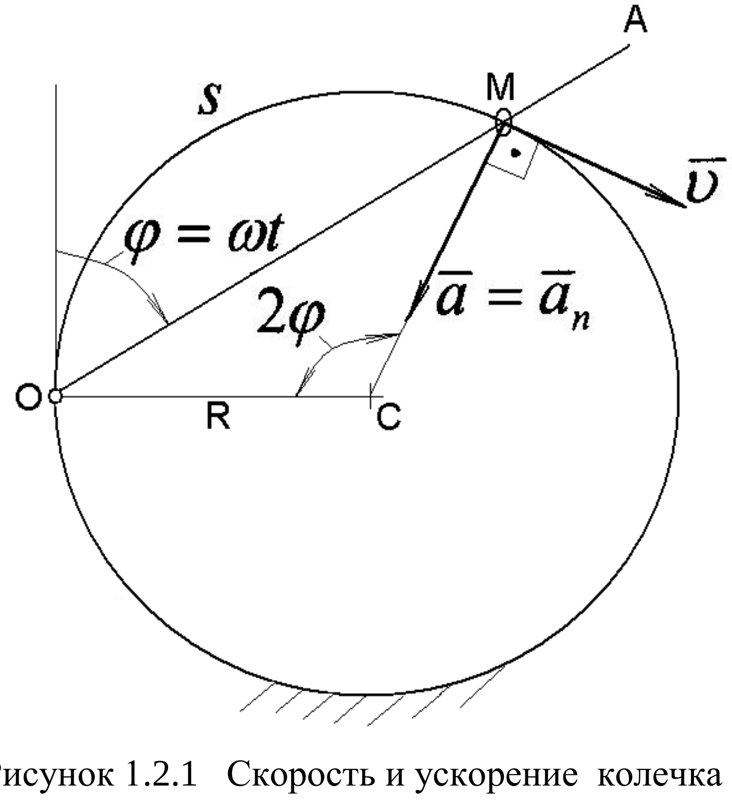


Рисунок 1.2.1 Скорость и ускорение колечка М

Решение. В данной задаче имеется три твердых тела: 1) неподвижная проволочная окружность радиуса R; 2) стержень OA, равномерно вращающийся вокруг неподвижной оси O; 3) колечко M, принимаемое за материальную точку, движущееся по окружности радиуса R.

При равномерном вращении угол φ поворота стержня OA равен $\varphi = \omega \cdot t$. Угловую скорость ω стержня можно определить из условия, что стержень поворачивается на прямой угол в 5 секунд, т.е.

$$\pi / 2 = \omega \cdot 5, \text{ откуда } \omega = \pi / 10 \text{ рад/с}, \quad \varphi = \frac{\pi}{10} \cdot t \text{ рад.}$$

В равнобедренном треугольнике OMC угол при вершине C равен 2φ, следовательно дуговая координата s точки M равна

$$s = 2\varphi \cdot R = 2\frac{\pi}{10} \cdot t \cdot 0{,}1 = 0{,}02\pi \cdot t.$$

Для точки M известны: 1) траектория – окружность радиуса R; 2) начальное положение O точки M на траектории; 3) закон движения точки по траектории в виде зависимости $s = s(t) = 0{,}02\pi \cdot t$. Таким образом, движение точки M задано в задаче в естественной форме.

Определим скорость точки

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = 0{,}02\pi \text{ м/с}; \quad \upsilon = const.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки.

Определим ускорение $\bar{a}$ точки, имеющее в общем случае две составляющие – нормальную $\bar{a}_n$ и касательную $\bar{a}_\tau$.

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau.$$

Нормальное ускорение $\bar{a}_n$ направлено к центру кривизны траектории и по модулю равно

$$a_n = \upsilon^2 / \rho = \upsilon^2 / R = (0{,}02\pi)^2 / 0{,}1 = 0{,}0004\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение точки $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$, т.к. в данной задаче $\upsilon = const$.

Таким образом, ускорение точки M равно $a = a_n = 0{,}004\pi^2$ м/с^2.

ЛЕКЦИЯ 2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с этим телом, перемещается параллельно своему первоначальному положению. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля движется поступательно на горизонтальном участке дороги. Траектория любой точки кузова – горизонтальная прямая линия.

2. Поршень двигателя также движется поступательно (при неподвижном автомобиле).

3. Шатун АВ параллелограммного механизма на рисунке 2.1. Траектории его точек А и В – это окружности, радиус которых равен длинам кривошипов ОА и O_1B.

4. Кабинки колеса обозрения на рисунке 2.2. Любая точка твердого тела движется по окружности.

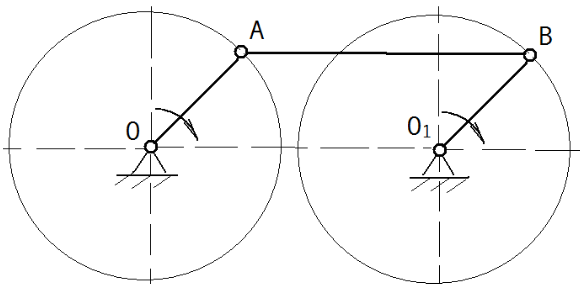


Рисунок 2.1 Параллелограммный механизм

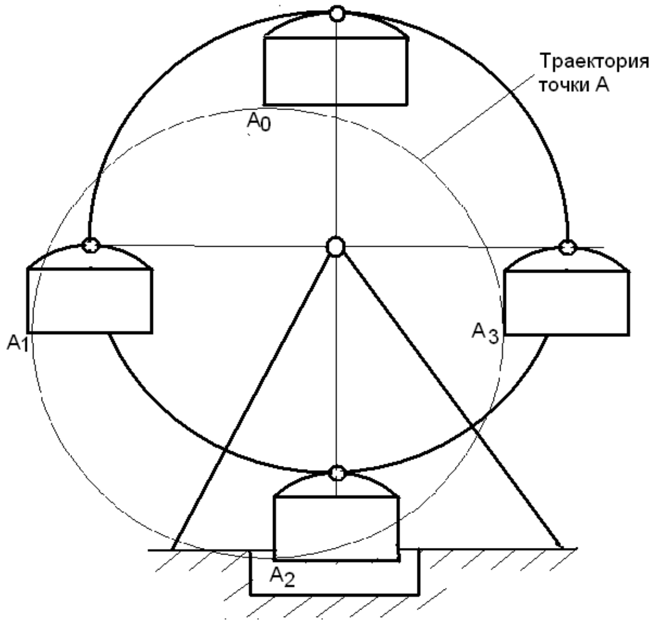


Рисунок 2.2 Аттракцион – колесо обозрения

Свойства поступательного движения твердого тела можно проследить по рисунку 2.3.

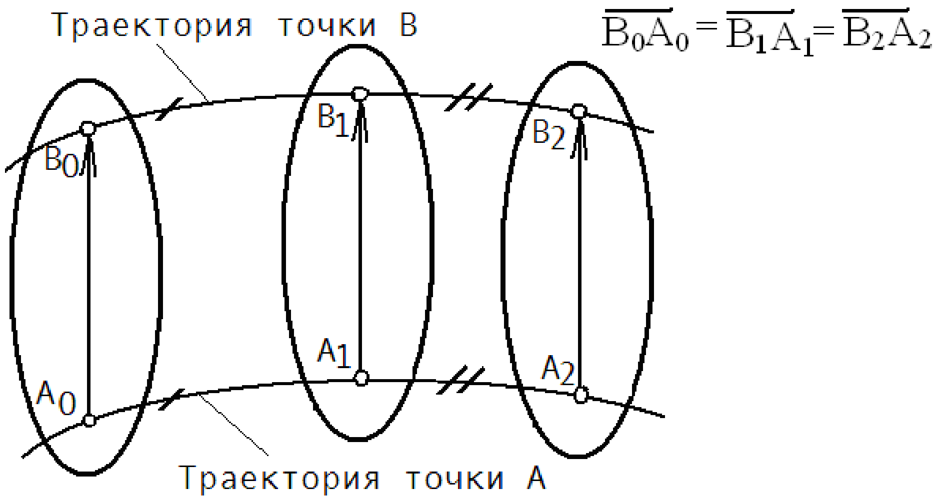


Рисунок 2.3 Поступательно движущееся твердое тело
в различных положениях

1. Траектории двух любых точек (например, A и B) твердого тела в общем случае являются эквидистантными линиями, их можно совместить параллельным переносом на вектор $\overline{BA}$.

2. Все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям по одним и тем же законам, $S_A=S_B=S_M=\ldots$

3. Следовательно, в любой момент времени скорости и ускорения всех точек твердого тела равны между собой (рисунок 2.4).

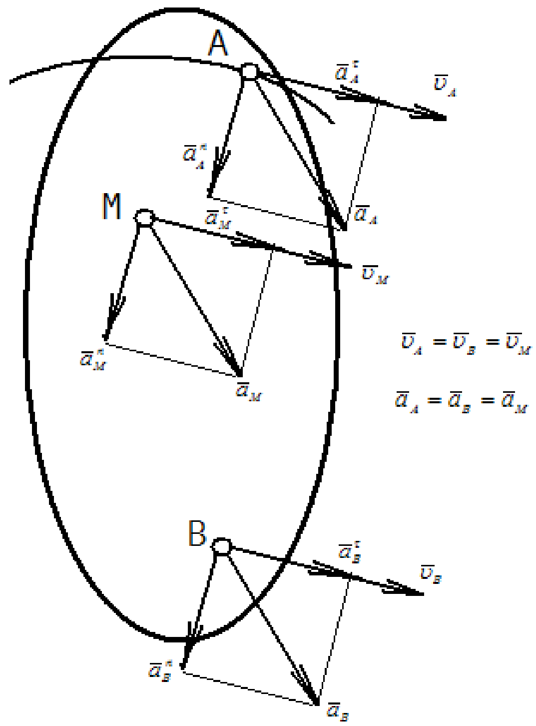


Рисунок 2.4 Скорости и ускорения точек
поступательно движущегося твердого тела

Таким образом, поступательное движение твердого тела можно изучить по движению какой-либо одной его точки, воспользовавшись материалом предыдущей лекции.

2.2 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение твердого тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси. Этот вид движения в технике встречается чрезвычайно часто: маховик двигателя внутреннего сгорания, ротор электродвигателя, патрон шпинделя токарного станка, сверло и т.д.

Ротор, показанный на рисунке 2.5, имеет одну степень свободы. Наложенные на твердое тело связи позволяют ему совершать только одно движение – вращаться вокруг оси Oz.

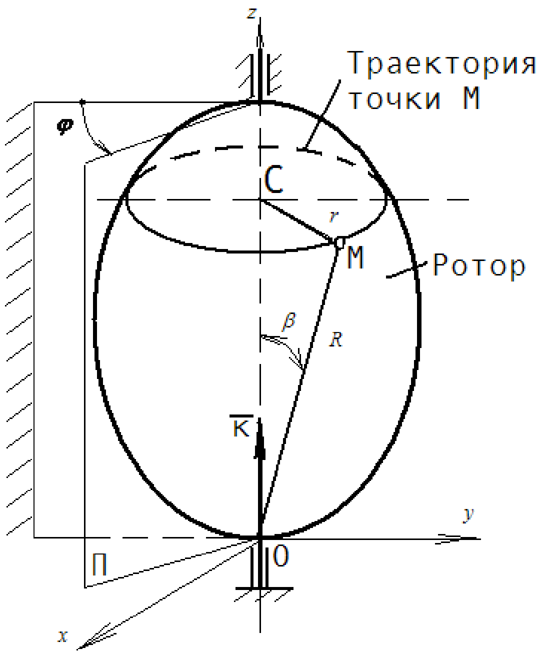


Рисунок 2.5 Вращательным движением тела вокруг неподвижной оси

Положение ротора может быть задано в форме уравнения вида

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) является законом вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угол поворота φ в системе единиц СИ измеряется в радианах. Иногда в практических расчетах угол выражают числом оборотов N тела. Значения N и φ связаны зависимостью

$$\varphi = 2\pi \cdot N .$$

Для определения быстроты вращения ротора пользуются понятием угловой скорости. Пусть в момент времени t положение ротора определяется углом φ. В момент $t_1 = t + \Delta t$ углом поворота $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – приращение угла поворота за промежуток времени Δt.

Средняя угловая скорость за этот промежуток времени равна

$$\omega_{CP} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} .$$

Для определения угловой скорости ротора в данный момент времени определим предел средней угловой скорости

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2.2)$$

Угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной угла поворота по времени. В системе единиц СИ угловая скорость измеряется в радианах в секунду:

$$\frac{рад}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1} .$$

Во многих случаях угловая скорость ротора меняется. Быстроту изменения угловой скорости характеризуют угловым ускорением ε в данный момент времени:

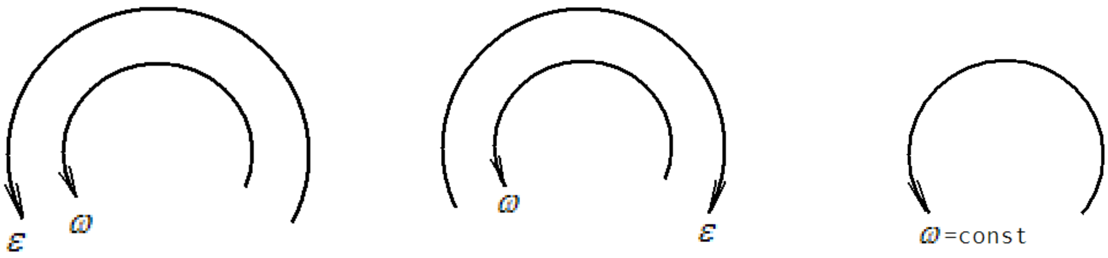
$$\varepsilon_{CP} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}; \qquad \varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} .$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной от угла поворота. В системе единиц СИ угловое ускорение измеряется в радианах в секунду в квадрате:

$$\frac{рад}{c^2} = \frac{1}{c^2} = c^{-2} .$$

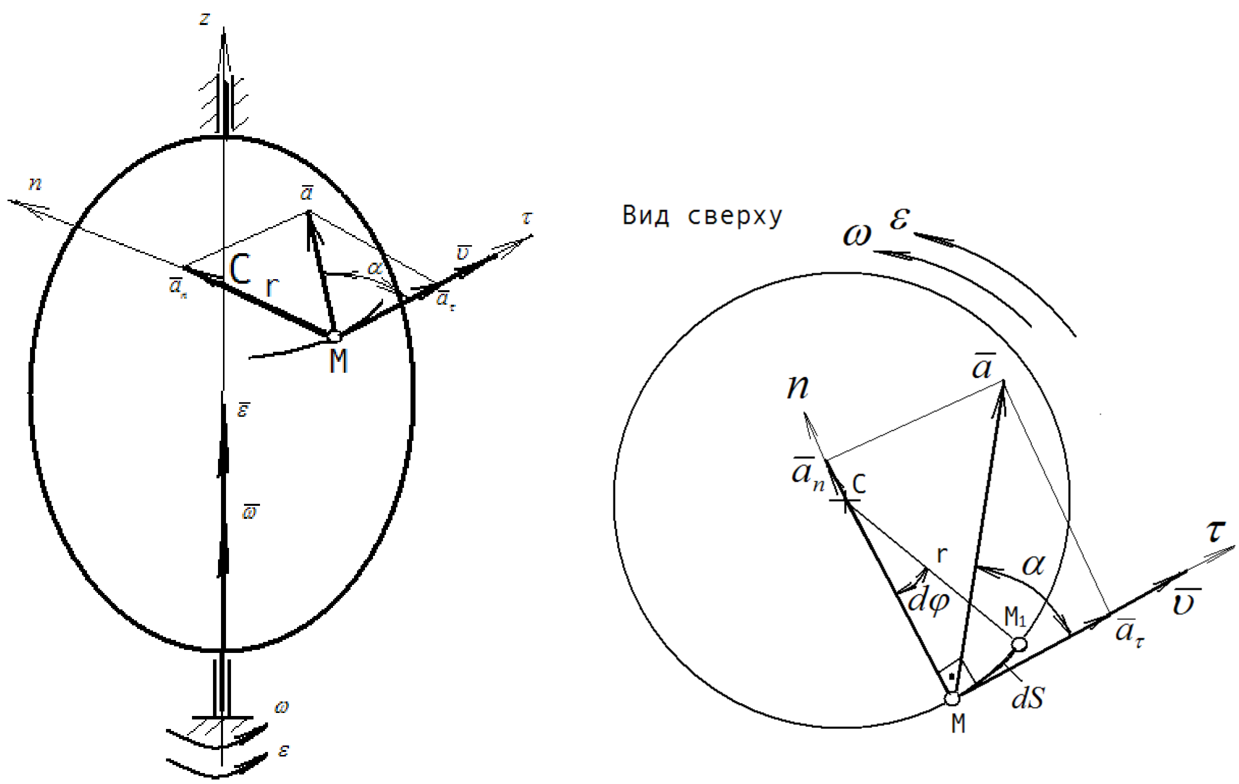
Угловую скорость и угловое ускорение изображают на чертежах круговыми стрелками, направляя ω по вращению твердого тела, а ε в сторону изменения ω. При этом могут получиться следующие сочетания, показанные на рисунке 2.6. На рисунке 2.6, а направления ω и ε совпадают, ротор вращается ускоренно. Ротор на рисунке 2.6, б вращается замедленно. Ротор на рисунке 2.6, в вращается с постоянной угловой скоростью, т.е. равномерно. В этом случае угол поворота ротора равен

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t .$$



а б в

Рисунок 2.6 Различные случаи вращения твердого тела



а б

Рисунок 2.7 Определение скорости и ускорения произвольной точки М твердого тела

Определим скорость произвольной точки М ротора на рисунке 2.7.

В соответствии с (1.9) скорость точки М равна $\upsilon = dS/dt$. По схеме на рисунке 2.7, б дуга dS равна $dS = MM_1 = d\varphi \cdot r$. Тогда:

$$\upsilon = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r = \omega \cdot r\,. \tag{2.3}$$

Воспользуется формулами (1.10-1.12) для определения ускорения этой точки:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot r) = \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \varepsilon \cdot r; \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \omega^2 \cdot r;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{a} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\,. \tag{2.4}$$

Формулы (2.3, 2.4) для определения скорости и ускорения точки М являются скалярными. Выведем также векторные формулы для определения этих кинематических характеристик.

