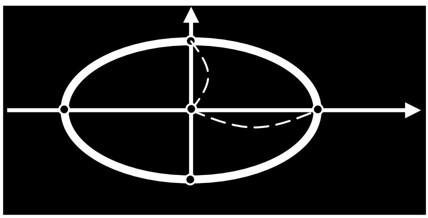
М.Б. ТУХВАТОВ

# ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

**Часть 2**

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$



$$\oiint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

УФА – 2012

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.Б. Тухватов

# ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

## Часть 2

### ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Учебное пособие для вузов*

Издание второе исправленное

Уфа
Издательство БГАУ
2012

УДК 51(07)
ББК 22.1(я7)
Т 91

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Башкирского государственного аграрного университета

Автор: ***М.Б. Тухватов***

Научный редактор: ***М.М. Валиев***, д.т.н., профессор, зав. каф. информатики и информационных технологий БГАУ

Рецензенты:
Башкирский государственный университет
д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой математического моделирования ***С.И. Спивак***;
Уфимский государственный авиационный технический университет
д.т.н., профессор, зав. каф. автоматизированных систем управления ***Г.Г. Куликов***

Т 91 **Лекции по общей математике: Ч. 4: Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Математический анализ**. Учебное пособие для вузов. – Уфа: БГАУ, 2011. – 720 с.

ISBN 5-7456-0158-2

Данное учебное пособие является заключительным и связующим учебным пособием трех работ автора «Лекции по общей математике» для вузов. Ч. 1: Множества и их отображения. Дискретная математика. Ч. 2: Математические модели и методы их решения. Ч. 3: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта с книгой автора «Лекции по математике» для поступающих в вузы и самообразования (ее могут использовать как студенты, так и слушатели подготовительных курсов и отделений, т.е. она не отделима от вузовских учебных пособий и яв-ся необходимым их началом) и предложенное пособие названо «Лекции по общей математике» для вузов. Ч. 4: Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Математический анализ.

Данная книга вместе с указанными книгами написаны в соответствии с новой расширенной программой в целостном изложении и является комплексным учебным пособием для вузов с техническими и экономическими приложениями.

В пособии широко использована общепринятая терминология, обозначения и сокращения. Разумно соблюдены принципы наглядности, абстракции, аналогии, обобщения, методы анализа и синтеза.

Предложенная книга содержит три взаимосвязанных раздела: Линейная алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ. При этом материалы изложены по принципу от простого к сложному с расположением фундаментальных понятий каждой главы в начале, что позволяет легко комплектовать учебный материал в соответствии с конкретной программой того или иного факультета.

Каждый раздел книги разбит на главы, а главы, в свою очередь, состоят из параграфов, в которых выделены тематически значимые пункты. Каждый параграф, соответствующий определенной теме, является единицей учебного двухчасового лекционного материала.

Все темы пособия иллюстрируются большим количеством задач и примеров. В конце каждой главы даются контрольные задачи, которые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной форм обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать математику самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

Следует отметить, что при переходе в вузе к двухуровневой системе обучения в первом уровне можно использовать первые две книги, а во втором уровне – все пять книг.

УДК 51(07)
ББК 22.1(я7)

ISBN 5-7456-0158-2

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

…Все знания в целом являются не чем иным, как человеческой мудростью, остающейся всегда одинаковой, как бы ни были разнообразны те предметы, к которым она применяется, и… это разнообразие имеет для нее не больше значения, нежели для солнца разнообразие освещаемых им тел…

Р. Декарт

В современных условиях резко возросло применение математики (мт.) (на базе сплошной компьютеризации) во всех областях науки, техники и экономики. При этом мт-ка нужна не только как методы расчета и моделирования исследуемых процессов, но и как метод мышления, как язык, как средство формирования и организации понятий. Все это предъявляет большие требования к мт-ой подготовке специалистов. При этом требуется общий целостный подход к мт-ке с особым акцентом на ее прикладную сторону.

Данное пособие ($Д_2$) является (яв-ся) промежуточным и связывающим звеном работ автора между «Лекции по математике» ($Д_1$) для поступающих в вузы и самообразования и «Лекции по общей математике» для вузов. Ч. 1: Множества и их отображения. Дискретная математика. Ч. 2: Математические модели и методы их решения. Ч. 3: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта. Поэтому данная книга вместе с указанными книгами составляют как бы единую системную книгу в целостном изложении, написанные в соответствии (ств.) с новой расширенной программой с уклоном для технических и экономических приложений по дисциплинам (разделам) математического (мтч.) цикла и яв-ся комплексным учебным пособием для вузов. Такая необходимость (целостно-системное изложение и изучение предмета) продиктована причинами, исходящими из самой мт-ки, постоянным возрастанием объема изучаемого материала, а отсюда – дефицитом времени студентов и т.д. Так, если полагать, что мт-ка едина, то изложение (а также изучение) ее должно быть единым, целостным. Если допускать, что смысл мт-го понятия не зависит от области ее дальнейшего применения (в самом деле так оно и есть), то нецелесообразно приспособить мт-ку к специализации студентов, а наоборот, надо стараться изложить ее в должном абстрактном уровне, доступно раскрывая (приспосабливая) с помощью примеров и задач ее приложения к различным процессам и явлениям природы и производства, ибо мы действительно живем в эпоху прикладных наук.

Поэтому в пособии сделана попытка изложения тех вопросов, которые (к-ые) яв-ся общими для разных специальностей, т.е. дать базовое знание. Этим положением оправдано и название книги «Лекции по **общей** математике», введенное впервые в [33]. Причем содержание такого пособия должно быть шире конкретной программы мт-ки для вузов. Исходя из этого весь материал мы разложили по лекциям так, чтобы легко было комплектовать учебный материал в соответствии с конкретной программой того или иного факультета. А темы, выходящие за рамки конкретной программы, можно использовать в курсах по выбору или для самостоятельной работы студентов в виде докладов и рефератов, а также использовать при дополнительных факультативных работах.

В книге широко использована необходимая символика (знаки) и сокращенная запись часто употребляемых слов и терминов (введенные автором впервые в [32] и далее усовершенствованные в [33-35] как словарь сокращенных слов, чтобы студенты, используя их, успевали вести запись за лектором) и эти сокращения позволяют сэкономить не менее 20% бумаги (требуемые для печатания книги), а также (самое главное) ускорить и облегчить процесс мышления и познания.

Данное пособие содержит три раздела (Линейная алгебра, Аналитическая геометрия и Математический анализ) и каждый раздел состоит из глав (гл.), к-ые разбиты на параграфы. Каждый параграф (§) (соответствующей (ствщ.) определенной (опрн.) теме) яв-ся основной единицей учебного (двухчасового лекционного) материала. Все формулы, теоремы определения (опр.) и т.д. обозначаются (обз.) и имеют ссылки внутри параграфа соответственно (ствн.): (2), т1, о4 и т.д. Если ссылки делаются на другой параграф, то через двоеточие к ней добавляются две цифры. Например (н-р), о3:2.4 означает опр. 3 из гл. 2 § 4. Кроме того, параграф состоит из пунктов, обз-мых через 1°, 2°, …, к-ые могут быть с названиями или без названия. В других (др.) классификационных целях используются обз-ия: 1, 2, …; 1), 2), …; а), б), …; $a_1$, $a_2$, …; 1*, 2*, … Нумерация лекций – сплошная.

При написании пособия использованы книги [3, 4, 7, 15-17, 22, 28, 30, 35а-36, 40], к-ми руководствовались и при компоновке тем пособия.

В пособии большое внимание уделено прикладной стороне предмета, демонстрирующей приложение многих тем в различных областях (где это возможно) науки и техники, использованы при этом различные источники [2, 3, 5, 15, 18, 20, 21, 29, 30, 39, 40 и др.].

С этой же целью все темы (лекции) сопровождаются большим количеством примеров и задач, выбранных из [3, 9, 13, 21, 22, 26]. Кроме того, в конце каждой гл. даются контрольные задачи, к-ые снабжены ответами, а некоторые – решениями или указаниями.

В список литературы включены и более специальные книги (н-р, см. [2, 5, 12, 14, 18, 20, 24, 29, 33-35, 39]), не претендуя на их полноту. Конкретные ссылки на них делаются в ствщ. темах с целью дальнейшего их развития и углубления для более подготовленного читателя, интересы к-го учтены во всех темах, где это было возможным.

В книге учтены и интересы неподготовленного читателя [6-8, 19, 25, 27, 32, 37, 38], для к-го во всех темах приводятся демонстрационные примеры, а в нек-ых темах приводятся материалы для повторения (подготовленный читатель может их пропускать) по элементарной (элр.) мт-ке (н-р, см. графики функций (фк.) 1°-5°: $П_2$ приложения (прлж.); сводка фм-л 1°-4°: $П_3$).

В пособии большое внимание уделено соразмерному использованию принципов наглядности, абстракции, аналогии и обобщения.

По возможности мы уделяли также внимание воспитательной стороне и формированию правильного мировоззрения на предмет, н-р, с помощью подбора задач и примеров, приведения цитат и афоризмов (с указанием автора или знаком NN, если имя автора неизвестно или взяты из жизненного опыта автора) вступительной частью перед разделами или главами и т.д., где были использованы и книги [1, 10, 11, 31 и др.].

При написании предыдущих четырех книг мы руководствовались положениями (требованиями), изложенными в (35в), разработанными на основе весовых фк-й [35а, 35б]. Жизнь изменилась. Теперь эти требования, предъявляемые к учебным пособиям, не достаточны.

В связи с введением платного обучения в вузах разница в уровнях знаний между более подготовленными ст-ми ($С_б$) и менее подготовленными ($С_м$) возросла еще больше. Раз поступили в вуз, все ст-ы как категории $С_м$, так и $С_б$ должны усиленно работать начиная с первых дней учебы в вузе как самостоятельно, так и на аудиторных занятиях. Отсюда возникают следующие (сд.) требования (положения) $ТР_j$, предъявляемые к учебным пособиям.

$ТР_1$. Во всех параграфах учебного пособия необходимо одинаково соблюдать интересы ст-ов как категории $С_б$, так и $С_м$.

С этой целью в $Д_2$ подобраны задачи и примеры различной трудности для демонстрации теоретического материала, для самостоятельного решения, для контрольной работы приведены образцы решения типовых примеров, в приложении есть сводка графиков и формул.

$ТР_2$. Все ст-ы $С_б$ и $С_м$ должны успевать вести запись (но многие ст-ы не успевают вследствие низкого уровня знаний) за лектором.

С этой целью в $Д_2$ разработаны принципы знакового ведения записи с использованием сокращения часто употребляемых слов и терминов. Практика показала, что этому ст-ы быстро привыкают. Эти знаки и сокращения слов приведены в начале книги как объективная необходимость (более подробно об этом см. [33], с. 8, 384).

$ТР_3$. Все ст-ы при выполнении самостоятельных и контрольных работ быстро должны найти необходимый при этом материал. Для этого в учебном пособии должно быть под рукой все, что необходимо ст-ам как категории $С_б$, так и $С_м$.

С этой целью в $Д_2$ предусмотрены все необходимые материалы: теоретические, демонстрационные примеры, образцы решения примеров, варианты контрольных работ, задачи для самостоятельной работы, материалы справочного характера и школьной мт-ки, решение типовых примеров и т.д.

В книге нет исторического и философского материала, кроме некоторых общих понятий и необходимых фактов. Причем мы старались избегать общих рассуждений при изложении материала, чтобы быстрее вводить читателя в суть дела. При этом темы, к-ые яв-ся фундаментальными или рабочим инструментом дальнейшего изучения – старались расположить раньше, чем остальные в пределах главы.

Книга предназначена для студентов естественных, экономических и технических специальностей вузов очной и заочной форм обучения. Поможет она и тем, кто окончил вуз, но продолжает изучать мт-у самостоятельно с целью приобретения второй специальности.

Отметим, что при переходе в вузе к двухуровневой системе обучения в первом уровне можно использовать первые две книги ($Д_1$ [32] и $Д_2$ – данное пособие), а во втором уровне – все пять книг.

Автор выражает глубокую благодарность научному редактору проф. Валиеву М.М., рецензентам проф. Спиваку С.И. и проф. Куликову Г.Г. за ряд предложений и замечаний, способствующих значительному улучшению содержания книги.

Автор благодарит всех лиц, принявших участие в обсуждении рукописи книги. При этом особую благодарность автор выражает проф. Дусыеву В.М., проф. Габдрафикову Ф.З. и доц. Лукманову Р.Л.

Все замечания по книге просим направлять по адресу: 450001, Уфа, ул. 50-летия Октября, 34, БГАУ, каф. математики.

# ВВЕДЕНИЕ

> Во всех отраслях человеческой деятельности только те направления достигают блестящего развития, которые находятся в живой связи с потребностями общества.
>
> Н.Г. Чернышевский

**1°. Предмет математики и ее применение**. Широкое проникновение математики (мт.) в другие (др.) области науки (физика, химия, биология, медицина, генетика, социология, экономика, кибернетика, экология и т.д.) яв-ся общепризнанным фактом. В настоящее время этот процесс интенсивно продолжается. При этом изучаемые процессы с достаточной точностью формализуются на языке мт-ки и описываются с помощью математических (мтч.) моделей.

Мт-ка есть точная абстрактная наука, изучающая количественные (колн.) соотношения (стн.) и пространственные (пр.) формы. Абстрактность мт-ки означает, что объектами изучения яв-ся мтч-ие модели (формулы, стн-ия). Причем одна и та же мтч-ая модель может описать с опрн-ым приближением различные явления. Н-р, мтч-ая модель движения маятника используется как закон движения поршня внутреннего сгорания и тока в замкнутом электрическом контуре, т.е. все эти три процесса описываются одной и той же мтч-ой моделью (формулой). Тогда очень важно представить себе, что сделано в др. областях знаний и думать, нельзя ли их (имеющиеся достижения) применить для своей специальности.

Абстрактность мт-ки порождает опрн-ую трудность при описании и решении конкретных задач, но она придает мт-ке силу, универсализм и общность. Это позволяет мт-ке описывать сущность и вникать в разнообразные явления реального мира.

Мт-ка, как и др. науки, возникла из практических потребностей людей при измерении площадей и вместимости сосудов (геометрия), счислении времени и развитии судоходства (астрономия), строительстве каналов и городов (механика) и т.д., т.е. основным назначением мт-ки яв-ся применение ее на практике. Без мт-ки не обходится ни один экономист, физик, инженер и др. Везде происходит математизация – процесс внедрения и использования мт-ки и ее методов в исследованиях (иссл.) различных областей человеческой деятельности. «Наука лишь постольку наука, поскольку в нее входит математика», – писал Э. Кант.

Мт-ка яв-ся не только инструментом применения в др. науках, но она яв-ся и мощным методом познания мира, изучения его закономерностей. Н-р, открытия планеты Нептун, электронных волн и позитрона, сделанные сначала мтч-ки, «на кончике пера», лишь потом подтвердились экспериментально.

Более того, мт-ка совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ум, приучает человека рассуждать логически, воспитывает у него точность, обстоятельность аргументации. Великий Ломоносов не зря писал: «Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Причем мт-ка яв-ся единственным предметом для тренировки ума, как физические снаряды для тренировки тела.

Приобретенные знания по мт-ке в результате длительного и упорного труда создают в человеке уверенность, стремление к творческой деятельности, следовательно (сдт.), роль мт-ки огромна и в формировании человека как личности.

Более подробно характерные черты мт-ки и основные этапы ее развития см. в [10, 23].

**2°. Советы читателю**. Надо всегда помнить, что Голова – это центр управления (упл.) всем организмом. Поэтому она должна постоянно работать и тренироваться, чтобы разумно управлять всем организмом. Для этого основным рабочим полигоном яв-ся мт-ка. Но мт-ой надо заниматься с опрн-ой целью использования ее на практике. А для успешного использования мт-ки в своих исследованиях нужно иметь необходимые (нх.) знания, уметь обращаться с мт-им аппаратом и обладать мт-ой интуицией, фантазией. Эти качества (кач.) приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе систематических знаний, в результате длительной и упорной работы.

Нх-мо постоянно (пст.) и настойчиво решать мт-ие задачи. Мт-ик Гаусс стал великим именно потому, что решение мт-их задач для него было как воздух для человека. «Примеры учат лучше теории», – писал И. Ньютон.

В мт-ке важны не столько формулы (фм.), сколько моделирование (мдв.) изучаемых процессов с получением этих фм-л, т.е. фм-ы яв-ся лишь инструментом изучения исслм-ых процессов. Н-р, в главе дифференциальных (дифн.) уравнений (ур.) важно не решение дифн-ых ур-й (конечно, их решать тоже надо уметь), а важнее формулировка задач изучаемого процесса и получение дифн-ых ур-й.

В успешном и быстром усвоении мт-ки большую роль играют удачная символика (знаки), сокращенная запись, накопление мтч-их терминов, к-ые облегчают и процесс мышления. При этом нх-мо пст-но пользоваться предметным указателем.

При изучении мт-ки нх-мо вырабатывать в себе опрн-ую систему, стараясь идти от простого к сложному, от известного к неизвестному, от частного к общему, постоянно стремясь к практике.

Надо помнить, что мт-ка пст-но совершенствуется, и нельзя смотреть на ее положения, как на догмы. Мт-ка развивается, создаются новые методы, расширяется круг областей ее применения. Много еще в ней нерешенных проблем, как и в др. науках, к-ые ждут своего разрешения.

Глубокое усвоение мт-ки – это нелегкий труд. Успеха может добиться только тот, кто вооружен терпением и с карандашом в руке работает целенаправленно, постоянно преодолевая возникшие трудности.

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

> Удачные обозначения, символика (знаки) и сокращения облегчают и ускоряют процесс мышления и познания.
>
> NN

## 1°. Список основных обозначений

$x \in A$ – элемент (эл.) принадлежит множеству (мн.) $A$
$x \overline{\in} A$ ($x \notin A$) – эл. $x$ не принадлежит мн. $A$
$A \subset B$ – мн. $A$ содержится в мн. $B$ или $A$ есть подмн-во мн-ва $B$
$\mathscr{B}(A) = 2^A$ – совокупность (свк.) всех подмн-в мн-ва $A$
$\{x \in A: Q(x)\}$ – свк-ть эл-ов $x$ мн-ва $A$, обладающих свойством (св.) $Q(x)$
$m(A)$, $mA$ – мера мн-ва $A$
$P(A)$ – вероятность (вер.) события (сб.) $A$
$W(A)$, $P^*(A)$, $P_A$ – частота появления сб. $A$ в $n$ незв. опытах
$\varnothing$ – пустое мн. (невозможное сб., $P(\varnothing) = 0$)
$\Omega$ – достоверное сб., $P(\Omega) = 1$
$S$, $F$ – универсальное мн. (свк-ть подмн-в изучаемого объекта)
$A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$ ($AB$, $A + B$, $A - B$) – пересечение, объединение, разность мн-в $A$ и $B$
$A \Delta B = A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ – симметрическая разность мн-в $A$ и $B$
$\overline{A} = S \setminus A$ (не $A$) – дополнение (замыкание, отрицание) мн. $A$ при $A \subset S$
$A \Rightarrow B$ – следование: из $A$ следует $B$
$A \Leftrightarrow B$ ($A \sim B$) – равносильность или эквивалентность (экв.) мн-в $A$ и $B$
$A \vee B$ – дизъюнкция (сумма): $A$ или $B$
$A \wedge B$ – конъюнкция (произведение): $A$ и $B$
$\forall$ – знак (квантор) общности: «для всех» или «для любого»
$\exists$ – знак существования (сущв.): «существует» или «найдется»
$a = b$ – равенство (рав.): $a$ равно $b$
$a > b$ ($a < b$) – неравенство (нерав.): $a$ больше $b$ ($a$ меньше $b$)
$a \geq b$ ($a \leq b$) – нестрогое нерав-во: $a$ не меньше $b$ ($a$ не больше $b$)
$a \neq b$ – сравнение: $a$ не равно $b$
$A \equiv B$ – сравнение: $A$ тожд-но (здесь и далее см. список сокращений) равно $B$
$\{a, b, \ldots\}$ – мн., состоящее из эл-ов $a$, $b$, …
$(a, b)$ или $(a, b, c)$ – упн. пара или тройка
Мн. $N$ – нтр., $Z$ – целых, $Z_0$ ($Z_+$) – неотц. целых, $Q$ – рац., $R$ – дсв., $R_+$ – плж. дсв-х чисел
$R_1 \times R_2 = \{(x, y): x \in R_1, y \in R_2\}$ – дек. пзв-ие, $R^n = R \times R \times \ldots \times R = \{(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n): x_j \in R, j = \overline{1,n}\}$ – $n$-мр. лин. (вкн.) пр-во
$C$ – мн. комп. чисел $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, $i^2 = -1$; $\bar{z} = a - ib$ – число, спрж. с $z$
$R(z) = a$ – дсв., $I(z) = b$ – мним. части и $\arg(z) = \varphi$ – арг-т комп-го числа $z$
$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ – модуль (абсолютная величина) числа $x$
$[x]$ – целая, $\{x\} = x - [x]$ – дробная части числа $x$
$[x_1, x_2] = \{x: x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ – замкнутый промежуток (отрезок, сегмент)
$]x_1, x_2[ = \{x: x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, 0 < \lambda < 1\}$ – открытый промежуток (инр-л)
$[x_1, x_2[$, $]x_1, x_2]$ – полуоткр., $[x_1, \infty[$, $]x_1, \infty[$, $]-\infty, x_2]$, $]-\infty, x_2[$ – полубеск., $]-\infty, \infty[ = R$ – беск. промежутки
$\mathrm{int}A$ ($\partial A$) – внутренность (границы) мн. $A$
$\inf A$ ($\sup A$) – нижняя (верхняя) грань чисел, входящих во мн. $A \subset R$
$f: x \to y$ – функция (фк.) $f$ мн-ва $x$ в мн. $y$: $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$
$\min f(x)$ ($\max f(x)$) – наименьшее (наибольшее) значение фк. $f$ при $x \in [a, b]$

$f \circ \varphi = f[\varphi(x)]$ – композиция (суперпозиция) фк-й $f$ и $\varphi$ или сложная фк. (фк. от фк-и)

$\odot$ – свк-ть знаков, н-р, $\odot = \{+, -, \cdot, :\}$, $\odot = \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\}$, $\odot = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ и т.д.

$\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n\}$, $\{a_n\}$, $\{f_n\}$ – беск. последовательность (посл.)

$\sum\limits_i a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ – числ. ряд и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ldots + a_n$, $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \ldots a_n$ – сумма, пзв-ие

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $(2n)! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$, $(2n-1)! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$: $n$, $2n$, $2n-1$ факториал

$P_n = n!$ – число перестановок из $n$ эл-ов

$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m-1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ – число размещений из $n$ эл-ов по $m$

$C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из $n$ эл-ов по $m$

$\bar{x}$, $\bar{a}$, $\overline{AB}$ или $x$, $a$, $AB$ – вк-р, $AB = -BA$, $|\bar{x}|$, $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$ – длина вк-а; если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$a\uparrow\uparrow b$ ($a\uparrow\downarrow b$) – векторы $a$ и $b$ одинаково (противп.) нпв-ны; $n^\circ = \dfrac{n}{|n|}$ – едч. нпв-ие вк-а $n$

$E^n$ – евк. $n$-мр. пр-во, $\{x^k\}$ – посл. тч-к (вк-ов), $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) \in E^n$; $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – ортонорв. вк-ы в $E^n$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$, тогда $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$; для $E^3$: $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$

$A$ ($A^{\mathrm{T}}$, $A^{-1}$) – мц. кв. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$ (трспн., обратная); $D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – опрт.

$xy = |x|\,|y| \cos\varphi = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ – скн. пзв-ие вк-ов $x, y \in E^3$, $\cos\varphi = \dfrac{xy}{|x|\,|y|}$, $\varphi$ – угол между вк.

$|x \times y| = |x|\,|y| \sin\varphi$, $x \times y = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ – вкн. пзв. вк-ов $x, y \in E^3$; $(x \times y)\,z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ – вкн.-скн. пзв. вк-ов

$\Delta x$ ($\Delta f(x_0)$) – прщ-ие арг-та $x$ (фк-и $f$ в тч. $x_0$); $f'(x_0)$ – прв-я фк-и $f$ в тч. $x_0$

$\int\limits_a^b f(x)dx$ – инт. фк-и $f(x)$ от $a$ до $b$, $\int f(x)dx = F(x) + C$ – неопрн-ый инт-л

$P_i \triangleq P(X = x_i)$ – рав-во по опр-ю: вер. сб-ия $\{X = x_i\}$

## 2°. Список основных сокращений

абс. – абсолютный
адд. (аддс.) – аддитивный (аддитивность)
акт. – активное
алг. (алгч.) – алгебра (алгебраический)
альт. – альтернативный
анг. (анч.) – аналогия (аналогично)
ант. (антч.) – аналитика (аналитическая)
арг. – аргумент
ариф. (арифч.) – (арифметика) арифметический
асим. – асимптоты
асс. (-ть) – ассоциативный (ассоциативность)
АТС (ТС) – автоматическая телефонная станция (телефонная станция)
б.б.в – бесконечно большая величина
б.б.ф – бесконечно большая функция
б.м.в – бесконечно малая величина
б.м.ф – бесконечно малая функция
беск. – бесконечный
бескмр. – бесконечномерный
бист. – биссектриса
бнм. (бнмн.) – бином (биномиальный)
блп. (блпщ.) – благоприятствует (благоприятствующий)
брк. (бркн.) – браковка (бракованный)

вбр. (вбрч.) – выборка (выборочный)
вел. – величина
вер. (верн.) – вероятность (вероятностный)
верш. – вершина
вещ. – вещественный
взр. (взрщ.) – возрастает (возрастающий)
вк. (вкн.) – вектор (векторный)
вкн-скн. пзв. – векторно-скалярное произведение
вкл. – включенный
ВМ – вычислительные машины
вог. (вогс.) – вогнутый (вогнутость)
врж. (врж-ть, врз-ть) – выражение (выражать, выразить)
вр. (врн.) – время (временный)
вртк. – вертикальный
врц. (врцн., врт.) – вариация (вариационный, вариант)
врщ. (врщт.) – вращение (вращательное)
вск. – высказывание
в ттом – в том и только в том
ВЦ – вычислительный центр
вык. – выключенный
вып. (выпс.) – выпуклый (выпуклость)
выч. (вычт.; вычн.) – вычисление (вычислительный, вычисленный)
гармч. – гармонический
геом. (геомч.) – геометрия (геометрический)
гл. – глава
глб. – глобальный
гнр. – генеральный
гос. (госн.) – государство (государственный)
гп. – гипотеза
гпрб. (гпрбч., гпрби.) – гипербола (гиперболический, гиперболоид)
гпрбч. фк. – гиперболическая фк-ия
гпрпл. – гиперплоскость
гр. (грв.) – группа (групповая)
грзт. – горизонтальный
грф. (грфч.) – график (графический)
ГТС – городская телефонная станция
двж. (двжщ.) – движение (движущегося)
двн. – двойной
дврт. – доверительный
двс. (-ть) – двойственный (двойственность)
дек. – декартовое
диз. – дизъюнкция
дист. (-ть) – дистрибутивный (дистрибутивность)
диф., дифв. (дифм., дифн.) – дифференциал, дифференцирование (дифференцируемый, дифференциальный)
дк. – дискретный
доопр. – доопределение
дпн. (дпнт.) – дополнение (дополнительный)
др. – другие
дсв. (дсв-но) – действительный (действительно)
дск. – дискриминант
дсп. (дспн.) – дисперсия (дисперсионный)
Д., д-во (д-ть) – доказательство (доказать)
Д. нх. – д-во необходимости
дт. – деталь
дтн. (дт-но) – достаточный (достаточно)
дтр. – детерминированный
евк. – евклидовый
ед., едт. (-ть) (едн., едч.) – единица, единственность (единственный, единичный)
емк. – емкость
ЕС – единая система
жорд. – жордановый
збр. (збрн.) – забраковать (забракованный)
зв. (звт., звщ.) – зависимый (зависимость, зависящая)
зм. – замечание
змч. – замечательный
зн. (знщ.) – значение (значащие)
знмт. – знаменатель
ЗПР – задача принятия решений
изб. – изображение
избн. (избз.) – изображенный (изобразить)
излн. – изолированный
изм. – изменение
измр. – измерение
имп. – импликация
имт. (имтн.) – имитация (имитационный)
инд. (-но) – индуктивность (индуктивно)
инп. (импн.) – интерполяция (интерполяционный)
инпц. (инпр.) – интерпретация (интерпретируется)
инр. (инрн.) – интервал (интервальный)
инт. (интв., интн., инту., интущ., интум.) – интеграл (интегрирование, интегральная, интегрируется, интегрирующий, интегрируемый)
инф. (инфн.) – информация (информационный)
иррац. – иррациональный
иссл. (-ль), исслм., исслт. – исследование (исследователь), исследуемый, исследовательский
иск. – исключение
исп. – испытание
ист. (истс.) – истинная, истина (истинностная)
исх. – исходная
исч. – исчисление
и т.д. – и так далее
канч. – канонический
кас. – касательная
кач. (-но, качн.) – качество (качественно, качественный)
кбр. – кибернетика

кв. (квч., квн., кву.) – квадрат (квадратичная, квадратный, квадратура)
клб. – колебание
клсф. – классификация
кол. (-но, колн.) – количество (количественно, количественный)
комб. – комбинаторика
комм. (-ть) – коммутативный (коммутативность)
комп. – комплексный
кон. – конъюнкция
конкр. – конкурирующий
конч. – конический
коэф. – коэффициент
КР – контрольная работа
кр. (-ль) – контрольная (контроль)
крв. (крвл.) – кривая (криволинейная)
крд. (крдн.) – координаты (координатный)
крт., кр. (крч.) – критерий (критический)
крч. обл. (двс., лвс., прс.) – критическая область (двусторонняя, левосторонняя, правосторонняя)
крум. (крут.) – контролируемый (контролируется)
крц.; крцн. (крв.) – корреляция, корреляционный (коррелированный)
к.ч. – конечное число
к-ый (к-му) – который (которому)
лгр. (лгрч.) – логарифм (логарифмический)
лгч. (лгк.) – логический (логика)
лин. (линс.) – линейный (линейность)
лк. – лекция
лкн. – локальный
ЛПР – лицо, принимающее решение
мгр. – многогранник
мд. (мдв.) – модель (моделирование)
мдм., мд-мый – моделируемый
МДР – множество допустимых решений
мкс. (max) – максимальный (максимум)
мксз. (мксщ.) – максимизация (максимизирующий)
ММ, мтч. мдв. – математическое моделирование
ммр. (мр., дмр., кмр., омр., тмр., *n*-мр.) – многомерный (мерный, двумерный, конечномерный, одномерный, трехмерный, *n*-мерный)
мн. (мнн., -ный) – множество (множественный)
мним. – мнимый
мнж. – множитель
мнм. (min) – минимальный (минимум)
мнмз. (мнмщ.) – минимизация (минимизирующий)
мр. – мерный (*см.* ммр)
мт. (мтч., -й) – математика (математический)
муг. – многоугольник
мфкт. (мфктн.) – много факторов (многофакторный)
мц., м-ца (мч.) – матрица (матричная)
мчл. – многочлен
наз. (назм.) – называется (называемый)
накл. – наклонный
нач. (начн.) – начало (начальный)
нбл.; нблт. (нблм., нблв.) – наблюдение, наблюдатель (наблюдаемый, наблюдавшийся)
нб. – наибольший
неалгч. – неалгебраический
невзр. – невозрастающий
недифм. – недифференцируемый
недт. – недостаточный
незв. (незвт., -ть) – независимый (независимость)
нек-ый (-го) – некоторый (некоторого)
некрум. (некрут.) – неконтролируемый (не контролируется)
некрв. (некрцн.) – некоррелированный (некорреляционный)
нелин. – нелинейный
ненорв. – ненормированный
неогр. – неограниченный
неодн. – неоднородный
неопрн., неопрс. (-на) – неопределенный, неопределенность (не определена)
неопт. – неоптимальный
неотц. – неотрицательный
неплж. – неположительный
непр. – непрерывный
непрдч. – непериодический
непст. – непостоянный
непрц. – непропорциональный
нерав. – неравенство
несбт. – несобственный
неслн. – неслучайный
несущ. (-но) – несущественный (несущественно)
неуб. – неубывающий
неуд. – неудовлетворительный
неуп. – неупорядоченный
нецлч. – нецелочисленный
нечет. – нечетный
нм. – наименьший
норв., норщ. (нор-ют, норм.) – нормированный, нормирующий (нормируют, нормальный)
нпв. (нпвщ., нпвн.) – направление (направляющий, направленный)
н-р, нп. – например
нтр. – натуральный
н/х – народное хозяйство
нх. (нхс-ть) – необходимый (необходимость)
О: – ответ
обз. (обзм.) – обозначается (обозначаемая)
обл. – область
общс. – общественный

обс. – обслуживание
обык. – обыкновенный
объед. – объединение
огр. (огрн., огрв.) – ограничение (ограниченный, ограничивающий)
ОДЗ – область допустимых значений
одн. (однс.) – однородный (однородности)
ОДР – область допустимых решений
ож. – ожидание
окр. – окружность
окрс. – окрестность
оперт. (опертн.) (оперц., оперцн.) – оператор, операторный (операция, операционный)
опр., опрн., опрм., опрс., опрт., опрщ. – определение, определенный, определяемый, определенность, определитель, определяющий
опт. (оптз.) – оптимальный (оптимизация)
орг. (оргн.) – организация (организационный)
ориг. – оригинал
орнт. (орнтв., орнтц.) – ориентир (ориентированный, ориентация)
орт. (ортз., ортс.) – ортогональный (ортогонализируя, ортогональность)
ортонорв. – ортонормированный
осн. – основное
ост. – остаточный
отб. (отбз-ся, отб-ся) – отображение (отобразится, отображается)
отк. – отклонение
отн. – отношение
отс. (-но), отс-ся – относительный (относительно, относится)
отск. (отскщ., отсч.) – отсекает (отсекающий, отсечение)
отц. – отрицательный
парб. (парбч., парби.) – парабола (параболический, параболоид)
пармч. (парм.) – параметрический (параметр)
пвх. – поверхность
пер. – переменная
пероб. – первообразная
перк., перкщ. (перч.) – пересекает, пересекающий (пересечение)
пж. – положение
ПЗ – постановка задачи
пзв. – произведение
пкзт. – показательная
пл. – плоскость
плж. – положительный
плн. – планирование
пм. – прямая
погр. – погрешность
подмн. – подмножество
подпр. – подпространство
подпрг. – подпрограмма
подн. (подс.) – подстановка (подставление)
подынт. – подынтегральная
полуинр. – полуинтервал
полупл. – полуплоскость
полупм. – полупрямая
посл. (-но) – последовательность (последовательно)
пр., пр-во (прн.) – пространство (пространственная)
прб. – преобразование
прв. – производная
прг. (пргв.) – программа (программирование)
прд. (прдч.) – период (периодический)
прж. (прж-но) – приближенный (приближенно)
прзвл. – произвольная
прзт. – приблизительно
прз. (прзн., прзл.) – производство (производственный, производительность)
пркц., пркт. (прцв., прцу.) – проекция, проектирование (проецирование, проецируется)
прл. (прлг.), $\parallel$ – параллельный (параллелограмм)
прлж. – приложение
прлп. – параллелепипед
прп., $\perp$ – перпендикулярный
прц. (прцн., прц-ны) – пропорция (пропорциональный, пропорциональны)
прч. (-на, -е) – предпочтительный (предпочтительна, предпочтительнее)
прщ. – приращение
пст. – постоянная
пуг. – прямоугольник
пщ. – площадь
Р. (-ная) – решение (решенная)
рав. – равенство
разл. (разлг.) – разложение (разлагается)
рас. (расв., расн.) – рассмотрим (рассматриваем, рассмотренный)
расш. – расширенная
рац. – рациональный
рег. (регн.) – регрессия (регрессионная)
рздщм. – разделяющимися
рис. – рисунок
рсп. (рспн.) – распределение (распределенная)
рст. – расстояние
рсх. (рсхм., рсхг.) – расходится (расходящимися, расходящегося)
с. – страница
сб. – событие
сбт. – собственный
св. – свойство
свк. – совокупность
сгж. – сглаживание
сгм. – сегмент
сд. – следующий
сдт. – следовательно
сж. – сложение

сим. (симч.) – симметрия (симметрический)
ск. (скн.) – скаляр (скалярный)
скр. – скорость
сл., сл-но (слн.) – случай, случайно (случайный)
сл. (ст.) – столбец (строка) с числом
слг. – слагаемое
СМ – статистические модели
см. – смотрите
см – сантиметр (с числом)
сопр. – сопротивление
сост., состн. (сосщ.) – составляется, составленного (составляющая)
соц. (соцч.) – социальный (социологический)
спрж. – сопряженные
СР – самостоятельная работа
ср. – средняя
ср. кв. отк., СКО – среднее квадратическое отклонение
с.с., СС – сложная система
стд., стдн. (стдз., стдзн.) – стандарт, стандартный (стандартизация, стандартизированная)
ств. (ствн. или ств-но, ствщ.) – соответствие (соответственно, соответствующая)
стн. – соотношение
сп. (спн.) – степень (степенной)
стацн. – стационарный
стс. (стсч.) – статистика (статистический)
сум. (сумв.) – сумма (суммирование)
сущ., сущв. (сущн., сущ-ая) – существует, существование, существенно, существующая)
сф. (сфч.) – сфера (сферический)
сх. (схм., схг.) – сходится (сходящимися, сходящегося)
с/х-ый – сельскохозяйственный
табл. (таблч.) – таблица (табличный)
т.е. – то есть
темп., $t°$ – температура
теор. – теоретический
теппр. (тепизл.) – теплопроводность (теплоизолированный)
техл. – технологический
техн. – технический
т.к. – так как
тмр. – трехмерный (*см.* ммр.)
т.о. – таким образом
тожд. (-но) – тождество (тождественно)
ТП – технологический процесс
триг. (тригч.) – тригонометрия (тригонометрический)
трк. – траектория
трн. – тройной
трсп. (тропн.) – транспонирование (транспонированный)
ттогда – тогда и только тогда
туг., Δ – треугольник
тч. – точка
у., упж. – упражнение
уб. (убщ.) – убывает (убывающий)
увч. – увеличение
угл. ($n$-угл.) – угловой ($n$-угольник)
уд., уд-но (удщ.) – удовлетворяет, удовлетворительно (удовлетворяющий)
ук.: – указание
умн. – умножение
умш. – уменьшение
уп. – упорядочение
упл. – управление
ур. – уравнение
уск. – ускорение
усл. (усн.) – условия (условный)
утв. – утверждение
ФА – факторный анализ
фк. – функция
фкс. (фксн.) – фиксируем (фиксированный)
фкт. (фктн., офкт., дфкт., мфкт.) – фактор (факторный, однофакторный, двухфакторный, многофакторный)
фм. – формула
фнц. (фнцр.) – функциональный (функционирование)
фрмз. – формализация
фунд. – фундаментальный
хрк., хркс., хркз. (хркч.) – характер, характеристика, характеризуется (характеристическая)
цлн., цлнк. (цлнч.) – цилиндр, цилиндрики (цилиндрический)
цлч. – целочисленный
ЦПТ – центральная предельная теорема
црк. – циркуляция
цтр. (цтрв.) – центральный (центрированный)
част. (частч.) – частности, частные (частичный)
чет. – четный
числ. – числовой
члт. – числитель
чт. – читается, читают
чуг. – четырехугольник
шуг. – шестиугольник
ЭВМ – электронная вычислительная машина
эвр. (эврч.) – эвристика (эвристический)
экв. – эквивалентный
экн., экнч. (-т) – экономика, экономический (экономист)
экн.-мтч. – экономико-математический
эксм. (экск.) – экстремум (экстремальный)
эксп. (экспл., экспт.) – эксперимент (экспериментальный, экспериментатор)
экпц. – экспоненциальный
эктп. – экстраполяция

эл. (элр.) – элемент (элементарный)
элкч. (элкдвжщ., элкстсч.) – электрическая (электродвижущая, электростатическая)
элс., элси. (элч.) – эллипс, эллипсоид (эллиптический)
эмп. – эмпирический
эф. (эфв., эфс.) – эффект (эффективный, эффективность)
яв-ся (явм-ся) – является (являющимися)
яв-хся (яв-яся, яв-йся, яв-юся) – являющихся (являющаяся, являющейся, являющуюся)
1, 2, …, $a$ – обз-ия внутри д-ва теоремы, пункта и т.д.
а2 – аксиома 2
з1 – задача 1
зм5 – замечание 5
кз3 – контрольная задача 3
тз1 – типовая задача 1
тп4 – типовой пример 4
л2 – лемма 2
о5 – определение 5
п6 – пример 6
с4 – свойство 4
сл2 – следствие 2
т3 – теорема 3
у8 – упражнение 8
§ (§§) – параграф (параграфы)
5° – пункт 5
2°:3.1 – пункт 2 из гл. 3 §1
(4):3° – стн. 4 из пункта 3
(3):2.3 – стн. (3) из гл. 2 §3
$A \underset{(2)}{\Rightarrow} B$ – из $A$ по стн. (2) следует $B$
$A \underset{(3)}{=} B$ – $A$ в силу стн. (3) равно $B$
■ – конец д-ва
! – подумайте сами, почему так
!! – настоятельно рекомендуем провести рассуждения самим

# I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

До тех пор, пока алгебра и геометрия двигались различными путями, их развитие было медленным, а применение ограниченным. Но когда эти науки объединились, они почерпнули друг у друга свежие силы и в результате быстро двинулись вперед к совершенству.

Ж.Л. Лагранж

## ЛЕКЦИЯ 1

### 1.1. АЛГЕБРА. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

**1°. Предмет алгебры и ее роль в математике**. Читателю еще со школы известно, что одним из вопросов алгебры (алг.) яв-ся вопрос о решении уравнений (ур.) в двух направлениях: решение линейных (лин.) систем (н-р, система двух ур-й с двумя неизвестными) и решение многочленов (мчл.) с одним неизвестным (в частности (част.), квадратное (квн.) ур-ие). В дальнейшем это обобщается на случай общих лин. систем (когда число ур-й не равно числу неизвестных) и мчл-ов любой конечной степени (здесь важным моментом яв-ся вопрос существования (сущв.) решения). Алг-а изучает и конечномерное (кмр.) лин. пространства (пр.), преобразование (прб.) координат (крд.) и т.д. Однако такое понимание алг-ы не достаточно (дт.). В настоящее время основным назначением алг-ы яв-ся изучение алгебраических (алгч.) операций. Остановимся на этом более конкретно.

Алг-а есть раздел математики (мт.), изучающий операции над элементами (эл.) множества (системы) произвольной природы. Н-р, сложение (сж.) сил в физике, сж-ие и умножение (умн.) матриц (м-ц), операции над прб-ми пр-ва, над векторами и т.д. Причем в алг-е отсутствует идея предела, т.е. идея бесконечной (беск.) близости эл-ов, как это имеет место в анализе или топологии.

Предмет алг-ы рассматривает (расв.) систему, определяет (опр.) операции (с некоторыми (нек.) свойствами – аксиомами) и изучает утверждения (утв.), т.е. теоремы относительно (отс.) этих систем. Причем изучению подвергаются следующие (сд.) наиболее важные типы.

**Поля** – это системы, в к-ых опр-на операции сж-ия и умн-ия. Обе коммутативны ($a + b = b + a$, $ab = ba$), ассоциативны ($a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$), дистрибутивны ($(a + b)c = ac + bc$). Обладают обратными операциями – вычитанием и делением. Введение понятия поля избавляет нас от параллелизма (прл.) при рас-и дсв-ых и комп-ых чисел в отдельности. Так, расв-я дсв-ые числа, мы делали замечание, что введенные там операции и их св-ва дословно переносятся на случай комп-ых чисел или наоборот. Во всех этих случаях можно было заметить, что изложенная теория полностью сохранилась бы и в том случае, если бы мы допустили к рас-ю лишь рациональные (рац.) числа. Т.о., примерами полей служат все системы комп-ых, дсв-ых, рац-ых чисел. Но система положительных (плж.) дсв-ых чисел не образует поля, т.к. разность двух чисел может не принадлежать этому полю. Теория полей оказалась областью (обл.) для дальнейшего развития теории ур-й, а основные ветви полей (поля алгебраических (алгч.) чисел и поля алгч-их функций (фк.)) связали поля соответственно (ств.) с теорией чисел и теорией фк-й комп-го переменного (пер.).

**Кольцо** – система (т.е. совокупность (свк.) эл-ов произвольной природы), где опр-ны две операции – сж-ие и умн-ие. Сж-ие коммутативно, ассоциативно, дистрибутивно по отношению (отн.) к умн-ию и обладает обратной операцией – вычитанием. В кольце может отсутствовать коммутативность умн-ия, ассоциативность умн-ия, необязательным яв-ся наличие единицы (ед.) и умн-ие не обладает обратной операцией. Так, системы всех целых $Z$, рац-ых $Q$, дсв-ых $R$ и комп-ых чисел $C$ яв-ся числовыми кольцами. Однако система плж-ых (отц-ых) чисел не будет кольцом, т.к. $a - b$ или $b - a$ яв-ся отц-ым ($(-a)(-b) = ab$ яв-ся плж-ым). Свк-ть фк-й с обл-ю опр-ия $R$ и принимающей дсв-ые значения (зн.) образует кольцо, т.к. для любого $x_0 \in R$ зн-ия $f(x_0) + \varphi(x_0), f(x_0)\varphi(x_0), f(x_0) - \varphi(x_0) \in R$. Кольцом яв-ся также мн-во квн-ых м-ц порядка $n$ с дсв. эл-ми, расв-ое с операциями сж-ия и умн-ия м-ц, к-ое уд-ет всем требованиям опр-ия кольца, за исключением закона коммутативности умн-ия (это может и отсутствовать). С некоммутативным умн. приходится встречаться так часто и в таких важных случаях, что в настоящее время под термином «кольцо» понимают обычно некоммутативное кольцо. В последнее время повышается интерес и к кольцам с неассоциативным умн-ем. Примером неассоциативных колец яв-ся мн-во векторов трехмерного евклидова пр-ва отс-но операций сж-ия и векторного умн-ия векторов.

Теория колец включает в себя теорию гиперкомплексных систем и теорию идеалов, связанные рядом мтч-их дисциплин, в част-и, функциональным (фнц.) анализом.

**Группа** – система (обз. $G$) с одной операцией (назм-ой умн-ем или сж-ем), к-ая ассоциативна, но не обязательно коммутативна, обладает обратной операцией (делением или вычитанием), имеет едч-ый и обратный эл-ты, т.е. если $a$, $b$, $c \in G$, то: 1) $a * b \in G$, 2) $(a * b) * c = a * (b * c)$, 3) $\exists\, e \in G$ такое, что $a * e = e * a = a$ ($e$ – едч-ый эл-т), 4) $\forall\, a \in G\ \exists\, a^{-1}$ такое, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Из опр-ия следует, что если $*$ есть $\cdot$ (умн-ие), то $e = 1$; если же $* \equiv +$, то $e = 0$, $a^{-1} = -a$.

По своей природе эл-ты $G$ могут быть самыми различными (числа, м-цы, фк-и, геом-ие объекты и т.д.).

Если операция, опрн-ая в $G$, коммутативна ($a * b = b * a$), то группа наз. коммутативной или абелевой.

Примеры групп: свк-ть целых чисел отс-но операции сж-ия, свк-ть дсв-ых чисел отс-но умн-ия.

**Структура** – система с двумя операциями – сж-ем и умн-ем, к-ые коммутативны, ассоциативны и уд-ют требованиям: и сумма, и пзв-ие эл-та с самим собой равны самому этому эл-у; если сумма двух эл-ов равна одному из них, то пзв-ие равно другому, и обратно. Примером структуры яв-ся система натуральных (нтр.) чисел отс-но операций взятия НОК и НОД, н-р, НОК (24, 36) = 72, НОД (24, 36) = 12; в част-и, НОК (9, 36) = 36, НОД (9, 36) = 9. Теория структур имеет связь с теорией групп и колец, а одна старая ветвь геом-и – проективная геом. – оказалась частью теории структур. Теория электрических сетей также связана с теорией структур.

**Универсальная алгебра** есть общая теория теории колец, групп и структур. Универсальная алг. тесно связана с мтч-ой логикой.

**Модели** – понятие более общее, чем понятие универсальной алгебры. Моделями наз. такие мн-ва, к-ые, кроме набора операций, снабжены набором отн-й, т.е. теория моделей яв-ся пограничной между мтч-ой логикой и алг-ой.

**Алгебраическая система** есть общая теория теории универсальной алг-ы и моделей. Формальным аппаратом этой теории служит язык исчисления предикатов (см. 2.3 из [33]).

В настоящее время выявлен ряд отделов алг-ы, пограничных с др. разделами мт-ки. Н-р, топологическая алг. изучает системы, в к-ых операции непрерывны (непр.) отс-но нек-ой сходимости (сх.), опрн-ой для эл-ов этих систем. Примером служат системы дсв-ых чисел.

К топологической алг-е близка теория непр-ых (или лиевых) групп, имеющая многочисленные приложения в различных вопросах геом-и, теоретической (теор.) физики, в гидродинамике. Теория упорядоченных (уп.) алгч-их систем возникла в связи с иссл-ми по основаниям геом-и и используется в приложениях фнц-го анализа.

Дифференциальная (дифн.) алгебра изучает новые связи между алг-ой и теорией дифн-ых ур-й.

В последние годы возникли новые разделы алг-ы, такие, как, н-р, теория полугрупп и теория квазигрупп, гомологическая алг., теория категорий.

Отсюда видно глубокое проникновение алг-ы в др. разделы мт-ки и объединение их в единое целое на базе фунд-ых понятий алг-ы. Причина этого состоит в том, что введенные алгч. операции над нек-ым мн-ом не зависят от природы этого мн-ва.

Т.о., роль алг-ы в современной мт-ке исключительно важна, и сущ-ет объективная тенденция к дальнейшей «алгебризации» мт-ки. Алгч-ие понятия и методы широко применяются в теории чисел, фнц-ом анализе, теории дифн-ых ур-й, в геом-и и т.д.

Кроме того, алг-а имеет большое прикладное зн-ие, н-р, отметим ее выходы в физику (теория представлений конечных групп в квантовой механике, дискретные (дк.) группы в кристаллографии), в кибернетику (теория автоматов), в мтч. экономику (лин. неравенства (нерав.)) и т.д.

В данной книге подробно изложена только лин. алг-а и приведены основные понятия (эл-ты) лишь нек-ых разделов алг-ы.

**Линейная алгебра** яв-ся одним из важных разделов алг-ы и изучает специальные мн-ва – м-цы, лин-ые пр-ва, алгч-ие формы, к-ые связаны между собой настолько тесно, что большинство задач лин-ой алг-ы допускают равносильную формулировку в каждой из этих теорий.

Наиболее связанной с практическими выч-ми яв-ся матричная (мч.) точка зрения, поэтому теория м-ц яв-ся основным объектом изучения в лин-ой алг-е.

С др-ой стороны, в геом-и и механике большинство задач лин-ой алг-ы формулируются на языке лин-ых пр-в. Поэтому умение переходить от формулировок в одной теории к формулировкам в другой яв-ся одним из важнейших навыков, приобретаемых при изучении лин-ой алг-ы.

С точки зрения алгч-их форм, лин. алг-а делится на три части: 1) лин. формы; 2) билинейные и квадратичные формы; 3) полилинейные формы (алг-а тензоров и теория инвариантов).

Лиин. алг-а по приложению в мт-ке занимает первое место среди ветвей алг-ы. Так, н-р, теория инвариантов и тензорная алг. играют важную роль в дифн. геом-и. Теория векторных пр-в применяется и дальше развивается в фнц-ом анализе (в бесконечномерном (бескмр.) пр-ве).

Методы лин-ой алг-ы широко применяются при решении разнообразных экономических (экнч.) задач. Эта роль лин-ой алг-ы особо выросла с созданием и широким применением ЭВМ.

Как дополнение (дпн.) к изложенному по алг-е см. в [2, 5, 12, 17, 19, 20, 24].

**2°. Матрицы, основные понятия**. Матрицей (мц.) $A$ размером $m \times n$ наз. прямоугольная (пуг.) табл. из $m$ строк (ср.) и $n$ столбцов (сл.), состоящая из чисел или иных мтч-их врж-й $a_{ij}$ (назм-х эл-ми мц-ы) и обозначается (обз.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Н-р, $A = \begin{pmatrix} 1 & y & 5 \\ -2x & -3 & 0 \end{pmatrix}$ – мц. размером $2 \times 3$, ее эл-ы: $\begin{matrix} a_{11} = 1, & a_{12} = y, & a_{13} = 5, \\ a_{21} = -2x, & a_{22} = -3, & a_{23} = 0 \end{matrix}$.

Мц-у $A$ можно обз-ть и так:

$$A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (1')$$

Мц-а, все эл-ы к-ой равны нулю, наз. нулевой мц-й и обз-ся $O$ или $O_{mn}$, т.е. $a_{ij} = 0$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Мц-ы равны между собой, если равны все соответствующие (ств.) эл-ы этих мц., т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Если $m = n$, то мц-а наз. квадратной (квн.) порядка $n$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где произведение (пзв.) эл-ов $a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ наз. главной диагональю, а $a_{1n}a_{2n-1}\dots a_{n1} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$ – побочной диагональю мц-ы.

В частности (част.), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ наз. диагональной, а $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – единичной (едч.) мц-й.

**3°. Операции над матрицами и их свойства**.

**1.** Сложение (сж.) матриц. Суммой м-ц $A$ и $B$ одинакового порядка наз. мц. $C$ того же порядка с эл-ми, равными суммам соответствующих (ствщ.) эл-ов м-ц $A$ и $B$, т.е. $C = A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Мц. $-A = (-1)A$ наз. противоположной м-це $A$. Разность м-ц можно опр-ть так: $A - B = A + (-B)$.

**2.** Умножение (умн.) числа на матрицу. Пзв-ем числа $\alpha$ на м-цу $A$ наз. мц. $C$, эл-ми к-ой яв-ся эл-ы м-цы $A$, умн-ые на число $\alpha$, т.е. $C = \alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

**п1.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Из опр-ия следуют сд-ие свойства (св.):

**с1**. $A + B = B + A$ (коммутативность (комм.) сж-ия).

**с2**. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность (асс.) сж-ия).

**с3**. $\left.\begin{array}{l} (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \end{array}\right\}$ (дистрибутивность (дист.) умн-я суммы чисел (м-цы) на м-цу (число)).

**с4**. $\alpha A = A\alpha$, в част., $1 \cdot A = A \cdot 1$, $0 \cdot a = a \cdot 0 = O_{mn}$, $\alpha O_{mn} = O_{mn}\alpha = O_{mn}$.

**с5**. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$.

**3.** Умножение матриц. Пусть даны мц-ы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Пзв-ем м-ц $A$ (порядка $m \times n$) и $B$ (порядка $n \times k$) наз. мц. $C$ (порядка $m \times k$), $c_{ij}$-й эл. к-ой опр-ся по фм-е

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,k} \qquad (2)$$

и обз-ся $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\text{л}} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$.

**зм1.** Пзв-ие м-ц $A$ и $B$ имеет смысл лишь тогда, когда число сл-ов м-цы $A$ совпадает с числом ср-к м-цы $B$.

**п2.** $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$.

Из опр-ия получим сд-ие св-ва:

**с6**. $AB \neq BA$, н-р, $\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, т.е. $AB \neq BA$.

**с7**. Если $AB = BA$, то $A$ и $B$ наз. перестановочными мц-ми, н-р, $AE = EA = A$.

**с8**. $(AB)C = A(BC)$.

**с9**. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.

**с10**. $(A + B)C = AC + BC$.

**с11**. $C(A + B) = CA + CB$.

**с12**. $AE = EA = A$, $AO = OA = 0$, $|AB| = |A||B|$.

**4.** Транспонирование матриц. Рас-им м-цу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Мц. $A^{\mathrm{T}} = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, получающаяся из м-цы $A$ заменой ср-к сл-ми, наз.

транспонированной (трспн.) по отн-ю к $A$.

Верны сд. правила для трспн-х м-ц $A$ и $B$:

1) $(A')' = A$;

2) $(\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B'$;

3) $(AB)' = B'A'$;

п3. $$\left.\begin{aligned} (AB)' &= \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ (AB)' &= B'A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (AB)' = B'A'.$$

**4°. Элементарные преобразования матриц.** Элементарными (элр.) прб. яв-ся:

а) перестановка местами двух ср-к (сл-ов) м-цы;

б) умн-ие всех эл-ов ср-и (сл-а) м-цы на число, отличное от нуля;

в) прибавление ко всем эл-ам ср-и (сл-а) м-цы ствщ-их эл-ов др-ой ср-и (сл-а), умн-ых на одно и то же число.

Две м-цы $A$ и $B$ наз. эквивалентными (экв.), если одна из них получается из др. с помощью элр-ых прб-й. Записывается $A \sim B$.

С помощью элр-ых прб-й любую м-цу можно привести к едч-ой м-це в левом верхнем углу, н-р, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Такую м-цу наз-ют канонической (канч.).

**п4.** Привести к канч-му виду м-цу $A$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Р. $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -9 & -6 \\ 1 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ :3 \\ :2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**5°. Ранг матрицы**. Рас-им м-цу (1) порядка $m \times n$. Выделим в ней $k$ ср-к и $k$ сл-ов ($k \le \min(m, n)$). Из эл-ов, стоящих на пересечении выделенных ср-к и сл-ов, составим опрт-ль $k$-го порядка (см. 1.2). Все такие опрт. наз-ся минорами м-цы (1).

Наибольший (нб.) из порядков миноров данной м-цы, отличных от нуля, наз. **рангом матрицы** и обз-ся $r$, $r(A)$.

Минор, порядок к-го опр-ет ранг м-цы, наз. **базисом**. Сл-цы и ср-и базисного минора наз. **базисными столбцами** и **строками**. У м-цы может быть несколько базисных миноров.

Ранг м-цы обладает сд. св-ми:

**с1**. При трсп-и м-цы ранг не меняется. Отсюда следует, что все св-ва ср-к (далее рас-им только их) имеет место и для сл-ов м-цы.

**с2**. Если вычеркнуть из м-цы нулевую ср., то ранг ее не изменится.

**с3**. Если вычеркнуть из м-цы один из прц-ых ср-к, то ранг ее не изменится.

**с4**. Ранг м-цы не изменяется при элр-ых прб-ях м-цы. Причем ранг канч-ой м-цы равен числу ед-ц на главной диагонали. На этом основан один из способов выч-ия ранга м-цы.

**п5**. Выч-ть ранг м-цы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, приведя ее к канч. виду.

Р. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{-4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда $r = 3$.

**Зм2**. При выч-и ранга м-цы не обязательна перестановка двух ср-к (сл-ов).

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{-4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Данный пример решим методом окаймления, основанном на приведении опр. миноров, т.е. находим неравные нулю опрт-ли (см. 1.2), начиная с малого размера, двигаясь к большим размерам, включая предыдущие не равные нулю опрт-ли малого размера. Из м-цы $A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ находим (см. 1.2) $d_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \cancel{-4} & -1 \\ 1 & \cancel{-2} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, но $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 0$ и $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 0$, значит, $r = 3$.

Более подробно о мц-ах см. в [2, 17].

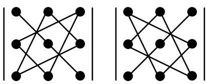
# ЛЕКЦИЯ 2

## 1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

**1°. Определители третьего порядка**. Пусть дана квн. м-ца 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Под определителем (детерминантом) третьего порядка понимается выражение (врж.):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (1)$$

где $a_{ij}$ наз. эл-ми определителя (oпрт.), а пзв-ия суммы (1) наз. членами опрт-ля, в част., $a_{11}a_{22}a_{33}$ – главная диагональ, $a_{13}a_{22}a_{31}$ – побочная диагональ. Члены, найденные по правилу рис. 1 (+), имеют положительные (плж.) знаки, а по правилу рис. 1 (–) – отрицательные (отц.) знаки. Члены опрт-ля можно найти и по правилу Сарруса:



(+) (–)

Рис. 1

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$- \quad - \quad - \; + \quad + \quad + \qquad (1')$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

В част., опрт-ль второго порядка имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2)$$

**п1**. Выч-ть опрт-ль $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 0 - 1 - 2 - 0 = -6.$

**2°. Алгебраические дополнения и миноры**. Опрт-ль (1) можно получить, разложив его по эл-ам любой ср-и:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}. \quad (3)$$

Величина (вел.) $A_{ij}$, соответствующая (ствщ.) эл-у $a_{ij}$, наз. алгч. дополнением (дпн.).

Аналогичную (анч.) фм. можно получить для $j$-го сл-а (сл.):

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}. \quad (3')$$

В опрт-ле (3) вычеркнем $i$-ю ср-у и $j$-й сл., тогда оставшийся опрт-ль 2-го порядка назовем минором и обз-им $M_{ij}$, ствщ-й эл-у $a_{ij}$.

Алгч-ое дпн. $A_{ij}$ и минор $M_{ij}$ связаны фм-ой:

$$A_{ij} = (-1)^{i+1}M_{ij}. \quad (4)$$

Тогда фм-ы (3) и (3′) принимают вид:

$$D = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + (-1)^{i+3}a_{i3}M_{i3}. \quad (5)$$

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}M_{3j}. \quad (5')$$

Знаки $(-1)^{i+j}$ эл-а $a_{ij}$ опрт-ля можно задать табл-ей: $\begin{array}{|ccc|}\hline + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ \hline\end{array}$.

