

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Запольских Ю.А., Шайхутдинова Н.А., Рыцева А.В.

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Уфа
БашГАУ
2012

УДК 336 (075)
ББК 65.261
3 33

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д.э.н., профессор кафедры «Финансов и кредита» ФГБОУ ВПО «Башкирский
ГАУ» И.У. Гусманов

к.э.н., доцент кафедры «Финансов и кредита» ФГБОУ ВПО «Башкирский ГАУ»
И.И. Фазрахманов

Запольских Ю.А. Основы финансовых вычислений:
[Электронный ресурс]: учеб. пособие / Ю.А. Запольских, Н.А.
Шайхутдинова, А.В. Рыцева, - Уфа.: БашГАУ, 2012. – 97 с.

Учебное пособие, включающее в себя обзор ключевых категорий и положений, тесты, задачи, контрольные задания, способствует углублению освоения теоретического материала в области финансовых вычислений и повышению уровня самостоятельности в овладении практическими навыками финансовых расчетов.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 336 (075)
ББК 65.261
3 33

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Логика финансовых вычислений.....	6
2. Вычисления по простым процентам	11
3. Вычисления по сложным процентам.....	22
4. Финансовая эквивалентность обязательств.....	31
5. Оценка эффективности финансовых операций.....	34
6. Финансовые ренты.....	40
7. Кредитные расчеты.....	50
8. Инвестиционный анализ на рынке ценных бумаг.....	59
9. Финансовые расчеты в инвестиционном анализе.....	64
10. Экономические расчеты при проведении валютных операций.....	72
Задачи для самостоятельного решения.....	75
Тесты	82
Глоссарий.....	90
Приложение.....	94
Литература	96

Введение

Становление рыночных отношений в нашей стране сопровождается появлением относительно новых, по крайней мере, для большинства начинающих предпринимателей, навыков и методов, которыми приходится с неизбежностью овладевать при профессиональном занятии бизнесом. К их числу относятся так называемые коммерческие и финансовые вычисления. Суть таких вычислений достаточно очевидна: любая сделка предполагает выполнение расчётов, дающих основание принять решение по поводу целесообразности и эффективности её проведения. Сложность расчётов может предопределяться различными обстоятельствами, в том числе и уровнем подготовленности участников операции.

Коммерческие и финансовые вычисления сопровождают нас постоянно; практически нет ни одного человека, который хотя бы раз в жизни не столкнулся с необходимостью сделать какие-то расчёты финансового характера. В последние годы с развитием частного предпринимательства, появлением сети коммерческих банков, свободным ценообразованием, появлением новых финансовых инструментов и инвестиционных возможностей, угрозой инфляции необходимость проведения подобных расчётов становится рутинным делом практически для всех.

Финансовые вычисления появились с возникновением товарно-денежных отношений, но в отдельную отрасль знания оформились только в XIX в.: они назывались "коммерческие вычисления" или "коммерческая арифметика". Как утверждал русский математик, финансист и бухгалтер Н.С. Лунский, коммерческая математика изначально существовала под именем "политической арифметики", родоначальником которой является английский экономист Вильям Петти, – отец политической экономии и родоначальник статистической науки.

Быстрый экономический рост стран в XIX в. во многом был обусловлен распространением коммерческих знаний. В частности, в России действия правительства привели к тому, что к концу XIX в. появились коммерческие училища, торговые школы, классы, курсы, поскольку актуальность и важность коммерческого образования не у кого не вызвала сомнения, а основу коммерческих наук составляла коммерческая арифметика, так как именно она обуславливает каждый торговый акт, каждую финансовую операцию.

В области финансовых или коммерческих вычислений работал целый ряд российских ученых: И.З. Бревдо, Р.Я. Вейцман, П.М. Гончаров, И.И. Кауфман, Н.С. Лунский, Б.Ф. Мелешевский и другие, которые развили теорию и практику "коммерческой арифметики".

В послереволюционный период коммерческая арифметика в России не получила должного развития, поскольку многие вопросы, связанные с финансами и финансовыми расчетами, попросту игнорировались. В странах с ориентацией на рыночную экономику коммерческая арифметика развилась в самостоятельное направление в науке – в финансовую математику.

Сегодня процедурная сторона данной науки кажется относительно несложной, но содержательная сторона коммерческих расчетов не потеряла актуальности и в наше время.

Что же представляет из себя "финансовая математика"?

Один из российских основоположников данной науки Н.С. Лунский считал, что высшие финансовые вычисления являются отраслью прикладной математики, посвященной исследованию доступных математическому анализу вопросов финансовой науки, статистики и политической экономии.

Объектом изучения финансовой математики является финансовая операция, в которой необходимость использования финансово-экономических вычислений возникает всякий раз, когда в условиях сделки (финансовой операции) прямо или косвенно присутствуют временные параметры: даты, сроки выплат, периодичность поступления денежных средств, отсрочка платежей и т.д. При этом фактор времени зачастую играет более важную роль, чем стоимостные характеристики финансовой операции, поскольку именно он определяет конечный финансовый результат.

В связи с этим, на наш взгляд, лучшее определение сущности финансовой математики дано Е.М. Четыркиным, который отмечал, что финансовая математика представляет собой совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их возвратного движения в процессе воспроизводства.

Таким образом, финансовая математика – раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса.

Конкретно это выражается в решении следующих задач:

- исчисление будущей суммы денежных средств, находящихся во вкладах, займах или ценных бумагах путем начисления процентов;
- учет векселей;
- определение параметров сделки исходя из заданных условий;
- определение эквивалентности параметров сделки;
- анализ последствий изменения условий финансовой операции;
- исчисление обобщающих показателей финансовых потоков;
- определение параметров финансовой ренты;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- расчет показателей доходности финансовых операций.

К настоящему времени финансовая математика в России получила широкое распространение благодаря работам Е. Кочовича, Е.М. Четыркина, Г.П. Башарина, В.В. Капитоненко, Е.С. Стояновой, Г.Б. Поляка, В.Е. Черкасова, Т.В. Ващенко, В.А. Морошкина, С.В. Мирошкиной, А.В. Бухвалова, А.В. Идельсона, О.Ю. Ситниковой, Я.С. Мелкумова, В.Н. Румянцева и др.

1 Логика финансовых вычислений

Финансовые вычисления - это раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определённого класса.

Финансовые вычисления основаны на учёте фактора времени, что обусловлено принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Во-первых, «сегодняшние» деньги всегда будут ценнее «завтрашних», во-вторых, располагая денежными средствами «сегодня», экономический субъект может вложить их в какое-нибудь доходное предприятие и заработать прибыль, в то время как получатель будущих денег лишён этой возможности.

Расставаясь с деньгами «сегодня» на определённый период времени, допустим, давая их займы на 1 месяц, владелец не только подвергает себя риску их невозврата, но и несёт реальные экономические потери в форме неполученных доходов от инвестирования. Кроме того, снижается его платежеспособность, так как любые обязательства, получаемые им взамен денег, имеют более низкую ликвидность, чем «живые» деньги. Предоставляя кредит, владельцы денег устанавливают такие условия его возврата, которые, по их мнению, полностью возместят им все моральные и материальные неудобства, возникающие у человека, расстающегося (пусть даже и временно) с денежными знаками.

В курсе финансовой математики систематически излагаются методы количественного анализа, используемые при принятии управленческих решений в финансовой сфере. Рассматриваются методы учета факторов времени, инфляции, оценки потоков платежей, операций с ценными бумагами и др.

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

- 1) стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т. д.);
- 2) временные данные (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов, отсрочки платежей и т. д.);
- 3) процентные ставки (последние иногда задаются в открытой форме).

Финансовая математика используется в банковском и сберегательном деле, страховании, в работе финансовых организаций, торговых фирм, инвестиционных компаний, фондовых и валютных бирж и т.п. В финансовой математике широко представлены все виды статистических показателей: абсолютные, относительные и средние величины.

Процентные деньги или *просто проценты* в финансовых расчетах представляют собой *абсолютную величину* дохода (приращение денег) от

предоставления денег в долг в любой его форме (причем эта финансовая операция может реально и не состояться):

- выдача денежной ссуды;
- продажа в кредит;
- сдача в аренду;
- депозитный счет;
- учет векселя;
- покупка облигаций и т.п.

Таким образом, проценты можно рассматривать как абсолютную "цену долга", которую уплачивают за пользование денежными средствами.

Абсолютные показатели чаще всего не подходят для сравнения и оценки ввиду их несопоставимости в пространстве и во времени. Поэтому в финансово-коммерческих расчетах широко пользуются относительными показателями.

Относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени, – *процентная ставка*. Методика расчета проста: отношение суммы процентных денег, выплачивающихся за определенный период времени, к величине ссуды. Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, процентная ставка показывает, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

Для рассмотрения формул, используемых в финансовой математике, необходимо ввести ряд условных обозначений:

I – проценты за весь срок ссуды (*interest*);

PV – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (*present value*);

i – ставка процентов за период (*interest rate*);

d – учетная ставка (*discount rate*)

FV – наращенная сумма или будущая стоимость (*future value*), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды;

n – срок ссуды в годах.

Основу коммерческих вычислений составляют ссудо-заемные операции, в которых проявляется ярче всего необходимость учета временной ценности денег. Несмотря на то, что в основе таких расчетов заложены простейшие на первый взгляд схемы начисления процентов, эти расчеты многообразны ввиду многообразия условий финансовых контрактов в отношении частоты и способов начисления процентов, а также вариантов предоставления и погашения ссуд.

Существуют различные способы начисления процентов и соответствующие им виды процентных ставок. Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными

денежными средствами проценты подразделяются на *обычные* (декурсивные) и *авансовые* (антисипативные).

Отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами начисления процентов или срок финансовой операции, если проценты начисляются один раз, называется *периодом начисления процентов*.

Обычные проценты начисляются в конце периода относительно исходной величины средств. Доход, определяемый обычным процентом, выплачивается в конце периодов финансовой операции. Такие проценты применяют в большинстве депозитных и кредитных операций, а также в страховании.

Авансовые (антисипативные) проценты начисляются в начале периода относительно конечной суммы денег. Доход, определяемый авансовым процентом, выплачивается в момент предоставления кредита. Такая форма расчетов называется авансовой или учетом. При этом базой расчета процентов служит сумма денег с процентами (сумма погашения долга). Исчисленные таким образом проценты взимаются вперед и являются авансом. Так рассчитывают проценты в некоторых видах кредитования, операциях с дисконтными ценными бумагами, в международных расчетах.

Рассмотренным двум видам процентов на практике соответствуют определенные процентные ставки. Это, во-первых, обычная ставка процентов - *rate of interest* (i) которая рассчитывается как отношение дохода, полученного за определенный период времени к величине капитала, предоставляемого в кредит. Во-вторых, учетная (антисипативная) ставка - *discount rate* (d). Учетная ставка рассчитывается, как отношение дохода, полученного за определенный период времени к ожидаемой сумме погашения долга.

Простейшим видом финансовой операции является однократное предоставление в долг некоторой суммы PV с условием, что через n лет будет возвращена большая сумма FV . В этом случае обычная годовая ставка процентов рассчитывается по формуле (1.1), а учетная ставка — по формуле (1.2):

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \quad (1.1)$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \quad (1.2)$$

В экономической литературе первый показатель также называют «процентная ставка», «процент», «рост», «ставка процента», «норма прибыли», «доходность», а второй - «учетная ставка», «дисконт». Обе ставки взаимосвязаны, т.е. зная один из показателей, можно рассчитать другой по формулам (1.3) и (1.4) соответственно:

$$i = \frac{d}{1 - d} \quad (1.3)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \quad (1.4)$$

В зависимости от условий проведения финансовых операций, начисление процентов может осуществляться с применением простых, либо сложных процентов.

Простые проценты, как правило, используются в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года. Базой для исчисления процентов за каждый период в этом случае служит первоначальная (исходная) сумма сделки.

Сложные проценты широко применяются в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года. Однако могут быть использованы и в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки. При этом база для начисления процентов меняется за счет присоединения ранее начисленных процентов, т.е. она включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

Практика расчетов процентов основывается на теории наращения денежных средств по арифметической или геометрической прогрессии. Арифметическая прогрессия соответствует простым процентам, геометрическая - сложным.

Пример. *Предприниматель получил на два года кредит в размере 100 тыс. руб. В конце срока он должен возвратить 140 тыс. руб. Определите годовые процентную и учетную ставки.*

Решение: $PV = 100$ тыс.руб.; $FV = 140$ тыс.руб.; $n = 2$ года.

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{140 - 100}{100 \cdot 2} = \frac{40}{200} = 0,2 \text{ или } 20\%.$$

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,2}{1+0,2} = 0,167 \text{ или } 16,7\%.$$

При планировании финансово-хозяйственной и инвестиционной деятельности всегда необходимо учитывать вероятность обесценения денежных накоплений из-за влияния различных факторов.

Временная стоимость денег — важный аспект при принятии решений по финансированию и инвестированию. Это элемент вычислений сложного процента, используемый для определения будущих результатов инвестирования и дисконтирования, которое обратно пропорционально будущей стоимости сегодняшнего движения денежных средств и применяется для оценки будущего движения денег, учитываемого при прогнозном планировании капитальных вложений.

Концепция переоценки стоимости денег основывается на том, что стоимость денег с течением времени изменяется. Ключевую роль при описании процесса трансформации стоимости денежных средств во времени

играют два основных понятия: будущая стоимость денег и их настоящая стоимость.

Будущая стоимость денег представляет собой сумму инвестированных в текущий момент денежных средств, в которую они перейдут через определенный период времени с учетом условий вложения.

Настоящая стоимость денег представляет собой сумму будущих денежных поступлений, приведенных с помощью определенного коэффициента (дисконта, или дисконтной ставки) к настоящему периоду.

Процесс, в котором по заданной исходной сумме и процентной ставке необходимо найти ожидаемую в будущем к получению сумму, в финансовых вычислениях называется процессом *наращения*. Процесс, в котором по заданной ожидаемой в будущем к получению сумме и процентной ставке необходимо найти исходную сумму долга называется процессом *дисконтирования*. Логика финансовых операций схематически изображена на рисунке 1.



Рисунок 1 Логическая схема операций наращенния и дисконтирования.

Экономический смысл метода наращенния состоит в определении величины, которая будет или может быть получена из некоторой первоначальной (текущей) суммы в результате проведения операции. Другими словами, метод наращенния позволяет определить будущую величину (future value - FV) текущей суммы (present value - PV) через некоторый промежуток времени, исходя из заданной процентной ставки.

Дисконтирование представляет собой процесс нахождения современной на заданный момент времени суммы по ее известному или

предполагаемому значению в будущем, исходя из заданной процентной ставки.

В экономическом смысле величина PV , найденная в процессе дисконтирования, показывает современное (с позиции текущего момента времени) значение будущей величины FV . Таким образом – дисконтирование – это по сути дела зеркальное отражение наращенного. Используемую при этом процентную ставку называют нормой дисконта.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается сущность финансовой математики?
2. Прокомментируйте принцип "неравноценности денег".
3. Сформулируйте различия в подходе к бухгалтерским расчетам и финансовым расчетам.
4. Раскройте сущность процентов в финансовых расчетах.
5. Каковы единицы измерения процентов в финансовых расчетах?
6. В чем сущность процентной ставки?
7. Как измеряется процентная ставка?
8. Какие виды процентных ставок вы знаете?
9. Какая сумма больше и почему: 100 рублей сегодня или 100 рублей через неделю?

2 Вычисления по простым процентам

Практически все финансово – экономические расчеты связаны с определением процентных денег. Процентными деньгами (процентами) называют сумму доходов от предоставления денег в долг в любой форме (выдача ссуд, открытие депозитных счетов, покупка облигаций, сдача оборудования в аренду и т.п.) Сумма процентных денег зависит от суммы долга, срока его выплаты и процентной ставки, характеризующей интенсивность начисления процентов. Сумму долга с начисленными процентами называют наращенной суммой. Отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга называют множителем (коэффициентом) наращенного. Интервал времени, за который начисляют проценты, называют периодом начисления.

Расчеты при начислении простых процентов

Начисление простых процентов может происходить в зависимости от условий договора раз в год, полугодие, квартал или месяц. Иногда проценты начисляют и за более короткий срок.

Пусть задана исходная стоимость денег PV .

Наращенную (будущую) сумму денег через определенный период обозначим через FV ;

Число процентных периодов, т.е. периодов начисления процентов - n ;

Ставку процентов за период - i .

Тогда простые обычные проценты за один процентный период начисляются следующим образом: $PV \cdot i$.

Следовательно, в конце первого процентного периода сумма денег составит $PV + PV \cdot i = PV(1 + i)$.

В конце второго процентного периода сумма увеличится еще на $PV \cdot i$ и составит: $PV(1 + i) + PV \cdot i = PV(1 + 2i)$.

В конце третьего - $PV(1 + 2i) + PV \cdot i = PV(1 + 3i)$ и т.д.

Наконец, в конце n -го процентного периода наращенная сумма составит: $PV \cdot [1 + (n - 1) \cdot i] + PV \cdot i = PV(1 + ni)$.

Таким образом, процесс наращения суммы денег за счет начисления простых процентов моделируется как арифметическая прогрессия с первым членом PV и разностью $PV \cdot i$.

Следовательно, наращенная сумма денег за счет начисления простых процентов за n процентных периодов времени имеет вид:

$$FV = PV(1 + in) \quad (2.1)$$

Формулой (2.1) можно воспользоваться, например, для исчисления суммы погашения ссуды, предоставленной под простые проценты; размера срочного вклада с процентами и пр.

Множитель $(1 + in)$ называется множителем наращения простых процентов. Он показывает, во сколько раз увеличилась сумма вклада (или долга) к концу срока финансовой операции.

Сумма начисленных процентных денег может быть определена по формуле: $D = FV - PV$. Разность $FV - PV$ называется *дисконтом*.

Пример. Вклад 100 000 рублей размещен в сберегательный банк на 3 года под обычные простые проценты 4,5 % годовых. Определите наращенную сумму вклада.

Решение: $PV = 100000$ руб.; $i = 0,045$; $n = 3$ года.

Найдем наращенную сумму вклада по формуле (5):

$$FV = PV(1 + in) = 100000 \cdot (1 + 0,045 \cdot 3) = 100000 \cdot 1,135 = 113500 \text{ руб.}$$

Наращение суммы вклада (процентные деньги) составит 13500 рублей.

В рассмотренном примере срок финансовой операции составляет 3 года. Однако, как правило, к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд, срок которых менее года ($n < 1$).

Рассмотрим более общий случай, когда n не является целым числом.

Отметим, что при использовании формулы размерности n и i должны быть согласованы. Если n измеряется в годах, то i – ставка годовых процентов (показывает рост за год).

В случае если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, периоды начисления процентов n выражают дробным

числом, как отношение продолжительности финансовой сделки в днях к количеству дней в году (или отношение продолжительности финансовой сделки в месяцах к числу месяцев в году).

Обозначим срок операции t (time), В качестве временной базы выберем продолжительность года, выраженную в тех же единицах, что и t . Обозначим ее Y (year-год). Подставим отношение $\frac{t}{Y}$ вместо n в формулу

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) \quad (2.2)$$

Иногда при расчете простых процентов предполагают, что год состоит из 12 месяцев по 30 дней в каждом. Проценты, рассчитанные по временной базе $Y=360$ дней, называются *обыкновенными* или *коммерческими* процентами (ordinary interest). При использовании действительной продолжительности года (365 или 366 дней) получают *точные* проценты (exact interest).

Число дней финансовой операции также можно измерить приблизительно и точно. В первом случае ее продолжительность определяется из условия, согласно которому месяц принимается равным 30 дням. Точное число дней финансовой операции определяется путем подсчета числа дней между датой ее начала и датой ее окончания по календарю. Первый и последний день финансовой операции считается за один день. На практике для подсчета ее продолжительности можно пользоваться табл. 1 и 2 (приложение 1). В таблицах приведены порядковые номера дней в году (для обычного и високосного годов соответственно). Срок проведения финансовой операции рассчитывается как разность между порядковыми номерами даты ее окончания и даты начала. Таким образом, на практике применяют три варианта расчетов:

1) Точные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот вариант дает самые точные результаты. Он обозначается 365/365. Он применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например в Великобритании.

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот метод, иногда называемый банковским (Banker's Rule), распространен в ссудных операциях коммерческих банков, в частности во Франции. Он обозначается как 365/360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии. Этот метод обозначается как 360/360.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется.

Пример. Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана 20 января до 5 октября включительно под 18 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока? Найти решение тремя способами.

Определим точное число дней ссуды. Дате 20 января соответствует № 20 (таблица 1 приложения 1). Дате 5 октября - № 278. Таким образом, точное число дней ссуды составит 258 дней ($278 - 20$).

Определим приближенное число дней ссуды. При этом продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней. Количество полных месяцев срока ссуды равно 8 (с 20 января по 20 сентября). Срок от 20 сентября по 5 октября составляет 15 дней: $(30-20)+5$. Приближенное число дней ссуды рассчитывается таким образом: $8 \cdot 30 + 15 = 240 + 15 = 255$ дней.

Определим величину долга в конце срока тремя методами:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{365} \cdot 0,18\right) = 1127232,88 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360)

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{360} \cdot 0,18\right) = 1129000 \text{ руб.}$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360)

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{255}{360} \cdot 0,18\right) = 1127500 \text{ руб.}$$

Переменные процентные ставки

В условиях динамично меняющегося состояния финансового рынка при заключении финансового соглашения может быть установлена не только постоянная на весь период финансовой сделки, но и переменная, изменяющаяся во времени процентная ставка.

Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1 , тогда приращение капитала за этот период составит $PV \cdot n_1 \cdot i_1$.

Если в течение периода времени n_2 действует ставка простых процентов i_2 , то начисленные за этот период проценты составят $PV \cdot n_2 \cdot i_2$.