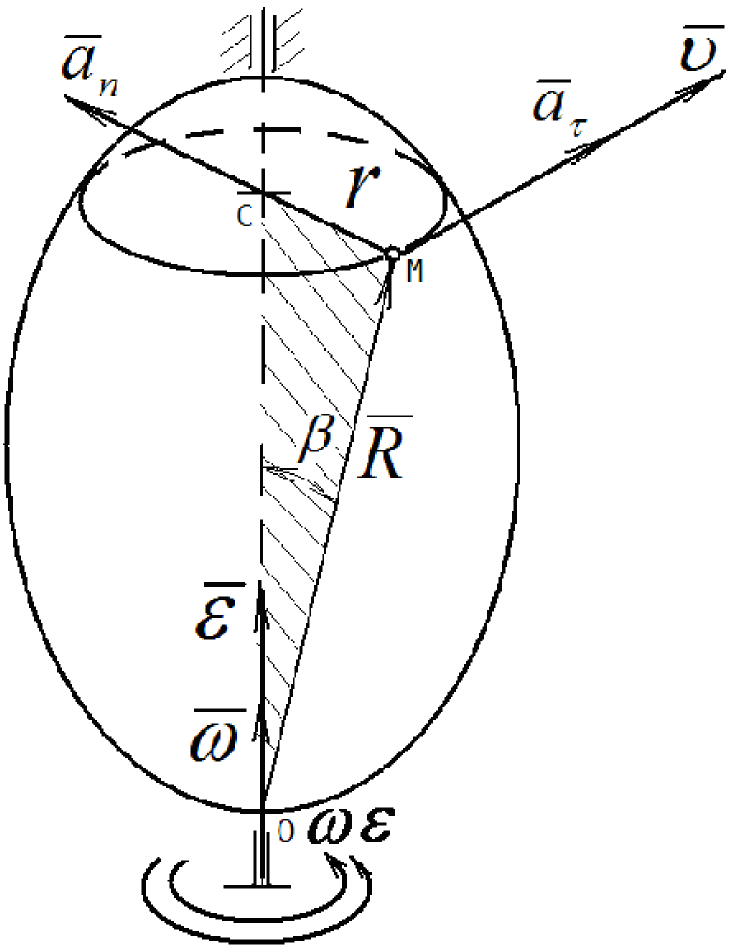


Рисунок 2.8 Определение векторов скорости и ускорения точки М

Покажем на рисунках 2.7, 2.8 угловую скорость и угловое ускорение, как вектора $\overline{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, направленные параллельно оси вращения Oz:

$$\overline{\omega} = \omega \cdot \bar{k}\,; \qquad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}\,.$$

Вектора $\overline{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ показываем таким образом, чтобы наблюдатель, смотрящий с их положительных концов, видел соответственно круговые стрелки ω и ε, направленными против хода часовой стрелки, как на рисунках 2.7 и 2.8).

Рассмотрим векторное произведение $\overline{\omega} \times \overline{R}$. Модуль векторного произведения равен:

$$\left|\overline{\omega} \times \overline{R}\right| = \omega \cdot R \cdot \sin\beta = \omega \cdot r = \upsilon\,.$$

Вектор произведения $\overline{\omega} \times R$ направлен перпендикулярно плоскости ΔOMC, т.е. касательно траектории точки М, следовательно, он является вектором скорости точки

$$\bar{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{R} \; - \text{формула Эйлера.} \qquad (2.5)$$

Вектор скорости любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела.

Определим вектор ускорения точки М.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{R} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{R}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \overline{R} + \overline{\omega} \times \bar{\upsilon}\,; \quad \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \overline{R} + \overline{\omega} \times \bar{\upsilon}\,. \qquad (2.6)$$

В соответствии с правилом векторного произведения первый слагаемый член $\bar{\varepsilon} \times \overline{R}$ в зависимости (2.6) направлен касательно траектории точки М, его модуль равен

$$\left|\bar{\varepsilon} \times \overline{R}\right| = \varepsilon \cdot R \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot r\,.$$

Следовательно, первый слагаемый в (2.6) является касательной составляющей ускорения

$$\bar{a}_{\tau} = \bar{\varepsilon} \times \overline{R}\,. \qquad (2.7)$$

В соответствии с правилом векторного произведения второй слагаемый член $\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}$ направлен к оси вращения Oz, его модуль равен

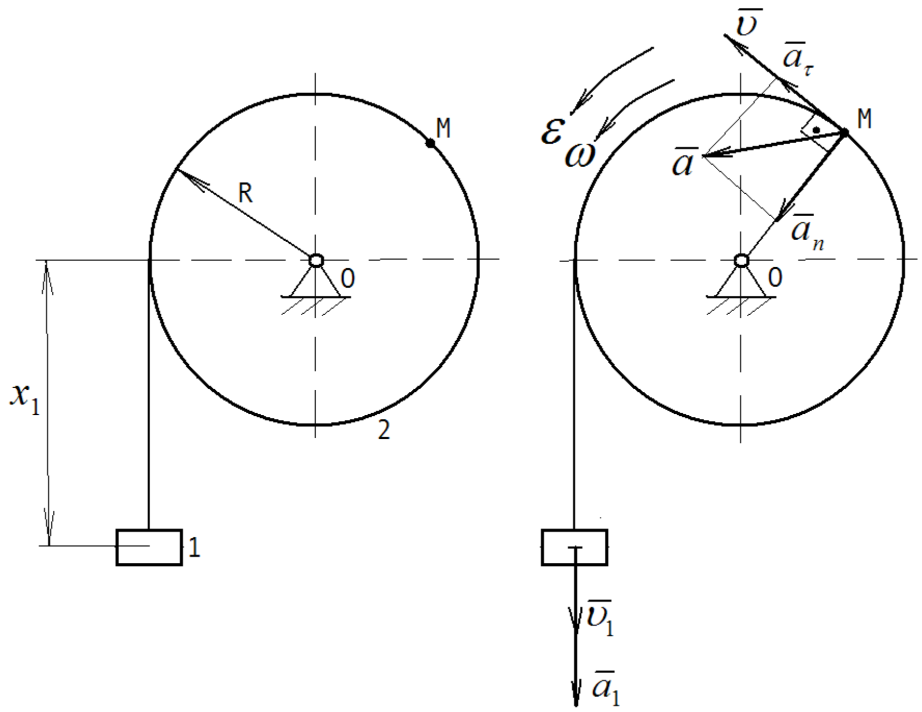
$$\left|\overline{\varepsilon}\times\overline{\upsilon}\right| = \omega\cdot\upsilon\cdot\sin 90^{o} = \omega^{2}\cdot r = a_{n}$$

Следовательно, второй слагаемый член в (2.6) является нормальным ускорением точки М ротора

$$\overline{a}_{n} = \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}\,. \qquad (2.8)$$

Примеры решения задач

<u>Задача 2.1</u> Вал радиуса R = 10 см приводится во вращение гирей, привешенной к нему на нити (рисунок 2.1.1, а). Движение гири выражается уравнением $x = 100t^{2}$, где x – расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t – время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение точки М на поверхности вала в момент t.



а **б**

Рисунок 2.1.1 Движение гири и вала

<u>Решение.</u> Механическая система содержит два твердых тела – гирю 1, движущуюся поступательно, и вал 2, вращающийся вокруг неподвижной оси.

Определим скорость и ускорение гирьки в любой момент времени:

$$\upsilon_1 = \dot{x} = 2t \text{ м/с}; \quad a_1 = \dot{\upsilon}_1 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Покажем вектора $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{a}_1$ на чертеже рисунок 2.1.1, б.

Определим угловую скорость и угловое ускорение вала:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{R} = \frac{2t}{0{,}1} = 20t \text{ рад/с}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

Покажем ω и ε на рисунке 2.1.1, б круговыми стрелками.

Скорость произвольной точки М на поверхности вала равна

$$\upsilon = \omega \cdot R = 20t \cdot 0{,}1 = 2t \text{ м/с}.$$

Ускорение точки складывается из двух составляющих

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau .$$

Определяем и показываем на чертеже нормальное и касательное ускорения точки М:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (20t)^2 \cdot 0{,}1 = 40t^2 \text{ м/с}^2; \quad a_\tau = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0{,}1 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки М в любой момент времени равно

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(40t^2)^2 + 2^2} \text{ м/с}^2.$$

<u>Задача 2.2</u> Станок со шкивом 2 приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива 1 электродвигателя (рисунок 2.2.1). Радиусы шкивов r_1 = 75 см и r_2 = 30 см; после пуска в ход электродвигателя его угловое ускорение равно $\varepsilon_1 = 0{,}4\pi$ рад/с^2. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через какое время τ угловая скорость станка будет равна $\omega_2 = 10\pi$ рад/с.

<u>Решение.</u> Вычислим передаточное отношение ременной передачи. При отсутствии проскальзывания ремня оно равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = 0{,}4 .$$

Определим угловое ускорение вала станка

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / i_{12} = 0{,}4\pi / 0{,}4 = \pi \text{ рад/с}^2.$$

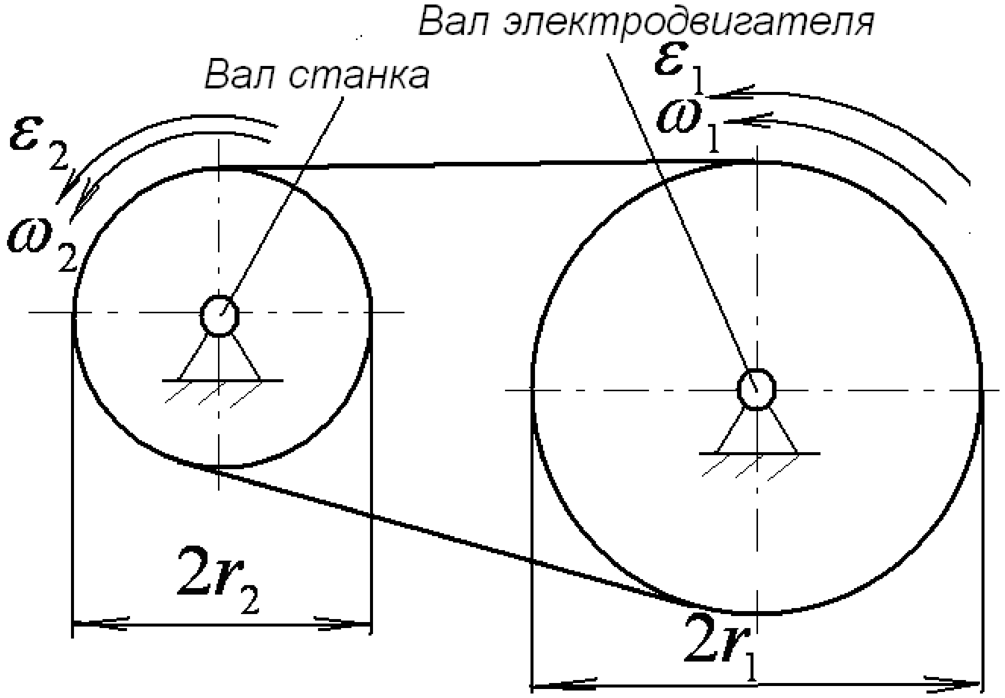


Рисунок 2.2.1 Привод металлорежущего станка

Угловое ускорение равно первой производной по времени от угловой скорости:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}; \quad d\omega_2 = \varepsilon_2 \cdot dt; \quad \int_0^{10\pi} d\omega_2 = \varepsilon_2 \int_0^{\tau} dt; \quad 10\pi = \pi \cdot \tau; \quad \tau = 10 \text{ с.}$$

ЛЕКЦИЯ 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1 Относительное, переносное и абсолютное движение

Сложным (или составным) называется такое движение точки, когда она участвует одновременно в двух или нескольких простых движениях. Так точка М на рисунке 3.1 перемещается по траектории АВ по подвижному телу. Положение точки М в подвижной системе осей координат xyz определяется радиус-вектором $\bar{R}$. Положение начала O подвижной системы отсчета относительно неподвижных осей координат определяется радиус-вектором $\bar{r}_O$. Положение точки М относительно неподвижной системы отсчета $x_1y_1z_1$ определяется радиус-вектором $\bar{r}$.

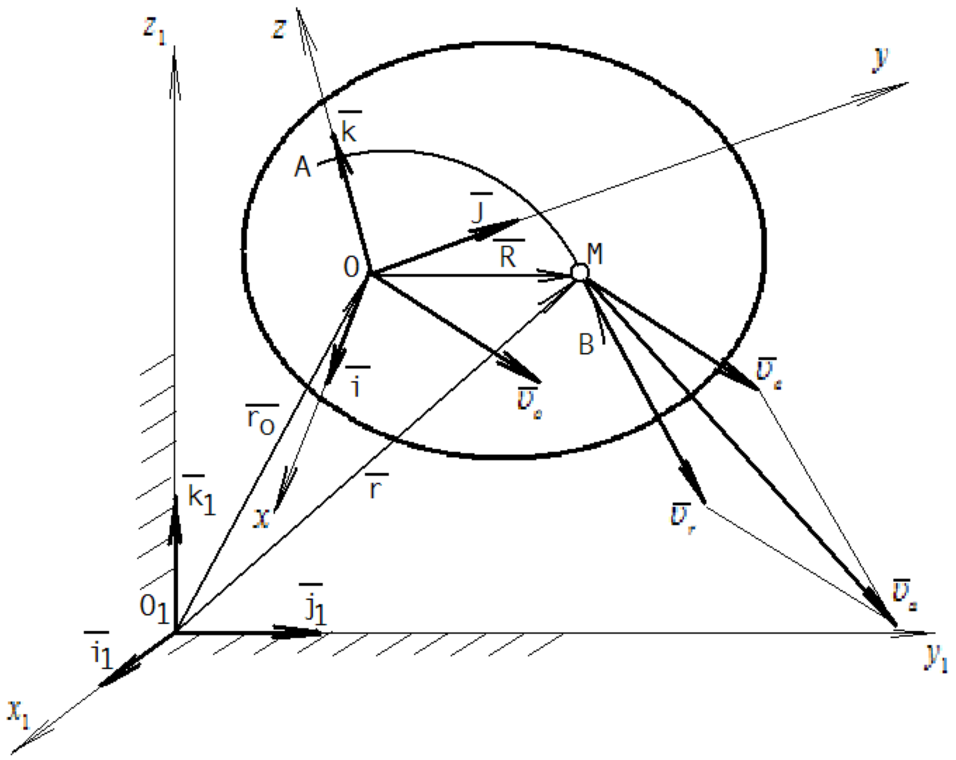


Рисунок 3.1 Сложное (составное) движение точки М

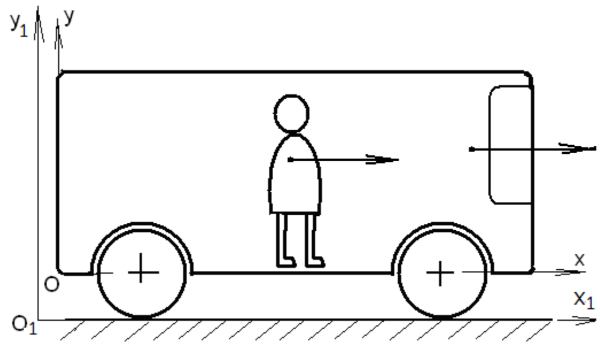
Движение, совершаемое точкой по отношению к подвижной системе осей координат xyz, называется относительным движением. Для обозначения относительного движения применяется индекс «r».

Движение подвижной системы осей координат xyz, т.е. всех точек твердого тела по отношению к неподвижной системе $x_1y_1z_1$ называется переносным движением. Для обозначения переносного движения применяется индекс «e».

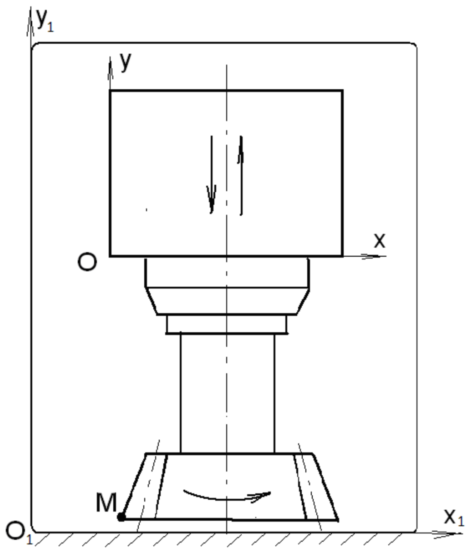
Движение точки М относительно неподвижной системы осей координат $x_1y_1z_1$ называется абсолютным. Для обозначения абсолютного движения применяется индекс «a».

Рассмотрим несколько примеров сложного движения точки, приведенных на рисунке 3.2.

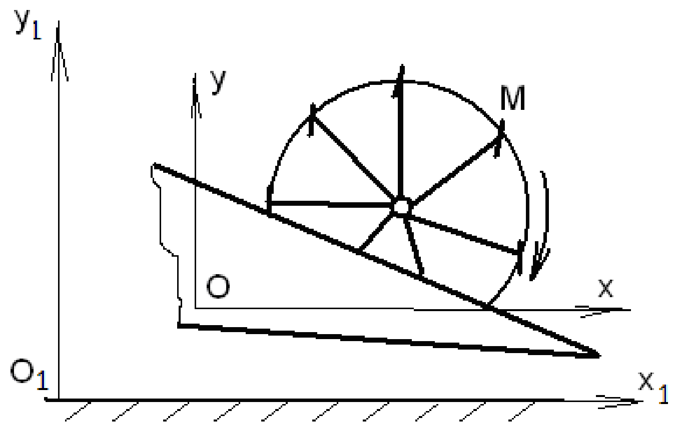
В примере на рисунке 3.2, а движение человека внутри автобуса является переносным, движение автобуса по дороге является переносным, а движение человека относительно земли является абсолютным.



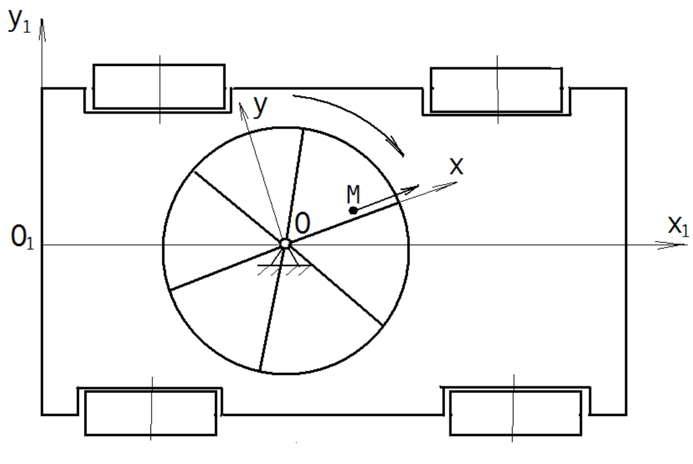
а



б



в



г

Рисунок 3.2 Примеры сложного движения точки

Возвратно-поступательное движение точки М зуборезного инструмента – долбяка вместе с бабкой зубодолбежного станка является переносным, вращение точки вместе с инструментом – относительным, результирующее движение относительно неподвижного корпуса станка – абсолютным.