**п2**. Выч-ть опрт-ль п1, разложив его по эл-ам второй ср-и.

Р. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (1-1) - 2(1+2) = -6.$

**зм1**. Введение алгч-их дпн-й и миноров позволяют выч-ть опрт-ли четвертого и более порядков, используя св-ва опрт-ей. Причем фм-ы (3), (3′) и (5), (5′) для опрт-ля $n$-го порядка $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ имеет вид:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (4а)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (4б)$$

$$D = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}. \quad (5а)$$

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}. \quad (5б)$$

**3°. Свойства определителей**. Сформулируем основные (осн.) св-ва опрт-ей, присущие опрт-ям всех порядков.

**с1**. (Равноправность ср-к и сл-ов). Опрт-ль не меняет своего зн-я при замене его ср-к сл-ми и наоборот (т.е. при трсп-и):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}} = D'. \quad (5в)$$

Д. Покажем, что $D = D^{\mathrm{T}}$. Действительно (дсв.), разлагая первый опрт-ль стн. (5в) по эл-ам первой ср-и, а второй – по эл. первого сл-а, в силу (4а) и (4б) получим один и тот же результат ■

**зм2**. Из с1 вытекает, что все св-ва отс-но сл-ов имеет место и для ср-к. Поэтому в дальнейшем рассмотрим (рас.) св-ва только сл-ов.

**с2**. От перестановки двух сл-ов знак перед опрт-ем меняется на противоположный.

Д. Рас-им опрт-ль $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Пусть переставляются две соседние сл-ы $j-1$ и $j$. Тогда в силу (5б) получим

$$D(j) = D = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj},$$

$$D(j-1) = (-1)^{1+j-1}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j-1}a_{2j}M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j-1}a_{nj}M_{nj} = (-1)D = -D.$$

Т.о., от перестановки двух соседних сл-ов знак опрт-ля меняется на противоположный. Теперь пусть переставляются произвольные сл-ы $j-m$ и $j$. Для этого сначала надо делать $m$, а затем $m-1$ перестановок сл-ов, т.е. получим всего $2m-1$ – нечетное (нечет.) число перестановок сл-ов. Т.к. знак опр-ля меняется на противоположный при каждой перестановке, значит, опрт-ль меняет знак при перестановке любых двух сл-ов ■

**п3**. Выч-ть опрт-ль п1, поменяв местами 1-й и 3-й сл-ы.

Р. По условию, $m = 2$, значит, всего $2m - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ перестановок. Находим $D_m = D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 1) - (-1 - 4) = 1 + 5 =$ $= 6 = -D$ (см. п2).

**сл1**. Опрт-ль, имеющий два одинаковых сл-а, равен нулю.

Д. $D = \begin{cases} D, \text{ т.к. сл-ы одинаковы,} \\ -D, \text{ одинаковые сл-ы поменяли.} \end{cases}$ Отсюда следует ($\Rightarrow$) $D = 0$.

**зм3**. Если опрт-ль имеет одинаковые ср-и или сл-ы, то фм-ы (4а) и (4б) имеют вид:

$$D = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} \ (k \neq i), \tag{6а}$$

$$D = a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} \ (k \neq j). \tag{6б}$$

Н-р, $D = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$

$D = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$

**п4**. Выч-ть опрт-ль п1, взяв 1-й сл-ц вместо 3-го.

Р. $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 + 1 - 4 + 2 = 0.$

**с3**. Общий множитель всех эл-ов какого-либо (н-р, $j$-го) сл-а можно вынести за знак опрт-ля, т.е. $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \lambda a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & \lambda a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda D_1.$

Д. Разложив опрт-ль по эл-ам $j$-го сл-а, в силу (4б) получим

$D = \lambda a_{1j}A_{1j} + \lambda a_{2j}A_{2j} + \ldots + \lambda a_{nj}A_{nj} = \lambda[a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}] =$

$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda D_1$ ■

**сл2**. Если эл-ы какого-либо сл-а опрт-ля пропорциональны (прц.) ствщ. эл-ам др-го сл-а, то опрт. равен нулю.

Д. Общий множитель выносим за знак опрт-ля, тогда опрт-ль имеет два одинаковых сл-а, значит, по сл1, опрт-ль равен нулю.

Н-р, $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$ ■

**сл3**. Если все эл-ы какого-либо (н-р, $j$-го) сл-а опрт-ля равны нулю, то опрт-ль равен нулю.

$$\text{Д. } D = \begin{vmatrix} a_{11} \dots 0a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots 0a_{2j} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots 0a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \ \blacksquare$$

Заметим, что сл3 можно д-ть также, использовав стн. (4б).

**с4**. Если эл-ы какого-либо (н-р, $j$-го) сл-а опрт-ля представляют собой суммы двух слг-ых, то опрт-ль может быть разложен на сумму ствщ-их опрт-ей, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a'_{1j} + a''_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a'_{2j} + a''_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & (a'_{nj} + a''_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

Д. По (4б) имеем $D = (a'_{1j} + a''_{1j})A_{1j} + (a'_{2j} + a''_{2j})A_{2j} + \dots + (a'_{nj} + a''_{nj})A_{nj} =$

$= [\, a'_{1j}A_{1j} + a'_{2j}A_{2j} + \dots + a'_{nj}A_{nj}] + [\, a''_{1j}A_{1j} + a''_{2j}A_{2j} + \dots + a''_{nj}A_{nj}] =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2 \ \blacksquare$$

**с5**. Вел-на опрт-ля не изменится, если какому-либо (н-р, $j$-му) сл-у прибавить или отнять другой (н-р, 1-й) сл-ц, умн-ый на одно и то же число.

$$\text{Д. С учетом с4 и с3 получим } D = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} + \alpha a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} + \alpha a_{21} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nj} + \alpha a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{21} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = D + \alpha \cdot 0 = D \ \blacksquare$$

**4°. Определители четвертого и более порядков. Примеры**. Используя св-ва с1-с5 и следствий сл1-сл3, можно понизить порядок опрт-ля, что позволяет выч-ть опрт-ль любого порядка.

**п5**. Выч-ть опрт-ль 4-го порядка $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 9) = 9.$

**п6**. Выч-ть опрт-ль треугольной (туг.) м-цы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

## ЛЕКЦИЯ 3

## 1.3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

**1°. Основные понятия**. Общая система лин-х ур-й имеет сд-й вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, к-ые надо опр-ть (эл-ы из поля $K$), $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коэф-ы и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены, взятые из числового поля $K$.

Решением (р.) системы (1) наз. свк-ть чисел $c_1, c_2, \ldots c_n \in K$, к-ые после подстановки в (1) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращают все ур-ия системы в тождества (тожд.).

Не всякая система (1) имеет р-ие, н-р,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Какие бы $c_1, c_2$ не взяли, ур-ия в тожд-а не обращаются.

Система (1) наз. совместной, если имеет хотя бы одно р-ие.

Система (1) наз. несовместной, если имеет по крайней мере два различных р-ия, н-р,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Р-ия будут $\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}\right) = (0, 0)$, $\left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}\right) = (3, -2)$ и т.д.

При изучении системы (1) возникают сд. задачи:

1. Выяснить, яв-ся ли система (1) совместной или несовместной (т.е. О: р-й нет).
2. Если система яв-ся совместной, то выяснить, яв-ся ли она опрн-ой.
3. Если система (1) совместна и опрн-на, то найти ее единственное (едн.) р-ие.
4. Если система (1) совместна и неопрн-на, то описать свк-ть всех р-ий.

Приведем два метода для выяснения этих задач, т.е. р-ия системы (1). Сначала рас-им случай, когда $m = n$.

**2°. Правило Крамера**. Пусть требуется найти р-ие системы (1). Предположим, что

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

Покажем, что такая система совместна и опрн-на и найдем фм-у для выч-ия ее едн-го р-ия.

Пусть $(c_1, c_2, \ldots c_n)$ – некоторое (нек-ое) р-ие системы (1), т.е. верно:

$$\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n = b_n, \end{array} \quad \begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ . \\ A_{n1} \end{vmatrix}.$$

$$\overbrace{(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})}^{D \text{ по (4б): 1.2}}c_1 + \overbrace{(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})}^{0 \text{ по (6б): 1.2}}c_2 + \ldots$$
$$\ldots + \underbrace{(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})}_{0 \text{ по (6б): 1.2}}c_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1},$$

где правая часть равенства (рав.) есть в силу (4б): 1.2 разложение опрт-ля $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Тогда на основании (4б), (6б): 1.2 получим $Dc_1 = D_1$, т.е. $c_1 = D_1/D$.

Анч-но находим

$$c_j = \frac{D_j}{D},\ j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Теперь остается показать, что р-ие системы (1) всегда сущ-ет. Для этого подставим (5) в (1) вместо $x_j$ и убедимся в получении тожд-а. Для $i$-го ур-ия имеем:

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{in}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots$$
$$\ldots + b_nA_{n1}) + a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) + \ldots + a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn})] =$$
$$= \frac{1}{D}[b_1\underbrace{(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \ldots + a_{in}A_{1n})}_{0} + \ldots + b_i\underbrace{(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in})}_{D} + \ldots +$$
$$+ b_n\underbrace{(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \ldots + a_{in}A_{nn})}_{0}] = \frac{1}{D}b_iD = b_i,$$

т.е. совпадает с правой частью $i$-го ур-ия.

Итак, получили правило Крамера: если опрт-ль (4) системы (1) не равен нулю, то система имеет едн. р-ие, выч-мое по фм-е (5).

**п1**. По правилу Крамера р-ть систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Р. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 21 = 9.$

$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-12) = 9 \quad \Big| \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{9} = 1,$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&-1\\-5&0&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\-5&3\end{vmatrix}=3+15=18 \qquad \Bigg|\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{18}{9}=2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\-1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\-5&4&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&1\\-5&4\end{vmatrix}=-(4+5)=-9 \qquad \Bigg|\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-9}{9}=-1.$$

**3°. Метод Гаусса**. Правило Крамера используется при малом $n$ и когда коэф-ы $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$ заданы точно. Поэтому на практике в основном используется метод Гаусса, т.е. метод полного исключения (иск.). Пусть требуется найти р-ие системы ($D \neq 0$):

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3;\\
&.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Экв-ым прб. (см. 3°: 1.1) м-цы (основной и расширенной) р-м систему (6).

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\\ \ldots\\ \mathrm{IV}\end{array}
\overbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1n}&b_1\\
a_{21}&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2n}&b_2\\
a_{31}&a_{32}&a_{33}&\ldots&a_{3n}&b_3\\
.&.&.&.&.&.\\
\underbrace{a_{n1}}&\underbrace{a_{n2}\ a_{n3}}_{\text{осн. м-ца}}&&\ldots&a_{nn}&b_n
\end{array}\right)}^{\text{расш. м-ца}}
\begin{array}{c}:a_{11}\to\\ \\ \sim\\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1&a_{12}^{(1)}&a_{13}^{(1)}&\ldots&a_{1n}^{(1)}&b_1^{(1)}\\
0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&\ldots&a_{2n}^{(1)}&b_2^{(1)}\\
0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}&\ldots&a_{3n}^{(1)}&b_3^{(1)}\\
.&.&.&.&.&.\\
0&a_{n2}^{(1)}&a_{n3}^{(1)}&\ldots&a_{nn}^{(1)}&b_n^{(1)}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}\\ :a_{22}^{(1)}\to\\ \sim\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\\ \to\\ \sim\\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1&0&a_{13}^{(2)}&\ldots&a_{1n}^{(2)}&b_1^{(2)}\\
0&1&a_{23}^{(2)}&\ldots&a_{2n}^{(2)}&b_2^{(2)}\\
0&0&a_{33}^{(2)}&\ldots&a_{3n}^{(2)}&b_3^{(2)}\\
.&.&.&.&.&.\\
0&0&a_{n3}^{(2)}&\ldots&a_{nn}^{(2)}&b_n^{(2)}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}\\ \\ :a_{33}^{(2)}\to\\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1&0&0&\ldots&0&b_1^{(n)}\\
0&1&0&\ldots&0&b_2^{(n)}\\
0&0&1&\ldots&0&b_3^{(n)}\\
.&.&.&.&.&.\\
0&0&0&\ldots&1&b_n^{(n)}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}\\ \\ \Rightarrow\\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{l}
x_1=b_1^{(n)},\\
x_2=b_2^{(n)},\\
x_3=b_3^{(n)},\\
.\ \ .\ \ .\\
x_n=b_n^{(n)}.
\end{array}$$

Прб-ие м-цы получаем так: 1) $\mathrm{I}_1$: $a_{11} \doteq \mathrm{I}_2$ (где $\doteq$ – знак засылки), $\mathrm{I}_2\,(-a_{21}) + \mathrm{II}_1 \doteq \mathrm{II}_2$, $\mathrm{I}_2\,(-a_{31}) + \mathrm{III}_1 \doteq \mathrm{III}_2$, …, $\mathrm{I}_2\,(-a_{n1}) + \mathrm{IV}_1 \doteq \mathrm{IV}_2$ и тем самым закончили первую итерацию. Анч-но осуществляем вторую итерацию для второго сл. $a_{22}^{(1)}$ м-цы $\mathrm{II}_2$: 2) $\mathrm{II}_2$: $a_{22}^{(1)} \doteq \mathrm{II}_3$, $\mathrm{II}_3\,(-a_{12}^{(1)}) + \mathrm{I}_2 \doteq \mathrm{I}_3$, $\mathrm{II}_3\,(-a_{32}^{(1)}) + \mathrm{III}_2 \doteq \mathrm{III}_3$, …, $\mathrm{II}_3\,(-a_{n2}^{(1)}) + \mathrm{IV}_2 \doteq \mathrm{IV}_3$. Так же поступаем с ср-ой $a_{33}^{(2)}$ м-цы $\mathrm{III}_3$ и т.д.

Прб-ие расширенной м-цы системы (6), с помощью к-го получили р-ие $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_n^{(n)})$, наз. методом Гаусса. Причем форма едч. м-цы в этом прб-и не обязательно канч-ая.

**п2**. Методом Гаусса р-ть систему п1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{array}$$

**п3**. Р-ть систему
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{а) по правилу Крамера;} \\ \\ \text{б) методом Гаусса.} \end{array}$$

Р. а) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & -1 & 4 & -3 \\ \cancel{0} & -1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{-1} & 2 & -4 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-5} & -7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} =$

$= -16 - 28 = -44;$

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 9 & -1 & 2 \\ \cancel{0} & -7 & 5 & -2 \\ \cancel{0} & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{9} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 2 & 4 & \cancel{0} \\ 6 & 1 & \cancel{0} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2(2 - 24) = -44;$

Анч-но находим $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 44$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -88$. $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-44}{-44} = 1$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{44}{-44} = -1,$

$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{0}{-44} = 0$, $x_4 = \dfrac{D_4}{D} = \dfrac{-88}{-44} = 2.$

Ответ (О): $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 0, 2);$

б) $B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & 12 & 24 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -44 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 2. \end{array}$ .

**4°. Невырожденная и обратная матрицы. Матричное уравнение**.

Квн. м-ца $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ наз. невырожденной (или обратимой), если ее опрт-ль не равен нулю, т.е. $D = \det A \neq 0$. В противном случае ($D = 0$) м-ца наз. вырожденной.

Пусть дана квн. м-ца $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$ и $D = \det A \neq 0$. Тогда сущ-ет обратная м-ца $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ такая, что

$$E = AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Требуется выч-ть обратную м-цу. Для этого стн. (7) напишем в развернутом виде по сл-ам едч-ой м-цы $E$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + \dots + a_{1n}\alpha_{n1} = 1; \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + \dots + a_{2n}\alpha_{n1} = 0; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}\alpha_{11} + a_{n2}\alpha_{21} + \dots + a_{nn}\alpha_{n1} = 0, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + \dots + a_{1n}\alpha_{n2} = 0; \\ a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + \dots + a_{2n}\alpha_{n2} = 1; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}\alpha_{12} + a_{n2}\alpha_{22} + \dots + a_{nn}\alpha_{n2} = 0. \end{array}\right\}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Эти м-цы имеют одну и ту же осн-ю мц. $A$. Причем $D = \det A \neq 0$, поэтому каждая система имеет едн. р-е, к-ое можно найти по фм-ам Крамера. Т.к. в правой части каждой системы только один эл-т равен ед-е, а все остальные равны нулю, то

$$\alpha_{11} = \frac{A_{11}}{D},\ \alpha_{21} = \frac{A_{12}}{D},\ \dots,\ \alpha_{n1} = \frac{A_{1n}}{D},$$

$$\alpha_{12} = \frac{A_{21}}{D},\ \alpha_{22} = \frac{A_{22}}{D},\ \dots,\ \alpha_{n2} = \frac{A_{2n}}{D},$$

и вообще, $a_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{D}$, $i, j = \overline{1,n}$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Т.о., обратная мц. по (8) выч-на с помощью алгч-их дпн-й.

**п4**. Найти обратную м-цу к м-це $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Р. Находим $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 2 = 3.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_{11} = 1$ | $A_{21} = -(-2) = 2$ | $A_{31} = 2 - 1 = 1$ | |
| $A_{12} = -(-2) = 2$ | $A_{22} = -1 + 2 = 1$ | $A_{32} = -(1) = -1$ | $\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ |
| $A_{13} = 2$ | $A_{23} = -(-4) = 4$ | $A_{33} = -1$ | |

Выч-ие обратной м-цы (при большом $n$) по фм. (8) очень сложное, поэтому на практике используют метод (Гаусса) полного иск-ия:

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{array}\right). \text{ Отсюда получим } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная м-ца обладает сд. св-ми:

**с1**. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**с2**. $(A^{-1})^{-1} = A$.

**с3**. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

**с4**. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/|A|$.

Понятие «обратная матрица» может быть использовано для р-ия матричных (мч.) ур-й.

$$AX = B, \tag{9}$$

$$XA = B, \tag{9а}$$

$$AXB = C, \tag{9б}$$

где $A$, $B$, $C$ – заданные м-цы, $X$ – неизвестная м-ца.

Умн-в ур. (9) на $A^{-1}$ слева, получим ее р-ие:

$$X = A^{-1}B, \tag{10}$$

Заметим, что ур. (9а) сводится к виду (9) с помощью трсп-ия. Ур. (9б) в случае, когда одна из м-ц $A$, $B$ обратима, сводится к ур-ям (9) и (9а): $AX = CB^{-1}$ или $XB = A^{-1}C$. Поэтому далее будем рас-ть в основном ур. (9). Обратную м-цу стн-я (10) выч-им методом Гаусса.

**п5**. Найти р-ие мч-го ур-я $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Р. $B^* = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$, $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

**п6**. Р-ть ур-е: $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Р. Применим к исх. ур-ю операцию трсп-ия: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$B^* = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&1&4&1\\ 1&1&-1&-1&3&-2\\ -1&0&1&3&2&5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&1&4&1\\ 0&-1&-2&-2&-1&-3\\ 0&2&2&4&6&6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&-3&-2&-5\\ 0&1&2&2&1&3\\ 0&0&-2&0&4&0 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-3&-4&-5\\ 0&1&0&2&5&3\\ 0&0&1&0&-2&0 \end{array}\right)$. Приведем ствн-ые этапы действий над этими мц-ми:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\text{II} + \text{I}\,(-1) \doteq \text{II}$ | $\text{I} + \text{III}\,(-1) \doteq \text{I}$ | $\text{II}\,(-1) \doteq \text{II}$ | $\text{I} + \text{III} \doteq \text{I}$ |
| $\text{III} + \text{I} \doteq \text{II}$ | $\text{III} + \text{II} \cdot 2 \doteq \text{III}$ | $\text{III}: (-2) \doteq \text{III}$ | |

Итак, получили: $X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3&-4&-5\\ 2&5&3\\ 0&-2&0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3&2&0\\ -4&5&-2\\ -5&3&0 \end{pmatrix}$.

**п7**. Р-ть ур-е $\begin{pmatrix} 1&1\\ -1&1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 1&1&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10&2&-2\\ 4&0&0 \end{pmatrix}$.

Р. $X\begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 1&1&-1 \end{pmatrix} = B^* = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1&1&10&2&-2\\ -1&1&4&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1&1&10&2&-2\\ 0&2&14&2&-2 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1&0&3&1&-1\\ 0&1&7&1&-1 \end{array}\right)$. Отсюда, трсп-уя, получим $\begin{pmatrix} 1&1\\ -1&1\\ 1&-1 \end{pmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3&7\\ 1&1\\ -1&-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^* = \left(\begin{array}{cc|cc} 1&1&3&7\\ -1&1&1&1\\ 1&-1&-1&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1&1&3&7\\ 0&2&4&8\\ 0&-2&-4&-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1&1&3&7\\ 0&1&2&4\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&1&3\\ 0&1&2&4 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1&3\\ 2&4 \end{pmatrix}$, тогда $X = \begin{pmatrix} 1&2\\ 3&4 \end{pmatrix}$.

Рас-им мч-ые ур-ия, когда они не имеют р-й (несовместны) или имеют беск-ое мн. р-й.

**п8**. Р-ть ур-е $X\begin{pmatrix} 1&1&2\\ -1&1&0\\ 2&1&3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&2&2\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$.

Р. Трсп-ем: $\begin{pmatrix} 1&-1&2\\ 1&1&1\\ 2&0&3 \end{pmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1&0&1\\ -1&2&1\\ 1&2&2 \end{pmatrix}$. Методом Гаусса находим $B^* =$

$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&1\\ 1&1&1&-1&2&1\\ 2&0&3&1&2&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&1\\ 0&2&-1&-2&2&0\\ 0&2&-1&-1&2&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-1&2&1&0&1\\ 0&2&-1&-2&2&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{array}\right)$. Анализ последней ср-и показывает, что ур-е несовместно, т.е. не имеет р-я (см. т1 из 2°: 1.4).

**п9**. Р-ть ур-е $\begin{pmatrix} 1&-1&2\\ 1&2&-1\\ 2&1&1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1&0&2&-1\\ 1&3&2&-1\\ 2&3&4&-2 \end{pmatrix}$.

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&-1&2&1&0&2&-1\\ 1&2&-1&1&3&2&-1\\ 2&1&1&2&3&4&-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&-1&2&1&0&2&-1\\ 0&3&-3&0&3&0&0\\ 0&3&-3&0&3&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&1&1&1&2&-1\\ 0&1&-1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

Из мц. $B^*$ получим беск-ое мн. р-й в общем виде:

$X = \begin{pmatrix} (1-a) & (1-b) & (2-c) & -(1+d)\\ a & (1+b) & c & d\\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in R$.

# ЛЕКЦИЯ 4

## 1.4. ОБЩАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА. ТЕОРЕМА КРОНЕКОРА-КАПЕЛЛИ

**1°. Основные понятия. Однородная линейная система**. Общая лин. система имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

из системы (1) составим сд. м-цы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

М-ца $A$ ($A_1$) наз. основной (расширенной) мц-й системы (1).

Систему (1) в мч-ом виде можно писать так:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Если $B = 0$, то система (1) или (2) наз. **однородной** лин. системой:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\} \text{или } AX = 0. \qquad (3)$$

Если $m = n$ и ранг м-цы $A$ равен числу сл-ов, т.е. $r = n$, то система (3) имеет только нулевое р-е $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т.к. $D \neq 0, D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$. Если же $D = 0$, то (3) имеет и не нулевое р-е.

Если $m < n$, то $r < n$ и система (3) имеет не нулевое р-е.

При $m > n$ м-цу нх-мо трсп-ть, далее применить рассуждения, анч-ные предыдущему случаю.

Р-я однородной (одн.) лин. системы обладают сд. св-ми:

**с1**. Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, назм-ый вектором (вк.), яв-ся р-ем системы (3), то при любом числе $k$ вк-р $k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$ также яв-ся ее р-ем. Действительно (дсв.), $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k\alpha_j) =$

$= k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = k \cdot 0 = 0, i = \overline{1,m}$.

**с2**. Если вк-ры $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ яв-ся р-ем системы, то их сумма $\alpha + \beta =$ $= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ также яв-ся ее р-ем. Дсв-но, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j =$

$= 0 + 0 = 0, i = \overline{1,m}$.

**с3**. Св-ва с1 и с2 можно обобщить. Если $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(r)}$ – р-я системы (3), то их лин. комбинация $\beta = \beta_1 b^{(1)} + \beta_2 b^{(2)} + \ldots + \beta_r b^{(r)}$ яв-ся также ее р-ем. Проверяется анч-но.

**п1**. Выяснить, какие р-я имеют системы:

а) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0; \\ x + y + z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0; \\ 3x - y + 2z = 0; \\ x - 3y = 0. \end{array}\right\}$

Р. а) Т.к. $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, то система имеет только нулевое р-е: $x = y = z = 0$.

б) Т.к. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, а минор $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$, то третье ур-е есть следствие первых двух, к-ое можно отбросить. Тогда систему можно записать так: $\left.\begin{array}{l} x + y = -k; \\ 3x - y = -2k. \end{array}\right\}$.

По правилу Крамера находим $D_1 = \begin{bmatrix} -k & 1 \\ -2k & -1 \end{bmatrix} = 3k$, $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 3 & -2k \end{bmatrix} = k$, $D = -4$. Тогда $x = \dfrac{D_1}{D} =$

$= -\dfrac{3}{4}k$, $y = -\dfrac{1}{4}k$, $z = k$, где $k$ – произвольная (прзвл.) постоянная (пст.). Или, учитывая св-во с1, получим $x = 3k$, $y = k$, $z = -4k$.

**2°. Решение общей линейной системы. Теорема Кронекора-Капелли**. Рас-им общую лин. систему (1) и сформулируем

**т1** (Кронекора-Капелли). Общая лин. система (1) совместна тогда и только тогда (ттогда), когда ранг расширенной (расш.) м-цы равен рангу основной (осн.) м-цы.

Д-во необходимости (нх.). Пусть система (1) совместна и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – нек-ое ее р-е. Тогда имеют место рав-ва: $\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{array}\right\}$ Но тогда последний сл-ц расш-ой м-цы $A_1$ лин-но врж-ся через остальные, т.е. его можно вычеркнуть без изменения (изм.) ранга м-цы $A_1$, а тогда $A_1$ переходит в м-цу $A$. Значит, $A_1$ и $A$ имеют одинаковый ранг.

Достаточность (дт-ть). Пусть $A_1$ и $A$ имеют одинаковый ранг $r$. Покажем, что система (1) совместна. Рас-им $r$ базисных сл-ов (см. 4°: 1.1) м-цы $A$, они будут базисным сл-ми и для $A_1$. Тогда последний сл-ц $A_1$ будет врж-ся как лин. комбинация базисных сл-ов, сдт-но, как лин. комбинация всех сл-ов м-цы $A$. Коэф-ы лин-ой комбинации обз-им через $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда выполняются рав-ва

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{array}\right\} \tag{1a}$$

Значит, (1а) уд-ет зн-ям $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, т.е. система (1) совместна ■

**зм1**. Из т1 вытекает, что одн. лин. система (3) всегда совместна, т.к. добавление сл-ца из нулей не может повысить ранг м-цы.

Пусть система (1) совместна и м-ца $A$ имеет ранг $r$. Допустим, что базисный минор $M$ м-цы $A$ расположен в ее левом верхнем углу (если не так, то перестановкой ср-к и сл-ов системы всегда можно добиться этого), тогда система (1) приводится к виду:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{array}\right\} \tag{4}$$

где $x_1, \ldots, x_r$ наз. главными неизвестными, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободными.

Придадим $x_{r+1}, \ldots, x_n$ совершенно произвольные зн-ия $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Тогда система (4) превращается в систему $r$ ур-й с $r$ неизвестными $x_1, \ldots, x_r$ опрт-ем $D \neq 0$. Тогда систему (4) можно р-ть, применяя правило Крамера, или методом Гаусса.

**3°. Фундаментальная система решений. Общее решение однородной и неоднородной систем**. Заметим, что кол-во прзвл. пст-х в правой части системы (4) равно $n - r$. Эти пст-ые можно выбрать как $n - r$ независимых (незв.) вк-ов. Н-р, $\left(c^1_{r+1}, c^1_{r+2}, \ldots, c^1_n\right) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\left(c^2_{r+1}, c^2_{r+2}, \ldots, c^2_n\right) =$ $= (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\left(c^{n-r}_{r+1}, c^{n-r}_{r+2}, \ldots, c^{n-r}_n\right) = (0, 0, \ldots, 1)$, полагая $B = 0$. Тогда получим $n - r$ лин-но незв-ых р-й системы.

Эта свк-ть наз. **фундаментальной системой р-й** системы (4). Причем система (4) может обладать многими фундаментальными (фунд.) системами р-й, т.к. $n - r$ незв-ых вк-ов можно выбрать по-разному.

Если обз-им фунд. систему р-й через $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-r)}$, то их лин. комбинация по с3 будет также р-ем, к-ое наз-ем **общим р-ем одн-ой системы** (4) и обз-им через

$$\widetilde{x} = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_{n-r} x^{(n-r)}, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ – произвольные пст.

Для $B \neq 0$ выберем $\left(c_{r+1}^0, c_{r+2}^0, \ldots, c_n^0\right) = (0, 0, \ldots, 0)$ и найдем р-е $x^{(0)}$, к-ое наз-ем **частным р-ем неодн-ой системы** (4). Тогда общим р-ем неодн-ой системы (4), сдт-но, (1), будет

$$x = x^{(0)} + \widetilde{x} = x^{(0)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_{n-r} x^{(n-r)}, \tag{6}$$

Дсв-но, непосредственной проверкой (1) с учетом с3 получим:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum a_{ij} \left( x_j^0 + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k x_j^{(k)} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i + \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k \cdot 0 = b_i,\ i = \overline{1,m}.$$

**4°. Метод Гаусса для решения общей линейной системы. Примеры**. При р-и общей лин. системы методом Гаусса одновременно можно найти ранги осн-й и расш-й м-ц, что позволяет установить, яв-ся ли система совместной (и найти ее р-е) или несовместной.

Найдем общее и фунд. р-я сд-их систем.

**п2**. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$

Р. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 5x_5; \\ x_2 = -2x_3 - 3x_5; \\ x_4 = 0. \end{cases}$. Полагая $(x_3, x_5) = (1, 0)$ и $(x_3, x_5) = (0, 1)$, получим

фунд. систему р-й: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда общим р-ем одн-ой системы будет:

$$x = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2; \\ x_2 = -2\alpha_1 - 3\alpha_2; \\ x_3 = \alpha_1; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = \alpha_2. \end{cases}.$$

**п3**. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Р. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3$ – общее р-е.

Отсюда $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное р-е неодн. ур-ия и $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – фунд-ые р-я.

Тогда общим р-ем будет $x = x^{(0)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2\alpha_1 - \alpha_2; \\ x_2 = \alpha_1; \\ x_3 = \alpha_2. \end{cases}.$

**п4**. $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7. \end{array}\right.$ .

Р. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Откуда следует, что $r(A) = 2$, а $r(A_1) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(A_1)$, тогда в силу т1 система несовместна.

**5°. Жордановы исключения**. При установлении лин-ых звт-ей фк-й, р-и общих лин. систем, реализации симплекс-метода в лин-ом пргв-и и т.д. часто используют жордановы (жорд.) исключения (иск.). Кратко изложим нек-ые из них.

Пусть дана система $m$ лин-ых фк-й с $n$ пер-ми:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n; \\ \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Запишем систему (7) в виде табл. 1, к-ая наз. жордановой. Пусть $a_{rs} \neq 0$, $x_s \neq 0$, разрешим фк-ю $y_r$ отс-но $x_s$, причем пер-ые $y_r$ и $x_s$ меняем местами. Полученное зн-ие $x_s$ подставим во все остальные лин. фк-и системы. В результате исходная (исх.) система перейдет в новую систему, к-ую запишем в виде табл. 2.

Таблица 1

| | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_s$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1s}$ | … | $a_{1n}$ |
| $y_2 =$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2s}$ | … | $a_{2n}$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $y_r =$ | $a_{r1}$ | $a_{r2}$ | … | $a_{rs}$ | … | $a_{rn}$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $y_m =$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{ms}$ | … | $a_{mn}$ |

Таблица 2

| | $x_1$ | $x_2$ | … | $y_r$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | … | $a_{1s}/a_{rs}$ | … | $b_{1n}$ |
| $y_2$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | … | $a_{2s}/a_{rs}$ | … | $b_{2n}$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $x_s$ | $-a_{r1}/a_{rs}$ | $-a_{r2}/a_{rs}$ | … | $1/a_{rs}$ | … | $-a_{rn}/a_{rs}$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $x_n$ | $b_{m1}$ | $b_{m2}$ | … | $a_{ms}/a_{rs}$ | … | $b_{ms}$ |

В исх. жорд-ой табл. 1 $s$-й сл-ц наз. разрешающим сл-ом, а $r$-я ср-а – разрешающей ср-й. Эл. $a_{rs}$ наз. разрешающим эл-ом. Правило перехода от табл. 1 к табл. 2 сформулируется так:

1) разрешающий эл-т заменяется обратной вел-ой;

2) остальные эл. разрешающего сл-ца делятся на разрешающий эл-т;

3) остальные эл. разрешающей ср-и делятся на разрешающий эл. с противоположным знаком;

4) прочие эл. выч-ся по фм-е

$$b_{ij} = (a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj})/a_{rs}. \qquad (8)$$

Для запоминания фм-ы (8) сущ-ет так назм. правило пуг-ка. На рис. 1 показаны все возможные случаи расположения в исх-й табл. 1 эл-а $a_{ij}$, к-ый заменяется новым эл-ом $b_{ij}$ в табл. 2 отс-но разрешающего эл-а.

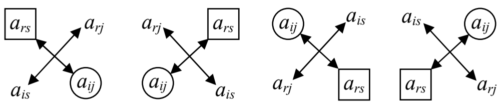



Рис. 1

Применение жорд. иск-й к выч-ю ранга м-цы и р-ю систем лин. ур-й основывается на сд-ей

**т2**. Если в жорд-ой табл. 1 при $m \leq n$ ср-ки лин-о незв-мы, то в результате $m$ посл-ых шагов жорд-ых иск-й можно $m$ переменных (пер.) $x$ врз-ть через пер-ые $y$ и остальные $x$.

Из т2 следует, что число шагов жорд-ых иск-й равно числу лин. незв-ых ср-к.

Пусть дана общая лин. система: $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$ Сост-м исх-ю табл. 3.

Применив посл. шаги Жордана, получим табл. 4.

Таблица 3

| | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_1 =$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| $b_2 =$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| . | . | . | . | . |
| $b_m =$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

Таблица 4

| | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_r$ | $x_{r+1}$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | … | $b_{1r}$ | $b_{1r+1}$ | … | $b_{1n}$ |
| $x_2 =$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | … | $b_{2r}$ | $b_{2r+1}$ | … | $b_{2n}$ |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| $x_r =$ | $b_{r1}$ | $b_{r2}$ | … | $b_{rr}$ | $b_{rr+1}$ | … | $b_{rn}$ |
| $b_{r+1} =$ | $c_{r+11}$ | $c_{r+12}$ | … | $c_{r+1r}$ | 0 | … | 0 |
| . | . | . | . | . | . | . | . |
| $b_n =$ | $c_{n1}$ | $c_{n2}$ | … | $c_{nr}$ | 0 | … | 0 |

Если ранг м-цы равен $r = m = n$, то система имеет едн. р-е:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}b_1 + b_{12}b_2 + \ldots + b_{1n}b_n; \\ x_2 = b_{21}b_1 + b_{22}b_2 + \ldots + b_{2n}b_n; \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ x_n = b_{n1}b_1 + b_{n2}b_2 + \ldots + b_{nn}b_n. \end{array}\right\} \text{Причем } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $r < m$ и $m < n$, то при

$$\left.\begin{array}{l} b_{r+1} = c_{r+11}b_1 + c_{r+12}b_2 + \ldots + c_{r+1r}b_r; \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ b_n = c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nr}b_r, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

система имеет беск. мн-во р-й, т.к. ранг расширенной м-цы также равен $r$.

Если же

$$\left.\begin{array}{l} b_{r+1} \neq c_{r+11}b_1 + c_{r+12}b_2 + \ldots + c_{r+1r}b_r; \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ b_n \neq c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nr}b_r, \end{array}\right\} \qquad (10)$$

то система несовместна, т.к. ранг расш-ой м-цы не равен $r$.

Если $m > n$ и $r = n$, то при выполнении (9) система имеет едн. р-е, а при $r < n$ – беск. мн-во р-й. А если при $r < n$ выполняется условие (10), то система несовместна.

Заметим, что при р-и системы лин-ых ур-й методом жорд-х иск-й нет нх-ти устанавливать ее совместность, дт-но вписать систему в жорд-у табл. и проделать возможное число посл-ых шагов жорд-х иск-й. Последняя табл. и покажет, будет ли система иметь едн. р-е, или мн-во р-й беск-но, или же эта система несовместна.

**п5**. Найти лин-ю зв-ть между фк-ми системы

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4; \\ y_2 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4; \\ y_3 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4; \\ y_4 = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Р. Составим исх. жорд-у табл. 5.

Таблица 5

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | 2 | – 1 | 3 | 1 |
| $y_2 =$ | 1 | 2 | – 1 | – 3 |
| $y_3 =$ | 3 | 4 | 2 | – 1 |
| $y_4 =$ | 2 | – 7 | 3 | – 1 |

За разрешающий эл. примем $a_{rs} = a_{21} = 1$ и сделаем шаг жорд-х иск-й (табл. 6):

Таблица 6

| | $y_2$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | 2 | – 5 | 5 | 7 |
| $x_1 =$ | 1 | – 2 | 1 | 3 |
| $y_3 =$ | 3 | – 2 | $\boxed{5}$ | 8 |
| $y_4 =$ | 2 | – 11 | 5 | 5 |

Для второго шага жорд-х иск-й возьмем $a_{rs} = a_{33} = 5$ и получим табл. 7.

Таблица 7

| | $y_2$ | $x_2$ | $y_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | – 1 | – 3 | 1 | $\boxed{-1}$ |
| $x_1 =$ | 2/5 | – 8/5 | 1/5 | 7/5 |
| $x_3 =$ | – 3/5 | 2/5 | 1/5 | – 8/5 |
| $y_4 =$ | – 1 | – 9 | 1 | – 3 |

Теперь за разрешающий эл. возьмем $a_{rs} = a_{14} = -1$. Получим табл. 8.

Таблица 8

| | $y_2$ | $x_2$ | $y_3$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_4 =$ | $-1$ | $-3$ | $1$ | $-1$ |
| $x_1 =$ | $-1$ | $-29/5$ | $8/5$ | $-7/5$ |
| $x_3 =$ | $1$ | $26/5$ | $-7/5$ | $8/5$ |
| $y_4 =$ | $2$ | $0$ | $-2$ | $3$ |

Поменять местами $x_2$ и $y_4$ не можем, т.к. на пересечении 2-го сл-а и 4-й ср-и стоит нуль. Сдт-но, ранг м-цы, составленной из коэф-ов системы (11), равен трем (мкс. числу посл-ых шагов жорд-х иск-й) и фк-и системы связаны между собой лин-ой звт-ю: $y_4 = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3$.

**п6**. Р-ть систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1; \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 13; \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

Р. Составим жорд-у табл. 9 и выполним три посл. жорд-х иск-я (табл. 10).

Таблица 9

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $-1 =$ | 1 | 2 | $-2$ |
| $13 =$ | 4 | 7 | $-3$ |
| $10 =$ | 3 | 5 | $-2$ |

Таблица 10

| 1 шаг | $-1$ | $x_2$ | $x_3$ | 2 шаг | $-1$ | 13 | $x_3$ | 3 шаг | $-1$ | 13 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $-2$ | 2 | $x_1$ | $-7$ | 2 | $-8$ | $x_1$ | 1 | $-6$ | 8 |
| 13 | 4 | $-1$ | 5 | $x_2$ | 4 | $-1$ | 5 | $x_2$ | $-1$ | 4 | $-5$ |
| 10 | 3 | $-1$ | 4 | 10 | $-1$ | 1 | $\boxed{-1}$ | $x_3$ | $-1$ | 1 | $-1$ |

Из табл. 10 получаем едн. р-е:
$$\begin{aligned} x_1 &= 1(-1) - 6\cdot 13 + 8\cdot 10 = 1; \\ x_2 &= -1(-1) + 4\cdot 13 - 5\cdot 10 = 3; \\ x_3 &= -1(-1) + 1\cdot 13 - 1\cdot 10 = 4. \end{aligned}$$

Заметим, что м-ца табл. 10 яв-ся обратной мц-й по отн-ю к м-це табл. 9. Т.о., расн-ый пример реализует метод р-я систем лин-ых ур-й с помощью обратной м-цы. Дсв-но, $AA^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**п7**. Р-ть систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 4; \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Р. Напишем исх. жорд-у табл. 11 и выполним посл-ые шаги жорд-х иск-й. После двух шагов получим табл. 12.

Таблица 11

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 =$ | $\boxed{1}$ | $-3$ | 1 | $-2$ | 3 |
| $3 =$ | 1 | $-4$ | 3 | $-1$ | 2 |
| $4 =$ | 1 | $-2$ | $-1$ | $-3$ | 4 |
| $2 =$ | 2 | $-6$ | 2 | $-4$ | 6 |

Таблица 12

| | 1 | 3 | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | 4 | $-3$ | 5 | 5 | $-6$ |
| $x_2 =$ | 1 | $-1$ | 2 | 1 | $-1$ |
| $4 =$ | 2 | $-1$ | 0 | 0 | 0 |
| $2 =$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Дальнейший перенос свободных членов наверх невозможен, т.к. на пересечении 3, 4, 5-го сл-ов с 3, 4-й ср-ми стоят нули (нельзя выбрать разрешающий эл.). Поскольку для свободных членов выполняется условие (10): $4 \neq 2\cdot 1 - 1\cdot 3 = -1$, то система несовместна, т.е. не имеет р-я.

**п8**. Р-ть систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5; \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= -2. \\ 3x_1 + 7x_2 - 16x_3 &= -5. \end{aligned}\right\}$$

Р. Составив исх-ю табл. 13 и производя возможное число жорд-х иск-й, получим табл. 14.

Таблица 13

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $1 =$ | 1 | 3 | $-2$ |
| $5 =$ | 1 | 4 | 3 |
| $-2 =$ | 2 | 5 | $-9$ |
| $-5 =$ | 3 | 7 | $-16$ |

Таблица 14

| | 1 | 5 | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | 4 | $-3$ | 17 |
| $x_2 =$ | $-1$ | 1 | $-5$ |
| $-2 =$ | 3 | $-1$ | 0 |
| $-5 =$ | 5 | $-2$ | 0 |

Дальнейший перенос свободных членов наверх невозможен, т.к. в нужной части табл-ы нельзя врз-ть разрешающий эл. (на пересечении 3-го сл-а с 3, 4-й ср-и стоят нули). Причем выполняются рав-ва (9): – 2 = 3 · 1 – 1 · 5, – 5 = 5 · 1 – 2 · 5 и наверху осталось неизвестное $x_3$, тогда система имеет беск. мн-во р-й. Из табл. 14 имеем:

$$x_1 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + 10x_3 = -11 + 17x_3;$$
$$x_2 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 5x_3 = 4 - 5x_3.$$

Теперь рас-им **р-е лин-ых систем методом Гаусса-Жордана**.

Пусть дана система $n$ лин. ур-й с $n$ неизвестными, к-ую запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - b_n = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Составим для системы (12) жорд-у табл. 15, добавив сл-ц свободных членов

Таблица 15

| | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 = | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 0 = | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| . | . | . | . | . | . |
| 0 = | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | … | $a_{nn}$ | $b_n$ |

Таблица 16

| | 0 | $x_2$ | … | $x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | $b_{11}$ | $b_{12}$ | … | $b_{1n}$ | $d_1$ |
| 0 = | $b_{21}$ | $b_{22}$ | … | $b_{2n}$ | $d_2$ |
| . | . | . | . | . | . |
| 0 = | $b_{n1}$ | $b_{n2}$ | … | $b_{nn}$ | $d_n$ |

Переместив один нуль вверх, получим табл. 16. Из этой табл-ы выпишем зн-ие первого неизвестного $x_1 = b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + d_1$, затем вычеркнем нуль-сл. и ср-у, ств-ю неизвестному $x_1$. В новой табл. 17, к-ая содержит на одну ср-у и один сл-ц меньше, снова переместим наверх один нуль, выпишем врж-ие для второго неизвестного, а затем эту ср-у и нуль-сл. вычеркнем и т.д. Если система (12) имеет едн. р-е, то в конце получим $x_n = l$, а затем найдем все остальные неизвестные подстановкой. В случае неопрн-ти и несовместности системы действуют те же правила, что и при р-и системы методом жорд-х иск-й.

Таблица 17

| | $x_2$ | … | $x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 = | $b_{22}$ | … | $b_{2n}$ | $d_2$ |
| . | . | . | . | . |
| 0 = | $b_{n2}$ | … | $b_{nn}$ | $d_n$ |

**п9**. Р-ть методом Гаусса-Жордана систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -7; \\ 3x_1 + 10x_2 - 4x_3 = -3. \end{aligned}\right\}$$

Р. Составляем исх. табл-у и делаем один шаг жорд-х иск-й (табл. 18, 19).

Таблица 18

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 = | 1 | 3 | – 2 | – 1 |
| 0 = | 1 | 4 | 1 | 7 |
| 0 = | 3 | 10 | – 4 | 3 |

Таблица 19

| | 0 | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1 | – 3 | 2 | 1 |
| 0 = | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 0 = | 3 | 1 | 2 | 6 |

Из табл. 19 вычеркиваем врж-ие $x_1 = -3x_2 + 2x_3 + 1$ и иск-ем ее и нуль-сл. из рас-ния. В оставшейся части (табл. 20) возьмем в кач-ве разрешающего эл-а $b_{11} = 1$ и сделаем новый шаг жорд. иск-й (табл. 21). Из табл. 21 снова выписываем $x_2 = -3x_3 - 8$ и иск-ем нуль-сл. и первую ср-у. Последний шаг дает табл. 22. Откуда получаем $x_3 = (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$. Подс-я это зн-е

Таблица 20

| | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 = | 1 | 3 | 8 |
| 0 = | 1 | 2 | 6 |

Таблица 21

| | 0 | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2$ = | 1 | – 3 | – 8 |
| 0 = | 1 | – 1 | – 2 |

Таблица 22

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $x_3$ = | – 1 | – 2 |

в выписанные врж-ия, находим посл-но остальные неизвестные:

$$x_2 = -3(-2) - 8 = -2; \; x_1 = -3(-2) + 2(-2) + 1 = 3.$$

**п10**. Р-ть методом Гаусса-Жордана систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3. \end{aligned}\right\}$$

Р. Составляем исх. жорд-у табл. 23 и делаем посл. шаги жорд-х иск-й, при этом после каждого шага иск-ем нуль-сл. и ств. ср-у (табл. 24-26).

Таблица 23

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 = | 1 | 2 | – 4 | – 5 |
| 0 = | 2 | 3 | 1 | – 2 |
| 0 = | 5 | 8 | – 2 | – 3 |

Таблица 24

| | 0 | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1 | – 2 | 4 | 5 |
| 0 = | 2 | – 1 | 9 | 8 |
| 0 = | 5 | – 2 | 18 | 22 |

Из табл. 24 получаем $x_1 = -2x_2 + 4x_3 + 5$.

Таблица 25

| | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 = | – 1 | 9 | 8 |
| 0 = | – 2 | 18 | 22 |

Таблица 26

| | 0 | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2$ = | – 1 | 9 | 8 |
| 0 = | 2 | 0 | 6 |

Поскольку, согласно табл. 26, выполняется усл-е (10): $0 \neq 0 \cdot x_3 + 6 \cdot 1$, то система не имеет р-я.

**п11**. Р-ть систему: $\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3; \\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 6; \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 12x_4 = 13. \end{array}\right\}.$

Р. Сост-м исх-ю табл. 27 и произведем возможное число жорд. иск-й. Из табл. 28 выписываем врж-ие $x_1 = 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4$ и иск-ем 1 ср-у и нуль-сл. (табл. 29). После 2-го шага из табл. 30 выписываем врж-ие $x_2 = -5x_3 + 11x_4 + 7$ и снова иск-ем из рас-ния 1 ср-у и нуль-сл. (табл. 31).

Таблица 27

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 = | $\boxed{1}$ | –3 | 2 | –5 | –4 |
| 0 = | 1 | –4 | –3 | 6 | 3 |
| 0 = | 3 | –10 | 2 | –1 | –6 |
| 0 = | 3 | –9 | 7 | –12 | –13 |

Таблица 28

| | 0 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1 | 3 | –2 | 5 | 4 |
| 0 = | 1 | –1 | –5 | 11 | 7 |
| 0 = | 3 | –1 | –4 | 14 | 6 |
| 0 = | 3 | 0 | 1 | 3 | –1 |

Таблица 29

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 = | $\boxed{-1}$ | –5 | 11 | 7 |
| 0 = | –1 | –4 | 14 | 6 |
| 0 = | 0 | 1 | 3 | –1 |

После 3-го шага из табл. 32 выписываем $x_3 = -3x_4 + 1$ и иск-ем 1 ср-у и нуль-сл. Следующий шаг в силу выполнения условия (9): $0 = 0 \cdot x_4 + 0 \cdot 1$ дает, что $x_4$ может принимать любое

Таблица 30

| | 0 | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ = | –1 | –5 | 11 | 7 |
| 0 = | 1 | 1 | 3 | –1 |
| 0 = | 0 | 1 | 3 | –1 |

Таблица 31

| | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 = | 1 | 3 | –1 |
| 0 = | 1 | 3 | –1 |

Таблица 32

| | 0 | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_3$ = | 1 | –3 | 1 |
| 0 = | 1 | 0 | 0 |

зн., т.е. система имеет беск. мн-во р-й. Подс-я зн-ия для $x_3$ в выписанные врж-ия, находим посл-но остальные пер.:

$$x_2 = -5(-3x_4 + 1) + 11x_4 + 7 = 26x_4 + 2;$$

$$x_1 = 3(26x_4 + 2) - 2(-3x_4 + 1) + 5x_4 + 4 = 89x_4 + 8.$$

## 1.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### 1.1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое м-ца, ее ср-и, сл-ы, эл-ы и размерность?
2. Как понимаете нулевую, квч-ю, диагональную, едч-ую м-цы и рав-во двух м-ц?
3. Приведите лин. операции над мц-ми и их основные (осн.) св-ва.
4. Приведите умн-ие м-ц, его осн. св-ва и примеры.
5. Что такое трсп-ие м-ц? Приведите его осн. св-ва.
6. Перечислите элементарные (элр.) прб-ия м-ц.
7. Дайте опр-ие ранга м-цы и способы его выч-ия.

### 1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

**Вопросы для самопроверки**

1. Как выч-ся опрт-ли третьего порядка?
2. Что такое алгч-ие дополнения (дпн.) и миноры?
3. Приведите св-ва опрт-ей.
4. Как выч-ся опрт-ли четвертого и более порядка?

### 1.3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

**Вопросы для самопроверки**

1. Какие системы наз. несовместными и совместными?
2. Когда совместная система наз. опрн-ой и неопрн-ой?
3. Как р-ся система по правилу Крамера?
4. Как р-ся система методом Гаусса?
5. Что такое невырожденная и вырожденная м-цы?
6. Что такое обратная м-ца и как она выч-ся?
7. Приведите различные виды мч-ых ур-й и р-е их методом Гаусса.

### 1.4. ОБЩАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА. ТЕОРЕМА КРОНЕКОРА-КАПЕЛЛИ

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое общая лин. одн. система и какими св-ми она обладает?
2. В чем состоит суть теоремы Кронекора-Капелли?
3. Что такое фунд-ая система р-й и общее р-е одн-ой и неодн-ой системы?
4. Приведите метод Гаусса для р-я общей лин-ой системы.

**Задания для кр. работы**: с учетом п1-п6 из 1.2 и п1-п3 из 1.3 р-ть задачи 1-30 по правилу Крамера и методом Гаусса.

1. $3x - 3y + 2z = 2$
   $4x - 5y + 2z = 1$
   $5x - 6y + 4z = 3$
2. $3x + 2y - 4z = 8$
   $2x + 4y - 5z = 11$
   $4x - 3y + 2z = 1$
3. $2x + y + z = 2$
   $5x + y + 3z = 14$
   $2x + y + 2z = 5$
4. $2x - y + 4z = 15$
   $3x - y + z = 8$
   $-2x + y + z = 0$
5. $x + y + z = 1$
   $x - y + 2z = -5$
   $4x + y + 4z = -2$
6. $2x + 4y + z = 4$
   $3x + 6y + 2z = 4$
   $4x - y - 3z = 1$
7. $x + 2y + 3z = 6$
   $4x + y + 4z = 9$
   $3x + 5y + 2z = 10$
8. $2x + y + 3z = 3$
   $4x + 2y + 5z = 5$
   $3x + 4y + 7z = 2$
9. $3x + 4y + 2z - 8 = 0$
   $x + 5y + 2z - 5 = 0$
   $2x + 3y + 4z - 3 = 0$
10. $x + 3y + 2z - 4 = 0$
    $2x + 6y + z = 2$
    $4x + 8y - z - 2 = 0$
11. $5x + 8y - z = -7$
    $x + 2 + 3z = 1$
    $2x - 3y + 2z = 9$
12. $3x + 2y + z = 5$
    $2x + 3y + z = 1$
    $2x + y + 3z = 11$
13. $x + 2y + 4z = 31$
    $5x + y + 2z = 29$
    $3x - y + z = 10$
14. $x + 2y + z = 4$
    $3x - 5y + 3z = 1$
    $2x + 7y - z = 8$
15. $4x - 3y + 2z = 9$
    $2x + 5y - 3z = 4$
    $5x + 6y - 2z = 18$

16. $2x - y - z = 4$
$3x + 4y - 2z = 11$
$3x - 2y + 4z = 11$

17. $x + y + 2z = -1$
$2x - y + 2z = -4$
$4x + y + 4z = -2$

18. $3x - y = 5$
$-2x + y + z = 0$
$2x - y + 4z = 15$

19. $3x - y + z = 4$
$2x - 5y - 3z = -17$
$x + y - z = 0$

20. $x + y + z = 2$
$2x - y - 6z = -1$
$3x - 2y = 8$

21. $2x + y - z = 1$
$x + y + z = 6$
$3x - y + z = 4$

22. $2x - y - 3z = 3$
$3x + 4y - 5z = 8$
$2y + 7z = 17$

23. $x + 5y + z = -7$
$2x - y - z = 0$
$x - 2y - z = 2$

24. $x - 2y + 3z = 6$
$2x + 3y - 4z = 16$
$3x - 2y - 5z = 12$

25. $3x + 4y + 2z = 8$
$2x - y - 3z = -1$
$x + 5y + z = 0$

26. $2x - y + 3z = 7$
$x + 3y - 2z = 0$
$2y - z = 2$

27. $2x + y + 4z = 20$
$2x - y - 3z = 3$
$3x + 4y - 5z = -8$

28. $x - y = 4$
$2x + 3y + z = 1$
$2x + y + 3z = 11$

29. $x + 5y - z = 7$
$2x - y - z = 4$
$3x - 2y + 4z = 11$

30. $11x + 3y - z = 2$
$2x + 5y - 5z = 0$
$x + y + z = 2$

Прежде чем дать сд. задание, приведем нек-ые понятия.

М-ца, у к-ой все эл-ы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, наз. диагональной. Если при этом на диагонали все эл-ы равны ед-це, то такая м-ца наз. едч-ой.

М-ца наз. симметрической (симч.), если она не меняется при трсп-и, т.е. $S = S'$. У симч-ой м-цы эл-ы, симч-ые относительно (отс.) главной диагонали, равны. М-ца $K$ наз. кососимметрической (кососимч.), если при трсп-и она меняет свой знак, т.е. $K' = -K$.У мкососимч. м-цы на главной диагонали стоят нули, а эл-ы, симч-ые отн-но этой диагонали, отличаются только знаком.

При умн-и м-ц в общем случае имеем $AB \neq BA$ (см. с6 з 2°: 1.1). Если $AB = BA$, то м-цы $A$ и $B$ наз. перестановочными. Причем для м-цы $A$ может сущв-ть много перестановочных м-ц $X$, т.е. $AX = XA$.

М-ца $A$ наз. ортогональной (орт.), если выполняется условие $AA' = E$, или $A' = A^{-1}$, где $E$ – едч. м-ца, $A^{-1}$ – обратная м-ца.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п5 из 1.1 и п4-п9 из 4°: 1.3 р-ть з31-60.

31. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. Найти $C = A + B + A' + B'$ и убедиться, что $C$ – диагональная м-ца. Ук. $C = A + B + A' + B' = (A + A') + (B + B')$.

32. Показать, что м-ца $S = 3A - 2B$ – симч-ая, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

33. Показать, что если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, то м-ца $K = 2A - B$ – кососимч-ая.

34. Д-ть, что для любой м-цы $A$ м-ца $S = A + A'$ – симч. Ук. $S' = (A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A' = S$.

35. Показать, что для м-цы $n$-го порядка $A$ выполняется рав-во $|\lambda A| = \lambda^4 |A|$, где $|A|$ – опрт-ль м-цы $A$.

36. Найти м-цу $A = 2B - 3C$, если $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

37. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b+c & b & 0 \\ 1+c & 1+a & 1 \end{pmatrix}$. Показать, что м-ца $K = A - B$ –кососимч.

38. Показать, что, если $A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, то м-ца $C = A + B - B'$ яв-ся нулевой мц-ей.

39. Показать, что для любой м-цы $A$ м-ца $K = A - A'$ – кососимч. Ук. сравни с з4.

40. Дана произвольная м-ца $A$, показать, что она может быть представлена в виде суммы симч-ой и кососимч-ой м-ц. Ук. Рас-ть м-цы $S = \frac{1}{2}(A + A')$ и $K = \frac{1}{2}(A - A')$.

41. Выписать общий вид симч-ой и кососимч-ой м-ц 2-го и 3-го порядка. Найти их опрт-ли. Ук. $S_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Анч. задание выполнить для м-цы 4-го порядка.

42. Найти пзв-ия $AB$ и $BA$ м-ц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и установить, что м-цы $A$ и $B$ неперестановочны.

43. Найти пзв-ие м-ц $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

44. Найти все м-цы, перестановочные с $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Р. Пусть $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – искомая м-ца, тогда $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $XA =$ $= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$, и рав. соблюдается тогда, когда $\gamma = \beta$, $\delta = \alpha$, т.е. $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} =$ $= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha E + \beta A$ – общий вид искомой м-цы.

Анч. задание выполнить для м-цы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

45. Показать, что пзв-ие м-цы $A$ на трсп-ю всегда яв-ся симч-ой мц-ей.

46. Д-ть, что м-ца $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ – ортогональная. Ук. Из симч-ти следует, что $A = A'$, поэтому $AA' = A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= AA^{-1}$.

Анч-ый пример придумать самим!

47. Показать, что м-цы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ перестановочны.

48. Найти м-цу $C = AB - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

49. Показать, что м-цы $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ перестановочны. Найти их пзв.

50. Найти все м-цы, перестановочные с данными: а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

О: а) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ – произвольные числа.

51. Найти общий вид м-цы $A$ 3-го порядка, для к-ой $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = 0$. О: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

52. Ненулевые м-цы $A$ и $B$, для к-ых $AB = 0$, наз. делителями нуля. Показать, что oпрт-ль хотя бы у одной из этих м-ц равен нулю. Ук. Использовать св-во умн-ия м-ц (см. с12 из 2°: 1.1).

53. Найти многочлен (мчл.) от м-цы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, если $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

Р. $f(A) = A^2 - 3A + 5E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} -$
$- \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Самим найти мчл. от м-цы $A$, если $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

54. Показать, что м-ца $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ – корень мчл-на $P(x) = x^2 - 5x + 3$. Ук. Убеждаемся, что $P(A) = A^2 - 5A + 3E = 0$.

55. Найти обратную м-цу $A^{-1}$ для м-цы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ двумя способами.

Р. М-ца невырожденная, т.к. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$. Выч-им $A^{-1}$ с помощью алг-их дпн-й эл-ов м-цы: $A_{11} = 2$, $A_{21} = -1$, $A_{12} = -4$, $A_{22} = 3$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Теперь выч-им $A^{-1}$ методом Гаусса, используя элр-ые прб-ия м-ц: $B^* =$
$= \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -2 & 3/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Проверка: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

56. Найти обратную м-цу для м-цы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ двумя способами и проверить, что $AA^{-1} = E$.

57. Р-ть мч. ур-е $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ двумя способами.

Р. Находим $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = A^{-1}A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Это же ур-ие р-и методом Гаусса (см. п5 из 4°: 1.3):

$$B^* = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 0 & 8 & 23 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 23/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 23/16 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Анч-но (двумя способами) самим р-ть ур. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

58. Р-ть мч-ое ур. $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ двумя способами. Ук. см. п6 из 4°: 1.3.

О: $X = 2\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 16 & -9 \end{pmatrix}$.

59. Р-ть ур. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ двумя способами. Ук. см. п7 из 4°: 1.3.

О: $\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}$.

60. Р-ть ур-ия $AX = B$ и $YA = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Ук. р-ть по $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п3 из 1.4 найти фунд. систему р-й и общее р-е одн-ой и неодн-ой систем з61-з90.