Пусть число периодов начисления процентов - m .

Тогда при установлении переменной, т.е. дискретно изменяющейся во времени процентной ставки, наращенная сумма определяется по формуле:

$$\begin{aligned} FV &= PV + PV \cdot n_1 \cdot i_1 + PV \cdot n_2 \cdot i_2 + \dots + PV \cdot n_m \cdot i_m = \\ &= PV(1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_m \cdot i_m) = PV \left\{ 1 + \sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где i_k — ставка простых процентов в периоде n_k , где $k = 1, 2, \dots, m$;

Пример. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 12% годовых,

каждый следующий квартал ставка возрастает на 2,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада.

Определите наращенную за год сумму, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400,0 тыс. руб.

Решение:

$$PV = 400 \text{ тыс.рублей}; n_1 = 0,5; i_1 = 0,12; n_2 = 0,25; i_2 = 0,145; n_3 = 0,25; i_3 = 0,17.$$

$$FV = PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_m \cdot i_m) = 400(1 + 0,5 \cdot 0,12 + 0,25 \cdot 0,145 + 0,25 \cdot 0,17) =$$

$$= 400(1 + 0,060 + 0,036 + 0,043) = 400 \cdot 1,139 = 455,6 \text{ тыс.рублей}$$

Реинвестирование

Если по прошествии некоторого периода зафиксированная к данному моменту наращенная сумма инвестируется вновь, то такая операция называется *реинвестированием* (повторным инвестированием) или капитализацией полученных на каждом этапе наращения средств. В этом случае проценты начисляют на уже наращенные в предыдущем периоде суммы, т.е. происходит многократное наращение.

Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1 , тогда к концу этого периода наращенная сумма составит $PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1)$. Затем эта сумма будет помещена на следующий срок n_2 под i_2 простых процентов. К концу периода n_2 наращенная сумма будет равна величине $PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1)(1 + n_2 \cdot i_2)$ и т.д.

Таким образом, итоговая наращенная сумма определится по формуле:

$$FV = PV(1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_t \cdot i_t), \quad (2.4.)$$

где n_1, n_2, \dots, n_t — продолжительность периодов наращения;

i_1, i_2, \dots, i_t — процентные ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример. Клиент поместил в банк 500,0 тыс. руб. Какова будет наращенная за 3 месяца сумма вклада, если за первый месяц начисляются проценты в размере 10% годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5% с одновременной капитализацией процентного дохода?

Решение:

$$PV = 500 \text{ тыс.рублей}; t_1 = 30; t_2 = 30 \text{ дней}; t_3 = 30 \text{ дней}; i_1 = 0,1; i_2 = 0,15; i_3 = 0,2;$$

$$Y = 360 \text{ дней}$$

$$FV = PV(1 + n_1 \cdot i_1)(1 + n_2 \cdot i_2)(1 + n_3 \cdot i_3) = 500 \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,1\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,15\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,2\right) =$$

$$= 531,896 \text{ тыс.рублей}$$

Математическое дисконтирование по простым процентам

В финансовой практике часто приходится решать задачу, обратную вычислению наращенной суммы, которая может быть сформулирована таким образом: определить сумму PV , которую необходимо инвестировать в

данный момент времени, с тем, чтобы через некоторый определенный период n получить при установленной ставке процента i требуемую наращенную сумму FV . Для решения этой задачи применяется операция дисконтирования.

Дисконтирование позволяет по известным наращенной сумме, процентной ставке и сроке финансовой операции определить современную стоимость этой наращенной суммы.

Другими словами дисконтирование позволяет определить, какую первоначальную сумму надо дать в долг, чтобы получить в конце срока сумму FV при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i .

В зависимости от вида процентной ставки применяются два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. В первом случае при расчете применяют обычные (декурсивные), а во втором – авансовые проценты.

Рассмотрим, как производится математическое дисконтирование. Выразив из формулы (2.1) PV , получим формулу математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{1 + ni}, \quad (2.5)$$

Здесь PV - современная стоимость наращенной (будущей) суммы денег FV ; n - срок проведения финансовой операции (число процентных периодов); i - процентная ставка.

Дисконтный множитель $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга PV в его окончательной сумме FV .

Пример. Заемщик должен вернуть кредит единовременным платежом с процентами за период 2 года. Проценты по кредиту составили 12% годовых. Какую сумму получил заемщик в момент заключения кредитного договора и чему равен дисконт, если сумма к возврату составляет 1 500 000 рублей?

Решение: $FV=1500\,000$ рублей; $n=2$ года; $i=0,12$

$$PV = \frac{FV}{1 + n \cdot i} = \frac{1500000}{1 + 2 \cdot 0,12} = 1209677 \text{ рублей},$$

$$D = 1500000 - 1209677 = 290323 \text{ рубля}.$$

В случае если срок финансовой операции задан в днях или в месяцах, из формулы (2.2) получим формулу математического дисконтирования для $n < 1$:

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i}, \quad (2.6)$$

где t - длительность финансовой операции в днях (в месяцах); Y - число дней (месяцев в году).

Пример. Какую сумму инвестор должен внести сегодня под 16% годовых, чтобы через 180 дней после подписания договора накопить 310 тыс. руб. при условии, что начисляются простые точные проценты.

Решение: $FV=310\,000$ рублей; $t=180$ дней; $i=0,16$; $Y=365$ дней.

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i} = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0,16} = \frac{310000}{1,078904} = 287328,6 \text{ рублей}$$

$$D = 310000 - 287328,6 = 22671,4 \text{ рублей.}$$

Банковское дисконтирование (учет) по простым процентам

При начислении авансовых (антисипативных) процентов доход, получаемый кредитором, начисляется в начале периода финансовой операции относительно конечной суммы долга и выплачивается в момент предоставления кредита. Операция предварительного начисления процентов называется *дисконтированием по учетной ставке*, а также *банковским* или *коммерческим учетом*.

Банковский, или коммерческий учет используется при операциях с векселями и другими краткосрочными обязательствами.

Суть этой операции заключается в том, что банк или другие финансовые учреждения до наступления срока платежа по векселю покупает его у владельца (векселедержателя) и берет весь риск по получению денег на себя. При этом цена, по которой банк покупает вексель, должна быть меньше той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока (т.е. цены, выплачиваемой по векселю вместе с причитающейся ему частью дисконта).

Получив при поступлении срока деньги по векселю, банк, таким образом, реализует дисконт. Прежний владелец векселя с помощью учета векселя получает деньги ранее указанного в нем срока. То есть в определенном выигрыше оказываются обе стороны сделки.

При банковском учете проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды.

Применительно к учету векселя, это означает, что проценты начисляются на сумму, которую должен выплатить должник в конце срока векселя. Ставка, по которой в этом случае начисляются проценты, отличается от декурсивной ставки процентов i . Она называется *учетной* или *дисконтной ставкой* и обозначается d .

Рассмотрим диаграмму, которая наглядно показывает составляющие схему учёта банком векселя (рис.2). Заёмщик решил взять кредит на сумму PV на срок t по процентной ставке i . Им был выписан вексель на сумму FV к моменту погашению. Эта сумма была вычислена по схеме простых процентов:

$$FV = PV(1 + \frac{t}{T}i).$$

По истечении некоторого времени t_1 владелец векселя принял решение учесть в банке (продать банку и получить наличными или положить на счёт для дальнейшего использования). Время до момента погашения векселя равно $t_2 = T - t_1$ выбирается им в соответствии с выполнением неравенства:

$$t_2 < T/d,$$

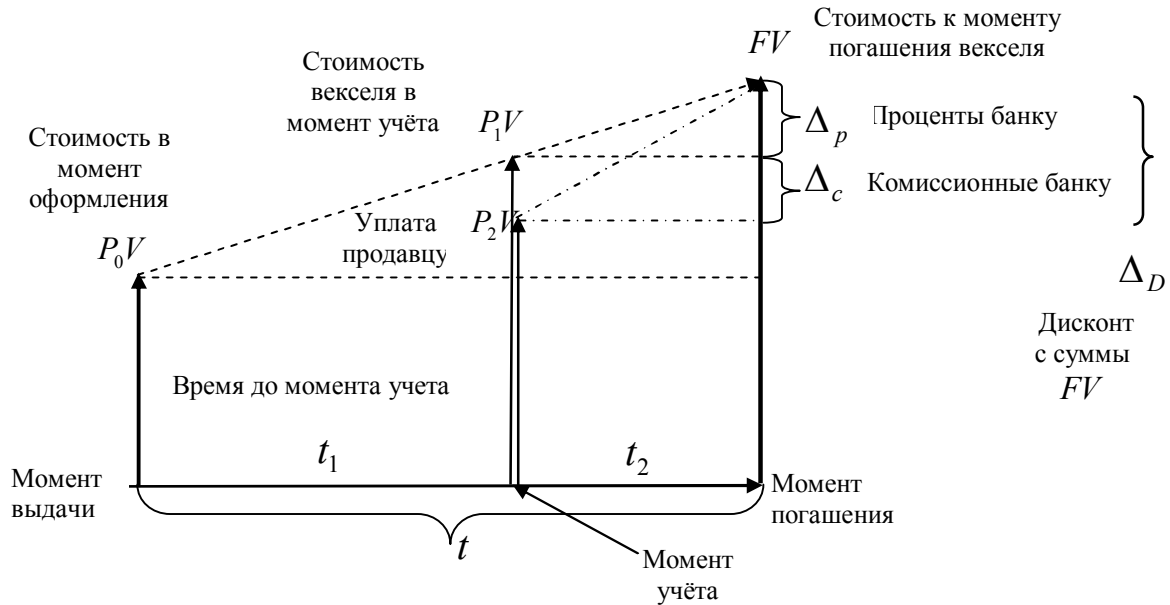


Рис. 2. Схема факторного анализа учёта векселя в банке

где d – учётная ставка, которую предложил банк владельцу векселя. На момент учёта векселя наращенная стоимость

$$P_1V = P_0V(1 + \frac{t_1}{T}i).$$

Однако, банк, оказывая услугу по учёту векселя, желает получить комиссионные Δ_c и проценты Δ_p , которые в сумме составляют дисконт (скидку) Δ_D с суммы F . По этому на руки владелец векселя получит сумму

$$P_2V = FV(1 - \frac{t_2}{T}d). \quad (2.7)$$

Очевидно, что операция учета векселя имеет смысл только в том случае, если $1 - n \cdot d \geq 0$, что равносильно неравенству $n \leq \frac{1}{d}$. При учете векселя задолго до срока платежа по нему и при высоком уровне учетной ставки дисконт может стать настолько большим, что сумма, которую должен получить владелец векселя становится

равной 0 (при $n = \frac{1}{d}$) или даже становится отрицательной (при $n > \frac{1}{d}$).
Понятно, что в этих случаях операция учета векселя лишена смысла.

Пример. Вексель выдан на сумму 1 млн. руб. с уплатой 17 ноября. Владелец векселя учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 20 %. Определите полученную при учете сумму (без уплаты комиссионных) и дисконт.

Решение: $FV = 1\,000\,000$ рублей; $d = 0,2$.

Определим срок, до погашения векселя t : 17 ноября - №321;

23 сентября - № 266. Следовательно $t = 266 - 321 = 55$ дней;

Дисконтирование по учетной ставке обычно производится по временной базе, равной 360 дням, следовательно, $Y = 360$ дней.

Таким образом, сумма, которую получил векселедержатель:

$$PV = FV \left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d \right) = 1\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0,2 \right) = 969\,444 \text{ руб.}$$

Дисконт банка составил 30556 рублей ($1\,000\,000 - 969\,444$).

Простая учетная ставка может быть использована при расчете суммы, которую получит владелец векселя при его погашении в момент наступления срока платежа. Для этого следует использовать формулу определения наращенной суммы:

$$FV = \frac{PV}{1 - n \cdot d} = \frac{PV}{1 - \frac{t}{Y} \cdot d} \quad (2.8)$$

Пример. Вексель, учтен в банке по учетной ставке 18% годовых за 150 дней до его погашения. При этом владелец векселя получил 925000 рублей. Определите номинал векселя.

Примечание. Номинал – это сумма денег указанная на векселе, которую получит владелец векселя при его погашении в момент наступления срока платежа.

Решение: $PV = 925\,000$ рублей; $d = 0,18$; $t = 150$ дней.

$$FV = \frac{PV}{1 - \frac{t}{Y} \cdot d} = \frac{925\,000}{1 - \frac{150}{360} \cdot 0,18} = 1\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Определение срока ссуды и величины ставки

При практических финансовых вычислениях часто решаются простые задачи:

а) даны PV , FV , i или d ; определить период предоставления ссуды t :

$$\frac{t}{T} = \frac{FV - PV}{PV \cdot i}; \quad \frac{t}{T} = \frac{FV - PV}{FV \cdot d}; \quad (2.9)$$

б) даны PV , FV , t ; определить ставки:

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot \frac{t}{T}}; \quad d = \frac{FV - PV}{FV \cdot \frac{t}{T}}. \quad (2.10)$$

Замена платежей и их консолидация

При замене параметров платежей или их консолидации (несколько платежей объединяются в один) формируется финансовый эквивалент, включающий суммы, *приведенные к одному и тому же моменту времени*. Он имеет форму:

Сумма заменяемых платежей	=	Сумма платежей по новому соглашению
------------------------------	---	--

Поскольку финансовый эквивалент представляет собой одно равенство с несколькими параметрами, в частности, следует определить либо новую сумму платежей P_{Σ} , либо новый срок n_0 платежа, то это равенство дисконтированных сумм:

$$\frac{P_{\Sigma}}{1 + n_0 i} = \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{1 + n_k i} \quad (2.11)$$

при применении процентной ставки;

$$P_{\Sigma} (1 - n_0 d) = \sum_{k=1}^m P_k (1 - n_k d) \quad (2.12)$$

при применении учётной ставки.

Если в новом соглашении положить $P_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m P_k$, то новый срок определяется как

$$n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{\sum P_k}{\sum \frac{P_k}{1 + n_k i}} - 1 \right) \quad (2.13)$$

при применении процентной ставки;

$$n_0 = \frac{\sum P_k n_k}{\sum P_k} \quad (2.14)$$

при применении учётной ставки.

Для случая более простой ситуации, когда параметры одного платежа заменяются новыми значениями, можно рассуждать так:

а) при отдалении срока платежа наращиваются проценты:

$$P_{\Sigma} = P_1 + P_1 (n_0 - n_1) i, \quad n_0 > n_1, \quad (2.15)$$

при применении процентной ставки;

б) при сокращении срока платежа, т. е. $n_0 < n_1$, надо сумму P_1 математически дисконтировать на срок $(n_1 - n_0)$:

$$P_{\Sigma} = \frac{P_1}{1 + (n_1 - n_0)i} \quad (2.16)$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем особенности начисления процентов при использовании простых ставок?
2. Условия применения простых процентов.
3. Как определяются наращенная сумма и коэффициент наращения при использовании простых процентов?
4. Зависит ли результат финансовой операции от выбранного способа начисления простых процентов?
5. Определение наращенной суммы при дискретно изменяющихся во времени процентной ставки.
6. Что означает дисконтирование и для чего оно применяется?
7. Поясните различие в антисипативных и декурсивных процентах.
8. Укажите сущность величин, входящих в формулы для определения приведенной величины.
9. Что такое дисконт и как он определяется?
10. В чем сущность операции учета векселя?

Задание для самостоятельной работы студента

1. Ссуда равна 500 тыс. руб. выдана на 6 лет под простые проценты 18% годовых. Определить проценты, сумму накопленного долга, во сколько раз увеличиться наращенная сумма.
2. Ссуда в размере 1,5 млн. руб. выдана на срок с 15 января по 28 июня включительно под простые проценты 23% годовых. Определить величину долга в конце срока тремя методами.
3. Через 200 дней должник уплатит 8 тыс. руб. Кредит выдан под простые проценты 22% годовых. Какова первоначальная сумма долга и дисконт при условии, что временная база равна 360 дней?
4. Вычислить процент с капитала 2,4 тыс. руб., отданного в долг по ставке 20% годовых на срок с 5 марта по 21 сентября того же года, если расчет ведется способом 365/365.
5. Банк предоставил ссуду в размере 10 тыс. руб. на 30 месяцев под 30% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока?
6. Вкладчик поместил в банк 15 тыс. руб. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 20% годовых, каждые последующие полгода ставка повышается на 3%. Найти наращенную сумму за два года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада.

7. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 4 тыс. руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возвращаемой суммы не превышала 4,2 тыс. руб., если процентная ставка равна 12% и в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней?

3 Вычисления по сложным процентам

При использовании сложных ставок процентов процентные деньги, начисленные после первого периода начисления, являющегося частью общего срока долга, присоединяются к сумме долга. Во втором периоде начисления проценты будут начисляться исходя из первоначальной суммы долга, увеличенной на сумму процентов, начисленных после первого периода начисления, и так далее на каждом последующем периоде начисления. Таким образом, база для начисления сложных процентов в отличие от использования простых процентов будет увеличиваться с каждым очередным периодом начисления.

Расчеты при начислении сложных процентов

Если сложные проценты начисляются по постоянной ставке ежегодно в конце года то, наращенная сумма будет равна:

$$FV = PV \cdot (1+i)^n, \text{ где} \quad (3.1)$$

P - первоначальная сумма долга;

i - годовая ставка сложных процентов

n – срок финансовой операции в годах

$(1+i)^n$ - коэффициент наращения по сложной ставке процентов

Пример Депозит 50 тыс. руб. положен в банк на три года с начислением сложных процентов по ставке 8% годовых. Определить сумму начисленных процентов.

Решение

Сумма депозита с начисленными процентами будет равна:

$$FV = 50000 \cdot (1 + 0,08)^3 = 62985,5 \text{ руб.}$$

Сумма начисленных процентов составит:

$$I = FV - PV = 62985,5 - 50000 = 12985,5 \text{ руб.}$$

Если бы проценты начислялись по простой ставке 8% годовых, сумма их составила бы:

$$I_n = 3 \cdot 0,008 \cdot 50000 = 12000 \text{ руб.}$$

Таким образом, начисление процентов по сложной ставке дает большую сумму процентных денег, если срок финансовой операции больше года.

Если срок финансовой операции в годах не является целым числом, наращенная сумма, может быть определена двумя способами:

1) используют формулу $FV = PV(1+i)^n$, с соответствующим нецелым показателем степени.

2) Смешанный метод и наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV (1+i)^a \cdot (1+bi), \text{ где} \quad (3.2)$$

$$n = a+b$$

a- целое число лет

b - оставшаяся дробная часть года

Сложные проценты могут начисляться несколько раз в году. При этом годовую ставку процентов, исходя из которой, определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, называют номинальной годовой ставкой процентов. При сроке долга n лет и начислении сложных процентов m раз в году общее количество периодов начисления будет равно:

$$N = n \cdot m,$$

a наращенная сумма будет равна:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n \cdot m}, \text{ где} \quad (3.3)$$

j- номинальная годовая ставка процентов

Пример Банк начисляет проценты на вклады ежеквартально по номинальной ставке 10% годовых. Определить сумму процентов, начисленных за два года на вклад 2000 руб.

Решение

Количество периодов начисления равно:

$$2 \cdot 4 = 8$$

Следовательно, наращенная сумма составит:

$$FV = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^8 = 2436,8 \text{ руб.}$$

Сумма начисленных процентов будет равна:

$$I = 2436,8 - 2000 = 436,8 \text{ руб.}$$

Используя формулу для определения наращенной суммы, можно вычислить:

а) срок долга:

$$n = \frac{\log \frac{FV}{PV}}{\log(1+i)} \quad (3.4)$$

б) ставку сложных процентов:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \quad \text{и} \quad j = m \left(\sqrt[mn]{\frac{FV}{PV}} - 1 \right) \quad (3.5)$$

в) первоначальную сумму долга (осуществить дисконтирование по сложной ставке процентов):

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \quad \text{и} \quad PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} \quad (3.6)$$

Переменные процентные ставки

В случае если значения переменных ставок фиксируются в контракте, общий множитель наращения определяется как произведение частных множителей.

$$FV = PV(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}, \quad (3.7)$$

где i_1, i_2, \dots, i_k - последовательные во времени значения ставок;

n_1, n_2, \dots, n_k - периоды, в течение которых используются соответствующие ставки.

Пример. Ссуда в размере 1000000 руб. выдана на 5 лет под 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75%-в оставшиеся. Определить наращенную величину долга.

Решение:

$$PV = 1000000; n = 5 \text{ лет}; i_1 = 0,12 + 0,005 = 0,125; n_1 = 2 \text{ года};$$

$$i_2 = 0,12 + 0,0075 = 0,1275; n_2 = 3 \text{ года}.$$

$$FV = PV(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} = 1000000(1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 =$$

$$= 1000000 \cdot 1,265625 \cdot 1,433341 = 1814072 \text{ руб.}$$

Наращение составит 814072 руб.

Эффективная годовая процентная ставка

Так как возможны разные схемы начисления сложных процентов, то знание номинальной процентной ставки не позволяет их сравнивать.

Ставка, обеспечивающая переход от текущей суммы P к наращенной F при однократном начислении процентов, называется *эффективной* и обозначается f .

Применение эффективной ставки должно обеспечивать равносильность схем наращения:

$$PV \xrightarrow{i^{(m)}} FV \sim PV \xrightarrow{f} FV.$$

Замечание. Чем выше эффективная ставка, тем выше расходы заёмщика по обслуживанию полученной ссуды.

Примеры расчета эффективной ставки:

1) в рамках одного года верно равенство

$$FV_1 = PV \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot 1} = PV(1 + f),$$

из которого получаем

$$f = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot 1} - 1. \quad (3.8)$$

Обратный переход к номинальной ставке выполняется по формуле:

$$i^{(m)} = m \cdot \left[\left(1 + f\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]. \quad (3.9)$$

Определение. Две номинальные ставки называются эквивалентными, если они дают одну и ту же эффективную ставку.