Движение лопасти М барабана вместе с комбайном и жаткой в примере на рисунке 3.2, в является переносным, вращение вместе с мотовилом относительным, движение лопасти, наблюдаемое с земли, считается абсолютным.

На рисунке 3.2, г гранула М совершает относительное движение по лопасти диска разбрасывателя минеральных удобрений, а также переносное вращение вместе с диском. Результирующим (абсолютным) является движение точки М относительно земли.

Дадим определения абсолютной, относительной и переносной скоростей и ускорений точки.

Абсолютной скоростью (ускорением) точки называется скорость (ускорение) точки по отношению к неподвижной системе отсчета $x_1y_1z_1$.

Относительной скоростью (ускорением) точки М называется скорость (ускорение) этой точки по отношению к подвижной системе координат xyz.

Переносной скоростью (ускорением) называется скорость (ускорение) той точки подвижной системы относительно неподвижной, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка М.

3.2 Теорема сложения скоростей при сложном движении точки

Вектор абсолютной скорости точки в данный момент времени равен геометрической сумме векторов переносной и относительной скоростей в тот же момент времени:

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r . \tag{3.1}$$

Доказательство. Воспользуемся кинематической схемой на рисунке 3.3. В соответствии с чертежом радиус-вектор движущейся точки М равен

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{R} = \bar{r}_O + x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} . \tag{3.2}$$

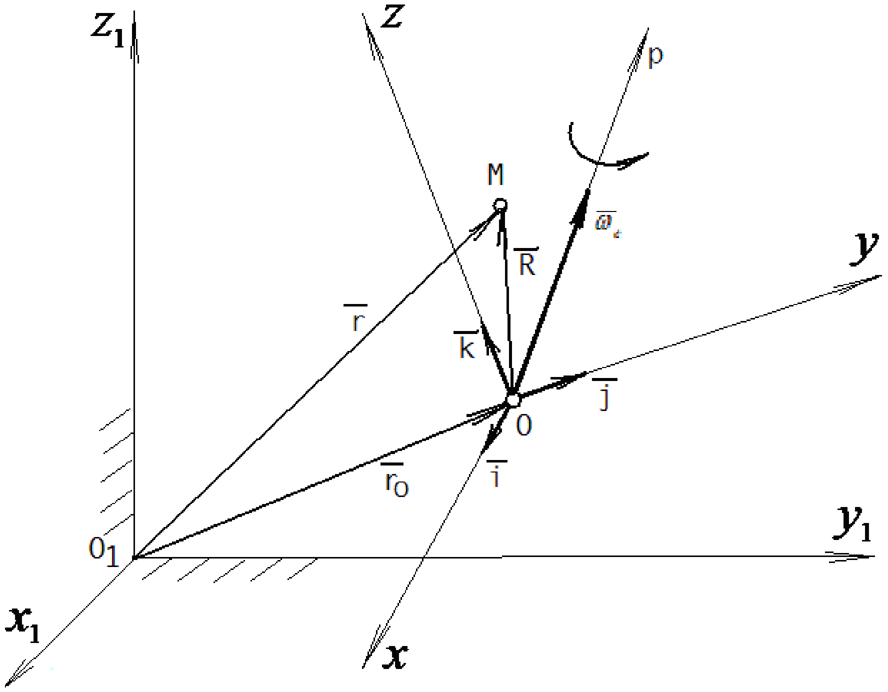


Рисунок 3.3 Кинематическая схема сложного движения точки при вращательном переносном движении

Мысленно останавливаем переносное движение, считаем в (3.2) $\bar{r}_O$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ постоянными. Дифференцируя (3.2), определяем относительную скорость $\bar{\upsilon}_r$:

$$\bar{\upsilon}_r = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\bar{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\bar{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\bar{k} \ . \qquad (3.3)$$

Мысленно останавливаем относительное движение точки М и определяем скорость той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает с точкой М. При дифференцировании (3.2) считаем координаты x, y, z точки постоянными, орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ переменными, так как в общем случае они меняют свое направление. Переносная скорость $\bar{\upsilon}_e$ равна:

$$\bar{\upsilon}_e = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + x\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} + y\cdot\frac{d\bar{j}}{dt} + z\cdot\frac{d\bar{k}}{dt}. \qquad (3.4)$$

Для определения абсолютной скорости точки М дифференцируем (3.2), считая $\bar{r}_O$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, x, y, z переменными величинами:

$$\bar{\upsilon}_a = (\frac{d\bar{r}_O}{dt} + x\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} + y\cdot\frac{d\bar{j}}{dt} + z\cdot\frac{d\bar{k}}{dt}) + (\frac{dx}{dt}\cdot\bar{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\bar{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\bar{k}) = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r. \qquad (3.5)$$

Таким образом, теорема доказана. Теорема (3.5) справедлива как в случае поступательно, так и в случае вращательного переносного движения.

3.3 Теорема сложения ускорений при поступательном переносном движении

Если переносное движение является поступательным, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений этой точки:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r . \tag{3.6}$$

Доказательство. Определим переносное ускорение точки М. При поступательном переносном движении ускорения всех точек подвижного твердого тела на рисунке 3.1 равны. В качестве переносного ускорения можно определить ускорение любой точки твердого тела, например, точки О:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_O = \ddot{\bar{r}}_O . \tag{3.7}$$

Для определения относительного ускорения дифференцируем относительную скорость, считая в выражении (3.3) единичные орты $\bar{i}, \quad \bar{j}, \quad \bar{k}$ постоянными:

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{\upsilon}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{k} . \tag{3.8}$$

Определяем абсолютное ускорение точки. Дифференцируем выражение абсолютной скорости (3.5), считая единичные орты $\bar{i}, \quad \bar{j}, \quad \bar{k}$ постоянными:

$$\bar{a}_a = \frac{d\vec{\upsilon}_a}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_O}{dt^2} + (\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{\mathrm{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{k}) = \bar{a}^e + \bar{a}_r \tag{3.9}$$

Теорема доказана.

3.4 Производная единичного вектора

Вспомним формулу Эйлера (2.5) для определения скорости произвольной точки вращающегося твердого тела (скорости конца вектора $\bar{R}$)

$$\bar{\upsilon} = \bar{\varpi} \times \bar{R} .$$

Найдем производные по времени от единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ подвижных осей координат, как скорости концов этих векторов. По аналогии с (2.5) будем иметь:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \varpi_e \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \varpi_e \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \varpi_e \times \bar{k}. \tag{3.10}$$

3.5 Теорема сложения ускорений при вращательном переносном движении

Для определения переносного ускорения $\bar{a}_e$ дифференцируем выражение переносной скорости (3.4), считая в последнем выражении $\bar{r}_O$, координаты x, y, z точки постоянными, орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ переменными:

$$\bar{a}_e = \frac{d\bar{\upsilon}_e}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_O}{dt^2} + x\cdot\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\cdot\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\cdot\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} \tag{3.11}$$

Определяем относительное ускорение $\bar{a}_r$. При дифференцировании выражения (3.3) относительной скорости единичные вектора $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ считаем постоянными. Будем иметь:

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{\upsilon}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{k}. \tag{3.12}$$

Дифференцируем по времени выражение (3.5) абсолютной скорости точки М:

$$\begin{aligned} \bar{a}_a &= \frac{d\bar{\upsilon}_a}{dt} = (\frac{d^2\bar{r}_O}{dt^2} + x\cdot\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\cdot\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\cdot\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}) + \\ &+ (\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{k}) + 2(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\bar{k}}{dt}) = \\ &= \bar{a}_e + \bar{a}_r + 2(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\bar{k}}{dt}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Обозначим последний из слагаемых в (3.13), имеющий размерность ускорения, как $\bar{a}_k$, и преобразуем с учетом (3.10):

$$\bar{a}_k = 2(\varpi_e \times \frac{dx}{dt}\cdot\bar{i} + \varpi_e \times \frac{dy}{dt}\cdot\bar{j} + \varpi_e \times \frac{dz}{dt}\cdot\bar{k}) = \varpi_e \times (\dot{x}\cdot\bar{i} + \dot{y}\cdot\bar{j} + \dot{z}\cdot\bar{k}).$$

Здесь вектор $\dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}$ в соответствии с (3.3) является вектором относительной скорости $\bar{\upsilon}_r$. Таким образом,

$$\bar{a}_k = 2\bar{\varpi}_e \times \bar{\upsilon}_r . \tag{3.14}$$

Ускорение $\bar{a}_k$ называется ускорением Кориолиса. Ускорение Кориолиса равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Перепишем равенство (3.13) в виде

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k . \tag{3.15}$$

Сформулируем доказанную теорему Кориолиса. В случае, когда переносное движение точки является вращательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса.

Для определения направления ускорения Кориолиса в соответствии с (3.14) воспользуемся правилом векторного произведения. Вектор $\bar{a}_k$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены вектора ϖ и $\bar{\upsilon}_r$, таким образом, чтобы наблюдатель, смотря с положительного конца вектора $\bar{a}_k$, видел кратчайший поворот первого сомножителя ϖ до совмещения со вторым сомножителем $\bar{\upsilon}_r$, направленным против хода часовой стрелки (рисунок 3.4).

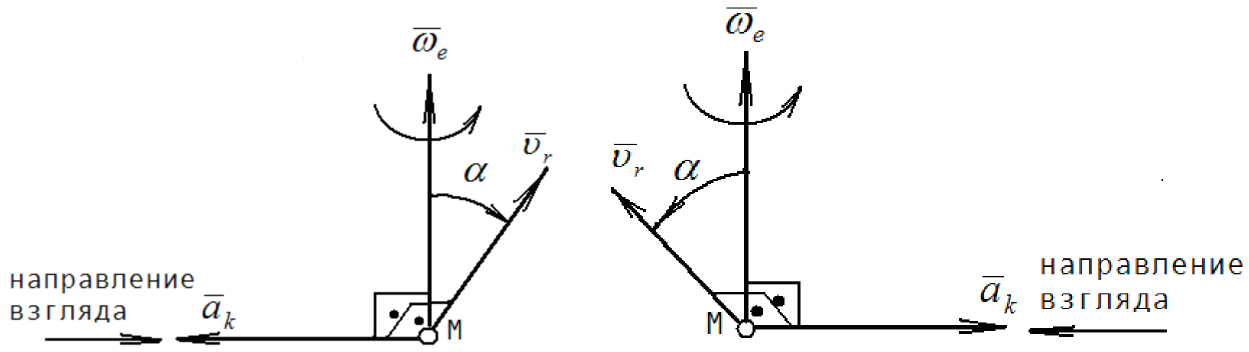


Рисунок 3.4 Определение направления ускорения Кориолиса

Модуль ускорения $\bar{a}_k$ равен

$$a_k = 2\omega \cdot \upsilon_r \cdot \sin\alpha .$$

Рассмотрим частный случай плоского движения точки M, показанный на рисунке 3.5. Точка совершает относительное движение в плоскости, перпендикулярной оси вращения z.

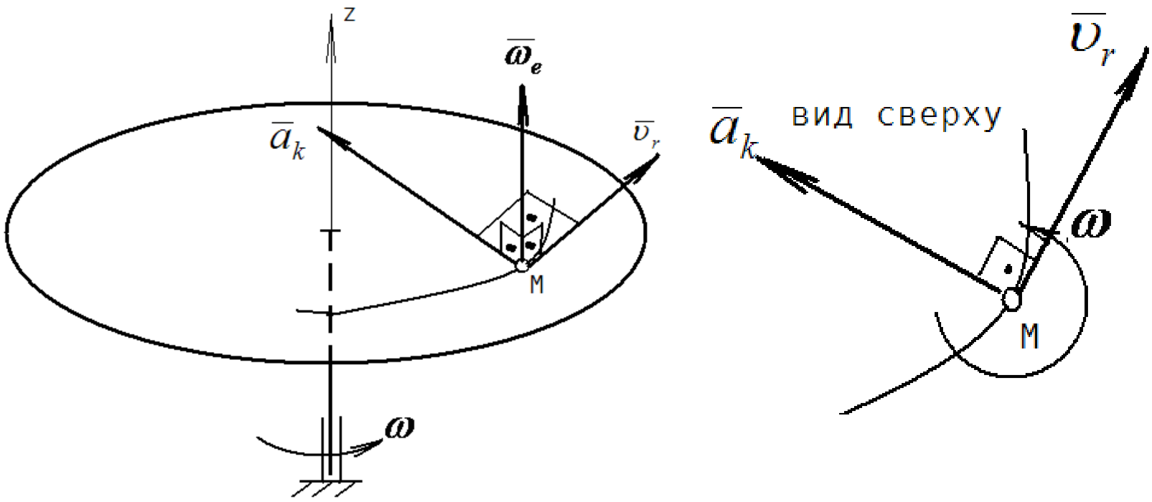


Рисунок 3.5 Случай плоского сложного движения точки

При $\alpha = 90^o$ все три вектора $\overline{\omega}_e$, $\overline{\upsilon}_r$, $\overline{a}_k$ взаимно перпендикулярны. В рассматриваемом частном случае для определения направления вектора $\overline{a}_k$ достаточно вектор $\overline{\upsilon}_r$ повернуть в сторону переносного вращательного движения на угол 90°.

Модуль ускорения Кориолиса при $\alpha = 90^o$ равен

$$a_k = 2\omega \cdot \upsilon_r .$$

Примеры решения задач

<u>Задача 3.1</u> Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость $\omega_1 = 1{,}2$ рад/с. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $L = 0{,}5$ м, расстояние между осями их подвеса $2e = 0{,}1$ м, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^o$.

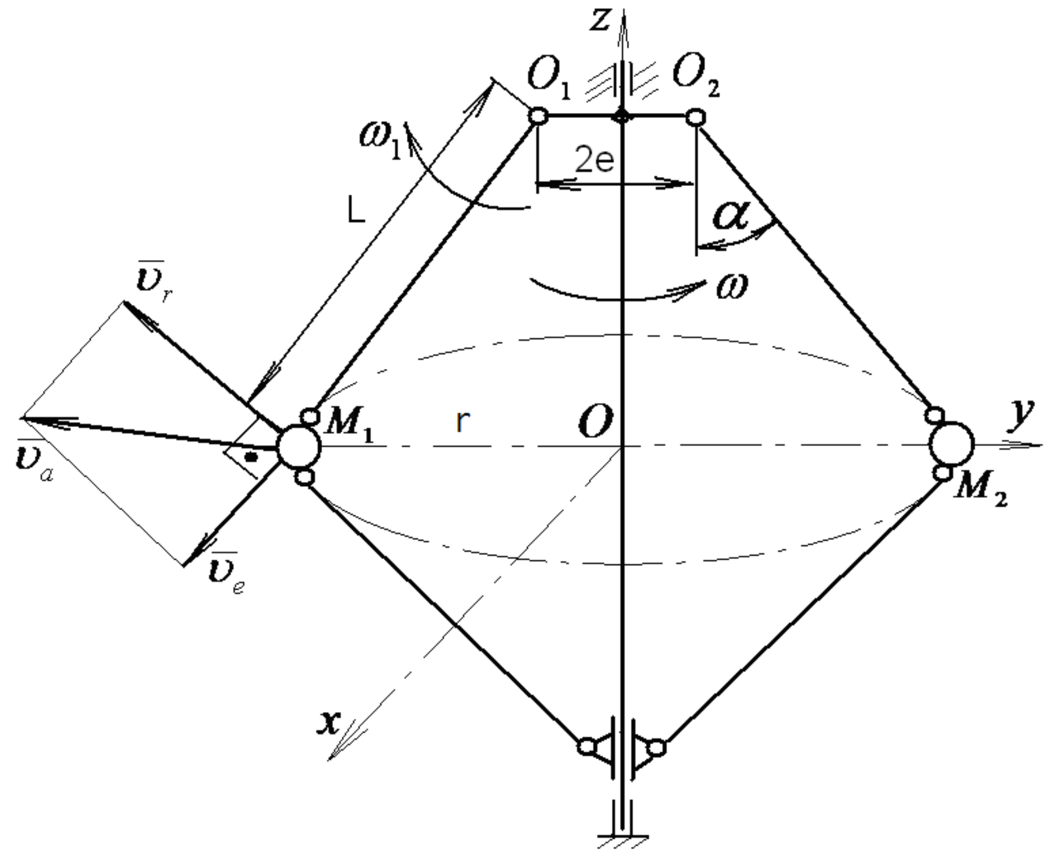


Рисунок 3.1.1 Кинематическая схема центробежного регулятора Уатта

Решение. Шары регулятора, изображенного на рисунке 3.1.1, совершают сложное движение. Свяжем с вращающимся валом подвижную систему отсчета xyz. Переносным движением является вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Относительным движением шаров является их вращение вокруг осей O_1 и O_2 вместе со стержнями с угловой скоростью ω_1.

Применим для шара, который мы считаем материальной точкой, теорему сложения скоростей (3.5)

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r .$$

Переносная скорость точки равна:

$$\upsilon_e = \omega \cdot r = \omega \cdot (e + L \cdot \sin\alpha) = 10 \cdot (0{,}05 + 0{,}5 \cdot \sin 30^o) = 3{,}0 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_e \parallel Ox .$$

Определим и покажем на чертеже относительную скорость:

$$\upsilon_r = \omega_1 \cdot L = 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_r \perp O_1M_1 .$$

При $\bar{\upsilon}_e \perp \bar{\upsilon}_r$ абсолютная скорость шаров равна

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2} = \sqrt{3{,}0^2 + 0{,}6^2} = 3{,}06 \text{ м/с}.$$

Задача 3.2 На рисунке 3.2.1 изображен параллелограммный механизм. Полукруглая пластина радиуса $R = 0{,}4$ м приводится в движение двумя кривошипами длины $L = 0{,}3$, вращающимися вокруг неподвижных осей в соответствии с законом $\varphi = 0{,}1 \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t$ рад, где t – время в с. По ободу пластины движется точка М в соответствии с законом $O_2M = S = 0{,}25 \cdot \pi \cdot t^2$ рад. Определить в момент времени $t_1 = 2$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М.