61. $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$

62. $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$
$2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1.$

63. $3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7,$
$9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13.$

64. $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2,$
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3.$

65. $2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8,$
$4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9,$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7,$
$x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12.$

66. $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2,$
$6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3,$
$9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4.$

67. $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5,$
$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7,$
$4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18.$

68. $9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4,$
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8.$

69. $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3,$
$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7.$

70. $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2,$
$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2.$

71. $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2,$
$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3,$
$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9,$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1.$

72. $6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3,$
$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7,$
$9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2.$

73. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4,$
$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5,$
$x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11,$
$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6.$

74. $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4,$
$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1.$

75. $8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21,$
$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10,$
$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15,$
$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18.$

76. $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4,$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7.$

77. $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5.$

78. Подобрать $\lambda$ так, чтобы система имела р-е:
$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2,$
$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda.$

79. $x_1 + x_2 - 3x_3 = -1,$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1.$

80. $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2,$
$5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4.$

81. $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2,$
$3x_1 - x_3 + x_4 = -3,$
$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6.$

82. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4,$
$x_2 - x_3 + x_4 = -3,$
$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1,$
$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3.$

83. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2,$
$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23,$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12.$

84. $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0,$
$3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2,$
$4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3.$

85. $2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1,$
$4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1,$
$2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1.$

86. $3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1,$
$2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2,$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3,$
$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3.$

87. $x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2,$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7,$
$9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25.$

88. $x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1.$

89. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1,$
$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2.$

90. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10,$
$x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1.$

**Задачи для самостоятельной работы**: с учетом п5-п11 из 5°: 1.4 р-ть з91-з94.

91. Методом жорд. иск-й выч-ть ранг м-ц:

а) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & 7 & 1 & 4 \\ -3 & 7 & -12 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

92. Найти лин-ю звт. между фк-ми системы:

а) $\left.\begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4; \\ y_2 &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4; \\ y_3 &= 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 3x_4; \\ y_4 &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4; \\ y_2 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4; \\ y_3 &= x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4; \\ y_4 &= 12x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 12x_4. \end{aligned}\right\}$

93. Методом жорд. иск-й р-ть системы ур-й:

а) $\left.\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 18; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7; \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 12; \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 2; \\ 2x_1 - 5x_2 + 11x_3 &= 3; \end{aligned}\right\}$; в) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 3; \\ 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 0; \end{aligned}\right\}$;

г) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -1; \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 8; \\ 7x_1 + 38x_2 + 17x_3 &= -15; \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8. \end{aligned}\right\}$

94. Р-ть методом Гаусса-Жордана сд. системы:

а) $\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -6. \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5; \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1; \end{aligned}\right\}$;

в) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5; \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 7; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 9x_4 &= -1; \end{aligned}\right\}$; г) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 4; \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 10; \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= 16; \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 - x_4 &= 18. \end{aligned}\right\}$

# 2. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

…Математика будущего, как и математика прошлого, будет включать исследования, относящиеся к философии математики… Их можно встретить и в теории категорий, в которой мы видим еще одну довольно успешную попытку свести всю чистую математику к одной дисциплине.

А. Робинсон

## ЛЕКЦИЯ 5

## 2.1. ВЕКТОРЫ И ИХ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

**1°. Основные понятия. Векторы как направленные отрезки**. Величина (вел.), к-ая характеризуется (хркз.) числовым значением (зн.), наз. скаляром (ск.). Н-р, время, температура, масса, плотность, длина отрезка, площадь (пщ.), объем и т.д.

Вел-а, к-ая хркз-ся числовым зн-ем и направлением (нпв.), наз. **вектором** (вк.). Н-р, сила, скорость, ускорение и т.д.

Вк-ы обозначим (обз.) через $AB$ (точка (тч.) $A$ – начало (нач.), $B$ – конец вк-а; поэтому $AB = -BA$), $AC$, $BC$, …, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, …, $\overline{AC}$ , $\bar{a}$ , $\bar{a}_1$ , … Нулевой вк-р обз-им через $\mathbf{0}$. Иногда вк-ы будем обз-ть просто $a$, $b$, $c$, …, $a_1$, $a_2$, $a_3$, …

Расстояние (рст.) между нач. и концом вк-а наз. его **длиной** и обз-ся $|AB|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|a|$, …

Вк-ы, расположенные на параллельных (прл., $\|$) прямых (пм.), наз. **коллинеарными** (нулевой вк. считается коллинеарным любому вк-у).

Два вк-а считаются **равными**, если они коллинеарны, одинаково нпв-ны и равны по длине. Отсюда следует, что вк-ы свободны, т.е. нач. вк-а можно перенести в любую тч.

Ненулевые вк. наз. **компланарными**, если они прл-ны (или лежат на одной и той же плоскости (пл.)). Любые два вк-а всегда компланарны, а три вк-а могут не быть компланарными.

**2°. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось**. Введем сд-ие операции.

**1*. Сложение** (сж.) векторов. Суммой двух вк-ов $a$ и $b$ наз. вк. $c$, выходящий из их общего нач. и к-ый служит диагональю параллелограмма (прлг.), сторонами к-го яв-ся слагаемые (слг.) вк-ы (рис. 1).

Сумму вк-ов можно также получить, соединив нач-о последующего вк-а с концом предыдущего (см. рис. 1). Этот способ используется и для получения суммы вк-ов любого конечного числа вк-ов, н-р, сумма трех вк-ов $a$, $b$, $c$ указана на рис. 2. Отсюда получим правило (назвав $a$, $b$, $c$ составляющими, $d = a + b + c$ – замыкающими вк-ми): сумма составляющих вк-ов равна их замыкающему.

Вычитание вк-ов $a$ и $b$ сводится к сж-ю вк-ов (рис. 1, 3).

**2*. Умножение** (умн.) вектора на число. Произведением (пзв.) вк-а $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha$ наз. вк. $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}$, длина к-го равна длине вк-а $\boldsymbol{a}$, умн-ой на $|\alpha|$, а нпв-ие совпадает с $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположное, если $\alpha < 0$ (рис. 3).

**зм1**. Умн-ие вк-а на число позволяет любой вк. $\boldsymbol{a}$ выразить (врз.) через едч-ый вк. $\boldsymbol{a}^\circ$, умн-ый на число $\alpha = |\boldsymbol{a}|$, т.е.

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}^\circ = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ. \tag{1}$$

**п1**. Даны вк-ы $a$ и $b$ (рис. 3). Найти: а) $2a - b$ и б) $b - \dfrac{1}{2}a$.

Р. а) $c = 2a - b = 2a + (-b)$; б) $c = b - \dfrac{1}{2}a = b + \dfrac{1}{2}(-a)$ (см. рис. 3).

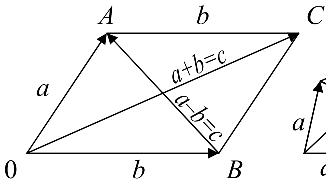


Рис. 1

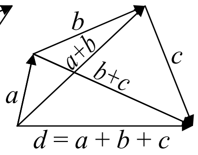


Рис. 2

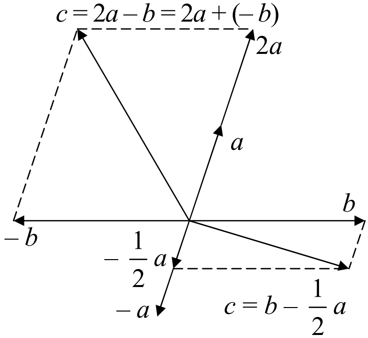


Рис. 3

**п2**. В треугольной (туг.) пирамиде $SABC$ (рис. 4) даны вк-ы $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Найти вк. $SM$, где $M$ – центр тяжести основания $ABC$.

Р. Из $\Delta SAM$ имеем $SM = a + AM = a + 2/3\ AQ$, т.к. центр тяжести туг-ка лежит в тч. перч-ия его медиан, т.е. $AM : MQ = 2 : 1$. Из $\Delta SAB$ и $\Delta SAC$ получим $b = a + AB \Rightarrow AB = b - a$ и $b = c + CB \Rightarrow CB = b - c$. Отсюда $AQ = AB + BQ = AB - \dfrac{1}{2}CB = -a - \dfrac{1}{2}(b - c) = -a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}c$. Тогда имеем $SM = a + \dfrac{2}{3}AQ = a + \dfrac{2}{3}(-a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}c) = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{3}c = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$.

Теперь рас-им проекцию (пркц.) вк-а $a = AB$ на ось $l$. Проектируя (пркт.) нач. и конец на ось $l$, получим на ней вк. $A'B'$ (рис. 5). Пркц-ей $\text{пр}_l AB$ вк-а $AB$ на ось $l$ наз. число, равное длине вк-а $A'B'$, взятой со знаком плюс или минус в зависимости (звт.) от того, нпв-ен ли вк. $A'B'$ в ту же сторону, что и ось $l$, или в противоположную. Поэтому говорят о пркц-и вк-а $AB$ на нпв-ие вк-а $l$ и пишут

$$\text{пр}_l AB = \text{пр}_l a = |a|\cos\varphi, \tag{1а}$$

где $\varphi$ – угол между вк-ми $a$ и $l$. Пркц-я обладает св-ми:

**с1**. $\text{пр}_l(a + b) = \text{пр}_l a + \text{пр}_l b$.

**с2**. $\text{пр}_l(\alpha a) = \alpha\,\text{пр}_l a$.

**с3**. Пусть $a$, $b$ и $c$ – едч. вк-ы, составляющие (сост.) с данной осью $l$ ств-но углы $\pi/3$, $2\pi/3$ и $\pi$. Найти пркц-ю на ось $l$ вк-а $3a + 2b + c$.

Р. Согласно св-ам с1 и с2 пркц-й, $\text{пр}_l(3a + 2b + c) = 3\text{пр}_l a + 2\text{пр}_l b + \text{пр}_l c$. По (1а) $\text{пр}_l a = |a|\cos \pi/3 = 1 \cdot 1/2 = 1/2$, $\text{пр}_l b = \cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -1/2$, $\text{пр}_l c = \cos \pi = -1$. Тогда $\text{пр}_l(3a + 2b + c) = 3 \cdot 1/2 + 2 \cdot (-1/2) - 1 = -1/2$.

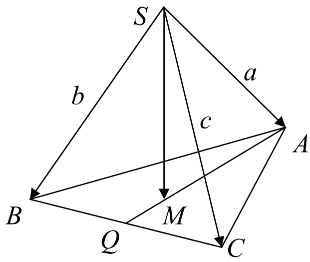


Рис. 4

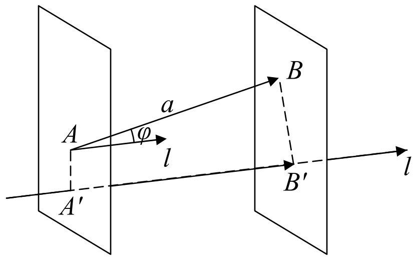


Рис. 5

**3°. Разложение вектора по ортам координатных осей**. Используя операции 1* и 2*, можно любой вк. трехмерного (тмр.) пр-ва врз-ть через пркц-и на координатные (крдн.) оси. Для этого на осях возьмём (рис. 6) систему едч-ых взаимноперпендикулярных (взаимнопрп.) (т.е. ортонормированных (ортонорв.)) вк-ов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, к-ую наз-ем базисом тмр-го пр-ва. Тогда

$$\boldsymbol{a} = OM = ON + NP + PM = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = (x_1\ y_1\ z_1), \tag{2}$$

где ($x_1$, $y_1$ и $z_1$ наз. крд-ми вк-а $\boldsymbol{a}$, т.е. вк-р расв-ся как частный случай м-цы $(x_1\ y_1\ z_1)$, состоящей из одной ср-и, трех сл-ов).

Длина (модуль) вк-а $\boldsymbol{a}$ опр-ся по фм-е:

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,. \tag{3}$$

Из (3) получим

$$|a|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\,. \tag{3a}$$

Если известны крд-ы тч-к $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и вк. $a = AB$ (рис. 7), то вместо (3) имеем

$$|a| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{3b}$$

Пусть углы вк-а $a$ с осями $Ox$, $Oy$, $Oz$ ствн-о равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (рис. 6), тогда по (1a) получим

$$x_1 = |a|\cos\alpha,\ y_1 = |a|\cos\beta,\ z_1 = |\text{a}|\cos\gamma \tag{4}$$

или

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|a|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{|a|},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{|a|}\,. \tag{4a}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ наз. направляющими (нпвщ.) косинусами вк-а $a$.

Если $a$ есть едч-ый вк. $a°$, т.е. $|a°| = |a| = 1$, то в силу (4a) получим

$$a° = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = \cos\alpha\ \boldsymbol{i} + \cos\beta\ \boldsymbol{j} + \cos\gamma\ \boldsymbol{k} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{5}$$

Тогда по (3a) имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{6}$$

Стн-ие (6) можно получить также, подставив (4) в (3a): $|a|^2 = |a|^2\cos^2\alpha + |a|^2\cos^2\beta + |a|^2\cos^2\gamma$, отсюда, сократив на $|a|^2$, получим (6).

Стн-ие (2) позволяет также ортонорв-ые вк-ы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ расв-ть как вк-ы, заданные в пркц-х: $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

Операции 1* и 2* для вк-ов $a = (x_1\ y_1\ z_1)$, $b = (x_2\ y_2\ z_2)$, заданных в пркц-х (как м-цы) и числа $\alpha$ можно теперь опр-ть так:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) + (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) =$$
$$= (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{7}$$

в част-и, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

$$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = \alpha x_1\boldsymbol{i} + \alpha y_1\boldsymbol{j} + \alpha z_1\boldsymbol{k} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1). \qquad (8)$$

Из стн-й (7) и (8) легко выводить св-ва этих операций:

**с1**. $a + b = b + a$ (комм-ть).

**с2**. $(a + b) + c = a + (b + c))$ (асс-ть).

**с3**. $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\alpha$.

**с4**. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

$\left.\begin{array}{l}\textbf{с5}.\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\alpha = \boldsymbol{a}\alpha + \boldsymbol{b}\alpha. \\ \textbf{с6}.\ (\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}.\end{array}\right\}$ (дист-ть).

Если все вк-ы коллинеарны, т.е. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ или $(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$, откуда $x_1 = \alpha x_2$, $y_1 = \alpha y_2$, $z_1 = \alpha z_2$, тогда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha. \qquad (9)$$

**п4**. На оси ординат найти тч., равноудаленную от тч-к $A(1, -3, 7)$ и $B(5, 7, -5)$.

Р. Искомая тч. $M$ имеет крд-ы $(0, y, 0)$. По (3b) ее рст-я до тч-к $A$ и $B$: $|AM| = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-y)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{50 + (3+y)^2}$, $|BM| = \sqrt{(5-0)^2 + (7-y)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{50 + (7-y)^2}$. По усл-ю, $|AM| = |BM|$, т.е. $50 + (3 + y)^2 = 50 + (7 - y)^2 \Rightarrow 3 + y = \pm(7 - y)$. Знак «минус» приведет к противоречию, поэтому $3 + y = 7 - y \Rightarrow y = 2$. Итак, $M(0, 2, 0)$.

**п5**. Опр-ть, при каких зн-ях $\alpha$ и $\beta$ вк-ы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$ коллинеарны.

Р. Крд-ы данных вк-ов $\boldsymbol{a} = (2, \alpha, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (3, -6, \beta)$ должны быть прц-ны: $\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{1}$. Отсюда находим $\alpha = -4$, $\beta = \frac{3}{2}$.

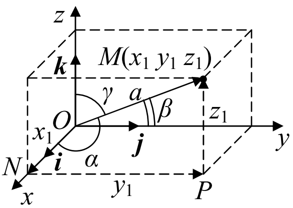



Рис. 6

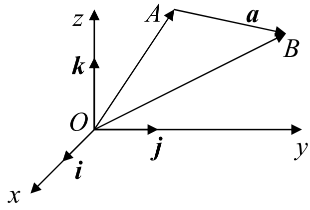



Рис. 7

**4°. Линейная зависимость и независимость векторов и функций**. Стн-ие (2) можно обобщить и для вк-а $n$-мерного (мр.) пр-ва:

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \boldsymbol{e}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (10)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. крд-ми вк. $\boldsymbol{a}$, а ортонорв. вк-ы $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ наз. базисом $n$-мр-го пр-ва. При этом говорят, что вк. $\boldsymbol{a}$ разложен по базисным вк-ам.

Д-ем, что такое разложение едн-ое.

Дсв-но, если $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{e}_1 + x'_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{e}_n$, то $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \ldots, x_n - x'_n) = 0$, откуда $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, …, $x_n = x'_n$.

Вк. $\boldsymbol{a}$ можно разложить не только по базисным вк-ам, но и по любой свк-ти вк-ов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$:

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k, \qquad (11)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – дсв. числа. В этом случае говорят, что вк. $\boldsymbol{a}$ состоит из лин-ых комбинаций вк-ов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Понятие «линейная комбинация» тождественно (тожд.) связано с понятием лин-ой звт-и вк-ов.

Свк-ть вк-ов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ наз. лин-но зв-ми, если рав-во

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0} \qquad (12)$$

выполняется хотя бы при одном $\alpha_i \neq 0$.

В этом случае, разделив стн. (12) на $\alpha_i$, можно привести его к виду (11), и наоборот, (11) можно записать в виде (12), где хотя бы один коэф. окажется не равным нулю. Итак, стн-ия (11) и (12) тожд-ны.

Свк-ть вк-ов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ наз. лин-но незв-ми, если рав-во (12) выполняется лишь при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,k}$ .

**п6**. Д-ть, что любые два коллинеарных вк-а лин-но зв-мы, и наоборот, два неколлинеарных вк-а лин-но незв-мы.

Р. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$, т.е. выполняется (11), значит, они лин. зв-ы. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Допустим, что они лин. зв-мы, т.е. имеет место $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, н-р, при $\alpha \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{a} = (-\beta/\alpha)\boldsymbol{b}$, т.е. вк-ы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны вопреки нашему предположению.

**п7**. Показать, что система базисных вк-ов лин-но незв-мы.

Дсв-но, $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$ или $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n\begin{pmatrix}0\\\ldots\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Отсюда $\left.\begin{array}{l}\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot 0+\ldots+\alpha_n\cdot 0=0,\\ \alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 1+\ldots+\alpha_n\cdot 0=0,\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ \alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\ldots+\alpha_n\cdot 1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \ldots\\ \alpha_n=0.\end{array}$ Значит, базисные вк-ы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ лин-но незв-мы.

**п7а**. Д-ть, что вк-ы $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ лин-но незв-мы.

Более подробно о $n$-мр. лин-ом пр-ве см. 2.3.

Все сказанное о зв-ти и незв-ти вк-ов можно сказать и о фк-ях. Н-р, если возьмем фк-и $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = a$, то эта система фк-й лин. зв-ма, т.к. при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1/a_3$ имеем $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1 = 0$. А система фк-й $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$ лин. незв-ма. Дсв-но, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – любые пст. числа, не равные нулю одновременно. Тогда рав-во $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$ есть кубич. ур-ие, к-ое может иметь не более чем три корня. Поэтому врж-ие $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$ может обращаться в нуль при любых мнж-ях $\alpha$ не более чем в трех тч-х, и значит, ни при каких коэф-ах не обращается в нуль тожд-но (подробнее см. 4°: 6.1).

**5°. Преобразование координат**. Как мы знаем, положение тч-и на пл-ти опр-ся двумя крд-ми отс-но нек-ой системы крд-т. Крд-ты тч-и изм-ся, если выберем др. систему крд-т.

Задача преобразования (прб.) крд-т состоит в том, чтобы, зная крд-ты тч. в одной системе крд-т, найти ее крд-ты в др. системе. Здесь возможны различные случаи. Рас-им их.

1) Перенос начала координат. Пусть тч. $M(x, y)$ в старой системе крд-т, $M(X, Y)$ – новой системе крд-т отс-но старой. Из рис. 8 получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= X + a, \\ y &= Y + b, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

откуда легко найти новые крд. через старые.

$$\left.\begin{aligned} X &= x - a, \\ Y &= y - b, \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

2) Поворот осей координат. Пусть старая система крд-т повернута на угол $\alpha$ (рис. 9) и получен новая система крд-т.

Рас-им (рис. 9) ломаную (вк-р) $Oq = OQ + QM + Mq$. Пркт-ем ее на ось $Ox$: $\text{Пр}_x Oq = \text{Пр}_x OQ + \text{Пр}_x QM + \text{Пр}_x Mq \Rightarrow x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$ ①. Пркт-ем на ось $Oy$: $\text{Пр}_y Oq = \text{Пр}_y OQ + \text{Пр}_y QM + \text{Пр}_y Mq \Rightarrow 0 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha - Y$ ②.

Из ① и ② получим

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

3) Общее преобразование. Объединяя стн-ия (17) и (18), получим

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

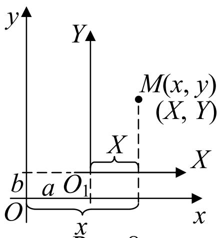


Рис. 8

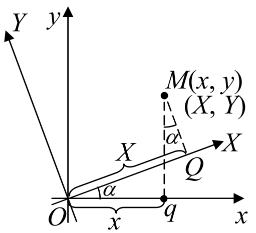


Рис. 9

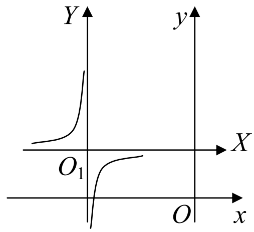


Рис. 10

**п8**. Упростить ур-ие равносторонней гпрб. $x^2 - y^2 = a^2$ поворотом на $\alpha = -45°$.

Р. $x = X\cos(-45°) - Y\sin(-45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$ $\quad\Bigg|\quad \dfrac{2}{4}[(X+Y)^2 - (-X+Y)^2] = a^2,$

$y = X\sin(-45°) + Y\cos(-45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y)$ $\quad\Bigg|\quad \dfrac{1}{2}\cdot 4XY = a^2 \Rightarrow XY = \dfrac{a^2}{2}.$

**п9**. Ур-ие $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ прб-ть так, чтобы оно не содержало членов первого измр-я, и начертить крв-ю.

Р. По (17) имеем $\left.\begin{aligned} x &= X + a, \\ y &= Y + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y + b = \dfrac{2(X+a)+3}{X+a+4} \Rightarrow XY + (a + 4)Y +$
$+ (b - 2)X = 2a + 3 - (a + 4)b$. Полагаем $\left.\begin{aligned} a + 4 &= 0, \\ b - 2 &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= -4, \\ b &= 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow XY = -5$ (рис. 10).

Общий подход к прб-ю крд-т см. в 2.3.

## ЛЕКЦИЯ 6

## 2.2. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ, СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

**1°. Скалярное произведение векторов**. Дадим сд-е

**о1**. Скалярным (скн.) произведением (пзв.) вк-ов $a$ и $b$ (рис. 1) наз. число, равное пзв-ю их длин, умн-му на косинус угла между ними и обз-ся

$$(a, b) = ab = |a||b|\cos\varphi. \tag{1}$$

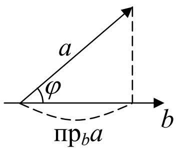


Рис. 1

Фм-е (1) можно придать др-ой вид. Т.к. $\dfrac{\text{пр}_b a}{|a|} = \cos\varphi$ (рис. 1), то пр$_b a = |a|\cos\varphi$, анч-но пр$_a b = |b|\cos\varphi$, т.е.

$$ab = |a|\text{пр}_a b = |b|\text{пр}_b a. \tag{2}$$

Из опр-ия ск-го пзв-ия получим его осн. св-ва:

**с1**. $ab = |a||b|\cos\varphi = 0$, если хотя бы один из вк-ов равен нулю, или $a \perp b$.

**с2**. $ab = ba$.

**с3**. $(a + b)c = ac + bc$. Д. В силу с1 из 2°: 2.1 имеем: $(a + b)c = |c|(\text{пр}_c a + \text{пр}_c b) = |c|\text{пр}_c a + |c|\text{пр}_c b = ac + bc$ ■

**с4**. $\alpha(ab) = a(\alpha b)$. Д. По с2 из 2°: 2.1 получим: $\alpha(ab) = \alpha|a|\text{пр}_a b$; $a(\alpha b) = |a|\text{пр}_a \alpha b = \alpha|a|\text{пр}_a b$ ■

Теперь найдем ск. пзв-ие вк-ов, заданных проекциями (пркц.):

$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$, т.к. они орт-ны, т.е. прп-ы.

$\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$, т.к. $\cos 0 = 1$, $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$. Тогда

$$\boldsymbol{ab} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3}$$

Из стн. (3) легко получить ряд полезных на практике фм-л:

1. При $a = b$, учитывая $a^2 = aa = |a|\,|a|\cos 0 = |a|^2$, имеем

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{4}$$

Если $a = AB$, где известны крд-ы точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$|a| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{4а}$$

Для едч-го вк-а $a° = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4б}$$

Заметим, что фм-ы (4), (4а), (4б) мы уже получили в 3°: 2.1.

2. Из (1), (3), (4) получим косинус угла между вк-ми

$$\cos\varphi = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\ . \tag{5}$$

Если $a \perp b$, то $\cos(\pi/2) = 0$, тогда из (5) следует

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{5а}$$

Если же $a \parallel b$, то $a = \alpha b$ или $(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$, тогда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha. \tag{5б}$$

3. Из (5) легко получить нпвщ-ие косинусы вк-а $a$, полагая ств-но $b = \boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $b = \boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $b = \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{a\boldsymbol{i}}{|a|\cdot 1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a\boldsymbol{j}}{|a|\cdot 1} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a\boldsymbol{k}}{|a|\cdot 1} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}. \tag{5в}$$

4. Если взять едч-ые вк. $a° = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $b° = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$, то из (4б), (5), (5в) $\Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{a°b°}{1\cdot 1} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{6}$$

**п1**. На тч-у действуют три силы $F_1 = (1, 2, 3)$, $F_2 = (-2, 3, -4)$, $F_3 = (3, -4, 5)$. Найти вел-у и нпв-ие равнодействующей силы.

Р. $F = F_1 + F_2 + F_3 = (2, 1, 4)$; $|F| = \sqrt{2^2+1^2+4^4} = \sqrt{21}$. Найдем нпв-ие $\cos\alpha = \frac{x}{|F|} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$.

**п2**. Найти угол между вк-ми $a = (1, 2, 3)$ и $b = (2, -1, 4)$.

Р. $\cos\varphi = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{1\cdot 2+2(-1)+3\cdot 4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}+\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

**2°. Векторное произведение векторов**. Сначала напомним, что тройка $a$, $b$ и $c$ некомпланарных вк-ов наз. правой (рис. 2а) или левой (рис. 2б), если она ориентирована (орнтв.) по правилу правого винта (против часовой стрелки) или по правилу левого винта (по часовой стрелке). И дадим сд-е

**о2**. Векторным (вкн.) пзв-ем двух вк-ов $a$ и $b$ наз. вк. $c$, длина к-го численно равна пщ-ди прлг-ма (рис. 3), построенного на вк-ах $a$ и $b$, прп-ый к пл-ти этих вк-ов и направленный (нпвн.) в такую сторону, что вк-ы $a$, $b$, $c$ составляют правую ориентацию (орнтц.). Обз-ся $c = a \times b = [a, b]$, а

$$|c| = |a||b|\sin\varphi. \tag{7}$$

Из опр-ия вкн-го пзв-ия получим его осн. св-ва:

**с1**. $a \times b = 0$, если $a = 0$, или $b = 0$, или $a \parallel b$. В част., $a \times a = 0$.

**с2**. $|a \times b| = |c| = |a||b|$, если $a \perp b$, т.к. $\sin(\pi/2) = 1$.

**с3**. $a \times b = -b \times a$, т.к. меняется орнтц-я.

**с4**. $\alpha(a \times b) = \alpha a \times b = a \times \alpha b$. Д. Ограничимся (огр.) случаем $\alpha > 0$. Прежде всего покажем, что длины этих вк-ов равны: $|\alpha(a \times b)| = \alpha|a||b|\sin\varphi$, $|\alpha a \times b| = |\alpha a||b|\sin\varphi = \alpha|a||b|\sin\varphi$, $|a \times \alpha b| = |a||\alpha b|\sin\varphi = \alpha|a||b|\sin\varphi$. Нпв-ия этих вк-ов совпадают, т.к. при умн-и вк-а на плж. число его нпв-ие не меняется.

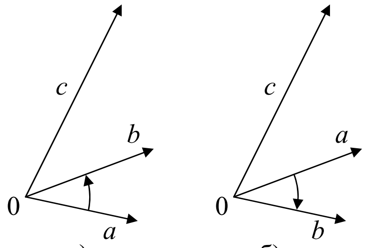
**с5**. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (д-во см. в п3).

Теперь найдем вкн. пзв-ие вк-ов, заданных пркц-ми. Для этого сначала на основании с1-с3 получим: $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$; $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$. Тогда $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = -y_1x_2\boldsymbol{k} + z_1x_2\boldsymbol{j} + x_1y_2\boldsymbol{k} - z_1y_2\boldsymbol{i} - x_1z_2\boldsymbol{j} + y_1z_2\boldsymbol{i} = (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k}$ или

$$a \times b = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Если $a \parallel b$, то $a \times b = 0$, но это возможно при

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha \text{ (см. и 5б)} \qquad (8а)$$




а) б)

Рис. 2

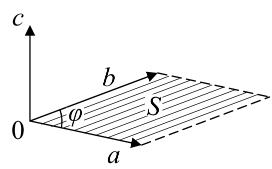



Рис. 3

**п3**. Используя (8) и с4 из 3°: 1.2, д-ть с5.

Д. $(a + b) \times c = [(x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k}] \times (x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}) =$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a \times c + b \times c.$$

**п4**. Дан $\Delta ABC$ с верш-ми $A(1, 2, –3)$, $B(– 1, 1, 0)$, $C(2, –1, 1)$. Найти его пщ-дь.

Р. Находим вк-ы $a = BA = (2, 1, –3)$ и $b = BC = (3, –2, 1)$. Тогда $a \times b =$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k};\ |a \times b| = \sqrt{(-5)^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{195}.$$ Отсюда

получим $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|a \times b| = \dfrac{\sqrt{195}}{2}$ кв. ед.

**п5**. Опр-ть синус угла $A$ $\Delta$-ка с верш. $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, 4, 7)$.

Р. Т.к. $\left.\begin{aligned} a &= AB = (2,2,2), \\ b &= AC = (1,2,4), \end{aligned}\right\}$, то $\sin A = \dfrac{|a \times b|}{|a||b|} = \dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{12 \cdot 21}} = \frac{1}{3}.$$

**п6**. Дан $\Delta ABC$ с верш. $A(5, –3)$, $B(7, 4)$, $C(2, 1)$. Выч-ть длину его высоты, проведенной из верш. $B$ на сторону $AC$.

Р. $S_\Delta = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$, где $BD$ – высота. Отсюда $BD = \dfrac{2S}{AC} = \dfrac{|AB \times AC|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} =$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{29}{5}.$$

**п7**. Сила $F(4, 2, 1)$ приложена (рис. 4) в тч. $B(3, 2, 4)$. Найти момент силы отс-но точки $A(5, – 1, 6)$, т.е. вк-а $AB = (– 2, 3, –2)$.

Р. Моментом силы $F$, приложенной к точке $B$ отс-но $A$ (рис. 4), наз. вк-р

$$M = AB \times F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 7\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}.$$

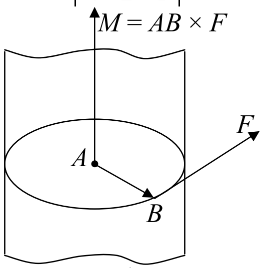


Рис. 4

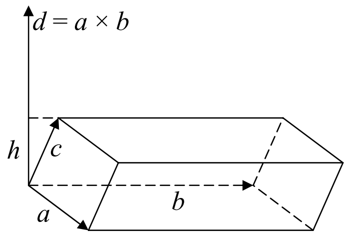


Рис. 5

**3°. Смешанное произведение векторов**. Иногда его наз-ют вкн.-скн. пзв-ем вк-ов, чтобы отличить от двойного вкн-го пзв-ия вк-ов (см. 4°).

**о3**. Смешанным пзв-ем $abc = (a \times b)c$ трех некомпланарных вк-ов наз. число, абсолютная (абс.) вел. к-го врж-ет объем параллелепипеда (прлп.), построенного на вк-х $a$, $b$, $c$ (рис. 5) как на ребрах. Знак пзв-ия плж-ен, если вк-ы $a$, $b$, $c$ образуют правую орнтц. и отц-ен в противном случае.

Дсв-но, из рис. 5 получим, что

$$(a \times b)c = dc = |d|\text{Пр}_d c = |d|c_1 = |d|h = V, \tag{9}$$

где $|d|$ – пщ. прлг-ма на вк-х $a$ и $b$, $h$ – высота прлп-да, значит, $(a \times b)c$ – объем прлп-да.

Из опр-ия смешанного вкн. пзв-ия вк-ов следуют его осн. св-ва:

**с1**. $abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb$.

**с2**. $abc = 0$, если вк-ы $a$, $b$, $c$ компланарны, или хотя бы один из вк-ов равен нулю, или два из перемножаемых вк-ов коллинеарны.

Теперь выведем фм-у смешанного пзв-ия вк-ов, заданных пркц-ми:

$(a \times b)c = [(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})](x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}) =$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}(x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}) = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \right)(x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$ Итак, получили

$$(a \times b)c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Из стн. (10) легко получить условие компланарности трех вк-ов:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

**п8**. Вывести усл-е того, чтобы четыре тч. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ лежали на одной пл-ти.

Р. Для выполнения данного усл-я вк-ы $AB$, $AC$, $AD$ должны быть компланарны, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

**п9**. Найти объем $V$ туг-ой пирамиды, заданной верш-и: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

Р. Т.к. объем пирамиды можно расв-ть как 1/6 часть объема прлп-да, построенного на ребрах $AB$, $AC$, $AD$, то получим:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Знак перед опрт-ем берется так, чтобы объем был плж-ым.

**п10**. Вк-ы $a$, $b$ и $c$ образуют правую тройку и взаимно прп-ны. Зная, что $|a| = 4$, $|b| = 2$, $|c| = 3$, выч-ть $abc = (a \times b)c$.

Р. $|a \times b| = |a||b|\sin(\pi/2) = 4 \cdot 2 = 8$. Вк-ы $a \times b$ и $c$ коллинеарны, значит, $a \times b = \alpha c$, $\alpha > 0$, т.к. вк-ы образуют правую тройку. Тогда $|a \times b| = \dfrac{8}{3}|c|$, т.е. $\alpha = \dfrac{8}{3}$. Отсюда $(a \times b)c = \dfrac{8}{3}(c \cdot c) = \dfrac{8}{3}c^2 = \dfrac{8}{3} \cdot 9 = 24$.

**4°. Двойное векторное произведение**. Двойным вкн. пзв-ем $(a \times b) \times c$ наз. вкн-ое пзв. вк-а $a \times b$ на вк. $c$. Умножая вк. $a$ вк-но на $b \times c$, получим двойное вк. пзв-ие $a \times (b \times c)$. В общем случае $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$.

Двойное вк. пзв-ие $a \times (b \times c)$ есть вк-р, компланарный с вк-ми $b$ и $c$, к-ое врж-ся через них по фм-е:

$$a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab) = \begin{vmatrix} b & c \\ (ab) & (ac) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что есть и др. пзв-ия, содержащие более двух вк-ов, н-р:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc) = \begin{vmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{vmatrix};$$

$$(a \times b)^2 = a^2b^2 - (ab)^2;$$

$$(a \times b) \times (c \times d) = [acd]b - [bcd]a = [abd]c - [abc]d.$$

# ЛЕКЦИЯ 7

## 2.3.$^{\ominus}$ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В данном параграфе обобщаются материалы 1.4; 2.1 и 2.2 для $n$-мр. лин-го пр-ва. При первом чтении книги это обобщение можно пропустить и в дальнейшем возвращаться по мере нхс-ти, если есть указания в ств-их параграфах или пунктах. Такие параграфы или пункты отмечаются знаком $^{\ominus}$.

**1$^{\ominus}$. Линейное пространство и его размерность, базис, координаты**. Введем сд. понятия.

Мн-во $L$ наз. лин. пр-ом, а его эл-ы – вк-ми, если указан закон, согласно к-му:

1*. Любой паре вк-ов $x, y \in L$ однозначно ставится в ств-ие вк. $z \in L$, назм-ый их суммой и обз-ся $z = x + y$.

2*. Вк-у $x \in L$ и числу $\lambda$ однозначно ставится в ств-ие вк. $z \in L$, назм-ый их пзв-ем и обз-ся $z = \lambda x$.

При этом операции сж-ия вк-ов и умн-ия вк-а на число уд-ют сд. аксиомам:

1) сж-ие комм.: $x + y = y + x$;

2) сж-ие асс.: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) сущ-ет ($\exists$) эл-т $0 \in L$, такой, что $x + 0 = x$ для любого ($\forall$) $x \in L$;

4) для каждого вк-а $x \in L$ сущ-ет противоположный вк. $-x \in L$, такой, что $x + (-x) = 0$;

5) $\forall$ вк-ов $x, y \in L$ и $\forall$ числа $\lambda$ имеет место рав-во $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

6) $\forall\ x \in L$ и $\forall$ чисел $\lambda$ и $\gamma$ имеет место рав-во $(\lambda + \gamma)x = \lambda x + \gamma x$;

7) рав-во $(\lambda\gamma)x = \lambda(\gamma x)$ верно $\forall\ x \in L$ и $\forall$ чисел $\lambda$ и $\gamma$;

8) рав-во $1x = x$ верно $\forall\ x \in L$.

Если в 2* число $\lambda$ вещественное (вещ.), то $L$ наз. вещ-м лин. пр-ом; если же $\lambda$ – любое комп. число, то лин. пр-во $L$ наз. комп-ым.

Разностью вк-ов $x$ и $y$ наз. вк. $z$, удщ-й рав-у $z + y = x$. Разность вк-ов обз-ся так: $z = x - y$.

Подпространством (подпр.) лин-го пр-ва $L$ наз. всякое подмножество (подмн.) мн-ва $L$, эл-ы к-го в свою очередь образуют лин. пр-во с теми же операциями 1* и 2*, что и в $L$.

Для системы вк-ов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ имеют место те же опр-ия и теоремы, что и для системы фк-й (см. 4°: 2.1).

Лин. пр-во $L$ наз. $n$-мр-ым, если в нем сущ-ет $n$ лин-но незв-ых вк-ов, к-ое обз-ся через $L^n$. Число $n$ наз. размерностью пр-ва. Иногда размерность обз-ют через $r$.

Пр-во, в к-ом можно найти сколько угодно много лин-но незв-ых вк-ов наз. бесконечномерным (бескмр.).

Базисом в $n$-мр. лин-ом пр-ве наз-ют любую упорядоченную (уп.) свк-ть $n$ лин-но незв-ых вк-ов.

**т1**. Каждый вк. $x \in L^n$ можно представить (едн. способом) в виде лин-ой комбинации базисных вк-ов.

Н-р, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольный базис лин. пр-ва $L^n$, то для каждого $x \in L^n$ имеет место едн. разложение

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз-ют крд-ми вк-а $x$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и записывают $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ясно, что если в пр-ве $L^n$ выбрать др-й базис, то изменятся и крд-ы вк-а $x$.

Для вк-ов, заданных своими крд-ми, имеют место лин-ые операции над вк-ми (см. 3°: 2.1).

**п1**. Показать, что все многочлены (мчл.) степени (сп.) не больше $n$ от одного пер-го с вещ-ми коэф. образуют вк. пр-во. Найти его базис и размерность.

Р. Суммой двух мчл-ов сп-и не больше $n$ яв-ся мчл-н, ст-нь к-го также не больше $n$, а умн-ие мчл-на на число не может повысить его ст-нь. Легко убедиться, что операции сж-ия мчл-ов и умн-ия мчл-на на число уд-ют всем восьми аксиомам лин-го пр-ва. Т.о., все мчл-ы сп-и, не большей $n$, образуют лин. пр-во $L$.

Рас-им теперь сд. систему мчл-ов:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n. \tag{1}$$

Она яв-ся лин-но незв-ой, т.к. рав-во

$$c_1 \cdot 1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_{n+1}x^n = 0$$

выполняется ттогда, когда все $c_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$ .

Т.к. любой мчл-н лин-го пр-ва $L$ можно представить (едн. способом) в виде лин-ой комбинации систем мчл-ов (1), то система (1) яв-ся базисом лин-го пр-ва $L$, а сд-но, размерность пр-ва равна $n + 1$.

**п2**. Найти размерность и базис лин-го пр-ва, натянутого на сд. систему вк-ов:

$a_1(1, 0, 0, -1)$, $a_2(3, 1, 1, 0)$, $a_3(0, 2, 1, -1)$, $a_4(1, 3, 2, 1)$, $a_5(5, -2, -1, -4)$.

Р. Используя жорд. иск-ия (см. 5°: 1.4), найдем зв-ть между вк-ми. Для этого составим исх. жорд-у табл. 1. Обз-ив через $a_{rs}(i)$ разрешающий эл-т $r$-й ср-ки, $S$-го сл-ца на $i$-м шаге, сделаем три шага: $a_{rs}(1) = a_{11}$, $a_{rs}(2) = a_{22}$, $a_{rs}(3) = a_{43}$ и получим табл. 2.

Таблица 1

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1 =$ | 1 | 0 | 0 | – 1 |
| $a_2 =$ | 3 | 1 | 1 | 0 |
| $a_3 =$ | 0 | 2 | 1 | – 1 |
| $a_4 =$ | 1 | 3 | 2 | 1 |
| $a_5 =$ | 5 | – 2 | – 1 | – 4 |

Таблица 2

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_4$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_2 =$ | 5 | – 2 | 1 | 4 |
| $a_3 =$ | 2 | – 1 | 1 | 0 |
| $x_3 =$ | – 8 | 3 | – 1 | – 7 |
| $a_5 =$ | 3 | 1 | – 1 | 0 |

Поменять местами $a_3$ или $a_5$ с $x_4$ не можем, т.к. на пересечении их $a_{34} = a_{54} = 0$. Сдт-но, вк-ы $a_1$, $a_2$ и $a_4$ лин-о незв-ы и образуют базис. Вк-ы $a_3$ и $a_5$ лин-о врж-ся через базис сд. образом: $a_3 =$ $= 2a_1 - a_2 + a_4$, $a_5 = 3a_1 + a_2 - a_4$. Т.о., размерность расв-го лин. пр-ва равна трем.

**2°. Евклидово пространство. Преобразование базиса**. Приведем сд. понятия.

Вещ-ое лин. пр-во наз евклидовым (обз-ся $E$), если в нем опр-но скалярное (скн.) пзв-ие (см. 1°: 2.2), т.е. $\forall\ x, y \in L$ сопоставлено вещ-ое число $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$ или $xy = |x||y|\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между вк-ми и это ств-ие уд-ет сд. аксиомам: каковы бы ни были вк-ы $x$, $y$, $z$ и число $\alpha$,

1) $xy = yx$; 2) $(x + y)z = xz + yz$; 3) $(\alpha x)y = \alpha(xy)$; 4) $xx > 0$, если $x \neq 0$.

Длиной (или нормой) вк-а $x$ наз. число $\sqrt{xx} = \sqrt{x^2}$ и обз-ся

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\ . \qquad (2)$$

Вк. $x$, длина к-го равна ед-е, наз. нормированным (норв.) вк-ом и обз-ся $x° = \dfrac{x}{|x|}$ .

Углом между вк-ми $x$ и $y$ в евклидовом пр-ве наз. число $\varphi$, уд-е усл-ю

$$\cos\varphi = \frac{xy}{|x||y|}\ . \qquad (3)$$

Для того чтобы усл. (3) имело смысл, нх-мо, чтобы $\forall\ x, y \in L$ выполнялось усл.

$$\frac{|xy|}{|x||y|} \leq 1 \text{ или } |xy| \leq |x||y|. \qquad (4)$$

Выполнимость усл-я (4) следует из нерав-ва $(xy)^2 \leq (xx)(yy)$, к-ое наз. нерав-ом Коши-Буняковского.

Вк-ы $x$ и $y$ наз-ют взаимно перпендикулярными (прп.) или ортогональными (орт.), если их скн. пзв-ие равно нулю, т.е. $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n = 0$.

Система вк-ов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. ортонормированной (ортонорв.), если

$$x_iy_j = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}\ .$$

При этом верны сд. утверждения (утв.):

**т2**. Ортонорв. система вк-ов лин-о незв-ма.

**т3**. В $n$-мр. евклидовом пр-ве сущ-ет ортонорв. система $n$ вк-ов.

Базис, вк-ы к-го образуют ортонорв. систему, наз. ортонормированным.

Если в ортонорв-ом базисе даны два вк-а $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то их скн. пзв-ие равно сумме пзв-й одноименных крд-т (как уже приводили выше), т.е.

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \qquad (5)$$

Учитывая стн-ия (2) и (5), фм-у (3) можно записать в виде:

$$\cos\varphi = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \qquad (6)$$

Теперь рас-им прб-ие базиса.

Пусть в $n$-мр. лин-ом пр-ве $L^n$ выбраны два базиса: старый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и новый $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Тогда при усл-и, что новые базисные вк-ы врж-ся в старом базисе по фм-ам

$$\left.\begin{array}{l} e'_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \ldots + p_{1n}e_n; \\ e'_2 = p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{2n}e_n; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e'_n = p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n \end{array}\right\}, \qquad (7)$$

крд-ы любого вк-а $x$ в старом базисе врж-ют через его крд-ы в новом по фм-ам

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{21}x'_2 + \ldots + p_{n1}x'_n; \\ x_2 = p_{12}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{n2}x'_n; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = p_{1n}x'_1 + p_{2n}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n \end{array}\right\} \qquad (8)$$

или в мч-ой форме

$$X = BX', \qquad (8')$$

где

$$B = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

М-ца $B$ системы (8) яв-ся транспонированной (трспн.) по отн-ю к м-це $P$ системы (7).

М-ца $B = P^{\mathrm{T}}$ наз. мц-й перехода от старого базиса к новому.

Для частного случая прб-ия базиса (при повороте пуг-ых крд-т в евклидовом пр-ве на угол $\alpha$, рис. 1) фм-ы (7) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \cos\alpha\cdot i + \sin\alpha\cdot j; \\ j_1 = -\sin\alpha\cdot i + \cos\alpha\cdot j. \end{array}\right\}$$

Сдт-но, м-ца перехода от старого базиса к новому

$$B = P^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

а фм-ы (8), врж-ие старые крд-ы вк-а через новые, имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha; \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

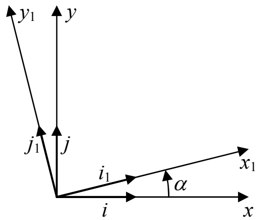


Рис. 1

Т.о., систему (9), полученную ранее частным способом (см. (18) из 5°: 2.1), получили общим способом.

Заметим, что для этого случая имеет место условие $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$, т.е. $PP^{\mathrm{T}} = E$. В этом и состоит особенность прб-ия пуг-ых крд-т.

М-ца $P$ с вещ-ми эл. наз. орт-ой, если $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$, т.е. $PP^{\mathrm{T}} = PP^{-1} = E$. Отсюда следует, что опрт-ль орт-ой м-цы может быть равен только 1 или – 1.

**п3**. Найти длины сторон и внутренний угол $A$ туг-ка, верш-ы к-го $A(2, 1, -2, -3)$, $B(2, -1, 2, 1)$, $C(6, 5, -2, -1)$.

Р. Найдем крд-ы вк-ов: $AB(0, -2, 4, 4)$, $AC(4, 4, 0, 2)$, $BC(4, 6, -4, -2)$. По фм-е (2) в орто-норв-ом базисе выч-им $AB = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$; $|AC| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$; $|BC| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. По фм-е (6) находим $\cos A = \dfrac{(AB, AC)}{|AB||AC|} =$

$$= \frac{0\cdot 4 + (-2)4 + 4\cdot 0 + 4\cdot 2}{6\cdot 6} = \frac{0}{36} = 0.$$ Сдт-но, $\angle A = \pi/2$.

Т.о., $\Delta ABC$ яв-ся пуг-ым и равнобедренным.

**п4**. Построить ортонорв-ый базис подпр-ва, натянутого на систему вк-ов $a_1(1, -5, -2, 10)$, $a_2(3, 11, -6, -22)$, $a_3(3, -2, -6, 4)$, $a_4(3, 11, 4, -7)$.

Р. Выч-ив ранг м-цы $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 10 \\ 3 & 11 & -6 & -22 \\ 3 & -2 & -6 & 4 \\ 3 & 11 & 4 & -7 \end{bmatrix}$, составленной из крд-т вк-ов системы, находим, что $r(A) = 3$,значит, три ср-ки м-цы лин-о незв-мы, т.е. размерность подпр-ва, натянутого на данную систему вк-ов, равна трем.

Для построения ортонорв-го базиса возьмем какой-нибудь из данных вк-ов, н-р, $a_1$, и с помощью лин-ых операций над вк-ми построим два новых вк-а расв-го пр-ва, к-ые вместе с вк-ом $a_1$ будут образовывать попарно орт. тройку вк-ов.

Возьмем вк. $a_5 = a_3 + \alpha a_1$. Мнж-ль $\alpha$ опр-им так, чтобы вк-ы $a_1$ и $a_5$ были орт-ны, т.е. чтобы их скн. пзв-ие равнялось нулю: $a_1a_5 = a_1(a_3 + \alpha a_1) = a_1a_3 + \alpha a_1^2 = 0$. Возьмем скн. пзв-ие через крд-ы вк-ов и получим $1 \cdot 3 + (-5)(-2) + (-2)(-6) + 10 \cdot 4 + \alpha(1^2 + (-5)^2 + (-2)^2 + 10^2) = 0$ или $1 + 2\alpha = 0$, откуда $\alpha = -1/2$. Сдт-но, $a_3 - \dfrac{1}{2}a_1 = a_5(5/2, 1/2, -5, -1)$.

Возьмем теперь вк. $a_6 = a_4 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_5$ и мнж. $\alpha_1$, $\alpha_2$ опр-им так, чтобы вк. $a_6$ был орт-ен вк-ам $a_1$ и $a_5$. Используя условие орт-сти вк-ов, получим отс-но $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такую систему:

$$\left.\begin{aligned} a_4a_1 + \alpha_1 a_1 = 0, \\ a_4a_5 + \alpha_2 a_5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{a_1a_2}{|a_1|^2} = -\frac{(-130)}{130} = 1, \\ \alpha_2 &= -\frac{a_4a_5}{|a_5|^2} = -\frac{0}{65/2} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Сдт-но, $a_4 + a_1 = a_6(4, 6, 2, 3)$.

Нор-уя вк-ы $a_1$, $a_5$, $a_6$, получаем ортонорв-ый базис:

$$e_1\left(\frac{1}{\sqrt{130}}, -\frac{5}{\sqrt{130}}, -\frac{2}{\sqrt{130}}, \frac{10}{\sqrt{130}}\right);\ e_2\left(\frac{5}{\sqrt{130}}, \frac{1}{\sqrt{130}}, -\frac{10}{\sqrt{130}}, -\frac{2}{\sqrt{130}}\right);\ e_3\left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{2}{\sqrt{65}}, \frac{3}{\sqrt{65}}\right).$$

**п5**. Д-ть, что каждая из двух систем вк-ов $e_1(1, 1, 1)$; $e_2(1, 2, 3)$; $e_3(1, 1, 2)$; $e'_1(1, 2, 1)$; $e'_2(2, 3, 3)$; $e'_3(3, 7, 1)$ яв-ся базисом и найти связь крд-т одного и того же вк-а в этих базисах.

Р. Выч-им опрт-ли, состоящие из крд-т вк-ов для каждой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Т.к. опрт-ли отличны от нуля, то каждая из двух систем вк-ов яв-ся базисом.

Применив метод жорд-х иск-й, выразим базисные вк. $e'_1$, $e'_2$, $e'_3$ через базисные вк. $e_1$, $e_2$, $e_3$. Составим исх. жорд-у табл. 3. Примем за разрешающий эл-т в первом ($i = 1$) шаге $a_{rs}(i) = a_{11}$, далее $a_{rs}(2) = a_{22}$ и $a_{rs}(3) = a_{33}$. После выч-й получим табл. 4.

Таблица 3

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1 =$ | 1 | 1 | 1 |
| $e_2 =$ | 1 | 2 | 3 |
| $e_3 =$ | 1 | 1 | 2 |
| $e'_1 =$ | 1 | 2 | 1 |
| $e'_2 =$ | 2 | 3 | 3 |
| $e'_3 =$ | 3 | 7 | 1 |

Таблица 4

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | 1 | – 1 | 1 |
| $x_2 =$ | 1 | 1 | – 2 |
| $x_3 =$ | – 1 | 0 | – 2 |
| $e'_1 =$ | 2 | 1 | – 2 |
| $e'_2 =$ | 2 | 1 | – 1 |
| $e'_3 =$ | 9 | 4 | – 10 |

Из табл. 4 получаем: $\left.\begin{aligned} e'_1 &= 2e_1 + e_2 - 2e_3; \\ e'_2 &= 2e_1 + e_2 - e_3; \\ e'_3 &= 9e_1 + 4e_2 - 10e_3. \end{aligned}\right\}$

Сдт-но, м-ца перехода от базиса $e_1$, $e_2$, $e_3$ к базису $e'_1$, $e'_2$, $e'_3$ имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -10 \end{bmatrix}.$$

Связь крд-т одного и того же вк-а в этих двух базисах опр-ся системой

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x'_1 + 2x'_2 + 9x'_3;\\ x_2 &= x'_1 + x'_2 + 4x'_3;\\ x_3 &= -2x'_1 - x'_2 - 10x'_3. \end{aligned}\right\}$$

**3°. Собственные векторы и значения линейного преобразования**. Рас-им лин. пр-во $L$ и прб-ие $A$ этого пр-ва, т.е. закон, по к-му каждому вк. $x \in L$ ств-ет нек-ый вк. $x'$ из этого же пр-ва $L$. Символически этот закон записывается так: $x' = Ax$.

Прб-ие $A$ наз. лин-ым, если $x, y \in L$ и любого числа $\lambda$ справедливы рав-ва:

$$A(x + y) = Ax + Ay;\ A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Если пр-во $L$ $n$-мр. и в нем выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то связь между крд-ми вк-а $x$ и крд-ми его образа $y$ опр-ся системой

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n;\\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}$$

или в мч-ой форме,

$$Y = AX.$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n \end{bmatrix};\ Y = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n \end{bmatrix}.$$

М-ца $A$, $i$-й сл-ц к-ой составлен из крд-т вк-а $Ae_i$ в выбранном базисе, наз. мц-ей лин-го прб-ия.

При замене базиса с мц. перехода $B$ от старого базиса к новому лин. прб-ю с мц-й $A$ в новом базисе будет ств-ть м-ца $B^{-1}AB$, к-ая наз. подобной м-це $A$. Переход от м-цы $A$ к м-це $B^{-1}AB$ наз. подобным прб-ем м-цы $A$.

Т.о., одному и тому же лин. прб-ю в разных базисах ств-ют подобные м-цы.

Теперь рас-им операции над лин. прб-ми.

**Сложение преобразований**. Пусть даны два лин-х прб-ия в мч-ой форме:

$$Y = AX;\ Z = BX.$$

Тогда суммой лин-х прб-й на прб-ие $D$, опрм-ой стн-ем

$$Y + Z = (A + B)X = DX.$$

**Умножение преобразования на число**. Пусть даны лин. прб-ие в мч-ой форме $Y = AX$ и произвольное число $\lambda$. Тогда пзв-ем данного прб-ия на число $\lambda$ наз. прб-ие

$$Z = (\lambda A)X = BX.$$

**Произведение преобразований**. Рас-им теперь два посл-ых прб-ия $Y = AX$ и $Z = BY$. Подставив для $Y$ из первой ф-мы во вторую, получим лин. прб-ие

$$Z = B(AX) = (BA)X = CX,$$

к-ое наз. пзв-ем прб-ия $Y = AX$ на прб. $Z = BY$.

**Обратное преобразование**. Пусть дано лин. прб-ие $Y = AX$, где $A$ – квч. неособенная (невырожденная, см. 4°: 1.3) м-ца ($D(A) \neq 0$). Умн-ив его справа на обратную м-цу $A^{-1}$, получим лин. прб-ие $X = A^{-1}Y$, к-ое наз. обратным для прб-ия $Y = AX$.

Всякий ненулевой вк. $x$ наз. собственным (собс.) вк-ом лин-го прб-ия $A$, если найдется число $\lambda$, такое, что будет выполняться рав-во

$$Ax = \lambda x, \tag{10}$$

Число $\lambda$ наз. собс. зн-ем лин-го прб-ия $A$, ств-щим собс-му вк. $x$, к-ое обз-им через $x(\lambda)$. Собс. вк-ы обладают сд. св-ми:

1. Каждому собс. вк-у ств-ет едн. собс. число.

2. Если $x_1$, $x_2$ – собс. вк-ы лин-го прб-ия с одним и тем же собс. числом $\lambda$, то их сумма также яв-ся собс. вк-ом прб-ия $A$ с собс. числом $\lambda$.

3. Если $x$ – собс-ый вк-р лин-го прб-ия с одним и тем же собс. числом $\lambda$, то их сумма также яв-ся собс. вк-ом прб-ия $A$ с собс. числом $\lambda$.

Если в пр-ве $L^n$ выбран опрн-й базис, то рав-во (10) записывается в мч. форме:

$$AX = \lambda X, \tag{11}$$

Всякий ненулевой сл-ц, для к-го выполняется рав-во (11), наз. собс. вк-ом м-цы $A$, ствщ-им собс. зн-ю $\lambda$.

Т.к. $\lambda X = \lambda EX$, где $E$ – едч. м-ца, то ур-е (11) можно записать в виде:

$$(A - \lambda E)X = 0. \tag{12'}$$

Перейдя к крд-ой форме записи, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Для отыскания собс-ых вк-ов нх-мо найти ненулевые р-я системы (12), к-ые сущ-ют ттогда, когда опрт-ль этой системы равен нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Ур-ие (13) наз. хркч-им ур-ем м-цы $A$, а его корни – хркч. числами или собс. зн-ми м-цы $A$. При этом имеют место сд-ие

**т4**. Хркч-й мчл. (13) м-цы $A$ прб-ия не зв-т от выбора базиса.

**т5**. Если собс. вк-ы $x_1$, $x_2$, …, $x_k$ принадлежат попарно различным собс-ым зн-ям, то они лин-но незв-мы.

**т6**. М-ца лин-го прб-ия $A$ в базисе $e_1$, $e_2$, …, $e_n$ имеет диагональный вид ттогда, когда все вк-ы базиса яв-ся собс. вк-ми прб-ия.

Лин. прб-ие $A$ наз. симметрическим (симч.), если для произвольных вк-ов $x$ и $y$ скн. пзв-ие $x \cdot Ay = (x, Ay)$ равно скн. пзв-ию $(y, Ax)$.

**т7**. Чтобы лин. прб-ие $A$ было симч-им, нх-мо и дт-но, чтобы в ортонорв-ом базисе его м-ца была симч-ой, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Симч. м-цы обладают сд. св-ми:

**с1**. Все собс. зн-ия вещ. симч-ой м-цы вещ-ны.

**с2**. Собс. вк-ы вещ. симч-ой м-цы, отвечающие различным собс. зн-ям, орт-ны.

**с3**. Если мц. $A$ симч-ая и вещ-ая, а мц. $B$ орт-ая, то подобная мц. $B^{-1}AB$ симч-ая и вещ-ая.

**т8**. Произвольную симч. вещ. м-цу $A$ можно привести к диагональному виду с помощью орт-ой м-цы.

Следует отметить, что лин. прб-ие $A$ в пр-ве $R^3$ имеет по крайней мере одну тройку попарно прп-ых собс. вк-ов, при опр-и к-ых возможны сд. случаи.

1. Если собс. зн-ия $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ симч-ой м-цы $A$ различны, то в силу с2 ствщ-ие собс. вк-ы попарно орт-ны.

2. Если среди собс-ых зн-й $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ есть два одинаковых, то двукратному корню, н-р, $\lambda_2 = \lambda_3$, ств-ет беск. мн-во собс-ых вк-ов, лежащих в пл-ти, прп-ой к собс. вк-у, ствщ-му собс. зн-ю $\lambda_1$.

3. Если все собс. зн-ия одинаковы, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ – трехкратный корень хркч-го ур-ия, то симч-ое лин. прб-ие $A$ есть подобие в пр-ве с коэф-ом подобия $\lambda$. Любой вк., отложенный от нач. крд-т, для прб-ия подобия яв-ся собс. вк-ом, ствщ-им собс. зн-ю $\lambda$. Сдт-но, в этом случае три попарно прп-ых вк-а яв-ся собс. вк-ми симч-го прб-ия $A$.

**п6**. Д-ть, что орт. проецирование (прцв.) трехмерного (тмр.) пр-ва на ось $l$, образующую равные углы с осями пуг-ой системы крд-т, яв-ся лин. прб-ем, и найти его м-цу в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Р. На основании св-ва пркц-и вк-а на ось $l$ (см. 2°: 2.1) заключаем, что орт. прцв-е тмр-го пр-ва на ось $l$ яв-ся лин. прб-ем $A$.

Для опр-ия м-цы $A$ расв-го лин. прб-ия найдем крд-ы вк-ов $\boldsymbol{Ai}$, $\boldsymbol{Aj}$ и $\boldsymbol{Ak}$ в выбранном базисе. Т.к. ось $l$ образует с осями крд-т равные углы, к-ые обз-им $\alpha$, то базисные вк-ы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ лин-ым прб-ем $A$ переводятся в один и тот же вк-р (т.е. $\boldsymbol{Ai} = \boldsymbol{Aj} = \boldsymbol{Ak}$), модуль к-го равен $\cos\alpha$. Сдт-но, пркц-и вк-ов $\boldsymbol{Ai}$, $\boldsymbol{Aj}$, $\boldsymbol{Ak}$ на каждую из осей равны $\cos^2\alpha$, а это значит, что крд-ты этих вк-ов $\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha$. Тогда в силу св-ва нпвщ-их косинусов $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, откуда $\cos^2\alpha = 1/3$. Т.о., вк-ы $\boldsymbol{Ai}$, $\boldsymbol{Aj}$ и $\boldsymbol{Ak}$ имеют крд-ты 1/3, 1/3, 1/3.