В США используются номинальные ставки, а в Европе сначала находят эффективную ставку и далее вычисляют наращенную сумму

$$FV = PV(1 + f)^n.$$

Математическое дисконтирование по сложной ставке процентов

Формула математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}, \quad (3.10)$$

где $\frac{1}{(1 + i)^n}$ - дисконтный множитель

Если проценты начисляются m раз в году, то получим:

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}, \quad (3.11)$$

Здесь PV - современная величина (современная стоимость) денежной суммы FV .

$$\text{Дисконт равен } D = FV - PV = FV \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \right] \quad (3.12)$$

$$\text{Если проценты начисляются } m \text{ раз в году, то } D = FV \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}} \right].$$

Пример. Сумма 500 000 рублей будет выплачена через 5 лет. Определите ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов 12% годовых.

Решение: $FV = 500\,000$ рублей; $n = 5$ лет; $i = 0,12$.

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n} = \frac{500000}{(1 + 0,12)^5} = \frac{500000}{1,76234} = 283713,7 \text{ рубля.}$$

Банковское дисконтирование (учет) по сложной учетной ставке

Пусть долговое обязательство на сумму FV со сроком погашения через n лет учитывается раньше срока по сложной годовой ставке d .

Если учет осуществляется за год до срока, то начисляются проценты в сумме $FV \cdot d$. В этом случае владелец векселя получит сумму $FV - FV \cdot d = FV(1 - d)$

Если учет долгового обязательства осуществляется за два года до срока погашения, то за второй год проценты начисляются уже на сумму $FV(1 - d)$, дисконтированную на первом этапе. Тогда владелец векселя получит сумму,

равную: $FV(1-d) - FV \cdot (1-d) \cdot d = FV(1-d) = FV(1-2d+d^2) = FV(1-d)^2$ и т.д.

Если долговое обязательство продается за n лет до срока, то владелец векселя получит сумму $FV(1-d)^n$.

Таким образом, дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$PV = FV(1-d)^n \quad (3.13)$$

где d -сложная годовая учетная ставка. Здесь $(1-d)^n$ - дисконтный множитель. Дисконт равен величине:

$$D = FV - PV = FV - FV(1-d)^n = FV[1 - (1-d)^n]$$

Если дисконтирование производится по учетной ставке m раз в году, то применяется формула: $PV = FV(1-d)^n$

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn}. \quad (3.14)$$

Сравнивая между собой банковское дисконтирование по простой и сложной учетным ставкам, получим следующее:

- а) при $0 < n < 1$ справедливо неравенство $(1-nd) > (1-d)^n$;
- б) при $n > 1$ неравенство $(1-nd) < (1-d)^n$;
- в) при $n=1$ значения дисконтных множителей совпадают:
 $(1-nd) = (1-d)^n$;

Таким образом, при $n < 1$ результаты финансовой операции для банка выгоднее с применением учета по сложным процентам, так как в этом случае дисконтный множитель будет меньше, чем в случае применения простых процентов, и, следовательно, величина выдаваемой суммы будет меньше. Если же $n > 1$, то для него выгоднее применить учет по простой учетной ставке.

Пример. Ценная бумага на сумму 500 000 рублей, учтена за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Какова сумма дисконта?

Решение: $FV = 500000$ руб.; $n = 3$ года; $d = 0,15$.

$PV = FV(1-d)^n = 500000 \cdot (1-0,15)^3 = 500000 \cdot 0,614125 = 307006,5$ рублей получит при учете ценной бумаги ее владелец.

Дисконт составит: $D = 500000 - 307062,5 = 192937,5$ рублей.

Пример. В условиях предыдущего примера рассчитать сумму, которую получит владелец ценной бумаги при поквартальном дисконтировании.

Решение: $FV = 500000$ руб.; $n = 3$ года; $d = 0,15$; $m = 4$.

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn} = 500000 \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{3 \cdot 4} = 500000 \cdot 0,63213 = 316065 \text{ руб.}$$

Расчет средней процентной ставки

В условиях нестабильности финансового рынка процентные ставки могут быть непостоянны во времени. В связи с этим возникает задача определения такого значения процентной ставки, которое определяло бы уровень доходности за весь период финансовой операции.

Средняя ставка \bar{i} (равно как и \bar{d}) — это взвешенная средняя арифметическая величина, при расчете которой каждому значению процентной ставки ставится в соответствие интервал, в течение которого данное значение ставки использовалось.

Средняя процентная ставка — это ставка, дающая такое наращение, которое эквивалентно наращению с применением ряда разных по значению процентных ставок, применяемых на различных интервалах времени.

а) Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1 , в течение периода времени n_2 действует ставка простых процентов i_2 и т.д. Всего число периодов начисления процентов — m . В этом случае срок финансовой операции определяется

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$$

суммой:

Обозначим процентную ставку ссудных процентов, характеризующую среднюю доходность за конверсионный период, символом \bar{i} . Тогда уравнение эквивалентности для ее определения будет иметь вид:

$$1 + N \cdot \bar{i} = 1 + \sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k$$

Отсюда

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k}{N} \quad (3.15)$$

Аналогично для простых учетных ставок $d_1; d_2; \dots; d_m$ их средняя

$$\text{определяется из равенства: } \bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \cdot d_k}{N}. \quad (3.16)$$

Пример. На долг в 400 000 рублей согласно контракту предусматривается начислить годовые простые точные проценты по схеме, определенной следующей таблицей.

Период	i_k	n_k , лет	$n_k \cdot i_k$
1	0,12	0,75	0,09
2	0,11	2,0	0,22
3	0,08	1,25	0,1
Σ		4,0	0,41

Требуется оценить доходность этой кредитной операции в виде простой годовой процентной ставки и найти сумму долга с процентами.

Решение:

$PV = 400000$ рублей; $n_1 = 0,75$; $i_1 = 0,12$; $n_2 = 2,0$; $i_2 = 0,11$; $n_3 = 1,25$; $i_3 = 0,08$.

Срок финансовой операции:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = 0,75 + 2,0 + 1,25 = 4,0.$$

Средняя процентная ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N} = \frac{0,41}{4,0} = 0,1025$$

или 10,25 % годовых.

Сумма долга с процентами:

$$FV = 400000 \cdot (1 + 4 \cdot 0,1025) = 564000 \text{ рублей}$$

б) Допустим, что доходность операции с плавающей процентной ставкой на каждом интервале начисления была выражена через сложный процент. В этом случае средняя процентная ставка, которая равноценна последовательности ставок за весь период финансовой операции, может быть получена из следующего уравнения эквивалентности:

$$\left(1 + \bar{i}\right)^N = (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_m}$$

$$\text{Отсюда } \bar{i} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_m}} - 1, \quad (3.17)$$

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$$

Следовательно, сложная средняя процентная ставка рассчитывается по формуле средней геометрической взвешенной.

Пример. Сложная процентная ставка по ссуде определена на уровне 8,5 % плюс маржа 0,5 % в первые 2 года и 0,75 % в последующие 3 года. Требуется определить среднюю ставку сложных процентов.

Решение:

$$n_1 = 2; i_1 = 0,085 + 0,005 = 0,09; n_2 = 3; i_2 = 0,085 + 0,0075 = 0,0925.$$

Срок финансовой операции: $N = 2 + 3 = 5$.

Средняя ставка сложных процентов:

$$\bar{i} = \sqrt[5]{(1 + 0,09)^2 \cdot (1 + 0,0925)^3} - 1 = 0,0915 \text{ или } 9,15\% \text{ годовых.}$$

Учет инфляции при оценке результатов финансовых операций

Падение покупательной способности денег за период характеризуется с помощью индекса покупательной способности денег. Этот индекс принимают равным обратной величине индекса цен за тот же период.

Пример. Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5%. Как изменилась покупательная способность денег?

Решение: Индекс цен равен $1 + 0,05 = 1,05$

Тогда индекс покупательной способности денег

$$i_{n.c} = \frac{1}{1,05} = 0,952 \text{ или } 95,2\%.$$

Реально наращенная сумма денег с учетом инфляции (S) может быть рассчитана, исходя из номинально наращенной суммы денег FV по формуле

$$S = FV \cdot i_{n.c}, \quad \text{где } FV - \text{номинально наращенная сумма денег.}$$

Пример. Два вклада в размере 100000 руб. были размещены на три года под 12% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 30%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

Решение:

$$PV = 100000 \text{ руб.}; i = 0,12; n = 3 \text{ года}; i_y = 1,3 \quad (1 + 0,3).$$

Определим номинальные наращенные суммы денег по простым процентам:

$$FV_1 = PV(1 + ni) = 100000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,12) = 136000 \text{ руб.}$$

Номинальные наращенные суммы денег по сложным процентам:

$$FV_2 = PV(1 + i)^n = 100000 \cdot (1 + 0,12)^3 = 100000 \cdot 1,40493 = 140493 \text{ руб.}$$

Найдем индекс покупательной способности:

$$i_{n.c} = \frac{1}{i_y} = \frac{1}{1,3} = 0,77$$

После этого рассчитаем реально наращенные суммы денег.

$$S_1 = FV_1 \cdot i_{n.c.} = 136000 \cdot 0,77 = 104720 \text{ руб.};$$

$$S_2 = FV_2 \cdot i_{n.c.} = 140493 \cdot 0,77 = 108180 \text{ руб.}$$

Оценим реальную доходность финансовых операций с помощью реальной сложной процентной ставки. Обозначим показатели реальной доходности по первому вкладу i_1 , а по второму - i_2 .

$$i_1 = \sqrt[n]{\frac{S_1}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{104720}{100000}} - 1 = 0,01549 \quad i_2 = \sqrt[n]{\frac{S_2}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{108180}{100000}} - 1 = 0,02656$$

Таким образом, реальная доходность по первому вкладу составила 1,5% годовых, а по второму - 2,7%.

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие начисления процентов по сложной ставке от начисления по простой ставке?
2. Условия применения сложных процентов.
3. Почему проценты, определяемые по сложной процентной ставке выше (ниже) процентов по простой ставке?
4. Сделайте сравнительный анализ графиков изменения наращении капитала при реализации схем простых и сложных процентов.
5. Что такое номинальная ставка процентов и когда она применяется?
6. Раскройте сущность эффективной ставки процентов.
7. Какое начисление процентов - (более или менее частое) - выгодно и почему?
8. Расчет наращенной суммы при дискретно меняющейся во времени сложной ставке процентов.
9. Определение наращенной суммы за срок с дробным числом лет.
10. Вы располагаете данными о сумме, которую возможно получить через три года и хотите продать этот контракт немедленно. Какими расчетными формулами целесообразно воспользоваться и почему?
11. Что такое инфляция и как она влияет на оценку финансовых результатов?

Задание для самостоятельной работы студента

1. Пусть вкладчик положил на счет в банке 25000р. и в течение 3-х лет не будет снимать деньги со счета. Подсчитаем, сколько денег будет на счете вкладчика через 3 года, если банк выплачивает 30% в год, и проценты после каждого начисления присоединяются к начальной сумме 25000р., т.е. капитализируются.
2. Рассчитайте, что выгоднее для вкладчика: получить 20 000 рублей сегодня или получить 35 000 рублей через 3 года, если процентная ставка равна 17%.
3. Сколько лет потребуется для того чтобы из 1000 рублей, положенных в банк, стало 20000 рублей, если процентная ставка равна 14% годовых?
4. Какой должна быть ставка ссудного процента, чтобы 10 000 рублей нарастились до 30 000 рублей, за срок вклада 5 лет?

5. Найти реальную простую процентную ставку при номинальной ставке 70% годовых и месячных темпах инфляции 5%, 2%, 4%.

Раздел 4 Финансовая эквивалентность обязательств

При проведении различных финансовых операций в расчетах могут использоваться различные виды процентных ставок, поэтому для сравнения доходности (эффективности) таких операций необходимо уметь по заданному значению процентной ставки одного вида определять эквивалентное значение процентной ставки другого вида.

Принцип финансовой эквивалентности обязательств предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта.

При изменении способов начисления процентов необходимо учитывать взаимозаменяемость между различными видами процентных ставок.

Эквивалентными называют *процентные ставки*, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т.е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции.

При изменении условий платежей для реализации названного принципа необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения.

Эквивалентными считаются такие *платежи*, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

Эквивалентность процентных ставок

Основой для определения значений эквивалентных процентных ставок являются уравнения эквивалентности для соответствующих финансовых операций. Равноценность финансовых последствий может быть обеспечена в том случае, если наблюдается равенство множителей.

Эквивалентные значения простой ставки процентов и учетной ставки.

Составляем уравнение эквивалентности, для чего приравниваем коэффициенты наращивания

$$(1+ni) = \frac{1}{1-nd}$$

Решая данное уравнение относительно процентной или учетной ставок, получим

$$i = \frac{d}{1-nd}, \quad d = \frac{i}{1+ni} \quad (4.1)$$

Если сроки операций заданы в днях, эти формулы примут вид:

$$i = \frac{K_i \cdot d}{K_d - t \cdot d}, \quad d = \frac{K_d \cdot i}{K_i + t \cdot i}, \quad \text{где} \quad (4.2)$$

K_i - расчетное количество дней в году при начислении процентов;

K_d – расчетное количество дней в году при учете векселей.

Пример 12. Вексель учтен в банке по учетной ставке 20% годовых за 90 дней до срока его погашения. Определить значение эквивалентной ставки процентов, определяющей доходность операции учета, если расчетное количество дней в году при учете векселей принимается равным 360, а при начислении процентов – равным 365.

Решение

По приведенной выше формуле:

$$i = \frac{365 \cdot 0.2}{360 - 90 \cdot 0.2} = 0.21 \text{ или } 21\%$$

Эквивалентные значения простой i_{Π} и сложной i_c годовых ставок процентов определяются соотношениями:

$$i_{\Pi} = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} \quad i_c = \sqrt[n]{1 + n \cdot i_{\Pi}} - 1 \quad (4.3)$$

Годовая ставка процентов, эквивалентная номинальной годовой ставке процентов при их начислении несколько раз в году. Определяется по формуле:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \quad (4.4)$$

Пример Банк начисляет сложные проценты на вклады по номинальной ставке 12% годовых. Определить доходность вкладов по годовой ставке процентов при их ежемесячном начислении.

Решение

По приведенной выше формуле:

$$i = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1 = 0.127 \text{ или } 12.7\%$$

Замена и консолидация платежей

В качестве метода, позволяющего осуществить принцип финансовой эквивалентности обязательств, принято использовать *метод приведения* (с помощью операций дисконтирования и наращення) платежей к одному моменту времени.

При применении метода приведения следует, прежде всего, выбрать *базовый момент времени*, т.е. момент к которому предполагается приведение всех сумм в расчете.

Дисконтирование применяется, если необходимо привести платежи к более ранней дате, наращение – когда базовый момент времени относится к будущему.

Пример. Выясните, являются ли равноценными два обязательства, если по одному из них должно быть выплачено 2 млн. рублей через 2 года, а по второму – 2,5 млн. рублей через 3 года. Для сравнения применить сложную процентную ставку 15% годовых.

Решение $FV_1 = 2000000 \text{руб.}; n_1 = 2 \text{года}; FV_2 = 2500000 \text{руб.}; n_2 = 3 \text{года}; i = 0,15$.
Найдем современную стоимость этих платежей:

$$PV_1 = \frac{2000000}{(1+0,15)^2} = \frac{2000000}{1,3225} = 1512287,33 \text{руб.};$$

$$PV_2 = \frac{2500000}{(1+0,15)^3} = \frac{2500000}{1,520875} = 1643790,58 \text{руб.}$$

Как видим, данные обязательства не являются равноценными.

На практике при изменении условий платежей принцип финансовой эквивалентности реализуется путем составления уравнения эквивалентности, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения, как правило, реализуется на основе простых процентных ставок, для среднесрочных и долгосрочных – на основе сложных.

Пример. Имеются два кредитных обязательства 400 тыс. руб. и 700 тыс. руб. со сроками уплаты 1 августа и 1 января (следующего года). По согласованию сторон условия обязательств пересмотрены: первый платеж в размере 600 тыс. рублей должник вносит 1 ноября, остальной долг он выплачивает 1 марта. Определите величину второго платежа, если в расчетах используется простая процентная ставка 20% годовых. Проценты точные.

Решение:

За базовую дату примем дату искомого платежа. Все остальные платежи приведем к этой дате - 1 марта.

Срок от 1 августа ($P_1=400$ тыс. рублей) до 1 марта составляет 212 дней ($365-213+60$).

Срок от 1 января ($P_2=700$ тыс. рублей) до 1 марта составляет 59 дней ($60-1$).

Срок от 1 ноября ($P_3=600$ тыс. рублей) до 1 марта составляет 120 дней ($365-305+60$).

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$400 \cdot \left(1 + \frac{212}{365} \cdot 0,2\right) + 700 \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0,2\right) = 600 \cdot \left(1 + \frac{120}{365} \cdot 0,2\right) + P_4.$$

$$446,47 + 722,63 = 639,45 + P_4,$$

Отсюда $P_4=529,65$ тыс. рублей.

Пример. Согласно контракту предприятие должно выплатить 200, 300 и 500 тыс. рублей соответственно через 1,5 года, 2 и 4 года. Предприятие предлагает пересмотреть контракт и вернуть долг одним

платежом через 3,5 года. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 18% годовых.

Решение:

$$P_4 = 200 \cdot (1 + 0,18)^{3,5-1,5} + 300 \cdot (1 + 0,18)^{3,5-2} + \frac{500}{(1 + 0,18)^{4-3,5}} =$$

$$= 278,48 + 384,54 + 460,29 = 1123,31 \text{ тыс. руб.}$$

Расчеты, связанные с финансовой эквивалентностью платежей, применяются при изменении условий контрактов (объединении нескольких платежей в один, замене одного количества платежей на другое, изменении сроков платежей и др.). Для определения эквивалентного значения того или иного платежа для заданной даты (срока) приведения его сумму необходимо умножить на коэффициент приведения.

Обратите внимание, что при дате приведения будет представлять собой коэффициент наращивания по заданной ставке процентов, а при дате приведения, меньшей срока платежа, коэффициент приведения будет представлять собой коэффициент дисконтирования. Необходимые формулы и примеры расчетов приведены в рекомендуемой литературе.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается понятие эквивалентности в финансовых расчетах?
2. Приведите соотношения, связывающие между собой эквивалентные ставки различных видов.

Задание для самостоятельной работы студента

1. Простая процентная ставка депозита равна 20% годовых, срок депозита-0,5 года. Определить доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.
2. Номинальная ставка процента при начислении один раз в квартал равна 16% годовых. Определить эффективную ставку.
3. Определите силу роста для сложной процентной ставки и наращивания 20% годовых.
4. Кредит выдан под 12% сложных годовых процентов. Каков должен быть уровень эквивалентной ставки простых годовых процентов при сроке кредита: а) 6 лет; б) 7 месяцев?
5. Вексель учтен в банке по годовой учетной ставке 20% за 187 дней до его погашения. Оценить в виде годовой ставки простых процентов доходность этой финансовой операции для банка.

Раздел 5 Оценка эффективности финансовых операций

При определении и сравнении доходности различных финансовых операций используют годовые ставки простых или сложных процентов,

называя их в этом случае, эффективными ставками процентов. Приведенные ранее формулы для определения значений простой и сложной годовых ставок процентов являются, таким образом, формулами для расчета эффективных ставок процентов.

Предположим некоторая сумма PV предоставлена в долг с условием, что через n лет будет возвращена большая сумма FV .

В качестве показателя доходности может служить:

а) обычная годовая ставка процентов, рассчитанная по формуле

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \quad (5.1)$$

б) сложная годовая ставка процентов, определенная из формулы наращения по сложным процентам $FV = PV(1 + i)^n$:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \quad (5.2)$$

в) эффективная ставка процентов, если известна номинальная ставка процентов i , и проценты начисляются m раз в год:

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \quad (5.3)$$

Пример. Ссуда в размере 2,5 млн. рублей выдана под простые проценты на 2 года, с условием возвратить в конце срока 3,5 млн. руб. Определить доходность этой операции на основе простой и сложной процентных ставок.

Решение: $PV = 2,5 \text{ млн. руб.}; FV = 3,5 \text{ млн. руб.}; n = 2 \text{ года.}$

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{3,5 - 2,5}{2,5 \cdot 2} = 0,2 \quad \text{или } 20\%.$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{3,5}{2,5}} - 1 = 0,183 \quad \text{или } 18,3\%.$$

Пример. На вклад, помещенный в банк под 16% годовых, проценты начисляются ежеквартально. Оцените доходность этой операции на основе эффективной процентной ставки.

Решение: $i = 0,16; m = 4.$

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^4 - 1 = 0,1699 \quad \text{или } 16,99\%.$$

Измерение доходности любой финансовой операции сводится к учету всех источников дохода, нахождению суммарного дохода за определенный период времени и сопоставлению его с затратами.

Все выплаты должны быть приведены к одному моменту времени, чаще всего к сроку начала или окончания финансовой операции.

Таким образом, в общем случае оценка доходности сводится к определению расчетной процентной ставки, отражающей общую доходность на вложенный капитал.

Пример. Ссуда 100 тыс. рублей выдана на 240 дней под 12% годовых. Проценты простые обыкновенные. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 1 тыс. рублей. Определить полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки.

Решение: $PV=100$ тыс. руб.; $t = 240$ дней; $Y = 360$ дней.

Сумма долга с процентами составит:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{240}{360} \cdot 0,12\right) = 108 \text{ тыс. рублей}$$

Затраты составили 99 тыс. руб. (100-1). Срок финансовой операции $n = \frac{240}{360} = 0,66667$ года.

Определим полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки из равенства: $i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[0,66667]{\frac{108}{99}} - 1 = 1,0909^{1,5} - 1 = 0,1394$.