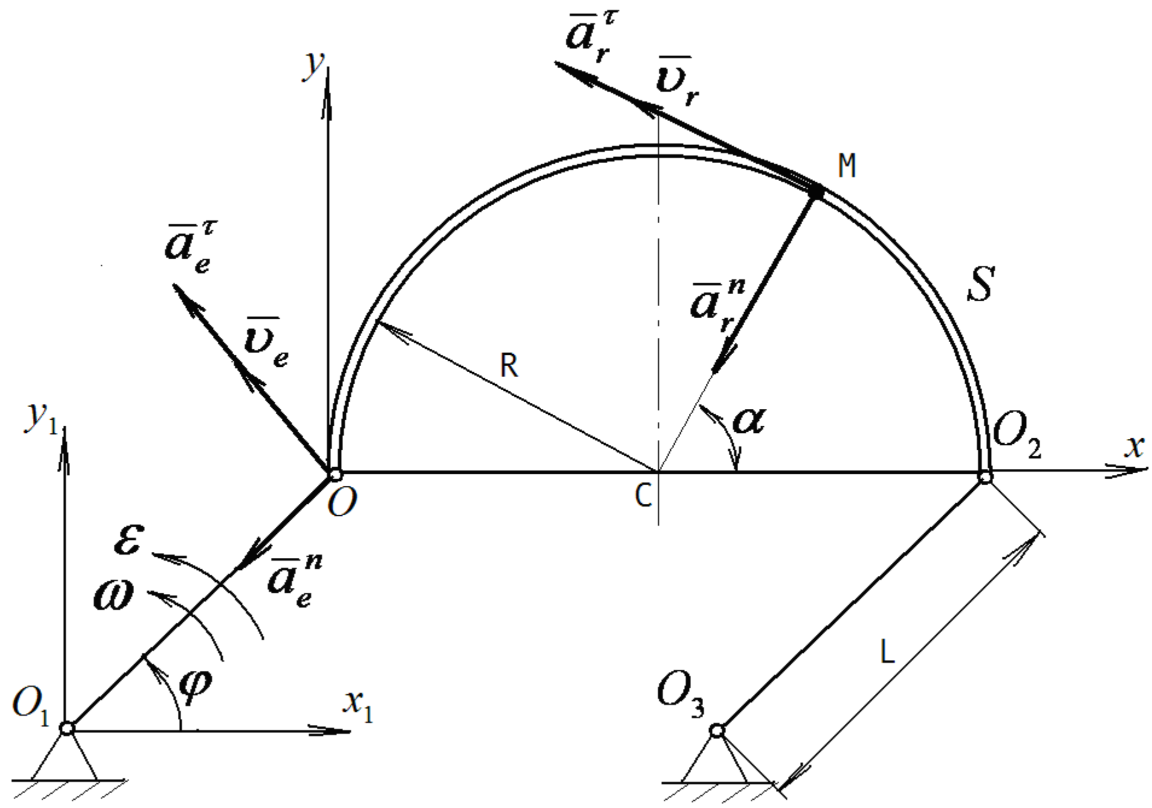


Рисунок 3.2.1 Сложное движение точки М

Решение. 1. Рассмотрим движение точки М как сложное. Покажем на чертеже неподвижные оси координат $x_1O_1y_1$ и подвижную систему отсчета xOy, связанную с пластиной. Движение точки М вместе с пластиной (вместе с подвижными осями $x_1O_1y_1$) является переносным, движение точки по ободу пластины (относительно подвижных осей xOy) является относительным.

2. Определим положение кривошипов и точки М на пластине в заданный момент времени $t_1 = 2$ с:

$$\varphi = 0{,}1 \cdot 2^2 + 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}8 \quad рад = 45{,}8^o; \; O_2M = S = 0{,}25 \cdot \pi \cdot 2^2 / 12 = \pi / 12 \text{ м};$$

$$\alpha = S / R = \frac{\pi}{12 \cdot 0{,}4} = \frac{\pi}{3} \quad рад = 60^{щ}.$$

3. Определим для заданного момента времени угловую скорость и угловое ускорение кривошипов:

$$\omega = \dot{\varphi} = 0{,}2 \cdot t + 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}2 = 0{,}6 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

4. Применим для точки М теорему сложения скоростей

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r. \tag{3.2.1}$$

Переносное движение точки М является поступательным, все точки полудиска на рисунке 3.2.1 имеют одинаковые скорости и ускорения. В качестве переносной скорости $\bar{\upsilon}_e$ определяем скорость точки О:

$$\upsilon_e = \omega \cdot L = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_e \perp O_1O.$$

Относительная скорость точки М направлена касательно желобу и равна по модулю

$$\upsilon_r = \dot{S} = 0{,}5 \cdot \pi \cdot t = 0{,}5 \cdot \pi \cdot 2 = 3{,}14 \text{ м/с}.$$

Для определения абсолютной скорости точки проектируем векторное уравнение (3.2.1) на подвижные оси координат:

$$\upsilon_{ax} = -\upsilon_e \cdot \sin\varphi - \upsilon_r \cdot \sin\alpha = -0{,}18 \cdot \sin 45{,}8^o - 3{,}14 \cdot \sin 60^o = -2{,}85 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{ay} = \upsilon_e \cdot \cos\varphi + \upsilon_r \cdot \cos\alpha = 0{,}18 \cdot \cos 45{,}8^o + 3{,}14 \cdot \cos 60^o = 1{,}70 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_{ax}^2 + \upsilon_{ay}^2} = \sqrt{(-2{,}85)^2 + 1{,}70^2} = 3{,}32 \text{ м/с}.$$

5. Воспользуемся теоремой сложения скоростей в случае поступательного переносного движения:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau. \tag{3.2.2}$$

Вычислим и покажем на чертеже вектора ускорений в уравнении (3.2.1).

Переносное нормальное ускорение точки М

$$a_e^n = \omega^2 \cdot L = 0{,}6^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}108 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_e^n \parallel OO_1.$$

Переносное касательное ускорение

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot L = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_e^\tau \perp OO_1.$$

Относительное нормальное ускорение равно

$$a_r^n = \frac{\upsilon_r^2}{R} = \frac{3{,}14^2}{0{,}4} = 24{,}6 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_r^n \parallel MC.$$

Относительное касательное ускорение

$$a_r^\tau = \frac{d\upsilon_r}{dt} = 0{,}5 \cdot \pi = 1{,}57 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_r^\tau \perp O_1O.$$

6. Проектируем вектора ускорений в соответствии с уравнением (3.2.1) на подвижные оси координат:

$$a_{ax} = -a_e^n \cdot \cos\varphi - a_e^\tau \cdot \sin\varphi - a_r^n \cdot \cos\alpha - a_r^\tau \cdot \sin\alpha =$$
$$-0{,}108 \cdot \cos 45{,}8^o - 0{,}06 \cdot \sin 45{,}8^o - 24{,}6 \cdot \cos 60^o - 1{,}57 \cdot \sin 60^0 = -13{,}8 \quad м./c^2 \quad ;$$

$$a_{ay} = -a_e^n \cdot \sin\varphi + a_e^\tau \cdot \cos\varphi - a_r^n \cdot \sin\alpha + a_r^\tau \cdot \cos\alpha =$$
$$-0{,}108 \cdot \sin 45{,}8^o + 0{,}06 \cdot \cos 45{,}8^o - 24{,}6 \cdot \sin 60^o + 1{,}57 \cdot \cos 60^o = -20{,}6 \quad м/c^2.$$

Абсолютное ускорение точки М в заданный момент времени равно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{(-13{,}8)^2 + (-20{,}6)^2} = 24{,}8 \text{ м/с}^2.$$

<u>Задача 3.3</u> Пластина со стороной $b = 0{,}8$ м вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = 10 \cdot (t^2 + t)$ рад, где t – время в с. По пластине вдоль прямой АВ движется точка М в соответствии с законом $AM = S = 0{,}3 \cdot t^2 - 0{,}1 \cdot t$ м. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t_1 = 2$ с.

<u>Решение.</u> 1. Разберем сложное движение точки М. Переносным движением является вращение точки вместе с пластиной, относительным – движение по пластине (по прямой АВ).

2. Определим в заданный момент времени $t_1 = 2$ с положение точки М на пластине:

$$AM = S = 0{,}3 \cdot 2^2 - 0{,}1 \cdot 2 = 1{,}0 \text{ м}; \quad r = b - S \cdot \cos 60^o = 0{,}8 - 1 \cdot \cos 60^o = 0{,}3 \text{ м}$$

3. Для момента времени $t_1 = 2$ с определим угловую скорость и угловое ускорение пластины:

$$\omega = \dot{\varphi} = 10 \cdot (2t + 1) = 10 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 50 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

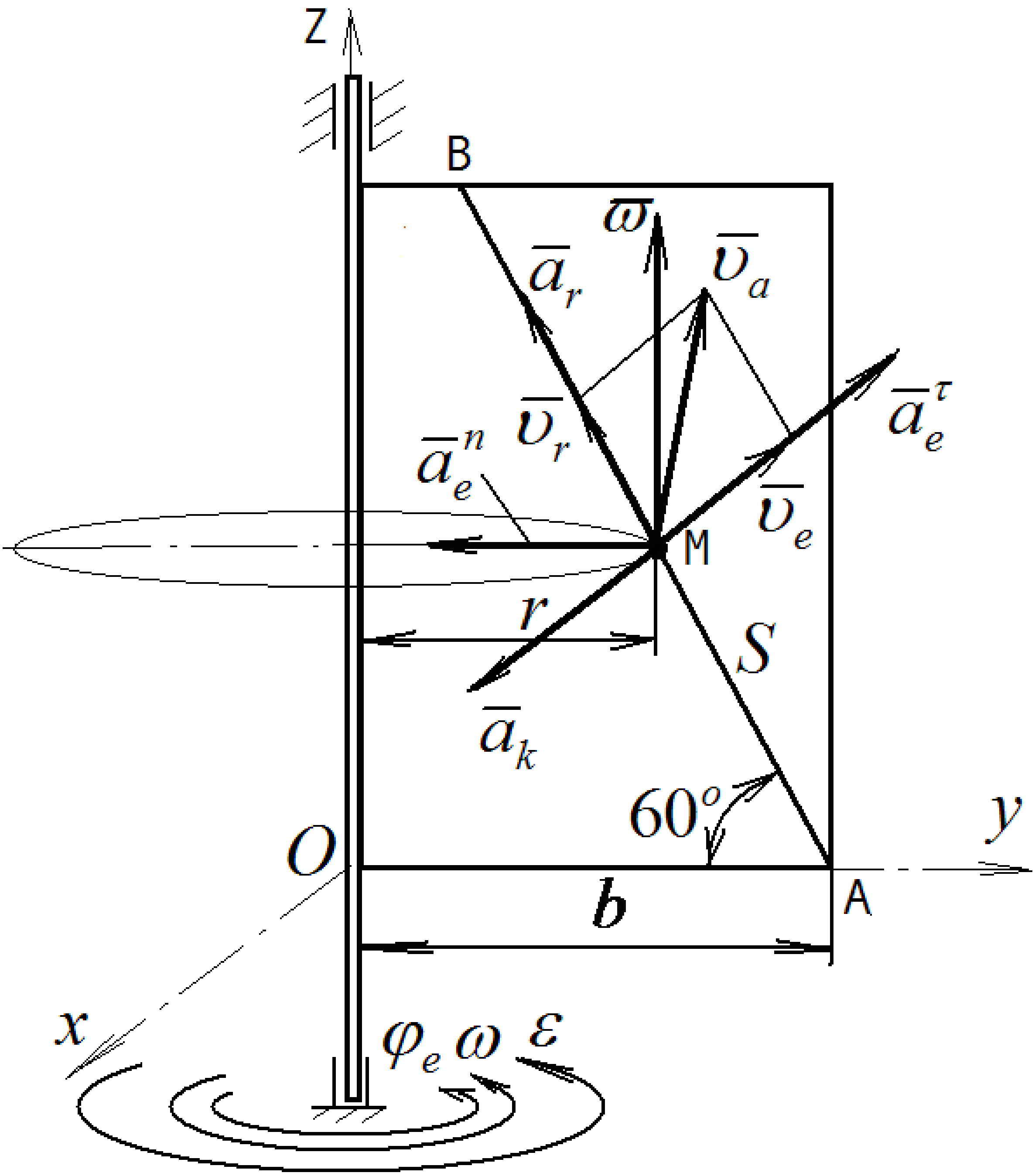


Рисунок 3.3.1 Кинематическая схема к задаче 3.3

4. Воспользуемся теоремой сложения скоростей

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r . \tag{3.3.1}$$

Определим для заданного момента времени скорости и покажем их на чертеже:

$\upsilon_e = \omega \cdot r = 50 \cdot 0{,}3 = 15$ м/с; $\overline{\upsilon}_e \parallel Ox$; $\upsilon_r = \dot{S} = 0{,}6t - 0{,}1 = 0{,}6 \cdot 2 - 0{,}1 = 1{,}1$ м/с; $\overline{\upsilon}_r \parallel AB$.

Так как $\bar{\upsilon}_e \perp \bar{\upsilon}_r$, то абсолютная скорость точки М в заданный момент времени t_1 будет равна

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e{}^2 + \upsilon_r^2} = \sqrt{15^2 + 1{,}1^2} = 15{,}2 \text{ м/с}^2.$$

5. Применим теорему сложения ускорений при вращательном переносном движении

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \tag{3.3.2}$$

6. Вычислим и покажем на чертеже ускорения в правой части векторного уравнения (3.3.2).

Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n = \omega^2 \cdot r = 50^2 \cdot 0{,}3 = 750 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_e^n \parallel Oy.$$

Переносное касательное ускорение

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot r = 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_e^\tau \parallel Ox.$$

Относительное ускорение

$$a_r = \dot{\upsilon}_r = 0{,}6 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_r \parallel AB.$$

Ускорение Кориолиса

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times \bar{\upsilon}_r; \quad a_k = 2\omega \cdot \upsilon_r \cdot \sin(\bar{\omega} \wedge \bar{\upsilon}_r) = 2 \cdot 50 \cdot 1{,}1 \cdot \sin 30^o = 55 \text{ м/с}^2.$$

Показываем вектор $\bar{a}_k$ перпендикулярно плоскости yOz, в которой расположены вектора $\bar{\omega}$ и $\bar{\upsilon}_к$. Направляем $\bar{a}_k$ по оси Ox таким образом, чтобы наблюдатель, смотрящий с положительного конца этого вектора, наблюдал кратчайший поворот первого сомножителя $\bar{\omega}$ до совмещения со вторым сомножителем $\bar{\upsilon}_к$ происходящим против хода часовой стрелки.

7. Определим абсолютное ускорение точки в заданный момент времени. Для этого сложим вектора ускорений в уравнении (3.3.2) аналитическим способом:

$$a_{ax} = -a_e^\tau + a_k = -6 + 55 = 49 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = -a_e^n - a_r \cdot \cos 60^o = -750 - 0{,}6 \cdot \cos 60^o = -750{,}3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = a_r \cdot \sin 60^o = 0{,}6 \cdot \sin 60^o = 0{,}52 \text{ м/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{49^2 + (-750{,}3)^2 + 0{,}52^2} = 752 \text{ м/с}^2.$$

ЛЕКЦИЯ 4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 Плоскопараллельное движение твердого тела. Уравнения движения

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости П (рисунок 4.1).

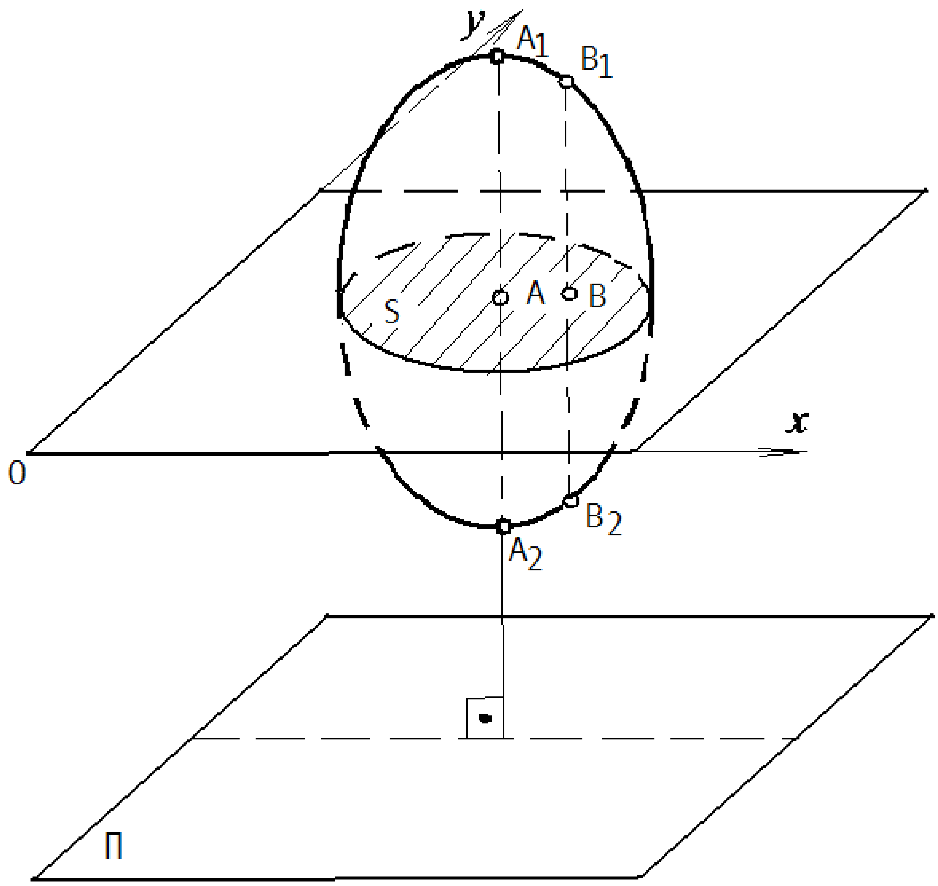


Рисунок 4.1 Плоскопараллельное движение твердого тела

Примеры деталей и узлов, совершающих плоскопараллельное движение, приведены на рисунке 4.2. Это колесо автомобиля на прямолинейном участке пути (рисунок 4.2, а); кривошип OA, шатун AB и ползун B кривошипно-ползунного механизма на рисунке 4.2, б; центральное колесо, сателлит и водило планетарного механизма на рисунке 4.2, в.