Учитывая, что $i$-й сл-ц м-цы $A$ лин-го прб-ия составлен из крд-т вк-а $Ae_i$ в выбранном базисе $e_1$, $e_2$, …, $e_n$, для нашего случая получаем:

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

**п7**. Лин. прб-ие $y = Ax$ в базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$ имеет м-цу $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. Найти м-цу прб-ия отс-но нового базиса $e'_1$, $e'_2$, $e'_3$, связанного со старым базисом фм-ми:

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= 2e_1 + e_2 + 4e_3; \\ e'_2 &= 3e_1 + 2e_2 + 7e_3; \\ e'_3 &= -e_1 + 3e_2 + 6e_3. \end{aligned}\right\}$$

Р. Т.к. м-ца $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, то м-ца перехода от старого базиса к новому $B = P^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

Oпрт-ль этой м-цы $D(B) = 1$. Сдт-но, сущ-ет обратная к ней м-ца $B^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -25 & 11 \\ 6 & 16 & -7 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}A =$

$= \begin{bmatrix} 11 & 29 & -3 \\ -7 & -19 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 39 & 70 & 58 \\ -25 & -45 & 38 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Это значит, что в новом базисе расв-ое лин. прб-ие в крд-ой форме задается системой

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= 39x'_1 + 70x'_2 + 58x'_3; \\ y'_2 &= -25x'_1 - 45x'_2 + 38x'_3; \\ y'_3 &= -x'_1 - x'_2 + 3x'_3. \end{aligned}\right\}$$

**п8**. Найти собс. зн-ия и собс. вк-ы симч-го прб-ия, заданного в нек-ом ортонорв-ом базисе мц-ей

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Р. Составим хркч. ур-ие: $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^3 - 21\lambda^2 + 144\lambda - 320 = 0$. Корни этого ур-ия $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$. Собс. вк-ы, ствщ-ие $\lambda_1 = 5$ и $\lambda = 8$, найдем из системы (12), к-ая для п8 принимает вид $\left.\begin{aligned} (7-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \\ x_1 + (7-\lambda)x_2 - x_3 &= 0; \\ x_1 - x_2 + (7-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ Подставив сюда $\lambda = \lambda_1 = 5$, получим $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ Одно из р-й этой системы $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, тогда собс. вк-ы для $\lambda_1 = 5$ имеют вид $\alpha u_1(1, -1, -1)$, где $\alpha \neq 0$.

Анч-но найдем собс. вк-ы с собс. зн-ем $\lambda = 8$: $\beta u_2(1, 0, 1)$, где $\beta \neq 0$.

Т.к. собс. зн-ие $\lambda_2 = 8$ яв-ся двукратным корнем хркч-го ур-ия, то ему ств-ет беск. мн-во собс-ых вк-ов, лежащих в пл-ти, прп-ой к собс. вк-у, ствщ-му собс-му зн-ю $\lambda_1 = 5$. Поэтому, умножив вк-но $\alpha u_1(1, -1, -1)$ на $\beta u_2(1, 0, 1)$, найдем еще собс. вк-ы с собс-ым зн-ем $\lambda = 8$: $\alpha u_1(1, -1, -1) \times \beta u_2(1, 0, 1) = \alpha\beta u_3(-1, -2, 1)$.

Т.о., симч-ое лин. прб-ие с симч-ой мц. $A$ имеет по крайней мере одну тройку попарно прп-ых собс. вк-ов, а сдт-но, по т8 м-цу $A$ можно привести к диагональному виду с помощью орт-ой м-цы.

Нормируя собс. вк-ы $u_1(1, -1, -1)$, $u_2(1, 0, 1)$, $u_3(-1, -2, 1)$, получаем вк-ы

$$e_1\left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right),\ e_2\left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right),\ e_3\left(-1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right),$$

к-ые составляют ортонорв-ый базис. После перехода к этому базису м-ца $A$ данного лин. прб-ия принимает диагональный вид: $A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

**п9**. Найти м-цу $B$, приводящую к диагональному виду м-цу $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Р. Составим хркч. ур-ие $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ и $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Система (12) в данном случае имеет вид $\left.\begin{matrix} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0; \\ 3x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{matrix}\right\}$ Подставив сюда $\lambda = \lambda_1 = 1$, получим $\left.\begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 = 0. \end{matrix}\right\}$ Одно из р-й этой системы: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Тогда собс. вк. для зн-ия $\lambda_1 = 1$ имеет вид $(1, -1)$.

Анч-но найдем собс. вк. $(2, 3)$ с собс-ым зн-ем $\lambda = \lambda_2 = 6$.

Из крд-т собс-ых вк-ов м-цы $A$ как из сл-ов строим м-цу $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Находим обратную ей м-цу $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Легко убедиться, что м-ца $B^{-1}AB$ яв-ся диагональной:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

**4°. Квадратичные формы и приведение их к каноническому виду**. Введем сд. понятия.

Квадратичной (квч.) формой от $n$ пер-ых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. однородный (одн.) мчл. второй сп-и от этих пер-ых

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \,, \tag{14}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Стн-ие (14) в мч-ой форме имеет вид:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX, \tag{14'}$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$; $X^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Привести квч. форму (14) к каноническому (канч.) виду – значит, представить ее в виде:

$$\varphi_1 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \,. \tag{15}$$

М-ца $A_1$, ствщ-ая квч-ой форме (15), диагональна.

Т.к. м-ца $A$ стн-ия (14) и (14') яв-ся симч-ой и вещ-ой, то задача приведения к канч. виду квч-ой формы (14) сводится к задаче приведения ее к диагональному виду м-цы симч-го лин. прб-ия. Отметим, что правило приведения квч-ой формы к канч. виду применяется при иссл-и ур-й линий и пвх-ей второго порядка (см. 5.3).

**п10**. Привести к канч. виду квч-ю форму $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

Р. Составим хркч. ур-ие: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Тогда канч-й вид квч-ой формы $\varphi_1 = y_1^2 + 6y_2^2$. Для того чтобы найти базис, нх-мо найти собс. вк-ы симч-го лин. прб-ия с мц-ей $A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

По (12) найдем собс. вк-ы:

$$\left.\begin{aligned}(2-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0;\\ -2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Подставляя сюда $\lambda = \lambda_1 = 1$, $\lambda = \lambda_2 = 6$ и беря каждый раз норв. р-ие системы (16), находим вк-ы, опрщ-ие главные направления квч-ой формы:

$$e'_1\left(2/\sqrt{5}\,,\ 1/\sqrt{5}\right);\ e'_2\left(-\,1/\sqrt{5}\,,\ 2/\sqrt{5}\right),$$

причем можно взять и р-ия с обратным знаком. Они составляют нужный базис.

При переходе к базису $e'_1$, $e'_2$ крд-ты вк-ов прб-ся по фм-ам:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2;\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2.$$

Мц-ей перехода яв-ся орт. м-ца $B = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

**п11**. Привести к канч. виду квч. форму $\varphi = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Р. Составим хркч. ур-ие: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда, разлагая опрт-ль по эл-ам первой ср-ки, получаем $(1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda) - 1) - (1-\lambda-3) + 3(1-3((5-\lambda)) = 0$ или $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, сдт-но, канч-й вид квч-ой формы $\varphi_1 = -\,2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$.

Читателю предлагается найти базис, в к-ом квч. форма имеет такой вид.

## 2.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 2.1. ВЕКТОРЫ И ИХ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое скаляр и вектор?
2. Приведите лин-ые операции над вк-ми и их осн. св-ва.
3. Что такое пркц-я вк-а на ось и какими св-ми она обладает?
4. Как раскладывается вк-р по ортам крд-ых осей?
5. Что такое едч-ый вк-р и нпвщ. косинусы вк-а?
6. Дайте опр-ие зв-ти и незв-ти вк-ов.

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Вк-ы $a$, $b$, $c$ составляют с осью $l$ углы $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi$ ств-но. Найти пркц-ю на ось $l$ вк. $2a + 3b - c$, если $|a| = 4$, $|b| = 1$, $|c| = 2$.

Р. $\text{Пр}_l(2a + 3b - c) = 2\text{Пр}_l a + 3\text{Пр}_l b - \text{Пр}_l c$, а $\text{Пр}_l a = |a|\cos\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$, $\text{Пр}_l b = |b|\cos\dfrac{2\pi}{3} = 1\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $\text{Пр}_l c = |c|\cos\pi = 2(-1) = -2$. Тогда $\text{Пр}_l(2a + 3b - c) = 2\cdot 2 + 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2 = \dfrac{9}{2}$.

**тз2**. В $\Delta OAB$ (рис. 1) даны вк. $OA = a$, $OB = b$. Найти вк. $AB$, $MA$, $MB$, $MN$, $ON$, где $M$, $N$ – середины сторон $AB$, $OB$ ств-но.

Р. $AB = OB - OA = b - a$, $MB = \dfrac{1}{2}(b - a)$, $MA = -MB = -\dfrac{1}{2}(b - a)$, $MN = -\dfrac{1}{2}OA = -\dfrac{1}{2}a$, $ON = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{1}{2}b$.

**тз3**. Даны три вк-а: $p(3, 2, 4)$, $q(4, 3, -5)$, $r(7, 5, -2)$. Найти разложение вк. $a(4, 3, 2)$ по базису $p$, $q$, $r$.

Р. Имеем $a = \alpha p + \beta q + \gamma r$ (1). Т.к. вк-ы $a$, $p$, $q$, $r$ заданы в нек-ом базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$, то вместо (1) получим $4e_1 + 3e_2 + 2e_3 = \alpha(3e_1 + 2e_2 + 4e_3) + \beta(4e_1 + 3e_2 - 5e_3) + \gamma(7e_1 + 5e_2 - 2e_3) = (3\alpha + 4\beta + 7\gamma)e_1 + (2\alpha + 3\beta + 5\gamma)e_2 + (4\alpha - 5\beta - 2\gamma)e_3$. Отсюда получим $\left.\begin{array}{l} 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 4; \\ 2\alpha + 3\beta + 5\gamma = 3; \\ 4\alpha - 5\beta - 2\gamma = 2. \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 7,\ \beta = 8,$ $\gamma = -7$. Тогда $a = 7p + 8q - 7r$.

**тз4**. В тч-х $A(3, 6, -5)$ и $B(1, -1, 2)$ приложены прл-но нпвн-ые силы $F_1$ и $F_2$. Найти тч-у $M(x, y, z)$ приложения равнодействующей силы $F$, если $|F_1| = 5$Н и $|F_2| = 2$Н.

Р. Из курса физики известно, что при сж-и прл-ых сил $F_1$ и $F_2$ (рис. 2) плечи $AM$ и $MB$ обратно прц-ны прилежащим силам: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{|F_2|}{|F_1|} = \dfrac{2}{5} = \lambda$. Тогда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{3 + \frac{2}{5}\cdot 1}{1 + 2/5} = \dfrac{17}{7}$,

$$y = \frac{6 + \frac{2}{5}\cdot(-1)}{1 + 2/5} = 4,\ z = \frac{-5 + \frac{2}{5}\cdot 2}{1 + 2/5} = -3,\ M\left(\frac{2}{5},\ 4,\ -3\right).$$

Нпв-ие силы $F$ совпадает с нпв-ем сил $F_1$ и $F_2$, а ее вел-а равна сумме вел-н этих сил, т.е. $|F| = |F_1| + |F_2| = 5 + 2 = 7$Н.

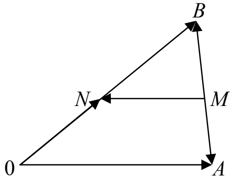


Рис. 1

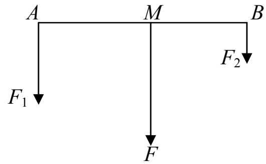


Рис. 2

**тз5**. В пуг-ой системе крд-т даны верш-ы туг-а: $A(5, -4)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -1)$. Выяснить, есть ли среди внутренних углов туг-ка тупой угол.

Р. Находим $AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{64+36} = 10$,

$$AC = \sqrt{(1-5)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Отсюда $AB^2 = 100$, $AC^2 = BC^2 = 25$, тогда $AB^2 > AC^2 + BC^2$. Но по теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos\widehat{ACB}$. Значит, $\angle ACB = C$, лежащий против стороны $AB$, тупой, т.к. он лежит против стороны, кв-т к-ой превосходит сумму кв-ов двух сторон туг-ка.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п7 и тз1-тз5 р-ть з1-з20.

1. По данным вк-ам $a$ и $b$ построить вк-ы $2a + b$ и $a - b/2$.
2. Какому условию уд-ют вк-ы $a$ и $b$, если: 1) $|a + b| = |a - b|$; 2) $|a + b| > |a - b|$; 3) $|a + b| < |a - b|$?
3. Какому усл. должны уд-ть вк-ы $a$, $b$, $c$, чтобы из них можно было образовать туг-к?
4. В $\Delta OAB$ сторона $AB$ разделена тч-й $M$ в отн-и $\dfrac{m}{n} = \dfrac{AM}{MB}$. Разложить вк. $OM$ по вк-ам $OA = a$ и $OB = b$.
5. В прлг-ме $OACB$ даны вк. $OA = a$ и $OB = b$. Найти вк-ы $MO$, $MA$, $MB$, $MC$, если $M$ – тч-а пересечения диагоналей.
6. В прлп-де $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны вк. $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, совпадающие с его ребрами. Найти вк-ы диагонали $AC_1$, $A_1C$, $BD_1$, $B_1D$.
7. В $\Delta OAB$ даны вк. $OA = a$ и $OB = b$. Найти вк-ы $AM$, $BM$, $OM$, если $M$ – центр масс туг-ка.
8. В туг-ой пирамиде $FABC$ даны вк. $FA = p$, $FB = q$, $FC = r$. Найти вк. $FM$ (тч. $M$ – центр масс $\Delta ABC$).
9. Найти пркц-ю суммы вк-ов $a$, $b$, $c$, $d$ на ось $l$, если $|a| = 3$, $|b| = 2\sqrt{2}$, $|c| = 5$, $|d| = 6$, а углы, составляемые этими вк-ми с осью $l$, равны ств-но $0$, $\pi/4$, $2\pi/3$, $\pi/3$.
10. Разложить вк. $a$ по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, если $|a| = 6\sqrt{2}$ и его углы с осями крд-т $0x$, $0y$, $0z$ равны ств-но: $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = 2\pi/3$.
11. На пл-ти даны два вк-а: $p(3, 2)$ и $q(2, 1)$. Разложить вк. $a(4, 5)$ по базису $p$, $q$.
12. Даны три вк-а: $p(4, 5, 1)$, $q(3, 4, 1)$, $r(2, 3, 2)$. Разложить вк. $a(6, 3, 4)$ по базису $p$, $q$, $r$.
13. Отрезок, огр-ый тч-ми $(2, 3)$ и $(8, 12)$, разделен на три равные части. Опр-ть крд-ы тч-к деления.
14. Выяснить, если ли среди внутренних углов туг-ка с верш-ми $(3, 2)$, $(-3, 4)$, $(6, 5)$ тупой угол.
15. Найти центр тяжести туг-ка, зная крд-ы его верш.: $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$. О: $M[(x_1 + x_2 + x_3)/3, (y_1 + y_2 + y_3)/3]$.
16. В тч. $(4, 2, -6)$ и $(2, -2, 4)$ приложены прл. силы $F_1$ и $F_2$, нпвн-ые в противоположные стороны. Найти тч-у приложения равнодействующей $F_1$, если $|F_1| = 2$Н и $|F_2| = 6$Н. О: $(1, -4, 9)$.
17. Какому усл. уд-ют вк. $a$ и $b$, если вк. $a + b$ направлен по биссектрисе угла между ними? Ук: прлг-ам, построенный на $a$ и $b$, должен быть ромбом.
18. По данным вк. $a$ и $b$ построить вк-ы $a - 2b$, $\dfrac{1}{2}b - 3a$, $\dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b$.
19. Тч. $O$ яв-ся центром тяжести $\Delta ABC$. Д-ть, что $OA + OB + OC = 0$.
20. Найти пркц-ю сумм вк-ов $a$, $b$, $c$, $d$ на ось $l$, если $|a| = 5$, $|b| = 6$, $|c| = 8$, $|d| = 12$, а углы, составляемые этими вк. с осью $l$, ств-но равны $0$, $2\pi/3$, $\pi$, $\pi/3$.

Сделать чертеж и объяснить геом-й смысл полученного ответа. О: $a + b + c + d = 0$.

## 2.2. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ, СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте опр-ие скалярного (скн.) пзв-ия вк-ов и приведите его осн. св-ва.
2. Приведите фм-у скн-го пзв-ия вк-ов, заданных пркц-ми.
3. Как опр-ся векторное (вкн.) пзв-ие? Приведите его осн. св-ва.

4. Приведите фм-у вкн-го пзв-ия вк-ов, заданных пркц-ми.
5. Что такое смешанное пзв-ие вк-ов и какими св-ми оно обладает?
6. Приведите фм-у смешанного пзв-ия вк-ов, заданных пркц-ми.

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Даны вк. $a(3, -1, -1)$ и $b(1, 3, 5)$. Найти пркц-ю вк-а $3a - 2b$ на вк. $a + b$.

Р. Находим $3a - 2b = (9, -3, -3) + (-2, -6, -10) = (7, -9, -10)$, $a + b = (4, 2, 4)$. Из $(3a - 2b)(a + b) = |a + b|\text{Пр}_{a+b}(3a - 2b)$ имеем $\text{Пр}_{a+b}(3a - 2b) = \dfrac{(3a-2b)(a+b)}{|a+b|} = \dfrac{7\cdot 4 + (-9)2 + (-13)4}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \dfrac{-42}{6} = -7$.

**тз2**. Найти угол $\varphi$ между вк-ми $a = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $b = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Р. $\cos\varphi = \dfrac{ab}{|a||b|} = \dfrac{2\cdot 4 + (-2)(-1) + 1(-1)}{\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \pi/4$.

**тз3**. Выч-ть длину диагоналей прлг-ма, построенного на вк-ах $a = 2p - 3q$ и $b = 3p + 4q$, если известно, что $|p| = 2$, $|q| = 3$ и угол между ними $\varphi = \pi/3$.

Р. Найдем диагонали прлг-ма $c = a + b = (2p - 3q) + (3p + 4q) = 5p + q$; $d = a - b = (2p - 3q) + (-3p - 4q) = -p - 7q$. Теперь выч-им скн. кв-ты: $c^2 = (5p + q)^2 = 25p^2 + 10pq + q^2 = 25 \cdot 4 + 10|p||q|\cos\dfrac{\pi}{3} + 9 = 100 + 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 9 = 139$. $d^2 = (-p - 7q)^2 = p^2 + 14pq + 49q^2 = 4 + 14 \cdot 2 \times 3\cos\dfrac{\pi}{3} + 49 \cdot 9 = 487$. Отсюда получим длину диагоналей: $|c| = \sqrt{c^2} = \sqrt{139} \approx 12{,}6$; $|d| = \sqrt{d^2} = \sqrt{487} \approx 22{,}1$.

**тз4**. Даны три силы: $F_1(5, 3, -2)$, $F_2(2, -4, 6)$ и $F_3(1, 7, 3)$, приложенные в одной тч-е. Выч-ть, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда тч-а приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из тч. $M_1(4, 4, 6)$ в тч. $M_2(7, 5, 2)$.

Р. Найдем $F = F_1 + F_2 + F_3 = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} = (8, 6, 7)$, $S = M_1M_2 = (3, 1, -4)$. Тогда работа $A = FS = 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7(-4) = 2$.

**тз5**. Вк-ы $a$, $b$, $c$ уд-ют условию $a + b + c = 0$ 1. Д-ть, что $a \times b = b \times c = c \times a$ 2.

Р. Рав-во 1 вк-но умн-ем на вк. $b$: $a \times b + b \times b + c \times b = 0 \times b$. Отсюда $a \times b + c \times b = 0$, т.к. $b \times b = 0$ и $0 \times b = 0$. Учитывая, что $c \times b = -b \times c$, получаем $a \times b - b \times c = 0$ или $a \times b = b \times c$. Анч-но можно д-ть, что $a \times b = c \times a$, т.е. при заданном усл. 2 выполняется.

Геом-ки задачу можно интерпретировать так: усл. 1 врж-ет туг-к, составленный из этих вк-ов, а каждый из вкн-х пзв-й $a \times b$, $b \times c$, $c \times a$ по абс. вел-е равен половине пщ-и этого туг-ка, причем эти вк-ы одинаково направлены, поэтому 2 имеет место.

**тз6**. Д-ть, что тч-и $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной пл-ти.

Р. Находим вк-ы $AB = (-1, -1, 6)$, $AC = (-2, 0, 2)$, $AD = (1, -1, 4)$ и выч-им смешанное пзв-ие

$AB \cdot AC \cdot AD = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 8 - 2 = 0$, значит, тч-и $A$, $B$, $C$, $D$ лежат в одной пл-ти.

**тз7**. Выч-ть объем тетраэдра (пирамиды), верш. к-го находятся в тч-ах $A(1, -1, 3)$, $B(6, 1, -6)$, $C(1, 4, -3)$, $D(5, -6, 3)$.

Р. Находим вк-ы $AB = (5, 2, -9)$, $AC = (0, 5, 6)$, $AD = (4, -5, 0)$. Т.к. объем тетраэдра равен 1/6 части объема прлп-да, построенного на ребрах $AB$, $AC$, $AD$ (рис. 3), то получим:

$V = \pm\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \pm\dfrac{1}{6}(-48 + 180 - 150) = \pm\dfrac{1}{6}(-18)$.

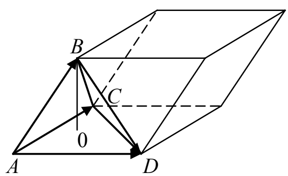


Рис. 3

Итак, $V_{\text{тетр}} = 3$ куб. ед.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п10 и тз1-тз7 р-ть з1-з30.

1. Даны вк-ы $a = (4, -2, 4)$ и $b = (6, -3, -2)$. Выч-ть: 1) $ab$; 2) $\sqrt{a^2}$ , 3) $(2a - 3b)(a + 2b)$; 4) $(a + b)^2$; 5) $(a - b)^2$. О: 1) 22; 2) 6; 3) – 200; 4) 129; 5) 41.

2. Выч-ть скн. пзв-ие $ab$, если $a = 2p - q$ и $b = 3p + 2q$, где $p$ и $q$ – едч. вк-ы, а угол между ними $\varphi = \pi/3$. О: 4,5.

3. Выч-ть длину вк. $a = bp - q$, если известно, что $|p| = 2\sqrt{2}$ , $|q| = 3$ и угол между ними $\varphi = \pi/4$. О: 15.

4. Найти угол $\varphi$ между вк-ми $a = (4, -1, 1)$ и $b = (2, 1, 2)$. О: $\varphi = \pi/4$.

5. Опр-ть, при каком зн-и $m$ вк-ы $a = (m, -3, 2)$ и $b = (1, 2, -m)$ взаимно прп-ы. О: $m = -6$.

6. Найти пркц-ю вк. $AB$ на вк. $CD$, если известны тч-и $A(2, -3, 4)$, $B(5, -5, -2)$, $C(1, 2, 3)$, $D(7, 4, 6)$. О: – 4/7.

7. Найти пркц-ю вк. $a = (4, -3, 2)$ на ось, сост-ю с крд. осями равные острые углы. О: $\sqrt{3}$ .

8. Найти углы между осями крд-т и радиус-вк-ом тч-и $M(-2, 3, 1)$. О: $\cos\alpha = -2\big/\sqrt{14}$ , $\cos\beta = 3\big/\sqrt{14}$ , $\cos\gamma = 1\big/\sqrt{14}$ .

9. Даны три силы $F_1(2, 4, 3)$, $F_2(3, -2, 5)$ и $F_3(-1, 3, -2)$, приложенные в одной тч-е. Выч-ть работу равнодействующей этих сил при двж-и ее из тч. $M_1(2, -1, 3)$ до тч. $M_2(7, 4, 8)$. О: $A = 75$.

10. Вк-ы $a$ и $b$ взаимно прп-ны. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 4$, выч-ть: а) $(a + b) \times (a - b)$, б) $(3a - b) \times$ $\times (a - 2b)$. О: а) 24; б) 60.

11. Выч-ть, при каких зн-ях $\alpha$ и $\beta$ вк-ы $a = \alpha\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ и $b = \boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ коллинеарны. О: $\alpha = 3/2$, $\beta = 14/3$.

12. Дано: $|a| = 10$, $|b| = 2$ и $ab = 12$. Найти $|a \times b|$. О: 16.

13. Упростить врж-ие $(2a + 3b) \times (c - a) + (2b + 3c) \times (a + b)$. О: $5(b \times a) - (a \times c)$.

14. Найти пщ-дь прлг-ма, построенного на вк-ах $a = p + 2q$ и $b = 2p + q$, где $p$ и $q$ – едч. вк-ы, угол между к-ми $\alpha = \pi/6$. О: 1,5 кв. ед.

15. Дан $\Delta ABC$ с верш. $A(3, -1, 4)$, $B(2, 4, 5)$, $C(4, 4, 5)$. Найти его пщ-дь. О: $\sqrt{26}$ кв. ед.

16. Выч-ть диагонали и пщ-дь прлг-ма, построенного на вк-ах $a = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $b = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. О: $|a + b| = |a - b| = \sqrt{5}$ , $S = \sqrt{6}$ кв. ед.

17. Даны вк. $a(3, -1, -2,)$, $b(1, 2, -1)$. Найти крд-ы вк-ых пзв-й а) $(2a + b) \times b$, б) $(2a - b) \times$ $\times (2a + b)$. О: а) $(-10, 2, 14)$; б) $(20, 4, 28)$.

18. Д-ть, что тч-и $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ служат верш-ми трапеции. О: $AB \parallel CD$, а $AC \nparallel BD$.

19. Даны три посл-ые верш. прлг-ма: $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(6, 4, 4)$. Найти его четвертую верш. $D$. О: $D(4, 0, 6)$.

20. Сила $F(4, 2, -3)$ приложена в тч. $(2, -3, 1)$. Найти ее момент отс-но нач. крд-т. О: $M =$ $= 7\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}$.

21. Даны три силы: $F_1(1, 1, 1)$, $F_2(3, 1, -1)$, $F_3(-3, -2, 1)$, приложенные в тч. $(1, 2, 3)$. Опр-ть момент их равнодействующей отс-но тч. $(0, -1, -1)$. О: $M(3, 3, -3)$.

22. Вк. $c$ прп-ен к вк-ам $a$ и $b$, угол между вк-ми $a$ и $b$ равен $\pi/6$. Зная, что $|a| = 6$, $|b| = |c| = 3$, выч-ть $abc = (a \times b)c$. О: $\pm 27$.

23. Установить, компланарны ли вк-ы: $\left\{\begin{array}{lr} \text{а) } a(2, 3, -1),\ b(1, -1, 3),\ c(1, 9, -11); & \text{О: да,} \\ \text{б) } a(3, -2, 1),\ b(2, 1, 2),\ c(3, -1, 2); & \text{нет,} \\ \text{в) } a(2, -1, 2),\ b(1, 2, -3),\ c(3, -4, 7). & \text{да.} \end{array}\right.$

24. Д-ть, что тч. $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной пл-ти.

25. Показать, что вк-ы $a = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $b = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $c = -3\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ компланарны, и разложить вк. $c$ по вк-ам $a$ и $b$. О: $c = 5a + b$.

26. Выч-ть объем прлп-да, построенного на вк-ах $a(2, 4, -3)$, $b(1, 4, 4)$, $c(3, 1, 2)$, и иссл-ть, образуют ли вк-ы левую или правую тройку. О: 81 куб. ед.

27. Выч-ть объем туг-ой призмы, построенной на вк-ах $a(2, 8, 6)$, $b(4, 11, 7)$ и $c(8, 21, 8)$. О: 25 куб. ед.

28. Выч-ть объем туг-ой пирамиды, верш. к-ой находятся в тч-х $A(1, 2, 3)$, $B(5, 2, -1)$, $C(5, 5, 6)$, $D(2, 2, 4)$. О: 9 куб. ед.

29. Даны верш. тетраэдра: $A(-5, -4, 8)$, $B(2, 3, 1)$, $C(4, 1, -2)$, $D(6, 3, 7)$. Найти длину высоты, проведенной из верш. $A$ на грань $BCD$. О: 11.

30. Д-ть, что при любых $\lambda$ и $\mu$ верно тожд-во $(a \times b)(c + \lambda a + \mu b) = abc$.

## 2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### Вопросы для самопроверки

1. Как опр-ся лин. пр-во, его операции и каким аксиомам они уд-ют?
2. Как вы понимаете подпространство (подпр.) лин-го пр-ва?
3. Что такое размерность, базис и крд-ы лин-го пр-ва?
4. Как вы понимаете лин-ю незв-ть базисных вк-ов и переход к новому базису?
5. Как опр-ся евклидово пр-во, длина вк-а, угол между вк-ми?
6. Как осуществляется переход от старого базиса к новому?
7. Как опр-ся прб-ие $A$ в лин-ом пр-ве $L$ и что такое м-ца лин-го прб-ия?
8. Как опр-ся подобная мц. $B^{-1}AB$ к м-це $A$?
9. Какие операции вводятся над лин. прб-ми?
10. Как опр-ся собс. вк-р и собс. зн-ие лин-го прб-ия $A$?
11. Какими св-ми обладают собс. вк-ы и как их найти?
12. Что такое хркч. ур-ие и хркч. числа м-цы прб-ия $A$ и какими св. они обладают?
13. Как можно произвольную симч. вещ. м-цу $A$ привести к диагональному виду с помощью орт-ой м-цы?
14. Какие случаи лин-го прб-ия $A$ в пр-ве $R^3$ возможны для собс. вк-ов?
15. Как собс. вк-ы приводятся к ортонорв. базису?
16. Как опр-ся квч. форма от $n$ пер-ых?
17. Что такое канч. вид квч. формы и как к нему приводят?

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Д-те, что мн-во всех вк-ов, лежащих на прямой (пм.), проходящей через нач. крд-т, яв-ся лин-ым пр-ом ствщ-го вкн-го пр-ва.

**тз2**. Яв-ся ли лин-ым подпр-ом ствщ-го вкн-го пр-ва свк-ть вк-ов, лежащих на пм-й, к-ая не проходит через нач. крд-т. О: да.

**тз3**. Найти крд-ты мчл-а $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$. О: $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

**тз4**. Найти крд-ы мчл-а $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в базисе $1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n$, убедившись, что последние мчл-ы дсв-но образуют базис. Ук: мчл-н раскладываем в ряд Тейлора. О: $\left(f(a), f'(a), \dfrac{f''(a)}{2!}, \ldots, \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)$.

**тз5**. Пользуясь скн-ым пзв-ем вк-ов, д-ть теорему о том, что кв-т стороны туг-ка равен сумме кв-ов двух др-х сторон без удвоенного пзв-ия этих сторон на косинус угле между ними.

**тз6**. Найти м-цу перехода от базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ к базису $1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n$ пр-ва мчл-ов сп-и не больше $n$.

$$\text{О: } \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \ldots & (-1)^n a^n \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \ldots & (-1)^{n-1}a^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

**Задание для кр. работы**: с учетом п1-п11 и тз1-тз6, р-ть з1-з30.

1. Найти размерность и базис лин-го пр-ва, натянутого на систему вк-ов: $a_1(1, 0, 2)$, $a_2(1, 1, -2)$, $a_3(1, -2, 10)$, $a_4(3, 2, -2)$. О: $r = 2$; базис образуют, н-р, вк-ы $a_1$, $a_2$.

2. Найти размерность и базис лин-го пр-ва, натянутого на систему вк-ов: $a_1(1, 1, 1, 1)$, $a_2(1, 2, 3, -1)$, $a_3(2, 3, 5, 0)$, $a_4(1, 2, 4, -1)$. О: $r = 3$; базис образуют, н-р, вк-ы $a_1$, $a_2$, $a_3$.

3. Найти какой-нибудь базис и размерность лин-го подпр-ва $L_1$ пр-ва $L^n$, если $L_1$ задано ур-ем $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. О: базис образуют, н-р, вк-ы $(1, 0, 0, \ldots, 0, -1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, -1)$, …, $(0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$; $r = n - 1$.

4. Найти какой-нибудь базис и размерность подпр-ва $L_1$ ствщ-го нек-го пр-ва, если $L_1$ задано

р-ем одн-ой лин. системы: $\left.\begin{array}{l}2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0;\\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0;\\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0.\end{array}\right\}$ О: базис образуют, н-р, вк-ы (1, 0, – 5/2, 7/2), (0, 1, 5, – 7); $r = 2$.

5. Р-ть задачу с усл-ми з4 и системой: $\left.\begin{array}{l}x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0;\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0;\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0;\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0.\end{array}\right\}$ О: базис образует, н-р, вк. (– 6, 5, 0, 1); $r = 1$

6. В евклидовом пр-ве $R^n$ найти углы между вк-ми: а) $a(1, 1, 1, 1)$, $b(3, -5, 1, 1)$; б) $a(4, 0, 2, 0, 4)$, $b(3, 3, 3, 3, 0)$. О: а) $\pi/2$; б) $\pi/3$.

7. Найти длины сторон и внутренние углы $\Delta$-ка с верш-и $A(5, 4, 4, 4, 2)$, $B(5, 2, 8, 4, 6)$, $C(4, 5, 9, 7, 2)$. О: $AB = AC = BC = 6$; $\angle A = \angle B = \angle C = \pi/3$.

8. Проверить, орт-ны ли вк-ы $x_1(1, 1, 1, 2)$ и $x_2(1, 2, 3, -3)$. Дополнить их до ортонорв-го базиса пр-ва. О: $x_3(1, -2, 1, 0)$, $x_4(-25, -4, 17, 6)$.

9. Построить ортонорв. систему вк-ов по лин. незв. системе $a_1(1, 1, 0)$, $a_2(1, 1, 1)$, $a_3(1, 3, -3)$. О: $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$, (0, 0, 1), $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$.

10. Построить ортонорв-ый базис подпр-ва, натянутого на систему вк-ов: $a_1(1, 2, -1)$, $a_2(0, 1, -3)$, $a_3(3, 5, 0)$. О: $\left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\right)$, $\left(5/\sqrt{210}, 4/\sqrt{210}, 13/\sqrt{210}\right)$.

11. Построить ортонорв-ый базис подпр-ва, натянутого на систему вк-ов: $a_1(1, 0, 0, -2)$, $a_2(5, 2, -2, 0)$, $a_3(1, 1, 2, -1)$, $a_4(3, 1, -4, 3)$. О: $\left(1/\sqrt{5}, 0, 0, -2/\sqrt{5}\right)$, $\left(2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, -1, 1/\sqrt{7}\right)$, $\left(2/\sqrt{130}, 5/\sqrt{130}, 10/\sqrt{130}, 1/\sqrt{130}\right)$.

12. Вк. $x(3, 4)$ задан в базисе $e_1$, $e_2$. Найти крд-ы этого вк-а в базисе $e'_1 = 2e_1 + 3e$; $e'_2 = e_1 + 2e_2$. О: (2, – 1).

13. Вк. $x(2, -2, 5)$ задан в базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$. Найти крд-ы этого вк-а в базисе $e'_1 = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 2e_2 + 5e_3$; $e'_3 = e_1 - 2e_2 + 4e_3$. О: (2, – 1, 1).

14. Д-ть, что каждая из двух систем вк-ов яв-ся базисом, и установить связь крд-т одного и того же вк-а на этих двух базисах: а) $e_1(1, 1)$, $e_2(1, 2)$; $e'_1(3, 4)$, $e'_2(1, -1)$; б) $e_1(1, 1, -1)$, $e_2(2, 3, -2)$, $e_3(3, 4, -4)$; $e'_1(2, 1, -1)$, $e'_2(3, 1, 2)$, $e'_3(1, 0, 4)$. О: а) $\left.\begin{array}{l}x_1 = 2x'_1 + 2x'_2;\\ x_2 = x'_1 - 2x'_2;\end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l}x_1 = 5x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3;\\ x_2 = \phantom{5x'_1 +} 3x'_2 + 4x'_3;\\ x_3 = -x'_1 - 5x'_2 - 5x'_3.\end{array}\right\}$

15. Найти м-цу перехода от базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ к базису, полученному поворотом пуг-ой системы крд-т в пр-ве вокруг оси $0z$ на угол $\alpha$. О: $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

16. Д-ть, что симметрия (сим.) пл-ти отс-но оси ординат пуг-ой системы крд-т яв-ся лин. прб-ем в базисе едч-ых вк-ов крд-ых осей, и найти м-цу этого прб-ия. О: $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

17. Д-ть, что сущ-ет едн-ое лин. прб-ие пл-ти, переводящее вк-ы $a_1(1, 2)$, $a_2(1, 3)$ ств-но в $b_1(1, 1)$, $b_2(2, 1)$, и найти м-цу этого прб-ия в том же базисе, в к-ом даны крд-ы всех вк-ов. О: $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

18. Д-ть, что сущ-ет едн-ое лин. прб-ие трехмерного (тмр.) пр-ва, переводящее вк-ы $a_1(2, 0, 3)$, $a_2(4, 1, 5)$, $a_3(3, 1, 2)$ ств-но в $b_1(1, 2, -1)$, $b_2(4, 5, -2)$, $b_3(1, -1, 1)$, и найти м-цу этого прб-ия в том же базисе, в к-ом даны крд-ы всех вк-ов. О: $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-6 & 11 & 5\\ -12 & 13 & 10\\ 6 & -5 & -5\end{bmatrix}$.

19. Лин. прб-ие $A$ в базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$ имеет м-цу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. Найти м-цу этого же прб-ия в базисе: $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$. О: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

20. Р-ть задачу с усл-ми з19 в базисе $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $e'_3 = 4e_1 + 7e_2 + 6e_3$. О: $\begin{bmatrix} 2 & -78 & -275 \\ 14 & -217 & -480 \\ 5 & 96 & 215 \end{bmatrix}$.

21. Даны два лин-ых прб-ия: $\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 2y_2 - 3y_3; \\ x_2 &= 2y_1 - y_2 + y_3; \\ x_3 &= y_1 - 3y_2 - y_3; \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1 - z_2 + z_3; \\ y_2 &= 2z_1 + 3z_2; \\ y_3 &= 3z_1 - 2z_2 + 3z_3. \end{aligned}\right\}$ Найти лин. прб-ие, выражающее $x_1$, $x_2$, $x_3$ через $z_1$, $z_2$, $z_3$. О: $\left.\begin{aligned} x_1 &= -4z_1 - z_2 - 8z_3; \\ x_2 &= 3z_1 - 7z_2 + 5z_3; \\ x_3 &= -8z_1 - 8z_2 - 2z_3. \end{aligned}\right\}$

22. Найти прб-ие, обратное лин. прб-ю $\left.\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - 3y_2 - y_3; \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 + 3y_3; \\ x_3 &= y_1 - y_2 - 5y_3. \end{aligned}\right\}$ О: $\left.\begin{aligned} y_1 &= 13x_1 - 14x_2 - 11x_3; \\ y_2 &= 8x_1 - 9x_2 - 7x_3; \\ y_3 &= x_1 - x_2 - x_3. \end{aligned}\right\}$

23. В пр-ве $R^2$ найти собс. зн-ия $\lambda$ и собс. вк-ы $x(\lambda)$ лин-го прб-ия $A$, заданного в нек-ом базисе мц-ей: а) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$. О: а) $\lambda_1 = 1$, $x(\lambda_1) = \alpha(1, -2)$; $\lambda_2 = 9$, $x(\lambda_2) = \alpha(3, 2)$; б) $\lambda_1 = 1$, $x(\lambda_1) = \alpha(1, -1)$; $\lambda_2 = 4$, $x(\lambda_2) = \alpha(1, 2)$; в) $\lambda_1 = -9$, $x(\lambda_1) = \alpha(1, -2)$; $\lambda_2 = 7$, $x(\lambda_2) = \alpha(3, 2)$, где $\alpha \neq 0$.

24. В пр-ве $R^3$ найти собс. зн-ия $\lambda$ и собс. вк-ы $x(\lambda)$ лин-го прб-ия $A$, заданного в нек-ом базисе с мц-ей: а) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. О: а) $\lambda_1 = -3$, $x(\lambda_1) = \alpha(-1, 0, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $x(\lambda_2) = \alpha(-5, 1, 5)$; $\lambda_3 = 3$, $x(\lambda_3) = \alpha(5, -2, 5)$, где $\alpha \neq 0$; б) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $x(\lambda) = \alpha(1, 1, -1)$, где $\alpha \neq 0$; в) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $x(\lambda) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$, где $\alpha$ и $\beta$ не равны нулю одновременно.

25. Найти м-цу перехода, приводящую к диагональному виду м-цу: а) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. О: а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

26. Выяснить, какие из сд-их м-ц лин-го прб-ия $A$ можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и ствщ-ю ему м-цу, если: а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. О: а) $e_1(1, 1, 1)$, $e_2(1, 1, 0)$, $e_3(1, 0, -3)$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) м-ца к диагональному виду не приводится. Ук: иссл-ть р-ие одн-ой системы, к-ая ств-ет кратному собс. зн-ю.

27. Симч-ое лин. прб-ие в нек-ом ортонорв. базисе задано мц-ей $A$. Найти ортонорв-ый базис собс-ых вк-ов и м-цу $A'$ в этом базисе, если: а) $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{bmatrix}$.

О: а) $e'_1(-2/3, -2/3, -1/3)$, $e'_2(2/3, -1/3, -2/3)$, $e'_3(1/3, -2/3, 2/3)$; $A' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$;

б) $e'_1\left(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0\right)$, $e'_2\left(1/\sqrt{18},\ -1/\sqrt{18},\ -4/\sqrt{18}\right)$, $e'_3(2/3, -2/3, 1/3)$; $A' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$.

28. Найти орт. прб-ие, приводящее сд. квч-ые формы к канч. виду, и записать этот канч. вид:

а) $\varphi = 2x_1^2 - 4\sqrt{5}\,x_1x_2 + 3x_2^2$; б) $\varphi = 4x_1x_2$;

в) $\varphi = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$; г) $\varphi = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

О: а) $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}x'_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}x'_2; \\ x_2 &= -\frac{\sqrt{5}}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 \end{aligned}\right\}$ $\varphi_1 = 7x_1'^2 - 2x_2'^2$; б) $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2; \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 \end{aligned}\right\}$ $\varphi_1 = 2x_1'^2 - 2x_2'^2$;

в) $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2; \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 \end{aligned}\right\}$ $\varphi_1 = 6x_1'^2$; г) $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}x'_1 - \frac{1}{3}x'_2 + \frac{2}{3}x'_3; \\ x_2 &= -\frac{1}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 + \frac{2}{3}x'_3; \\ x_3 &= \frac{2}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 - \frac{1}{3}x'_3 \end{aligned}\right\}$ $\varphi_1 = 9x_1'^2 + 6x_2'^2 + 3x_3'^2$.

29. Привести к канч. виду квч. форму $\varphi = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$. О: $\varphi_1 = 3x_1'^2 + \left(1+\sqrt{26}\right)x_2'^2 + \left(1-\sqrt{26}\right)x_3'^2$.

30. Привести к канч. виду квч. форму: а) $\varphi = 5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$; б) $\varphi = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$. О: а) $\varphi_1 = 5x_1'^2 - 4x_2'^2 + 6x_3'^2$; б) $\varphi_1 = x_1'^2 + 5x_2'^2 + 6x_3'^2$.

# II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

# 3. МЕТОД КООРДИНАТ. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

> …Математика имела во все времена бесспорное культурное и практическое значение, играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитии… Наша эпоха создает невиданные ранее условия расцвета математики… Математизация – это характерная черта современной науки и техники.
>
> NN

## ЛЕКЦИЯ 8

## 3.1. МЕТОД КООРДИНАТ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

**1°. Числовая ось и основные задачи**. Дадим ряд понятий.

**о1**. Числовой осью наз. вк-р с начальной (начн.) точкой (тч.) $O$ и выбранным масштабом – единицей (ед.) измерения (изм.) (рис. 1).

Обз-им через $M$ – мн. тч-к оси и $R$ – мн. дсв-ых чисел. Рас-им тч-у $A \in M$ на числовой оси (рис. 1), к-ой ств-ет одно единственное (едн.) дсв. число $x_1 \in R$, наз-ое крд-ой (расстоянием) тч. $A$ (обзм-ое через $A(x_1)$) и наоборот, каждому дсв. числу $x_1 \in R$ ств-ет одна едн. тч. $A(x_1) \in M$ на оси, т.е. $x_1 \leftrightarrow A(x_1)$. Т.о., между мн-ом тч-к оси $M$ и мн-ом дсв-ых чисел $R$ устанавливается взаимно однозначное (биективное) ств-ие.

Ясно, что крд-та $x_1$ тч. $A$ может быть как плж-ым, так и отц-ым числом. Н-р, постройте тч-и $A(3)$, $B(-2)$, $C(3/2)$.

Рас-им основные (осн.) задачи на числовой оси.

1) Расстояние (рст.) $d$ между тч-ми $A(x_1)$ и $B(x_2)$ опр-ся так:

$$|AB| = d = |x_2 - x_1|. \tag{1}$$

2) Деление отрезка в данном отн-и: пусть по двум данным тч-ам $A(x_1)$ и $B(x_2)$ (рис. 2) требуется найти тч-у $C(x)$ так, чтобы

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \text{ ($\lambda$ – лямбда – любое дсв. число).} \tag{2а}$$

Из (2а) имеем $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow \lambda(x_2 - x) = x - x_1 \Rightarrow x_1 + \lambda x_2 = x(1 + \lambda) \Rightarrow$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

Если отрезок $AB$ делится пополам, то $\lambda = 1$, и тогда (2) принимает вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{2б}$$

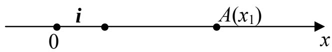


Рис. 1

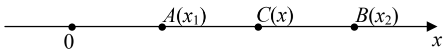


Рис. 2

**2°. Декартова прямоугольная система координат. Основные задачи**.

**о2**. Декартовой (дек.) прямоугольной (пуг.) системой крд-т на пл-ти наз. система двух взаимно перпендикулярных (прп.) осей (рис. 3).

Ось $Ox$ наз. осью абсцисс, $\boldsymbol{i}$ – ед. изм-ия; $Oy$ – осью ординат, $\boldsymbol{j}$ – ед. изм-ия; $O$ – начало (нач.) крд-т. Вк-ы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ взаимно прп-ы, т.е. $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$, и наз. ортонормированными (ортонорв.) вк-ми. Каждой тч. $A(x_1, y_1)$ взаимно ств-ет пара дсв-ых чисел $(x_1, y_1)$, т.е. $A(x_1, y_1) \leftrightarrow (x_1, y_1)$. Осями абсцисс и ординат пл-ть делится на 4 части, назм-ые четвертями (рис. 3).

На пл-ти можно решить сд-ие осн. задачи.

1) Рст-ие между тч-ми. Даны тч. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Найти рст-ие $AB$.

Из рис. 3 имеем $AN = |x_2 - x_1|$, $NB = |y_2 - y_1|$. Отсюда по теореме Пифагора получим:

$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (3)$$

2) Деление отрезка в данном отн-и: на отрезке между тч-ми $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ найти тч-у $C(x, y)$, такую, что

$$\frac{AC}{CB} = \lambda. \qquad (4a)$$

На основании пропорциональности (прцн.) отрезков (рис. 4) и с учетом (4a) получим

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{QN}{NP} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow \lambda(x_2 - x) = x - x_1 \Rightarrow x_1 + \lambda x_2 = x(1 + \lambda) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(врж-е для $y$ получили анч-но).

Если отрезок $AB$ делится пополам, то $\lambda = 1$ и из (4) получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}; \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

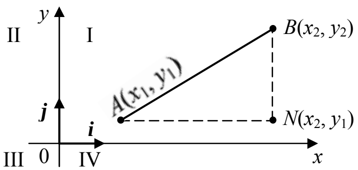


Рис. 3

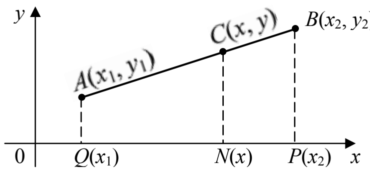


Рис. 4

**п1**. Дан $\Delta ABC$ с крд-ми вершин (верш.) $A(-2, -1)$, $B(-5, 3)$, $C(6, 5)$ (рис. 5). Найти: 1) длины сторон Δ-ка; 2) длину медианы, проведенной из верш. $B$; 3) крд-ы тч-и перч-ия медиан; 4) длину биссектрисы (бист.) угла $A$.

Р. 1) $d_a = \sqrt{(6+5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ ед.; $d_b = \sqrt{(6+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{100} = 10$ ед.; $d_c = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ ед.;

2) $\dfrac{AD}{DC} = \lambda = 1$; $x = \dfrac{-2+6}{2} = 2$, $y = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. $|BD| = \sqrt{(-5-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ед.;

3) $E(x, y) = ?$ $\dfrac{BE}{ED} = \lambda = 2$, тогда $x = \dfrac{-5 + 2\cdot 2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{3 + 2\cdot 2}{1+2} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow E\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$;

4) $|AF| = ?$ Находим $\lambda = \dfrac{BF}{FC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-5 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = -\dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{3 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = $

$= \dfrac{11}{3}$. Значит, $F\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$, тогда $|AF| = \sqrt{\left(-2 + \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 - \dfrac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{200}{9}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ ед.

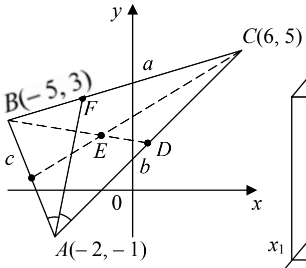


Рис. 5

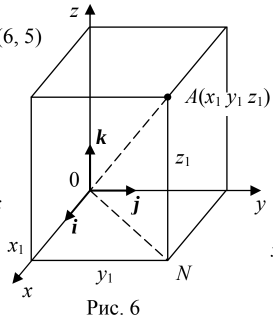


Рис. 6

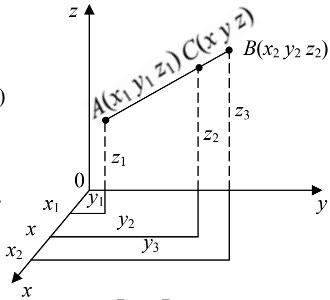


Рис. 7

Фм-ы (3)-(4') легко обобщить на случай трехмерного (тмр.) пр-ва.

**о3**. Декартовой пуг-ой системой крд-т в тмр-ом пр-ве наз. система трех взаимно прп-ых осей (рис. 6). Ось $Ox$ наз. осью абсцисс, $Oy$ – ординат, $Oz$ – аппликат, $O$ – нач. крд-т.

Оси крд-т $Ox$, $Oy$, $Oz$, взятые попарно, опр-ют три азвимно прп-ые пл-ти $xOy$, $yOz$, $zOx$, назм-ые пл-ми крд-т. Этими пл. все пр-во делится на 8 частей, назм-ых октантами. В пр-ве каждой тч. $A(x_1, y_1, z_1)$ биективно ств-ет пара (из трех) дсв-ых чисел $(x_1, y_1, z_1)$, к-ые наз. крд-ми тч. $A$, т.е. $(x_1, y_1, z_1) \leftrightarrow A(x_1, y_1, z_1)$. Знаки крд-т в каждом октанте легко опр-ют, исходя из направлений (нпв.) ств-их осей, н-р, построить тч-и: $A(1, 2, 4)$, $B(-1, -2, -4)$, $C(1, -2, 4)$.

Рас-им (как и на пл-ти) осн. задачи в пр-ве:

1) Рст-ие между тч-ми. По данным тч. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ найти рст-ие $d$ между ними.

Р. Находим вк. $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$. Тогда

$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{5}$$

2) Деление отрезка в данном отн-и. По данным тч-ам $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ найти тч-у $C(x, y, z)$ такую (рис. 7), что

$$\frac{AC}{CB} = \lambda. \tag{6а}$$

Р. Из прцн-ти отрезков (рис. 7) с учетом (6а) имеем $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если отрезок $AB$ делится пополам, то $\lambda = 1$, тогда из (6) получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2};\\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2};\\ z &= \frac{z_1 + z_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

При рас-и системы крд-т встречаются и др. задачи. Приведем нек-ые из них.

**3°. Угловой коэффициент прямой. Угол между прямыми**. Одной из хркс-ик расположения прямой (пм.) на пл-ти яв-ся ее наклон отс-но оси $Ox$. Причем за угол наклона берется угол $\alpha$, отсчитываемый от оси $Ox$ против часовой стрелки, до этой пм-й (рис. 8). Здесь $\alpha$ – острый угол, $\alpha_1$ – тупой угол.

**о4**. Угловым (угл.) коэф-ом пм-й наз. тангенс угла наклона и обз-ся:

$$k = \mathrm{tg}\alpha. \quad (7)$$

Угл. коэф-т отражает все положения (пж.) пм-й (рис. 8): если $\alpha$ – острый угол, то $k > 0$; если $\alpha$ – тупой угол, то $k < 0$; если $\alpha = 0$, то $k = 0$; если $\alpha = \pi/2$, т.е. пм-я прл-на оси $Oy$, то она не имеет угл-го коэф-а и условно пишут

$$k = \mathrm{tg}\pi/2 = \infty. \quad (7а)$$

Если даны угл. коэф. $k$ и тч. $A(x_1, y_1)$, то легко построить ств. пм-ю (рис. 9). Для этого берем $AN$ – знаменатель $k$, $NB$ – числитель $k$ и через $B$ и $A(x_1, y_1)$ проводим искомую пм.

Если даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то угл. коэф-т пм-й, проходящей через эти тч., выч-ся (рис. 10) так:

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{NB}{AN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (8)$$

В част., если 1) $y_2 = y_1$, то пм-я прл-на оси $Ox$ и $k = 0$; 2) $x_2 = x_1$, то пм-я $\parallel$ оси $Oy$ (т.е. $\perp$ оси $Ox$) и $k = \mathrm{tg}\pi/2 = \infty$, см. (7а).

**о5**. За угол $\varphi$ между пм-ми $l_1$ и $l_2$ (рис. 11) принимается тот угол, к-й отсчитывается от пм-й $l_1$ против часовой стрелки до пм-й $l_2$.

Пусть даны $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$ – угл. коэф-т пм. $l_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$ – пм. $l_1$. Найти $k = \mathrm{tg}\varphi$, т.е. $\varphi = ?$

Из рис. 11 имеем $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тогда $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1\mathrm{tg}\alpha_2}$. Отсюда

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (9)$$

**зм1**. Если $\varphi = 0$ ($\mathrm{tg}0 = 0$), т.е. $l_1 \parallel l_2$, то получаем усл-ие прл-ти пм-х:

$$k_1 = k_2. \quad (10)$$

**зм2**. Если $\varphi = \pi/2$, т.е. $l_1 \perp l_2$, то $\mathrm{tg}\pi/2 = \infty$ или $1 + k_1k_2 = 0$ и получаем усл. прп-ти двух пм-х:

$$k_1 = -1/k_2. \quad (11)$$

**зм3**. При перестановке местами $k_1$ и $k_2$ в числителе фм-ы (9) имеем $\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = -\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} =$ $= -\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\pi - \varphi)$, где $\pi - \varphi$ – смежный угол с углом $\varphi$ (см. рис. 11).

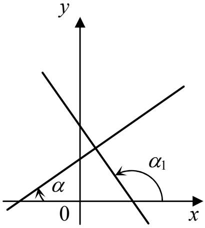


Рис. 8

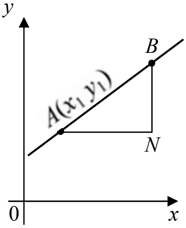


Рис. 9

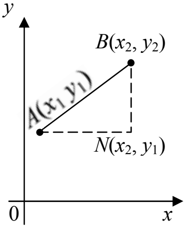


Рис. 10

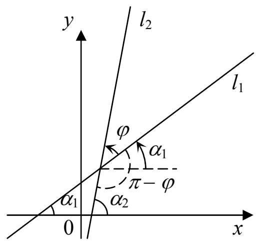


Рис. 11

**п2**. Дан $\Delta ABC$ с крд-ми верш. $A(-2, -1)$, $B(-5, 3)$, $C(6, 5)$ (см. п1). Найти: 1) угл. коэф-ты его сторон, медианы $BD$ и бист-ы $AF$ (рис. 5); 2) внутренние углы $\Delta ABC$; 3) угл. коэф-т высоты, опущенной из верш. $C$ на сторону $AB$; 4) проверить, яв-ся ли $\Delta ABC$ пуг-ым.

Р. 1) $k_a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{6+5} = \dfrac{2}{11}$, $k_b = \dfrac{5+1}{6+2} = \dfrac{3}{4}$, $k_c = \dfrac{3+1}{-5+2} = -\dfrac{4}{3}$; $k_{BD} = \dfrac{3-2}{-5-2} = -\dfrac{1}{7}$,

$k_{AF} = \dfrac{\frac{11}{3}+1}{-\frac{4}{3}+2} = 7$; 2) $\mathrm{tg}A = \dfrac{k_c - k_b}{1 + k_ck_b} = \dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}} = \infty \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$; $\mathrm{tg}B = \dfrac{k_a - k_c}{1 + k_ak_c} = \dfrac{\frac{2}{11}+\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{3}} = 2$;

$\mathrm{tg}C = \dfrac{k_b - k_a}{1 + k_bk_a} = \dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{11}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{11}} = \dfrac{1}{2}$; 3) $k_c = k_{AB} = -\dfrac{4}{3}$. По (11) $k = -\dfrac{1}{k_c} = \dfrac{3}{4}$; 4) $\Delta ABC$ пуг-ый, т.к. $A = \dfrac{\pi}{2}$.

**4°. Полярные, цилиндрические и сферические системы координат**. Они широко применяются на практике наряду с пуг-ми дек. системами крд-т.

Полярная система крд-т состоит из нпвн-ой оси $\rho$ (назм-ой полярной осью) с начн. тч. $O$ (назм-ой полюсом) и заданного масштаба (рис. 12). Каждая тч. $M(r,\ \varphi)$ хркз-ся двумя дсв. числами $(r,\ \varphi)$, наз. полярными крд-ми. Причем $r \ge 0,\ -\pi < \varphi \le \pi$.

Легко установить связь между дек-ой и полярной системами крд-т. Из рис. 13 получим

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi; \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}; \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

**п3**. Даны дек-вы крд-ы тч-и $M(1, -1)$. Найти полярные крд-ы.

Р. $r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, т.е. $M\left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**зм4**. Известно, что каждой линии ств-ет ее ур-ие $y = f(x)$. Ур-ие линии может иметь и др. вид. Фм-ы (12) представим в общем виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t); \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Стн-ие (14) есть параметрические (пармч.) ур-ия линии. В част., система (12) яв-ся пармч. ур-ми окружности (окр.) $x^2 + y^2 = r^2$.

В цилиндрических (цлнч.) системах крд-т пж-ие тч. $M(r,\ \varphi, z)$ опр-ся заданием цлнч-х крд-т $r,\ \varphi, z$ (рис. 14), к-ые связаны с дек-ми крд-ми с помощью стн-й

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi; \\ y &= r\sin\varphi; \\ z &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

В сферических (сфч.) системах крд-т пж-ие тч. $M(r,\ \varphi,\ \psi)$ опр-ся заданием сфч-х крд-т $r$ (радиус-вк.), $\varphi$ (долгота), $\psi$ (широта), к-ые связаны с дек-ми крд-ми (рис. 15) при помощи стн-й

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\psi; \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi; \\ z &= z\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

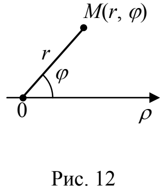


Рис. 12

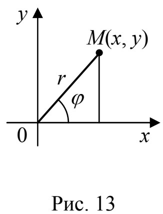


Рис. 13

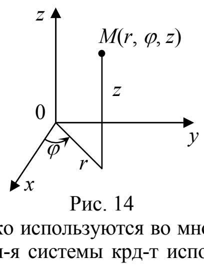


Рис. 14

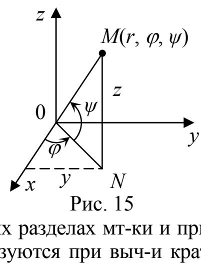


Рис. 15

**зм5**. Приведенные системы крд-т широко используются во многих разделах мт-ки и при р-и технических (техн.) задач. Н-р, цлнч-я и сфч-я системы крд-т используются при выч-и кратных интегралов (инт.), где и рас-им их подробнее. Есть и др. системы крд-т, н-р, криволинейная (крвл.), аффинная и т.д. Причем часто приходится переходить от одной системы крд-т к др. при р-и мтч-их и техн-их задач (см. [20]). Здесь (см. 5°) мы рас-им лишь полярные и пармч-ие системы крд-т.

**5°. Полярные и параметрические уравнения линии. Примеры**. Пуг-ые дек-вы и полярные крд. тч-и $M$ при ствщ-ем выборе крд-ых систем (рис. 1) связаны фм-ми:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi; \qquad (12а)$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2};\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (13а)$$

Ур-ие линии на пл-ти в полярных крд-ах имеет вид:

$$F(\rho, \varphi) = 0. \tag{14а}$$

Выведем ур-ия часто используемых кривых (крв.) с помощью полярных крд-т.

**п4**. Найти ур-ие окр-ти, проходящей через полюс с центром на полярной оси и $R = a$.

Р. Из пуг-го туг-ка $OMD$, где $OD = 2a$ (рис. 2), получим искомое ур-ие

$$\rho = 2a\cos\varphi. \tag{15а}$$

**п5**. Тч. $M$ равномерно движется (двж.) по пм. $ON$, равномерно вращающейся (врщй.) вокруг тч-и $O$. Траектория тч. $M$ наз. **спиралью Архимеда**. Сост-ть ур. спирали Архимеда и построить ее.

Р. Примем тч-у $O$ (рис. 3) за полюс системы, нач. пж-ие $OP$ пм-й $ON$ – за полярную ось. Пусть в начн-ый момент двж-ия тч. $M$ находится в полюсе. Рст-ие $OM = \rho$, пройденное тч-й $M$ вдоль пм-й $ON$, и полярный угол $\varphi$ взр-ет в силу равномерности двж-ия прц-но времени (вр.). Сдт-но, они прц-ны друг другу, т.е.

$$\rho = a\varphi, \tag{16а}$$

где $a$ – коэф. прц-сти.