Следовательно, полная доходность этой финансовой операции составляет 13,94%.

Учет инфляции при оценке результатов финансовых операций

Падение покупательной способности денег за период характеризуется с помощью индекса покупательной способности денег. Этот индекс принимают равным обратной величине индекса цен за тот же период.

Пример. Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5%. Как изменилась покупательная способность денег?

Решение: Индекс цен равен $1 + 0,05 = 1,05$

Тогда индекс покупательной способности денег

$$i_{н.с} = \frac{1}{1,05} = 0,952 \quad \text{или} \quad 95,2\%.$$

Реально наращенная сумма денег с учетом инфляции (S) может быть рассчитана, исходя из номинально наращенной суммы денег FV по формуле

$$S = FV \cdot i_{н.с.}, \tag{5.4}$$

где FV - номинально наращенная сумма денег.

Пример. Два вклада в размере 100000 руб. были размещены на три года под 12% годовых. Причем один вклад был размещен под простые

проценты, а другой – под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 30%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

Решение:

$$PV = 100000 \text{ руб.}; i = 0,12; n = 3 \text{ года}; i_u = 1,3 \quad (1 + 0,3).$$

Определим номинальные наращенные суммы денег по простым процентам:

$$FV_1 = PV(1 + ni) = 100000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,12) = 136000 \text{ руб.}$$

Номинальные наращенные суммы денег по сложным процентам:

$$FV_2 = PV(1 + i)^n = 100000 \cdot (1 + 0,12)^3 = 100000 \cdot 1,40493 = 140493 \text{ руб.}$$

Найдем индекс покупательной способности:

$$i_{n.c} = \frac{1}{i_u} = \frac{1}{1,3} = 0,77$$

После этого рассчитаем реально наращенные суммы денег.

$$S_1 = FV_1 \cdot i_{n.c} = 136000 \cdot 0,77 = 104720 \text{ руб.};$$

$$S_2 = FV_2 \cdot i_{n.c} = 140493 \cdot 0,77 = 108180 \text{ руб.}$$

Оценим реальную доходность финансовых операций с помощью реальной сложной процентной ставки. Обозначим показатели реальной доходности по первому вкладу i_1 , а по второму - i_2 .

$$i_1 = \sqrt[n]{\frac{S_1}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{104720}{100000}} - 1 = 0,01549$$

$$i_2 = \sqrt[n]{\frac{S_2}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{108180}{100000}} - 1 = 0,02656$$

Таким образом, реальная доходность по первому вкладу составила 1,5% годовых, а по второму - 2,7%.

Расчет реально наращенной суммы денег с учетом покупательной способности

Процесс наращивания при наличии инфляции по простым процентам описывается формулой:

$$S = \frac{1 + ni}{(1 + \gamma)^n} \quad (5.5)$$

Если наращивание производится по сложным процентам – по формуле:

$$S = PV \cdot \left(\frac{1 + i}{1 + \gamma} \right)^n \quad (5.6)$$

Где PV - первоначальная сумма денег, размещенная на вкладе;

i - годовая декурсивная ставка процента по вкладу;

γ - средний годовой темп инфляции;

n - срок вклада.

Формула $S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n = PV \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+\gamma)^n}$, характеризует процесс

наращения в условиях инфляции: ставка доходности является фактором роста денег и находится в числителе, а показатель инфляции является фактором их обесценивания и находится в знаменателе.

При сравнении годовой ставки процента по вкладу и среднего годового темпа инфляции возможны три случая:

- 1) $i > \gamma$, тогда $S > PV$, т.е. только часть наращенной суммы денег «поглощается» инфляцией. Это наиболее оптимальный результат.
- 2) $i = \gamma$, тогда $S = PV$, т.е. все наращение по вкладу «поглощено» инфляцией. Следовательно, роста реальной суммы нет. В этом случае ставка процента по вкладу позволила лишь сохранить покупательную способность первоначальной суммы вклада от инфляции.
- 3) $i < \gamma$, тогда $S < PV$. Т.е. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы денег, размещенной на вкладе. Такое положение называют «эрозией капитала». В этом случае темпы роста инфляции опередили темпы роста наращения денег по ставке процента. Это наихудший результат, при котором не удастся спасти вложенные деньги от обесценивания в условиях инфляции.

Пример. Первоначальная сумма вклада составляет 6000 руб. Вклад размещен на 3 года под 4,5% годовых. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7%. Требуется определить наращенную сумму денег с учетом инфляции.

Решение: $PV = 6000$ руб.; $n = 3$ года; $i = 0,045$; $\gamma = 0,07$.

$$S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n = 6000 \cdot \left(\frac{1+0,045}{1+0,07} \right)^3 = 6000 \cdot 0,93153 = 5589,2 \text{ руб.}$$

Т.о. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы вклада.

Пример. Ежемесячный уровень инфляции составляет 7% (по отношению к предыдущему месяцу). Исчислить реально наращенную стоимость вклада в 200 тыс. руб., хранящегося на счете до востребования в сбербанке в течение 7 месяцев по ставке 10% годовых. Проценты простые.

$$S = PV \frac{\left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i \right)}{(1+\gamma)^n} = 200 \frac{\left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0,1 \right)}{(1+0,07)^7} = 200 \cdot \frac{1,058333}{1,60578} = 131,1815 \text{ тыс.руб.}$$

Учет инфляции при определении процентной ставки

Инфляция уменьшает реальную ставку процента. В результате реальная ставка процентов составит $i_\gamma = \frac{i - \gamma}{1 + \gamma}$. (5.7)

Увеличение процентной ставки должно компенсировать обесценивающее влияние инфляции. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке j , которая определяется из соотношения $1 + j = (1 + i) \cdot (1 + \gamma)$. Следовательно, $j = i + \gamma + i\gamma$.

Пример. Кредит в 300000 рублей выдается на 2 года. Прогнозируемый уровень инфляции на этот период 8% в год. Проценты сложные. Какую процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 10% годовых. Определите наращенную сумму долга.

Решение: $PV = 300000 \text{ руб.}; n = 2 \text{ года}; \gamma = 0,08; i = 0,1$.

$$j = i + \gamma + i \cdot \gamma = 0,1 + 0,08 + 0,1 \cdot 0,08 = 0,188;$$

Следовательно, для того чтобы обеспечить требуемый уровень доходности, банк должен назначить процентную ставку 18,8%.

В этом случае сумма долга с процентами может быть определена таким образом:

$$FV = 300000(1 + 0,188)^2 = 423403,2 \text{ рубля.}$$

Дисконт банка при этом составит 123403,2 рубля.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое эффективные ставки процентов?
2. Какими показателями характеризуется инфляция?
3. К каким методам прибегают владельцы денег для компенсации потерь от снижения их покупательной способности?
4. Определение инфляционной премии: при начислении простых процентов; при начислении сложных процентов.
5. Сущность брутто-ставки и методы ее определения.

Задание для самостоятельной работы студента

1. Ссуда в размере 6,5 млн. рублей выдана под простые проценты на 3 года, с условием возвратить в конце срока 10,5 млн. руб. Определить доходность этой операции на основе простой и сложной процентных ставок.
2. Ссуда 500 тыс. рублей выдана на 180 дней под 18% годовых. Проценты простые обыкновенные. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 3 тыс. рублей. Определить полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки.
3. Два вклада в размере 350000 руб. были размещены на три года под 19% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 25%. Определите реальные наращенные суммы по

каждому из вкладов.

4. Первоначальная сумма вклада составляет 10000 руб. Вклад размещен на 5 лет под 5 % годовых. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 8%. Требуется определить наращенную сумму денег с учетом инфляции.

5. Кредит в 250000 рублей выдается на 3 года. Прогнозируемый уровень инфляции на этот период 10% в год. Проценты сложные. Какую процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 15% годовых. Определите наращенную сумму долга.

Раздел 6 Финансовые ренты

Ряд следующих друг за другом выплат и поступлений называют *потоками финансовых платежей*.

Финансовые потоки могут быть *регулярными и нерегулярными*.

В *регулярных* финансовых потоках поступление средств осуществляется через одинаковые промежутки времени, например, взносы от погашения кредита, перечисление прибыли и т.п.

Регулярные финансовые потоки называют также *финансовыми рентами* или *аннуитетами*.

Величину каждой отдельной выплаты денег, входящей в состав ренты, называют *членом ренты*.

Рентные платежи производят через равные промежутки времени. Эти временные интервалы между двумя платежами называют *периодом ренты*.

Время, измеренное от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода называется *сроком ренты*.

Процентная ставка представляет собой ставку, используемую при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Виды финансовых рент

В зависимости от размера платежа различают ренты *постоянные* и *переменные*.

По времени осуществления платежи могут производиться в начале процентного периода. Такая рента называется *пренумерандо*.

Если платежи осуществляются в конце процентного периода, то рента называется *постнумерандо*.

Исходя из продолжительности периода, существуют годовые, полугодовые, ежемесячные, *р-срочные*, платежи.

Регулярные финансовые потоки могут быть *безусловными* и *условными*.

Последние выплачиваются после поступления какого-либо события.

Различают также ренты *немедленные*, действие которых начинается сразу после заключенного договора, и *отложенные*, платежи по которым производятся по истечении некоторого оговоренного периода.

Определение наращенной стоимости годовой финансовой ренты

Пусть задан регулярный финансовый поток *постнумерандо*. Суммарный годовой платеж обозначим R . Предположим, что начисление процентов и осуществление платежей производится один раз в год. Нарощенные отдельные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $(1+i)$, где i - процентная ставка.

Определим наращенную стоимость ренты FV_f , как сумму геометрической прогрессии:

$$FV_f = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad (6.1)$$

Выражение $f_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ называют коэффициентом или множителем наращения финансовой ренты. Он представляет собой стоимость регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице к моменту окончания всех платежей.

Рассмотрим финансовую ренту *пренумерандо*, т.е. платежи осуществляются вначале каждого периода. Следовательно, число раз наращения каждого платежа на один раз больше, что дает увеличение каждого платежа в $(1+i)$ раз. Поэтому множитель наращения будет выглядеть следующим образом:

$$f_{(n,i)} \cdot (1+i),$$

следовательно, в этом случае

$$FV_f = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \quad (6.2)$$

Пример. В течение 4 лет ежегодно в конце года на специальный счет поступает 50 тыс. руб. Определить наращенную стоимость начисления сложных процентов по ставке 10%.

Решение:

Рента *постнумерандо*; $R = 50$ тыс. руб., $n = 4$, $i = 0,1$

$$FV_f = 50 \cdot \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1} = 50 \cdot \frac{0,4641}{0,1} = 232,05 \text{ тыс. руб.}$$

Пример. Создается целевой фонд для обеспечения инвестиций в сумме 10 млн. руб. сроком на 5 лет, процентная ставка 20%. Определить ежегодные платежи *пренумерандо*.

Решение: $FV_f^{pre} = 10 \text{ млн. руб.}; n = 5; i = 0,2$. Найти R .

$$FV_f^{pre} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i); \quad 10 = R \cdot \frac{1,2^5 - 1}{0,2} \cdot 1,2;$$

$$10 = R \frac{1,48832}{0,2} \cdot 1,2; 2 \quad 10 = R \cdot 8,93; \quad R = \frac{10}{8,93} = 1,1198 \text{ млн.руб.}$$

Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Рассмотрим случай, капитализация процентов осуществляется чаще, чем один раз в год.

Предположим, проценты начисляются m раз в год. В этом случае их каждый раз начисляют по ставке $\frac{i}{m}$, где i - номинальная ставка процентов.

Срок ренты n лет.

Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$.

Наращенная сумма такой ренты определяется по формуле:

$$FV_f = R \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}, \quad (6.3)$$

где R- размер годового платежа.

Пример. На банковский счет ежегодно в конце года поступает 10 000 рублей в течение 7 лет. На эти средства ежеквартально начисляют проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определить, какая сумма будет на банковском счете к концу срока.

Решение: $R=10\,000$ руб.; $m = 4$ раза в год; $n = 7$ лет; $i = 0,15$.

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} = 10000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \cdot 7} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} = 10000 \cdot 11,366392 = 113663,92 \text{ руб.}$$

Наращенная величина р-срочной ренты

Предположим, что вложение средств и капитализация процентов осуществляются чаще, чем один раз в год.

Пусть R- размер годового платежа;

n - срок финансовой операции (лет);

i - годовая процентная ставка;

p – число платежей в год;

m – количество начислений процентов.

Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию

с первым членом $\frac{R}{p}$ и знаменателем прогрессии $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$.

Количество членов ренты равно $p \cdot n$. Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad (6.3)$$

Для ренты пренумерандо:
$$FV_f^{pre} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) \quad (6.4)$$

Пример. Страховая компания принимает платежи по полугодиям равными частями по 250 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты ежеквартально из расчета 10% годовых. Определить, какую сумму получит страховая компания по истечению срока договора.

Решение: $\frac{R}{p} = 250$ тыс. руб., $R = 500$ тыс. руб.; $i = 0,1$; $p = 2$ раза; $m = 4$ раза; $n = 3$ года.

$$FV_f = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 250 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1} =$$

$$250 \cdot \frac{0,344}{0,0506} = 250 \cdot 6,798 = 1699,5 \text{ тыс.руб.}$$

Пример. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд средств. В фонд поступают платежи в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 4 млн. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5% годовых.

Найти величину фонда на конец срока, если

1) Проценты начисляются, и платежи выплачиваются один раз в год. $m = p = 1$

$R = 4$ млн.руб.; $i = 18,5\%$ годовых; $n = 5$ лет.

$$FV_f = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 4 \cdot \frac{(1+0,185)^5 - 1}{0,185} = 4 \cdot \frac{1,3366}{0,185} = 28,90 \text{ млн. руб.}$$

2) Проценты начисляются поквартально, платежи осуществляются один раз в год ($m=4$, $p=1$),

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 4 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^4 - 1} = 4 \cdot \frac{1,4701}{0,1982} = 29,669 \text{ млн. руб.}$$

Переход от годового начисления процентов к поквартальному несколько увеличил наращенную сумму.

3) Допустим, проценты начисляются раз в год, платежи выплачиваются поквартально. ($m=1$, $p=4$);

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{(1+0,185)^{1 \cdot 5} - 1}{(1+0,185)^{\frac{1}{4}} - 1} = 4 \cdot \frac{1,3366}{0,04335} = 30,833 \text{ млн. руб.}$$

4) Пусть платежи и начисление процентов производятся поквартально. ($m=p=4$);

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^1 - 1} = 1 \cdot \frac{1,4701}{0,04625} = 31,786 \text{ млн. руб.}$$

5) Пусть платежи производятся поквартально, а начисление процентов производится ежемесячно ($m=12$, $p=4$).

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = 1 \cdot \frac{1,054167^{60} - 1}{1,054167^3 - 1} = \frac{1,504132}{0,046967} = 32,025 \text{ млн. руб.}$$

Определение современной стоимости годовой ренты

Под современной стоимостью регулярных финансовых потоков понимают сумму всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.

Дисконтированные отдельные платежи $\frac{R}{1+i}; \frac{R}{(1+i)^2}; \frac{R}{(1+i)^3}; \dots; \frac{R}{(1+i)^n}$

представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{R}{1+i}$ и

знаменателем $\frac{1}{1+i}$. Ее сумма имеет вид:

$$PV_f^{post} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \quad (6.5)$$

Величина $\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ называется *коэффициентом современной стоимости срочного аннуитета* или *коэффициентом приведения годовой ренты* и характеризует современную величину обычного регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице.

Каждый член полученной геометрической прогрессии в $(1+i)$ раз больше, чем в случае с рентой постнумерандо, следовательно:

$$PV_f^{pre} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \quad (6.6)$$

Пример. В начале первого периода фирме предложено вложить 8 млн. руб. Доходы от инвестирования ожидаются в конце четырех последующих периодов по 2,2 млн. руб. Определить чистую приведенную стоимость, исходя из ставки сравнения 10% за период.

Решение:

Поскольку деньги имеют различную ценность в разные моменты времени, приведем все суммы к началу первого периода. Определим приведенную стоимость финансовой ренты постнумерандо, состоящей из четырех выплат по 2,2 млн. рублей ($R=2,2$ млн. руб.; $i=0,1$; $n=4$ года):

$$PV_f = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2,2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^4}}{0,1} = 2,2 \cdot 3,1699 = 6,974 \text{ млн. руб.}$$

Общая сумма приведенных поступлений на начало финансовой операции равна - $8 + 6,974 = -1,026$ млн. рублей. < 0 .

Следовательно, если поступления от инвестирования ограничиваются указанными, то проект убыточен.

Определение современной стоимости годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Начисление процентов производится m раз в год, то есть за весь срок ренты $m \cdot n$ раз. Годовой платеж равен R . Для определения современной стоимости ренты определим дисконтные множители каждого платежа:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}; \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{2m}}; \dots; \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

Современная стоимость ренты может быть определена, как сумма геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$ и знаменателем

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}.$$

Следовательно:
$$PV_f = \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} - 1}{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} - 1} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^m} \quad (6.7)$$

Пример. В течение семи лет ежегодно в конце года в фонд поступают по 10000 рублей. На них ежеквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определите современную стоимость фонда.

Решение: $R=10\,000$ руб.; $i=0,15$; $m=12$; $n=7$.

$$PV_f = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^m} = 10000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4 \cdot 7} - 1}{1 - \left(1+\frac{0,15}{4}\right)^4} =$$

$$10000 \cdot 4,054672 = 40546,72 \text{ руб.}$$

Определение современной стоимости р-срочной ренты с начислением процентов m в раз в год

Предположим, что начисление процентов производится m раз в год в течение n лет по номинальной ставке i . Каждый раз проценты начисляются по ставке $\frac{i}{m}$. Количество начислений — mn .

В общем случае современная стоимость финансовой ренты может быть определена по формуле

$$PV_f = \frac{FV_f}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{R}{p} \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} : \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \quad (6.8)$$

Пример. Ежеквартально в течение 2 лет на специальный счет поступает 100 тыс. руб. Определить современную стоимость финансовой ренты, если проценты по ставке 12% годовых начисляются ежемесячно.

Решение: $\frac{R}{p} = 100$ тыс. руб.; $p = 4$; $i = 0,12$; $n = 2$; $m = 12$.

$$PV_f = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 100000 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{-2 \cdot 12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = 100000 \cdot \frac{0,212434}{0,030301} = 701079,17 \text{ руб.}$$

Т.о., современная стоимость данной финансовой ренты 701 079 руб.

Определение параметров ренты

Постоянная рента описывается набором основных параметров R , n, i , и дополнительными параметрами p и m . Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик FV_f и PV_f и два основных параметра. В этом случае возникает необходимость определить значение недостающего параметра.

а) Определение члена ренты

Задается FV_f или PV_f и набор параметров, кроме R . Необходимо определить значение R .

Пример. Определите ежегодный платеж для создания целевого фонда для погашения задолженности в сумме 100 тыс. рублей через 5 лет. Процентная ставка равна 20%.

Решение: $FV_f = 100000$ руб.; $n = 5$ лет; $i = 0,2$.

$$FV_f^{post} = 100000 \text{ руб.}; \quad \text{или} \quad R \cdot \frac{(1 + 0,2)^5 - 1}{0,2} = 100000;$$

$$\text{Поскольку } \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = \frac{(1 + 0,2)^5 - 1}{0,2} = \frac{1,48832}{0,2} = 7,4416, \text{ то}$$

$$R \cdot 7,4416 = 100000, \text{ отсюда находим: } R = \frac{100000}{7,4416} = 13 \text{ тыс. } 438 \text{ руб.}$$

б) Определение срока ренты.

Иногда при разработке условий контракта возникает необходимость определения срока ренты, если известны ее остальные параметры.

Пример. Какой срок необходим для накопления 100 тыс. руб. при условии, что ежемесячно вносится по 1 тыс. руб., и на ежемесячные вложения начисляются проценты по ставке 24 % годовых.

Решение:

$$\frac{R}{p} = 1000 \text{ руб.}; p = 12; \text{ следовательно } R = 12000 \text{ руб.}; m = 12; i = 0,24.$$

Вспользуемся формулой:
$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Получим следующее уравнение:
$$100000 = 1000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12n} - 1}{\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{\frac{12}{12}} - 1}.$$

Разрешим его относительно n :

$$1,02^{12n} - 1 = 100 \cdot 0,02;$$

$$1,02^{12n} = 2 + 1; \quad \text{или} \quad 1,02^{12n} = 3;$$

$$12n \cdot \ln 1,02 = \ln 3;$$

$$n = \frac{\ln 3}{12 \cdot \ln 1,02} = \frac{1,0986}{12 \cdot 0,0198} = 4,6 \text{ года.}$$

Переменные финансовые ренты

Наряду с постоянными рентами, в последние годы, в финансовой практике часто встречаются ренты, параметры которых изменяются во времени. Такие ренты носят название переменных во времени.

Суть расчета в этом случае сводится к тому, что, если процесс изменения переменной ренты носит не систематический характер, и соответственно его нельзя описать аналитически, то величину будущей и современной стоимостей таких потоков следует определять прямым счетом, наращивая и дисконтируя к требуемому моменту времени отдельные платежи и затем суммируя полученные величины.

В общем случае современную стоимость финансовой ренты постнумерандо можно представить таким образом:

$$PV_f^{post} = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^k}$$

Здесь R_k ожидаемые поступления в момент времени k ; n - временной горизонт.

Расчет современной стоимости регулярных финансовых потоков используют при выборе наилучшего варианта инвестирования и возврата долга.

Пример. Имеется переменный финансовый поток постнумерандо 20,12,8,45,30 (тыс. руб.). Рассчитайте приведенную стоимость финансового потока, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 25% годовых, т.е. равен одному году. Как изменяется оценка финансового потока, если он представляет собой поток пренумерандо?