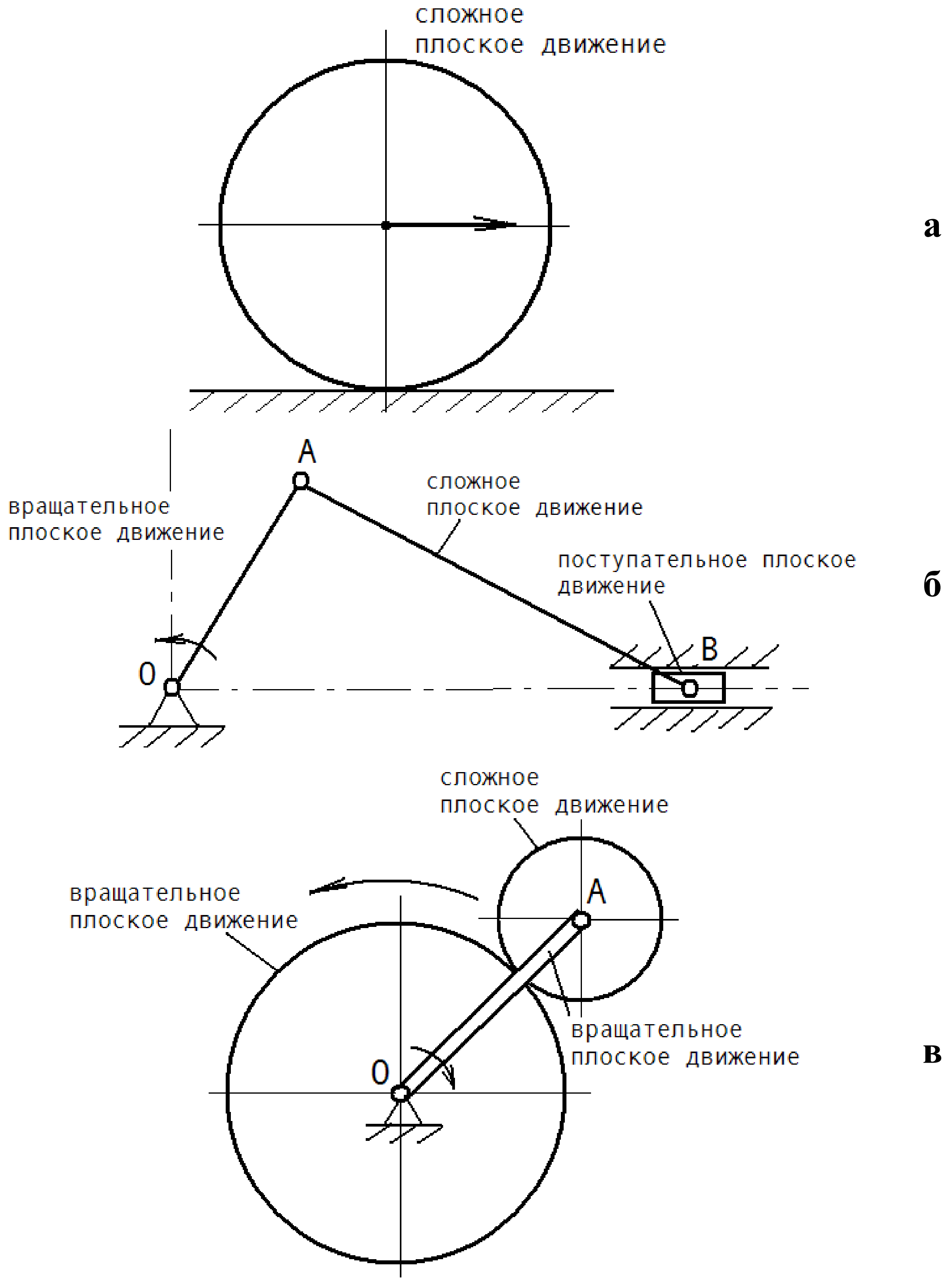


Рисунок 4.2 Примеры плоскопараллельного движения: а – колесо автомобиля на прямолинейном участке пути; б – кривошипно-ползунный механизм; в – планетарный зубчатый механизм

Рассечем твердое тело на рисунке 4.1 плоскостью xOy, параллельной неподвижной плоскости П. Получившаяся в сечении плоская фигура S при плоскопараллельном движении твердого тела движется в плоскости xOy. Любые отрезки A_1A_2, B_1B_2, перпендикулярные плоскости фигуры S, будут двигаться параллельно самим себе, поступательно. Скорости и ускорения всех точек отрезка A_1A_2 равны между собой. То же самое можно сказать и о точках отрезка B_1B_2.

Отсюда следует, что движение плоской фигуры S в своей плоскости полностью характеризует плоскопараллельное движение всего твердого тела (рисунок 4.3).

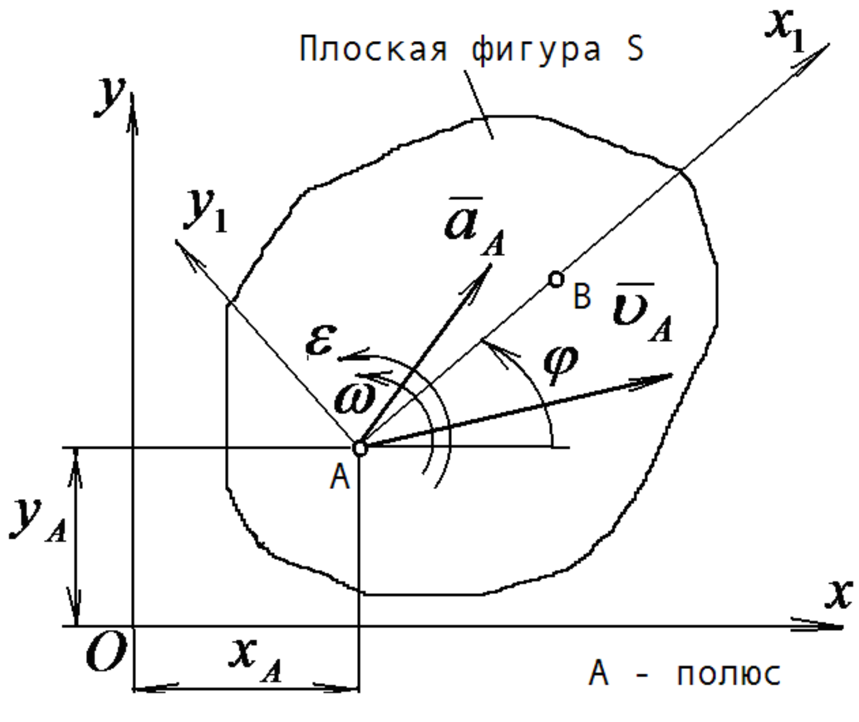


Рисунок 4.3 Движение плоской фигуры S в плоскости xOy

Положение плоской фигуры S в плоскости xOy определяется положением одной ее любой точки (полюса) и углом поворота φ плоской фигуры вокруг оси, проходящей через полюс. При движении плоской фигуры координаты полюса А и угол поворота φ будут меняться. Закон движения плоской фигуры в плоскости xOy описывается зависимостями вида

$$x_A = x_A(t);\quad y_A = y_A(t);\quad \varphi = \varphi(t). \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела. Дифференцируя уравнения (4.1), можно определить скорость $\overline{\upsilon}_A$ полюса и угловую скорость ω плоской фигуры. Дважды дифференцируя уравнения (4.1), определяют ускорение $\overline{a}_A$ полюса A и угловое ускорение ε фигуры.

4.2 Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное

Переведем плоскую фигуру S на рисунке 4.4 из начального положения I в конечное положение II, осуществив при этом минимальное количество простых движений.

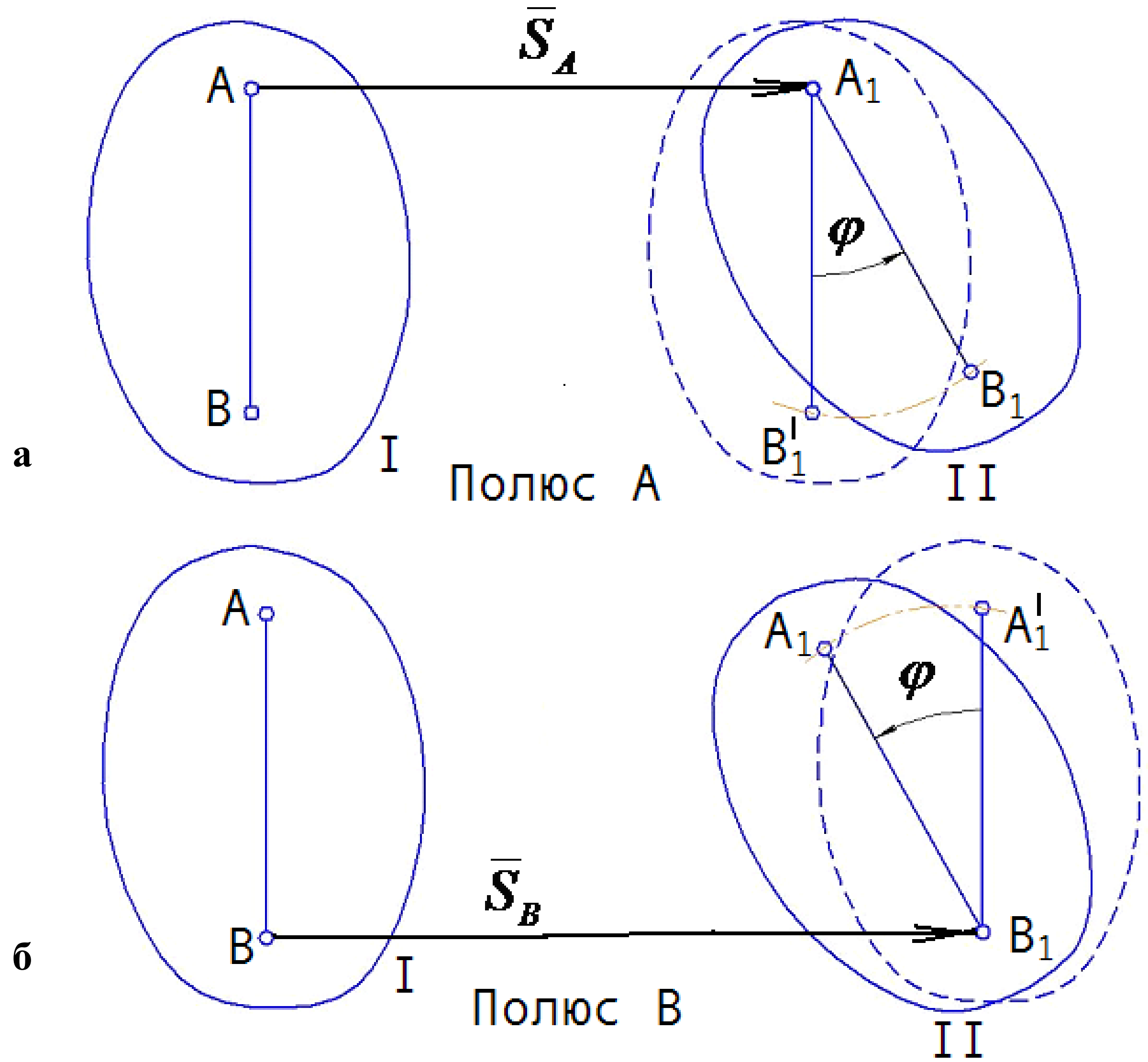


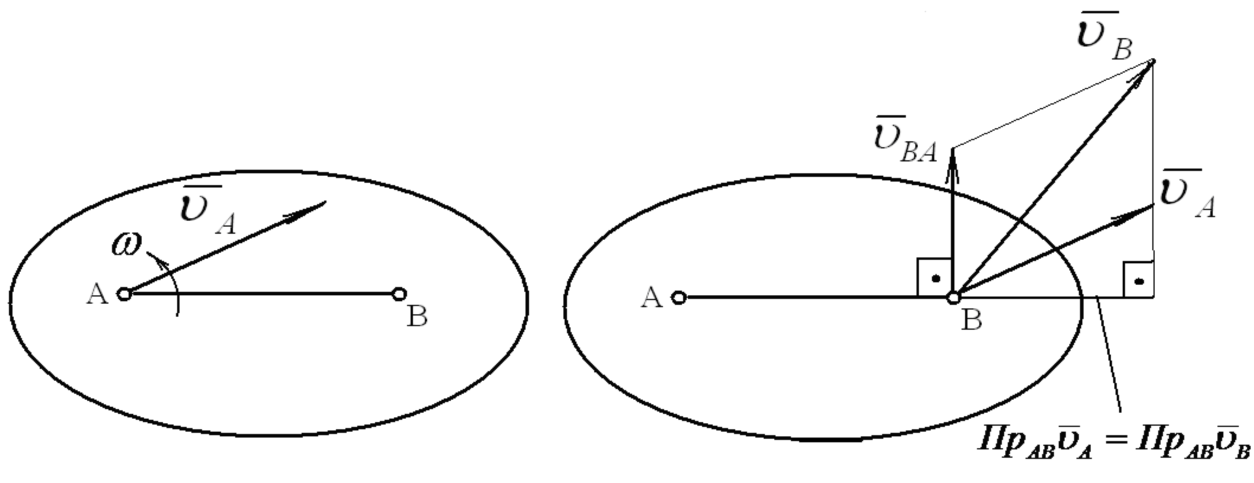
Рисунок 4.4 Перевод плоской фигуры из положения I в положение II

Такой перевод осуществляется по схеме на рисунке 4.4, а путем поступательного перемещения плоской фигуры вместе с полюсом А и поворотом ее на угол φ вокруг оси, проходящей через полюс. В качестве полюса можно выбрать любую другую точку, например точку В (рисунок 4.4, б). В обоих вариантах перевода величины и направления угла поворота φ совпадают, т.е. угол φ от выбора полюса не зависит.

Подобная замена движения плоской фигуры S поступательным и вращательным перемещениями не воспроизводит совершенно точно фактическое движение фигуры. Для точного воспроизведения перемещения плоской фигуры из положения I в положение II ее необходимо подобным образом провести через бесчисленное количество промежуточных положений, осуществляя при каждом элементарном переводе поступательное и вращательное движения.

Таким образом, движение плоской фигуры в своей плоскости можно разложить на поступательное движение, при котором все точки движутся так же, как произвольно выбранный полюс, и на вращательное движение вокруг этого полюса.

4.3 Определение скоростей точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости



а **б**

Рисунок 4.5 Выражение скорости точки В плоской фигуры через скорость полюса А

Сформулируем задачу следующим образом. Известны: скорость $\bar{\upsilon}_A$ полюса А, угловая скорость ω плоской фигуры, положение точки В, определяемое отрезком $\overline{AB}$ на рисунке 4.5, а. Требуется определить скорость точки В плоской фигуры.

Считаем, что плоская фигура движется поступательно со скоростью полюса $\bar{\upsilon}_A$ и одновременно вращается вокруг оси, проходящей через полюс А с угловой скоростью ω. Скорость точки В можно определить по векторному уравнению

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}, \qquad (4.2)$$

где скорость при вращении точки В вокруг точки А равна по модулю $\upsilon_{BA} = \omega \cdot AB$, вектор $\bar{\upsilon}_{BA}$ направлен перпендикулярно отрезку АВ в сторону вращения фигуры. Скорость точки В показана на рисунке 4.5, б как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_{BA}$, как на сторонах.

4.4 Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти две точки

Воспользуемся векторным уравнением (4.2), которое проектируем на прямую, проходящую через точки А и В (рисунок 4.5, б):

$$Пр_{AB}\bar{\upsilon}_B = Пр_{AB}\bar{\upsilon}_A + Пр_{AB}\bar{\upsilon}_{BA} \ .$$

Так как $\bar{\upsilon}_{BA} \perp \overline{AB}$, то $Пр_{AB}\bar{\upsilon}_{BA} = 0$ и $Пр_{AB}\bar{\upsilon}_B = Пр_{AB}\bar{\upsilon}_{BA}$.

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти две точки, равны меду собой.

4.5 Мгновенный центр скоростей

Существует также метод определения скоростей точек плоской фигуры, основанный на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка C_v плоской фигуры S, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Через точку C_v проходит мгновенная ось вращения плоской фигуры. Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движением фигуры было вращение вокруг мгновенного центра скоростей (рисунок 4.6).

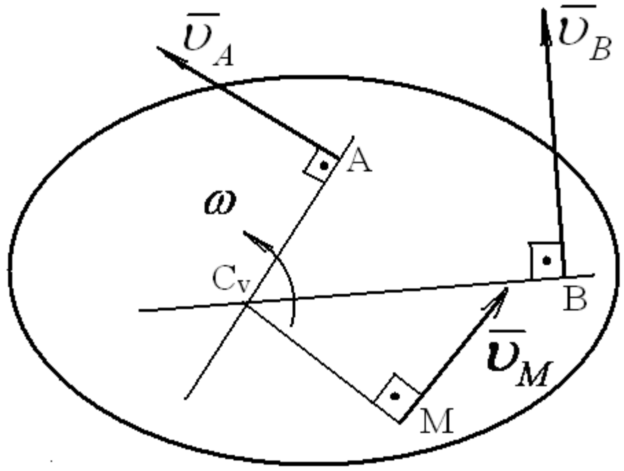


Рисунок 4.6 Определение скоростей точек плоской фигуры при вращении вокруг мгновенного центра скоростей

Согласно соотношению (2.3), скорости точек A, B и M плоской фигуры соответственно равны:

$$\upsilon_A = \omega \cdot C_V A; \quad \upsilon_B = \omega \cdot BC_V; \quad \upsilon_M = \omega \cdot MC_V. \tag{4.3}$$

Вектора скоростей $\overline{\upsilon}_A$, $\overline{\upsilon}_B$, $\overline{\upsilon}_M$ направлены перпендикулярно соответственно отрезкам $C_V A$, $C_V B$, $C_V M$ в сторону вращения плоской фигуры, как показано на рисунке 4.6. Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Можно заметить, что скорость любой точки плоской фигуры через мгновенный центр скоростей определяется проще, чем по векторному уравнению вида (4.2).

Существует несколько способов определения положения точки C_v.

1) Если известны направления векторов скоростей двух точек A и B плоской фигуры, то точку C_v можно определить как точку пересечения перпендикуляров к векторам $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ (рисунок 4.7, а).