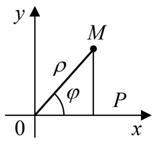


Рис. 1

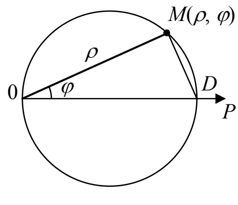


Рис. 2

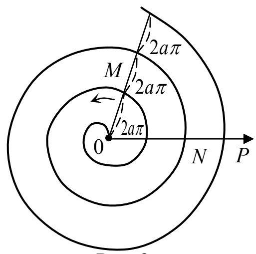


Рис. 3

Ур-ие (16а) яв-ся ур-ем спирали Архимеда, а по (13) получим в дек-ой системе крд-т:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Построим крв-ю по ее ур-ю (16а), придавая зн-ия $\varphi$ и опр-я ствщ. зн-ия $\rho$ по табл.:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ | … |
| $\rho$ | 0 | $\frac{\pi}{6}a$ | $\frac{\pi}{4}a$ | $\frac{\pi}{3}a$ | $\frac{\pi}{2}a$ | $\frac{2}{3}\pi a$ | $\frac{3}{4}\pi a$ | $\frac{5}{6}\pi a$ | $\pi a$ | $\frac{5}{4}\pi a$ | $\frac{4}{3}\pi a$ | $\frac{3}{2}\pi a$ | $\frac{7}{4}\pi a$ | $2\pi a$ | … |

Построив ствщ-ие тч., получим искомую крв-ю (рис. 3).

**п6**. Отрезок $AB$ пст-ой длины $2a$ своими концами скользит по осям дек-ых крд-т. Из нач-а крд-т на $AB$ опущен прп-яр $OM$. Геомч. место тч-к $M$ наз. **четырехлепестковой розой**. Написать ее ур-ие, построить крв-ю.

Р. Из $\Delta OMA$ (рис. 4) опр-им $\rho = OM = OA\cos\varphi$, а из $\Delta ABO$ получаем $OA = AB\sin\varphi = 2a\sin\varphi$, тогда $\rho = 2a\sin\varphi\cos\varphi$. Т.о., искомое ур. имеет вид

$$\rho = a\sin 2\varphi. \tag{16б}$$

Крв. изб-на рис. 5.

**п7**. Из тч. $O$ на окр-ти радиуса $a$ проводится луч $OK$ (рис. 6), от тч. $L$ пересечения (перч.) его окр-ю откладывается отрезок $LM = 2a$ по нпв-ю луча $OK$. Линия, описываемая тч-й $M$ при вращении (врщ.) луча, наз. **кардиоидой**. Составить (сост.) ур-ие кардиоиды.

Р. Выберем полярную систему крд-т, как на рис. 6. Из чертежа получаем $\rho = OL + LM$. Т.к. $LM = 2a$, $OL = OB\cos\varphi = 2a\cos\varphi$, то искомое ур. имеет вид

$$\rho = 2a(1 + \cos\varphi). \tag{17}$$

Когда $\varphi$ пробегает промежуток $[-\pi, \pi]$, кардиоида описывается полностью (рис. 6).

**п8**. На окр-ти радиуса $a$ фиксирована (фкс.) тч. $O$. Луч $OX$ врщ-ся около тч. $O$, при этом он перс-ет окр-ть в нек-ой тч. $N$. На пм-й $ON$ от тч. $N$ в нпв-и луча $OX$ откладывается отрезок $NM = b$. Когда луч $OX$ совершит полный оборот, тч. $M$ опишет крв-ю, назм-ю **улиткой Паскаля**. Сост-ть ур-ие этой крв-ой и построить ее.

Р. Примем тч. $O$ за полюс, а полярную ось совместим с диаметром $OA$ (рис. 7). Непосредственно из чертежа находим $\rho = OM = ON + NM$. Подставляя в это рав-во врж-ия $ON = 2a\cos\varphi$,

$NM = b$, получим ур-ие улитки Паскаля в полярных крд-ах

$$\rho = 2a\cos\varphi + b. \qquad (18)$$

Исходя из ур-ия крв-й (18), легко построить ряд ее тч-к. Форма крв. зв-т от стн-ия между пст-ми $2a$ и $b$. Если $b < 2a$, крв. имеет вид, изб-ный на рис. 7. На рис. 8 изб-на крв. для случая $b > 2a$.

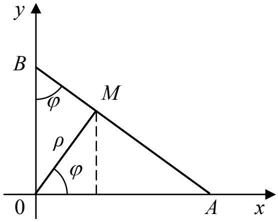


Рис. 4

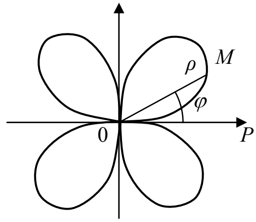


Рис. 5

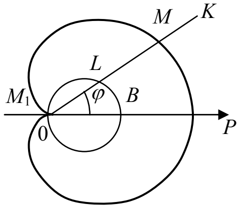


Рис. 6

Если $b = 2a$, то ур-ие улитки Паскаля примет вид

$$\rho = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Это ур-ие кардиоиды, расн-ое в п7 (рис. 6).

В дек-ых пуг. крд-ах ур-ие улитки Паскаля имеет вид

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Сдт-но, улитка Паскаля яв-ся алгч. крв-й четвертого порядка.

**зм6**. В обл-и техники улитка Паскаля находит, в част., применение в кулачковых механизмах. Она используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания. В самом деле, поступательное перемещение $S$ тч-и $M$ (рис. 9) опр-ся по фм-е

$$S = \rho = 2a\cos\omega t + b = 2a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b,$$

где $\omega$ – угл. скорость (скр.) эксцентрика.

Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания семафора очерчена по улитке Паскаля.

В швейной машине форму кардиоиды имеет кулачок, под воздействием к-го колеблется толкатель, подающий нитку на шпульку.

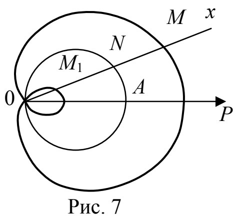


Рис. 7

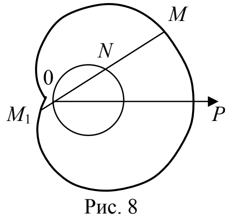


Рис. 8

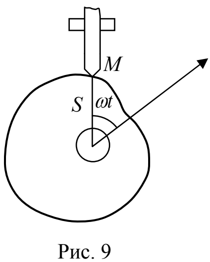


Рис. 9

**п9**. Сост-ть ур-ие геомч-го места тч-к, пзв-ие рст-й к-ых до двух данных тч-к $F_1(-a, 0)$ и $F_2(a, 0)$ есть вел. пст-я, равная $a^2$, где $a = \dfrac{F_2 - F_1}{2}$. Эта линия наз. **лемнискатой Бернулли**. Написать ур-ие лемнискаты Бернулли в полярных крд-ах и построить ее.

Р. Пусть $M(x, y)$ – прзвл. тч. Тогда из усл-ия $F_1M \cdot F_2M = a^2$ получим $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \times$ $\times \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2 \Rightarrow [(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax][(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4 \Rightarrow [(x^2 + y^2) + a^2] - 4a^2x^2 = a^4$ $\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ или

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \qquad (19)$$

Т.к. $x$ и $y$ входят в ур. (18) в четных сп-ях, то лемниската симч-на отс-но крд-ых осей, т.е. тч-и $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$ также ей принадлежат.

Поскольку $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $x^2 + y^2 = \rho^2$, то ур. лемнискаты в полярных крд-ах имеет вид $\rho^4 = 2a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ или

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi. \tag{19а}$$

Из ур. (19а) видно, что $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Если $\varphi$ увеличивается от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, то $\rho$ уменьшается от $\rho = a\sqrt{2}$ до $\rho = 0$. Если $\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, то $\rho$ принимает мним. зн-ия, т.е. на лемнискате нет тч-к, для к-ых $\varphi$ меняется в указанных пределах. Поэтому лемнискату построим в первой четверти для $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, и потом, в силу сим-и крв-й, всю линию, см. рис. 10.

Построить лемнискату по тч-м можно еще так: перепишем ур-ие в виде

$$\rho^2 = c^2(2\cos^2\varphi - 1), \tag{19б}$$

где $c^2 = 2a^2$, заключаем, что полярный радиус ее произвольной тч-и яв-ся катетом пуг-го туг-ка, гипотенуза к-го равна $c\sqrt{2}$, а др. катет равен $c$. На оси абсцисс от тч. $O$ отложим отрезки $OA =$ $= OA' = c$ (рис. 10), на оси ординат – отрезок $OB = c$, радиусом $AB = c\sqrt{2}$ описываем окр-ть с центром в нач. крд-т. Через тч-у $O$ проводим пм-ю под углом $\varphi$ $\left(\varphi < \dfrac{\pi}{4}\right)$ к оси $Ox$, пересекающую (перкщ.) окр-ть в тч-х $N$ и $N'$. Из тч. $N$ опустим прп-яр $ND$ на ось $Ox$, из тч. $A$ радиусом, равным $OD$, засекаем на $OB$ тч-у $C$. Тогда

$$OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON\cos\varphi)^2 - OA^2 = \left(c\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2 - c^2,$$

откуда и следует, что катет $OC$ опр-ет длину полярного радиуса тч. лемнискаты, ств-ей углу $\varphi$. На пм-й $NN'$ из тч. $O$ радиусом $OC$ засекаем две тч. $M$ и $M'$, принадлежащие лемнискате. Повторяя указанное построение при др. зн-ях $\varphi$, получим вторую пару тч-к и т.д.

**зм7**. В технике лемниската применяется, в част., в кач-ве переходной крв-й на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях горной местности и на трамвайных путях.

**п10**. Пм. $x = a$ перс-ет ось $Ox$ в тч. $A$ и произвольный луч $OB$ в тч. $B$. На луче от тч. $B$ по обе стороны отложены отрезки $BM_1$ и $BM_2$, равные $AB$. Написать ур-ие геомч-го места точек $M_1$ и $M_2$ в полярных и пуг-ых крд-ах. Эта крв. наз. **строфоидой** (рис. 11).

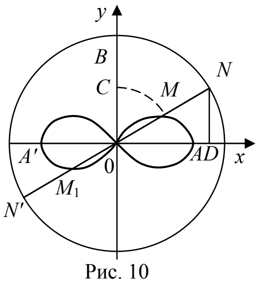



Рис. 10

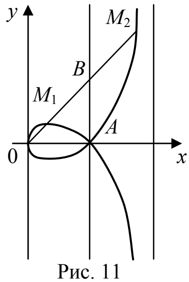



Рис. 11

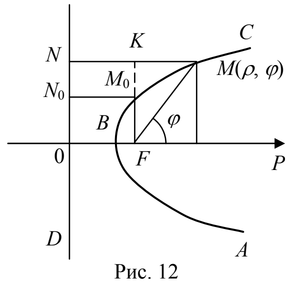



Рис. 12

Р. Из чертежа (рис. 11) получаем $\rho = OB \pm AB$. Т.к. $OB = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, $AB = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, то

$$\rho = \frac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{20}$$

В дек. крд-ых ур. (20) принимает вид

$$y^2 = \frac{x(x-a)}{2a - x}. \tag{20а}$$

**п11**. Написать ур-ие конического (конч.) сечения (рис. 12) в полярных крд-ах (сечением любого круглого конуса пл-ю, не проходящей через его верш-у, опр-ся крв-я, к-ая может быть лишь эллипсом (элс.), гиперболой (гпрб.) или параболой (парб.)).

Это ур. имеет вид (см. 6°: 5.1):

$$\rho = \frac{P}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{21}$$

где ур. (21) опр-ет элс., если $\varepsilon < 1$, парб-у при $\varepsilon = 1$, гпрб-у при $\varepsilon > 1$. Вел. $P$ для парб-ы имеет прежнее зн. (т.е. как в ур-и $y^2 = 2px$) и $P = \dfrac{b^2}{a}$ для элс-а и гпрб-ы.

Теперь рас-им пармч. ур-ия линии: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.

**п12**. Написать пармч. ур-ия окр-ти радиуса $R$ с центром в нач. крд-т.

Р. Пусть $M(x, y)$ – произвольная тч. окр-ти (рис. 13). Тогда пармч. ур-ми окр-ти будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t;\\ y &= R\sin t.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Исключив парм. $t$, получим ур-ие окр-ти в пуг-ых крд-ах:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{22а}$$

**п13**. Окр-ть радиуса $a$ катится по оси абсцисс. Найти пармч. ур-ия линии (назм. циклоидой), описываемой тч-й $M$ окр-ти, от нач-а крд-т.

Р. Пусть $M(x, y)$ – прзвл. тч. циклоиды (рис. 14). Тогда получим $x = OP = OQ - PQ = \overset{\frown}{MQ} - PQ = at - a\sin t = a(t - \sin t)$, где $t = \angle MCQ$ – угол поворота окр-ти, $y = PM = QN = QC - NC = a - a c\cos t = a(1 - \cos t)$. Итак, получили пармч. ур-ия циклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t);\\ y &= a(1 - \cos t).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

**п14**. Пуг-к, две стороны к-го совпадают с осями крд-т, изменяется так, что его диагональ сохраняет пст. вел-у $a$. Линия, описываемая основанием прп-ра, опущенного из верш-ы пуг-ка, противоположной нач-у крд-т, на его диагональ, наз. астроидой. Найти ее ур-ие.

Р. Пусть $OLAN$ – один из пуг-ов, для к-ых $LN = a$ (рис. 15). Введем угол $t = \angle ALN$, тогда $\angle MAN = t$, $\angle MNP = t$. По опр-ию имеем: $x = OP = QM$, $y = MP$. Подставляя в эти рав-ва врж-ия для $QM$ и $MP$, получаемые из туг-ов $LQM$, $LMA$ и $LAN$, находим:

$$x = QM = LM\cos t = (LA\cos t)\cos t = LA\cos^2 t = (LN\cos t)\cos^2 t = a\cos^3 t;$$
$$y = MP = MN\sin t = (AN\sin t)\sin t = AN\sin^2 t = (LN\sin t)\sin^2 t = a\sin^3 t.$$

Т.о., получили пармч. ур-ия астроиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t;\\ y &= a\sin^3 t.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Иск-я парм. $t$ (для этого извлекаем сначала корень кубический из обеих частей ур-й, а затем возводим их в кв-т), получим ур-ие астроиды в пуг-ых дек. крд-ах

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \tag{24а}$$

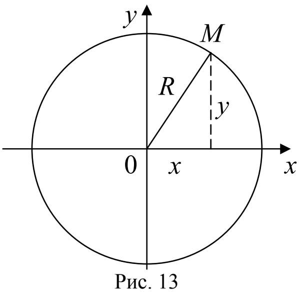



Рис. 13

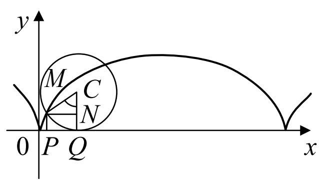



Рис. 14

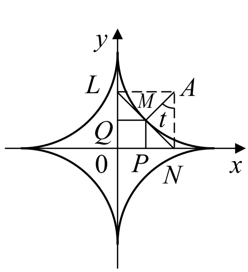



Рис. 15

**п15**. По окр-ти $x^2 + y^2 = a^2$ перемещается пм-я, нач. пж-ие к-ой $x = a$. Опр-ть траекторию тч-и перемещающейся пм-й, принимая за нач. ее пж-ие тч-у $A(a, 0)$ (кривая наз. разверткой окр-ти).

Р. Возьмем произвольную тч. $N$ данной окр-ти (рис. 16). Введем угол $t = \angle AON$. В силу усл-ия задачи $\overset{\frown}{NA} = NM$, где $M$ – тч. искомой траектории, нач. пж-ие к-ой совпало с тч-й $A$. Крд-ы тч. $M$ через угол $t$ и радиус $a$ врз-ся сд. образом:

$$x = OP = OK + KP = OK + QM = a\cos t + NM\sin t = ac\cos t + at\sin t;$$
$$y = MP = QK = NK - NQ = a\sin t - MN\cos t = a\sin t - at\cos t.$$

Т.о., получены сд-ие пармч. ур-ия развертки окр-ти:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t); \\ y &= a(\sin t - t\cos t). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

**п16**. Окр-ть радиуса $r$ катится без скольжения по окр-ти радиуса $R$. Написать пармч. ур-ия крв-й, описанной фксн-ой тч. катящейся окр-ти (эта крв. наз. эпициклоидой, при $r = R$ эпициклоида обращается в кардиоиду, см. п7).

Р. Поместим нач. крд-т в центр неподвижной окр-ти. Считаем, что в исх-ом пж-и вычерчивающая тч. совпадает с тч. $A$, в к-ой производящая окр-ть касается неподвижной, и ось абсцисс направим через тч-у $A$ (рис. 17). Введем угол $t = \angle MO_1N$. Рас-им отн-ие радиусов окр-ей $m = r : R$, к-ое наз. их молудем. Т.к. качение производящей окр-ти предполагается совершающимся без скольжения, то $\smile{AN} = \smile{MN}$ или $R \cdot \angle NOA = rt$, откуда $\angle NOA = \dfrac{r}{R}t = mt$. Из чертежа рис. 17 получаем:

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r)\cos mt + r\sin\angle MO_1E;$$
$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r)\sin mt - r\cos\angle MO_1E.$$

Т.к. $\sin\angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin\left[t - \left(\dfrac{\pi}{2} - mt\right)\right] = -\cos(t - mt)$;

$\cos\angle MO_1E = \sin(t + mt)$ и, кроме того, $r = mR$, то пармч. ур-ия эпициклоиды имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt); \\ y &= (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt). \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

**п17**. Дана окр-ть диаметра $OC = a$ и касательная (кас.) в тч. $C$. Произвольный луч $OE$ перк-ет в тч-х $D$ и $E$ окр-ть и кас-ю. Через эти тч. проведены пм., прл-ые ств-но оси $Ox$ и оси $Oy$ до перс-ия в тч. $M$. Геомч. место тч-к $M$ наз. локоном Аньези. Сост-ть пармч. ур-ия крв-й и построить ее.

Р. Введем угол $\angle CEO$ (см. рис. 18). Тогда $CE = a\mathrm{ctg}t$ или $x = \mathrm{ctg}t$. Из пуг-го туг-ка $CDO$ имеем, что $\angle CDB = \dfrac{\pi}{2} - t$, $\angle DCB = t$, отсюда $CD = a\cos t$, а $CB = y = Cd\cos t$, т.е. $y = a\cos^2 t$. Итак, $x = a\mathrm{ctg}t$, $y = a\cos^2 t$. Иск-в $t$, находим: $y(x^2 + a^2) = a^3$.

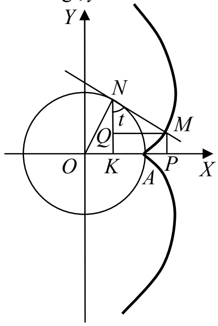


Рис. 16

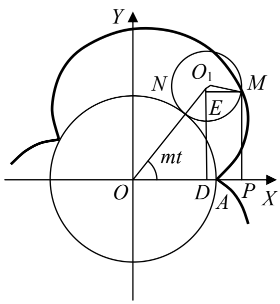


Рис. 17

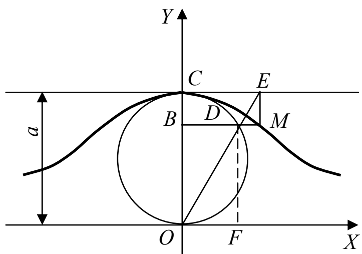


Рис. 18

## ЛЕКЦИЯ 9

## 3.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Положение (пж.) прямой (пм.) на пл-ти можно опр-ть заданием двух условий (усл.), различных по форме. Поэтому возникают различные формы аналитического (антч.) выражения (врж.) пм-й ур-ем. Приведем их в данной лекции (лк.).

**1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и отрезком на оси ординат**. Пусть даны $k = \mathrm{tg}\alpha$ – угл. коэф. пм-й и $b = OB$ – отрезок на оси ординат (рис. 1). Найти ур-ие этой пм.

По данным $\alpha$ и $b$ проводим пм-ю и рас-им прзвл. тч. $M(x, y)$ на этой пм. Из рис. 1 получаем:$y = NM + AN = x\mathrm{tg}\alpha + OB$, отсюда

$$y = kx + b. \tag{1}$$

С изменением (изм.) $k$ и $b$ изм-ся и пж-ие пм-й. Так при $k > 0$ пм-я образует с осью $Ox$ угол $\alpha$ – острый, при $k < 0$ угол $\alpha$ – тупой, при $k = 0$ угол $\alpha = 0$ и пм. прл-на оси $Ox$.

При $b > 0$ пм-я пересекает (перк.) ось $Oy$ выше начала (нач.) крд-т, при $b < 0$ – ниже нач. крд-т, а при $b = 0$ пм-я проходит через нач. крд-т.

**п1**. Сост-ть ур. пм-й, проходящей через тч. (0, 3) прл-о пм. $y = -\dfrac{3}{4}x + 12$.

Р. $k = -\dfrac{3}{4}$, $b = 3$, тогда $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$ – искомая пм.

**п2**. Найти ур. пм-й, проходящей через тч. (0, – 2) прп-о пм. $y = \dfrac{3}{2}x + 1$.

Р. Из усл-я прп-ти пм-х $k = -\dfrac{2}{3}$, а $b = 2$, то $y = -\dfrac{2}{3}x - 2$.

**2°. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении**. Дано: тч. $A(x_1, y_1)$ и направление (нпв.) $k = \mathrm{tg}\alpha$ (рис. 2). Найти ур. пм-й.

Из рис. 2 имеем $k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, откуда получим

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

Если в ур-и (2) $k$ неизвестно, то получим пучок пм-х, проходящих через тч-у $A(x_1, y_1)$.

**п3**. Найти ур. пм-й, проходящей через тч. (– 3, 4) в нпв-и $k = 2$.

Р. По фм-е (2) получим $y - 4 = 2(x + 3)$ – искомое ур. пм-й.

**3°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки**. Даны тч. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (рис. 3). Найти ур-ие пм-й.

Из рис. 3 получаем $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, тогда по (2) имеем $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

**п4**. Написать ур-ия сторон $\Delta ABC$ с верш-ми $A(-2, -1)$, $B(-5, 3)$, $C(6, 5)$, см. п1: 3.1.

Р. $AB$: $\dfrac{y+1}{3+1} = \dfrac{x+2}{-5+2} \Rightarrow \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{x+2}{-3}$; $AC$: $\dfrac{y+1}{3} = \dfrac{x+2}{4}$; $BC$: $\dfrac{y-3}{2} =$
$= \dfrac{x+5}{11}$.

**п5**. Лежат ли три тч. $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$ и $C(0, 1)$ на одной пм-й?

Р. $AB$: $\dfrac{y+3}{5} = \dfrac{x-1}{-2}$; подставляем тч. $C$: $\dfrac{1+3}{5} \neq \dfrac{-1}{-2}$. Не лежат.

**4°. Уравнение прямой в отрезках**. Даны тч. на осях $A(a, 0)$, $B(0, b)$ (рис. 4). Найти ур-ие пм-й.

Р. Используя (3), получаем $\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ или $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1 \Rightarrow$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (4)$$

**п6**. Ур-ие $2x - y = 3$ привести к ур-ю в отрезках.

Р. $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y}{-3} = 1$, где $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -3$.

**п7**. Сост-ть ур. пм-й, проходящей через тч-у $(-2, 5)$ и отсекающей на оси $Ox$ отрезок вдвое меньший, чем на оси $Oy$.

Р. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{2a} = 1$, $\dfrac{-2}{a} + \dfrac{5}{2a} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{1} = 1$.

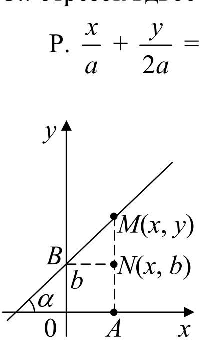


Рис. 1

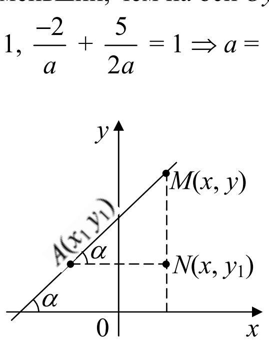


Рис. 2

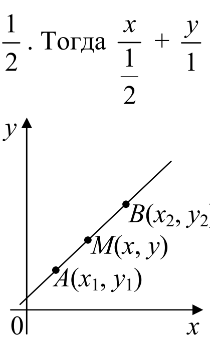


Рис. 3

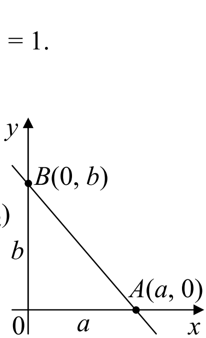


Рис. 4

**5°. Общее уравнение прямой и его исследование**. Общее ур. пм-й имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5)$$

Иссл-ем ур. (5) при различных конечных зн. $A$, $B$, $C$ и одновременно не равными нулю $A$ и $B$.

1) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Тогда $By + C = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{C}{B}$. Полагая $-\dfrac{C}{B} = b$, получим $y = b$ – ур. прл-но оси $Ox$. Если $C = 0$, то $y = 0$ – ур. оси $Ox$ (рис. 5);

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Тогда $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{C}{A}$ или $x = a$ (при $-\dfrac{C}{A} = a$) – ур. пм-й, прл-ой оси $Oy$. Если $C = 0$, то $x = 0$ – ур. оси $Oy$ (рис. 5);

3) $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то $Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{A}{B}x$. Полагая $-\dfrac{A}{B} = k$, имеем $y = kx$ – ур. пм-й с угл. коэф-ом, проходящей через нач. крд-т (рис. 5);

4) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то $Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ или $y = kx + b$ (рис. 5).

Проведенное иссл. показывает, что ур. (5) охватывает все возможные пж-ия пм-й на пл-ти. Поэтому его наз-ют общим ур-ем пм-й.

**п8**. Построить пм-ю $5x - 3y + 15 = 0$.

Р. Находим тч-и $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$ и проводим пм-ю через эти тч. (рис. 6).

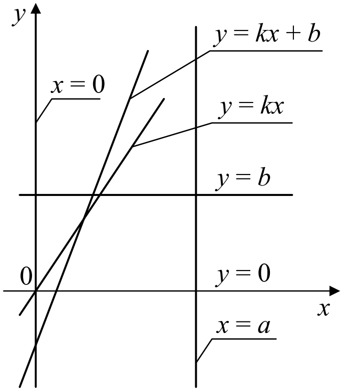



Рис. 5

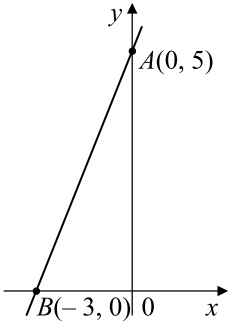



Рис. 6

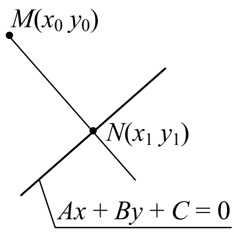



Рис. 7

**6°. Нормальное уравнение прямой**. Ур-ие (5) напишем в виде $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$, коэф-ы к-го ств-но обз-им через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $-p$, тогда получим нормальное (норм.) ур. пм-й

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (6)$$

где $-p \leq 0$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

**п9**. общее ур. $4x - 3y + 15 = 0$ привести к норм. виду.

Р. Находим нормирующий (норщ.) множитель (мнж.) $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Знак берем противоположный знаку свободного члена. $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} =$

$= -\dfrac{1}{5}$, тогда $-\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 3 = 0$.

**7°. Пересечение прямых**. Тч. пересечения (перч.) двух пм. лежит одновременно на каждой из этих пм-х, поэтому их находим, совместно р-я эти ур-я:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} A_1x + B_1y = -C_1; \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{matrix} \right| \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ B_1 & -C_2 \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

При этом возможны сд. случаи:

1) $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ или $A_1B_2 \neq A_2B_1$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ – коэф-ы при $x$ и $y$ не прц-ны, тогда пм-ые пересекаются (перк.): .

2) $\Delta = 0$, но хотя бы один, н-р, $\Delta_1 \neq 0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. В этом случае пм-ые не перк-ся, они прл-ны: .

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. В этом случае пм. имеют беск. мн-ва тч-к перч-ия, они сливаются: .

Найдем угл. коэф-ы общих ур-й пм-х: $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$. Тогда из $k_1 = k_2$, $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ (см. (10), (11) из 3°: 3.1) ств-но получим усл-я прл-ти: $-\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{7}$$

и прп-ти общих ур-й пм-х: $\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{B_2}{A_2} \Rightarrow$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{8}$$

**п10**. Р-ть системы ур-й: а) $\left.\begin{matrix} 3x + 2y - 8 = 0; \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{matrix}\right\}$, б) $\left.\begin{matrix} 8x - 6y + 15 = 0; \\ 4x - 3y + 8 = 0 \end{matrix}\right\}$,

в) $\left.\begin{matrix} 3x - 7y + 11 = 0; \\ 4x - 14y + 22 = 0 \end{matrix}\right\}$, г) $\left.\begin{matrix} 6x - 4y + 5 = 0; \\ 6x - 9y + 11 = 0 \end{matrix}\right\}$.

Р. а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -48$; $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} =$

$= \dfrac{0}{-2} = 0,\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-48}{-12} = 4;$

б) пм. не перк-ся, ибо $\dfrac{8}{4} = \dfrac{-6}{-3} \neq \dfrac{15}{8}$. Остальные ур. р-ть самим.

**8°. Расстояние от точки до прямой**. Пусть требуется найти расстояние (рст.) от тч. $M(x_0, y_0)$ до пм-й $Ax + By + C = 0$ ①.

Р-м эту задачу (рис. 7) в сд-ем порядке:

1*. Через тч-у $M(x_0, y_0)$ проведем пм., прп-ю к пм. ① в виде $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$ ② и дсв-но, в силу (8), $[AB + (-AB) = 0]$, ① $\perp$ ②.

2*. Находим крд-ы тч-к перч-ия пм-х, ① и ②:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C = A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C &= 0; \\ B(x - x_0) - A(y - y_0) \qquad\qquad\qquad &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix} = -(A^2 + B^2)$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(Ax_0 + By_0 + C) & B \\ 0 & -A \end{vmatrix} = A(Ax_0 + By_0 + C)$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & -(Ax_0 + By_0 + C) \\ B & 0 \end{vmatrix} = B(Ax_0 + By_0 + C)$. Тогда $x_1 - x_0 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} =$

$= -\dfrac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$, $y_1 - y_0 = -\dfrac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$, где $N(x_1, y_1)$ – тч. перч-ия прп-ов (рис. 7).

3*. Находим рст-ие между двумя тч-ми $M(x_0, y_0)$ и $N(x_1, y_1)$:

$$d = |MN| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^2}(Ax_0 + By_0 + C)^2} \Rightarrow$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

**п11**. Найти рст-ие от тч. $M(-3, 4)$ до пм-й $12x + 5y - 10 = 0$.

Р. $d = \dfrac{|12(-3) + 5\cdot 4 - 10|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{26}{13} = 2$ ед.

**зм1**. Если дано норм. ур-ие пм-й $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, то рст-ие от тч. $M(x_0, y_0)$ до этой пм. выч-ся по фм-е

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{10}$$

Н-р, выч-им рст. от тч. $M(-3, 4)$ до норм-го ур-ия $\dfrac{12}{13}x + \dfrac{5}{13}y - \dfrac{10}{13} = 0$ (см. п11).

$$d = \left|\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{10}{13}\right| = \frac{|-36 + 20 - 10|}{13} = \frac{26}{13} = 2 \text{ ед.}$$

## 3.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 3.1. МЕТОД КООРДИНАТ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая ось и в чем состоят ее основные (осн.) задачи?
2. Приведите осн. задачи дек-ой пуг. системы крд-т.
3. Дек-ая пуг. система крд-т и ее осн. задачи.
4. Что такое угол наклона пм-й и ее угл. коэф-т?
5. Как опр-ся угол между пм-ми?
6. Приведите полярные, цилиндрические и сферические системы крд-т.
7. Какие виды прб-й крд-т знаете? Приведите примеры.

## 3.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Как врж-ся: ур-ие пм-й с угл. коэф-ом и отрезком на оси ординат?
2. Ур. пм-й, проходящей через данную тч. в данном нпв-и.
3. Ур. пм-й, проходящей через две данные тч.
4. Ур. пм-й в отрезках.
5. Общее ур. пм-й и его иссл-ие.
6. Нормальное (норм.) ур. пм-й.
7. Пересечение (перч.) пм-ых и их иссл-ие.
8. Как опр-ся рст-ие от данной тч. до данной пм-й?

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Сост-ть ур-ие пм-й, проходящей через тч-у $M_0(12/5, -6/5)$ и отсекающей (отскщ.) от крд-го угла туг-к, пщ-дь к-го равна 6 кв. ед.

Р. По усл-ю задачи, возможно провести три пм-ые (рис. 1):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1,\ \frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1 \text{ (где } a > 0,\ b > 0).$$

Учитывая, что $ab = 12$, $a > 0$, $b > 0$ и пм. проходят через тч-у $M_0(12/5, -6/5)$, имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{12}{5a}-\frac{6}{5b}=1;\\ ab=12\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\frac{12}{5a}+\frac{6}{5b}=1;\\ ab=12\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}-\frac{12}{5a}+\frac{6}{5b}=1;\\ ab=12\end{aligned}\right\}.$$

Р-в первую систему, получим ур-ие искомой пм-й:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \text{ или } 3x + y - 6 = 0 \text{ (рис. 1).}$$

При р-и второй системы получим две пм-е (см. рис. 1):

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1 \text{ или } x - 3y - 6 = 0$$

и

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ или } 3x - 4y - 12 = 0.$$

При р-и третьей системы получим:

$$\frac{x}{-12} + \frac{y}{-1} = 1 \text{ или } x + 12y + 12 = 0 \text{ (см. рис. 1).}$$

**тз2**. Сост-ть ур-ие пм-й, проходящей через тч-у $M_0(8, 6)$ и отсекающей от крд-го угла туг-к, пщ-дь к-го равна 12 кв. ед. О: $3x - 2y - 12 = 0$.

**тз3**. Сост-ть ур-ие пм-й, проходящей через нач. крд-т и прп-ой к вк-у $\boldsymbol{n}(1, 2)$. О: $x + 2y = 0$.

**тз3**. Записать ур-ие пм-й, прп-ой к вк-у $\boldsymbol{n}(2, -3)$ и отскщ-й на оси $Oy$ отрезок, равный 6. О: $2x - 3y + 18 = 0$.

**тз4**. Сост-ть ур-ие пм-й, к-ая прп-на отрезку, соединяющему тч-и $M_1(2, 3)$ и $M_2(4, -5)$ и проходит через его середину. О: $x - 4y - 7 = 0$.

**тз5**. Даны середины сторон туг-ка: $P(2, 3)$, $Q(4, -1)$ и $R(-3, 5)$. Сост-ть ур-ия его сторон (рис. 2а). Ук: находим вк. $PQ(2, -4)$ и проводим пм-ю через тч-у $R$ в нпв-и $PQ$. Эта пм. яв-ся ур-ем стороны $AC$ (рис. 2а). Остальные стороны туг-ка находим анч-но. О: $2x + y + 1 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$, $6x + 7y - 33 = 0$.

**тз6**. Из тч. $A(4, 3)$ под углом $\alpha$ к оси $Ox$ нпв-ен луч света. Дойдя до оси, луч от нее отразился. Сост-ть ур-ия пм-х, на к-ых лежат падающий и отраженный лучи, если известно, что $\mathrm{tg}\alpha = 3$.

Р. Падающий луч лежит на пм-й, проходящей через тч-у $A(4, 3)$ с угл. коэф-ом $k = \mathrm{tg}\alpha = 3$ и поэтому ее ур-ие имеет вид $y - 3 = 3(x - 4)$ или $y = 3x - 9$, к-ая с осью $Ox$ перк-ся в тч. $B(3, 0)$. Отраженный луч наклонен к оси $Ox$ под углом $\pi - \alpha$, тогда $k = \mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha = -3$, т.е. искомая пм. имеет вид $y = -3(x - 3)$ или $y = -3x + 9$.

**тз6***. Р-ть тз6 при $\mathrm{tg}\alpha = 1$, $A(4, 3)$.

**тз7**. Даны три верш. прлг-ма $ABCD$: $A(-2, -3)$, $B(1, 2)$, $C(5, 3)$. Сост-ть ур-ия его сторон и найти крд-ы тч. $D$. О: $(AB)$ $5x - 3y + 1 = 0$, $(BC)$ $x - 4y + 7 = 0$, $(AD)$ $x - 4y - 10 = 0$, $(CD)$ $5x - 3y - 16 = 0$, $D(2, -2)$.

**тз8**. Сост-ть ур-ия сторон прлг-ма $ABCD$ и найти рст-ия между прл. сторонами, если его диагонали перк-ся в тч. $M(1, 6)$, а стороны $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ проходят ств-но через тч-и $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$, $R(5, 6)$, $S(-5, 4)$ (рис. 2б).

Р. Находим ур. $AB$ и $CD$: $y = k(x - 3)$ и $y - 9 = k(x - 5)$ ①. Опр-ем связь между крд-ми тч-к $A$ и $C$: $\dfrac{x_A + x_C}{2} = 1$, $\dfrac{y_A + y_C}{2} = 6$, т.е. $\left.\begin{aligned} x_A + x_C &= 2; \\ y_A + y_C &= 12 \end{aligned}\right\}$ ②. Складывая почленно ур-ия ① и используя усл-я ②, найдем $k$: $y_A + y_C - 9 = k(x_A + x_C) - 8k \Rightarrow 3 = 2k - 8k \Rightarrow k = -1/2$. Отсюда находим ур-ия $AB$: $y = -(x - 3)/2$ или $x + 2y - 3 = 0$ и $DC$: $y - 9 = -(x - 5)/2$ или $x + 2y - 23 = 0$. Рассуждая анч-но, получаем ур-ия $BC$: $2x - y - 6 = 0$ и $AD$: $2x - y + 14 = 0$.

Из полученных ур-й следует, что стороны $AB$ и $DC$ прп-ны к $BC$ и $AD$. Это значит, $ABCD$ – пуг-к. Рст-ие между прл. пм-ми $AB$ и $DC$ равно рст-ю от тч-и $P$ до пм-й $DC$: $d_1 = \dfrac{|1\cdot 3 + 2\cdot 0 - 23|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Анч-но опр-ем рст-ие между пм-ми $BC$ и $AD$, т.е. от тч-и $Q$ до пм-й $AD$: $d_2 = \dfrac{|2\cdot 6 - 1\cdot 6 + 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Т.к. рст-ие между противоположными сторонами равны между собой, то он яв-ся кв-ом.

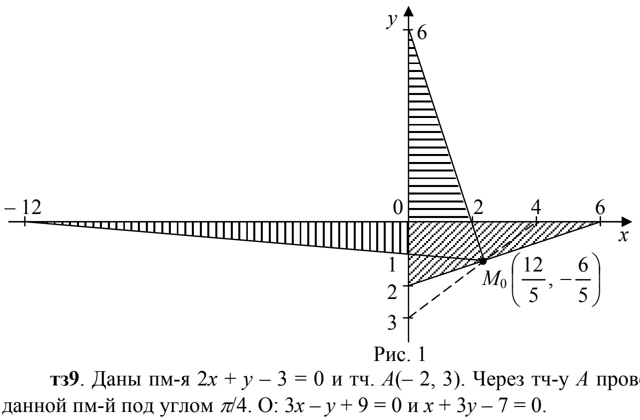


Рис. 1

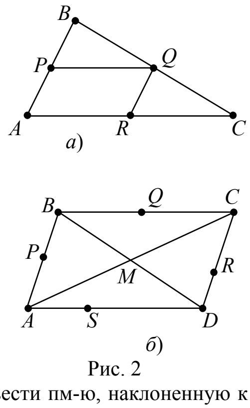


Рис. 2

**тз9**. Даны пм-я $2x + y - 3 = 0$ и тч. $A(-2, 3)$. Через тч-у $A$ провести пм-ю, наклоненную к данной пм-й под углом $\pi/4$. О: $3x - y + 9 = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$.

**тз10**. Даны верш. $C(-1, 3)$ прямого угла равнобедренного пуг-го туг-ка и его гипотенуза $3x - 4y - 12 = 0$. Найти ур-ия катетов. О: $7x - y + 10 = 0$ и $x + 7y - 20 = 0$.

**тз11**. Даны три посл. верш. прлг-ма $ABCD$: $A(2, 2)$, $B(4, 8)$, $C(-6, 10)$. Сост-ть ур-ия его сторон и диагонали $BD$. О: ($AB$) $3x - y - 4 = 0$, ($BC$) $x + 5y - 44 = 0$, ($AD$) $x + 5y - 12 = 0$, ($CD$) $3x - y + 28 = 0$, ($BD$) $x - 3y + 20 = 0$.

**тз12**. Даны верш. туг-ка $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$ и $C(-1, -4)$. Сост-ть ур-ия: а) трех его сторон; б) медианы, проведенной из верш. $C$; в) бист-ы угла $B$; г) высоты, проведенной из верш. $A$. О: а) ($AB$) $3x - 4y + 12 = 0$, ($AC$) $2x - y - 2 = 0$, ($BC$) $4x + 3y + 16 = 0$; б) $7x - y + 3 = 0$; в) $x + 7y + 4 = 0$; г) $3x - 4y + 12 = 0$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п5 из 3.1 и п1-п11 из 3.2 р-ть з1-з30.

В задачах 1-30 даны крд-ы верш-н $\Delta ABC$. Найти: 1) длину стороны $AB$; 2) ур-ия стороны $AB$, $BC$ и их угл. коэф-ы; 3) внутренний угол $B$ в радианах с точностью до 0,01; 4) ур-ие медианы $AE$; 5) ур-ие и длину высоты $CD$; 6) ур-ие пм-й, проходящей через тч. $E$ прл-но $AB$ и тч. $M$ ее перч-я с высотой $CD$. Построить $\Delta ABC$ и р-ие задачи объяснить на графике.

1. $A(1, -1)$, $B(4, 3)$, $C(5, 1)$.
2. $A(0, -1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 1)$.
3. $A(1, -2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 0)$.
4. $A(2, -2)$, $B(5, 2)$, $C(6, 0)$.
5. $A(0, 0)$, $B(3, 4)$, $C(4, 2)$.
6. $A(0, 1)$, $B(3, 5)$, $C(4, 3)$.
7. $A(3, -2)$, $B(6, 2)$, $C(7, 0)$.
8. $A(3, -3)$, $B(6, 1)$, $C(7, -1)$.
9. $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(3, 3)$.
10. $A(4, 0)$, $B(7, 4)$, $C(8, 2)$.
11. $A(2, 2)$, $B(5, 6)$, $C(6, 4)$.
12. $A(4, -2)$, $B(7, 2)$, $C(8, 0)$.
13. $A(0, 2)$, $B(3, 6)$, $C(4, 4)$.
14. $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(8, 3)$.
15. $A(3, 2)$, $B(6, 6)$, $C(7, 4)$.
16. $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(2, 3)$.
17. $A(4, -3)$, $B(7, 1)$, $C(8, -1)$.
18. $A(-2, 2)$, $B(1, 6)$, $C(2, 4)$.
19. $A(5, 0)$, $B(8, 4)$, $C(9, 2)$.
20. $A(2, 3)$, $B(5, 7)$, $C(6, 5)$.
21. $A(-5, 0)$, $B(7, 9)$, $C(5, -5)$.
22. $A(-7, 2)$, $B(5, 11)$, $C(3, -3)$.
23. $A(-5, -3)$, $B(7, 6)$, $C(5, -8)$.
24. $A(-6, -2)$, $B(6, 7)$, $C(4, -7)$.
25. $A(-8, -4)$, $B(4, 5)$, $C(2, -9)$.
26. $A(0, -1)$, $B(12, 8)$, $C(10, -6)$.
27. $A(-6, 1)$, $B(6, 10)$, $C(4, -4)$.
28. $A(-2, -4)$, $B(10, 5)$, $C(8, -9)$.
29. $A(-3, 0)$, $B(9, 9)$, $C(7, -5)$.
30. $A(-9, -2)$, $B(3, 7)$, $C(1, -7)$.

# 4. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

В самой математике главные средства достигнуть истины – индукция и аналогия.
Лаплас

## ЛЕКЦИЯ 10

## 4.1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЕ

**1°. Нормальное уравнение плоскости**. Положение (пж.) пл-ти $Q$ в пр-ве вполне опр-ся, если заданы ее рст-ие $p = ON$ от нач. крд-т $O$ и едч-ый вк. $n°$, направленный (нпвн.) прп-но к пл-ти (рис. 1).

Для получения ур-ия пл. $Q$ возьмем прзвл. тч. $M$ на пл-ти с радиусом $r = OM$. Тогда $np_{n°}OM = p$ или $|\,n°\,|\,np_{n°}r = p$, т.е. как скн. пзв-ие получим $rn° = p$, иначе

$$rn° - p = 0. \tag{1}$$

Стн. (1) наз. нормальным (норм.) ур-ем пл-ти в вк-ой форме.

Если выразим (врз.) $n° = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ по (5): 2.1 и $r = (x, y, z)$, то (1) принимает вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2}$$

где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (см. (6): 2.1), а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы между вк-ом $n°$ и осями $Ox$, $Oy$, $Oz$ (рис. 1).

Стн. (2) наз. норм. ур-ем пл-ти в крд-ой форме.

Т.о., $n° = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \perp$ пл. $Q$. Причем если в (1) или (2) $p = 0$, то направление (нпв.) $n°$ можно взять прп-но на ту или иную сторону пл-ти. В этом случае пл. $Q$ проходит через нач-о крд-т.

**2°. Общее уравнение плоскости и его исследование**. Если вместо $n°$ возьмем (рис. 1) $n = \lambda n° = (A, B, C) \perp Q$, то получим общее ур. пл-ти:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3}$$

Общее ур. (3) пл-ти легко привести к норм. виду, умн-ив ее на нормирующий (норщ.) множитель (мнж.) $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$ и полагая $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \cos\beta$, $\mu C = \cos\gamma$, $\mu D = -p$. Тогда $\mu^2A^2 + \mu^2B^2 + \mu^2C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Отсюда

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4}$$

Знак в (4) берем противоположным знаку свободного члена ур-ия (3).

**п1**. Ур-ие пл. $x - 2y + 2z - 3 = 0$ привести к норм. виду.

Р. $\mu = +\dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{3}$, отсюда получим $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 1 = 0$,

т.е. имеем $n° = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1$, $p = 1$.

Рас-им, какое пж-ие отс-но осей крд-т занимает пл-ть, если нек-ые коэф. ур-ия (3) обращаются в нуль:

1. Если $D = 0$, т.е. $Ax + By + Cz = 0$, то пл-ть проходит верез нач. крд-т.

2. Если $C = 0$, т.е. $Ax + By + D = 0$, то пл. $\|$ оси $Oz$. В част., если $D = 0$, то пл-ть проходит через ось $Oz$. Анч-но для остальных осей:

При $B = 0$ пл. $Ax + Cz + D = 0 \parallel$ оси $Oy$ и если $D = 0$, то пл. $Ax + Cz = 0$ проходит через ось $Oy$.

При $A = 0$ пл. $By + Cz + D = 0 \parallel$ оси $Ox$; если $D = 0$, то пл. $By + Cz = 0$ проходит через ось $Ox$.

3. Если $C = B = 0$, т.е. $Ax + D = 0$, то пл. $\|$ осям $Oz$ и $Oy$, т.е. пл-ти $yOz$. В част., при $D = 0$ пл. $Ax = 0$ или $x = 0$ есть крд-ая пл. $yOz$. Анч-но для остальных крд-ых пл-ей имеем:

При $C = A = 0$ пл. $By + D = 0 \parallel$ пл. $xOz$. При $D = 0$ имеем $By = 0$ или $y = 0$ есть крд. пл. $xOz$.

При $B = A = 0$ пл. $Cz + D = 0 \parallel$ пл. $xOy$, а если $D = 0$, то пл. $Cz = 0$ или $z = 0$ есть крд-ая пл. $xOy$.

**3°. Уравнение плоскости в отрезках**. Пусть пл. $Ax + By + Cz + D = 0$ проходит через тч. $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$ (рис. 2). Тогда $Aa + D = 0$, $Bb + D = 0$, $Cc + D = 0$, т.е. $A = -\dfrac{D}{a}$, $B = -\dfrac{D}{b}$, $C = -\dfrac{D}{c}$. Отсюда $-\dfrac{D}{a}x -$ $-\dfrac{D}{b}y - \dfrac{D}{c} + D = 0$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (5)$$

Это и есть искомое ур. пл-ти в отрезках.

**п2**. Ур-е пл. $3x - 2y + z - 5 = 0$ написать в отрезках.

Р. $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2y}{5} + \dfrac{z}{5} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{5}{2}} + \dfrac{z}{5} = 1.$

**4°. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку**. Пусть пл. $Ax + By + Cz + D = 0$ ① проходит через тч-у $M(x_1, y_1, z_1)$. Тогда имеет место $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ②. Из ①, вычитая ②, получим искомое ур.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (6)$$

**п3**. Составить ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M(1, -2, 3)$.

Р. $A(x - 1) + B(y + 2) + C(z - 3) = 0$.

**5°. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки**. Найти ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 3).

Для р-ия возьмем на пл-ти (рис. 3) произвольную тч. $M(x, y, z)$ и найдем вк-ы $M_1M$, $M_1M_2$, $M_1M_3$, к-ые компланарны, поэтому их вкн.-скн. пзв-ие (см. (12): 2.2) равно нулю

$$M_1M \cdot M_1M_2 \cdot M_1M_3 = 0 \qquad (7а)$$

или в проекциях (пркц.)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

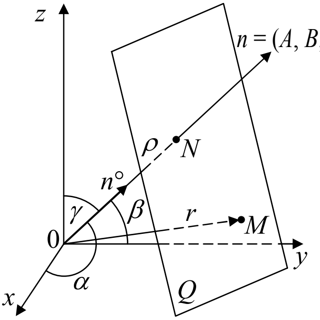


Рис. 1

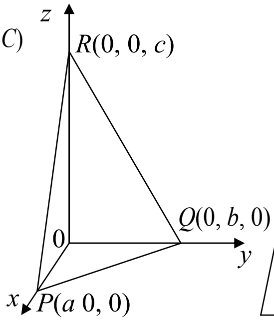


Рис. 2

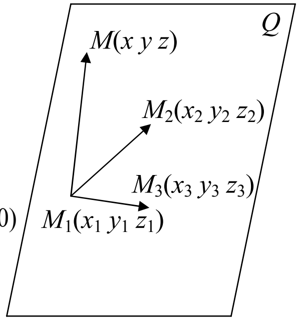


Рис. 3

**п4**. Сост-ть ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(3, 0, 1)$.

Р. $\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x+1) + 10y - 8z = 0 \Rightarrow x + 5y - 4z + 1 = 0.$

**6°. Угол между двумя плоскостями**. Пусть даны две пл-ти

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ Q_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Найти угол $\varphi$ между пл-ми $Q_1$ и $Q_2$.

Р. Данное задание равносильно нахождению угла между норм-и этих пл-ей: $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Тогда по (5): 2.2 получим

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\ . \tag{8}$$

Если пл-ти $Q_1 \perp Q_2$, то $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ и получим условие (усл.) прп-ти пл-ей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{8а}$$

Если $Q_1 \parallel Q_2$, то вк-ы $n_1$ и $n_2$ коллинеарны: $n_1 = \lambda n_2$, т.е. $(A_1, B_1, C_1) = (\lambda A_2, \lambda B_2, \lambda C_2)$ или $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$. Отсюда получим

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{8б}$$

**п5**. Сост-ть ур. пл. $Q$, проходящей через тч. $M(1, 1, 1)$ и $Q \parallel$ пл. $2x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Р. $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$ – пл. проходит через тч. $M(1, 1, 1)$. По (8б) должно выполняться $\dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{-2}$. Тогда $2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$ $\Rightarrow x + y - z = 0.$

**п6**. Сост-ть ур. пл. $Q$, проходящей через тч-и $M(1, 1, -2)$, $N(0, -2, 2)$ и $Q \perp$ пл. $Q_1$: $x + y - 2z + 3 = 0$.

Р. $A(x-1) + B(y-1) + C(z+2) = 0$ – пл. $Q$ проходит через тч. $M$.

$$+\begin{cases} -A - 3B + 4C = 0 & \text{– пл. } Q \text{ проходит через тч-и } M \text{ и } N. \\ A + B - 2C = 0 & \text{– усл. прп-сти пл-ей } Q \text{ и } Q_1. \end{cases}$$

$-2B + 2C = 0 \Rightarrow 2B = 2C \Rightarrow \dfrac{B}{C} = \dfrac{1}{1} \Rightarrow B = 1$ и $C = 1$. Тогда $A + 1 - 2 = 0 \Rightarrow A = 1$. Отсюда имеем $1(x-1) + 1(y-1) + 1(z+2) = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$.

**7°. Точка пересечения трех плоскостей**. Пусть даны три пл-ти

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Найти тч-у их пересечения (перч.).

Совместно р-ая систему (9) по правилу Крамера (см. (5): 1.3), находим $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}$. При этом возможны (анч-но перч-ию пм-х 7°: 3.2) случаи:

1. Если $\Delta \neq 0$, то пл-ти пересекаются (перк.) в едн-ой тч-е.
2. Если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_i \neq 0$, то одна из пл-ей прл-на линии перч-я двух др.
3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1, 3}$, то все три пл-ти проходят через одну пм.
4. Если $\Delta = 0$ и среди опрт-ей 2-го порядка табл. $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ есть хотя бы один отличный от нуля, то все пл-ти прл-ны между собой.
5. Если $\Delta = 0$ и все опрт-ли 2-го порядка этой табл-ы равны нулю, то три пл-ти совпадают.

**п7**. Найти тч-у перч-я пл-ей $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$

Р. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(-2) = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2-2) = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-6-2) = -8.$$

Отсюда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{-4} = -1$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

**8°. Расстояние от точки до плоскости**. Пусть дано: тч. $M(r_1) = M(x_1, y_1, z_1)$ и пл. $Q$: $rn° - p = 0$ (рис. 4). Найти рст-ие $d = MK$.

Из рис. 4 находим, что $\boldsymbol{OK} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MK}$ или $r_K = r_1 - dn°$, т.к. $\boldsymbol{MK} = -dn°$. Тч. $K \in Q$, поэтому $r_K$ уд-ет ур-ю пл. $Q$, т.е. $r = r_K = r_1 - dn°$, тогда имеем $(r_1 - dn°)n° - p = 0 \Rightarrow r_1 n° - d - p = 0 \Rightarrow d = r_1 n° - 1$. Т.к. $d$ должен быть всегда плж., то возьмем

$$d = |r_1 n° - p|. \tag{10}$$

Врж-я скн. пзв-ие $r_1 n°$ через пркц-и их сомножителей, получим

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|. \tag{11}$$

Переходя из норм-го ур-ия пл-ти к общему ур. и учитывая, что $\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $-p = \dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, из (11) получим:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{12}$$

Стн-ие (12) используется, когда ур. пл-ти задано в общем виде.

**п8**. Найти рст-ие от тч. $M(1, 2, 3)$ до пл. $2x - 2y + z - 3 = 0$.

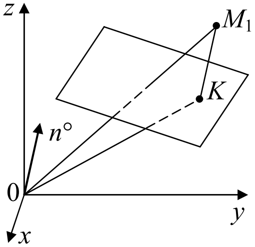


Рис. 4

Р. $d = \dfrac{|2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|-2|}{3} = \dfrac{2}{3}$ ед.

**п9**. Найти рст-ие между двумя прл. пл-ми $x + 2y - 2z + 2 = 0$, $3x + 6y - 6z - 4 = 0$.

Р. На одной из пл-ей возьмем какую-либо тч. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и по фм-е (12) опр-им ее рст-ие до второй пл-ти. Для нашего случая, н-р, возьмем $y = 0$, $z = 0$, тогда $x + 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$, т.е. тч. $M_0(-2, 0, 0)$ лежит на первой пл-ти. По (12) находим

$$d = \frac{|3(-2) + 6\cdot 0 - 6\cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{81}} = \frac{10}{9}.$$

## ЛЕКЦИЯ 11

## 4.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

**1°. Векторное, параметрическое и каноническое уравнения прямой**. Пж-ие пм-й в пр-ве вполне опр-ся, если заданы на ней тч. $M_0(a, b, c)$ и прл-ый ей вк. $s = (m, n, p)$, назм-ый нпвщ-им вк-ом пм-й (рис. 1).

Для вывода фм-ы пм-й возьмем произвольную тч. $M(x, y, z)$ на ней (рис. 1) и получим рав-во: $OM = OM_0 + M_0M$, но $M_0M = ts$. Тогда

$$r = r_0 + st, \tag{1}$$

где $t$ – нек-ый парм. Ур. (1) наз. вк-ым ур-ем пм-й.

Стн. (1) можно писать в развернутом виде: $(x, y, z) = (a + mt, b + nt, c + pt)$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x &= a + mt; \\ y &= b + nt; \\ z &= c + pt. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ур-ия (2) наз. пармч. ур-ми пм-й, а числа $m, n, p$ наз. нпвщ-ми коэф. этой пм.

Если $(m, n, p) = S = S^\circ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то вместо (2) получим

$$\left.\begin{aligned} x &= a + t\cos\alpha; \\ y &= b + t\cos\beta; \\ z &= c + t\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Если из (2) иск-ть $t$, то получим $\dfrac{x-a}{m} = t,\ \dfrac{y-b}{n} = t,\ \dfrac{z-c}{p} = t$. Отсюда

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{3}$$

Стн. (3) наз. каноническим (канч.) ур-ем пм-й.

В част., при $(m, n, p) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ стн. (3) принимает вид

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}. \tag{3a}$$

Заметим также, что если пм-я проходит через две тч-и $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то $(m, n, p) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и стн. (3) примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

**п1**. Найти ур. пм-й, проходящей через тч-и $A(1, 2, 3)$, $B(3, 3, 2)$.

Р. $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{3-2} = \dfrac{z-3}{2-3} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

**2°. Общее уравнение прямой**. Пм-ю можно задать как перч-ие двух пл-ей:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ур-ия (5), расв-мые совместно, наз. общим ур-ем пм-й.

От общих ур-й пм-х легко перейти к канч. ур-ям. Для этого находим тч-у на пм-й (взяв одну крд-у произвольно) и выбираем нпвщ-ий вк-р $s$ как вкн-ое пзв-ие вк-ов $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$, т.е. $s = n_1 \times n_2$ (рис. 2).

**п2**. Общее ур. пм-й $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0; \\ 3x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ привести к канч. виду.

Р. Пусть, н-р, $z = 1$. Тогда имеем $\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 3x + y = 6. \end{cases}$ Откуда $x = 2$, $y = 0$, т.е. нашли тч-у $M_0(2, 0, 1)$, лежащую на пм-й. Теперь находим $s = n_1 \times n_2 =$ $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k} = (5, 7, 11)$. Отсюда $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-1}{11}$ – искомое ур.

Ясно, что р-ие окажется не однозначным. Почему? Думайте!

Отметим, что общее ур. пм-й можно привести к канч. виду и с помощью иск-ия пер-ых. Так, р-я данную систему отс-но $y$ и $z$, находим:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{7}{5}x - \frac{14}{5}; \\ z &= \frac{11}{5}x - \frac{17}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{y + \frac{14}{5}}{\frac{7}{5}}; \\ x &= \frac{z + \frac{17}{5}}{\frac{11}{5}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y + \frac{14}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{z + \frac{17}{5}}{\frac{11}{5}}.$$

**3°. Угол между прямыми**. Пусть даны пм.:

$$L_1\colon \frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1} \text{ и } L_2\colon \frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y - b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2}. \tag{6}$$

За угол $\varphi$ между пм-и (6) можно взять угол между их нпвщ-ми вк-ми $S_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $S_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Тогда по (5): 2.2 получим

$$\cos\varphi = \frac{s_1 s_2}{|s_1||s_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{7}$$

Если $L_1 \perp L_2$, т.е. $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, то из (7) получим (усл. прп-ти пм-х)

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{8}$$

Если $L_1 \parallel L_2$ ($\varphi = 0$), т.е. вк-ы $s_1$ и $s_2$ коллинеарны, то получим усл. прл-ти пм-х

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{9}$$

**п3**. Найти угол между пм-и $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ и $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$.

Р. $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**4°. Угол между прямой и плоскостью**. Пусть требуется найти угол $\varphi$ (рис. 3) между пм. $L$: $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$ и пл. $Q$: $Ax + By + Cz + D = 0$. Здесь $s = (m, n, p)$ и $n(A, B, C)$. Учитывая, что $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi \geq 0$, по (7) получим

$$\sin\varphi = \frac{ns}{|n||s|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{10}$$

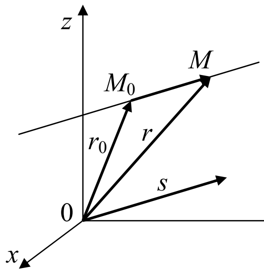



Рис. 1

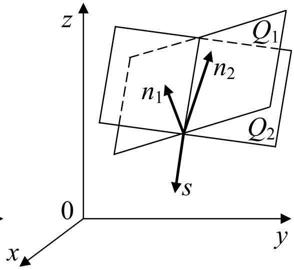



Рис. 2

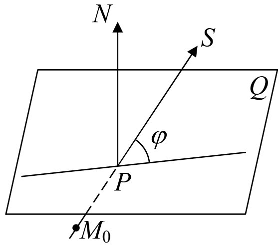



Рис. 3

Если $L \perp Q$, т.е. вк-ы $s$ и $n$ коллинеарны, то получим условие прп-ти пм-й и пл-ти:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{10а}$$

Если $L \parallel Q$ ($\varphi = 0$, см. рис. 2), то получим усл-е прл-ти пм-й и пл-ти:

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{10б}$$

**п4**. Найти угол $\varphi$ между пм-й, проходящей через тч-и $A(5, 1, -4)$ и $B(6, 1, -3)$ и пл-ю $2x - 2y + z - 3 = 0$.