Решение: $n = 5$; $R_1 = 20$; $R_2 = 12$; $R_3 = 8$; $R_4 = 45$; $R_5 = 30$ тыс.руб.

$$PV_f^{post} = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} + \frac{R_4}{(1+i)^4} + \frac{R_5}{(1+i)^5} =$$

$$\frac{20}{1,25} + \frac{12}{1,25^2} + \frac{8}{1,25^3} + \frac{45}{1,25^4} + \frac{30}{1,25^5} =$$

$$= 56,039 \text{ тыс.руб.}$$

Для определения стоимости финансового потока пренумерандо необходимо умножить полученный результат на $1+i = 1+0,25 = 1,25$.

$$PV_f^{pre} = PV_f^{post} \cdot (1+i) = 56,039 \cdot 1,25 = 70,049 \text{ тыс.руб.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Сущность финансовой ренты.
2. Какими параметрами характеризуется финансовая рента.
3. Какие виды финансовых рент вы знаете? Коротко раскройте их сущность.
4. Назовите обобщающие характеристики финансовых рент и укажите способы их определения.
5. Укажите сущность величин, входящих в формулы для определения: наращенной величины постоянной финансовой ренты с выплатами в конце каждого года; современной величины годовой обычной ренты.
6. Модификация формул финансовых рент с выплатами несколько раз в год.
7. Определение члены ренты: при заданном значении наращенной суммы; при заданном значении современной величины.

Задание для самостоятельной работы студента

1. Найти наращенную сумму годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

2. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока.
3. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.
4. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти современную стоимость инвестиций.
5. Найти современную стоимость годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.
6. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, который будет накоплен к концу пятилетнего срока.
7. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, накопленного к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.
8. Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения долга через 3 года в размере 1 млн. руб., если ставка сложных процентов 17% годовых.
9. Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения в течение 3 лет текущего долга в размере 1 млн. руб., если ставка сложных процентов 17% годовых.

Раздел 7 Кредитные расчеты

При изучении этой темы обратите внимание, что долг может погашаться разными способами, в зависимости, от выбора которых сумма выплачиваемых процентов (стоимость кредита) будет различной. При погашении единовременным платежом для определения суммы долга с начисленными процентами можно использовать приведенные выше формулы для наращенной суммы.

Планирование погашения задолженности

Одним из практических приложений финансовой математики является разработка плана погашения средне- и долгосрочных кредитов.

К среднесрочным, как правило, относят кредиты, выданные на срок от 2 до 5 лет. Кредиты, выданные на более длительный срок, являются долгосрочными.

Расходы, связанные с погашением займа, должны включать как текущие выплаты процентов, так и средства, предназначенные для погашения суммы

займа, или основного долга. В совокупности они называются расходами заемщика по обслуживанию долга или амортизацией займа.

В соответствии с условиями контракта составляется *план погашения задолженности*. Одним из важнейших элементов плана является определение количества выплат в течение года, т.е. определение числа так называемых срочных уплат и их величины.

Срочные уплаты рассматриваются как средства, предназначение для погашения, как основного долга, так и текущих процентных платежей. При этом средства, направляемые на погашение (амортизацию) основного долга, могут быть равными или изменяющимися, а плата за кредит, вычисленная по сложным процентам, может выплачиваться отдельно. Иногда в течение ряда лет выплачиваются только проценты за кредит, а сам долг погашается в оставшееся время в рассрочку, т.е. несколькими платежами, или разовым платежом.

Погашение кредита может также производиться в виде финансовой ренты, т.е. платежами, вносимыми через равные промежутки времени и содержащими как выплату основного долга, так и процентный платеж за пользование кредитом. Величина срочных уплат зависит от величины кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и т.п. Однако, как правило, проценты за кредит должны выплачиваться и в льготном периоде. Рассмотрим некоторые методы разработки планов погашения кредитов.

Потребительский кредит. Погашение основного долга равными выплатами

Потребительский кредит предоставляется для покупки предметов личного потребления. Существуют различные формы потребительского кредита, отличающиеся друг от друга методами и сроками его погашения. Так, например, кредит может быть предоставлен с отсрочкой платежа и последующим разовым погашением всей суммы. Другой метод предусматривает погашение платежа в рассрочку, частями.

Если кредит, выданный потребителю, будет погашен равными выплатами, то наращенная сумма долга будет определяться по формуле: $FV = PV(1 + in)$. Сумму разового погасительного платежа, если платеж осуществляется m раз в году, можно определить по формуле: $R = \frac{FV}{mn}$.

Пример. Холодильник ценой 8 тыс. руб. продается в кредит на два года под 10 % годовых. Погасительные платежи вносятся ежемесячно. Определить размер разового платежа.

Решение: $PV = 8000$ руб.; $n = 2$ года; $m = 12$ раз; $i = 0,1$.

Сумма, подлежащая погашению за весь срок кредита:

$$FV = 8000(1 + 2 \cdot 0,1) = 9600 \text{ руб.}$$

Разовый платеж: $R = \frac{9600}{12 \cdot 2} = 400 \text{ руб.}$

Погашение потребительского кредита изменяющимися суммами - правило «78»

При погашении кредита иногда возникает необходимость определить сумму, идущую на погашение основного долга, и суммы процентных платежей. Такая ситуация возможна, например, при досрочном погашении долга. Для решения этого вопроса можно воспользоваться правилом «78».

Для того чтобы объяснить происхождение названия этого правила, рассмотрим следующий пример:

Кредит предоставлен на 1 год с ежемесячным погашением. Сумма порядковых номеров месяцев года равна: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$. В соответствии с этим правилом уплата при первом платеже составит величину $12/78$ общей начисляемой суммы процентов, а оставшуюся часть платежа пойдет на уплату основного долга. При втором платеже: на оплату процентов идет $11/78$ общей суммы начисления процентов, а оставшаяся часть погашает основной долг и т.д.

В общем случае знаменатель этих дробей можно определить по формуле: $N = \frac{1+k}{2} \cdot k$, где k – количество платежей в году.

После определения знаменателя, составляют следующую последовательность дробей: $\frac{k}{N}; \frac{k-1}{N}; \frac{k-2}{N}; \dots; \frac{1}{N}$. Величина каждой из этих дробей, в сумме составляющих единицу, показывает какая часть общей начисляемой суммы процентов идет на уплату процентов. Оставшаяся часть платежа идет на погашение основного долга.

Схема с убывающей величиной процентной платы соответствует логике ссудно-заемных операций. Поскольку с течением времени сумма основного долга снижается, то и сумма процентов, начисляемых на непогашенный остаток долга, должна снижаться. Эта схема страхует кредитора на случай досрочного погашения долга, если эта возможность предусмотрена кредитным договором. При досрочном погашении долга заемщик понесет определенный убыток, т.к. большая часть процентов он уже заплатил в начале срока кредитования.

Пример. Кредит в сумме 15000 рублей выдан на 2 года под 20% годовых. Проценты простые. Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

Решение: $PV = 15000 \text{ руб.}; n = 2 \text{ года}; t = 12 \text{ раз}; i = 0,2$.

Наращенная сумма долга в конце периода составит $FV = 15000(1 + 0,2 \cdot 20) = 21000 \text{ руб.}$

Сумма начисленных процентов $D = 21\,000 - 15\,000 = 6\,000 \text{ рублей}$.
Количество платежей в году - 12, следовательно, за весь рассматриваемый

период количество платежей $k = 12 \cdot 2 = 24$. Определим значение знаменателя $N = \frac{1+k}{2} \cdot k = \frac{1+24}{2} \cdot 24 = 300$.

Определим величину разового платежа: $R = \frac{FV}{mn} = \frac{21000}{24} = 875$ рублей.

В соответствии с правилом «78» уплата при первом платеже составит величину $24/300$ общей начисляемой суммы процентов (6 000 рублей). Оставшаяся часть платежа пойдет на уплату основного долга. При втором платеже на оплату процентов пойдет $23/300$ общей суммы начисленных процентов, а оставшаяся часть будет направлена на погашение основного долга и т.д.

В соответствие с этим получим следующий план погашения долга:

(руб.)

Остаток основного долга на начало месяца	$\frac{k}{N}$	Сумма погашения процентных платежей	Сумма погашения основного долга
1	2	3	4
15000	24/300	480	395
14605	23/300	460	415
14190	22/300	440	435
13755	21/300	420	455
13300	20/300	400	475
12825	19/300	380	495
12330	18/300	360	515
11815	17/300	340	535
11280	16/300	320	555
10725	15/300	300	575
10150	14/300	280	595
9555	13/300	260	615
8940	12/300	240	635
8305	11/300	220	655
7650	10/300	200	675
6975	9/300	180	695
6280	8/300	160	715
5565	7/300	140	735
4830	6/300	120	755
4075	5/300	100	775
3300	4/300	80	795
2505	3/300	60	815
1	2	3	4
1690	2/300	40	835
855	1/300	20	855
Σ	1,000	6000	15000

Погашение займа одним платежом в конце срока

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n -го года его наращенная величина составит $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Пример. Заем величиной 20000 руб. был выдан на 8 лет под 10% годовых. Долг с процентами должен быть погашен одним платежом в конце срока займа. Определить размер этого платежа.

Решение: $D = 20000$ руб.; $n = 8$ лет; $i = 0,1$.

Величина долга с процентами составит:

$$D(1+i)^n = 20000(1+0,1)^8 = 20000 \cdot 2,14359 = 42871,8 \text{ руб.}$$

Погашение основного долга одним платежом в конце срока

Расходы заемщика по обслуживанию долга состоят из основного долга, равного самому займу, и процентных денег – платы за пользование кредитом. Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. За первый год процентные деньги составят iD . Если их выплатить в конце года, то останется только долг в размере D .

Если выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги iD , то сумма долга останется постоянной в течение всего срока ссуды. В конце n -го последнего года выплаты составят величину $iD + D$ – процентные деньги за последний год и основной долг.

Пример. Заем величиной 100000 руб. был выдан на 3 года под 15% годовых сложных процентов. Составить схему погашения основного долга, если в течение рассматриваемого срока выплачиваются процентные деньги iD , а в конце периода – процентные деньги и основной долг $iD + D$.

Решение: $D = 100000$ руб.; $n = 3$ года; $i = 0,15$.

Определим процентные деньги за использование суммы в 100000 руб. в течение года: $iD = 0,15 \cdot 100000 = 15000$ руб.

Составим схему погашения долга:

конец 1 года – 15000 руб.;

конец 2 года – 15000 руб.;

конец 3 года – $15000 + 100000 = 115000$ руб.

Погашение основного долга равными выплатами

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе выплаты долга в конце каждого года выплачивается n -я доля основного долга, т.е. величина $\frac{D}{n}$. В конце первого года, кроме того платятся проценты с суммы D , которой пользовались в течение этого года, т.е. iD . Весь платеж в конце первого года равен:

$$R_1 = \frac{D}{n} + iD;$$

Основной долг при этом уменьшится на $\frac{D}{n}$ и составит $D - \frac{D}{n}$.

В конце 2-го года выплата составит $R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n}\right)$ и т.д.

Пример. Заем величиной 5000 \$ выдан на 5 лет под сложные проценты 10% годовых. Составим план погашения задолженности с условием, что основной долг гасится равными выплатами.

Решение: $D = 5000\$$; $n = 5 \text{ лет}$; $i = 0,1$.

Основной долг гасится равными выплатами: $\frac{D}{n} = \frac{5000}{5} = 1000\$$.

Процентные деньги за первый год составят $5000 \cdot 0,1 = 500\$$. Таким образом, в конце первого года должник выплатит 1500\$ (1000+500).

На начало второго года основной долг уменьшится на 1000\$ и составит 4000\$. Следовательно, процентные деньги за второй год составят $4000 \cdot 0,1 = 400\$$. Вместе с суммой, направленной на погашение основного долга, это составит 1400 \$, и т. д.

Таким образом, схема погашения долга следующая:

5000	4000	3000	2000	1000	0
0	1	2	3	4	5
	1000	1000	1000	1000	1000
	+	+	+	+	+
	500	400	300	200	100
	=	=	=	=	=
	1500	1400	1300	1200	1100

Погашение займа равными годовыми выплатами

Пусть заем выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого периода выплачивается одинаковая сумма R .

Выплаты R можно рассматривать как годовую ренту длительностью n лет с годовым платежом R . Приравняем современную величину этой ренты величине займа. Тогда

$$D = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}, \quad (7.1)$$

где $\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ - коэффициент приведения ренты.

Отсюда определим величину годового платежа: $R = \frac{Di}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$ (7.2)

Пример. Заем 5000 \$ выдан на 5 лет под сложные проценты 10% годовых.

Найдите величину годового платежа, если долг должен быть погашен равными годовыми выплатами.

Решение: $D = 5000\$; n = 5 \text{ лет}; i = 0,1$.

$$R = \frac{5000 \cdot 0,1}{1 - \frac{1}{1,1^5}} = \frac{500}{1 - \frac{1}{1,61051}} = \frac{500}{1 - 0,6209} = \frac{500}{0,3779} = 1323 \text{ долл.}$$

Погашение займа равными выплатами несколько раз в год

Пусть выплаты размером y производятся m раз в году в течение n лет. Тогда количество выплат составит $m \cdot n$. На эти выплаты начисляют проценты m раз в году по ставке $\frac{i}{m}$. Выплаты образуют ренту. Ее наращенная величина может быть определена по формуле:

$$FV_f = Y \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{i}{m}}$$

Пусть D - размер займа. Наращенная величина займа к концу срока составит:

$$D \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Составим уравнение эквивалентности, приравняв приведенные к концу срока финансовой операции величины займа и ренты:

$$D \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = Y \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{i}{m}}.$$

Из этого равенства определим размер выплаты Y .

$$Y = \frac{D \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \cdot \frac{i}{m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}; \quad (7.3)$$

Пример. Заем в 10000 \$ выдан на 3 года под 12 сложных годовых процентов. Выплаты производятся

а) ежеквартально ($m = 4$)

б) ежемесячно ($m = 12$)

Найти величину разовой выплаты.

Решение: $D = 10000\$$; $n = 3 \text{ года}$; $i = 0,12$.

а) $m = 4$.

$$Y = \frac{10000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{3 \cdot 4} \cdot \frac{0,12}{4}}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{12} - 1} = \frac{10000 \cdot 1,4258 \cdot 0,03}{1,4258 - 1} = 1004,56 \text{ долл.}$$

б) $m = 12$.

$$Y = \frac{10000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{3 \cdot 12} \cdot \frac{0,12}{12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{36} - 1} = \frac{10000 \cdot 1,4308 \cdot 0,01}{1,4308 - 1} = 332,13\$.$$

Пример. Заем в 500 000 руб. выданный на 5 лет под 10% сложных годовых, должен быть погашен ежеквартальными выплатами. Найти величину разовой выплаты.

Решение: $D = 500000 \text{ руб.}$; $n = 5 \text{ лет}$; $m = 4$; $i = 0,1$.

$$Y = \frac{500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 5} \cdot \frac{0,1}{4}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{20} - 1} = \frac{500000 \cdot 1,6386 \cdot 0,025}{1,6386 - 1} = 32074,07\$.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют способы погашения долга и в чем их различие?
2. Сущность и методика прогрессивного погашения.
3. Что такое план погашения долга и как он составляется?
4. Особенность потребительского кредита и финансовый смысл начисления процентов "методом 78".

5. Какой кредит называется потребительским? Приведите примеры.
6. Какие способы погашения потребительского кредита Вы знаете?
7. При каком способе погашения кредита фактическая процентная ставка оказывается больше ставки, предусмотренной при оформлении кредита?
8. Почему так происходит?
9. Что называется стоимостью кредита?
10. Почему банки заинтересованы в том, чтобы должник погашал сумму долга частями в течение данного ему срока, а не в конце его?
11. Почему способ погашения, учитывающий, что долг с течением времени уменьшается, выгоден клиенту, взявшему кредит?

Задание для самостоятельной работы студента

1. Предприниматель получил на полтора года кредит в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за полтора года. Чему равен индекс роста суммы кредита?
2. Известно, что капитал, помещенный в банк, вырос за первый год в 1,4 раза, а за второй год вся сумма увеличилась в 1,2 раза. Определите индекс роста вклада и процентную ставку за два года. На сколько процентов увеличился капитал за все время?
3. Имеется два варианта вложения капитала на 3 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 15%, за второй год вся сумма увеличится на 35%, а за третий год - еще на 10%. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 20% от суммы предыдущего года. Какой вариант лучше?
4. Определите доходность в виде процентной ставки за предоставление потребительского кредита на следующих условиях: 45% стоимости покупок оплачивается сразу, а через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 10% от стоимости покупок в качестве платы за кредит.
5. Предприятие получило кредит на один год в размере 100 тыс. руб. с условием возврата 160 тыс. руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.
6. Вы поместили в банк вклад 10 тыс. руб. под простую процентную ставку 26% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года? Какова будет величина начисленных процентов? Если банк осуществляет регулярные выплаты начисленных процентов, то какую сумму Вы будете получать: а) каждый год; б) каждый квартал?
7. Предпринимателю 14 февраля была предоставлена ссуда в размере 20 тыс. руб. с погашением 14 июля того же года под процентную ставку 30% годовых. Рассчитайте различными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год невисокосный.
8. Предприниматель 18 апреля обратился в банк за ссудой до 19 ноября того же года под простую процентную ставку 25% годовых. Банк, удержав в момент предоставления ссуды проценты за весь ее срок, выдал предпринимателю 12 тыс. руб. Какую сумму необходимо будет вернуть банку, если при расчете начисленных процентов использовались

обыкновенные проценты с точным числом дней?

9.Предпринимателю необходима сумма в 100 тыс. руб. на 3 месяца. Банк предоставил ему кредит в размере 80% от стоимости залога под 24% годовых и за обслуживание долга взыскал 1% от номинальной суммы кредита. Определите величину залога, если кредит взят 1 февраля и год невисокосный.

10.Товар стоимостью 2,7 тыс. руб. продается в кредит на 3 года под простую процентную ставку 16% годовых с равными ежеквартальными погасительными платежами. Проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Определите долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа.

Раздел 8 Инвестиционный анализ на рынке ценных бумаг

Ценные бумаги классифицируются по ряду признаков. Подробно классификация ценных бумаг рассматривается в курсе «Рынок ценных бумаг». Мы остановимся на наиболее существенных для проведения инвестиционного анализа признаках: функциональное назначение; срок обращения и доход по ценным бумагам.

По функциональному назначению ценные бумаги подразделяются на *долговые, долевыe ценные бумаги и платежные документы*.

К долговым ценным бумагам относятся облигации, депозитные и сберегательные сертификаты, банковские книжки на предъявителя.

К долевым ценным бумагам относятся акции.

К платежным документам относятся векселя и чеки.

Обращение ценных бумаг всегда ограничено временными рамками. Существуют ценные бумаги со сроком обращения до одного года, так называемые краткосрочные ценные бумаги. Ценные бумаги, которые имеют срок обращения от одного до пяти лет, называются среднесрочными, а более пяти лет – долгосрочными.

Доходом по ценным бумагам могут быть процентные выплаты в денежной форме, в виде купонных выплат, дивидендов. Все зависит от того, каков порядок погашения, выплаты дохода, и в какой форме доход заложен в условиях выпуска, обращения и погашения ценных бумаг. Согласно этому признаку классификации ценные бумаги можно представить как процентные с постоянным и переменным доходом, купонные, дисконтные, выигрышные и дивидендные.

Рассмотрим, что представляют собой такие виды ценных бумаг, как облигации, акции и векселя.

Облигация – это кредитная ценная бумага, удостоверяющая внесение средств ее владельцем и подтверждающая право владельца требовать ее погашения (выплату номинальной стоимости или номинальной стоимости и процентов) в установленные сроки. При этом условия и сроки погашения (в том числе досрочного) оговариваются в решении о выпуске облигаций.

Доход по облигациям может быть представлен, как разница между ценой покупки и ценой продажи (погашения). Такой вид дохода называется

дисконтным. Кроме того, доход может быть в виде процентного (купонного) дохода.

Акции – ценные бумаги, выпускаемые акционерным обществом, свидетельствующие о вложении их владельцами определенной суммы денег в капитал акционерного общества и дающие право получать ежегодный доход – дивиденд. Дивиденды выплачиваются из чистой прибыли общества. Акции бывают привилегированные и обыкновенные. Владельцы привилегированных акций получают дивиденды обычно в виде не зависящего от размера прибыли процента, Владельцы обыкновенных акций получают часть прибыли, которая остается после оплаты привилегированных акций. Обыкновенные акции дают возможность участвовать в управлении акционерным обществом и получать интересующую акционера информацию. (Облигации такого права не дают). Владельцы привилегированных акций не имеют права голоса.

Вексель представляет собой разновидность письменного долгового обязательства векселедателя оплатить сумму, указанную на векселе, его владельцу (векселедержателю) при наступлении срока платежа или по его предъявлению.

Инвестор, принимая решение о целесообразности приобретения той или иной ценной бумаги, пытается оценить экономическую эффективность планируемой операции. При этом он ориентируется на абсолютные или на относительные показатели. В первом случае речь может идти о цене или стоимости актива, во втором — о его доходности.

Логика рассуждений инвестора в первом случае такова. Ценная бумага имеет две взаимосвязанные абсолютные характеристики: объявленную текущую рыночную цену (P_m), по которой ее можно приобрести на фондовом рынке, и теоретическую, или внутреннюю, стоимость (V_t).

Обе характеристики динамично меняются во времени, и с позиции конкретного инвестора часто не совпадают. Дело в том, что по сравнению с ценой, которая реально существует и объективна, поскольку она объявлена и ценная бумага по ней равнодоступна любому участнику рынка, внутренняя стоимость гораздо более неопределенна и субъективна. Под субъективностью в данном случае понимается то обстоятельство, что каждый инвестор имеет свой взгляд на внутреннюю стоимость актива, полагаясь в ее оценке на результаты собственного субъективного анализа.