Угловую скорость плоской фигуры можно определить по соотношениям:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{C_V A} = \frac{\upsilon_B}{C_V B}.$$

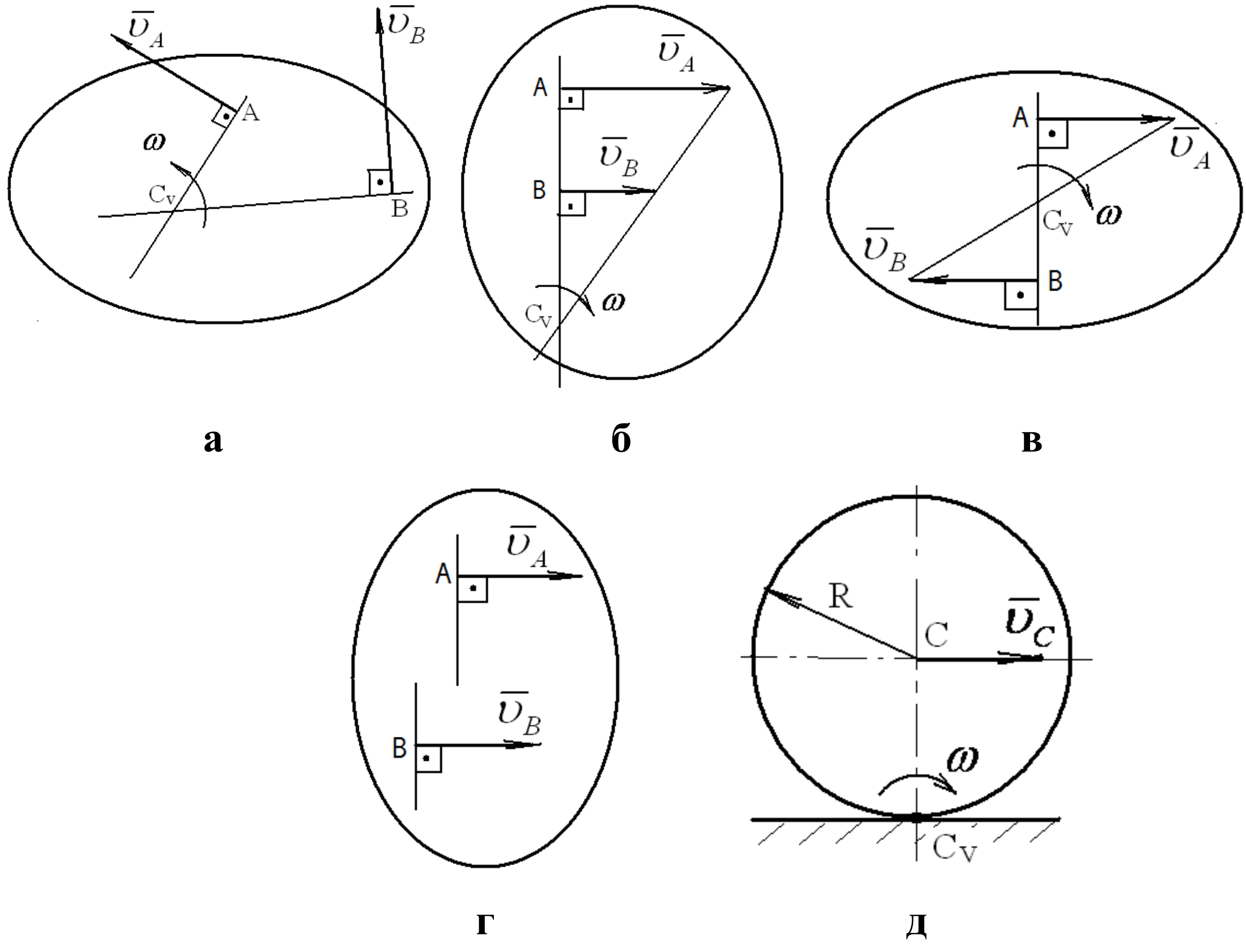


Рисунок 4.7 Определение мгновенного центра скоростей в различных случаях плоскопараллельного движения

2) В примере на рисунке 4.7, б перпендикуляры к векторам скоростей $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ совпали. Точку C_v можно определить как точку пересечения общего перпендикуляра со вспомогательной линией, проходящей через концы векторов скоростей $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$. Угловую скорость ω и расстояние до точки C_v можно вычислить из системы уравнений:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{C_V A} = \frac{\upsilon_B}{C_V B}; \quad C_V B = AC_V - AB.$$

3) В примере на рисунке 4.7, в точка C_v находится между точками А и В. В этом случае:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{C_V A} = \frac{\upsilon_B}{C_V B}; \quad BC_V = AB - AC_V.$$

4) В примере на рисунке 4.7, г перпендикуляры к скоростям $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ параллельны, точка C_v бесконечно удалена. Этот случай является случаем поступательного движения твердого тела, при котором:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{\infty} = 0; \quad \bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_B .$$

5) Мгновенный центр скоростей C_v колеса, катящегося без скольжения, совпадает с общей точкой колеса и направляющей:

$$\omega = \frac{\upsilon_C}{C_V C} = \frac{\upsilon_C}{R} .$$

4.6 Определение ускорений точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости

Сформулируем задачу определения ускорения точки B плоской фигуры следующим образом. Известны: ускорение полюса $\bar{a}_A$, угловая скорость ω и угловое ускорение ε плоской фигуры, отрезок $\overline{AB}$, определяющий положение точки B на плоской фигуре (рисунок 4.8, а). Необходимо определить ускорение точки B.

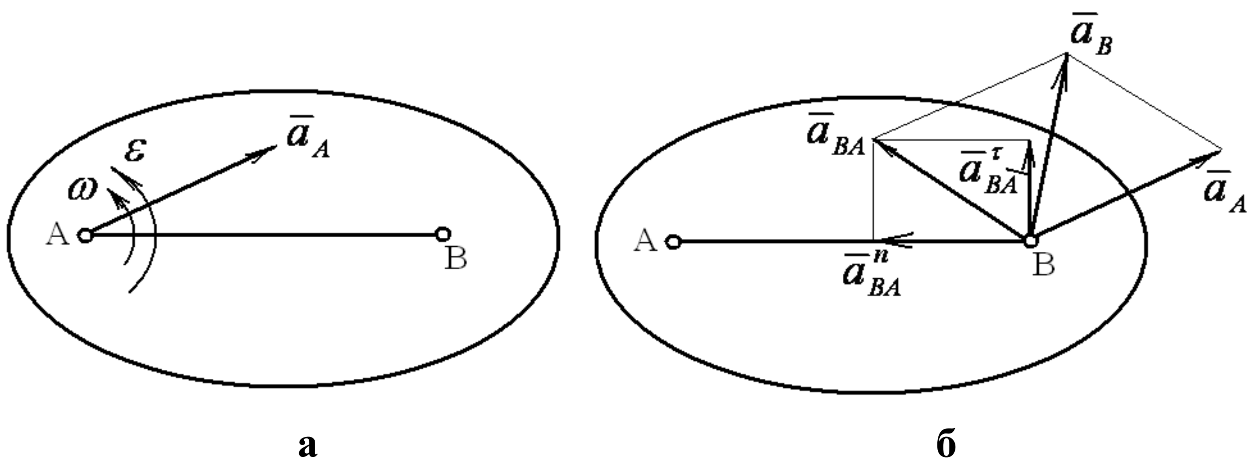


Рисунок 4.8 Выражение ускорения точки B плоской фигуры через ускорение полюса A

Дифференцируем уравнение скоростей (4.2) и получаем:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

или

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA}. \quad (4.4)$$

Нормальное ускорение при вращении точки B вокруг полюса A равно по модулю $a^n_{BA} = \omega^2 \cdot AB$; $\bar{a}^n_{BA} \parallel BA$. Касательное ускорение при вращении точки

В вокруг точки А перпендикулярно отрезку АВ, направлено в сторону углового ускорения ε и по модулю равно $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB$ (рисунок 4.8, б).

Построение векторного многоугольника в соответствии с уравнением (4.4) можно проследить по рисунку 4.8.

4.7 Сложное движение твердого тела

Если тело движется относительно подвижных осей xyz, а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $x_1y_1z_1$, то абсолютное (результирующее) движение тела называется сложным.

В данном параграфе дается представление о двух видах сложного движения твердого тела. Рассматриваются сложение вращений вокруг двух параллельных осей и сложение движений вокруг пересекающихся осей.

Показанное на рисунке 4.9 тело вращается одновременно вокруг параллельных осей z_A и z_B, причем оба вращения направлены в одну сторону.

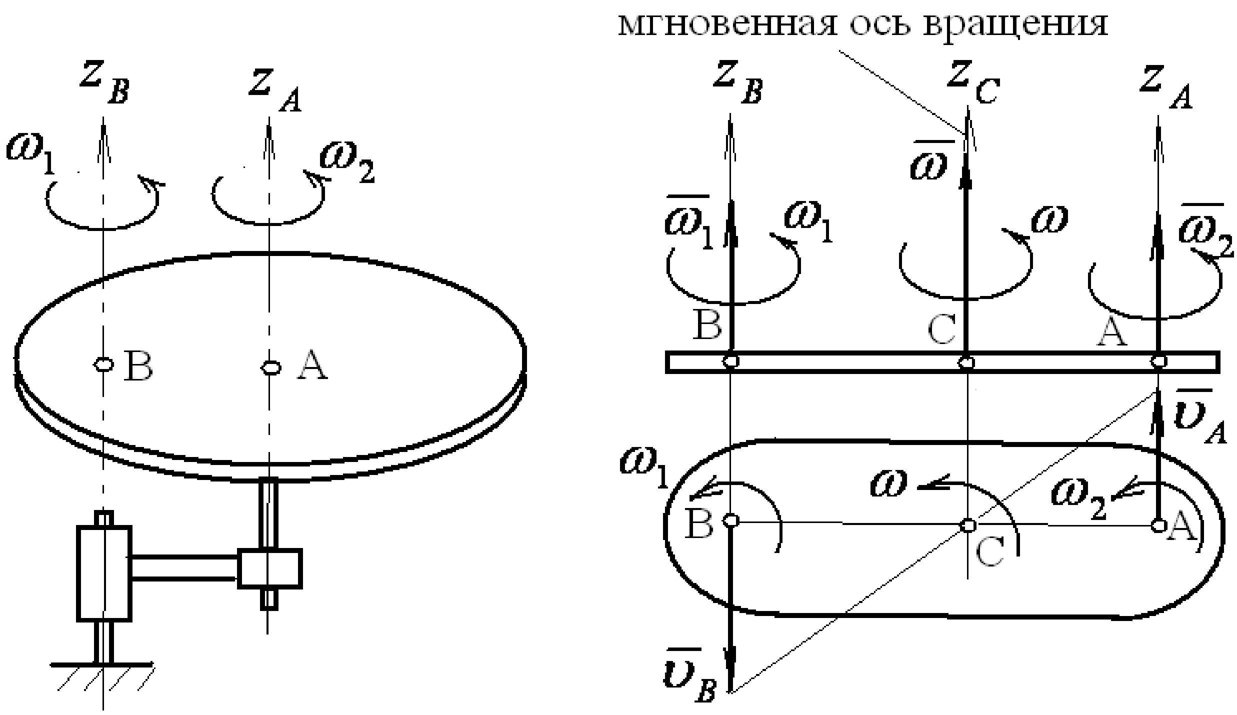


Рисунок 4.9 Сложение двух направленных в одну сторону вращений вокруг параллельных осей

Точка А, лежащая на оси z_A, получает скорость $\bar{\upsilon}_A$ в результате вращения вокруг оси z_B, причем $\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB$. Аналогично скорость точки В равна $\upsilon_B = \omega_1 \cdot AB$. Оба вектора скоростей параллельны друг другу, и направлены в противоположные стороны, перпендикулярно АВ, Точка С является мгновенным центром скоростей твердого тела, ее положение определено способом, показанным на рисунке 4.7, в. Через точку С проходит мгновенная ось вращения тела z_C.

Определим абсолютную угловую скорость вращения тела вокруг оси z_C и положение самой оси. Запишем соотношения:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AC} = \frac{\upsilon_B}{BC}; \quad AC + BC = AB.$$

Отсюда:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \quad \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{4.5}$$

Если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений, вокруг мгновенной оси, параллельной данным осям. Положение мгновенной оси вращения определяется соотношениями (4.5).

Тело на рисунке 4.10 одновременно вращается в разные стороны вокруг параллельных осей z_A и z_B с разными угловыми скоростями (для определенности $\omega_1 > \omega_2$).

По аналогии с предыдущим случаем, определим скорости точек А и В на осях вращения: $\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB$; $\upsilon_B = \omega_1 \cdot AB$. Как видно из рисунка 4.10, вектора скоростей $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$ параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Способом, показанным на рисунке 4.7, б, определим положение точки С – мгновенного центра скоростей твердого тела. Запишем соотношения:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AC} = \frac{\upsilon_B}{BC}; \quad AC = BC - AB.$$

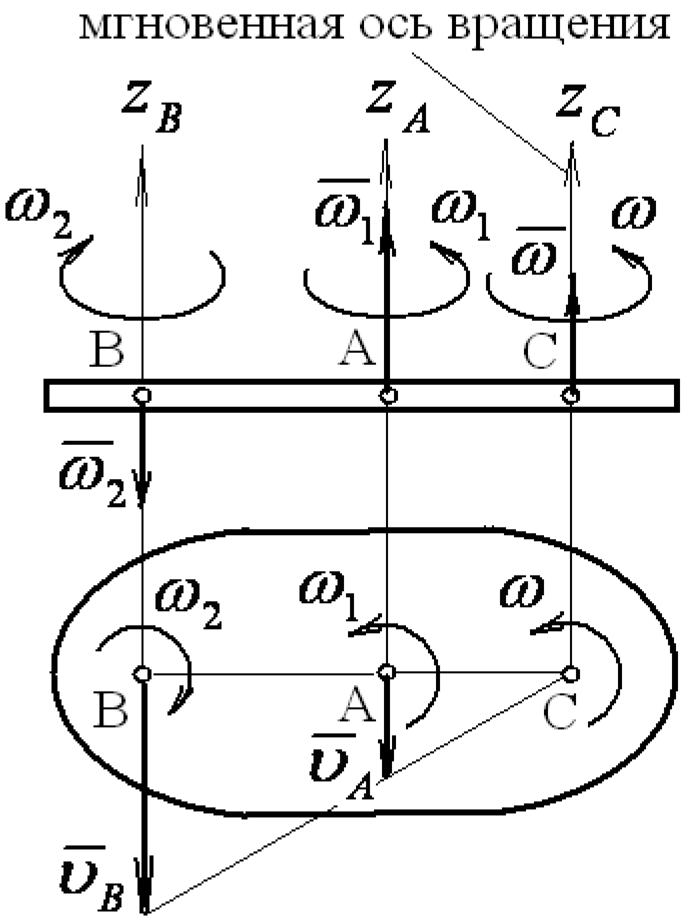


Рисунок 4.10 Сложение двух направленных в разные стороны вращений вокруг параллельных осей

Нетрудно получить:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{4.6}$$

При рассматриваемом сложном движении результирующее движение тела является мгновенным вращением вокруг оси z_C с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Положение мгновенной оси вращения определяется по соотношению (4.6).

Рассмотрим частный случай вращения тела вокруг параллельных осей. Оба вращения направлены в разные стороны, но по модулю $\omega_1 = \omega_2$ (рисунок 4.11). Для такого случая получаем: $\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB$; $\upsilon_B = \omega_1 \cdot AB$; $\upsilon_A = \upsilon_B$. Как и в случае, показанном на рисунке 4.7, г, мгновенная ось вращения тела находится в бесконечности, само тело движется поступательно. При поступательном движении скорости всех точек тела между собой равны.

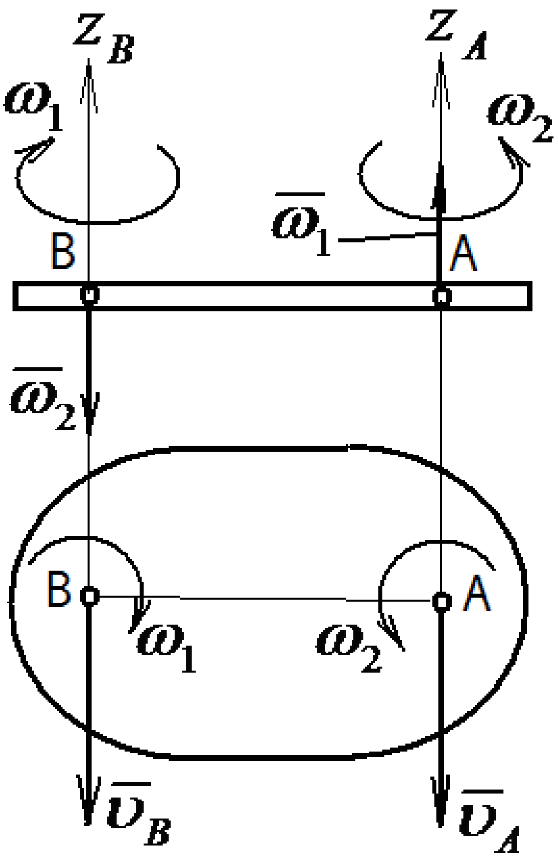


Рисунок 4.11 Пара вращений

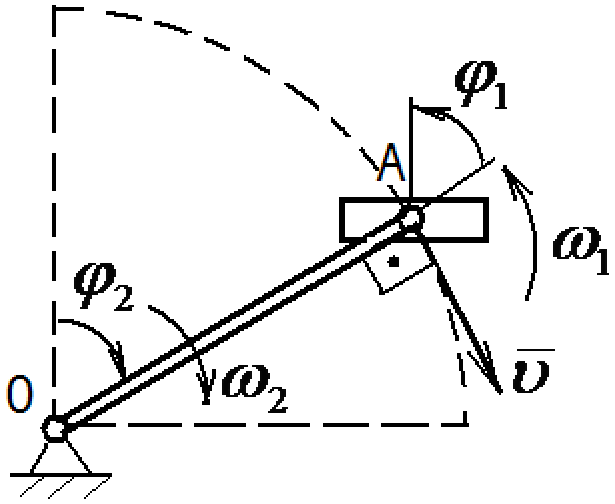


Рисунок 4.12 Пример пары вращений

Рассматриваемый частный случай движения твердого тела называется парой вращений, а векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ образуют пару угловых скоростей.

Примером рассматриваемого движения является показанное на рисунке 4.12 движение велосипедной педали. Педаль вместе с кривошипом OA совершает переносное вращательное движение с угловой скоростью ω_2 и относительное вращательное движение против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω_1. При $\omega_1 = \omega_2$ результирующее движение педали является поступательным движением со скоростью $\upsilon = \omega \cdot OA$.

Тело на рисунке 4.13 совершает переносное вращательное движение вокруг неподвижной оси Oz_1 с угловой скоростью ω_1 и относительное вращательное движение вокруг подвижной оси Oz_2 с угловой скоростью ω_2.