Р. Находим $s = AB = (1, 0, 1)$, а $n = (2, -2, 1)$. Тогда по фм-е (10) $\sin\varphi =$ $= \dfrac{|2\cdot 1+(-2)\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = \arcsin\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

**5°. Пересечение прямой с плоскостью**. Найдем тч-у перч-я пм-й и пл-ти

$$L:\ \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{11}$$

$$Q:\ Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12}$$

Для этого нх-мо совместно р-ть ур-ия (11) и (12). Из $\dfrac{x-a}{m} = \dfrac{y-b}{n} =$ $= \dfrac{z-c}{p} = t$ находим

$$\left.\begin{array}{l} x = a + mt; \\ y = b + nt; \\ z = c + pt. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Подставив стн. (13) в (12), получим $A(a + mt) + B(b + nt) + C(c + pt) = 0 \Rightarrow$ $Aa + Bb + Cc + D + t(Am + Bn + Cp) = 0$. Отсюда получим

$$t = \frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}\,. \qquad (14)$$

Подставив стн. (14) в (13), найдем тч-у перч-я пм-й и пл-ти.

Здесь возможны сд. случаи:

1. Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то пм-я перк-ет пл-ть в едн-й тч.

2. Если $Am + Bn + Cp = 0$, а $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$, т.е. тч. $M_0(a, b, c)$ не лежит на пл-ти, то пм-я прл-на пл-ти и не имеет общих тч-к с пл-ю.

3. Если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Aa + Bb + Cc + D = 0$, т.е. $M_0(a, b, c) \in Q$, то пм-я лежит на пл-ти и они имеют беск. мн-во тч-к перч-я.

**п5**. Найти тч-у перч-я пм-й $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и пл. $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Р. Из $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} = t$ находим: $x = 12 + 4t$, $y = 9 + 3t$, $z = 1 + t$, подставляя их в ур. пл-ти, получим $3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Rightarrow$ $78 + 26t = 0 \Rightarrow t = -3$. Отсюда получим крд-ы тч-и перч-ия пм-й и пл-ти: $x = 12 + 4(-3) = 0$, $y = 9 + 3(-3) = 0$, $z = 1 - 3 = -2$.

**6°. Взаимное расположение двух прямых**. Пусть даны две пм.

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1},\ \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}\,. \qquad (15)$$

Эти пм. заданы своими тч-и $M_1(a_1, b_1, c_1)$ и $M_2(a_2, b_2, c_2)$ и нпвщ. вк-ми $S_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $S_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Угол между пм. по (7) опр-ли по фм-е:

$$\cos\varphi = \frac{S_1S_2}{|S_1||S_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}\,. \qquad (16)$$

Из (15) получим усл. прп-ти пм-х

$$S_1S_2 = 0 \text{ или } m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \qquad (17)$$

и усл. прл-ти пм-х

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}\,. \qquad (18)$$

Рас-им теперь случаи (рис. 4) взаимного расположения пм-х.

1) пм. сливаются:

$$M_1M_2 \parallel S_1, \text{ т.е. } \frac{a_2-a_1}{m_1} = \frac{b_2-b_1}{n_1} = \frac{c_2-c_1}{p_1}\,;$$

2) пм. прл-ны:

$$M_1M_2 \nparallel S_1, \text{ но } S_1 \parallel S_2, \text{ т.е. } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}\,.$$

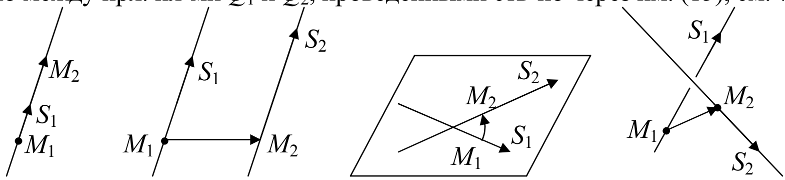
3) пм. пересекаются: $S_1 \nparallel S_2$, но $M_1$, $M_2$, $S_1$, $S_2$ компланарны, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

4) пм. скрещиваются:

$M_1$, $M_2$, $S_1$, $S_2$ некомпланарны, т.е. $D \neq 0$.

Отметим, что усл. (19) выполняются и в случаях 1) и 2), т.е. две пм. лежат в одной пл-ти, в случаях 1) и 3) кратчайшее рст. между пм-и (15) равно нулю. Если пм. (15) прл-ны, рст-ие между ними можно найти как рст-ие от тч-и до пм-й (см. 7°). Если пм. (15) скрещиваются, то рст-ие между ними будет равно рст-ю между прл. пл-ми $Q_1$ и $Q_2$, проведенными ств-но через пм. (15), см. 7°.




1) 2) 3) 4)

Рис. 4

**п6**. Составить ур-ие пм-й, проходящей через тч-у $A(1, 1, 1)$ и пересекающей (перкщ.) две данные пм. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ и $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$.

Р. Напишем ур-ие пм-й, проходящей через тч. $A(1, 1, 1)$: $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-1}{n} = \dfrac{z-1}{p}$. Используем по (19) усл-я принадлежности этой пм-й с др. пм-и одной пл-ти.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{r} + \begin{array}{l} m - 2n + p = 0; \\ m + 2n - p = 0 \end{array} \\ \hline m = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2n - p = 0; \\ 2n = p \end{array} \Big| \; \frac{n}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} n = 1; \\ p = 2. \end{array}$$

Тогда искомая пм.: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

**п7**. Составить ур-ие пм-й, проходящей через тч. $A(1, 1, 1)$, перкщ-й пм-ю $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ и прп-ой к пм-й $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$.

Р. $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-1}{n} = \dfrac{z-1}{p}$ – пм. проходит через тч. $A$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$ или $m - 2n + p = 0$ – усл. перч-ия; $2m + n + 4p = 0$ – усл. прп-ти. Из них

$$\begin{cases} m - 2n + p = 0; \\ 2m + n + 4p = 0 \end{cases} \Bigg| \; + \; \begin{array}{l} m - 2n + p = 0; \\ \underline{4m + 2n + 8p = 0.} \\ 5m \qquad + 9p = 0 \end{array}$$

Отсюда $\dfrac{m}{p} = \dfrac{9}{-5} \Rightarrow m = 9, p = -5$. Тогда $2 \cdot 9 + n + 4(-5) = 0 \Rightarrow n = 20 - 18 = 2$. Отсюда искомая пм.: $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-5}$.

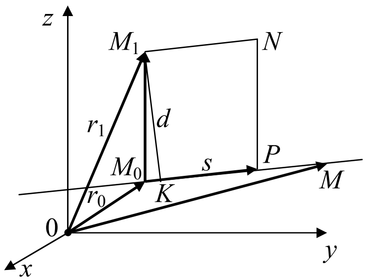


Рис. 5

**7°. Расстояние от точки до прямой и между двумя прямыми**. Для опр-ия рст-ия от тч. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до пм-й в пр-ве, заданной ур-ем в вкн-й форме $r = r_0 + ts$, проведем из тч-и $M_1$ прп. $M_1K$ на данную пм-ю (рис. 5) и нпвщ-й вк. $S(m, n, p)$ расположим так, чтобы его нач. совпало с тч-й $M_0(x_0, y_0, z_0)$. На вк-ах $M_0M_1$ и $S$ построим прлг-м $M_0M_1NP$. Тогда на основе вк-го пзв-ия (см. 2°: 2.2) пщ-дь его можно опр-ть так: $S_{M_0MNP} = d|S| = |M_0M_1 \times S|$. Отсюда получим рст-ие от тч-и до пм-й.

$$d = \frac{|(r_1 - r_0) \times S|}{|S|}. \tag{20}$$

Стн. (20) можно писать и в крд. форме. Для этого находим $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = [p(y_1 - y_0) - n(x_1 - x_0)]\boldsymbol{i} + [m(z_1 - z_0) - p(x_1 - x_0)]\boldsymbol{j} + [n(x_1 - x_0) - m(y_1 - y_0)]\boldsymbol{k}$. Тогда по (20) получим

$$d = \frac{\sqrt{[p(y_1 - y_0) - n(x_1 - x_0)]^2 + [m(z_1 - z_0) - p(x_1 - x_0)]^2 + [n(x_1 - x_0) - m(y_1 - y_0)]^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{21}$$

**зм1**. Рст-ие от тч-и до пм-й можно найти и др. способом: составим ур-ие пл-ти, проходящей через заданную тч. прп-но заданной пм-й, затем найдем тч-у перч-я пм-й с пл-ю. Выч-им рст-ие между двумя тч-и.

Теперь найдем рст-ие между двумя скрещивающимися пм-и (15). Для этого находим вк. $n = S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, к-ый яв-ся общим норм. вк-ом пл-ей $Q_1$ и $Q_2$, проходящих через тч-и $M_1(a_1, b_1, c_1)$, $M_2(a_2, b_2, c_2)$ ств-но, т.е. через пм. (15). Сдт-но, рст-ие между пм-и (15) равно модулю пркц-и вк-а $M_1M_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ на норм-ый вк. $n$, т.е.

$$d = |\text{пр}_n M_1M_2| = \frac{|(M_1M_2, n)|}{|n|} = \frac{|M_1M_2 \cdot S_1 \cdot S_2|}{|[S_1, S_2]|}. \tag{22}$$

где $M_1M_2 \cdot S_1 \cdot S_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, $[S_1, S_2] = S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$.

Т.о., для выч-ия рст-ия между скрещивающимися пм., заданными канч. ур-ми, нх-мо разделить объем прлп-да, построенного на вк-ах $M_1M_2$, $S_1$ и $S_2$, на пщ-дь его основания.

**зм2**. Рст-ие между скрещивающимися пм. можно найти еще так: через тч. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ находим пл-ти с норм. вк-ом $n = S_1 \times S_2 = (m, n, p) = (A, B, C)$ и найдем рст-ие между двумя прл. пл-ми, как в п9 из 7°: 4.1.

**п8**. Найти рст-ие от тч. $M_1(9, 6, 5)$ до пм. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{1}$.

Р. Используя $M_0(3, 2, 4)$ и $S = (2, 2, 1)$, по фм-е (21) находим

$$d = \frac{\sqrt{[1(6-2)-2(5-4)]^2 + [2(5-4)-1(9-3)]^2 + [2(9-3)-2(6-2)]^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Задачу р-м др. способом (см. зм1): ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_1(9, 6, 5)$, имеет вид $A(x-9) + B(y-6) + C(z-5) = 0$, эта пл-ть прп-на заданной пм-й, поэтому $\dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{1}$, тогда ур-е пл-ти принимает вид $2(x-9) + 2(y-6) + 1(z-5) = 0$ или $2x + 2y + z - 35 = 0$. Канч. ур-ие пм-й запишем в пармч-ом виде: $\left.\begin{aligned} x &= 3+2t, \\ y &= 2+2t, \\ z &= 4+t. \end{aligned}\right\}$ Подставив эти ур-я в ур-е пл-ти, находим $2(3+2t) + 2(2+2t) + 1(4+t) - 35 = 0 \Rightarrow -21 + 9t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{7}{3} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 + 2\cdot\frac{7}{3} = \frac{23}{3}, \\ y &= 2 + 2\cdot\frac{7}{3} = \frac{20}{3}, \\ z &= 4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}. \end{aligned}\right\}$

Найдем рст-ие между тч-ми $M_1(9, 6, 5)$ и $M_2\left(\dfrac{23}{3}, \dfrac{20}{3}, \dfrac{19}{3}\right)$.

$$M_1M_2 = \sqrt{\left(9-\frac{23}{3}\right)^2 + \left(6-\frac{20}{3}\right)^2 + \left(5-\frac{19}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2.$$

**п9**. Д-ть, что пм. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-7}{4}$, $\dfrac{x-9}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$ скрещиваются, и найти кратчайшее рст-ие между ними.

Р. Тч. $M_1(1, -4, 7)$ лежит на первой пм., а тч. $M_2(9, -3, 4)$ – на второй.

Найдем смешанные пзв. вк-ов $M_1M_2(8, 1, -3)$, $S_1(5, -3, 4)$ и $S_2(2, -1, 2)$:

$$M_1M_2 \cdot S_1 \cdot S_2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -21 \neq 0, \text{ значит, пм.}$$

скрещиваются.

Найденм вкн. пзв-ие $S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \Rightarrow |S_1 \times S_2| =$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$

Тогда по фм-е (22) получим искомое рст. $d = \dfrac{21}{3} = 7.$

**п10**. Показать, что пм. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$, $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-6}{1}$ перк-ся, и найти тч-у их перч-ия.

Р. Нпвщ. вк-ы $S_1(2, 3, 2)$, $S_2(3, 2, 1)$ пм-х и их тч-и $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(7, 4, 6)$ ств-но. Найдем вк. $M_1M_2(5, 5, 3)$. Тогда вкн.-скн. пзв-ие вк-ов $M_1M_2 \cdot S_1 \cdot S_2 =$

$= \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 5(-4) + 3(-5) = 0$, значит, эти вк-ы компланарны. Кроме того, вк-ы $S_1$ и $S_2$ неколлинеарны (их крд-ы непрц-ны), тогда пм. перк-ся.

Пармч. ур-ия для второй пм-й имеет вид $\left.\begin{aligned} x &= 7 + 3t, \\ y &= 4 + 2t, \\ z &= 6 + t. \end{aligned}\right\}$ Подставив эти ур-ия в ур-ие первой пм-й, получим $\dfrac{5+3t}{2} = \dfrac{5+2t}{3} = \dfrac{3+t}{2}$, откуда $t = -1$.

Тогда $\left.\begin{aligned} x &= 7 + 3(-1) = 4, \\ y &= 4 + 2(-1) = 2, \\ z &= 6 - 1 = 5 \end{aligned}\right\}$, т.е. (4, 2, 5) – тч. перч-ия пм-х.

## 4.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 4.1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЕ

**Вопросы для самопроверки**

1. Как врж-ся норм. ур-ия пл-ти в вкн-й и крд-ой формах?
2. Приведите общее ур-ие пл-ти и ее иссл-ие.
3. Как получить ур-ие пл-ти в отрезках?
4. Как врж-ся ур-ие пл-ти, проходящей через данную тч.?
5. Как можно получить ур. пл-ти, проходящей через три данные тч.?
6. Как опр-ся угол между двумя пл-ми?
7. Как найти тч-у перч-ия трех пл-ей и какие случаи при этом возможны?
8. Как пор-ся рст-ие от тч-и до пл-ти?

## 4.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

**Вопросы для самопроверки**

1. Как врж-ся вкн-ое, пармч-ое и канч-ое ур-ия пм-й?
2. Как перейти от общего ур-ия пм-й к канч. виду?
3. Как опр-ся угол между пм-ми и усл-я прп-ти и прл-ти пм-ых?
4. По какой фм-е опр-ся угол между пм-й и пл-ти, а также их взаимное расположение?
5. Приведите фм-ы перч-ия пм-й с пл-ю и возможное их расположение?
6. По каким фм. можно опр-ть взаимное расположение двух пм-х?
7. Как опр-ся рст-ие от тч-и до пм-й и между двумя пм-ми?

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Написать ур-ие пл-ти, проходящей через ось $Oz$ и тч-у $M(1, 2, -1)$.

Р. Если пл-ть проходит через ось $Oz$, то $C = D = 0$, тогда ур-ие имеет вид $Ax + By = 0$. Тч. $M$ лежит на этой пл-ти, т.е. крд-ы ее уд-ют ур-ю пл-ти $A \cdot 1 + B(-2) = 0$. Отсюда $A = 2B$. Подставляя зн-ие $A$ в ур-ие пл-ти и сокращая на $B$, получим искомое ур-ие $2x + y = 0$.

**тз1***. Написать ур-ие пл-ти, проходящей через ось $Oy$ и тч-у $M(2, -1, 1)$.

**тз2**. Сост-ть ур-ие пл-ти, проходящей через тч-у $M(2, 3, -4)$ и прл-ой пл-ти $yOz$.

Р. Ур-ие пл-ти, прл-ой $yOz$, имеет вид $Ax + D = 0$, подставляя в него крд-ы тч-и $M$, получим $A \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2A$. Сдт-но, искомое ур-ие $Ax - 2A = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$.

**тз2***. Сост-ть ур-ие пл-ти, проходящей через тч-у $M(1, 2, -3)$ и прл-ой пл-ти $xOy$.

**тз3**. Сост-ть ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_0(2, 5, 4)$ и отскщ-й отрезки на осях ординат $b = -6$ и аппликат $c = 3$.

Р. Воспользуемся ур-ем пл-ти в отрезках $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{-b} + \dfrac{z}{3} = 1$. Подставляя крд-ы тч. $M$ в ур-ие, получим $\dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{-b} + \dfrac{4}{3} = 1 \Rightarrow a = 4$. Тогда искомое ур. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-6} + \dfrac{z}{3} = 1$.

**тз3***. Р-ть тз3 при $a = -3$, $c = 2$ и $M_0(3, 8, -4)$. О: $2x - 3y - 3z + 6 = 0$.

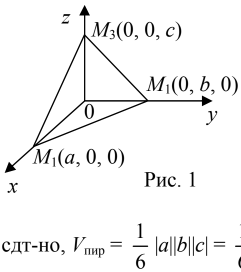


Рис. 1

**тз4**. Выч-ть объем пирамиды, огрн-ой пл-ю $x + 2y - 3z + 2 = 0$ и крд. пл-ми (рис. 1).

Р. Из ур-ия $x + 2y - 3z + 2 = 0$ находим тч. перч-ия с осями: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = a = -2$, $2y + 2 = 0 \Rightarrow y = b = -1$, $-3z + 2 = 0 \Rightarrow z = c = 2/3$. Объем пирамиды равен $\dfrac{1}{3}Sh$, где $S$ – пщ. основания $\Delta OM_1M_2$, $h = |OM_3|$ – высота пирамиды (рис. 1). Если $a$, $b$, $c$ даны, то $S = \dfrac{1}{2}|a||b|$, сдт-но, $V_{пир} = \dfrac{1}{6}|a||b||c| = \dfrac{1}{6}|abc|$. Для нашего случая $V_{пир} = \dfrac{1}{6}|(-2)(-1)2/3| = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{9}$.

**тз4***. Р-ть тз4 для пл-ти $2x - y + 3z + 6 = 0$.

**тз5**. Найти ур-ие пл-ти, отскщ-й на осях крд-т равные отрезки и образующей с крд. пл-ми пирамиды, объем к-ой равен 4/3. О: $x + y + z = \pm 2$.

**тз6**. Пл-ть проходит через ось $Oz$ и составляет с пл-ю $2x + y - \sqrt{5}\,z = 0$ угол $\pi/3$. Найти ее ур-ие.

Р. Пл. $Ax + By = 0$ проходит через ось $Oz$. Разделив на $B$ и обз-ив $m = A/B$, получим $mx + y = 0$ с нрм-ю $N_1(m, 1, 0)$, к-ый сост-ет угол $\varphi = \pi/3$ с нрм-ю $N_2\left(2, 1, -\sqrt{5}\right)$ пл-ти $2x + y - \sqrt{5}\,z = 0$. Тогда $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{N_1N_2}{|N_1||N_2|}$, т.е. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{4+1+5}}$. Отсюда опр-ем $m$: $\sqrt{10\left(m^2+1\right)} = 4m + 2$

$\Rightarrow 10m^2 + 10 = 16m^2 + 16m + 4 \Rightarrow 6m^2 + 16m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + \dfrac{8}{3}m - 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = -\dfrac{4}{3} \pm \sqrt{\dfrac{16}{9}+1} =$

$= -\dfrac{4}{3} \pm \dfrac{5}{3} \Rightarrow m_1 = \dfrac{1}{3}$, $m_2 = -3$. Т.о., усл-ю уд-ют две пл-ти: $\dfrac{1}{3}x + y = 0$ и $-3x + y = 0$.

**тз6***. Найти ур-ие пл-ти, проходящей через ось $Ox$ и сост-щей с пл-ю $y = x$ угол $\varphi = \pi/3$.

**тз7**. Установить, что пл-ти $x - y - z - 10 = 0$, $4x + 11z + 43 = 0$ и $7x - 5y - 31 = 0$ имеют едн. общую тч. Найти ее.

Р. Выч-им смешанное пзв. вк-ов $N_1(1, -1, -1)$, $N_2(4, 0, 11)$, $N_3(7, -5, 0)$: $N_1N_2N_3 = \Delta =$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -22 + 20 = -2 \neq 0$, значит, данные пл-ти перк-ся только в одной

тч-е. Р-е находим по правилу Крамера. $\begin{cases} x - y - z = 10, \\ 4x + 11z = -43, \\ 7x - 5y = 31. \end{cases}$ Находим $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 10$.

Тогда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-2} = 3$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{4}{-2} = -2$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{10}{-2} = -5$.

Итак, данные пл-ти имеют общую тч. $M(3, -2, -5)$.

**тз7***. Р-ть тз7 для пл-ей: $5x + 3y + 10z + 20 = 0$, $4x - 5y + 11z + 20 = 0$, $6x + 11y + 30z = 0$. О: $M(-10, 0, 2)$.

**тз8**. Сост-ть ур-ие пл-ти, прл-ой оси $Ox$ и проходящей через тч-и $P(4, 0, -2)$ и $Q(5, 1, 7)$.

Р. Искомое ур. пл-ти имеет вид $By + Cz = 0$, ее нрм. $n(0, B, C)$ прп-на вк-у $PQ(1, 1, 9)$, т.к. пл-ть проходит через тч-и $P$ и $Q$. Тогда их скн. пзв-ие $n \cdot PQ = B + 9C = 0 \Rightarrow B = -9C \Rightarrow \dfrac{B}{C} = \dfrac{9}{-1}$

$\Rightarrow B = 9$, $C = -1$. Итак, $n(0, 9, -1)$ и пл-ть проходит через тч. $P$, отсюда получим искомое ур. пл-ти $9(y - 0) - 1(z + 2) = 0$ или $9y - z - 2 = 0$.

**пз8***. Сост-ть ур-ие пл-ти, прл-ой оси $Oy$ и проходящей через тч-и $P(3, 2, -1)$, $Q(4, -3, 5)$. О: $6x - z - 19 = 0$.

**тз9**. Сост-ть канч-ие и пармч. ур-ия пм-й, проходящей через тч-у $M_0(2, -3, 5)$ и образующей с осями крд-т углы $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$.

Р. В кач-е нпвщ-го вк-а $S$ возьмем едн. вк-р: $S = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}$.

Тогда канч-ое ур-ие имеет вид $\dfrac{x-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{y+3}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z-5}{\frac{1}{2}}$ или $\dfrac{x-2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-5}{1} = t$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 + \sqrt{2}t, \\ y &= -3 + t, \\ z &= 5 + t \end{aligned}\right\}$ – пармч-ие ур-ия пм-й.

**тз9***. Написать канч. и пармч. ур-ия пм-й, проходящей через тч. $M_0(-1, 0, 5)$ и образующей с осями крд-т углы $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = 2\pi/3$. О: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \dfrac{z-5}{-1}$; $x = -1 + t$, $y = \sqrt{2}\,t$, $z = 5 - t$.

**тз10**. Найти канч-ие ур-ия пм-й $\left.\begin{array}{l} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{array}\right\}$ ①.

Р. Полагая $z = 0$, из ① находим $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3 = 0, \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -4$, $y = 0$, т.е. $M_0(-4, 5, 0)$. По $n_1(2, 1, -5)$ и $n_2(3, 2, -4)$ найдем $S = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$, $= 6\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Отсюда канч. ур-ие пм-й имеет вид $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z}{1}$.

Есть и др. способ р-я: из ①, иск-в $y$ и $x$, получим $\left.\begin{array}{l} x = 6z - 4, \\ y = -7z + 5 \end{array}\right\}$ ②. Систему ② запишем в виде $\left.\begin{array}{l} z = (x+4)/6, \\ z = (y-5)/(-7) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-5}{-7} = \dfrac{z}{1}$.

**тз10***. Привести к канч. виду ур-ия пм-й $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{array}\right\}$, полагая $z = 0$. О: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{4}$.

**тз11**. Построить пм-ю $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 3z - 7 = 0, \\ x + 2y + 2z - 4 = 0. \end{array}\right\}$ ①.

Р. Т.к. пж-ие пм-й опр-ся двумя тч., принадлежащими ей, то мы найдем следы пм-й (т.е. тч-и перч-ия пм-й с крд. пл-ми, н-р, $xOy$ и $xOz$), а затем через две полученные тч. проведем искомую пм-ю (рис. 2).

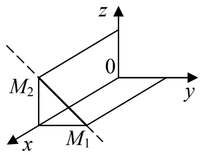


Рис. 2

Найдем: при $z = 0$ $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 7 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow M_1(2, 1, 0)$;

при $y = 0$ $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z - 7 = 0, \\ x + 2z - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2, \\ z = 1 \end{array} \Rightarrow M_2(2, 0, 1)$.

$M_1$ – тч. перч-ия с крд-ой пл-ю $xOy$, а $M_2$ – тч. перч-ия с крд-ой пл-ю $xOz$. Через тч-и $M_1$ и $M_2$ проводим искомую пм-ю (рис. 2).

**тз11***. Р-ть тз11, найдя тч. перч-ия с крд. пл-ми $xOy$, $yOz$.

**тз12**. Составить ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_0(1, -2, 4)$ прп-но пл-ям $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ и $3x + 4y - 3z - 5 = 0$.

Р. Искомая пл-ть проходит через тч. $M_0$, тогда $A(x - 1) + B(y + 2) + C(z - 4) = 0$ ①. Ее норм-ый вк. $n(A, B, C)$ прп-ен норм. вк-ам $n_1(2, 3, -5)$ и $n_2(3, 4, -3)$ данных пл-ей, тогда $n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $= 11\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Сдт-но, ур-ие искомой пл-ти $11(x - 1) - 9(y + 2) - (z - 4) = 0$ или $11x - 9y - z - 25 = 0$.

Р-им эту задачу др. способом. Используя усл-ие прп-ти искомой пл-ти данным пл-ям, сост-м сд. систему: $\left.\begin{array}{l} 2A + 3B - 5C = 0, \\ 3A + 4B - 3C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{A}{C} = -11$, $\dfrac{B}{C} = 9$. Полагая $C = -1$, получим $A = 11$, $B = -9$. Подставляя их в ①, имеем $11x - 9y - z - 25 = 0$.

**тз12***. Написать ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_0(0, -1, 3)$ прп-но пл-ям $x + y - 2z + 5 = 0$ и $2x - y + 3z - 1 = 0$. О: $x - 7y - 3z + 2 = 0$.

**тз13**. Сост-ть канч-ие ур-ия пм-й, лежащей в пл-ти $xOy$ и проходящей через тч. $M_0(2, 3, 0)$

прп-но пм-й $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-1}$.

Р. Пусть $S(m, n, p)$ – нпвщ-й вк. искомой пм. Пм-я лежит в пл-ти $xOy$, поэтому $p = 0$. В силу прп-ти вк-ов $S(m, n, 0)$ и $S_1(5, 2, -1)$ получим $5m + 2n = 0$. Т.к. нпвщ-й вк. опр-ся с точностью до мнж-ля, одну из его крд-т можно выбрать произвольно. Н-р, положив $n = -5$, получим $m = 2$, сдт-но, $S(2, -5, 0)$. Тогда искомая пм. имеет вид $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{0}$.

**тз13***. Сост-ть ур-ие пл-ти, проходящей через тч. $M_0(2, 0, 3)$ прп-но пм-й $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-2}$ и расположенной в пл-ти $xOz$.

**тз14**. Найти пркц-ю $B$ тч. $A(3, -2, 4)$ на пл-ть $Q$: $2x + y + 3z + 12 = 0$.

Р. Тч. $B$ есть тч. перч-ия пл-ти $Q$ с прп-ом, проведенным через тч-у $A$ к этой пл-ти. Поэтому на основании прп-ти пм-й и пл-ти сост-м канч-ие ур-ия прп-ра (пм-й $AB$): $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3} = t$. Находим пармч-ие ур-ия этой пм-й. $x = 3 + 2t$, $y = -2 + t$, $z = 4 + 3t$, подставив их в ур-ие пл-ти, получим $2(3 + 2t) + (-2 + t) + 3(4 + 3t) + 12 = 0$, откуда получим $t = -2$. Тогда $x_B = 3 + 2(-2) = -1$, $y_B = -2 - 2 = -4$, $z_B = 4 + 3(-2) = -2$, т.е. $B(-1, -4, -2)$.

**тз14***. Найти пркц-ю $B$ чт. $A(6, 1, 7)$ на пл-ть $Q$: $2x - y + 3z - 4 = 0$. О: $B(2, 3, 1)$.

**тз15**. Найти пркц-ю $B$ тч. $A(3, 2, 0)$ на пм-ю $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-2}$. О: $B(5, 2, 3)$.

**тз16**. Найти рст-ие между пл-ми: $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ и $2x - 11y + 10z + 45 = 0$. О: $d = 4$.

**тз17**. Показать, что пм. $\left.\begin{array}{l} x = 7z - 17, \\ y = 3z - 1 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x = 4z - 11, \\ y = -10z + 25 \end{array}\right\}$ перк-ся, и найти тч-у их перч-ия. О: $(-3, 5, 2)$.

**тз18**. Найти рст-ие от тч. $A(-3, 1, 2)$ до пм-й $\frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-12}{2}$. О: $d = 2$.

**тз19**. Найти рст-ие между пм-ми $\left.\begin{array}{l} x = -z + 1, \\ y = 2z \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x + z - 1 = 0, \\ y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\}$. О: $d = 0$ (пм. перк-ся).

**тз20**. Д-ть, что пм. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{6}$, $\frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{2}$ скрещиваются, и найти кратчайшее рст-ие между ними. О: $d = 4$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п9 из 4.1, п1-п10 из 4.2 и тз1-тз20 р-ть з1-з30.

В задачах 1-20 даны крд-ы верш. пирамиды $ABCD$. Требуется найти: 1) вк-ы $AB$, $AC$, $AD$ в системе орт $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и модули этих вк-ов; 2) угол между вк-ми $AB$, $AC$; 3) пркц-ю вк-а $AD$ на вк-р $AB$; 4) пщ-дь грани $ABC$; 5) объем пирамиды $ABCD$; ур-ие ребра $AC$; 7) ур-ие грани $ABC$. Построить пирамиду $ABCD$ и объяснить р-ие задачи на графике.

1. $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 5, 1)$, $C(-1, 2, 7)$, $D(1, 5, 9)$.
2. $A(2, 3, 2)$, $B(0, 6, 2)$, $C(0, 3, 8)$, $D(2, 6, 10)$.
3. $A(0, 3, 2)$, $B(-2, 6, 2)$, $C(-2, 3, 8)$, $D(0, 6, 10)$.
4. $A(2, 1, 2)$, $B(0, 4, 2)$, $C(0, 1, 8)$, $D(2, 4, 10)$.
5. $A(2, 3, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 3, 6)$, $D(2, 6, 8)$.
6. $A(2, 2, 1)$, $B(0, 5, 1)$, $C(0, 2, 7)$, $D(2, 5, 9)$.
7. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(-1, 3, 7)$, $D(1, 6, 9)$.
8. $A(1, 2, 2)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(-1, 2, 8)$, $D(1, 5, 10)$.
9. $A(2, 3, 1)$, $B(0, 6, 1)$, $C(0, 3, 7)$, $D(2, 6, 9)$.
10. $A(2, 2, 2)$, $B(0, 5, 2)$, $C(0, 2, 8)$, $D(2, 5, 10)$.
11. $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 6, 2)$, $C(-1, 3, 8)$, $D(1, 6, 10)$.

12. $A(0, 1, 2)$, $B(-2, 4, 2)$, $C(-2, 1, 8)$, $D(0, 4, 10)$.
13. $A(0, 3, 0)$, $B(-2, 6, 0)$, $C(-2, 3, 6)$, $D(0, 6, 8)$.
14. $A(2, 1, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 1, 6)$, $D(2, 4, 8)$.
15. $A(0, 2, 1)$, $B(-2, 5, 1)$, $C(-2, 2, 7)$, $D(0, 6, 9)$.
16. $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 4, 1)$, $C(-1, 1, 7)$, $D(1, 4, 9)$.
17. $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 5, 0)$, $C(-1, 2, 6)$, $D(1, 5, 8)$.
18. $A(0, 1, 0)$, $B(-2, 4, 0)$, $C(-2, 1, 6)$, $D(0, 4, 8)$.
19. $A(0, 1, 1)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(-2, 1, 7)$, $D(0, 4, 9)$.
20. $A(0, 2, 0)$, $B(-2, 5, 0)$, $C(-2, 2, 6)$, $D(0, 5, 8)$.
21. $A(1, 2, 1)$, $B(0, 6, 2)$, $C(-2, 3, 8)$, $D(2, 4, 10)$.
22. $A(2, 3, 2)$, $B(-2, 6, 2)$, $C(0, 1, 8)$, $D(2, 6, 8)$.
23. $A(0, 3, 2)$, $B(0, 4, 2)$, $C(0, 3, 6)$, $D(2, 5, 9)$.
24. $A(2, 1, 2)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 2, 7)$, $D(1, 6, 9)$.
25. $A(2, 3, 0)$, $B(0, 5, 1)$, $C(-1, 3, 7)$, $D(1, 5, 10)$.
26. $A(2, 2, 1)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(-1, 2, 8)$, $D(2, 6, 9)$.
27. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(0, 3, 7)$, $D(2, 5, 10)$.
28. $A(1, 2, 2)$, $B(0, 6, 1)$, $C(0, 2, 8)$, $D(1, 6, 10)$.
29. $A(2, 3, 1)$, $B(0, 5, 2)$, $C(-1, 3, 8)$, $D(0, 4, 10)$.
30. $A(2, 2, 2)$, $B(-1, 6, 2)$, $C(-2, 1, 8)$, $D(0, 6, 8)$.

# 5. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

> Арифметические знаки – это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры – это нарисованные формулы.
>
> Д. Гильберт

## ЛЕКЦИЯ 12

## 5.1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

**1°. Уравнения линии и поверхности. Основные задачи**. Рас-им нек-ую линию $L$ (рис. 1) на пл-ти, к-ой ств-ет ур-ие (или фк-ия, см. 1°: 6.2)

$$y = f(x), \tag{1}$$

связывающее пер-ые $x$, $y$, удовлетворяющее (удщ.) точкам (тч.) (рис. 1), лежащим на этой линии (н-р, $y_1 = f(x_1)$), и не удщ-ее тч-м, не лежащим на этой линии (н-р, $y_2 \neq f(x_2)$).

Поэтому всякую линию можно расв-ть как геометрическое (геомч.) место тч-к (т.е. мн-во тч-к), удщ-е ур-ю этой линии. Н-р, окружность (окр.) можно расв-ть как геомч. место тч-к, равноудаленных ($KM = R$) от тч-и $K(a, b)$, назм-ой центром окр-ти (рис. 2). Тогда из условия (усл.) $KM = R$ получим ур-ие окр-ти:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{2}$$

Если $a = b = 0$ (центр окр-ти совпадает с нач-ом крд-т), то стн. (2) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2а}$$

Анч-но поверхности (пвх.) $\Phi$ в пр-ве ств-ет ур-ие

$$z = f(x, y), \tag{3}$$

связывающее пер-ые $x$, $y$, $z$. И пвх-ти можно расв-ть как геомч. место тч-к, удщ-ее ур-ию этой пвх-ти. Так сфера (сф.) есть геомч. место тч-к, равноудаленных от тч-и $K(a, b, c)$, назм-ой центром сф-ы (рис. 3), т.е. $KM = R$, тогда ур-ие сф-ы имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \tag{4}$$

Если $a = b = c = 0$, т.е. центр в нач. крд-т, то (4) имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{4а}$$

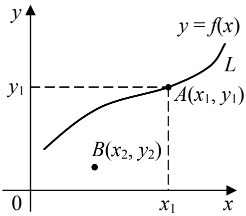



Рис. 1

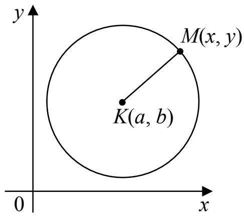



Рис. 2

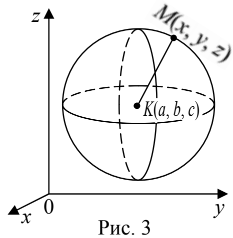



Рис. 3

При изучении линий и их ур-й возникают вопросы: а) всякую ли линию как геомч. место тч-к можно выразить (врз.) ур-ем; б) всегда ли геомч. образом ур-ия яв-ся линия. Ответ на первый вопрос плж-ен, т.е. всякую линию можно врз-ть ур-ем точно или приближенно (прж.). Ответ на второй вопрос в общем случае отц-ен, т.е. не всякому ур-ю ств-ет линия, н-р: 1) ур-ию ств-ет линия $x^2 + y^2 = R^2$; 2) ур-ю ств-ет одна или несколько тч-к: $(x - 1)^2 + + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (1, 1)$; $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow (2, 2), (-2, 2), (2, -2), (-2, -2)$; 3) ур-ию не ств-ет ни одна тч.: $x^2 + y^2 + 8 = 0$.

Все это справедливо и для пвх-ти и ее ур-ия.

В дальнейшем линии изучим при помощи их ур-й. При этом возникают сд. осн. задачи:

1*. На основании геомч-их св-в линии вывести ее ур-ие.

2*. По данному ур-ю иссл-ть все хрк-ые св-ва линии.

3*. Рас-ть особенности ур-й с числовыми коэф. в связи с р-ем задач прикладного хрк-а.

Анч-ые задачи возникают и для пвх-ти и ее ур-ия.

Если в алг-е задача, связанная с ур-ем, считается решенной (р-ной), когда найдены корни, то в аналитической (антч.) геом-и задача считается р-ной, когда составлено ур-ие расв-го геомч. образа и иссл-на его форма.

Ур-ия линий и пвх-ей можно расв-ть как фк-и одной или двух пер-ых, к-ые могут быть заданы (см. 4°: 6.2) таблично, словесно и антч-ки. Укажем несколько видов антч-го задания. Прежде всего, ур-ия (1) и (3), заданные в явном виде, могут быть заданы и в неявном:

$$F(x, y) = 0 \tag{5}$$

и

$$F(x, y, z) = 0, \tag{6}$$

н-р, $yx - x^2 + 2 = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Нб-ая степень (сп.) пер-ых (если есть пзв-ие пер-ых, то сп-ни их складываются) ур-й (1)-(6) наз. **порядком** ур-ия. Так $x + y - 1 = 0$ – ур. первого порядка, $x^2 + xy^2 - y = 8$ – ур. третьего порядка. В этом параграфе мы рас-им ур-ия второй сп-и.

Иногда ур-ие линии на пл-ти задается пармч. ур-ми в виде:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t). \tag{7}$$

Н-р, ур-ия $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ задают окр-ть $x^2 + y^2 = r^2$ (см. 4°: 3.1).

Пармч-ие ур-ия линии в пр-ве задаются в виде

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \gamma(t). \tag{8}$$

Н-р, ур-ия $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at$ задают винтовую линию, лежащую на цилиндре (цлн.) радиуса $r$ и имеющую шаг винта, равный $2\pi a$.

Пармч. ур-ия пвх-ти имеют вид (см. 4°: 3.1)

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \gamma(u, v). \tag{9}$$

Н-р, ур-ия $x = r\cos u\cos v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$ задают сф-у $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ радиуса $r$ с центром в нач. крд. Дсв-но, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2u\cos^2v + r^2\sin^2u\cos^2v + r^2\sin^2v = r^2[(\cos^2u + \sin^2u)\cos^2v + \sin^2v] = r^2(1 \cdot \cos^2v + \sin^2v) = r^2$.

**2°. Эллипс**. Опр-им кривые как геомч. место тч-к.

**о1**. Эллипсом (элс.) наз. геомч. место тч-к, сумма рст-й к-ых до двух данных тч-к, назм-х фокусами, есть пст. вел-а, к-ая яв-ся плж-ой и больше фокусного рст-ия, т.е. $2a > 2c$ (рис. 4).

Из рис. 4 и по о1 получим:

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{10а}$$

Отсюда $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \Rightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Т.к. $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Обз-им $a^2 - c^2 = b^2$. Тогда получим $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Отсюда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Стн. (10) наз. канч. ур-ем элс-а. Иссл-ем ее:

1) Пер-ые $x$, $y$ в ур. (10) входят во второй сп-и, значит, график (грф.) элс-а симметричен (симч.) отс-но нач-а крд-т.

2) Из (10) легко получить тч-и перч-ия грф-а с осями: если $y = 0$, то $x = \pm a$; если $x = 0$, то $y = \pm b$. По этим данным построим грф. элс-а (рис. 4). Тч. $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ наз. верш-ми элс-а. Иногда $A_1$, $B_1$, $F_1$ ств-но с $A_2$, $B_2$, $F_2$ на рис. меняются местами, но это не создает трудностей.

Длины отрезков $a = OA_1$ и $b = OB_1$ наз. ств-но большой и малой полуосями.

Вел-а $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ ($a^2 - c^2 = b^2$) наз. эксцентриситетом элс-а. Эксцентриситет хркз-ет вытянутость элс-а, т.к. врж-ся через отн-ие его полуосей: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} =$

$= \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ .

Окр-ть можно считать частным случаем элс-а при $a = b = R$, $\varepsilon = 0$: $x^2 + y^2 = R^2$.

Ур-ие элс-а с осями сим-и, прл-ми крд. осям, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (10б)$$

где $x_0$, $y_0$ – крд. центра сим-и элс-а.

**п1**. Найти полуоси, крд-ы фокусов и эксцентриситет элс-а $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Р. $16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Отсюда $a = 5$, $b = 4$, тогда $c =$

$= \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{25 - 16} \pm 3$ и $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$, а $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$.

**п2**. Элс. касается оси ординат в нач. крд-т, а центр сим-и находится в тч-е $M_0(5, 0)$. Составить ур-ие элс-а, если его эксцентриситет равен 0,6.

Р. По (10б) имеем (рис. 5): $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-0)^2}{b^2} = 1$. Но $c = \varepsilon a = 0{,}6 \cdot 5 = 3$, тогда

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$. Итак, ур-ие искомого элс-а $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

**п3**. Опр-ть траекторию (трк.) тч. $M$, к-ая при своем движении (двж.) остается втрое ближе к тч. $A(1, 0)$, чем к пм-й $x = 9$.

Р. Из усл. задачи (рис. 6) получим $3AM = MN$ или $3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |9 - x|$

$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 = 81 - 18x + x^2 \Rightarrow 8x^2 + 9y^2 = 72 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

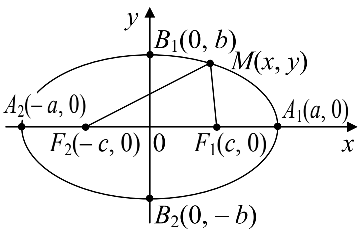


Рис. 4

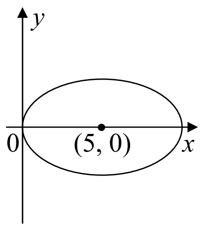


Рис. 5

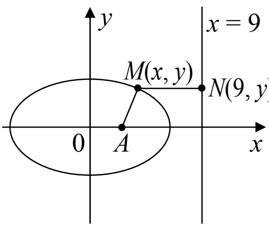


Рис. 6

**3°. Гипербола и ее асимптоты**.

**о2**. Гиперболой (гпрб.) наз. геомч. место тч-к, разность рст-й к-ых до двух данных тч. (рис. 7), назм-ых фокусами, есть вел. пст-я ($a < c$), т.е.

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \qquad (11а)$$

Из (11а) получим $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} =$

$= \pm\, 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx +$ $+ c^2 + y^2 \Rightarrow cx - a^2 = \pm\, a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 +$ $+ a^2y^2 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. Т.к. $a < c$, то, полагая $c^2 - a^2 = b^2$, получим $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Отсюда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Стн. (11) наз. канч. ур-ем гпрб-ы. Иссл-ем ее:

1) из (11) следует, что грф-к гпрб-ы симч-ен отс-но осей крд-т;

2) если $y = 0$, то $x = \pm\, a$; если $x = 0$, то $y^2 = \sqrt{-b^2}$, значит, грф-к с осью $Oy$ не перк-ся;

3) ур. (11) напишем в виде

$$y = \pm\, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \tag{12}$$

откуда при $x \to \pm\, \infty$ получим, что $y \to \pm\, \infty$.

По этим данным построим грф-к гпрб-ы (рис. 7).

Вел. $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ ($c^2 - a^2 = b^2$) наз. эксцентриситетом гпрб-ы.

Теперь рас-им асимптоты гпрб-ы.

**о3**. Асимптотой (асим.) кривой (в част., гпрб-ы) $y = f(x)$ наз. пм. $Y = kx + b$ (рис. 8), к к-ой стремится кривая (крв.) при возрастании (взр.) пер-ой $x$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}(Y - y) = \lim_{x\to\infty}(kx + b - f(x)) = 0. \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx). \tag{14}$$

Разделив (14) на $x$, имеем $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{b}{x}\right)$. Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$, то

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{15}$$

Используя стн-ия (14) и (15), находим асим-ы данной крв-й:

$$Y = kx + b. \tag{16}$$

Так для гпрб-ы по (15), (16) с учетом (12) находим асим-ы $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} =$ $= \pm\, \dfrac{b}{a}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm\, \dfrac{b}{a}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} = \pm\, \dfrac{b}{a}\cdot 1 = \pm\, \dfrac{b}{a}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] =$ $= \pm\, \dfrac{b}{a}\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right] = \pm\, \dfrac{b}{a}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$

Тогда асим-ми гпрб-ы яв-ся пм. $Y = \dfrac{b}{a}x$ и $Y = -\dfrac{b}{a}x$.

Используя асим. гпрб-ы, можно построить ее грф-к по коэф. $a$ и $b$ (рис. 9).

Если $a = b$, то гпрб-а наз. равносторонней и ее ур-е имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{17}$$

Для равносторонней гпрб-ы асим-ми будут пм. $Y = \pm x$.

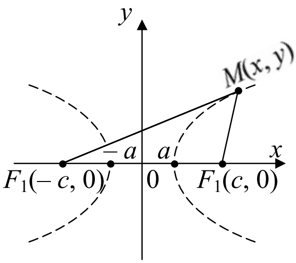



Рис. 7

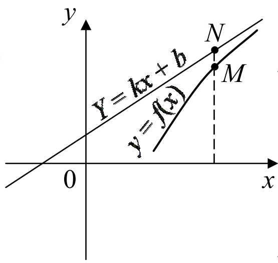



Рис. 8

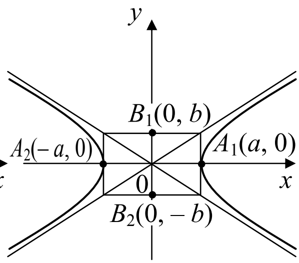



Рис. 9

Оси крд-т яв-ся осями сим-и гпрб-ы, а тч. $O$ – ее центром сим-и. Тч-и $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ наз. дсв. верш-ми (рис. 9), а вел. $a = OA_1$ – дсв. полуосью гпрб-ы. Тч-и $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ наз. мнимыми (мним.) верш-ми, а вел. $b = OB_1$ – мним. полуосью. Пуг-к с центром в нач. крд-т и проходящий через дсв-ую верш. гпрб-ы, наз. основным (осн.) пуг-ом гпрб-ы (рис. 9).

Ур-ие гпрб-ы с осями сим-и, прл-ми крд-ым осям, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

где $x_0$, $y_0$ – крд-ы центра гпрб-ы.

**п4**. Дсв-ая полуось гпрб-ы $a = 4$, эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}25$. Составить канч. ур-ие гпрб-ы и начертить его.

Р. $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 1{,}25 \Rightarrow c = 1{,}25 \cdot a = 1{,}25 \cdot 4 = 5$. Тогда $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$ $\Rightarrow b = 3$. Отсюда получим $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Верш. гпрб-ы: $A_1(4, 0)$, $A_2(-4, 0)$, $B_1(0, 3)$, $B_2(0, -3)$. Через них проводим стороны осн-го пуг-ка. Его диагонали $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ яв-ся асим-ми гпрб-ы, по ним чертим ее грф-к (рис. 10).

**п5**. Дана равносторонняя гпрб. $x^2 - y^2 = 2$. Найти ур-ие элс-а, фокусы к-го находятся в фокусах гпрб-ы, если известно, что элс. проходит через тч. $M_0(2, 3)$.

Р. Из $x^2 - y^2 = 2$ имеем $a^2 = b^2 = 2$, тогда из $b^2 = c^2 - a^2$ получим $c^2 = b^2 + a^2 = 4$. Отсюда $c^2 = c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$. Сдт-но, $\left.\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ a_1^2 - b_1^2 = 4 \end{cases}\right|_{M_0(2,\,3)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a_1^2} + \dfrac{9}{b_1^2} = 1, \\ a_1^2 - b_1^2 = 4 \end{array}\right|$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1^2 = 16, \\ b_1^2 = 12 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1.$

**п6**. Асим-ы гпрб-ы имеют ур. $3x \pm 4y = 0$, а фокусы лежат на оси $Oy$ и рст-ие между ними равно 20. Написать канч. ур-ие гпрб-ы и начертить ее.

Р. Т.к. фокусы $F_1(0, 10)$, $F_2(0, -10)$ лежат на оси $Oy$, то ур. гпрб-ы имеет вид $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$. Из $3x \pm 4y = 0$ получим асим-ы $x = \pm \frac{4}{3}y$, откуда $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Кроме того, $c^2 - b^2 = a^2$ или $c^2 = a^2 + b^2$. Тогда из

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 100, \\ \frac{b}{a} &= \frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 6, \\ b &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = -1 \text{ (рис. 11).}$$

**4°. Парабола**.

**о4**. Параболой (парб.) наз. геомч. место тч-к, равноотстоящих от данной тч-и, назм-ой фокусом, и данной пм-й, назм-ой директрисой парб-ы (рис. 12), т.е.

$$FM = NM. \qquad (19а)$$

Из (19а) находим $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow$

$$y^2 = 2px \ (p > 0). \qquad (19)$$

Стн. (19) наз. канч. ур-ем парб-ы. Иссл-ем ее:

1) пер-я $x > 0$, причем $x \leftrightarrow \pm y$, значит, $Ox$ – ось сим-и;

2) тч. $O$ яв-ся верш-й парб-ы;

3) из (19) видно, что $y \to \pm\infty$ при $x \to \infty$.

По этим данным построим грф-к парб-ы (рис. 12).

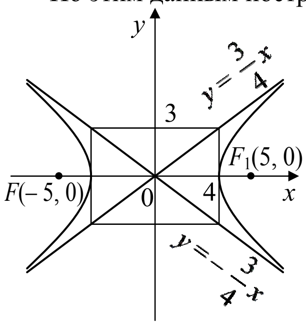


Рис. 10

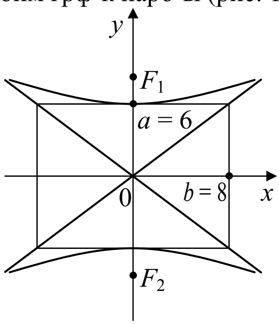


Рис. 11

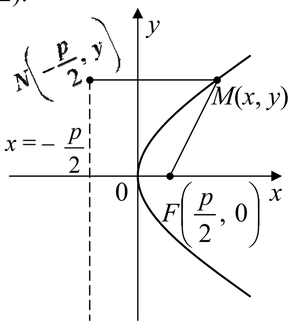


Рис. 12

Здесь $p$ – рст. от фокуса до директрисы. Ур-ие директрисы $x = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Эксцентриситет парб-ы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{p}{2} : \frac{p}{2} = 1$.

Если осью сим-и парб-ы служит ось ординат (рис. 13), то ур-ие парб-ы

$$x^2 = 2py \ (p > 0). \qquad (20)$$

Ур-ие директрисы в этом случае $y = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

**п7**. Сост-ть ур. парб-ы и ее директрисы, если парб. проходит через тч-и перч-я пм-й $x + y = 0$ и окр-ти $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симч-на отс-но оси $Oy$.

Р. Р-ив систему $\left.\begin{aligned} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{aligned}\right\}$, получим $(x_1, y_1) = (0, 0)$ и $(x_2, y_2) =$ $= (2, - 2)$. Тогда из $x^2 = 2py$ имеем $2^2 = 2p(- 2) \Rightarrow p = - 1$. Отсюда $x^2 = - 2y$, $y = -\dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{2}$.

**п8**. Мостовая арка имеет форму парб-ы. Опр-ть параметр (парм.) $P$ этой парб-ы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота 6 м.

Р. Расположим парб-у, как показано на рис. 14. Тогда парб. $x^2 = 2py$ проходит через тч-и $A(- 12, - 6)$ и $B(12, - 6)$, отсюда $144 = 12p \Rightarrow p = 12$, $x^2 = - 24y$.

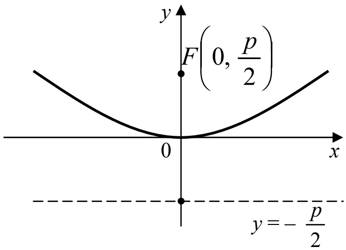


Рис. 13

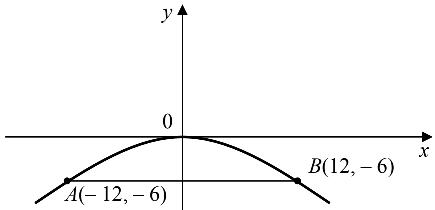


Рис. 14

**5°. Конические сечения**. Кривые (крв.) второго порядка могут быть получены сечением прямого кругового конуса пл-ми, поэтому их наз-ют коническими (конч.) сечениями (рис. 15). Так, если пл. $Q$ перк-ет лишь одну полость конуса и $Q \nparallel a$ (пл. $Q$ не прл-на $a$ – образующей конуса, $Q \not\perp AA'$ (пл. $Q$ не прп-на $AA'$ – оси конуса), то крв-я сечения будет элс-м, в част., при $Q \perp AA'$ – окр-ю.

Если пл. $Q$ перк-ет одну полость конуса и $Q \parallel a$, то крв. есть парб-а.

Если $Q \parallel AA'$, то получим гпрб-у.

Рас-е элс-а, гпрб-ы и парб-ы как конч-их сечений позволяет опр-ть их с единой тч-и зрения на основе понятий эксцентриситета и директрисы этих крв-ых. Рас-им эти крв. по отдельности.

а) По опр-ю элс-а (рис. 16) имеем $\qquad r_1 + r_2 = 2a,$ $\hfill (21)$

где $r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $\Big|$ $r_2^2 - r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 - y^2$, или $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx$.

Отсюда с учетом (21) имеем $\left.\begin{aligned} r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x, \\ r_2 + r_1 = 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r_1 = a - \frac{c}{a}x, \\ r_2 = a + \frac{c}{a}x \end{aligned}\right\}$.

Радиусы $r_1$ и $r_2$ наз. фокальными радиусами элс-а, а $Ox$ – фокальной осью.

Вел. $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ наз. эксцентриситетом элс-а. Причем $0 \le \varepsilon < 1$, т.к. $0 \le c < a$ (для окр-ти $c = 0$, значит, $\varepsilon = 0$).

Т.о., для фокальных радиусов имеем фм-ы

$$\left.\begin{aligned} r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = a + \varepsilon x. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Теперь рас-им пм-ю $x = l$ ($l > a$). Из рис. 16 находим $\begin{aligned} d_1 = l - x \\ r_1 = a - \varepsilon x \end{aligned}\Bigg|$ $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon\dfrac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}$.

Отсюда, если $l = \dfrac{a}{\varepsilon}$, то $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ есть пст. число, а $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$. В силу сим-и то же заключение можно сделать отс-но фокуса $F_2$ и пм-й $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Эти две пм. ($x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, см. рис. 16), прп-ые фокальной оси элс-а и отстоящие на рст-и $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от его центра, наз. директрисами элс-а.

**п9**. Найти эксцентриситет и директрисы элс-а $x^2 + 2y^2 = 2$.

Р. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2-1} = 1$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm 2$.

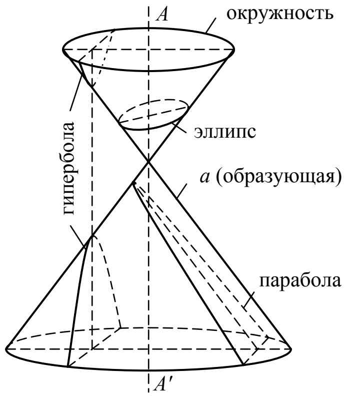


Рис. 15

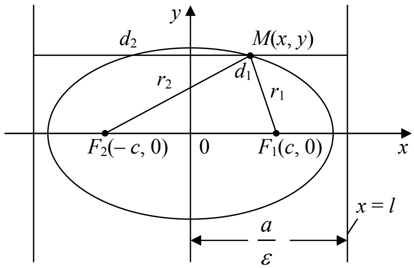


Рис. 16

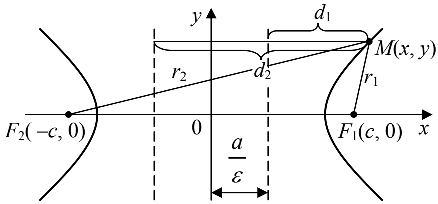


Рис. 17

б) По опр-ю гпрб-ы (рис. 17) имеем

$$r_1 - r_2 = \pm 2a, \tag{23}$$

где $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ | $r_2^2 - r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2$, или $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx$.

Отсюда с учетом (23) получим $\left.\begin{aligned} r_2 + r_1 &= \pm 2\frac{c}{a}x, \\ r_2 - r_1 &= \pm 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \frac{c}{a}x, \\ r_2 &= a + \frac{c}{a}x \end{aligned}\right\}$ правая ветвь, $\left.\begin{aligned} r_1 &= a - \frac{c}{a}x, \\ r_2 &= -a - \frac{c}{a}x \end{aligned}\right\}$ левая ветвь.

Вел. $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ наз. эксцентриситетом гпрб-ы, причем $\varepsilon > 0$, т.к. $c > 0$.

Пм. $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ наз. директрисами гпрб-ы. Т.к. $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$, т.е. директрисы располагаются между верш-ми гпрб-ы (рис. 17).

Т.о., для фокальных фокусов прб-ы имеем фм-ы:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a + \varepsilon x \end{aligned}\right\} \text{ правая ветвь }, \quad \left.\begin{aligned} r_1 &= a - \varepsilon x, \\ r_2 &= -a - \varepsilon x \end{aligned}\right\} \text{ левая ветвь }. \tag{24}$$

Теперь иссл-ем стн-ие $r_1/d_1$:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= x-\frac{a}{\varepsilon},\\ r_1 &= a+\varepsilon x \end{aligned}\right\} \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{-a+\varepsilon x}{x-\dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon\frac{x-\dfrac{a}{\varepsilon}}{x-\dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \text{ для правой ветви,}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{a}{\varepsilon}-x,\\ r_1 &= a-\varepsilon x \end{aligned}\right\} \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{a-\varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon\frac{\dfrac{a}{\varepsilon}-x}{\dfrac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon \text{ для левой ветви.}$$

Итак, $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ – пст. число и для гпрб-ы.

**п10**. Построить гпрб-у $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, ее эксцентриситеты и найти рст-ия от тч-и гпрб-ы с абсциссой $x = 5$ до левого фокуса и левой директрисы.

Р. Имеем $a = 4$, $b = 3$, тогда $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$. Отсюда $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$, $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\, 3{,}2$.

По (24) находим (см. рис. 17) $r = a + \varepsilon x = 4 + 1{,}25 \cdot 5 = 10{,}25$; $d = x - \left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right) = 5 + 3{,}5 = 8{,}2$.

в) Для парб-ы (см. рис. 12: 4°) имеем $r = d$ или $\varepsilon = \dfrac{r}{d} = 1$, т.е. эксцентриситет $\varepsilon = 1$. Ур-ем директрисы парб-ы яв-ся пм. $x = -\dfrac{p}{2}$.

**п11**. Найти ур-ие директрисы и фокус парб-ы $y^2 = 24x$.

Р. $y^2 = 2px = 24x \Rightarrow p = 12$. Тогда $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right) = F(6, 0)$, $x = -\dfrac{p}{2} = -6$.

Объединяя полученные результаты, получим сд. общее опр-ие конч-го сечения (элс-а, гпрб-ы, парб-ы).

**о5**. Конч. сечение есть геомч. место тч-к, отн-ие рст-й к-ых до данной тч-и (фокуса) и до данной пм-й (директрисы) есть вел. пст-ая ($\varepsilon$). Причем (см. рис. 18)

$$\left.\begin{aligned} &\text{для эллипса} && \frac{FM_1}{M_1N_1} = \varepsilon < 1,\\ &\text{для параболы} && \frac{FM_2}{M_2N_2} = \varepsilon = 1,\\ &\text{для гиперболы} && \frac{FM_3}{M_3N_3} = \varepsilon > 1. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

**6°. Уравнение конического сечения в полярных координатах**. Выведем ур-ие конч. сечения в полярных крд-ах (4°: 3.1), принимая за полюс один из фокусов и за полярную ось – фокальную ось этого конч. сечения.

Пусть $ABC$ (рис. 19) – дуга конч. сечения (элс-а, гпрб-ы или парб-ы), $B$ – верш-а, $F$ – фокус и $DE$ – ствщ. директриса.

Примем тч-у $F$ за полюс, а пм-ю $BFP$ – за полярную ось; обз-им эксцентриситет крв-й через $\varepsilon$. Пусть тч. $M_0$ на дуге $BC$ такая, что $FM_0 \perp FP$. Обз-им длину $FM_0$ через $P$ и наз-ем ее фокальным параметром (парм.) конч. сечения.

Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная тч. крв-й. Составим ур-ие, выражающее (вржщ.) зв-ть между ее полярными крд. $r$, $\varphi$ и данными числами $\varepsilon$, $p$. По общ. св-ву всех тч-к конч. сечения имеем (рис. 19):

$$\frac{FM}{NM} = \varepsilon. \tag{26}$$

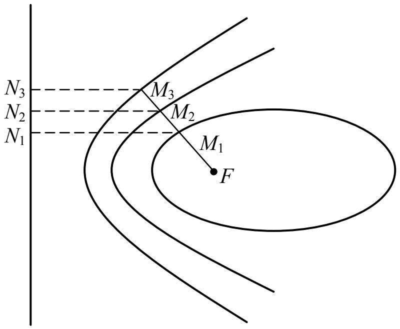



Рис. 18

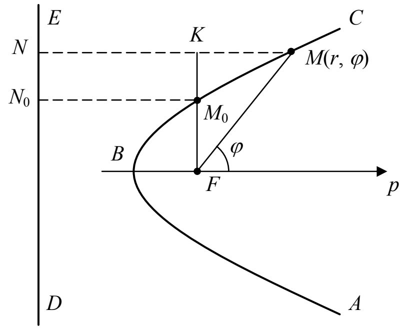



Рис. 19

При любом расположении $M$ на конч. сечении имеет место

$$FM = r,\ NM = N_0M_0 + r\cos\varphi.$$

Т.к. $\dfrac{FM_0}{N_0M_0} = \varepsilon$, а $FM_0 = P$, то $N_0M_0 = \dfrac{p}{\varepsilon}$. Сдт-но,

$$NM = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi. \tag{27}$$

Тогда рав. (26) принимает вид: $\dfrac{r}{\dfrac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi} = \varepsilon,$

откуда

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{28}$$

Ур-ие (28) опр-ет элс., если $\varepsilon < 1$, парб-у, если $\varepsilon = 0$, гпрб-у, когда $\varepsilon > 1$.

В ур-и (28) вел. $p$ для парб-ы имеет прежнее зн-ие, т.е. как в ур-и $y = 2px$. Дсв-но, для парб-ы $p = FM_0 = N_0M_0$, т.е. $P$ есть рст-ие от фокуса до директрисы.

Для элс-а и гпрб-ы фокальный парм. $p$ нх-мо врз-ть через полуоси $a$ и $b$.

В случае элс-а $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ подс-м в его ур-е крд-ы одной из тч. элс-а $M_0(-c, p)$: $\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{p^2}{b^2} =$ $= 1 \Rightarrow \dfrac{p^2}{b^2} = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow p^2 = \dfrac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \dfrac{b^2}{a}$.

В случае гпрб-ы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ крд-ы тч-и $M(c, p)$ подс-м в ур-ие и получим: $\dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{p^2}{b^2} = 1$ $\Rightarrow \dfrac{p^2}{b^2} = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow p^2 = \dfrac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \dfrac{b^2}{a}$.

Итак, выбирая $\varepsilon$ и $p$ ств-но для парб-ы, элс-а и гпрб-ы по фм-е (28), можно построить их грф-к.

**п12**. Пусть даны $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$ и $p = \dfrac{16}{5}$. Найти ур-ие канч. сечения.

Р. Т.к. $\varepsilon = \dfrac{3}{5} < 1$, это есть элс. За полюс берем один из фокусов, н-р, $F_2(-c, 0)$, тогда по фм-е (28) для $\varphi = 0$ находим $r = \dfrac{16}{5\left(1 - \dfrac{3}{5}\cos 0\right)} = 8$; для $\varphi = \pi$ имеем $r = \dfrac{16}{5+3} = 2$. Отсюда $a = 5$, $c = 3$.

Находим $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Итак, искомое ур-ие имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

## ЛЕКЦИЯ 13

## 5.2. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**1°. Уравнения поверхности и линии в пространстве**. Пвх-ть в пр-ве можно расв-ть как геомч-ие места тч-к, удщ-их ур-ю: $F(x, y, z) = 0,$ (1)
где пер-ые $x$, $y$, $z$ наз. текущими крд. тч-к пвх-ти. Н-р, $F(x, y, z) = x - y + x = 0$ – ур. пл-ти (см. 2°: 4.1), $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ – ур. сф-ы (1°: 5.1) и т.д.

Линию в пр-ве можно расв-ть как линию пересечения (перч.) двух пвх-ей (рис. 1):

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Н-р, $\left.\begin{aligned} x = 0, \\ y = 0 \end{aligned}\right\}$ есть ур-ие оси $Oz$.

Линию в пр-ве можно расв-ть и как трк-ю движения (двж.) тч-и (рис. 2). В этом случае ее задают вкн. ур-ем $r = r(t)$ (3)
или пармч. ур-ми $x = x(t), y = y(t), z = z(t).$ (4)
Н-р, пармч. ур-ия винтовой линии (рис. 3) имеют вид $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = \upsilon t$, (4а)
где $\upsilon$ – пст. скорость прямолин. двж-ия тч-и вдоль образующей, $\omega$ – скорость вращательного (врщт.) двж-я, $R$ – радиус цлн-а. Ур. (4а) получим так: пусть в начальный (начн.) момент тч. находилась на оси $Ox$ (совпала с тч-й $A$), а в момент $t$ – в положении (пж.) $M$. Обз-им буквой $N$ пркц-ю $M$ на пл-ть $Oxy$, буквой $P$ – пркц-ю тч-и $N$ на ось $Ox$, буквой $Q$ – пркц. тч-и $N$ на ось $Oy$. Обз-им через $\varphi$ угол между $OP$ и $ON$, тогда получим $x = OP = R\cos\varphi$, $y = OQ = R\sin\varphi$, $z = \upsilon t$. Поскольку $\varphi = \omega t$, то получим (4а).

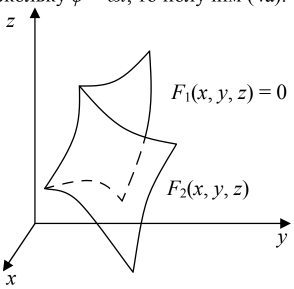



Рис. 1

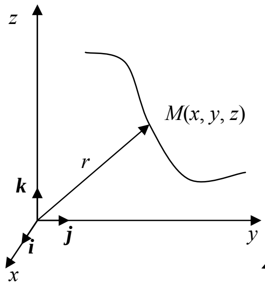



Рис. 2

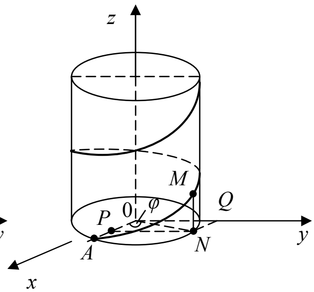



Рис. 3

Пармч. ур-ия пвх-ти имеют вид $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. (5)
Н-р, ур-я $x = R\cos u\cos v$, $y = R\sin u\cos v$, $z = r\sin v$ задают сф-у $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (1°: 5.2).

**2°. Цилиндрическая поверхность**. Цилиндрической (цлнч.) пвх-ю наз. пвх-ть, образованную пм-ми (образующими), прл-ми нек-ой данной пм-й и пересекающими (перкщ.) данную линию (направляющую) $L$.

Пусть направляющая (нпвщ.) $L$ цлнч-ой пвх-ти опр-ся ур-ми

$$F(x^*, y^*, z^*) = 0, \; F_1(x^*, y^*, z^*) = 0, \qquad (6)$$

а образующие – ур-ми
$$\frac{x - x^*}{m} = \frac{y - y^*}{n} = \frac{z - z^*}{p}, \qquad (7)$$

где $(x^*, y^*, z^*)$ – тч., принадлежащая нпвщ-ей, а $x$, $y$, $z$ – текущие крд-ы пвх-ти.

Исключая $x^*$, $y^*$, $z^*$ из четырех ур-й (6) и (7), получим искомое ур. цлнч-ой пвх-ти.

**п1**. Сост-ть ур-ие цлнч. пвх-ти, образующие к-ой прл-ны пм-й $x = y = z$, а нпвщ-ей служит пм-я $\left.\begin{aligned} x^* + y^* - z^* - 1 = 0, \\ x^* - y^* + z^* \quad = 0. \end{aligned}\right\}$

Р. Напишем канч. ур-ие образующих $\dfrac{x - x^*}{1} = \dfrac{y - y^*}{1} = \dfrac{z - z^*}{1} = t \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^* = x - t, \\ y^* = y - t, \\ z^* = z - t. \end{aligned}\right\}$ Подс-я их в ур-ия нпвщ-ей, получим $\left.\begin{array}{l}(x-t)+(y-t)-(z-t)-1=0,\\(x-t)-(y-t)+(z-t)\quad\ =0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y-z-t-1=0,\\x-y+z-t\quad\ =0\end{array}\right\}\Rightarrow 2y-2z-1=0.$ Это есть искомое ур. пвх-ти, прл. оси $Ox$.

Рас-им частные случаи цлнч-их пвх-ей: а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический (элч.) цлн-р (рис. 4), у к-го нпвщ-ая есть элс., а образующие прл-ны оси $Oz$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический (гпрбч.) цлн-р (рис. 5); в) $y^2=2px$ – параболический (парб.) цлн-р (рис. 6).

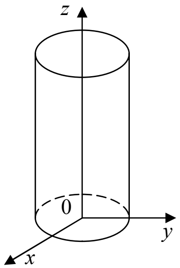


Рис. 4

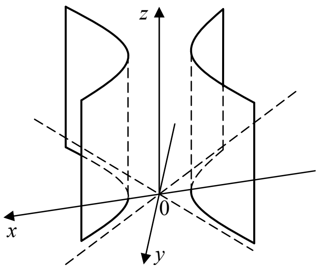


Рис. 5

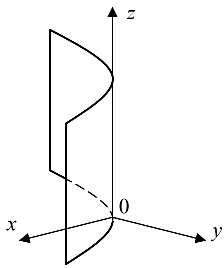


Рис. 6

**3°. Коническая поверхность**. Конической (конч.) пвх-ю наз. пвх-ть, образованная пм-ми (образующими конуса), проходящими через данную тч. (верш-у конуса) и перкщ-ми данную линию (нпвщ-ю конуса), см. рис. 7.

Пусть нпвщ-я и канч. ур-ия образующих конуса имеют вид

$$F(x^*,y^*,z^*)=0,\ F_1(x^*,y^*,z^*)=0, \tag{8}$$

$$\frac{x-x_0}{x^*-x_0}=\frac{y-y_0}{y^*-y_0}=\frac{z-z_0}{z^*-z_0}, \tag{9}$$

где $(x_0, y_0, z_0)$ – верш. конуса, $(x^*, y^*, z^*)$ – тч. нпвщ-ей, $x, y, z$ – текущие крд-ы конуса. Иск-в $x^*$, $y^*$, $z^*$ из четырех ур-й (8), (9), получим искомое ур. конч-й пвх-ти.

**п2**. Сост-ть ур-ие конуса с верш. в нач. крд-т и нпвщ-ей

$$\frac{x^{*2}}{a^2}+\frac{y^{*2}}{b^2}=1,\ z^*=c. \tag{8а}$$

Р. Канч. ур-я образующих, проходящих через верш-у (0, 0, 0) конуса и тч-у $(x^*, y^*, z^*)$ нпвщ-й, будут: $\frac{x}{x^*}=\frac{y}{y^*}=\frac{z}{z^*}$. Отсюда, заменяя $z^*$ через $c$, получим $x^*=c\frac{x}{z}$, $y^*=c\frac{y}{z}$.

Подс-я их в (8а), имеем $\frac{c^2}{a^2}\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{y^2}{z^2}=1$. Откуда получим ур-ие конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{10}$$

**4°. Поверхность вращения**. Пусть на пл-ти $yOz$ дана (рис. 8) линия $L$ ур-ем

$$F(y^*,z^*)=0,\ x^*=0. \tag{11}$$

Найти ур-ие пвх-ти, полученной вращением (врщ.) линии (11) вокруг оси $Oy$.

Рас-им произвольную тч. $M(x, y, z)$ пвх-ти и проведем пл-ть, прп-ю к оси врщ-я $Oy$. Тогда тч. $N(0, y, 0)$ будет центром окр-ти. Радиус окр-ти $NM=\sqrt{x^2+z^2}$. С др. стороны, этот радиус яв-ся абс. вел-ой аппликаты тч-и $M_1$, ордината к-ой есть $y$, т.е. $M_1(y^*, z^*)=M_1\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)$.

Отсюда с учетом (11) получим ур-ие пвх-ти врщ-я вокруг оси $Oy$

$$F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0. \tag{12}$$

Т.о., чтобы получить ур-ие пвх-ти, образованной врщ-ем линии $L$, лежащей на пл-ти $yOz$, вокруг оси $Oy$, нужно в ур-и этой линии заменить $y^*$ на $y$, $z^*$ – на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, т.е. такой заменой из (11) получим (12).

Если же крв. (11) врщ-ся вокруг оси $Oz$, то получим $F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ z\right) = 0.$ (13)

По этим правилам получим ур-я пвх-ей, образованных врщ-ем плоских линий вокруг др. крд. осей.

**п3**. Найти ур-ие пвх-ти, образованной врщ-ем элс-а $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси а) $Ox$; б) $Oz$.

Р. а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$; б) $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

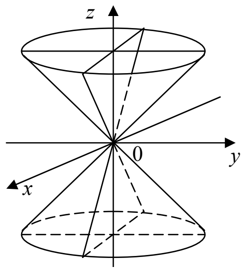


Рис. 7

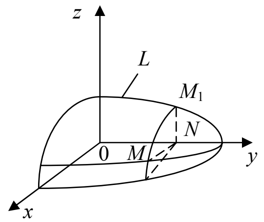


Рис. 8

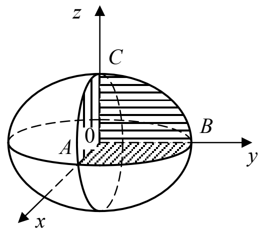


Рис. 9

**5°. Эллипсоид**. Врщ-ем элс-а $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси $Oz$ получим $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид (элси.) врщ-я.

Если вместо $a^2$ во втором слг-ом возьмем $b^2 \neq a^2$, что равносильно врщ-ю вокруг оси $Oz$ не по окр-ти, а по элс-у, то получим элси-д (рис. 9): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ (14)

Если $a = b = c = R$, то получим сф-у с центром в нач-е крд-т $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (14а)

**п4**. Найти ур-ие элси-да, образованного врщ-ем элс-а $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси $Ox$.

Р. Из $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ врщ-ем вокруг оси $Ox$ получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – элси-д врщ-я. Вместо $c^2$ во втором слг-ом возьмем $b^2 \neq c^2$ – врщ-е по элс-у – и получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**6°. Гиперболоиды**. Врщ-ем гпрб-ы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси $Oz$ получим $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид (гпрби.) врщ-я.

Если вместо $a^2$ во втором слг-ом возьмем $b^2 \neq a^2$, то получим однополостный гпрби-д (рис. 10):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (15)$$

Теперь рас-им гпрб-у $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Врщ-ем вокруг оси $Oz$ получим $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1$

или $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гпрби-д врщ-я.

Если $a^2$ во втором слг-м заменим на $b^2 \neq a^2$ – врщ-е вокруг оси $Oz$ по элс-у, – получим двуполостный гпрби-д (рис. 11) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (16)$$

**7°. Параболоиды**. Врщ-ем параболы (парб.) $y^2 = 2pz$ вокруг оси $Oz$ получим $x^2 + y^2 = 2pz$ или $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{p} = 2z$ – параболоид (парби.) врщ-я.

Если вместо $p$ во втором слг. возьмем $q \neq p$ – врщ-е вокруг оси $Oz$ по элс-у, – то получим элч-й парби-д (рис. 12) $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \qquad (17)$$

Взяв в ур-и (17) знак «минус» перед вторым слг., получим ур-е $$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad (18)$$

к-ое наз. ур-ем гпрбч. парби-а (рис. 13).

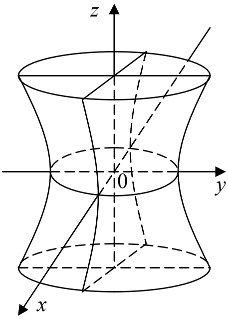


Рис. 10

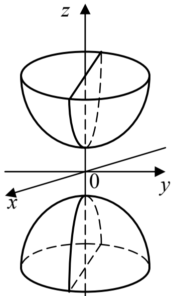


Рис. 11

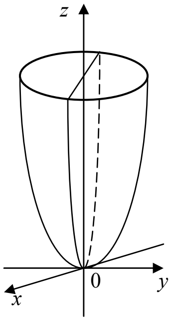


Рис. 12

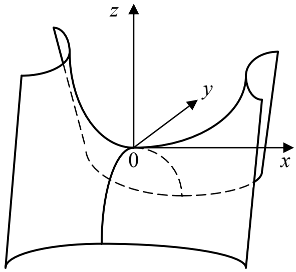


Рис. 13

**8°. Метод параллельных сечений**. Если задано ур-ие какой-либо пвх-ти, то возникает задача иссл-я ее формы и расположения отс-но крд-ых осей. Для р-ия этой задачи обычно применяют метод прл-ых сечений, к-ый состоит в том, что пвх-ть перк-ся несколькими пл., прл-ми пл-ям крд-т. Форма и размеры полученных сечений позволяют выяснить форму самой пвх-ти.

**п5**. Иссл-ть сечение элси-да $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ пл-ми $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, $x = 0$, $y = 0$.

Р. Рас-им сначала сечение элси-да пл-ми $z = h$, где $h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Подставляя $h$ в ур-ие элси-да, получим $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{h^2}{9} = 1$ или $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 - \dfrac{h^2}{9} \Rightarrow \dfrac{x^2}{36\left(1-\dfrac{h^2}{9}\right)} + \dfrac{y^2}{16\left(1-\dfrac{h^2}{9}\right)} = 1$. Вводя обз-ия $a_h = 6\sqrt{1-\dfrac{h^2}{9}}$, $b_h = 4\sqrt{1-\dfrac{h^2}{9}}$, получим в сечении элс. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_h^2} + \dfrac{y^2}{b_h^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ с полуосями $a_h$ и $b_h$. При $h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ получаем: $a_0 = 6$, $a_{\pm 1} = 6\sqrt{\dfrac{8}{9}} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6$; $a_{\pm 2} = 6\sqrt{\dfrac{5}{9}} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$; $a_{\pm 3} = 0$; $b = 4$, $b_{\pm 1} = 4\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3{,}8$; $b_{\pm 2} = 4\sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{5} \approx 3$; $b_{\pm 3} = 0$.

Т.о., нб-й элс. получается в сечении пл-ю, совпадающую с пл-ю $xOy$. Если поднимать или опускать эту пл-ть вдоль оси $Oz$ прл-но пл-ти $xOy$, то размеры сечений будут уменьшаться до тех пор, пока при $z = \pm 3$ не превратятся в тч-у (0, 0, ± 3). При дальнейшем увеличении или уменьшении $h$ пл-ть уже не будет перк-ть элси-д, т.к. корень, входящий в врж-я для $a_h$ и $b_h$, станет мнимым.

В сечении пл-ми, прл-ми $xOz$ и $yOz$, получим также элс-ы. В част., в сечении крд. пл-ми $y = 0$ и $x = 0$ получим нб-ие по размерам элс-ы.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ \qquad y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ \qquad x = 0. \end{cases}$$

Проведенное иссл. позволяет сделать вывод, что элси-д яв-ся овальной пвх-ю (рис. 9).

**п6**. Иссл-ть форму и расположение отс-но системы крд-т пвх-ти $4 - z = x^2 + y^2$.

Р. Применив метод сечений и полагая $z = h$, получим $x^2 + y^2 = 4 - h$. Отсюда следует, что $4 - h \geq 0$. Обз-ая $4 - h = R^2$, получим в сечении пл-ю $z = h$ линию $x^2 + y^2 = R^2$, $z = h$. Эта линия, очевидно, яв-ся окр-ю радиуса $R$ с центром на оси $Oz$. Сдт-но, данная пвх. яв-ся пвх-ю врщ-я вокруг оси $Oz$. Чтобы выяснить, врщ-м какой линии она получается, пересечем пвх-ть пл-ю $x = 0$. В сечении получится парб-а на пл-ти $yOz$: $y^2 = 4 - z$, $x = 0$.

Верш. ее лежит в тч. (0, 0, 4), а нпв-на парб. на отц. сторону оси $Oz$.

Т.о., иссл. пвх-ть яв-ся парби-м врщ-я, расположение к-го показано на рис. 14.

**п7**. Показать что ур. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ опр-ет однополостный гпрби-д врщ-я вокруг оси $Oz$.

Р. Рас-им сечение данной пвх-ти пл-ми $y = h$, прп-ми оси $Oy$. В сечении получим линию

$$x^2 + y^2 = R^2, y = h,$$

где $R = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 + h^2}$ .

Т.о., в любом сечении, прп-ом оси $Oy$, получается окр-ть радиуса $R$, т.е. данная пвх. есть пвх-ть врщ-я вокруг оси $Oy$. Осталось выяснить, врщ-ем какой линии получена эта пвх-ть. Пересечем пвх-ть какой-либо пл-ю, проходящей через ось врщ-я, н-р, пл-ю $xOy$. В сечении получится линия

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0.$$

Это есть гпрб-а с полуосями $a$ и $b$. Врщ-ясь вокруг оси $Oy$, она образует данную пвх-ть, яв-юся поэтому однополостным гпрби. врщ-я вокруг оси $Oy$ (рис. 15).

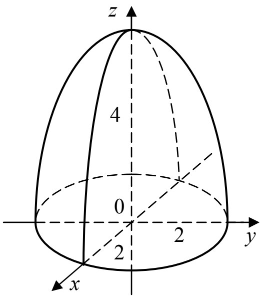


Рис. 14

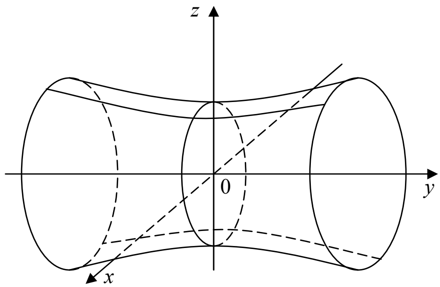


Рис. 15

**9°. Линейчатые поверхности**. Приведем применение нек-ых пвх-ей на практике. Пвх-ть, образованная двж-м пм-й, наз. линейчатой, а лежащие на ней пм-е – прямолинейными образующими. Примерами таких пвх-ей яв-ся цлнч-ие и конч-ие пвх-ти. Прямолинейными образующими обладают также однополостный гпрби-д (рис. 10) и гпрбч-й парби-д (рис. 13).

Рас-им однополостный гпрби. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) \times$

$\times \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \left(1 + \dfrac{y}{b}\right)\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$. Отсюда составим систему ур-й первой сп-и:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=k\left(1+\frac{y}{b}\right);\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $k$ – произвольное число.

При опр-ом зн-и $k$ ур-ия (19) опр-ют пм. линию. Меняя парм. $k$, получим мн-во пм-х (рис. 16 для $k$), целиком лежащих на пвх-ти однополостного гпрби-да, т.к. ур-ия (19) получены из ур-ия однополостного гпрби-да (10). На пвх-ти однополостного гпрби-да располагается еще одно семейство прямолинейных образующих (рис. 16 для $l$):

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right);\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где $l$ – произвольный парм.

Можно показать, что через каждую тч. однополостного гпрби-да проходит по одной пм. из (19), (20) каждого из этих семейств (рис. 16 для $k$ и $l$).

Это св. однополостного гпрби. использовал русский инженер В.Г. Шухов (1853-1939 гг.) в конструкции мачт, башен и опор, составленных из металлических балок, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гпрби. врщ-я.

При помощи анч-их рассуждений можно убедиться, что на пвх-ти гпрбч-го парби-да $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ также располагаются два семейства (рис. 17) прямолинейных образующих с ур-ми:

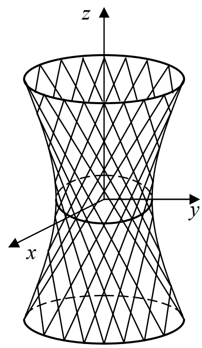



Рис. 16

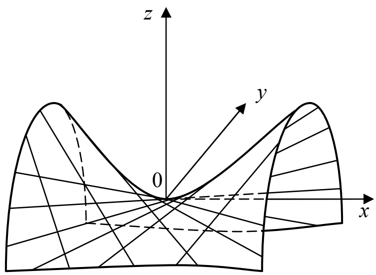



Рис. 17

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2kz,\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{k},\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{l},\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=2lz.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $k$ и $l$ – произвольные парм.

**п8**. Д-ть, что пм. $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ лежит на гпрбч-ом парби-де $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$. Ук. Надо показать, что при любом зн-и $t$ пармч. ур-ия пм-й уд-ют ур-ю данной пвх-ти.

## ЛЕКЦИЯ 14

## 5.3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**1°. Приведение линий второго порядка к каноническому виду выделением полного квадрата**. Ур-ия крв-х второго порядка в канч-ом виде (окр-ть, элс., гпрб-а, парб-а) можно получить из общего ур-ия $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$ (1)
где хотя бы один из коэф-ов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ не равен нулю (н-р, $a_{22} \neq 0$), $a_{ij} = a_{ji}$.

В этом пункте рас-им случай, когда $a_{12} = 0$, тогда ур. (1) принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1а)$$

Ур-ие (1а) всегда опр-ет либо окр-ть (при $a_{11} = a_{22}$), либо элс. (при $a_{11}a_{22} > 0$), либо гпрб-у (при $a_{11}a_{22} < 0$), либо парб-у (при $a_{11}a_{22} = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для элс-а (окр-ти) – в тч-у или мнимый элс. (окр-ть), для гпрб-ы – в пару перкщ. пм-х, для парб-ы – в пару прл. пм-х.

Ур. (1) прб-ся к канч. виду с помощью прл-го переноса осей крд-т по фм-ам

$$\left.\begin{aligned} X &= x' + x_0, \\ Y &= y' + y_0, \end{aligned}\right\} \qquad (1б)$$

где ($x_0$, $y_0$) – крд-ы нового нач-а $O'$ (в старой системе крд-т). Новые оси $O'x'$ и $O'y'$ прл-ны старым. Тч. $O'$ яв-ся центром элс-а или гпрб-ы и верш-й в случае парб-ы.

Приведение ур-ия (1а) к простейшему (т.е. канч-у) виду удобно делать методом выделения полных кв-ов, как это делалось для окр-ти.

**п1**. Ур-ие второго порядка $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$ привести к канч. виду. Опр-ть вид и расположение крв-й. Найти крд-ы фокусов. Сделать чертеж.

Р. $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0 \Rightarrow 9(x^2 - 10x) + 16(y^2 + 2y) + 97 \Rightarrow 9[(x-5)^2 - 25] + 16[(y + 1)^2 - 1] + 97 = 0 \Rightarrow 9(x-5)^2 + 16(y+1)^2 - 225 - 16 + 97 = 0 \Rightarrow 9(x-5)^2 + 16(y+1)^2 - 144 = 0.$
Обз-им $\left.\begin{aligned} x' &= x - 5, \\ y' &= y + 1 \end{aligned}\right\}$ или $\left.\begin{aligned} x &= x' + 5, \\ y &= y' - 1. \end{aligned}\right\}$ Сравнивая с (1б), видим, что эти фм. опр-ют прл-ый перенос осей крд-т в тч-у $O'(5,\ -1)$. В новой системе крд-т ур-ие имеет вид $9x'^2 + 16y'^2 - 144 = 0$ или $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{9} = 1$ – ур. элс-а с осями $a = 4$ и $b = 3$, центром $O'(5,\ -1)$, рст-ие фокусов от центра $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7} \approx 2{,}6$ (рис. 1).

**п2**. Ур-ие линии второго порядка $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$ привести к канч. виду. Опр-ть вид и расположение этой линии, найти крд-ы фокусов, сделать чертеж.

Р. Ур-ие перепишем в виде $(x^2 - 4x) - (y^2 - 2y) + 7 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (y-1)^2 - 4 + 1 + 7 = 0 \Rightarrow$ $(x-2)^2 - (y-1)^2 + 4 = 0$. Обз-им $\left.\begin{aligned} x' &= x - 2, \\ y' &= y - 1 \end{aligned}\right\}$ или $\left.\begin{aligned} x &= x' + 2, \\ y &= y' + 1 \end{aligned}\right\}$, тогда $x'^2 - y'^2 + 4 = 0$ или $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{4} = -1$ – ур. гпрб-ы с центром в тч. $O'(2, 1)$,полуоси $a = b = 2$ (гпрб. равносторонняя), дсв. полуось $O'y'$, на к-ой расположены фокусы на рст-и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$ от центра $O'$.

Сдт-но, новые крд. фокусов: $x' = 0$, $y' = \pm\ 2\sqrt{2}$ . Из фм-л прл-го переноса найдем старые крд-ы фокусов $x = x' + 2 = 0 + 2 = 2$, $y = y' + 1 = \pm\ 2\sqrt{2} + 1$, т.е. $F_1\left(2,\ 1 - 2\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(2,\ 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

Общее ур. (1) прб-ся к виду (1а) с помощью поворота крд-х осей на угол $\alpha$ по фм. (5°: 2.1) $\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y &= y'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}$, но мы приведем более общий подход (см. 4°: 2.3) приведения квч-х форм к канч. виду.

**2°. Приведение квадратичной формы линий к каноническому виду. Инварианты**. При помощи прб-й крд-т ур-ие (1) можно привести к канч. виду (одному из сд. типов):

1) для элс-ов и гпрб-л $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ ($a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$); (2)

2) для парб-л $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ ($a_{22} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$); (3)

3) для вырожденных парб-л $\qquad a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \ (a_{22} \neq 0).$ (4)

Опрт-ли из коэф-ов ур. (1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ наз. большим опрт-ем, его минор $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ – малым опрт-ем, а число $S = a_{11} + a_{22}$ наз. следом ур-ия (1).

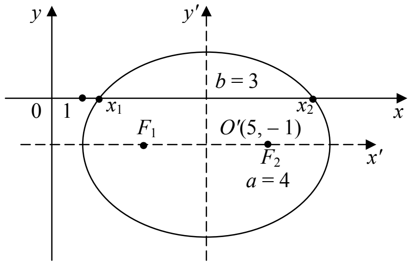


Рис. 1

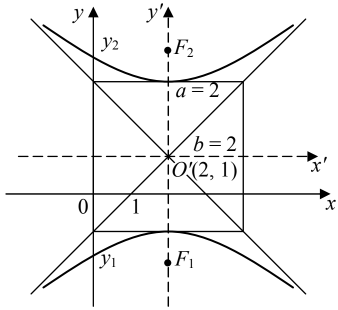


Рис. 2

Числа $\Delta$, $\delta$ и $S$ наз. инвариантами ур-ия (1), т.к. при людом прб-и крд-т $x$, $y$ числа $\Delta$, $\delta$ и $S$ не меняются. При этом ур-ие вида $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ (5)

наз. характеристическим (хркч.) ур-ем для стн. (1).

Если $\delta = 0$, то из стн. (5) получим $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - S\lambda = 0.$ (5a)

Введем еще число $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}(a_{11} + a_{22}) - a_{13}^2 - a_{23}^2$.

При повороте крд-ых осей число $K$ не меняется (т.е. $K' = K$), а при переносе нач-а крд-т в тч-у $(x_0, y_0)$ к нему прибавляется опрт-ль $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}$, т.е. $K' = K + \Delta_0$. Поэтому число $K$ наз. семиинвариантом (полуинвариантом) ур-ия (1).

**зм1**. При умн-и ур-ия на нек-ое число $\alpha \neq 0$ инвариант $S$ умн-ся на $\alpha$, инвариант $\delta$ и семиинвариант $K$ умн-ся на $\alpha^2$, а инвариант $\Delta$ умн-ся на $\alpha^3$. Поэтому геомч. смысл может иметь только рав-во инвариантов $S$ и $\Delta$ нулю (или знак их пзв-ия) и знак инварианта $\delta$ и семиинварианта $K$.

Коэф-ы для ур-й (2)-(4) легко найти с помощью инвариантов. Н-р, для элс-ов и гпрб-л имеем:

$S = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ ①, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2$ ②, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= \lambda_1\lambda_2 a_{33}$ ③. Из рав-в ① и ② по фм-е Виета следует, что $\lambda_1$ и $\lambda_2$ яв-ся корнями ур-ия (5), а из рав-в ② и ③ находим $a_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta}$ ④.

При этом, если $\delta > 0$, перед нами крв-я элч-го типа, если $\delta < 0$ – крв-я гпрбч-го типа, если $\delta = 0$ – крв-я парб-го типа.

Т.о., приведенное (из него получим канч-ое) ур-ие центральной крв-й второго порядка имеет вид $\qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0.$ (6)

Если $\delta > 0$ и $\Delta \neq 0$, то крв-я – элс. ($\Delta < 0$) или мнимый элс. ($\Delta > 0$). Точнее, она будет элс-ом (вещ-ым), если $\lambda_2$ и $\dfrac{\Delta}{\delta}$ разных знаков, т.е. $\lambda_2 \dfrac{\Delta}{\delta} < 0$; но т.к. $\delta > 0$ и $\lambda_2$ – одного знака с $S$, то эллипс получится при $S\Delta < 0$. Крв-я будет мнимым элс-ом, если $S\Delta > 0$. Если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$, то крв-я есть тч-а.

Если $\delta < 0$, то крв. яв-ся гпрб-ой при $\Delta \neq 0$ и распадается на пару перкщ-хся пм-х при $\Delta = 0$.

Для парб-ы $\delta = 0$ (при $S = a_{22} = \lambda_2 \neq 0$) в силу ур-ий (3), (4) и $\Delta \neq 0$, ур-ие к-ой приведено к виду $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2 a_{13}^2$, имеем $a_{13} = \pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{\lambda_2}}$, где $a_{13} \neq 0$, значит, $\Delta \neq 0$. Откуда получаем ур. (3) в виде

$$Sy^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\,x = 0. \qquad (7)$$

Для рас-ия случая (4) используем семиинвариант $K$, к-му при повороте крд-ых осей ств-ет $K' = K$, а при переносе нач-а крд-т в тч-у $(x_0, y_0)$ ств-ет $K' = K + \Delta_0 = K + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix} =$ $= K + 0 = K$. А для (4) имеем: $K = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}$ и $s = a_{22}$. Поэтому (4) имеет вид

$$Sy^2 + \frac{K}{S} = 0. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что при $K = 0$ имеем пару совпадающих пм-х; при $K > 0$ – пару мнимых прл. пм-х; при $K < 0$ – пару вещ-ых прл. пм-х.

Т.о., по опрт-ию $\Delta$ можно судить о распадении ($\Delta = 0$) или нераспадении ($\Delta \neq 0$) крв-й на пару пм-х и до приведения ур-ия крв-й к канч. виду. По $\delta$ можно установить тип крв-й. А по $K$ можно опр-ть типы прл. пм-х.

В табл. 1 собраны изложенные результаты со схематическими видами крв-х. Заметим, что в этом параграфе и в табл. 1 новые пер. $X$, $Y$ (к-ые обз-ли и через $x_1$, $y_1$, или $x'$, $y'$, или $x^*$, $y^*$) мы обз-ли опять как старые пер. $x$, $y$ (н-р, вместо $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ написали $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$), т.к. при любом прб-и пуг-ых крд-т $x$, $y$ вогнутость или выпуклость квч-ой фк-и $f(x)$ не меняется из-за инвариантности чисел $\Delta$, $\delta$, $S$.

**п3**. Опр-ть типы сд. крв-х и привести их ур-ие к канч. виду.

1*. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Р. Т.к. $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$, то это крв. элч-го типа. Поскольку $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, значит, крв-я не распадается. В силу $S = 3 + 3 = 6$ и $S\Delta = -18 < 0$ крв-я представляет собой элс. По (5) имеем $\lambda^2 - S\lambda + \delta = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда по (6) получим $\lambda_1 x^2 +$ $+ \lambda_2 y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 2x^2 + 4y^2 - \dfrac{3}{8} = 0$ или $\dfrac{x^2}{\frac{3}{16}} + \dfrac{y^2}{\frac{3}{32}} = 1$; полуоси элс-а $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4$; $b = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}3$.

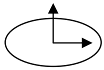
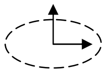
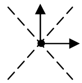
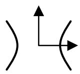
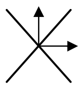
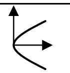
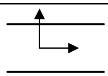
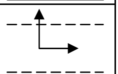
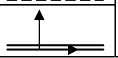
2*. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$.

Р. Крв-я (в силу $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$) элч-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$) не распадается, ($S = 6$ и $S\Delta = 30 > 0$) есть мнимый элс. (пустое мн. тч-к), т.е. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (см. табл. 1).

3*. $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$) элч-го типа,ур-ие к-ой можно записать в виде $(x + 1)^2 + y^2 = 0$ и представляет собой тч-у $x = -1$, $y = 0$ (ее можно также понимать как пару перкщ-хся в этой тч-е мнимых пм. $x + iy + 1 = 0$ и $x - iy + 1 = 0$, см. табл. 1).

Таблица 1

<table>
<tr><th>Тип крв-й</th><th>Хркс. по $\Delta$</th><th>Хркс. по $S\Delta$, $K$, название</th><th>Схематич. вид линии</th><th>Приведенное ур-ие</th><th>Канч. ур-ие</th><th>№№ п/п</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\delta > 0$ элч. типа</td><td rowspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>$S\Delta < 0$, элс.</td><td></td><td rowspan="5">$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 +$ $+ \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$ для $a \geq b > 0$ нх. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$S\Delta > 0$, мнимый элс.</td><td></td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, $a \geq b > 0$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>Тч-а (пара перкщ-хся в этой тч. мнимых пм.)</td><td></td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta < 0$ гпрбч. типа</td><td>$\Delta \neq 0$</td><td>Гпрб.</td><td></td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>Пара перкщ-хся пм-х (вещ-их)</td><td></td><td>$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\delta = 0$ парбч. типа</td><td>$\Delta \neq 0$</td><td>Парб.</td><td></td><td>$Sy^2 + 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S}}x = 0$</td><td>$y^2 = 2px$, $p > 0$</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$K < 0$, пара прл. пм-х (вещ-их)</td><td></td><td rowspan="3">$Sy^2 + \dfrac{K}{S} = 0$</td><td>$y^2 - b^2 = 0$, $b > 0$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$K > 0$, пара мнимых прл. пм-х</td><td></td><td>$y^2 + b^2 = 0$, $b > 0$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$K = 0$, пара совпадающих пм.</td><td></td><td>$y^2 = 0$</td><td>9</td></tr>
</table>

4*. $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$) гпрб-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$) есть гпрб-а, ($S = 0$, $\delta = -2$) $\lambda^2 - S\lambda + \delta = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, тогда по (6) имеем $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ или $\dfrac{y^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}} - \dfrac{x^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 1$ и ее полуоси $a = b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{4}} \approx 0{,}6$.

5*. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{4} < 0$) гпрб-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 1 & 5/2 & -3 \end{vmatrix} = 0$) распадается на пару перкщ-хся пм-х. Чтобы найти их ур-ие, $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = x^2 + (3y + 2)x + 2y^2 + 5y - 3 = 0$ р-им отс-но $x$ (т.к. уже известно, что левая часть ур-ия распадается на лин. мнж-ли, то $x$ будет рац-но врж-ся через $y$): $x = -\left(\frac{3}{2}y+1\right) \pm \sqrt{\frac{9}{4}y^2+3y+1-2y^2-5y+3} = -\left(\frac{3}{2}y+1\right) \pm$

$\pm \left(\frac{1}{2}y-2\right) \Rightarrow x_1 = -y - 3$; $x_2 = -2y + 1$. Значит, левая часть ур-ия распадается на два мнж-ля $(x + y + 3)(x + 2y - 1) = 0$, т.е. крв-я распадается на пару пм-х $x + y + 3 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$.

6*. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$) парб-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$) есть парб-а ($S = a_{22} = 1$, $\Delta = -1$ и по (5), (5а)) $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, тогда по (7) $Sy^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\,x = y^2 \pm 2x = 0$ или $y^2 = 2x$ при $x > 0$.

7*. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$) парбч-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$) распадается на пару прл. пм-х, ($S = a_{22} = 4$, $K = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20 < 0$ и по (8)) $Sy^2 + \frac{K}{S} = 4y^2 - 5 = 0$ $\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ – пара пм-х в новой системе крд-т. Чтобы найти эти пм., поступим как в 5*. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = x^2 + (2y - 1)2x + 4y^2 - 4y - 3 = 0$ р-им отс-но $x$: $x_{1,2} = -(2y - 1) \pm \sqrt{4y^2-4y+1-4y^2+4y+3} = -(2y - 1) \pm 2 \Rightarrow x_1 = -2y + 3$, $x_2 = -2y - 1$, тогда $(x + 2y - 3)(x + 2y + 1) = 0$, т.е. $x + 2y - 3 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$.

8*. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$) парбч-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$) распадается на пару прл. пм-х, ($S = a_{22} = 4$, $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$) состоит из двух совпавших пм-х $x + 2y - 1 = 0$, т.к. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = (x + 2y - 1)^2$.

9*. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$.

Р. Крв-я ($\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$) парбч-го типа, ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$) распадается на пару прл. пм-х, ($S = 4$, $K = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$) состоит из двух мнимых пм.: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = (x + 2y + 1)^2 + 1 = (x + 2y + 1 + i)(x + 2y - i) = 0$.

Для опр-ия расположения крв-й, канч. ур-ие к-ой уже известно, нх-мо узнать крд-ы нового нач-а $O'(x_0, y_0)$ и крд-ы нпвщ-их вк-ов этой системы сд-им образом:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)m + a_{12}n = 0, \\ a_{21}m + (a_{22} - \lambda)n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда старые крд-ы будут врж-ся через новые в виде системы

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 X + m_2 Y + x_0, \\ y &= n_1 X + n_2 Y + y_0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $e'_1(m_1, n_1)$, $e'_2(m_2, n_2)$ – едч. вк-ы осей $O'X$, $O'Y$ канч. системы, опрн-ые из (10), а $x_0$, $y_0$ – крд-ы нового нач-а (центра крв-й, если крв-я центральная, иначе – крд-ы верш-ы) по отн-ю к старой системе.

**п4**. Опр-ть вид и расположение крв-й $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ (см. 1* из п3).

Р. Вид уже получили: $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ при $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$. Найдем $O'(x_0, y_0)$ по (9):

$\left.\begin{aligned} 3x - y + 1 &= 0, \\ -x + 3y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$, откуда $O'\left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{5}{8}\right)$. По (10) опр-им едн. вк-ы $e'_1$, $e'_2$: $\left.\begin{aligned} (3-2)m_1 - n_1 &= 0, \\ -m_1 + (3-2)n_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{aligned} m_1 - n_1 &= 0, \\ -m_1 + n_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{e}_1 = (1,\ 1)$; $\left.\begin{aligned} (3-4)m_2 - n_2 &= 0, \\ -m_2 + (3-4)n_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -m_2 - n_2 &= 0, \\ -m_2 - n_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{e}_2 = (1,\ -1)$. Нормируя $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$, получим едч. вк-ы $e_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $e_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Они орт-ны, т.к. $e_1 e_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.

Теперь старые крд. можно врз-ть через новые: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{8}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{5}{8}. \end{aligned}\right\}$

**3°. Квадратичные формы поверхностей и приведение их к каноническому виду**. Анч-ые результаты имеют место и для пвх-ей второго порядка:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x &+ \\ a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y &+ \\ a_{33}z^2 + 2a_{34}z &+ \\ a_{44} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Считая, что $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, 4}$, сопоставим ур-ю (12) симч. мц-у $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Пусть $S = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$. Числа $S$, $\delta$, $\Delta$, $D$ не меняются при переходе к любой др. системе пуг-ых крд-т, поэтому они наз. инвариантами ур-ия (12). Введем еще числа $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$, $L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$. Числа $K$ и $L$ не меняются при повороте крд. осей, но при переносе нач-а крд. меняются, поэтому их наз. семиинвариантами.

Прежде чем излагать общую теорию, сделаем сд-е

**зм2**. Если в ур-и (12) $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, то общее ур. пвх-ей второго порядка приводится к канч. виду методом выделения полных кв-ов, как в 1°.

$$\text{Ур-ие}\qquad \varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-S\lambda^2+\delta\lambda-\Delta=0 \tag{13}$$

наз. хркч. ур-ем для ур. (12). Корни $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ур-ия (13) всегда вещ-ны из-за симч-ти м-цы $A$. При $\Delta \neq 0$ все корни $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ отличны от нуля, при $\Delta = 0$ и $\delta \neq 0$ один из этих корней равен нулю (пусть $\lambda_3 = 0$), при $\Delta = 0$ и $\delta = 0$ равны нулю два из корней (пусть $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 0$), а третий корень $\lambda_1 = a_{11} = S \neq 0$.

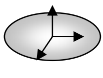
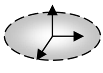
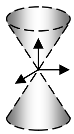
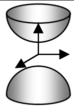
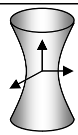
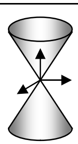
Прб-ем пуг-ых крд-т ур-ия (12) произвольной пвх-ти второго порядка можно привести к одному из сд-их пяти типов:

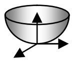
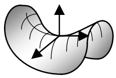
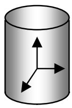
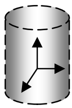
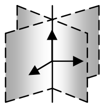
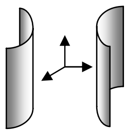
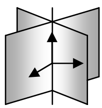
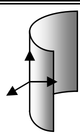
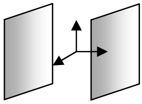
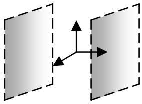
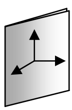
$$\left.\begin{aligned}
&\text{I } \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{D}{\Delta}=0 \text{ (при } \Delta\neq 0),\\
&\text{II } \lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm 2\sqrt{-\frac{D}{\delta}}=0 \text{ (при } \Delta=0,\ D\neq 0,\ \delta\neq 0,\ D\delta<0),\\
&\text{III } \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{L}{\delta}=0 \text{ (при } \Delta=0,\ D=0,\ \delta\neq 0),\\
&\text{IV } Sx^2\pm 2\sqrt{-\frac{L}{S}}\,y=0 \text{ (при } \Delta=0,\ D=0,\ \delta=0,\ L\neq 0,\ SL<0),\\
&\text{V } Sx^2+\frac{K}{S}=0 \text{ (при } \Delta=D=\delta=L=0).
\end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Эти ур-ия наз. приведенными ур-ми пвх-ей второго порядка.

Переход от приведенного ур-ия к канч-му (одному из 17 видов) осуществляется простым алг. прб-ем, причем приведенные ур-ия типа I имеют пвх-ти 1-6, типа II – 7-8, типа III – 9-13, типа IV – 14 и типа V – 15-17, к-ые приведены в табл. 2 со схематическими видами пвх-ей второго порядка.

Таблица 2

| Тип пвх-и | Хркс. по $S\Delta$, $\delta$, $L$, $SL$, $K$; название | Схематич. вид пвх-и | Приведен-ное ур-ие | Канч. ур-ие | №№ п/п |
|---|---|---|---|---|---|
| I<br>$\Delta \neq 0$<br>$D \neq 0$<br>$\delta \neq 0$ | $S\Delta > 0,\ \delta > 0,\ D < 0$<br>элси-д (дсв-й) |  | $\lambda_1x^2 +$<br>$+ \lambda_2y^2 +$<br>$+ \lambda_3z^2 +$<br>$+ \dfrac{D}{\Delta} = 0$ | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$<br>$a \geq b \geq c > 0$ | 1 |
| | $S\Delta > 0,\ \delta > 0,\ D > 0$<br>элси-д (мним.) |  | | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1,$<br>$a \geq b \geq c > 0$ | 2 |
| | $S\Delta > 0,\ \delta > 0,\ D = 0$<br>конус (мним.) |  | | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0,$<br>$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1,$<br>$a \geq b \geq c > 0$ | 3 |
| | $S\Delta \leq 0,\ \delta \leq 0,\ D > 0$<br>гпрби. двуполостный |  | | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,$<br>$a \geq b \geq 0,\ c > 0$ | 4 |
| | $S\Delta \leq 0,\ \delta \leq 0,\ D < 0$<br>гпрби.<br>однополостный |  | | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$<br>$a \geq b > 0,\ c > 0$ | 5 |
| | $S\Delta \leq 0,\ \delta \leq 0,\ D = 0$<br>конус |  | | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,$<br>$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1,$<br>$a \geq b > 0,\ c > 0$ | 6 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II<br>$\Delta = 0$<br>$D \neq 0$<br>$\delta \neq 0$ | $D < 0$, парби-д элч-й |  | $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{D}{\delta}} = 0$ | $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$,<br>$p \geq q > 0$ | 7 |
| | $D > 0$, парби-д гпрбч-й |  | | $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$,<br>$p > 0, q > 0$ | 8 |
| III<br>$\Delta = 0$<br>$D = 0$<br>$\delta \neq 0$ | $\delta > 0$, $SL < 0$,<br>цлн-р элч-й |  | $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{L}{\delta} = 0$ | $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,<br>$a \geq b > 0$ | 9 |
| | $\delta > 0$, $SL > 0$,<br>цлн-р элч-й (мним.) |  | | $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$,<br>$a \geq b > 0$ | 10 |
| | $\delta > 0$, $L = 0$, пара мним. перкщ. пл-ей |  | | $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$,<br>$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$,<br>$a \geq b > 0$ | 11 |
| | $\delta < 0$, $L \neq 0$,<br>цлн-р гпрбч-й |  | | $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,<br>$a > 0, b > 0$ | 12 |
| | $\delta < 0$, $L = 0$, пара. перкщ. (вещ.) пл-ей |  | | $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$,<br>$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$,<br>$a > 0, b > 0$ | 13 |
| IV<br>$\Delta = 0$<br>$D = 0$<br>$\delta = 0$ | $L \neq 0$,<br>цлн-р парбч-й |  | $Sx^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{L}{S}}\, y = 0$ | $y^2 = 2px$, $p > 0$ | 14 |
| V<br>$\Delta = 0$<br>$D = 0$,<br>$\delta = 0$ | $L = 0$, $K < 0$, пара прл-ых (вещ.) пл-ей |  | $Sx^2 + \dfrac{K}{S} = 0$ | $y^2 - b^2 = 0$, $b > 0$ | 15 |
| | $L = 0$, $K > 0$, пара мним. прл-ых пл-ей |  | | $y^2 + b^2 = 0$, $b > 0$ | 16 |
| | $L = 0$, $K = 0$, пара совпадающих (вещ.) пл-ей |  | | $y^2 = 0$ | 17 |

Из табл. 2 видно, что невырожденными пвх-ми яв-ся 1, 4, 5, 7, 8. Остальные вырожденные.

Для опр-ия расположения пвх-ти, канч. ур-ие к-ой уже известно, надо знать крд-ы нового нач-а $O'(x_0, y_0, z_0)$ и крд-ы нпвщ-их вк-ов осей этой системы по сд-им фм-ам (см. (12)):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n + a_{14} = 0, \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n + a_{24} = 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n + a_{34} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Тогда старые крд-ы будут врж-ся через новые так:

$$\left.\begin{aligned} x = l_1x + l_2y + l_3z + x_0, \\ y = m_1x + m_2y + m_3z + y_0, \\ z = n_1x + n_2y + n_3z + z_0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $e'_1(l_1, m_1, n_1)$, $e'_2(l_2, m_2, n_2)$, $e'_3(l_3, m_3, n_3)$ – едч. вк-ы осей $O'X$, $O'Y$, $O'Z$ канч-ой системы, опрм-ые из (15), а $x_0$, $y_0$, $z_0$ – крд-ы нового нач-а (центра пвх-ти для элс-а и гпрб-ы и верш-ы для парб-ы) по отн-ю к старой системе.

**п5**. Опр-ть вид и расположение пвх-ти $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

Р. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, пвх-ть имеет едн. центр сим-и. Далее, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0$ и $S = 1 + 5 + 1 = 7$, $S\Delta < 0$, тогда пвх-ть есть однополостный гпрби. Находим $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Сост. и р-м хркч. ур-ие по (13): $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, тогда по I имеем $3X^2 + 6Y^2 - 2Z^2 + \dfrac{36}{-36} = 0$ или $\dfrac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \dfrac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, где $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a \geq b > 0$, $c > 0$. Центр пвх-ти находим, р-я систему:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 3z - 1 = 0, \\ x + 5y + z + 3 = 0, \\ 3x + y + z + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= -1/3; \\ y_0 &= -2/3; \\ z_0 &= 2/3, \end{aligned} \text{ т.е. } O'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Крд-ы вк-а $e'_1 = (l_1, m_1, n_1)$, прл-го новой оси $O'X$, опр. системой $\left.\begin{aligned} (1-3)l_1 + m_1 + 3n_1 = 0, \\ l_1 + (5-3)m_1 + n_1 = 0, \\ 3l_1 + m_1 + (1-3)n_1 = 0, \end{aligned}\right\}$ откуда находим $\tilde{e}_1 = (1, -1, 1)$. Точно так же при $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$ находим вк-ы $e'_2 = (1, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 0, -1)$, прл-ые осям $O'Y$, $O'Z$. Ортонор-уя их, получим $e'_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e'_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $e'_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Теперь можно найти старые крд-ы через новые по (16):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{1}{3}; \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{2}{\sqrt{6}}Y + 0 \cdot Z - \frac{2}{3}; \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + \frac{2}{3}. \end{aligned}\right\}$$

## 5.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 5.1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

### Вопросы для самопроверки

1. Как вы понимаете ур-ия линии и пвх-ти? Приведите примеры.
2. Выведите фм-у элс-а, иссл-те ее и начертите грф-к.
3. Дайте опр-ие гпрб-ы и ее асим-ы, выведите фм-у, иссл-те ее, начертите грф-к.
4. Выведите фм-у парб-ы, иссл-те ее и начертите грф-к.
5. Выведите ур-ия элс-а, гпрб-ы и парб-ы как конч. сечений.
6. Как врж-ся ур-ие конч. сечения в полярных крд-ах?

**Типовые задачи для самостоятельной работы**

**тз1**. Найти центр и радиус окр-ти, проходящей через тч. $A(1, 5)$, $B(-4, 0)$ и $C(4, -4)$, написать ее ур-ие.

Р. Пусть $R$ – радиус, а $K(a, b)$ – центр окр-ти, тогда ее ур-ие $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}(1-a)^2+(5-b)^2&=R^2;\\(-4-a)^2+(0-b)^2&=R^2;\\(4-a)^2+(-4-b)^2&=R^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a^2+b^2-2a-10b+26&=R^2;\\a^2+b^2+8a+16&=R^2;\\a^2+b^2-8a+8b+32&=R^2.\end{aligned}\right\}$$

Вычитая из 2-го ур. сначала 1-ое, затем 3-е, получим $\left.\begin{aligned}10a+10b-10&=0;\\16a-8b-16&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a+b&=1;\\2a-b&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a&=1;\\b&=0.\end{aligned}\right\}$ Отсюда $(1-1)^2 + (5-0)^2 = R^2$ $\Rightarrow 25 = R^2 \Rightarrow R = 5$, $K(1, 0)$. Т.о., искомая окр. имеет вид $(x-1)^2 + y^2 = 25$.

**тз1а**. Найти центр и радиус окр-ти, проходящей через тч. $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$ и $C(5, 5)$. Написать ее ур-ие. О: $K(2, 1)$, $R = 5$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

**тз2**. Иссл-ть ур-ие $x^2 + y^2 = 2ax$.

Р. $x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 - a^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$, значит, окр-ть имеет центр $K(a, 0)$, радиус $R = |a|$, проходит через тч. $O(0, 0)$, т.е. касается оси $Oy$ (рис. 1).

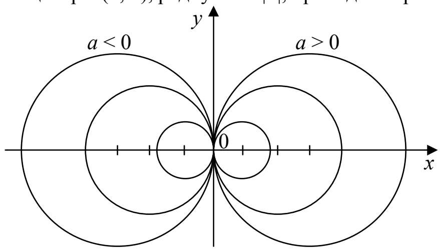


Рис. 1

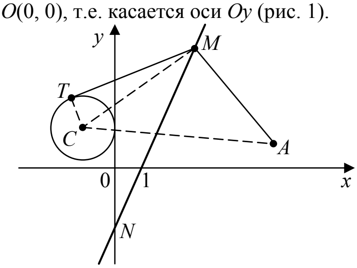


Рис. 2

**тз2а**. Иссл-ть ур-ие $x^2 + y^2 = 2by$. О: $x^2 + (y-b)^2 = b^2$, $K(0, b)$, $|b|$, касается оси $Ox$.

**тз3**. Найти тч-и перч-ия окр-ти радиуса $R = 2$ с центром в нач. крд-ти пм-й $x - 2y + 2 = 0$.

Р. Данная окр. имеет ур-ие $x^2 + y^2 = 4$, к-ое перк-ся с ур-ем $x - 2y + 2 = 0$. Тогда, совместно р-в их, получим $\begin{cases}x-2y+2=0;\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}&x=2y-2;\\&(2y-2)^2+y^2=4\Rightarrow 5y^2-8y=0\Rightarrow y(5y-2)=0.\end{aligned}$

Откуда $\left.\begin{aligned}y_1&=0;\\y_2&=8/5\end{aligned}\right|\left.\begin{aligned}x_1&=-2;\\x_2&=6/5.\end{aligned}\right|$ Тогда $M_1(-2, 0)$, $M_2(6/5, 8/5)$ – искомая тч. перч-я.

**тз3а**. Найти тч-и перч-я пм-й $y = x + 2$ и окр-ти $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$. О: $M_1(2, 4)$, $M_2(-2, 0)$.

**тз4**. Среди пм-х, прл-ых пм-й $2x + y = 0$, выделить кас-ые пм. к окр. $x^2 + y^2 = 1$.

Р. Ур-ие всякой пм-й, прл-ой данной, имеет вид $2x + y + C = 0$. Тогда $y = -2x - C$, $x^2 + (-2x - C)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 + 4xC + C^2 - 1 = 0$. Кас-ая к окр-ти имеет с ней одну общую тч-у, т.е. ур-ие имеет одинаковые корни, сдт-но, дискриминант $D = (4C)^2 - 4 \cdot 5(C^2 - 1) = 0 \Rightarrow C^2 - 5 = 0 \Rightarrow C = \pm\sqrt{5}$.

Итак, ур-ия искомых кас-ых: $2x + y + \sqrt{5} = 0$, $2x + y - \sqrt{5} = 0$.

**тз4а**. Найти тч-у касания пм-й $y = x\sqrt{3}$ с окр-ю $(x-2)^2 + y^2 = 3$. О: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**тз5**. Найти геомч. место тч-к $M$, для каждой из к-ых рст-ие до тч-и $A(3, 1)$ равно длине кас-ой $MT$ к окр-ти $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ (рис. 2).

Р. Пусть $M(x, y)$ – текущая тч. искомой линии. По усл-ю, $MA = MT$ или $MA^2 = MT^2$. Из $\Delta MCT$ по теореме Пифагора находим $MT^2 = MC^2 - CT^2 = MC^2 - 1$, т.к. $CT = R = 1$. Сдт-но, тч. $M$ уд-ет усл-ю $MA^2 = MC^2 - 1$, тогда $(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 1$ или после алгч-их прб-й: $4x - y - 3 = 0$, т.е. искомое геомч. место тч-к есть пм-я $NM$. Проверьте, что $NM \perp CA$.

**тз5а**. Из тч. $A(5, -1)$ к окр-ти $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y - 3 = 0$ проведена кас-ая $AT$. Найти ее длину. О: 3.

**тз6**. Найти геомч. место тч-к, кас-ые из к-ых, проведенные к окр-ям $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, имеют равные длины. О: $2x - 4y + 11 = 0$.

**тз7**. Один конец отрезка перемещается по оси $Ox$, а другой – по $Oy$. Найти ур-ие линии, описываемой серединой этого отрезка, если длина отрезка равна $c$.

**тз8**. Найти полуоси, крд-ы фокусов и эксцентриситет элс-а $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Р. $9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Отсюда следует, что большая полуось $a = 3$, малая полуось $b = 2$. При этом большая полуось и фокусы расположены на оси $Oy$. Найдем $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Сдт-но, крд-ы фокусов $F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$.

**тз8а**. Опр-ть полуоси, крд-ы фокусов и эксцентриситет элс-а $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.

**тз9**. Начертить гпрби-д $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Опр-ть его фокусы, верш-ы, эксцентриситет, асим-ы.

Р. Полуоси (рис. 3) $a = 2$, $b = 3$, сдт-но, верш-ы $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $B(0, -3)$, $B_2(0, 3)$. Через них проводим стороны осн-го пуг-ка. Его диагонали $y = \pm \frac{3}{2}x$ яв-ся асим-ми гпрб-ы. Построив их, через верш-ы $A_1$ и $A_2$ гпрб-ы проводим ее ветви, прж-ая их к асим-ам. Из $c^2 - a^2 = b^2$ находим $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$. Отсюда $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$, $\varepsilon = c/a = \sqrt{13}/2 \approx 1{,}8$.

**тз9а**. Прб-ть в канч. вид ур-ие гпрб-ы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти крд-ы ее верш-н и фокусов, эксцентриситет и ур-ия асим-т. Сделать чертеж.

**тз10**. Опр-ть верш-ы, фокусы, эксцентриситет и асим-ы гпрб-ы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$. Сделать чертеж.

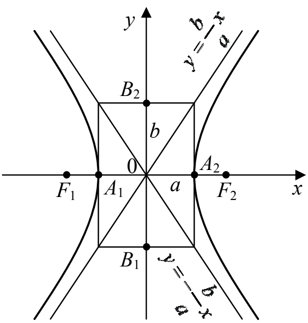


Рис. 3

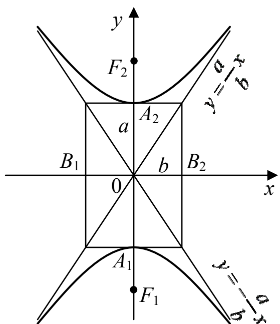


Рис. 4

Р. Гпрб-а имеет фокусы на оси $Oy$, ее дсв-ая полуось $a = 4$, а мнимая – $b = 3$ (рис. 4). Асим-ы $x = \pm 4y/3$, или $y = \pm 3x/4$. Верш. гпрб-ы $A_1(0, -4)$, $A_2(0, 4)$, $B_1(-3, 0)$, $B_2(3, 0)$. Далее, $c = \sqrt{16+9} = 5$, тогда фокусы $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$. Эксцентриситет $\varepsilon = 5/3$.