Любая ценная бумага имеет внутренне присущую ей ценность, которая может быть количественно оценена как дисконтированная стоимость будущих поступлений, генерируемых этой бумагой, т.е. при ее оценке нужно двигаться от будущего к настоящему. Все дело лишь в том, насколько точно удастся предсказать эти поступления, анализируя общую ситуацию на рынке, инвестиционную и дивидендную политику компании, инвестиционные возможности и т.п. Текущая внутренняя стоимость (V_t) любой ценной

бумаги в общем виде может быть рассчитана по формуле:

$$V_t = \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_k}{(1+r)^k} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k},$$

Где $P_1; P_2; \dots; P_k; \dots; P_n$ – предполагаемые поступления, r – требуемая данным инвестором норма прибыли, n – период финансовой операции.

Подставляя в эту формулу значения предполагаемых поступлений, требуемую норму доходности и продолжительность периода прогнозирования, можно рассчитать текущую внутреннюю стоимость любого финансового актива. Именно такой подход чаще всего и используется потенциальными инвесторами.

Как видно из формулы оценка теоретической стоимости зависит от трех параметров: ожидаемые денежные поступления, горизонт прогнозирования и норма прибыли, причем последний параметр, вероятно, наиболее существен. Дело в том, что первые два параметра тесно привязаны непосредственно к базисному активу и потому обладают большей степенью объективности. Приемлемая норма прибыли, закладываемая инвестором в анализ, в этом случае в принципе не имеет отношения к базисному активу – она лишь отражает доходность альтернативных вариантов вложения капитала, доступных возможно лишь данному инвестору, что и предопределяет выбор этого параметра. Вот почему именно нормой прибыли обычно варьируют инвесторы в процессе имитационного моделирования. В частности, приемлемая норма прибыли может устанавливаться инвестором такими же способами, как и при определении процентной ставки в множителе дисконтирования: $r = i + r_p$, где i – безрисковая доходность (процентная ставка по банковским депозитам или ставка доходности государственных облигаций), r_p – надбавка за риск.

В качестве относительной оценки финансового актива может служить один из показателей, измеряющих доходность:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n},$$

б) сложная годовая ставка процентов:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

Пример. Облигации с нулевым купоном нарицательной стоимостью 1000 руб. и сроком погашения через пять лет продаются за 560,35 руб. Проанализировать целесообразность приобретения этих облигаций, если имеется возможность альтернативного инвестирования с нормой прибыли 14%.

Решение:

Анализ можно выполнять разными способами.

1 способ. $C = 1000 \text{ тыс. руб.}; r = 0,14; n = 5 \text{ лет.}$

Рассчитать теоретическую стоимость облигации и сравнить ее с текущей ценой:

$$V_t = \frac{1000}{(1 + 0,14)^5} = 1000 \cdot 0,5194 = 519,4 \text{ рублей.}$$

Расчет показывает, что приобретение облигаций является невыгодным вложением капитала, поскольку стоимость каждой облигации с позиции инвестора (519,4 руб.) меньше, чем цена, по которой продается облигация (560,35 руб.).

2 способ. Исчислить доходность данной облигации в виде эффективной годовой процентной ставки, если $FV = 1000 \text{ руб.}$; $PV = 560,35 \text{ руб.}$; $n = 5 \text{ лет}$.

$$i = \sqrt[5]{\frac{1000}{560,35}} - 1 = 0,1228, \text{ или } 12,28\%$$

Поскольку доходность данных облигаций (12,28%) меньше альтернативной (14%), то их приобретение нецелесообразно.

Бессрочная облигация предусматривает неопределенно долгую выплату дохода в установленном размере A . В этом случае имеем вечную ренту

постнумерандо ($P_k = A$ для любого k), и формула $V_t = \sum_k \frac{P_k}{(1+r)^k}$ принимает

вид $V_t = \frac{A}{r}$.

Пример. Определить теоретическую стоимость бессрочной облигации, если выплачиваемый по ней годовой доход составляет 1 тыс. руб., а приемлемая норма прибыли — 16%.

Решение: $A = 1000 \text{ руб.}$; $r = 0,16$.

Теоретическая стоимость бессрочной облигации:

$$V_t = \frac{A}{r} = \frac{1000}{0,16} = 6250 \text{ руб.}$$

Таким образом, в условиях равновесного рынка в данный момент времени облигации такого типа будут продаваться по цене равной 6250 руб. По мере изменения рыночной нормы прибыли цена облигации может меняться.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте основные определения ценных бумаг (акция, облигация, вексель).
2. Как проводится оценка облигаций с нулевым купоном, с фиксированной купонной ставкой?
3. Приведите модели оценки обыкновенных акций.
4. Как можно оценить доходность операций с акциями?
5. Приведите расчет доходности по вексельным операциям.

Задание для самостоятельной работы студента

1. Облигация приобретена по курсовой цене 1200 руб., погашается через пять лет по номиналу 1000 руб. Определим годовую ставку дополнительного дохода.
2. Облигация номиналом 1000 руб. с 5%й купонной ставкой и погашением через 5 лет приобретена на рынке с дисконтом 10%. Определить текущую и конечную доходность бумаги за год и пять лет.
3. Депозитный сертификат номиналом 100 тыс. руб. размещен на 6 месяцев под 50% годовых. Определим доходность бумаги.
4. Шестимесячный депозитный сертификат размещен по номинальной цене 100 тыс. руб. под 40% годовых. Через два месяца текущая рыночная ставка по четырехмесячным долговым обязательствам составила 50%, и владелец решил продать бумагу. Определите доходность сделки.
5. Оценить текущую стоимость облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1 млн. руб. и сроком погашения через 3 года. Ставка дисконта $r = 12\%$.
6. Оценить текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1 млн. руб., с купонной ставкой 16% годовых и сроком погашения 5 лет. Ставка дисконта $r = 10\%$.
7. Оценить текущую стоимость бессрочной облигации, если по ней ежегодно выплачивается доход в размере 100 000 руб.
Ставку дисконта принять равной $r = 10\%$.
8. Определить ориентировочную рыночную стоимость облигации номиналом 100 000 руб. при условии, что срок погашения облигации через 3 года, купонная ставка 10% годовых, ставка банковского процента $i = 4\%$.
9. Определить цену акции нулевого роста при условии, что дивиденды в размере 500 руб. из года в год будут оставаться неизменными, а требуемый уровень доходности - 10%.
10. Акция приобретена по номиналу 1000 руб. при 40% годовых, курсовая цена через год после эмиссии - 2000 руб. Определить конечную доходность бумаги.
11. Акция номиналом 15000 руб. со ставкой дивиденда 25% приобретена по двойному номиналу и продана через год, обеспечив владельцу 0,50 руб. дохода с каждого инвестирования рубля. Определить курс акции в момент продажи.
12. Акция с дивидендной ставкой 35% приобретена по двойному номиналу и продана через год за 17875 руб., обеспечив совокупную доходность 80%. Определить курс акции в момент продажи.
13. Акция номинальной стоимостью 100 руб. приобретена инвестором с коэффициентом 1,4 и продана на третий год после приобретения за 75 дней до даты выплаты дивидендов. За первый год ставка дивиденда равнялась 18%, за второй год - 20%, за третий год - 35%. Индекс динамики цены продажи по отношению к цене приобретения - 1,2. Определите совокупную доходность акции для инвестора.

14. Определите, покупка какой из облигаций наиболее предпочтительна инвестору с точки зрения получения дохода за первый год, если известно, что:

- облигация А со сроком обращения 1 год размещения с дисконтом 40%;
- облигация В со сроком погашения через 3 года и покупной ставкой 50% размещается по номиналу;
- облигация С погашается через 1 год и при купонной ставке 30% имеет рыночную стоимость 80%.

Раздел 9 Финансовые расчеты в инвестиционном анализе

Латинское слово *invest* означает «вкладывать». Вложение денежных средств и других капиталов в реализацию различных экономических проектов или в ценные бумаги с целью получения прибыли, называется *инвестированием*, а сами вкладываемые средства *инвестициями*.

Целью инвестирования является получение прибыли, увеличение капиталов.

Важнейшими задачами анализа инвестиционных проектов является определение их финансовой эффективности и сравнение эффективности альтернативных инвестиционных проектов с целью выбора наилучшего из возможных вариантов инвестирования.

Инвестиционные проекты являются альтернативными, если реализация одного из них исключает возможность реализации другого.

Например, частный инвестор приобретает акции компании «Норильский никель» на сумму 2,5 млн. рублей. В этом случае эти деньги уже не могут быть положены на депозит в Сбербанк.

Следовательно, эти варианты инвестирования денежных средств являются альтернативными.

Для выбора наилучшего варианта инвестирования необходимо провести инвестиционный анализ.

Методы оценки эффективности реальных инвестиций на основе расчета чистого приведенного дохода

Методика определения чистого приведенного дохода NPV (Net Present Value) заключается в суммировании дисконтированных потоков реальных денег в течение расчетного периода времени.

Определяя коэффициент дисконтирования, обычно исходят из гарантированного уровня доходности финансовых инвестиций, который обеспечивается государственным банком по вкладам или при операциях с ценными бумагами.

Часто предусматривается надбавка за риск, причем, чем рискованнее проект, тем больше размер надбавки.

Процентная ставка, используемая в качестве коэффициента дисконтирования имеет вид:

$r = i + gr$, где

i – безрисковая доходность (процентная ставка по банковским депозитам или ставка доходности государственных облигаций),

gr – надбавка за риск.

Рассматриваемый проект может быть признан эффективным, если чистый приведенный доход положителен ($NPV > 0$), значит проект доходный.

При сравнении вариантов осуществления инвестиционных проектов одинаковой продолжительности следует руководствоваться критерием максимума чистого приведенного дохода ($NPV \rightarrow \max$).

Если рассматриваемые варианты различаются продолжительностью расчетного периода, то в качестве ключевого оценочного показателя используется среднегодовой чистый приведенный доход.

Следовательно, выбор наилучшего варианта осуществляется по критерию максимума среднегодового значения NPV .

При однократном инвестировании для оценки NPV производится сопоставление величины исходной инвестиции (IC) с общей суммой дисконтированных чистых денежных поступлений в течение прогнозируемого срока.

Допустим, прогнозируется, что в результате инвестирования средств в объем IC в течение n лет будут поступать годовые доходы в размере P_1, P_2, \dots, P_n . Общая накопленная величина дисконтированных доходов в этом случае определяется по формуле:

$$\frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k},$$

Тогда чистый приведенный доход равен:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC \quad (9.1)$$

Очевидно, что если $NPV > 0$, то проект прибыльный, его следует принять, если $NPV < 0$, то проект убыточный, его следует отвергнуть, если $NPV = 0$, то проект ни прибыльный, ни убыточный.

Пример. Требуется проанализировать проект со следующими характеристиками по годам: - 150; 30; 70; 70; 30 млн. рублей. Требуемая норма доходности по проекту 12%.

Решение:

$IC = 150$ млн. руб.; $P_1 = 30$; $P_2 = 70$; $P_3 = 70$; $P_4 = 30$ млн. руб.; $i = 0,12$.

Определим чистый приведенный доход:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC = \frac{30}{1+0,12} + \frac{70}{(1+0,12)^2} + \frac{70}{(1+0,12)^3} + \frac{30}{(1+0,12)^4} - 150 = 0,93 > 0$$

Поскольку чистый приведенный доход положителен (составляет 930 тысяч рублей), то проект принимается, так как является прибыльным.

Если предполагается не разовое инвестирование финансовых ресурсов, а последовательное в течение m лет в объемах $IC_0; IC_1; \dots; IC_m$, то формула для вычисления NPV будет иметь вид:

$$NPV = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j} \quad (9.2)$$

Пример. Мясокомбинат планирует приобрести новое оборудование. Для этого необходимо подготовить соответствующее помещение. Подготовка займет несколько месяцев. Подготовительные затраты составят 500 тыс. рублей. Оборудование стоимостью 3 млн. рублей, планируют приобрести в конце первого года и затем эксплуатировать в течение 3 лет. Денежный доход от эксплуатации этого оборудования за этот период по годам составит 1 млн. руб.; 1,5 млн. руб. и 2 млн. руб. соответственно. Оцените этот инвестиционный проект, если требуемый уровень доходности составляет 10%.

Решение: Затраты на подготовку помещения могут рассматриваться как прединвестиционные затраты в 0-вом году.

$IC_0 = 0,5 \text{ млн. руб.}; IC_1 = 3 \text{ млн. руб.};$

$P_2 = 1 \text{ млн. руб.}; P_3 = 1,5 \text{ млн. руб.}; P_4 = 2,0 \text{ млн. руб.}$

$$NPV = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j} = \frac{1,0}{(1+0,1)^2} + \frac{1,5}{(1+0,1)^3} + \frac{2,0}{(1+0,1)^4} - \frac{0,5}{(1+0,1)^0} - \frac{3,0}{(1+0,1)^1} = 0,0921 \text{ млн. рублей}$$

Поскольку $NPV = 92,1 \text{ тыс. руб.} > 0$, то проект прибыльный.

В случае если в результате инвестирования определенных средств возникает регулярный финансовый поток (финансовая рента), то для оценки NPV можно использовать теорию финансовых рент.

Пример. Некая фирма собирается за 55 млн. рублей приобрести помещение для магазина. Предполагается, что организация продаж в этом магазине обеспечит приток денежных средств в размере 10 млн. рублей на протяжении 10 предстоящих лет. Стандартный уровень доходности по альтернативным формам инвестирования составляет 9,5%. Решите вопрос о целесообразности приобретения магазина.

Решение: $IC_0 = 55 \text{ млн. руб.}; R = 10 \text{ млн. руб.}; n = 10 \text{ лет}; i = 0,095$.

В результате инвестирования средств в размере 55 млн. рублей образовалась финансовая рента длительностью 10 лет с членом, равным 10 млн. рублей. Найдём современную стоимость этой ренты.

$$PV_f = R \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 10 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,095)^{10}}}{0,095} = 62,7880 \text{ млн.руб.}$$

$$NPV = 62,788 - 55,0 = 7,88 \text{ млн.рублей.}$$

Поскольку $NPV > 0$, то целесообразно приобрести помещение.

Методы оценки эффективности инвестиций на основе индекса рентабельности

Индекс рентабельности инвестиций – это отношение суммарного дисконтированного денежного потока, определённого без учёта инвестиций по проекту, к суммарным дисконтированным инвестициям.

В простейшем случае, когда в результате инвестирования средств в размере IC возникает денежный поток P_1, P_2, \dots, P_n , индекс рентабельности инвестиций рассчитывается по формуле:

$$PI = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : IC \quad (9.3)$$

При неоднократном инвестировании эта формула приобретает вид:

$$PI = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j} \quad (9.4)$$

В отличие от чистого приведённого дохода индекс рентабельности является относительным показателем. Он характеризует уровень доходов на единицу затрат, т.е. эффективность вложений.

Очевидно, что, если $PI > 1$, то проект следует принять. Если $PI < 1$, то проект следует отвергнуть. Если $PI = 1$, то проект не является ни прибыльным, ни убыточным.

Чем больше значение индекса рентабельности, тем выше отдача от каждого рубля, инвестированного в данный проект, благодаря чему критерий PI очень удобен при выборе одного проекта из нескольких альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения NPV , но разные объёмы требуемых инвестиций. Из этих проектов выгоднее тот, который обеспечит большую эффективность вложений.

Пример. Предприятие закупило новую технологическую линию за 1000 тыс. руб. Срок эксплуатации оборудования 6 лет. Денежный доход от использования оборудования по годам составит 250; 300; 350; 400; 450; 500 тыс. руб. соответственно. Рассчитать индекс рентабельности, если норма дисконта составляет 20%.

Решение:

$$IC = 1000; P_1 = 250; P_2 = 300; P_3 = 350; P_4 = 400; P_5 = 450; P_6 = 500; i = 0,2.$$

$$PI = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : IC = \left[\frac{250}{1+0,2} + \frac{300}{(1+0,2)^2} + \frac{350}{(1+0,2)^3} + \frac{400}{(1+0,2)^4} + \frac{450}{(1+0,2)^5} + \frac{500}{(1+0,2)^6} \right] : 1000 =$$

$$= 1160,4 : 1000 = 1,1604.$$

Поскольку индекс рентабельности $PI = 1,1604 > 1$, то проект следует принять.

Методика определения срока окупаемости инвестиций

Срок окупаемости (период возмещения) – это минимальный период времени, в течение которого чистый дисконтированный доход становится положительным. Этот показатель характеризует период времени, в течение которого сделанные инвестором вложения в проект возместится доходами от его реализации.

Формула для расчета дисконтированного срока окупаемости:

$$PP = \min n, \text{ при котором выполняется неравенство: } \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} \geq IC \quad (9.5)$$

Применяются следующие подходы к оценке инвестиционных проектов по критерию срока окупаемости:

- а) проект принимается, если окупаемость имеет место;
- б) проект принимается только в случае, если срок окупаемости не превышает установленного в компании лимита (например, 5 лет).

Пример. Рассчитайте дисконтированный срок окупаемости инвестиционного проекта, характеризующегося по годам следующим денежным потоком:

-250; 100; 150; 160; 100 тысяч рублей. Норма дисконта 11%.

Решение:

Вычисления удобно свести в расчетную таблицу:

(тыс. рублей)				
Годы	Денежный поток	Дисконтный множитель	Дисконтированный денежный поток	Дисконтированный денежный поток нарастающим итогом
0	- 250	1,000	- 250,00	- 250,00
1	100	0,901	90,10	- 159,90
2	150	0,812	121,80	- 38,10
3	160	0,731	116,96	78,86 > 0
4	100	0,659	65,90	

Как видим, инвестиционный проект полностью окупится в течение трех лет.

Для того, чтобы определить более точное значение PP , разделим последнее из отрицательных значений в последнем столбце таблицы на следующее за ним число в предпоследнем столбце: $\frac{38,10}{116,96} = 0,326$.

Таким образом, $PP = 2,326$ года или 2 года и 119 дней.

Определение внутренней нормы доходности инвестиций

Внутренняя норма доходности IRR (international rate of return) - показатель, широко используемый при оценке эффективности инвестиционных проектов.

Реализация любого инвестиционного проекта требует привлечения финансовых ресурсов, за которые необходимо платить. Так за заемные средства платят проценты, за привлеченный акционерный капитал - дивиденды и т.д.

Показатель, характеризующий относительный уровень этих расходов, является ценой за использованный (авансируемый) капитал. При финансировании проекта из различных источников этот показатель определяется по формуле средней арифметической взвешенной.

Чтобы обеспечить доход от инвестированных средств или, по крайней мере, их окупаемость, необходимо добиться такого положения, когда чистая текущая стоимость будет больше нуля или равна нулю.

Для этого необходимо подобрать такую процентную ставку дисконтирования членов потока платежей, которая обеспечит получение неотрицательного чистого приведенного дохода ($NPV \geq 0$).

Такая ставка должна отражать ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке с учетом фактора риска.

Поэтому под внутренней нормой доходности понимают ставку дисконтирования, использование которой обеспечивает равенство текущей стоимости денежных оттоков и текущей стоимости ожидаемых денежных притоков, т.е. при начислении на сумму инвестиций процентов по ставке, равной внутренней норме доходности, обеспечивается получение распределенного по времени дохода.

Показатель внутренней нормы доходности – IRR характеризует максимально допустимый относительный уровень расходов, которые могут быть произведены при реализации данного проекта.

Например, если для реализации проекта получена банковская ссуда, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным.

Таким образом, смысл этого показателя заключается в том, что инвестор должен сравнить полученное значение IRR с ценой привлеченных финансовых ресурсов (cost of capital - CC).

Если $IRR > CC$, то проект следует принять;

$IRR < CC$ – проект следует отвергнуть;

$IRR = CC$ – проект ни прибыльный, ни убыточный.

Практическое применение данного метода сводится к последовательной итерации, с помощью которой находится дисконтирующий множитель, обеспечивающий равенство $NPV=0$.

При этом алгоритм решения следующий.

Ориентируясь на существующие в момент анализа процентные ставки на ссудный капитал, выбирают два значения коэффициента дисконтирования $r_1 < r_2$ таким образом, чтобы в интервале $[r_1, r_2]$ функция $NPV = f(r)$ меняла свое значение с «+» на «-» или наоборот. Затем используют формулу:

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1),$$

где r_1 - значение процентной ставки в дисконтном множителе, при котором $f(r_1) > 0$ ($f(r_1) < 0$);

r_2 - значение процентной ставки в дисконтном множителе, при котором $f(r_2) < 0$ ($f(r_2) > 0$).

Точность вычислений обратно пропорциональна длине интервала $[r_1, r_2]$. Наиболее точный результат достигается в случае, когда длина интервала минимальна, т.е. когда r_1 и r_2 - ближайшие друг к другу значения коэффициента дисконтирования, в случае изменения знака NPV с «+» на «-» удовлетворяющие условиям:

r_1 - значение коэффициента дисконтирования, минимизирующее положительное значение NPV , т.е. $NPV(r_1) = \min\{NPV(r) > 0\}$;

r_2 - значение коэффициента дисконтирования, максимизирующее отрицательное значение показателя NPV , т.е. $NPV(r_2) = \max\{NPV(r) < 0\}$ в случае изменения знака NPV с «+» на «-»).

Пример. Определить значение внутренней нормы доходности IRR для проекта, рассчитанного на 3 года, требующего инвестиции в размере 20 млн. руб. и имеющего предполагаемые денежные поступления в размере 6 млн. руб. (первый-год), 8 млн.руб. (второй год) и 14 млн.руб. (третий год).

Решение: Возьмем два произвольных значения процентной ставки для коэффициента дисконтирования $r_1 = 15\%$ и $r_2 = 20\%$.