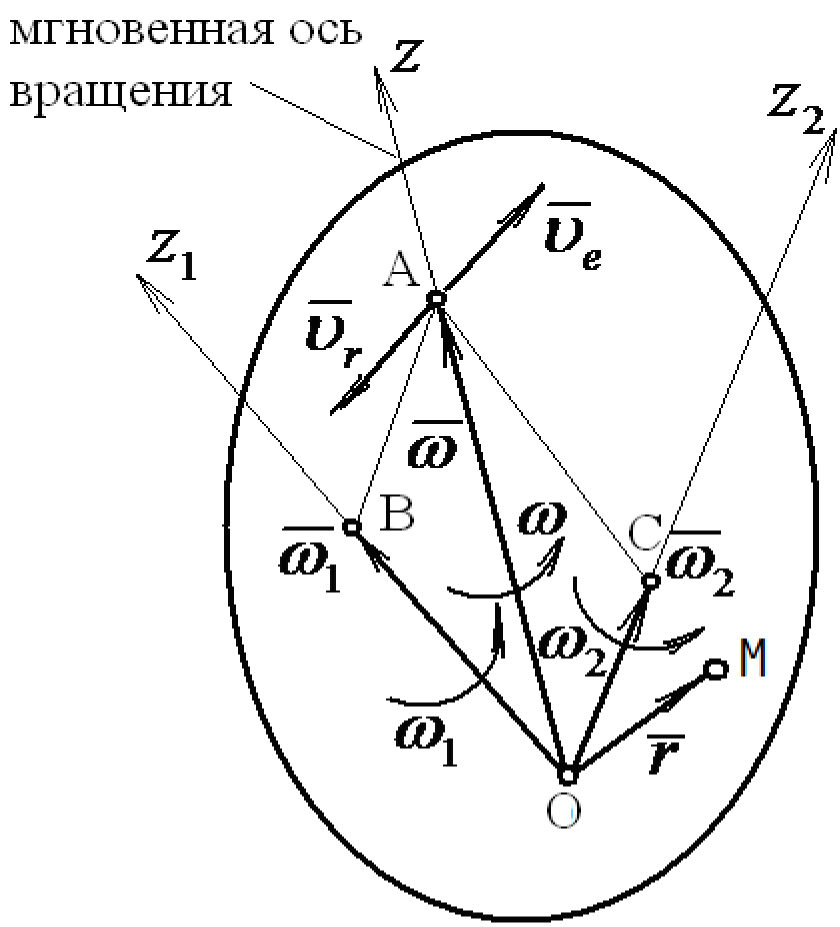


Рисунок 4.13 Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Покажем, что скорость точки А тела, совпадающей с вершиной параллелограмма OBAC, построенного на векторах $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, как на сторонах, в данный момент времени равна нулю.

Абсолютная скорость этой точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей, т.е.:

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r = \overline{\omega}_1 \times \overline{OA} + \overline{\omega}_2 \times \overline{OA}.$$

Модули переносной и относительной скоростей точки А равны между собой:

$$|\overline{\upsilon}_r| = A(\Delta OAC); \quad |\overline{\upsilon}_e| = A(\Delta OBA); \quad |\overline{\upsilon}_r| = |\overline{\upsilon}_e|.$$

Вектора $\overline{\upsilon}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$ направлены перпендикулярно плоскости z_1Oz_2 в противоположные стороны. Следовательно $\overline{\upsilon}_e = -\overline{\upsilon}_r$; $\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r = 0$.

Таким образом, ось Oz на рисунке 4.13, проходящая через точки О и А, является мгновенной остью вращения твердого тела.

Абсолютная скорость любой точки твердого тела (например, точки М) при составном движении равна:

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_e + \bar{\upsilon}_r = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r} \qquad (4.7)$$

Скорость той же точки при вращении вокруг оси Oz равна

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\omega} \times \bar{r}\,. \qquad (4.8)$$

Сравнив (4.7) и (4.8), получим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$.

Если твердое тело участвует одновременно в двух вращательных движениях вокруг осей, пересекающихся в точке О, то результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку О, причем мгновенная угловая скорость этого вращения равна геометрической сумме составляющих угловых скоростей.

Примеры решения задач

<u>Задача 4.1</u> Определить скорость центра С подвижного блока радиуса r и его угловую скорость ω (рисунок 4.1.1), если груз А поднимается со скоростью υ_A, а груз В опускается со скоростью υ_B. Нить при своем движении по подвижному блоку не проскальзывает, а ее ветви вертикальные.

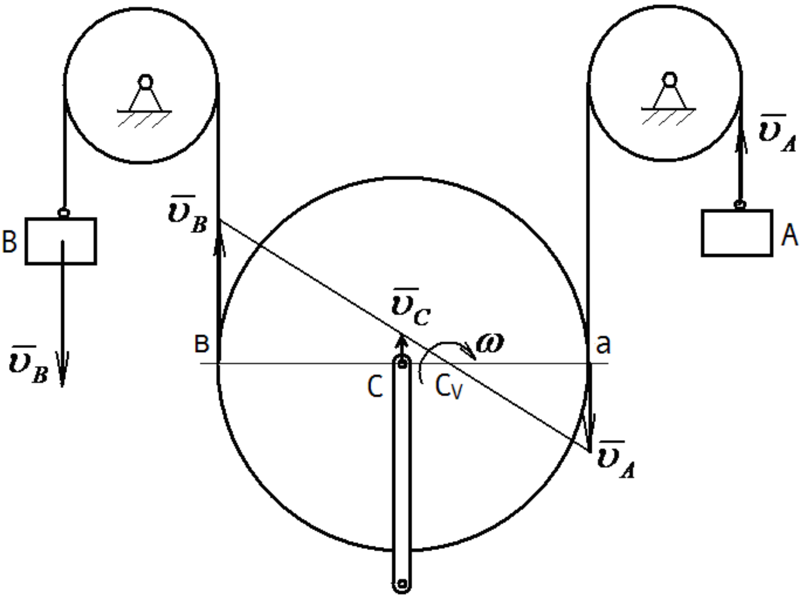


Рисунок 4.1.1 Механизм подвижного блока

Решение. Нить движется по подвижному блоку без скольжения, поэтому скорости точек а и в блока равны соответственно υ_A и υ_B. Определим положение мгновенного центра скоростей этого тела способом, показанным на рисунке 4.7, в. Определим угловую скорость блока:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AC_V} = \frac{\upsilon_D}{2r - AC_V}; \quad AC_V = \frac{\upsilon_A \cdot 2r}{\upsilon_A + \upsilon_B}; \quad \omega = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{2r}.$$

Скорость центра блока равна

$$\upsilon_C = \omega \cdot CC_V = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{2r} \cdot (AC_V - r) = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{2r} \left(\frac{\upsilon_A \cdot 2r}{\upsilon_A + \upsilon_B} - r\right) = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{2}.$$

Задача 4.2 Изображенный на рисунке 4.2.1, а планетарный механизм состоит из неподвижного центрального колеса радиуса R_1, водила ОА и сателлита радиуса R_2. Известны угловая скорость ω_0 и угловое ускорение водила ε_0. Определить скорость и ускорение точки В, положение которой на ободе сателлита определяется углом β.

Дано: $R_1 = R_2 = R = 0{,}2$ м; $\omega_0 = 5$ рад/с; $\varepsilon_0 = 3$ рад/с^2; $\varphi = 30^o$; $\beta = 130^o$.

Решение. Определим скорость конца водила

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_O \cdot 2R = 5 \cdot 2 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_A \perp OA.$$

Точка C_V зацепления зубчатых колес является мгновенным центром скоростей сателлита. Угловая скорость сателлита равна

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_A}{AC_V} = \frac{\upsilon_A}{R} = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ рад/с.}$$

Определяем скорость точки В на ободе сателлита

$$\upsilon_B = \omega_2 \cdot BC_V = \omega_2 \cdot 2R \cdot \sin(\beta/2) = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot \sin(130^o/2) = 3{,}63 \text{ м/с.}$$

Ускорение точки А водила равно:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau; \quad a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0{,}4 = 10 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}_A^n \parallel AO; \quad \bar{a}_A^\tau \perp AO.$$

Определяем угловое ускорение сателлита;

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_A}{R}\right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{R} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6 \text{ рад/с}^2.$$

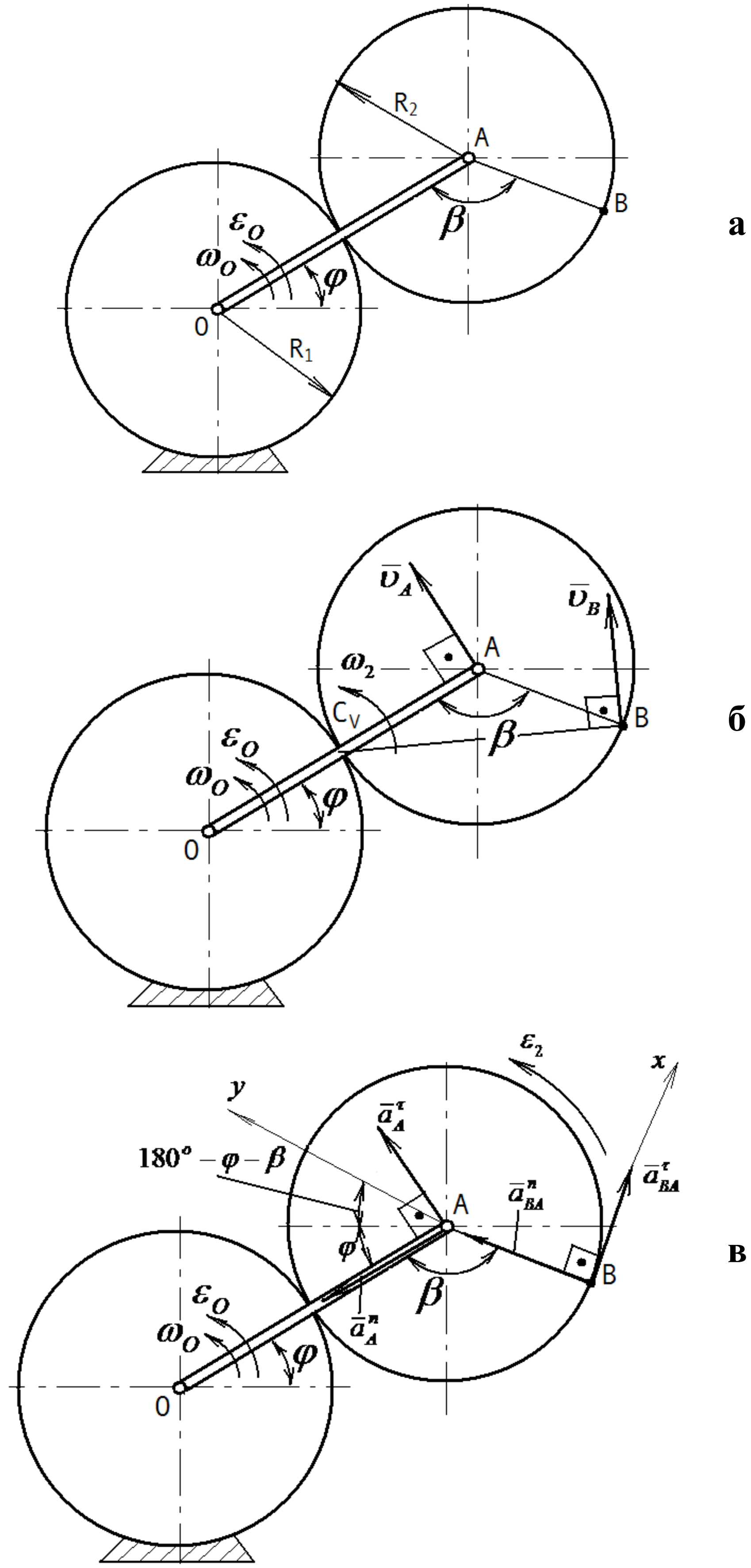


Рисунок 4.2.1 Планетарный зубчатый механизм

По кинематической схеме на рисунке 4.2.1, в определяем ускорение точки В на ободе сателлита. Составляем векторное уравнение вида (4.4):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau . \qquad (4.2.1)$$

В уравнении (4.2.1):

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot R = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20 \text{ м/с}^2 ; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot R = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \text{ м/с}^2 ;$$

$$\bar{a}_{BA}^n \parallel BA ; \quad \bar{a}_{BA}^\tau \perp BA .$$

Проектируем векторное уравнение (4.2.1) на оси координат Bx и By:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= -a_A^n \cdot \sin(180^o - \beta) + a_A^\tau \cdot \cos(180^o - \beta) + a_{BA}^\tau = \\ &-10 \cdot \sin 50^o + 1{,}2 \cdot \cos 50^o + 1{,}2 = -5{,}69 \quad м/с^2 \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} a_{By} &= a_A^n \cdot \cos(180^o - \beta) + a_A^\tau \cdot \sin(180^o - \beta) + a_{BA}^n = \\ &10 \cdot \cos 50^o + 1{,}2 \cdot \sin 50^o + 20 = 27{,}35 \quad м/с^2 \end{aligned} ;$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(-5{,}69)^2 + 27{,}35^2} = 27{,}93 \quad м/с^2 .$$

Задача 4.3 Для положения кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рисунке 4.3.1, определить скорости и ускорения точек А, В и С, угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ.

Дано: ОА = 0,3 м; АВ = 0,8 м; АС = 0,5 м; ω_0 = 5 рад/с; ε_0 = 4 рад/с^2.

Решение. 1. Рассмотрим движения звеньев кривошипно-ползунного механизма. Кривошип ОА вращается вокруг неподвижной оси О, траектория его точки А – окружность радиуса ОА. Ползун движется поступательно, траектория точки В – горизонтальная прямая линия. Шатун АВ совершает сложное плоскопараллельное движение.

2. Вычислим скорость точки А кривошипа и покажем ее на чертеже:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_A \perp OA .$$

3. Определим положение мгновенного центра скоростей C_V шатуна АВ способом, показанным на рисунке 4.7, а, как точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$. Покажем на чертеже вектор скорости $\bar{\upsilon}_C \perp CC_V$.

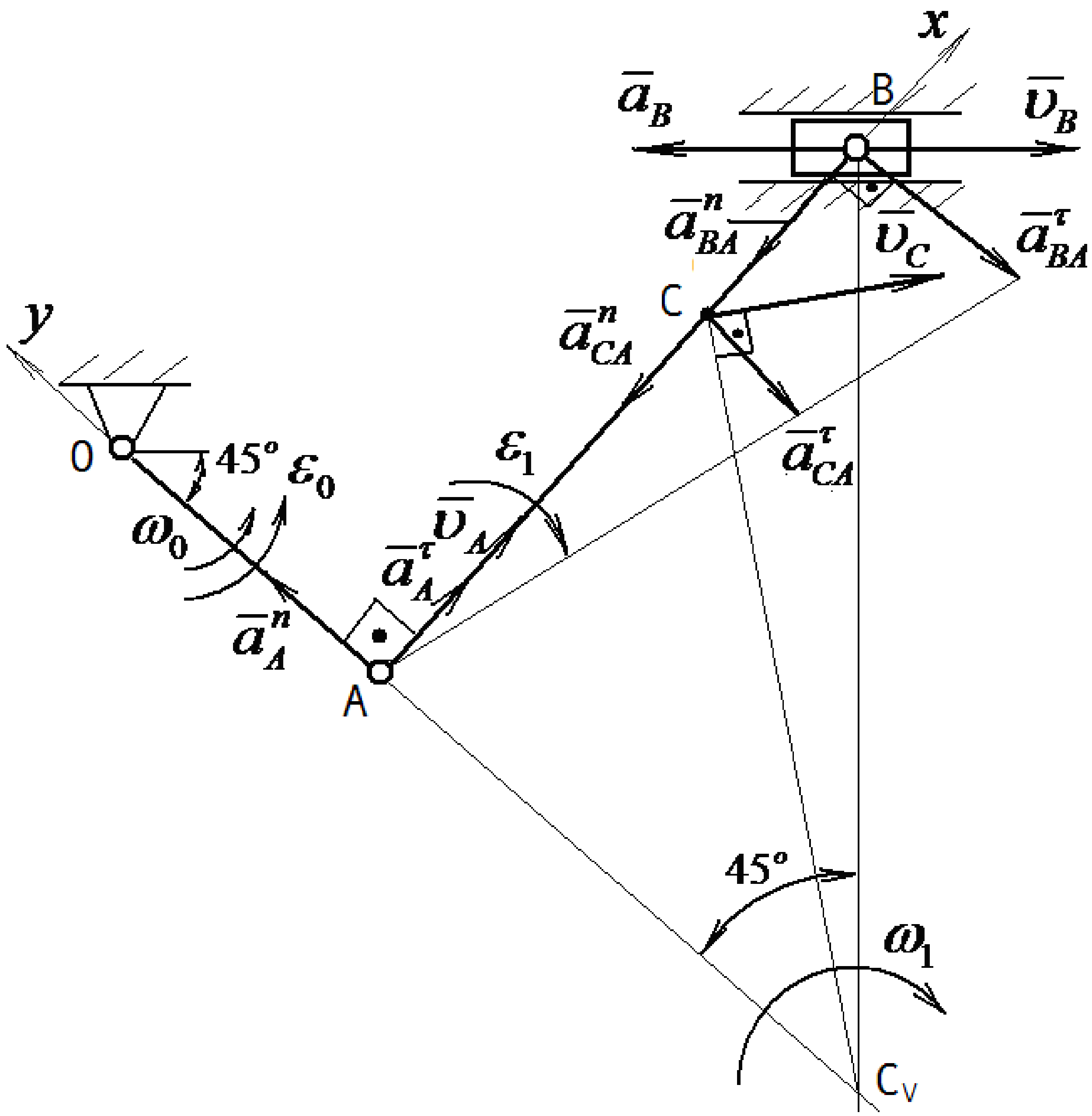


Рисунок 4.3.1 Скорости и ускорения точек кривошипно-ползунного механизма

4. Угловая скорость шатуна равна

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_A}{AC_V} = \frac{\upsilon_B}{BC_V} = \frac{\upsilon_C}{CC_V}. \tag{4.3.1}$$

5. Производим необходимые геометрические вычисления:

$\underline{\Delta ABC_V}$: $AC_V = AB = 0{,}8$ м; $BC_V = AB/\sin 45^o = 0{,}8/\sin 45^o = 1{,}13$ м.

$\underline{\Delta ACC_V}$. $CC_V = \sqrt{AC_V^2 + AC^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}5^2} = 0{,}94$ м.