Соответствующие расчеты сведем в таблицу:

Год	Денежный поток	Расчет I		Расчет II	
		Дисконтный множитель для $r_1 = 15\%$	$NPV(r_1)$	Дисконтный множитель для $r_2 = 20\%$	$NPV(r_2)$
0-й	-20,0	1,0	-20,0	1,0	-20,0
1-й	6,0	0,8696	5,2176	0,8333	4,9998
2-й	8,0	0,7561	6,0488	0,6944	5,5552
3-й	14,0	0,6575	9,2050	0,5787	8,1018
Σ			+0,4714		-1,3432

Для расчета IRR применим формулу:

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1) = 15 + \frac{0,4714}{0,4714 - (-1,3432)}(20 - 15) =$$

$$= 15 + \frac{0,4714}{1,8146} \cdot 5 = 15 + 1,30 = 16,3\%$$

Уточним величину ставки. Для этого примем значения процентных ставок, равными $r_1=16\%$ и $r_2=17\%$, т.к. $16,3 \in (16, 17)$.

Произведем новый расчет.

Год	Денежный поток	Расчет I		Расчет II	
		Дисконтный множитель для $r_1=16\%$	$NPV(r_1)$	Дисконтный множитель для $r_2=17\%$	$NPV(r_2)$
0-й	-20,0	1,0	-20,0	1,0	-20,0
1-й	6,0	0,8662	5,1972	0,8547	5,1282
2-й	8,0	0,7432	5,9200	0,7305	5,8440
3-й	14,0	0,6407	8,9698	0,6244	8,7416
Σ			+0,0870		-0,2862

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1) = 16 + \frac{0,0870}{0,0870 - (-0,2862)}(17 - 16) =$$

$$= 16 + \frac{0,0870}{0,3732} \cdot 1 = 16 + 0,23 = 16,23\%$$

Таким образом, $IRR=16,23$ является верхним пределом процентной ставки, по которой фирма может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта. Для получения прибыли фирма должна брать кредит по ставке менее 16,23%.

Пример. Определить экономическую целесообразность проекта, характеризующегося денежным потоком: -130; 60;60;60;60, заданным в прогнозных ценах, при следующих условиях: приемлемая норма доходности 24%, среднегодовой темп инфляции 9%. Определить NPV проекта с учетом и без учета инфляции.

Решение: NPV без учета инфляции:

$$NPV = \frac{60}{(1+0,24)^1} + \frac{60}{(1+0,24)^2} + \frac{60}{(1+0,24)^3} + \frac{60}{(1+0,24)^4} - 130 = 14,2$$

NPV с учетом инфляции:

Определим номинальную ставку дисконта:

$$r_n = r_p + i + r_p * i = 0,24 + 0,09 + 0,24 * 0,09 = 0,35$$

$$NPV = \frac{60}{(1+0,35)^1} + \frac{60}{(1+0,35)^2} + \frac{60}{(1+0,35)^3} + \frac{60}{(1+0,35)^4} - 130 = -10,2$$

Таким образом, в условиях инфляции эффективность проекта недостаточна для принятия его к реализации. На это указывает отрицательное значение NPV, рассчитанное с учетом инфляции.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятий «инвестиции», «инвестиционный проект».
2. Дайте характеристику оценки эффективности реальных инвестиций на основе расчета чистого приведенного дохода.
3. Дайте характеристику эффективности инвестиций на основе индекса рентабельности.
4. В чем заключается методика определения срока окупаемости инвестиций.

Задание для самостоятельной работы студента

1. Имеется инвестиционный проект, время осуществления которого 3 года, норма доходности $r=10\%$. Исходные капиталовложения 302 д.е., доход первого года составляет 110 д.е., второго 121 д.е., третьего 133 д.е. Рассчитать чистую настоящую стоимость (NPV).
2. Предполагаемые инвестиции в новое оборудование – 1700 тыс. руб. Ожидаемые ежегодные поступления после вычета налогов – 550 тыс. руб. Срок службы оборудования – 6 лет. Ликвидационная стоимость оборудования равна затратам на его демонтаж. Рентабельность 13% . Оправданы ли затраты на приобретение нового оборудования?
3. Необходимо определить эффективность инвестиций в сумме 7200 рублей в объект, приносящий годовой доход 5000 рублей в течение двух лет при полной амортизации своей первоначальной стоимости. Барьерный уровень рентабельности равен 20% .

Раздел 10 Экономические расчеты при проведении валютных операций

В периоды экономической нестабильности, высокой инфляции многие граждане предпочитают хранить сбережения в свободно конвертируемой валюте (СКВ) или на валютных депозитах.

Валюта покупается и продается, как и любой другой товар, исходя из спроса и предложения. Конечная цена иностранной валюты, полученная в результате торгов, выражается в *валютном курсе*. Валютный курс – это цена денежной единицы национальной валюты, выраженная в денежных единицах другой страны. Установление курса иностранной валюты называется *котировкой*.

Различают *прямую и косвенную котировку валюты*. При прямой котировке курс валюты показывает, сколько единиц национальной валюты надо заплатить за одну или 100 единиц иностранной валюты. При косвенной котировке – сколько единиц иностранной валюты можно получить за одну или 100 единиц национальной валюты.

Цены продажи и покупки валюты отличаются по величине. Разница между курсом продажи и курсом покупки валюты называется *спрэдом*. За счет различия в курсах спроса и предложения банк имеет возможность покрыть расходы по совершению сделок, учесть возможный риск, связанный с валютными операциями, и получить определенную прибыль.

При проведении валютных операций используется понятие валютного курса, под которым понимается цена денежной единицы одной страны, выраженная в денежных единицах другой страны. Определение курса валюты называется ее котировкой. Полная котировка включает определение курса покупателя (покупки) и продавца (продажи). При прямой котировке курс иностранной валюты выражается в иностранной валюте. При прямой наиболее часто, курс продажи будет больше курса покупки.

При котировке валют используется также понятие их кросс - курса, представляющего собой соотношение между двумя валютами, вытекающее из курсов по отношению к третьей валюте.

Пример. Банк в Москве объявил следующую котировку валют: доллар США / рубль – 29,3 - 29,9; евро / рубль – 36,4 - 37,0.
Определить кросс-курс доллара США и евро.

Решение

При покупке долларов США на евро необходимо сначала обменять евро на рубли по курсу 36,4

При этой операции 1 рубль равен $\frac{1}{36,4}$ евро.

Затем полученные рубли надо обменять на доллары США по курсу 29,9. В этой операции 1 доллар США равен 29,9 руб.

Следовательно, 1 доллар США равен:

$$29,9 \cdot \frac{1}{36,4} = 0,82 \text{ евро (курс продажи).}$$

При продаже долларов США за евро необходимо сначала обменять доллары на рубли по курсу 29,3.

При этом 1 доллар США равен 29,3 рубля.

Затем полученные рубли надо обменять на евро по курсу 37,0.

При этом 1 рубль равен $\frac{1}{37,0}$ евро.

Следовательно, 1 доллар США равен:

$$29,3 \cdot \frac{1}{37,0} = 0,79 \text{ евро (курс покупки).}$$

Таким образом, кросс-курс доллара США и евро будет равен 0,79-0,82.

По времени реализации валютных сделок в мировой практике различают спот-курсы и форвард-курсы валют. Спот-курс – курс, установленный на момент заключения сделки при условии обмена валютами банками-контрагентами на второй рабочий день после заключения сделки. Форвард-курс определяет ожидаемую стоимость валюты через определенный период времени и представляет собой цену, по которой данная валюта продается или покупается при условии ее поставки на определенную дату в будущем.

Теоретический безубыточный форвардный курс определяется следующим образом:

$$\text{форвард-курс } A/B = \text{спот-курс } A/B \frac{1 + \frac{t}{K_B}}{1 + K_A \cdot i_A},$$

где A – котируемая валюта;

i_A и i_B – процентные ставки по валютам A и B ;

t – срок предварительной сделки;

K_A и K_B – длительность процентного года при расчете процентов по валютам A и B .

Реальный форвардный курс будет определяться с учетом спроса и предложения на валютных торгах.

На основе текущих и прогнозируемых курсов валют можно определять доходность различных операций с валютой. А также с конвертацией одних валют в другие.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое конверсия валюты?
2. В чем заключается суть прямой и косвенной котировки валют?
3. Что такое спот-курсы и форвард-курсы валют? Как они рассчитываются?

Задание для самостоятельной работы студента

1. Курс доллара вырос с 29,20 до 29,50 руб. Как изменилась доходность экспортной операции, если при прежнем обменном курсе она равнялась 35% годовых и на ее осуществление требовалось 15 дней? Временная база $K=365$.
2. Курс доллара вырос с 29,20 до 29,50 руб. Как изменилась доходность импортной операции, если при прежнем обменном курсе она равнялась 35% годовых и на ее осуществление требовалось 15 дней? Временная база $K=365$.
3. Обменный курс вырос с 29,50 руб. за доллар США до 29,80 руб. за доллар. Как изменится эффективность экспортной операции, если до повышения курса доллара она составляла 25%, ее реализация требовала одного месяца, а ставка налога на прибыль равна 24%?
4. Валюта в долларах США может быть инвестирована под 10% годовых сложных процентов на 3 года. Рублевая ставка равна 17%. В каком диапазоне должен быть среднегодовой темп прироста обменного курса, чтобы была выгодна двойная конвертация (через рубли)?
5. Валюта может быть инвестирована в депозит под 10% на 2 года. За 2 года ожидается рост курса валюты на 20%. При какой минимальной ставке сложных процентов по рублевым депозитам целесообразна двойная конвертация?

**Задачи для самостоятельного решения по курсу «Основы
финансовых вычислений»**

1. Вычислить процент с капитала 2,4 тыс. руб., отданного в долг по ставке 20% годовых на срок с 5 марта по 21 сентября того же года, если расчет ведется способом 365/365.
2. Банк предоставил ссуду в размере 10 тыс. руб. на 30 месяцев под 30% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока?
3. Вексель на сумму 10 тыс. руб. был выдан на 150 дней, при этом предусматривалось начисление на указанную сумму простых процентов по ставке 16% годовых способом АСТ/АСТ (году 365 дней). За 80 дней до срока погашения вексель был учтен банком по учетной ставке 12% годовых способом 365/360. Определить дисконт, полученный банком.
4. Вкладчик поместил в банк 15 тыс. руб. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 20% годовых, каждые последующие полгода ставка повышается на 3%. Найти наращенную сумму за два года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада.
5. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 4 тыс. руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возвращаемой суммы не превышала 4,2 тыс. руб., если процентная ставка равна 12% и в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней?
6. Предприниматель получил в банке ссуду в размере 25 тыс.руб. сроком на 6 лет на следующих условиях: для первого года процентная ставка равна 10% годовых, на следующие два года устанавливается маржа в размере 0,4% и на последующие годы равна 0,7%. Найти сумму, которую предприниматель должен вернуть в банк по окончании срока ссуды.
7. Ссуда в размере 1 млн. руб. взята 28 февраля 2000 г. по 1 ноября 2000 г. под 30% годовых. Найти размер погасительного платежа, применяя британский, французский и германский методы расчета. Сравните результаты, сделайте выводы.
8. Определите, какую долю составит процент от первоначальной ссуды, если срок ссуды 1,5 года, причем в первый год простая годовая ставка равна 30%, а в каждом последующем квартале понижается на 1%.
9. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов по простой ставке: первый год по годовой ставке 18%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения за 2,5 года.
10. Определите размер наращенной суммы за один год, если первоначальная сумма равна 10 тыс. руб., первые полгода годовая ставка простых процентов равна 18%, а вторые 21%.
11. Определите годовую ставку простых процентов, при которой сумма в 5 тыс. руб. за три квартала возрастет до 6,5 тыс. руб.
12. Через сколько лет удвоится первоначальная сумма вклада под простую годовую ставку 16%?

13. Первый год годовая ставка простых процентов равна 8%, а каждый последующий год увеличивается на 2%. Через сколько лет удвоится первоначальная сумма (реинвестирования не предполагается)? $K=365$.
14. Торговая организация предоставляет потребительский кредит при покупке стиральной машины стоимостью 500 у.е. на следующих условиях: при покупке оплачивается 20% стоимости, кредит предоставляется на один год под ставку 10% годовых, проценты начисляются сразу на первоначальную сумму кредита, кредит и проценты погашаются равными ежемесячными платежами. Рассчитать размер ежемесячного погасительного платежа.
15. Коммерческая фирма открыла расчетный счет 12 января 2001 года, разместив на нем 120 тыс. руб., 21 февраля со счета было снято 35 тыс. руб., 17 марта поступило 52 тыс. руб.. Простая ставка 18% годовых. Чему равен остаток на конец первого квартала, на 31 марта? Британская практика расчета.
16. За какой срок сумма в 10 тыс. руб. возрастет до 12 тыс. руб., если проценты начисляются по простой ставке 18% годовых и применяется британская практика расчета процентов?
17. Кредит в размере 100 000 руб. выдан на 2 года и 200 дней под ставку 21% годовых. Рассчитайте сумму долга на конец срока тремя способами (по формуле сложных процентов, смешанным методом, с отбрасыванием дробной части года), сравните результаты, сделайте выводы. Временная база 360.
18. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти современную стоимость инвестиций.
19. Номинал процентного векселя 100 000 руб. По векселю начисляются проценты по ставке 18% годовых, с начала начисления процентов до момента предъявления векселя к оплате прошло 30 дней. Определить общую сумму, которую получит держатель векселя при его погашении. Расчет произвести по германской практике.
20. Номинал процентного векселя 500 000 руб., проценты начисляются по ставке 17%, выписан на 90 дней. Определить максимальную цену векселя для инвестора, желающего купить его за 20 дней до погашения и обеспечить себе доходность не ниже 25% годовых, если предполагается использование британской практики расчета процентов.
21. Номинал процентного векселя 200 000 руб., по векселю начисляют проценты по ставке 20% годовых, выписан на срок 45 дней. Определить доходность операции для инвестора, если он купит вексель за 25 дней до погашения по цене 200 000 руб. и будет держать его до погашения. Расчет произвести по французской практике.
22. Через 210 дней у вас наступает срок платежа в размере 150 000 руб. Какую сумму вы должны зарезервировать для погашения этого долга, если на указанный срок вы можете отдать ее займы под 17% годовых? Чему равен дисконт?
23. Вексель выдан на сумму в 300 000 руб. с уплатой 25 декабря. Владелец

учел его в банке 20 сентября по учетной ставке 16%. Сколько получил владелец тратты? Расчет произвести по французской практике.

24. Вы приобрели трехмесячную ГКО за 960 руб. за 80 дней до погашения. Номинал облигации 1000 руб. Какова доходность этой облигации к погашению, если ее измерять: а) простой годовой ставкой, б) простой годовой учетной ставкой? Временная база 365.

25. Какую сумму надо проставить в бланке векселя, если выдаваемая ссуда составляет 150000 руб., срок 90 дней, простая годовая учетная ставка 18%? Временная база 360.

26. Какую сумму получит заемщик, если он подписал вексель на сумму 200000 руб. на срок полгода, простая годовая учетная ставка равна 17%?

27. Обязательство уплатить через 180 дней 120 000 руб. с процентами из расчета 18% годовых было учтено через 80 дней по учетной ставке 16%. Рассчитать полученную при учете сумму и дисконт, полученный банком, если при использовании ставки наращивания применяется временная база 365, а в учетной операции 360.

28. За какой срок сумма в 10 тыс. руб. возрастет до 12 тыс. руб., если проценты начисляются по простой ставке 18% годовых и применяется британская практика расчета процентов?

29. Стороны договорились, что из суммы кредита, выданного на 180 дней, удерживается дисконт в размере 11%. Определите цену кредита в виде простой годовой учетной ставки и простой годовой ставки наращивания.

30. Сравните скорость наращивания суммы в 1000 руб. по простым и сложным процентам, если годовая ставка равна 20%, для сроков в полгода, год, два года, три года. Сравните результаты, сделайте выводы.

31. Сложная процентная ставка по ссуде определена в 9% годовых плюс маржа. В первые два года маржа установлена в размере 5%, в последующие два года в размере 4%. Определить множитель наращивания за 4 года.

32. Сложная процентная ставка по ссуде определена в 9% годовых и предусмотрена ежегодная индексация накопленного долга с учетом инфляционного роста цен. Рост цен составил по годам 30%, 20%, 15%, 10%. Определить множитель наращивания за 4 года.

33. За сколько лет удвоится сумма долга, если применяется простая годовая ставка 17%?

34. За сколько лет удвоится сумма долга, если применяется сложная годовая ставка 17%?

35. Кредит в размере 100 000 руб. выдан на 2 года и 200 дней под ставку 21% годовых. Рассчитайте сумму долга на конец срока тремя способами (по формуле сложных процентов, смешанным методом, с отбрасыванием дробной части года), сравните результаты, сделайте выводы. Временная база 360.

36. Первоначальная сумма ссуды 100 000 руб., выдана на 3 года, проценты начисляются по годовой номинальной ставке 20%. Требуется определить конечную сумму долга, если:

а) проценты начисляются один раз в конце года,

- б) проценты начисляются два раза в год (в конце каждого полугодия),
- в) проценты начисляются четыре раза в год (поквартально),
- г) проценты начисляются 12 раз в год (помесячно).

Результаты сравните, сделайте выводы.

37. Чему равна эффективная ставка процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 17%?

38. Эффективная ставка процента равна 19% годовых. Чему должна быть равна квартальная ставка, чтобы обеспечить такую годовую доходность?

39. Ставка сложных процентов на предстоящие 2 года 20%, а на третий год 15%. Какие условия выгоднее:

- 1) получить от должника сейчас 100 000 руб., или
- 2) 121 000 через год, или
- 3) 160 000 через 3 года.

Риск невозврата не учитываем.

40. Должник получил кредит в размере 100 000 руб. на 1,5 года, годовая учетная ставка равна 20%. Какую учетную ставку, простую или сложную, выгоднее применить заемщику?

41. Сколько получит владелец векселя на сумму в 1 000 000 руб., если он его учитывает за 2,5 года до наступления срока погашения, чему равна величина дисконта, если расчет ведется по годовой сложной учетной ставке 20%?

42. Сколько получит владелец векселя на сумму в 1 000 000 руб., если он его учитывает за 2,5 года до наступления срока погашения, чему равна величина дисконта, если расчет ведется по номинальной учетной ставке 20% при ежеквартальном дисконтировании?

43. Найдите эффективную годовую сложную учетную ставку, если номинальная учетная ставка равна 16%, а дисконтирование предусматривается ежеквартальное.

44. Какую сумму следует проставить в векселе, если выдается ссуда в размере 100 000 руб. на два года? В контракте предусматривается номинальная учетная ставка 16% при ежеквартальном дисконтировании. Какая сложная учетная ставка, номинальная или эффективная, выгоднее заемщику?

45. Ссуда составляет 100 000 руб. на срок 10 дней. Предусматривается непрерывное начисление процентов по ежедневной силе роста, которая изменяется дискретно: в первые 5 дней она устанавливается равной 0,03%, в последующие 3 дня 0,035%, а в последние 2 дня 0,04%. Определить сумму погасительного платежа.

46. За какой срок сумма в 1 млн. руб. возрастет до 1,5 млн. руб. при условии, что на нее начисляются проценты по сложной ставке 20% годовых? Временная база 365.

47. Ссуда выдана в размере 2 млн. руб. на 2 года под вексель на сумму 3 млн. руб. Оцените эффективность этой операции, если ее измерять:

- а) простой годовой ставкой,
- б) простой годовой учетной ставкой,
- в) сложной годовой ставкой,

- г) сложной годовой учетной ставкой,
- д) номинальной ставкой при ежеквартальном начислении процентов,
- е) номинальной учетной ставкой при ежеквартальном дисконтировании.

Результаты сравнить и сделать выводы.

48. На трехмесячный депозит положена сумма под простую годовую ставку 18%. Но за эти три месяца темп инфляции оказался на уровне 22% в год. Какова реальная ставка процентов? При какой ставке можно было бы сохранить реальную стоимость первоначального капитала?

49. Кредит предоставлен на 2 года под номинальную ставку 16% при ежемесячном начислении процентов. За это время инфляция характеризовалась годовым темпом 17%. Какова реальная (эффективная) ставка сложных процентов?

50. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти сумму инвестиций к концу срока.

51. Найти современную стоимость годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

52. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, который будет накоплен к концу пятилетнего срока.

53. Кредит в размере 200 млн. руб. выдается на 50 месяцев под 18% годовых. Контракт предусматривает погашение кредита равными суммами ежемесячно и начисление процентов также помесечно на остаток долга. Рассчитайте ежемесячные погасительные платежи, идущие на обслуживание долга. Постройте график погасительных платежей. Сравните поток платежей с потоком предыдущей задачи.

54. Вексель был учтен за 56 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 12%. Какой эквивалентной сложной ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365.

55. Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения в течение 3 лет текущего долга в размере 1 млн. руб., если ставка сложных процентов 17% годовых.

56. Кредит взят на 3 года в размере 500 000 руб. под ставку сложных процентов 18%. Однако уже через год было выплачено 200 000 руб. в счет погашения долга. Определить размер последнего погасительного платежа в конце трехлетнего срока для окончательного расчета.

58. Сумма вклада составляет 100 000 руб. на срок полгода. Процентная ставка 17% годовых. Определить наращенную сумму.

59. Сумма вклада составляет 100 000 руб. на 3 года. Процентная ставка 18% годовых. Начисление процентов один раз в год. Определить наращенную сумму, которую получит вкладчик после выплаты процентов:

- 1) за весь срок сразу,

2) за каждый год в отдельности.

60. Вексель был учтен за 100 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365.

61. Вексель был учтен за 50 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365. Сравните полученную величину с результатом предыдущей задачи. Сделайте выводы.

62. По краткосрочным операциям банк установил простую процентную ставку 17%. Чему должна быть равна простая учетная ставка при сроке ссуды 100 дней. Временная база при начислении по простой ставке 365, а при начислении по простой учетной ставке 360.

63. Годовая сложная процентная ставка равна 17%. Определите эквивалентную сложную учетную процентную ставку.

64. В первом квартале применялась простая процентная ставка 15%, во втором - 16%, в третьем 15,5%, в четвертом - 17%. Чему равна средняя годовая ставка?

65. В первом квартале применялась простая процентная ставка 15%, во втором - 16%, в третьем 15,5%, в четвертом - 17%. Инфляция была в первом квартале на уровне 8% в год во втором на уровне 9%, в третьем 8,5%, в четвертом - 7%. Чему равна средняя годовая реальная ставка?

66. Найдите среднюю годовую ставку сложных процентов, если в первые 1,5 года ставка составляла 18%, последующий год 15%, и еще 1,5 года 16%.

67. Инвестор разместил 5 млн. руб. под ставку 18% годовых на 2 года и 15 млн. руб. под ставку 16% тоже на 2 года. Какова среднегодовая эффективность его инвестиционной деятельности?

68. Найти наращенную сумму годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

69. Кредит взят на 3 года в размере 500 000 руб. под ставку сложных процентов 18%. Однако уже через год было выплачено 200 000 руб. в счет погашения долга. Определить размер последнего погасительного платежа в конце трехлетнего срока для окончательного расчета.

70. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти современную стоимость инвестиций.

71. Акция приобретена по номиналу 1000 руб. при 40% годовых, курсовая цена через год после эмиссии - 2000 руб. Определить конечную доходность бумаги.

72. Акция номиналом 15000 руб. со ставкой дивиденда 25% приобретена по двойному номиналу и продана через год, обеспечив владельцу 0,50 руб. дохода с каждого инвестирования рубля. Определить курс акции в момент продажи.

73. Акция с дивидендной ставкой 35% приобретена по двойному номиналу и продана через год за 17875 руб., обеспечив совокупную доходность 80%. Определить курс акции в момент продажи.

74. Акция номинальной стоимостью 100 руб. приобретена инвестором с коэффициентом 1,4 и продана на третий год после приобретения за 75 дней до даты выплаты дивидендов. За первый год ставка дивиденда равнялась 18%, за второй год-20%, за третий год-35%. Индекс динамики цены продажи по отношению к цене приобретения-1,2. Определите совокупную доходность акции для инвестора.

75. Вексель выдан на сумму 5 тыс. руб. с уплатой 19.12. Векселедержатель учел вексель в банке 25.10 по учетной ставке 10% . Определить сумму, полученную векселедержателем, и дисконт в пользу банка.

76. Вексель с обязательством 12 тыс. руб. учитывается банком за 90 дней до погашения с дисконтом 4,2 тыс. руб. в пользу банка. Определите величину учетной ставки.

Тесты по курсу «Основы финансовых вычислений»

- 1) Нарращение по простой ставке ссудного процента происходит по формуле:
 - a) $FV = PV(1 + in)$;
 - b) $FV = I/PV * 100\%$;
 - c) $FV = 1 + in$
- 2) Доход, получаемый по учетной ставке называется...
 - a) Учетом;
 - b) Дисконтом;
 - c) Эффективной процентной ставкой
- 3) Современная катализированная стоимость, $PV = \dots$
 - a) $PV = FV / (1 + in)$;
 - b) $PV = 1 + in$;
 - c) $PV = FV(1 - nd)$
- 4) При банковском учете используют следующую формулу:
 - a) $PV = FV(1 - d * t/k)$;
 - b) $PV = FV(1 + dn)$;
 - c) $FV = PV(1 + r * t/k)$
- 5) Нарращение по простой учетной ставке имеет смысл, если...
 - a) $I > 1/n$;
 - b) $n < 1/n$;
 - c) $d < 1/n$
- 6) Срок проведения операции для простой учетной ставки d определяется формулой:
 - a) $n = (FV - PV) / (d * FV)$;
 - b) $n = (1 - FV/PV) / d$;
 - c) $n = (PV - FV) / (t * PV)$
- 7) Точный процент получают когда временная база выражается:
 - a) фактическим числом дней в году и точным числом дней проведения финансовой операции;
 - b) финансовым годом и точным числом дней проведения финансовой операции;
 - c) половиной финансового года и точным числом дней проведения финансовой операции
- 8) В каких финансовых кредитных операциях применяются сложные процентные ставки?
 - a) краткосрочных;

- b) долгосрочных;
- c) среднесрочных и долгосрочных

9) Следующая формула $FV = PV(1 + j/m)^{nm}$ вычисляет

- a) эффективную процентную ставку при начислении процентов n раз в году;
- b) наращенную сумму при начислении процентов m раз в году;
- c) номинальную годовую процентную ставку при начислении процентов m раз в году.

10) Правило «72» позволяет рассчитать срок

- a) увеличения капитала в n раз;
- b) удвоения капитала;
- c) удвоения процентной ставки

11) Как называется процентная ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m -разовое начисление процентов по ставке j/m ?

- a) эффективной;
- b) номинальной;
- c) дискретной;

12) Как записывается процентная ставка за период начисления, если начисление процентов происходит 1 раз в год?

- a) i ;
- b) $i/365$;
- c) $n \cdot 365$

13) Каков размер эффективной ставки, если $j = 15\%$ годовых при ежемесячном начислении процентов?

- a) 6% ;
- b) 35% ;
- c) 16%

14) Выберите формулу для определения наращенной суммы для сложной учетной ставки:

- a) $FV = PV(1 + ic)^n$;
- b) $FV = PV/(1 - d)^n$;
- c) $FV = PV/(1 - f/m)^{nm}$

15) При каком типе начисления процентов используется формула $FV = PV/(1 - d)^n$:

- a) при антисипативном способе;
- b) при декурсивном способе;
- c) при антисипативном и декурсивном способе

16) Для заемщика более выгоден ...

- a) декурсивный способ начисления процентов;
- b) антисипативный способ начисления процентов;
- c) разницы нет

17) Коэффициент наращивания по сложным учетным ставкам равен:

- a) $K_H = 1/(1-d)^n$;
- b) $K_H = 1/((1-dc)^n) * (1-n*dc)$;
- c) $K_H = 1/(1-dn)$

18) Величина номинальной учетной ставки находится по формуле:

a)

$$d_c = 1 - \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}};$$

b)

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{FV}{PV}} - 1 \right);$$

c)

$$f = m \left(1 - \sqrt[m]{\frac{PV}{FV}} \right)$$

19) Что такое эквивалентные процентные ставки:

- a) это такие процентные ставки одинакового вида, применение которых при одинаковых начальных данных дают различные финансовые результаты
- b) это такие процентные ставки различного вида, применение которых при одинаковых начальных данных дают одинаковые финансовые результаты
- c) это такие процентные ставки различного вида, применение которых при одинаковых начальных данных дают различные финансовые результаты

20) Эквивалентность процентных ставок всегда зависит от

- a) продолжительности периода начисления
- b) величины первоначальной суммы PV
- c) величины будущей суммы FV

21) Связь между какими процентными ставками выражается формулой $i = d/(1-nd)$?

- a) простая годовая ставка ссудного процента и простая годовая

учетная ставка

b) простая годовая учетная ставка и сложная годовая ставка ссудного процента

c) сложная годовая ставка ссудного процента и сложная годовая учетная ставка

22) Срок уплаты по долговому обязательству полгода. Учетная ставка равняется 18%. Какая будет доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

a) 20%

b) 19,7%

c) 21%

23) Срок уплаты по долговому обязательству полгода. Сложная ставка ссудного процента равняется 18%. Какая будет доходность этой операции, измеренная в виде простой учетной ставки?

a) 15%

b) 20%

c) 25%

24) Метод погашения кредита одинаковыми платежами равномерно распределенными во времени называют:

a) равномерным методом;

b) методом амортизации долга;

c) методом постоянного учета амортизации

25) При какой методике расчета процентов используется для расчета продолжительность года 365 или 366 дней?

a) германская

b) французская

c) английская

26) Определить точное число дней между 3 апреля и 26 июня:

a) 83

b) 84

c) 85

27) Величина возврата ссуды составила 43000. Ссуда была выдана 6 лет назад. На условиях ежеквартальной капитализации и 36% годовой ставки. Определить первоначальную сумму ссуды.

a) 8127

b) 5435

c) 340177

28) Кредит выдан на 150 дней ($K=360$), по истечении которых должник должен вернуть 9000 руб. Сумма открытия кредитного соглашения – 4000 руб. Определить установленную ставку процента.

- a) 300%
- b) 3%
- c) 0,3%

29) Рассчитать суммарную стоимость денежного потока, накапливаемого по 8%. Денежный поток возникает в конце года, срок 2 года. Величина потока 800 000 руб.

- a) 1664000
- b) 864000
- c) 816000

30) Достаточно ли положить на счет 50 000 руб. для приобретения через 7 лет дома стоимостью 700 000 руб. Банк начисляет процент ежеквартально годовая ставка – 40%.

- a) недостаточно
- b) достаточно

31) Как называется денежный поток, в котором все суммы не только возникают через одинаковые промежутки, но и равновеликие?

- a) аннуитет
- b) дисконт
- c) дисконтированная рента

32) Как называется операция по инвестированию средств при неоднократном их повторении в пределах заданного срока?

- a) дисконтирование инвестиций
- b) реинвестирование
- c) суммарное реинвестирование

33) Иванов взял в сберегательном банке ссуду 10000 руб. Если банк начисляет 250 руб. процентных денег за использование этой суммы в течение 6 месяцев, какой будет норма процента за этот период?

- a) 10%
- b) 2,5%
- c) 5,0%

34) Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода 7% по схеме сложных процентов. Сколько будет на счете через 4 года?

- a) 24000
- b) 16024
- c) 20518

35) Сумма всех членов последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты, это:

- a) наращенная сумма
- b) капитализация процентов
- c) переменная рента

36) Величина каждого отдельного платежа ренты, это:

- a) аннуитет
- b) член ренты
- c) приведенный доход

37) Рента, выплата членов которой ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, это:

- a) рента постнумерандо
- b) рента условная
- c) рента отсроченная
- d) рента пренумерандо

38) Отношение наращенной суммы ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа, это:

- a) коэффициент дисконтирования
- b) коэффициент приведения ренты
- c) коэффициент наращения ренты

39) Заем 20000 д.е. взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

- a) 546
- b) 245
- c) 349

40) Индекс инфляции за январь составил 113,3%. Определите уровень инфляции:

- a) 13,3
- b) 26,3
- c) 12,3

41) Ссуда выдана на 2 года с обязательством выплатить на 30% больше (т.е. 15 ежегодных простых процентов). Найдите эквивалентную ставку сложных годовых процентов:

- a) 14
- b) 12
- c) 16

- 42) Уровень инфляции показывает:
- a) во сколько раз выросли цены
 - b) во сколько раз цены снизились
 - c) на сколько процентов цены возросли
- 43) В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 21%.
Какую номинальную годовую процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная годовая ставка равнялась 4%?
- a) 25%
 - b) 26%
 - c) 25,84%
- 44) В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 21%.
Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 25%?
- a) 4,5%
 - b) 3,3%
 - c) 3% лет
- 45) Темп инфляции –
- a) относительный пророст цен
 - b) абсолютный пророст цен
 - c) во сколько раз выросли цены
- 46) Банковский учет-это учет по:
- a) учетной ставке
 - b) процентной ставке
 - c) ставке дисконтирования
- 47) 200 тыс.рублей положены 3 марта на 4 года под 18% годовых.
Какова наращенная сумма?
- a) 944 тыс. рублей
 - b) 999 тыс. рублей
 - c) 750 тыс. рублей
- 48) В банк было положено 100 тыс. рублей. Через 3 года на счете оказалось 150 тыс. рублей. Сколько процентов (простых) выплачивает банк?
- a) 20
 - b) 18
 - c) 19
- 49) В банк, выплачивающий 7% простых годовых, положили 7000 руб.
Через сколько лет на счете будет 7500 руб.?
- a) 1 год
 - b) 1,5 года

с) 2 года

50) Вечная рента - это

- а) рента с выплатой в начале периода
- б) рента с бесконечным числом членов
- с) рента с неравными членами

51) Поток платежей - это

- а) рост инвестированного капитала на величину процентов
- б) перманентное обесценивание денег
- с) распределенные во времени выплаты и поступления

52) В конце каждого года в фонд вносится 200\$ под 30%. Определить величину фонда через 3 года:

- а) 798\$
- б) 800\$
- в) 900\$

53) Взносы на сберегательный счет составляют 350 тыс. руб. в конце каждого года. Определите, какая сумма будет на счете через 5 лет при ставке процента 25% ?

- а) 2872460 рублей
- б) 2700000 рублей
- с) 2785999 рублей

54) Сколько лет потребуются, чтобы платежи размером 100 тыс. руб., вносимые в конце каждого года, достигли значения 1 млн. руб., если ставка процента 15%?

- а) 6,5 лет
- б) 6 лет
- с) 5 лет

55) Под опционом понимают ...

- а) долговой инструмент, посредством которого заемщик передает кредитору свое имущество (обычно недвижимость) в залог с правом удержания при невыполнении долговых обязательств
- б) условную потерю заимодавца, которая связана с применением более низкой процентной ставки, чем существующие ставки кредитного рынка
- с) право, но не обязательство, купить/продать некоторые финансовые инструменты, акции или валюту по оговоренной цене при наступлении срока или до него

Глоссарий

Аннуитет — см. финансовая рента.

Актuariй метод расчета — один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. правило торговца).

Брутто-ставка — ставка процентов, скорректированная на инфляцию.

Внутренняя норма доходности — расчетная ставка процентов, применение которой к инвестициям порождает соответствующий поток доходов.

Дисконт или скидка — проценты в виде разности $D=S-P$, где S — сумма на конец срока, P — сумма на начало срока.

Дисконтирование — суммы S — расчет ее текущей стоимости P .

Дисконтный множитель — коэффициент, показывающий какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга (наращенной сумме).

Индекс покупательной способности денег — равен обратной величине индекса цен.

Индекс рентабельность — отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям.

Индекс цен — показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Инфляционная премия — корректировка ставки процентов для компенсации обесценения денег.

Капитализация процентов — присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения.

Контур финансовой операции — графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами.

Коэффициент наращения ренты — отношение наращенной суммы ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Коэффициент приведения ренты — отношение современной стоимости ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Математическое дисконтирование — вид дисконтирования, представляющий собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.

Множитель наращения — коэффициент, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Наращение или рост первоначальной суммы — процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.

Наращенная сумма потока платежей — сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Наращенная сумма ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) — первоначальная ее сумма вместе с

начисленными на нее процентами к концу срока.

Переменная рента — рента с изменяющимися членами.

Период начисления — интервал времени, к которому относится (применяется) процентная ставка.

Период ренты — временной интервал между двумя соседним платежами.

Постоянная рента — рента с равными членами.

Поток платежей — ряд последовательных выплат и поступлений.

Правило торговца — один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. актуарный метод расчета).

Практика расчета простых процентов — различает три варианта расчета: (1) точные проценты с точным числом дней ссуды (британская практика); (2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская практика); (3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика).

Приведение — это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то — наращение.

Принцип неравноценности денег — деньги, относящиеся к разным моментам времени имеют различную текущую стоимость.

Процент обыкновенный или коммерческий — получают, когда за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом).

Процент точный — получают, когда за базу измерения времени берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Процентная ставка — отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби.

Процентные деньги или, кратко, проценты в финансовых расчетах это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой форме.

Проценты дискретные предполагают, что начисление процентов производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени, причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц.

Проценты непрерывные предполагают непрерывное начисление процентов во времени.

Реинвестирование — неоднократное повторение процесса инвестирования суммы депозита вместе с начисленными на нее в предыдущем периоде процентами.

Рента финансовая — см. финансовая рента.

Рента верная — рента, члены которой подлежат безусловной выплате.

Рента немедленная — рента, срок которой начинается немедленно.

Рента отложенная или отсроченная — рента, начало срока которой запаздывает

Рента постнумерандо (или обычная рента) — рента, платежи которой осуществляются в конце каждого периода.

Рента пренумерандо — рента, платежи которой осуществляются в начале каждого периода.

Рента р-срочная — рента, предусматривающая r равных платежей в году.

Рента условная — рента, выплата членов которой ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события.

Сила роста δ — представляет собой номинальную ставку процентов при $m \rightarrow \infty$, где m — число начислений процентов в году.

Современная величина (текущая стоимость) суммы S — величина P , найденная дисконтированием.

Современная величина потока платежей — сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Срок окупаемости — продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций.

Срок ренты — время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода.

Ставка номинальная — годовая ставка сложных процентов j при числе периодов начисления в году m . Тогда за каждый период проценты начисляют по ставке j/m .

Ставка процентов номинальная учетная — сложная годовая учетная ставка f , применяется при дисконтировании m раз в году. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m .

Ставка процентов простая — это ставка, которая применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды

Ставка процентов сложная — это ставка, которая применяется к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами

Ставка процентов сложная учетная — дисконтирование по сложной годовой учетной ставке осуществляется по формуле $P = S(1 - d_{сл})^n$, где $d_{сл}$ — сложная годовая учетная ставка, S — дисконтируемая величина, P — современная стоимость S , n — срок дисконтирования.

Ставка учетная — ставка, применяемая для расчета процентов при учете векселей.

Ставка эффективная — годовая ставка сложных процентов, приводящая к тому же финансовому результату, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m , где j — номинальная ставка.

Ставка эффективная учетная — сложная годовая учетная ставку, эквивалентная (по финансовым результатам) номинальной учетной ставке, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m .

Уравнение эквивалентности — уравнение, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к

той же дате. Разрабатывается при изменении условий контракта.

Учет, банковский или коммерческий учет — учет (покупка) векселей заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или др. платежному обязательству покупает его у владельца (кредитора) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Член ренты — величина каждого отдельного платежа ренты.

Финансовая рента или аннуитет — поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны.

Формула наращения по простым процентам или, кратко, формулой простых процентов: $S=P(1+ni)$, где S — наращенная сумма, P — первоначальная сумма (ссуда), n — срок начисления процентов (срок ссуды), i — ставка процентов за единицу времени.

Форфейтная кредитная операция — операция, в которой участвуют продавец, покупатель и банк-кредитор. Покупатель выписывает продавцу комплект векселей на сумму стоимости товара плюс проценты за кредит, сроки векселей равномерно распределены во времени. Продавец сразу же учитывает портфель векселей в банке без права оборота на себя. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

Чистый приведенный доход — разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица 1. Порядковые номера дней в обычном (не високосном) году.

Дни	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек	Дни
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17

Таблица 1. Порядковые номера дней в обычном (не високосном) году.

Дни	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек	Дни
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31
Дни	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек	Дни

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко Л. О. Математическое моделирование финансовой деятельности: учеб. пособие / Л. О. Бабешко. - М.: КноРус, 2009.
2. Башарин Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. - М.: ИНФРА-М, 1998.
3. Бочаров П. П. Финансовая математика: учеб. / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. - М.: Физматлит, 2005.
4. Ващенко Т. В. Математика финансового менеджмента / Т. В. Тащенко. - М.: Перспектива, 1996.
5. Жуленев С. В. Финансовая математика. Введение в классическую теорию / С. В. Жуленев. - М.: Изд-во МГУ, 2001.
6. Капельян С. Н. Основы коммерческих и финансовых расчетов / С. Н. Капельян, О. А. Левкович. - Минск: АПИ, 1999.
7. Касимова О.Ю. Введение в финансовую математику/О.Ю. Касимова.- М.:Анкил,2002.
8. Ковалев В. В. Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. - М.: Финансы и статистика, 2005.
9. Ковалев В. В. Практикум по финансовому менеджменту: конспект лекций с задачами / В. В. Ковалев. - М.: Финансы и статистика, 2000.
10. Кочович Е. Финансовая математика с задачами и решениями: учеб.-метод. пособие / Е. Кочович. - изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2004.
11. Криничанский К. В. Математика финансового менеджмента: учеб. пособие / К. В. Криничанский. - М.: Дело и Сервис, 2006.
- 12.Малыхин В.И. Финансовая математика/В.И.Малыхин.- М.:Юнити,1999.
- 13.Медведев Г.А. Начальный курс финансовой математики / Г.А.Медведев.- М.:ТОО «Остожье»,2000.
- 14.Мелкумов Я. С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям / Я. С. Мелкумов. - М.: ИНФРА-М, 1996.
15. Мицкевич А. А. Финансовая математика / А. А. Мицкевич. - М.: Олма-пресс:, 2001.
- 16.Салин В. Н. Техника финансово-экономических расчетов: учеб. пособие / В. Н. Салин, О. Ю. Ситникова. - М.: Финансы и статистика, 2000.
- 17.Самаров К.Л. Финансовая математика. Практический курс / К.Л.Самаров.- М.:ИНФРА-М,2006.
- 18.Симчера В. М. Введение в финансовые и актуарные вычисления / В. М. Симчера. - М.: Финансы и статистика, 2003.
- Уланов В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений/В.А.Уланов.- М.: Финансы и статистика, 2000.
19. Цымбаленко С. В. Финансовые вычисления: учеб. пособие / С. В. Цымбаленко, Т. Т. Цымбаленко. - М.: Финансы и статистика, 2004.
20. Четыркин Е. М. Финансовая математика: учеб. / Е. М. Четыркин. - М.: Дело, 2006.

21. Чуйко А. С. Математические основы финансового обслуживания: учеб. пособие / А. С. Чуйков, В. Г. Шершневу; Рос. экон. акад. им. Г. В. Плеханова. - М.: Екатеринбург: Рос. экон. акад.: Деловая кн., 1998.
22. Ширшов Е.В. Финансовая математика. / Е.В.Ширшов.- М.:КноРус,2007.