6. Производим вычисления по пропорции (4.3.1):

$$\omega_1 = \frac{1{,}5}{0{,}8} = 1{,}88 \text{ рад/с}; \quad \upsilon_B = 1{,}88 \cdot 1{,}13 = 2{,}12 \text{ м/с}; \quad \upsilon_C = 1{,}88 \cdot 0{,}94 = 1{,}77 \text{ м/с}.$$

7. Определим ускорение точки А:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau; \quad a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0{,}3 = 7{,}5 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}_A^n \parallel AO; \quad \bar{a}_A^\tau \perp AO.$$

8. Ускорение точки В определяется из векторного уравнения

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \tag{4.3.2}$$

Нормальное ускорение при вращении точки В относительно полюса А равно

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 1{,}88^2 \cdot 0{,}8 = 2{,}83 \text{ м/с}^2.$$

9. Проектируем векторное уравнение (4.3.2) на оси координат:

$$-a_B \cdot \cos 45^o = a_A^\tau - a_{BA}^n; \quad a_B \cdot \cos 45^o = a_A^n - a_{BA}^\tau. \tag{4.3.3}$$

Из системы уравнений (4.3.3) определяем неизвестные ускорения:

$$a_B = \frac{a_{BA}^n - a_A^\tau}{\cos 45^o} = \frac{2{,}83 - 1{,}2}{\cos 45^o} = 2{,}31 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^n - a_B \cdot \cos 45^o = 7{,}5 - 2{,}31 \cdot \cos 45^o = 5{,}87 \text{ м/с}^2.$$

10. Угловое ускорение шатуна АВ равно

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{5.87}{0{,}8} = 7{,}34 \text{ м/с}^2.$$

11. Определяем ускорение точки С по уравнению

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau. \tag{4.3.4}$$

В уравнении (4.3.4):

$$a_{CA}^n = \omega_1^2 \cdot AC = 1{,}88^2 \cdot 0{,}5 = 1{,}77 \text{ м/с}^2; \quad a_{CA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AC = 7{,}34 \cdot 0{,}5 = 3{,}67 \text{ м/с}^2.$$

12. Проектируем векторное уравнение (4.3.4) на оси координат:

$$a_{Cx} = a_A^\tau - a_{CA}^n = 1{,}2 - 1{,}77 = -0{,}57 \text{ м/с}^2; \quad a_{Cy} = a_A^n - a_{CA}^\tau = 7{,}5 - 3{,}67 = 3{,}83 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(-0{,}57)^2 + 3{,}83^2} = 3{,}87 \text{ м/с}^2.$$

Задача 4.4 Конус А обегает без скольжения 120 раз в минуту неподвижный конус В. Образующие конусов равны l = 1 м.. Определить мгновенную угловую скорость конуса А и скорость его точки М.

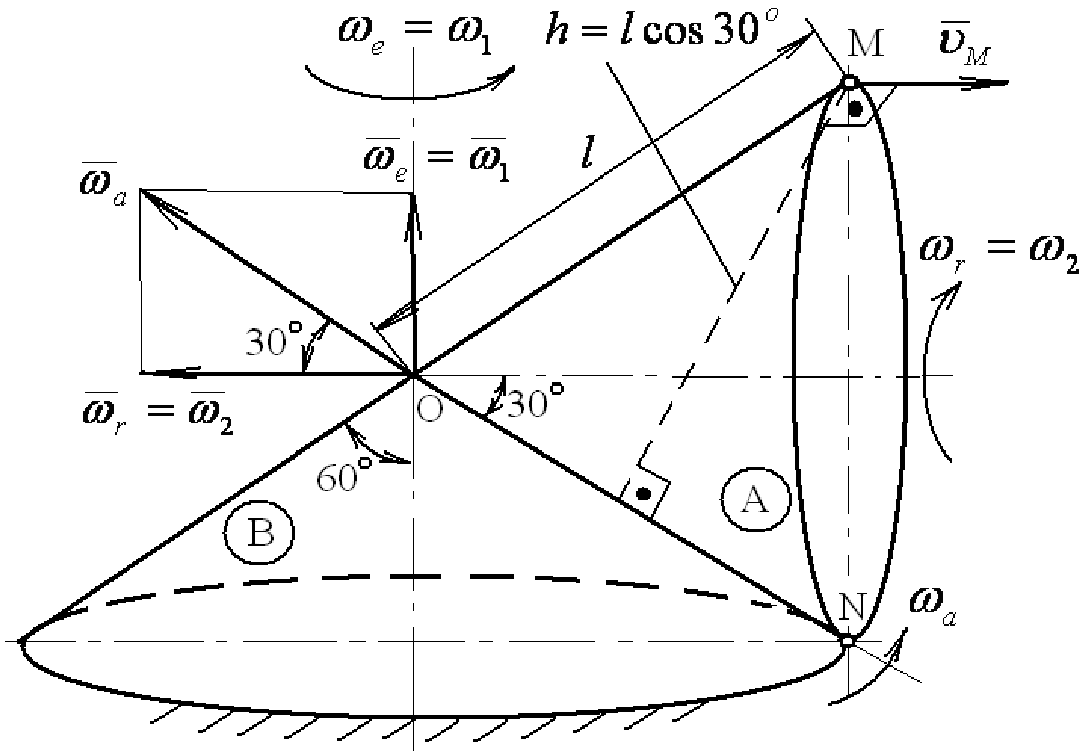


Рисунок 4.4.1 Вращение конуса В вокруг пересекающихся осей

Решение. Подвижный конус В совершает составное вращательное движение вокруг пересекающихся осей. Переносным вращением является обкатывание неподвижного конуса В с угловой скоростью

$$\omega_e = \omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \text{ рад/с.}$$

Относительным движением является вращение конуса В вокруг своей оси симметрии. Результирующим (абсолютным) движением является мгновенное вращение вокруг образующей ON. Абсолютная угловая скорость равна

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r .$$

Из векторного параллелограмма угловых скоростей находим

$$\omega_a = \frac{\omega_1}{\sin 30^o} = \frac{4 \cdot \pi}{0{,}5} = 8\pi \text{ рад/с.}$$

Определяем скорость точки М подвижного конуса

$$\upsilon_M = \omega_a \cdot h = \omega_a \cdot l \cdot \cos 30^o = 8\pi \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \pi \text{ м/с.}$$

Задача 4.5 Кривошип 1 соединяет оси A и B двух зубчатых колес 2 и 3 с внутренним зацеплением. Колесо 3 с внутренними зубьями остается неподвижным, а кривошип 1 вращается вместе с шестерней 2 вокруг оси B с угловой скоростью ω_1. Зная радиусы колес r_2 и r_3, вычислить для колеса 2 абсолютную угловую скорость ω и его относительную скорость ω_2 по отношению к кривошипу 1.

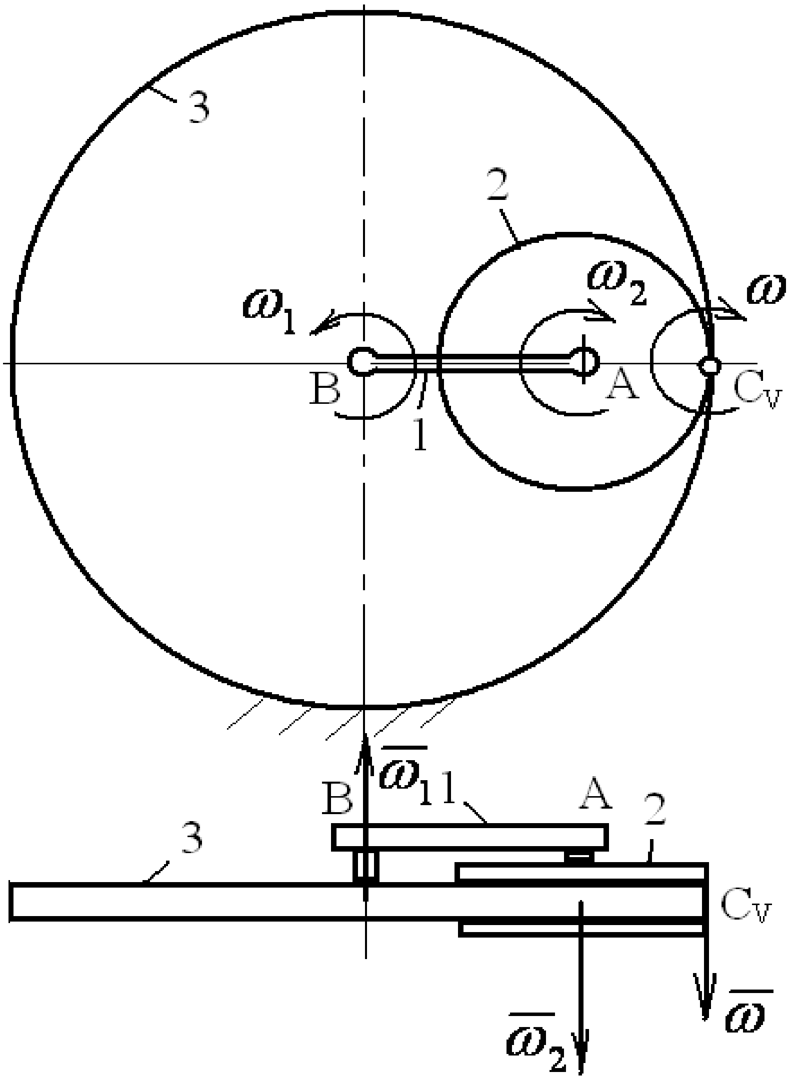


Рисунок 4.5.1 Вращение сателлита вокруг параллельных осей

Решение. Сателлит 2 на рисунке 4.5.1 совершает переносное вращательное движение с угловой скоростью ω_1 вместе с кривошипом 1 вокруг оси B и относительное вращение с угловой скоростью ω_2 вокруг оси A. Направления угловых скоростей ω_1 и ω_2 противоположные.

Мгновенная ось вращения C_V сателлита совпадает с полюсом внутреннего зацепления зубчатых колес 2 и 3.

В соответствии с (4.6)

$$\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \frac{\omega_1}{BC_V} = \frac{\omega_2}{AC_V} = \frac{\omega}{AB}; \quad \frac{\omega_1}{r_3} = \frac{\omega_2}{r_2} = \frac{\omega}{r_3 - r_2}. \tag{4.5.1}$$

Из соотношений (4.5.1) находим относительную и абсолютную угловые скорости:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r_2}{r_3}; \qquad \omega = \omega_1 - \omega_1 \cdot \frac{r_2}{r_3} = \omega_1 (1 - \frac{r_2}{r_3}).$$

Задача 4.6 Вокруг центра O_1 может вращаться кривошип $O_1O_2O_3$, на котором закреплены оси трех находящихся в зацеплении зубчатых колес 1, 2 и 3 с радиусами r_1, r_2 и r_3 ($r_3 = r_1$). Колесо 1 неподвижно. Найти абсолютную угловую скорость колеса 3 (рисунок 4.6.1), если кривошип $O_1O_2O_3$ вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1.

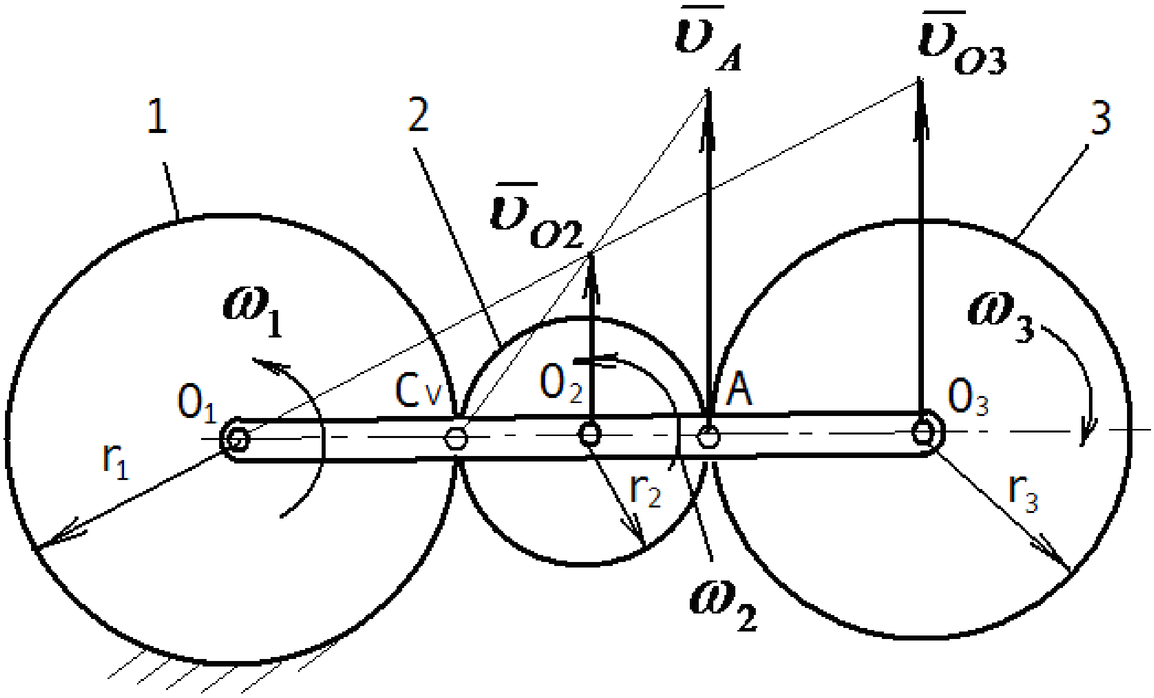


Рисунок 4.6.1 Планетарный зубчатый механизм

Решение. Зубчатый механизм на рисунке 4.6.1 содержит 4 звена. Центральное колесо 1 неподвижно, кривошип $O_1O_2O_3$ вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1. Сателлиты 2 и 3 совершают переносное вращательное движение вместе с кривошипом и относительные вращательные движения соответственно вокруг осей O_2 и O_3.

Определим скорости осей сателлитов:

$$\upsilon_{O2} = \omega_1(r_1 + r_2); \quad \upsilon_{O3} = \omega_1(r_1 + 2r_2 + r_3).$$

Через точку C_V зацепления колес 1 и 2 проходит мгновенная ось вращения сателлита 2. Скорость точки A колеса 2 равна

$$\upsilon_A = 2 \cdot \upsilon_{O2} = 2 \cdot \omega_1(r_1 + r_2).$$

Абсолютная угловая скорость зубчатого колеса 2 равна

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_{O2}}{r_2} = \omega_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

При $r_3 = r_1$ $\upsilon_A = \upsilon_{O3}$, $\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_{O3}$. Следовательно, сателлит 3 движется поступательно, $\omega_3 = 0$.

Контрольные вопросы по кинематике

1. Какой круг вопросов рассматривается в кинематике?
2. Что называется траекторией точки?
3. Какие способы задания движения точки применяются в кинематике?
4. В чем заключается векторный способ задания движения точки?
5. Как задать движение точки в координатной форме?
6. Как задается движение точки в естественной форме?
7. Как определяются скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения?
8. Как определяются скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения?
9. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения?
10. Как направлен вектор скорости криволинейного движения точки по отношению к траектории?
11. Как направлен вектор ускорения криволинейного движения точки по отношению к траектории, к годографу скорости?
12. Каким образом проектируется вектор ускорения на естественные оси координат?
13. В каких случаях касательное ускорение точки равно нулю?
14. В каких случаях равно нулю нормальное ускорение точки?
15. Какое движение твердого тела называется поступательным? Приведите примеры поступательного движения.
16. Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси? Приведите примеры.
17. Как определить и как показать на чертеже угловую скорость и угловое ускорение ротора?
18. Как, зная частоту вращения ротора, определить его угловую скорость?

19. Как изображаются угловая скорость и угловой ускорение ротора в векторной форме?

20. Как определяется скорость произвольной точки ротора?

21. Как определить ускорение любой точки ротора?

22. Как выражаются касательное и нормальное ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

23. Какое движение материальной точки называется составным или сложным? Приведите примеры.

24. Какие системы осей координат выбираются при изучении сложного движения точки?

25. На какие движения раскладывается абсолютное движение точки?

26. Какое движение точки называется относительным?

27. Какое движение точки называется переносным?

28. Как формулируется теорема о сложении скоростей?

29. Какое ускорение точки называется относительным? Какое – переносным?

30. Сформулируйте теорему о сложении ускорений при поступательном переносном движении.

31. Сформулируйте теорему сложения ускорений при вращательном переносном ускорении.

32. Как определяются величина и направление ускорения Кориолиса?

33. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

34. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным? Приведите примеры.

35. На какие два движения раскладывается плоскопараллельное движение твердого тела?

36. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки?

37. Что такое мгновенный центр скоростей? Как определить его положение?

38. Как определить скорость произвольной точки плоской фигуры, зная ускорение полюса?

39. Как выразить ускорение любой точки плоской фигуры через ускорение полюса?

40. Что называется сложным движением твердого тела? Приведите примеры.

41. В чем состоят теоремы о сложении параллельных и пересекающихся угловых скоростей?

42. Какому движению эквивалентна пара вращений? Чему равна скорость этого движения?

43. Как определить абсолютную угловую скорость тела, вращающего вокруг параллельных осей в одну сторону?

44. Как определить абсолютную угловую скорость тела, совершающего вращения в разные стороны вокруг параллельных осей?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Диевский В.А. Теоретическая механика [Текст]: Курс лекций / В.А. Диевский. - 2-е изд., испр., – С-Пб.: Лань, 2009. - 320 с.

2. Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика [Текст]: Сборник заданий / В.А. Диевский, И.А. Малышева. - 2-е изд., испр.. – С-Пб.: Лань, 2009. - 192 с..

3. Доев В.С., Доровин Ф.А. Сборник заданий по теоретической механике на базе MATCAD [Текст]: Учебник / В.С. Доев, Ф.А. Доровин. - 1-е изд. С-Пб.: Лань, 2010.- 592 с.

4. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике [Текст]: Учебник / О.Э. Кепе. - 3-е изд. С-Пб.: Лань, 2009. - 368 с.

5. Лачуга Е.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика [Текст]: Учебник / Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Колос, 2005. – 570 с.

6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики [Текст]: учебник / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р.Меркин. - 9-е изд. В 2-х томах. С-Пт., М., Краснодар: 2007. -736 с.

7. Задачи по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. спец. / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - 50-е изд., стер. – С-Пб.: М. ; Краснодар : Лань, 2010. - 448 с.

8. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики [Текст]: Учебник / Н.Н.Никитин. - 8-е изд. стер. - С-Пб.: Лань, 2009. - 368 с.

Дополнительная литература:

1. Чуркин В.М. Решение задач по теоретической механике [Текст]: Геометрическая статика / В.М. Чуркин. - 1-е изд. С-Пб.: Лань 2009. - 304 с.

2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. втузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др. ; под ред. А. А. Яблонского. - 7-е изд., испр. - М. : ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2002. - 382 с.

СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование	Назначения (виды занятий, № тем и т.д.)
1	2
1. Методические указания и контрольные задания к самостоятельной работе студентов по теоретической механике (статике). Уфа, 2010. – 40 с.	РГР №1
2. Методическая указания по решению задач по статике. Уфа, 2010. –12 с.	РГР№1
3. Кинематика. Задания для расчетно-графической работы по разделу дисциплины «Теоретическая механика» Уфа, 2010. – 48 с.	РГР №1
4. Домашнее задание по кинематике. Уфа, 2010. –20 с.	РГР №1
5. Динамика. Задания к расчетно-графической работе по разделу дисциплины «Теоретическая механика» Уфа, 2010. - 64	РГР №2
6. Контрольные задания по теоретической механике. Уфа, 2010. –24 с.	Задание на контрольную работу для студентов-заочников
7. Пакеты программ APM Win Machine, Mathcad, AUTOCAD, Компас-график	Практические занятия, СРС по выполнению РГР, контрольной работы.