**тз10а**. Дана гпрб-а $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$. Найти крд-ы фокусов и верш-н, эксцентриситет и ур-ие асим-т.

**тз11**. Парб-а с верш. в нач. крд-т проходит через тч-у $A(2, 4)$ и симч-на отс-но оси $Ox$, тогда ее ур-е имеет вид $y^2 = 2px$. Откуда находим $16 = 2p \cdot 2 \Rightarrow p = 4$. Сдт-но, фокус $F(2, 0)$, ур-ие директрисы $x = -2$, ур. парб-ы $y^2 = 8x$.

**тз11а**. Парб-а с верш. в нач. крд-т проходит через тч-у $A(-2, -3)$ и симч-на отс-но оси $Ox$. Написать ее ур-ие, найти фокус и директрису. О: $y^2 = -\dfrac{9}{2}x$, $x = \dfrac{9}{2}$.

**тз12**. Парб-а с верш. в нач. крд-т проходит через тч. $A(1, -2)$ и симч-на отс-но оси $Oy$. Написать ее ур-ие. О: $x^2 = -\dfrac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$, $F\left(0, -\dfrac{1}{8}\right)$, директриса $y = \dfrac{1}{8}$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п11 и тз1-тз12 р-ть з1-з22.

1. Опр-ть полуоси, крд-ы фокусов и эксцентриситет элс-а $3x^2 + 5y^2 = 15$. О: $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$, $F_1\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\varepsilon = \sqrt{2/5}$.

2. Сост-ть канч. ур-ие элс-а, у к-го большая полуось равна 5, а эксцентриситет равен 0,6. О: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

3. Сост. канч. ур-ие элс-а, у к-го малая полуось равна 6, а рст-ие между фокусами равно 16. О: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

4. Элс. касается оси абсцисс в верш. $A(4, 0)$ и оси ординат в верш. $B(0, -3)$. Сост. ур-ие этого элс. О: $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$.

5. Опр-ть траекторию (трк.) тч-и $M(x, y)$, к-ая при своем двж-и остается в два раза ближе к тч. $F(2, 0)$, чем к пм. $x = 8$. О: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

6. Оси элс-а совпадают с осями крд-т и элс. проходит через тч-и $M(2, 0)$, $N(4, 1)$. Сост. ур-ие элс-а. О: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

7. Сост. ур. элс-а, проходящего через тч. $A(1, 1)$ и имеющего эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$.

8. Как расположены отс-но элс-а $\dfrac{x^2}{50} + \dfrac{y^2}{32} = 1$ тч-и $A(7, 1)$, $N(-5, -4)$, $C(4, 5)$?

9. Эксцентриситет гпрб-ы $\sqrt{2}$. Сост. ур. гпрб-ы, проходящей через тч. $M\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$.

10. Сост. ур. гпрб-ы, имеющей верш-ы в фокусах, а фокусы – в верш-х элс-а $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. О: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

11. Сост. канч. ур-ие гпрб-ы, если ее фокусы лежат на оси $Oy$ и рст-ие между ними равно 20, а дсв-ая ось равна 16. О: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = -1$.

12. Найти длины осей, крд-ы фокусов, эксцентриситет и ур-ия асим-т гпрб-ы $16y^2 - 9x^2 = 144$. О: $2a = 6$, $2b = 8$, $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$, $\varepsilon = 5/3$, $y = \pm 3x/4$.

13. Сост. канч. ур-ие гпрб-ы, зная, что рст-ие между ее фокусами равно 16, а эксцентриситет 4/3. О: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} = 1$.

14. Сост. ур. гпрб-ы, если известно, что асим-ы заданы ур-ми $y = \pm 3x/5$ и гпрб-а проходит через тч-у $\left(10, -3\sqrt{3}\right)$. О: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

15. Опр-ть траекторию (трк.) тч. $M$, к-ая при свеом двж-и остается вдвое ближе к пм-й $x = -2$, чем к тч-е $F(-8, 0)$. О: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$.

16. Сост. ур. гпрб-ы, если известно, что ее асим-ы заданы ур-ми $y = \pm x/2$ и рст-ие между ее фокусами равно 10. О: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

17. Парб-а симч-на отс-но оси $Ox$, проходит через тч. $A(6, -2)$, а верш. ее лежит в нач. крд-т. Сост. ур-ие парб-ы. О: $y^2 = 2x/3$.

18. Найти ур. директрисы и фокус парб-ы $y^2 = 24x$. О: $F(6, 0)$, $x = -6$.

19. Парб-а с верш. в нач. крд-т проходит через тч. $A(-2, -3)$ и симч-на отс-но оси $Ox$. Сост. ее ур-ие и найти фокус и директрису. О: $y^2 = -9x/2$, $F(-9/8, 0)$, $x = 9/8$.

20. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму парб-ы, парм-р к-ой $p = 0{,}1$. Опр-ть высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на рст-и 2 м от выхода. О: 5 м.

21. Сост. ур-ие мн-ва центров окр-ей, касающихся оси $Oy$ и окр-ти $x^2 + y^2 = 4$. О: $y^2 = \pm 4x + 4$.

22. Сост. ур-ие середины хорд парб-ы $y^2 = 8x$, проходящих через ее фокус. О: $y^2 = 4(x - 2)$.

## 5.2. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### Вопросы для самопроверки

1. Опр-те пвх-ти и линии в пр-ве как геомч. места тч-к и их ур-ия в различной форме.
2. Как опр-ся цлнч-ая пвх-ть и различные виды их ур-ий?
3. Как опр-ся конч-ая пвх-ть и какой вид имеет ее ур-ие?
4. Как получаются ур-ия пвх-ти врщ-я?
5. Выведите ур-ие элси-да.
6. Выведите ур-ия однополостного и двуполостного гпрби-дов.
7. Выведите ур-ия элч-го парби-да и гпрбч-го парби-да.
8. В чем состоит суть метода прл-ых сечений?
9. Что такое линейчатые пвх-ти и где они применяются на практике?

**Типовые задачи для самостоятельной работы.**

**тз1**. Установить вид пвх-ти, заданной ур-ем $x^2 + z^2 = \cos^2 y$.

Р. Пересечем данную пвх-ть пл-ю $y = h$. В сечении получим линию $\begin{cases} x^2 + z^2 = \cos^2 h; \\ y = h. \end{cases}$

Значит, при любом зн-и $h$ в сечении получится окр-ть радиусом $r = |\cos h|$ с центром на оси $Oy$. Отсюда следует, что заданная пвх-ть яв-ся пвх-ю врщ-я с осью врщ-я $Oy$. Чтобы выяснить, врщ-м какой линии $L$ образуется эта пвх-ть, пересечем ее с пл-ю $yOz$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 = \cos^2 y; \\ x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} z = \pm\cos y; \\ x = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Итак, данная пвх-ть образована врщ-ем вокруг оси $Oy$ косинусоиды, идущей вдоль этой оси.

**тз2**. Найти ур. элси-да, образованного врщ-ем вокруг оси $Oy$ элс-а $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \\ x = 0. \end{cases}$

Р. В силу ур. (12) получим $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$ или $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Если вместо $c^2$ в первом слг. возьмем $a^2 \neq c^2$, что равносильно врщ-ю вокруг оси $Oy$ не по окр-ти, а по элс-у, то получим элси-д $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**тз3**. Какую пвх-ть опр-ет ур-ие $x^2 + y^2 = 2ax$?

Р. Поскольку данное ур. не содержит $z$, то расв-ая пвх-ть яв-ся цлн-ом с образующими, прл-ми оси $Oz$. Нпвщ-ие этого цлн-ра $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2ax; \\ z = 0 \end{aligned}\right\}$ или $\left.\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 = a^2; \\ z = 0 \end{aligned}\right\}$ яв-ся окр-ю с центром на оси $Ox$ в тч. $(a, 0, 0)$ и радиусом $R = |a|$.

Итак, данное ур. опр-ет круговой цлн-р, ось к-го идет по пм-й $x = a$, $y = 0$.

**тз4**. Установить вид пвх-ти, заданной ур-ем $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$.

Р. Данное ур. не содержит $y$, поэтому расв-ая пвх-ть есть цлн-р с образующими, прл-ми оси $Oy$. Его нпвщ-я $\begin{cases} z^2 + 2z - 4x + 1 = 0; \\ y = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (z+1)^2 = 4x; \\ y = 0 \end{cases}$ есть парб-а на пл-ти $xOz$ с верш. в тч. $(0, 0, -z)$, нпв-я в плж. сторону оси $Ox$.

Т.о., расв-ая пвх-ть яв-ся парбч-им цлн-ом.

**тз5**. Линия $L$ задана ур-ми $x^2 + z^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = r^2$ $(R > r)$. Найти пркц-ю этой линии на пл-ть $xOy$.

Р. У искомой линии $z = 0$, поэтому, иск-в $z$ из двух ур-й и полагая $R^2 - r^2 = a^2$, получим $x^2 - - y^2 = a^2$. Это есть ур-ие гпрбч-го цлн-ра, сдт-но, пркц-ей линии $L$ на пл-ть $xOy$ яв-ся равносторонняя гпрб-а $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, $z = 0$.

**тз6**. Найти тч-у прсч-я элси-да $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$ с пм-й $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{a} = t$ при $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. При каком зн-и $a$ пм-я касается элси-да?

Р. Запишем парм. ур-ия пм-й: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = at$. Подс-я их в ур-ие элси-да, получим $(1 + t)^2 + 2(1 + t)^2 + 4a^2t^2 = 2 \Rightarrow (3 + 4a^2)t^2 + 6t + 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{6 - 4a^2}}{3 + 4a^2}$. При $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ получим два зн-ия: $t_1 = -1$, $t_2 = -1/5$. Сдт-но, тч-и перч-я такие:

$$x_1 = 1 - 1 = 0,\ y_1 = 1 - 1 = 0,\ z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{т.е. } M_1\left(0,\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},\ y_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10},\ \text{т.е. } M_2\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}\right).$$

Если пм-я касается элси-да, то должно выполняться $t_1 = t_2$, т.е. $6 - 4a^2 = 0$. Сдт-но, пм-я касается элси-да при $a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

**тз7**. Иссл-ть и построить пвх-ть, заданную ур-ем $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = -2z$.

Р. Пересечем пвх-ть пл-ю $y = 0$ и получим $\begin{cases} x^2/p - y^2/q = -2z; \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = -2pz$. Это ур-е парб-ы в пл-ти $xOz$. Сечение заданной пвх-ти пл-ю $x = 0$ есть парб-а $\begin{cases} y = 2qz; \\ x = 0. \end{cases}$ Сечение пл-ю $z = 0$ есть пара перкщ-хся пм-х $\begin{cases} x^2/p - y^2/q = 0; \\ z = 0. \end{cases}$ Сечения пл-ми, прл-ми пл-ти $xOy$, есть гпрб-ы $\begin{cases} x^2/(2ph) - y^2/(2hq) = -1; \\ z = h. \end{cases}$ Иссл-м пвх-ть яв-ся гпрбч-им парби-ом.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п7 и тз1-тз7 р-ть з1-з20.

1. Сост. ур-ие кругового цлн-а, ось к-го прл-на оси $Oy$ и проходит через тч-у $P(1, 2, -1)$, а радиус равен 3. О: $(x - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

2. Какую линию в пр-ве опр-ет система ур-й $x^2 + y^2 = 9$, $x - z = 0$? О: элс.

3. В каких тч-х пм. $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$ перк-ет элс. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$. О: $M_1(2, -3, 0)$, $M_2(0, 0, 2)$.

4. В каких тч-х пм. $\frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$ перк-ет однополостный гпрб-ид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} -$ $- \frac{z^2}{4} = 1$? О: $M_1(4, -3, 2)$, $M_2(12, 3, 6)$.

4а. Найти пркц-ю на пл-ть $xOy$ перч-ия элси-да $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ и пл-ти $x + 4z - 4 = 0$.

О: элс. $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1; \\ z = 0. \end{cases}$

5. Найти тч. перч-ия пм-й $\frac{x+5}{3} = \frac{y+11}{5} = \frac{z-9}{-4}$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10z - 19 = 0$. О: $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(4, 4, -3)$.

6. При каком зн-и $a$ пм. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$ касается сф-ы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$? Найти тч-й касания. О: $a = -2$, $M(1/3, 2/3, -2/3)$.

7. Сост. ур-ие кругового конуса, образованного врщ-ем пм-й $y = kz$ вокруг оси $Oy$. О: $k^2x^2 -$ $- y^2 + k^2z^2 = 0$.

8. Сост. ур-ие однополостного гпрби-да, полученного врщ-ем гпрб-ы вокруг оси $Ox$.

О: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

9. Сост. ур-ие двуполостного гпрби-да врщ-я вокруг оси $Oy$. О: $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.

10. Сост. ур-ие пвх-ти, образованной врщ-ем парб-ы $\begin{cases} y = 2pz; \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси $Oz$ (сделать чертеж). О: $x^2 + y^2 = 2pz$.

11. Сост. ур-ие элси-да врщ-я вокруг оси $Ox$ (сделать чертеж). О: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Методом сечений иссл-ть форму и расположение отс-но системы крд-т сд-их пвх-ей (сделать чертеж):

12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$. О: при $x = 0$ и $y = 0$ – гпрб-ы с дсв. осями $Oy$ и $Ox$, $z = h$ – элс-ы.

13. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1$. О: гпрб-ы с дсв. осью $Oz$ при $x = 0$ и $y = 0$, элс-ы при $z = h$ ($h \geq 2$).

14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 0$. О: при $x = 0$ и $y = 0$ – пара пм-х, проходящих через нач. крд-т, при $z = 0$ – тч-а, при $z = h \neq 0$ – элс-ы.

15. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 2z$. О: парб-ы, нпвн-ые в плж. сторону оси $Oz$ при $x = 0$ и $y = 0$, элс-ы при $z = h > 0$, тч-а – при $z = 0$.

16. $x^2 - y^2 = 2z$. О: при $y = 0$ – парб-ы, нпвн-ые в плж. сторону оси $Oz$, при $x = 0$ – парб-ы, нпвн-ые в отц. сторону оси $Oz$, при $z = 0$ – пара пм-х, при $z = h \neq 0$ – гпрб-ы с дсв. осью, прл-ой оси $Ox$, при $h > 0$ и оси $Oy$ при $h < 0$.

17. $x^2 + y^2 = 2(z - 1)^2$. О: конус врщ-я вокруг оси $Oz$ в тч-е (0, 0, 1).

18. $2y^2 + z^2 = 1 - x$. О: элч-й парби-д, нпвн-ый в отц. сторону оси $x$ с верш. в тч-е (1, 0, 0).

19. $3x^2 - y^2 - z^2 = 3$. О: двуполостный гпрби-д врщ-я вокруг оси $Ox$.

20. $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$. О: двуполостный гпрби-д врщ-я вокруг оси $Oy$.

## 5.3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### Вопросы для самопроверки

1. Как осуществляется приведение линий второго порядка к канч. виду выделением полного кв-а?
2. Приведите квч-ую форму двух пер-х к канч. виду. Что такое инварианты?
3. Приведите квч-ую форму трех пер-ых к канч. виду.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п5 р-ть з1-з25.

Выделением полных кв-ов и переносом нач-а крд-т упростить ур-ия линий (сделать чертеж).

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$. О: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6$, $X^2 + Y^2 = 6$ (окр-ть).
2. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$. О: $(x - 3)^2/9 + (y + 1)^2/5 = 1$, $X^2/9 + Y^2/5 = 1$ (элс.).
3. $4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$. О: $(x - 5)^2/9 - (y + 2)^2/4 = 1$, $X^2/9 - Y^2/4 = 1$ (гпрб-а).
4. $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$. О: $(x + 1)^2 = (y + 3)/2$, $X^2 = Y/2$ (парб-а).
5. $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. О: $(y + 2)^2 = 2(x + 1)$, $Y^2 = 2X$ (парб-а).

Приведите к канч. виду ур-ия линий второго порядка. Установите их тип и расположение.

6. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. О: элс. $X^2/2 + Y^2/4 = 1$.
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$. О: парб-а $Y^2 = -X$.
8. $xy + 3x - 3y - 9 = 0$. О: пара пм-х $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$.
9. $3x^2 - 4xy + 4 = 0$. О: гпрб-а $X^2/4 - Y^2/1 = 1$.
10. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$. О: пара пм-х $\sqrt{5}\,X - 3 = 0$, $\sqrt{5}\,X + 3 = 0$.
11. $4xy + 9 = 0$. О: равносторонняя гпрб-а $2X^2 - 2Y^2 + 9 = 0$.
12. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$. О: гпрб-а $X^2/2 - Y^2 = 1$.
13. $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$. О: элс. $X^2/9 + Y^2/4 = 1$.

Выделением полных квадратов и переносом нач-а крд-т упростить ур-ия пвх-ей:

14. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 6z + 20 = 0$. О: сф-а $X^2 + Y^2 + Z^2 = 9$.
15. $4x^2 + y^2 - 8z^2 + 8x - 4y + 16z - 32 = 0$. О: однополостный гпрби-д $X^2/8 + Y^2/32 - Z^2/4 = 1$.
16. $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 - 18x - 16y - 216z - 367 = 0$. О: двуполостный гпрби-д $X^2/4 - Y^2/9 - Z^2/1 = 1$.
17. $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 12x - 6y + 4z - 13 = 0$. О: элси-д $X^2/12 + Y^2/36 + Z^2/18 = 1$.
18. $2x^2 - 3z^2 + 4x + 2y + 6z + 1 = 0$. О: гпрбч-й парби-д $2X^2 - 3Z^2 = 2Y$.
19. $2x^2 + 3y^2 + 12x - 12y + 30 = 0$. О: элч-й парби-д $2X^2 + 3Y^2 = 18Z$.
20. $x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 2x - 16y - 18z + 45 = 0$. О: двуполостный гпрби-д $X^2/36 + Y^2/9 - Z^2/4 = -1$.

Привести к канч. виду ур-ия пвх-ти второго порядка. Установить их тип и расположение.

21. Записать ур-ие пркц-и на крдн-ю пл-ть $xOy$ линии перч-ия парби-да $x^2/2 + y^2/3 = 2z$ пл-ю $3x - 4y - z + 5 = 0$ и, приведя его к канч. виду, установить, какую линию оно задает. О: элс. $X^2/152 + Y^2/228 = 1$.

22. В каких тч-х пм. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ перк-ет элси-д $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{2} = 1$?

О: $M_1(1, 2, -1)$ и $M_2(-1, -2, 1)$.

23. Д-ть, что пм. $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ лежит на однополостном гпрби-де $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

Ук. Надо показать, что при любом зн-и $t$ пармч-ие ур-ия пм-й уд-ют ур-ю данной пвх-ти.

24. При каком зн-и $a$ пм. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{a}$ касается сф-ы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$. Найти тч-у касания. О: $a = -2$, $M(1/3, 2/3, -2/3)$.

25. Сост. ур-ие мн-ва тч-к, расположенных вдвое ближе к тч-е $A(2, 0, 0)$, чем к тч-е $B(-4, 0, 0)$. О: $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

# III. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

# 6. МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ

В будущем наука будет концентрироваться вокруг проблем организации, структуры, языка, информации, программирования и меньше – вокруг проблем силы, движения, вещества, реакции, работы и энергии.

Дж. фон Нейман

## ЛЕКЦИЯ 15

## 6.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ

**1°. Понятие множества. Кванторы. Операции над множествами**. Понятие мн-ва яв-ся первичным понятием в мт-е. Задается мн-во либо перечислением его эл-ов, либо указанием хркч-их св-в (признаков), присущих всем его эл-ам.

Если эл. $x$ принадлежит мн-у $M$, то пишут $x \in M$. В противном случае пишут $x \notin M$ (или $x \overline{\in} M$). Запись $\{x \in M: P(x)\}$ означает мн-во тех эл-ов $x \in M$, к-ые обладают нек-ым св-ом $P$. Пустое мн. можно записать так: $\varnothing = \{x: x \neq x\}$.

Мн. $A$ наз. подмн-ом мн-ва $B$ (обз-ся $A \subset B$ или $B \supset A$), если каждый эл. мн-ва $A$ яв-ся также и эл-ом мн-ва $B$ (рис. 1).

Если $B \subset A$ и $B \supset A$, то $A$ и $B$ наз. равными ($A = B$). Из опр-ия рав-ва мн-в следует, что $A = B$ ттогда, когда они состоят из одних и тех же эл-ов.

Если $B \subset A$ и $B \neq \varnothing$, $B \neq A$, то мн. $B$ наз. собственным подмн-ом мн-ва $A$. Пустое мн. $\varnothing$ и само $A$ наз. несобственными подмн-ми мн-ва $A$.

Ведем еще сд. символы (кванторы), часто употребляемые в дальнейшем.

$P \Rightarrow Q$ – квантор (знак) импликации (следования): читается (чт.) «предложение $P$ имплицирует (влечет) предложение $Q$»; или «из $P$ следует $Q$»; или «если $P$, то $Q$». Если $P$ и $Q$ означают условие и заключение теоремы, то $P \Rightarrow Q$ чт.: «$P$ яв-ся дт. условием для $Q$» или «$Q$ яв-ся нх. усл-ем для $P$».

$P \Leftrightarrow Q$ ($P \sim Q$) – квантор экв-сти; означает, что $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, и чт.: «$P$ есть нх-ое и дт-ое усл-е для того, чтобы имело место $Q$» или «$P$ справедливо ттогда, когда справедливо $Q$», причем $P$ и $Q$ можно поменять местами, т.е. и «$Q$ есть нх. и дт. усл-е для $P$».

$\forall$ – квантор общности: «для всех», «для любого», «все», «всякий», «каждый». Н-р, $\forall\ x \in A$ чт.: «для всех эл-ов мн-ва $A$», $\forall\ (x)\ P(x)$ чт.: «все $x$ обладают св-ом $P(x)$», $\forall\ x \in A$, $P$ чт.: «для всех эл-ов мн-ва $A$ имеет место св. $P$».

$\exists$ – квантор существования: «сущ-ет», «найдется», «хотя бы один». Н-р, $\exists\ x \in A$, $x > 5$ чт.: «в мн-ве $A$ сущ-ет число $x$, большее пяти».

$\overline{A}$ – знак отрицания означает «не $A$» (рис. 3). Если, н-р, $\overline{P \Leftrightarrow Q}$, это означает, что утв-ие $P \Leftrightarrow Q$ не имеет места.

Учитывая введенные кванторы, символ рав-ва $A = B$, к-ый означает, что $A \subset B$ и $A \supset B$, т.е. из $x \in A \Rightarrow x \in B$ и из $x \in B \Rightarrow x \in A$ кратко можно писать так: если $A = B$, то $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Т.о., если $A$ и $B$ содержат одни и те же эл-ы, то пишем $A = B$. Если же $A$ и $B$ содержат лишь одинаковое кол-во эл-ов, то пишем $A \sim B$ (или $A \Leftrightarrow B$). Кроме того, знак $\sim$ ($\Leftrightarrow$) употребляется в смысле равносильности, равнозначности, тождественности ($\equiv$) мн-в, фм-л и стн-й. Приведем несколько примеров использования указанных символов.

**п1**. а) $A \subset B \Leftrightarrow (\forall\ x \in A \Rightarrow x \in B)$: «утв-ие, что мн. $A$ есть часть мн-ва $B$, означает, что все эл-ы из $A$ яв-ся эл-ми из $B$» (рис. 1);

б) $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists\ x \in A \Rightarrow x \notin B)$: «утв-ие, что мн. $A$ не есть часть мн-ва $B$, равносильно сд-му: сущ-ет эл. $x$ из $A$, не принадлежащий $B$».

**п2**. Кванторы общности $\forall$ и сущв-ия $\exists$ связаны стн-ми: $\overline{\forall x \in A : P} \Leftrightarrow \exists\, x \in A\!: \overline{P}$, т.е. если данное утв. не имеет места, то предложение $P$ имеет место не для всех $x \in A$, иначе сущ-ет $x \in A$, не обладающий св-ом $P$. Эту связь легко объяснить и наглядными образами на рис. 2, если за св-во $P$ взять принадлежность тч-и $x$ кругу $B$.

Анч-но, $\overline{\forall y \in B : Q} \Leftrightarrow \forall\, y \in B\!: \overline{Q}$. В этом случае за св-во $Q$ примем принадлежность тч-и $y$ кв-у $A$ (см. рис. 2).

Операции над мн-ми $A$ и $B$ опр-ся сд. образом:

Объединение (сумма) мн-в $A \cup B = \{x\!: x \in A$ или $x \in B\} = \{x\!: x \in A \vee x \in B\}$. (1)

Пересечение (пзв-ие) мн-в $A \cap B = \{x\!: x \in A$ и $x \in B\} = \{x\!: x \in A \wedge x \in B\}$. (2)

Разность двух мн-в $A$ и $B$ $A \setminus B = \{x\!: x \in A$ и $x \overline{\in} B\} = \{x\!: x \in A \wedge x \overline{\in} B\}$. (3)

Если все мн-ва, фигурирующие в нек-ой задаче, включаются в мн. $S$, то мн. $S$ наз. пр-ом. Пусть $A \subset S$. Тогда разность $S \setminus A = CA = C_S A = A' = \overline{A}$ наз. дополнением (дпн.) к мн. $A$ (отс-но пр-ва $S$) (рис. 3), т.е. $\overline{A} = S \setminus A = \{x\!: x \in S$ и $x \overline{\in} A\} = \{x\!: x \in S \wedge x \overline{\in} A\}$. (3а)

Симметрической (симч.) разностью или разностным сж-ем мн-в $A$ и $B$ наз. сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ и обз-ся:

$$A \,\Delta\, B = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x\!: (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A\}, \qquad (3б)$$

где слова «или», «и» заменили на знаки $\vee$, $\wedge$ специально (см. 3°).

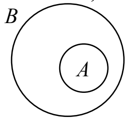



Рис. 1

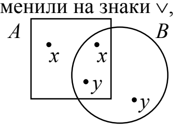



Рис. 2

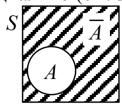



Рис. 3

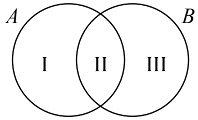



Рис. 4

**п3**. Пусть даны мн-ва: 1) $A$ и $B$ на рис. 4; 2) $A = \{1, 2, 5\}$ и $B = \{2, 3, 5\}$. Найти: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \,\Delta\, B$.

Р. 1) $A \cup B = \{\text{I, II, III}\}$, $A \cap B = \{\text{II}\}$, $A \setminus B = \{\text{I}\}$, $A \,\Delta\, B = \{\text{I}\} \cup \{\text{III}\} = \{\text{I, III}\}$ (см. рис. 4); 2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $A \,\Delta\, B = \{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$.

**п4**. Даны мн. $A$, $\varnothing$, $S$. Найти: $A \cup A$, $A \cup \varnothing$, $A \cup S$, $A \cap A$, $A \cap \varnothing$, $A \cap S$.

Р. $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup S = S$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap S = A$.

**п5**. Задать перечислением все эл-ы мн-ва, опр-ные с помощью сд-х хркч. св-в: 1) $A = \{x \in N\!: x \le 5\}$; 2) $B = \{x \in N\!: x < 0\}$; 3) $C = \{x \in Z\!: |x| \le 2\}$.

Р. 1) Перечислим нтр-ые числа, меньшие или равные числу 5. Имеем мн. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 2) отц-ых нтр. чисел не сущ-ет, поэтому $B = \varnothing$; 3) из р-ия нерав-ва $|x| \le 2$ надо выбирать только целые числа. Его р-ем яв-ся отрезок $[-2, 2]$, тогда $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

**п6**. Сост-ть мн. $B$ из всех подмн-в мн-ва $A = \{1, 2\}$.

Р. Согласно опр-ю подмн-ва данного мн-ва имеем $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Мн-ва дсв-ых чисел или их промежутки (н-р, $[a, b]$) опр-ся так: $[a, b] = \{x\!: a \le x \le b\} = \{x\!: x = (1 - \alpha)a + \alpha b,\ 0 \le \alpha \le 1\}$ – замкнутый промежуток (отрезок, сегмент);

$]a, b[\, = \{x\!: a < x < b\} = \{x\!: x = (1 - \alpha)a + \alpha b,\ 0 < \alpha < 1\}$ – открытый промежуток (интервал).

Анч-но опр-ся полуоткрытые промежутки (полуинтервалы): $]a, b] = \{x\!: a < x \le b\} = \{x\!: x = (1 - \alpha)a + \alpha b,\ 0 < \alpha \le 1\}$, $[a, b[\, = \{x\!: a \le x < b\} = \{x\!: x = (1 - \alpha)a + \alpha b,\ 0 \le \alpha < 1\}$.

Если вид этих мн-в не будет сущн-ым, то будем наз. просто промежутком. По анг-и опр-ся $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$ – беск. промежутки (лучи числовой пм-й); $]-\infty, \infty[$ – беск-ый промежуток (числовая пм. или числовая ось).

**п7**. Найти объединение (объед.) и пересечение (перч.) мн-в: 1) $A = \,]4, 8[$, $B = \,]1, 4]$; 2) $A = \,]-3, 7]$, $B[5, 6]$.

Р. 1) $A \cup B = \,]1, 8[$, $A \cap B = \varnothing$; 2) $A \cup B = \,]-3, 7]$, $A \cap b = [5, 6]$.

Если каждому эл. мн-ва $M$ отвечает мн. $A_\alpha$, то совокупность (свк.) всех этих мн-в наз. системой и обз-ся через $\{A_\alpha\}$. Тогда объед-ие и перч-ие для системы можно писать так: $C = \bigcup\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ и $C = \bigcap\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$.

Если не сущн., какое зн. (конечное и беск.) принимает $\alpha$, то пишут: $C = \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcup A_\alpha$ и $C = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha = \bigcap A_\alpha$. Пользуясь этими и предыдущими знаками, можно писать: 1) $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in M} A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0,\ x \in A_{\alpha_0}$: «из принадлежности эл-та $x$ к объед-ию мн-в следует сущв-ие хотя бы одного из объед-мых мн-в, к-му принадлежит эл. $x$». Чтение остальных анч-но: 2) $x \notin \bigcup_{\alpha\in M} A_\alpha \Rightarrow x \notin A_\alpha, \forall \alpha \in M$; 3) $x \in \bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha \Rightarrow x \in A_\alpha, \forall \alpha \in M$; 4) $x \notin \bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha_0 \in M, x \notin A_{\alpha_0}$.

Отметим, что примерами мн-в могут быть самые различные объекты: мн. студентов в данной аудитории, мн. рац. чисел $Q$, мн. комп. чисел $C$ (см. ниже), мн. тч-к отрезка, мн. высказываний, принимающих зн-ия «истина» или «ложь» (см. ниже), мн-ва матриц, полей, групп, структур, моделей и др. (см. 1°: 1.1), мн. событий (случайных), к-ые могут произойти, а могут и не произойти, н-р, при бросании монеты выпадение цифры – случайное событие (см. 2°: 15.1) и т.д.

**2°. Основные свойства операций**. Исходя из опр-й операций над мн-ми, легко док-ть сд-ие их св-ва:

**с1**. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативный (комм.) закон объед-я).

**с2**. $A \cap B = B \cap A$ (комм-ть перч-я).

**с3**. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность (асс.) объед-я).

**с4**. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (асс-ть перч-ия).

**с5**. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
**с6**. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
} (дистрибутивность (дист.) объед-ия и перч-ия).

**с7**. $S \setminus \cup A_\alpha = \cap (S \setminus A_\alpha)$
**с8**. $S \setminus \cap A_\alpha = \cup (S \setminus A_\alpha)$
} (закон двойственности (двс-ти), в част., получим:

**с9**. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
**с10**. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
} (правило Моргана).

**с11**. $\overline{\overline{A}} = A$.

Д. Используем стандартный метод (способ) док-ва $A = B$: полагаем $x \in A$ и убеждаемся, что $x \in B$, т.е. $A \subset B$. Затем полагаем $x \in B$ и убеждаемся, что $x \in A$, т.е. $B \subset A$. Отсюда заключаем, что $A = B$.

Н-р, **д-во с5**. Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогда $x \in A \cup B$ (т.е. $x \in A$ или $x \in B$) и $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Значит, $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ①. Теперь пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in C, x \in A$ или $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$. Значит, $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$ ②. Из ① и ② $\Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ■

**Д-во с7**. Пусть $x \in S \setminus \cup A_\alpha$. Тогда $x \in S$ и $x \,\overline{\in}\, \cup A_\alpha$, т.е. $\forall\, \alpha\, x \,\overline{\in}\, \cup A_\alpha \Rightarrow \forall\, \alpha\, x \in S \setminus \cup A_\alpha$ $\Rightarrow x \in \cap (S \setminus A_\alpha)$. Значит, $S \setminus \cup A_\alpha \subset \cap (S \setminus A_\alpha)$ ①. Теперь пусть $x \in \cap (S \setminus A_\alpha) \Rightarrow \forall\, \alpha\, x \in S \setminus \cup A_\alpha$ $\Rightarrow x \in S$ и $\forall\, \alpha\, x \,\overline{\in}\, A_\alpha$, т.е. $x \,\overline{\in}\, \cup A_\alpha \Rightarrow x \in S \setminus \cup A_\alpha$. Значит, $\cap (S \setminus A_\alpha) \subset S \setminus \cup A_\alpha$ ②. Из ① и ② $\Rightarrow S \setminus \cup A_\alpha = \cap (S \setminus A_\alpha)$ ■

**Д-во с10**. Пусть $x \in \overline{A \cap B} = S \setminus A \cap B \Rightarrow x \,\overline{\in}\, A \cap B \Rightarrow x \,\overline{\in}\, A$ или $x \,\overline{\in}\, B \Rightarrow x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Значит, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ ①. Пусть теперь $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B} \Rightarrow x \,\overline{\in}\, A$ или $x \,\overline{\in}\, B$ $\Rightarrow x \,\overline{\in}\, A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$. Значит, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ ②. Из ① и ② получаем $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ■

Остальные св-ва д-ть анч-но самим!

Приведенные д-ва яв-ся антч-ми. Однако на практике можно использовать и геом-ие интерпретации (инп.) мн-в, чтобы убедиться в справедливости тождеств (тожд.). Н-р, убедимся в справедливости тожд-а: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Дсв-но, из рис. 4 получаем, что $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{I\} \cup \{II\} = \{I, II\} = A$ ■

**3°. Алгебра высказываний. Предикаты**. Одним из широко применяемых на практике (н-р, при построении ЭВМ, создании различных автоматов и т.д.) видов мн-в яв-ся теория высказываний – язык мтч-ой логики.

Под высказыванием (вск.) понимают всякое утв-ие, сформулированное словесно или записанное с помощью символов (фм-л), о к-ом имеет смысл говорить истинно (обз-ся одним из символов $И$, $I$, 1) оно или ложно ($Л$, $L$, 0).

**п8**. «Рим – столица Италии» есть истинное (ист.) вск., «число 100 делится на 4» – ист. вск-ие, «число 5 меньше числа 3» («$5 < 3$») – ложное вск.

Приведенные вск. яв-ся простыми пст-ми вск-ми.

**п2**. «Слушайте внимательно!» – не яв-ся вск-ем, «$x < 4$» – не яв-ся вск-ем, но если $x$ – конкретное число, то это вск-е.

Заметим, что многие факты произвольных (общих) мн-в, описанных в 1°, 2°, автч-ки переносится на мн. вск-й, в част-ти, на понятия операций, отображения (отб.), экв-сти и т.д. Однако мн. вск-й обладает и специфическими св-ми, н-р, дк-сть пер-ых и фк-й, анализ оснований мт-ки и т.д. Поэтому для изучения мн-ва вск-й возник специальный предмет, назм-ый мтч. логикой, – главная часть дк-ой мт-ки (см. [33]).

Если исх. вск-ия принимают опр. зн-ия *И* и *Л*, то их наз-ем пст-ми элр. вск-ми и обз-им $A$, $B$, $C$, …, $A_1$, $A_2$, …, а если исх-ые вск. не имеют опр-го зн-ия, то их наз. пер-ми элр. вск-ми и обз. $X$, $Y$, $Z$, …, $X_1$, $X_2$, … Если нет нх-ти различать пст-ые и пер-ые вск-ия, то их наз. просто произвольными (элр-ми) вск-ми. Из произвольных вск-й $X$ и $Y$ можно получить сложные вск-ия (анч-но 1°) при помощи сд. лгч-их операций.

**о1**. Дизъюнкцией (диз.) (суммой) вск-й $X$, $Y$ наз. вск-ие $X \vee Y$ (чт. «$X$ или $Y$»), к-ое ист-но (обз. 1) ттогда, когда ист-но хотя бы одно из $X$ или $Y$ вск-й (см. табл. 1).

**о2**. Конъюнкцией (кон.) (пзв-ем) вск-й $X$, $Y$ наз. вск-ие $X \wedge Y$ (чт. «$X$ и $Y$»), к-ое ист-но ттогда, когда ист-ны оба вск. $X$ и $Y$.

**о3**. Импликацией (имп.) (следованием) вск-й $X$, $Y$ наз. вск-ие $X \to Y$ (чт. «$X$ имплицирует (влечет) $Y$», или «из $X$ следует $Y$», или «если $X$, то $Y$»), к-ое ложно ттогда, когда $X$ ист-но, а $Y$ ложно (табл. 1). Причем $X$ наз. посылкой, $Y$ – следованием.

**о4**. Эквивалентностью (экв.) вск-й $X$, $Y$ наз. вск-ие $X \sim Y$ ($X \leftrightarrow Y$) (чт. «$X$ экв. $Y$»), к-ое ист-но ттогда, когда $X$ и $Y$ оба ист. или оба ложны.

**о5**. Отрицанием вск-я $X$ наз. вск-е $\overline{X}$ (чт. «не $X$»), к-ое ист-но, когда $X$ ложно, и ложно, когда $X$ ист-но.

Опр-ия о1-о5 приведены в истинностной (истс.) табл. 1.

**зм1**. В о1 «или» употребляется в неальтернативном смысле. Лгч. операцию, ствщ-ю альтернативному (исключающему) «или» наз. альтернативной диз-ей (сж-ие по модулю 2) и обз-им $X \Delta Y$ (чт. «$X$ плюс $Y$»), к-ое ложно ттогда, когда и $X$, и $Y$ ист-ны или ложны (см. табл. 1).

Таблица 1

| $X$ | $Y$ | $X \vee Y$ | $X \wedge Y$ | $X \to Y$ | $X \sim Y$ | $\overline{X}$ | $X \Delta Y$ | $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$ | $\overline{X} \vee Y$ | $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$ | $(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**зм2**. Иногда нек-ые операции обз-ют иначе, н-р, $X \wedge Y = \min(X, Y)$, $X \vee Y = \max(X, Y)$, $X \Delta Y = X \oplus Y = (X + Y)(\mathrm{mod}\ 2)$, $X \to Y = \{(X, Y): X \le Y\}$.

Всякое сложное вск., сост-ое из нек-ых исх. вск-й посредством операций о1-о5, наз. формулой (фм.) и обз-ся $R$, $S$, $T$, $W$ (заметим, что элр. вск-я можно расв-ть тоже как фм-ы). Если всем пер-ым фм-ы дать опр. зн-ия (*И* или *Л*), то сама фм. примет опр-ое зн. Т.о., каждая фм. опр-ет нек-ую фк-ю, аргументами (арг.) к-ой яв-ся пер-ые (иногда их обз. маленькими буквами $x$, $y$, …, $x_1$, $x_2$, …) элр-ых вск-й. Н-р, для фк-и $f(x, y) = x \wedge y$ пер-ые могут принимать различные зн. в кол-ве $2^n = 4$ ($n = 2$, табл. 1), для $f(x, y, z) = x \vee y \wedge z - 2^3$, …, для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2^n$.

Две фм-ы $R$ и $S$ наз. равносильными ($R \Leftrightarrow S$), если при любых зн-ях пер-х $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящих в $R$ и $S$, эти фм. принимают одинаковые зн-ия. Н-р, $\overline{\overline{X}} \Leftrightarrow X$, $X \vee X \Leftrightarrow X$, $X \vee \overline{X} \Leftrightarrow Y \vee \overline{Y}$ .

Между понятиями равносильности ($\Leftrightarrow$) и экв-ти ($\sim$) сущ-ет связь: если $R \Leftrightarrow S$, то $R \sim S \Leftrightarrow 1$ (т.е. $R \sim S$ ист-но) и обратно: если $R \sim S \Leftrightarrow 1$, то $R \Leftrightarrow S$. Кратко $(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow (R \sim S \Leftrightarrow 1)$.

Приведем основные равносильные фм., вржщ-е одновременно и св. лгч-их операций.

**с1**. $\overline{\overline{X}} \Leftrightarrow X$.

**с2**. $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$ (комм-ть кон-и).

**с3**. $(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$ (асс-ть кон-и).

**с4**. $X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee X$ (комм-ть диз-и).

**с5**. $(X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \vee Z)$ (асс-ть диз-и).

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{с6}.\ X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \\ \textbf{с7}.\ X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \end{array}\right\} \text{(дист-ть кон-и и диз-и).}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{с8}.\ \overline{X \vee Y} \Leftrightarrow \overline{X} \wedge \overline{Y} \\ \textbf{с9}.\ \overline{X \wedge Y} \Leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y} \end{array}\right\} \text{(законы двс-ти).}$$

**с10**. $X \vee X \Leftrightarrow X$.

**с11**. $X \wedge X \Leftrightarrow X$.

**с12**. $X \wedge 1 \Leftrightarrow X$.

**с13**. $X \vee 0 \Leftrightarrow X$.

Св-ва c1-c13 легко проверить, исходя из опр-й операций $\wedge$, $\vee$, –, анч-но св-ам c1-c11 из 2°.

**п10**. Д-ть равносильность фм-л: 1) $X \wedge 0 \Leftrightarrow 0$; 2) $X \vee 1 \Leftrightarrow 1$; 3) $X \vee \overline{X} \Leftrightarrow 1$; 4) $X \wedge \overline{X} \Leftrightarrow 0$; 5) $\overline{X} \vee Y \Leftrightarrow X \to Y$; 6) $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \Leftrightarrow X \sim Y$.

Р. Справедливость 1)-4) следует из опр-ия операций. Справедливость 5) и 6) показана в табл. 1, где приведены $X \sim Y \Leftrightarrow (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$.

Пусть отс-но эл-ов мн-а $M$ сформулировано нек-ое св. $P$. Говорят, что на мн-е $M$ задан предикат $P(x)$, если для каждого фиксированного (фксн.) $x_0 \in M$ $P(x_0)$ становится вск-ем.

Лгч. операции над предикатами опр-ся так же, как и над вск-ми. Н-р, кон-ей предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ наз. такой предикат $P(x) \wedge Q(x)$ (чт. «предикат $P(x)$ и $Q(x)$»), к-ый ист-ен ттогда, когда оба предиката ист-ны.

Если в предложении $P(x, y)$ две предметные пер. $x$ и $y$ (эл-ы $x$ и $y$ могут принадлежать одному мн-у или двум различным мн-ам, к-ые должны быть точно указаны), то говорят, что задан двухместный предикат.

Пусть на мн-е $M$ задан предикат $P(x)$. Запись $(\forall x)$ $P(x)$ чт-ся так: «Для всякого $x \in M$ имеет место св. $P(x)$» ($\forall$ – квантор общности, см. 1°). Запись $(\exists x)$ $P(x)$ чт-ся так: «Сущ-ет такой эл. $x \in M$, для к-го имеет место св. $P(x)$» ($\exists$ – квантор сущв-ия, см. 1°).

Каждое из утв-й $(\forall x)$ $P(x)$ и $(\exists x)$ $P(x)$ либо ист-но, либо ложно, и сд-но, яв-ся вск-ем.

Понятия фм-ы лгк-и предикатов и равносильности фм-л вводятся так же, как и в агл-е вск-й.

Описание и конструирование различных схем вычислительных машин (ВМ) базируются на алг-е вск-й. Каждой схеме ставится в ств-ие фм-а алг-ы вск-й, и каждая фм. реализуется с помощью нек-ой схемы.

Рас-им автомат (авт.) (рис. 5) с $n$ входами и одним выходом. Нас интересует, какие сигналы подаются на входы и что получается на выходе в зв-ти от этого. Работа самого авт-а нас не интересует, поэтому иногда авт. наз-ют черным ящиком.

Входы авт-а обз. кнопками $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Каждая кнопка может быть нажатой (н = 1) или отпущенной (о = 0), а ее состояние не зв-т от состояния остальных кнопок. Иногда вместо «нажатой» («отпущенной») говорят «замкнутой» («разомкнутой»). Тогда в каждый момент вр-и состояние входа авт-а хркз-ся одним состоянием из $2^n$ возможных, а выход авт-а яв-ся фк-ей от входов, т.е. состояний $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Состояние выхода $F$ хркз-ся двумя исх-ми: лампочка горит (г) или погашена (п).

Операции $X_1 \vee X_2$, $X_1 \wedge X_3$, $\overline{X}_4$ обз-им ств-но $X_1 + X_2$, $X_1X_3$, $\overline{X}_4$ (где $X_1, X_2, X_3$ означают, что кнопки $k_1, k_2, k_3$ нажаты, $\overline{X}_4$ – $k_4$ отпущена) и реализуем сд-ие лгч. условия (усл.):

а) $Z = X$, т.е. имеется одна кнопка и авт. осуществляет усл-е: «лампочка горит ттогда, когда кнопка нажата». Эта задача осуществляется с помощью замыкающего контакта по рис. 6;

б) противоположную задачу $Z = \overline{X}$, т.е. «лампочка горит ттогда, когда кнопка отпущена» – авт. осуществляет размыкающий контакт по рис. 7.

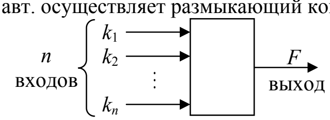


Рис. 5

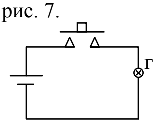


Рис. 6

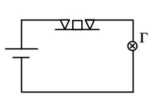


Рис. 7

В дальнейшем в схемах огр-мся только контактами, используя теорию графов [33], где ребрам графа ств-ют контакты, а верш-м – соединения (полюсы) контактов. Тогда вместо рис. 6 и 7 возьмем рис. 8 и 9;

в) кон-я реализуется последовательным (посл.) включением контактов, т.е. «лампочка горит ттогда, когда верна фм. $Z = XY$» (иначе – «нажаты обе кнопки $X$ и $Y$»), рис. 10;

г) диз-я реализуется прл. включением контактов, т.е. «лампочка горит ттогда, когда верна фм. $Z = X + Y$» (иначе – «хотя бы одна $X$, $Y$ нажата»), рис. 11.

**п11**. Найти фк. $F(X_1, X_2, X_3)$, при к-ой авт. включает лампочку при сд-их четырех из восьми возможных сочетаний: $\begin{cases} k_1 : \text{нnно;} \\ k_2 : \text{нноо;} \\ k_3 : \text{нонн.} \end{cases}$

Р. Используя усл-я задачи, получим: $Z = F(X_1, X_2, X_3) \Leftrightarrow X_1X_2X_3 + X_1X_2\overline{X}_3 + X_1\overline{X}_2X_3 + \overline{X}_1\overline{X}_2X_3$.

На основании равносильности фм-л и их св-в упростим полученное врж-ие: $Z = X_1X_2(X_3 + \overline{X}_3) + \overline{X}_2X_3(X_1 + \overline{X}_1)$ или $Z = X_1X_2 + \overline{X}_2X_3$ (рис. 12).

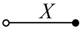



Рис. 8

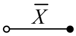



Рис. 9

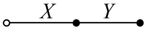



Рис. 10

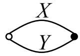



Рис. 11

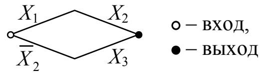



Рис. 12

Более подробно алг. вск-й и предикатов см. в [33].

**4°. Множество комплексных чисел. Многочлены**. Простейшие из квн-ых ур-й, не имеющих корней среди дсв-х чисел, есть
$$x^2 + 1 = 0. \tag{4}$$
Отсюда возникает задача: нужно расширить систему дсв. чисел до такой системы, в к-ой ур. (4) обладало бы корнем, т.е. $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Так возникает нх-сть введения комплексных (комп.) чисел. Комп. числом $z$ наз. врж-ие
$$z = a + ib, \tag{5}$$
где $a$ и $b$ – дсв. числа, $i$ – мнимая (мним.) ед., опрм-я рав-ом:
$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1 \text{ (вообще, } i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i), \tag{6}$$
$a$ наз. дсв-ой частью, $b$ – мним. частью числа $z$ и пишут: $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$.

Если $a = 0$, то число $0 + ib = ib$ наз. чисто мним-м; если $b = 0$, то получим дсв. число $a + i0 = a$, т.е. дсв. числа яв-ся частным случаем комп-х чисел.

Два комп-х числа $z = a + ib$ и $\overline{z} = a - ib$, отличающиеся только знаком мним. части, наз. сопряженными.

Два комп-ых числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются рав-ми, т.е. $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Комп. число равно нулю, т.е. $z = a + ib = 0$, ттогда, когда $a = 0$, $b = 0$.

Всякое комп. число $z = a + ib$ можно изб-ть на пл. $Oxy$ в виде тч-и $A(a, b)$ с крд-ми $a$ и $b$ (рис. 13).

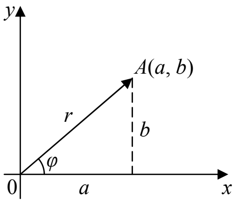



Рис. 13

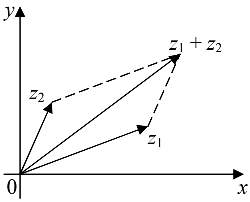



Рис. 14

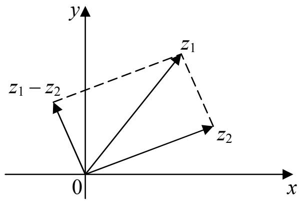



Рис. 15

Обратно, каждой тч. $M(x, y)$ пл-ти ств-ет комп. число $z = x + iy$. При этом пл. $Oxy$ наз. пл-ю комп. пер-го $z$, ось $Ox$ наз. дсв. осью, $Oy$ – мним. осью.

Комп. число можно записать и в тригонометрической (тригч.) форме. Для этого на рис. 13 обз-им через $r = OA$, $\varphi$ – угол между осью $Ox$ и $r$. Тогда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Отсюда $a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{7}$$
где $r$ наз. модулем, $\varphi$ – арг-ом комп-го числа $z$ и врж-ся через $a$ и $b$ так:
$$\left.\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2};\\ \varphi &= \arg z = \mathrm{Arctg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$
В част., для сопряженных чисел $z = a + ib$ и $\overline{z} = a - ib$ имеем $|z| = |\overline{z}|$, $\arg z = -\arg\overline{z}$. Если $|z| = R$ ($R = \mathrm{const}$), то получим окр-ть, а при $|z| < R$ – открытый круг. Отметим, что дсв. число $A$ также можно записать в тригч. форме (7):
$$\left.\begin{aligned} A &= |A|(\cos 0 + i\sin 0);\\ A &= |A|(\cos\pi + i\sin\pi). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$
Комп. число можно представить и в показательной (с учетом фм-ы Эйлера [28]: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) форме:
$$z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$
Над комп. числами в алгч. форме $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ опр-ны сд. действия:

1. Сложение по фм-е (сж-ия вк-ов, рис. 14):
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \tag{11}$$
2. Вычитание по фм-е (рис. 15):
$$z = z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \tag{12}$$
3. Умн-ие по фм-е (умн-ия мчл-ов с учетом (6)):

$$z = z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2) - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2). \tag{13}$$

В част., $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

4. Деление по фм-е

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{14}$$

Стн-ия (13), (14) легко получить для комп. чисел в тригч. форме:

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

или

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{15}$$

В част.,

$$z^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos2\varphi + i\sin2\varphi). \tag{16}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} + i\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}\right] \text{ или}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{17}$$

5. Возведение в степень (сп.) и извлечение корня. Обобщая фм-у (16), получим

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{18}$$

к-ая наз. фм-ой Муавра.

Фм-у извлечения корня можно получить из (18), взяв $1/n$ вместо $n$. Но здесь вместо $\varphi$ надо взять $\varphi + 2k\pi$, чтобы не потерять корень. Тогда

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r\ [\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]} = \\ = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{19}$$

Полагая $k = \overline{0,\, n-1}$, получим $n$ различных зн-й корня.

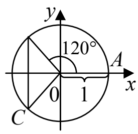


Рис. 16

Фм-у (19) с учетом (9) можно использовать и для выч-ия корня $n$-ой сп-и дсв-го числа $A$ как частного случая комп. числа.

**п1**. Найти все зн-ия кубического корня из ед-цы.

Р. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos0 + i\sin0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}$. Полагая $k = 0, 1, 2$, находим $x_0 = \cos0 + i\sin0 = 1$, $x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. На рис. 16 тч-и $A$, $B$, $C$ яв-ся геомч. изб-ми полученных корней.

**п2**. Р-ть ур-ие $x^4 = 1$.

Р. $x = \sqrt[4]{\cos2k\pi + i\sin2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$. Полагая $k = \overline{0,3}$, получим: $x_0 = \cos0 + i\sin0 = 1$, $x_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$, $x_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1$, $x_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i$.

**зм3**. Из фм. Муавра можно получить полезные для практики стн-ия. Полагая в (18) $r = 1$, получим $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Разлагая левую часть по фм-е бинома Ньютона (см. 5°) и приравнивая дсв. и мним. части, можно врз-ть $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через сп-и $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Н-р, для $n = 3$ получим $\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos3\varphi + i\sin3\varphi$

$$\Rightarrow \cos3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

**зм4**. Результаты операций над комп. числами дают комп-ые числа. Причем если эти операции использовать для дсв. чисел, расв-я их как частный случай комп-ых, то эти операции будут совпадать с известными операциями из ариф-ки.

**зм5**. Если в этих операциях каждое комп. число заменить сопряженным, то и результаты указанных операций заменяются сопряженными числами. Отсюда вытекает

**т1**. Если в многочлен (мчл.) с дсв. коэф-ми $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ подставить вместо $x$ число $a + ib$, а затем сопряженное число $a - ib$, то и результаты этих подстановок будут взаимно сопряженными.

Фк-ия вида $$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \qquad (20)$$
наз. мчл-ом (полиномом или целой рац. ф-ей от $x$) сп-и $n$. Здесь коэф. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ и пер. $x$ – дсв. или комп. числа.

Корнем мчл-а наз. такое зн. пер-го $x$, при к-ом мчл. обращается в нуль.

**т2** (Безу). При делении мчл-а $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.

Д. При делении $f(x)$ на $x - a$ частным будет мчл. $f_1(x)$, сп-нь к-го на ед-у ниже сп-и $f(x)$, остатком будет пст. число $R$, т.е $$f(x) = (x - a)f_1(x) + R. \qquad (21)$$

Отсюда, если $x = a$, то $R = f(a)$ ■

**сл1**. Если $a$ есть корень мчл-а, т.е. $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - a$, и сдт-но, представляется в виде пзв-ия $$f(x) = (x - a)f_1(x), \qquad (22)$$
где $f_1(x)$ – мчл.

Рас-им ур-ие $$P_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0, \qquad (23)$$
к-ое наз. алгч. ур-ем сп-и $n$.

Возникает вопрос: всякое ли ур-е имеет корни? В случае неалгч-го ур-ия ответ отц-ен, н-р, $e^x = 0$ не имеет корня. В случае алгч. ур-ия ответ плж-ен и верен.

**т3** (основная теорема алг-ы, или теорема Гаусса). Всякий мчл. ненулевой сп-и $P_n(x)$ имеет по крайней мере один корень, дсв-ый или комп-ый (док-во см. в [24]).

Если $x = a$ – корень ур-ия (23), то $P_n(x) = (x - a)q_{n-1}(x)$, а при кратности $k$ корня имеем $P_n(x) = (x - a)^kq_{n-k}(x)$. В силу т3 получаем сд-ю

**т4**. Всякий мчл. $n$-ой сп. разлагается на $n$ лин. множителей (мнж.) вида $x - a$ и мнж-ль, равный коэф-у при $x^n$, т.е. $$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n). \qquad (24)$$

**п3**. Мчл. $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$ обращается в нуль при $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Сдт-но,
$$2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 2(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

В фм-е (24) корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть как дсв-ми, так и комп-ми. При этом верна

**т5**. Если мчл. $f(x)$ с дсв. коэф-ми имеет комп. корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

**зм6**. В разложении (24) могут быть кратные корни, как дсв-ые, так и комп-ые. Поэтому с учетом т5 (24) можно писать в виде
$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_p)^{k_p}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\ldots(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}, \qquad (25)$$
где $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$.

**п4**. Найти корни мчл-а $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на мнж-и.

Р. $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2 = (z + 1)^2(z^2 - z + 1)^2 = (z + 1)^2\left[z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2\left[z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2.$

**5°. Комбинаторика. Метод математической индукции. Бином Ньютона**. Рас-им мн. из $n$ эл-ов $M_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в част., $M_3 = \{a, b, c\}$. Дадим сд. опр-ия.

**о1**. Перестановками из $n$ эл-ов наз. такие их соединения, к-ые различаются друг от друга только **порядком** входящих в них эл-ов и обз-ся $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (26)
(чт. «эн факториал»). В част., для $M_3$ имеем $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Дсв-но: $abc, bca, cab, bac, cba, acb$.

Если среди $n$ эл-ов $a, b, c, \ldots$ имеются одинаковые ($a$ повт. $\alpha$ раз, $b$ – $\beta$ раз, $c$ – $\gamma$ раз и т.д.), то
$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}. \qquad (26a)$$

$\widetilde{P}_n$, а также $\widetilde{A}_n^m$ и $\widetilde{C}_n^m$ см. 4°: 6.1 из 6.0.

**о2**. Размещениями из $n$ эл-ов по $m$ наз. такие их соединения, к-ые различаются друг от друга самими **эл-ми** и их **порядком** и обз-ся
$$A_n^m = n(n - 1)\ldots(n - m + 1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots2\cdot1}{(n-m)\ldots2\cdot1} = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (27)$$
откуда при $m = n$ получим $A_n^m = P_n$. В част., $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Дсв-но, имеем: $ab, ac, bc, ba, ca, cb$.

**о3**. Сочетаниями из $n$ эл-о по $m$ наз. такие их соединения, к-ые отличаются друг от друга только самими **эл-ми** и обз-ся $$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (28)$$

В част., $C_3^2 = \frac{3\cdot2}{1\cdot2} = 3$. Дсв-но, получим: $ab, ac, bc$.

Из фм-л (26)-(28) получим сд. их св-ва.

**с1**. $P_0 = 0! = 1$.

Д. $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = P_{n-1} \cdot n$. Отсюда при $n = 1$ получим $P_1 = P_0 \cdot 1 = 1$, т.к. $P_1 = 1! = 1$. Тогда $P_0 = 0! = 1$.

**с2**. $A_n^0 = 1$. Д. Из $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ при $m = 0$ имеем $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.

**с3**. $C_n^0 = 1$. Д. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \cdot n!} = 1$. В част., $C_n^1 = \dfrac{n}{1!} = n$.

**с4**. $C_n^n = C_n^{n-m}$. Д. $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$. В част., $C_n^0 = C_n^n = 1$.

**с5**. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$. Д. Т.к. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ (см. о2), то $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

**с6**. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, $1 \le m < n$ (правило Паскаля).

Д. Имеем $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \dfrac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\dfrac{1}{n-m} + \dfrac{1}{m}\right) =$
$= \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\,\dfrac{n}{(n-m)m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$.

**с7**. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Д. Из фм-ы бинома Ньютона (см. далее) имеем $(a+x)^n = a^n + \dfrac{n}{1!}a^{n-1}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 +$
$+ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n \Rightarrow (a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^n x^n =$
$= \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} x^i$. Отсюда при $a = x = 1$ получим $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

**зм7**. При р-и комбинаторных задач два действия могут выполняться одновременно по правилу умн-ия (н-р, $P_nP_k$, $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ и т.д.) или может быть выполнено либо первое действие, либо второе по правилу сж-ия (н-р, $A_n^k + A_m^k$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$ и т.д.). Причем правила умн-ия и сж-ия можно распространять на любое конечное число действий.

**п5**. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на расположенные подряд стулья, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – с нечетными. Сколькими способами это можно сделать?

Р. Здесь соединения отличаются друг от друга только порядком. Тогда мальчики могут садиться $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами. Столько же – $P_4$ – возможностей имеют и девочки. Эти действия (перестановки) выполняются одновременно. Значит, всего будет $P_4P_4 = 24 \cdot 24 =$ $= 576$ способов.

**п6**. Нх-мо составить (сост.) варианты контрольной (кр.) работы, каждый из к-ых должен содержать три задачи. Одна задача выбирается из любого параграфа (§) I гл. сборника задач, вторая – из любого § II гл., а последняя – из любого § III гл. При этом следует учесть, что I и III гл. содержат два §, а II гл. – три §. Сколько видов кр. работы можно сост-ть, исходя из этих усл-й, если вид работы опр-ся только номерами §-ов, из к-ых выбраны задачи?

Р. Для каждой гл. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком, значит, для гл. I, II и III ств-но имеем $A_2^1 = 2$ способа. Здесь сами эл-ы не играют роли из-за выбора по одному эл-у (сравните с п7). Соединения выбираются одновременно, тогда всего $A_2^1\ A_3^1\ A_2^1 =$ $= 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ способов.

**п7**. В группе 25 учащихся. Нх-мо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

Р. В данном случае из 25 учащихся выбираем старосту и из оставшихся 24 – профорга. Можно выбирать и наоборот: сначала профорга, затем старосту. Т.е. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком. Значит, имеем всего $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$ способов выбора.

Задачу можно решить и так: сначала выбираем старосту $A_{25}^1 = 25$ способами, затем профорга $A_{24}^1 = 24$ способами. Т.к. эти действия выполняются одновременно, то по правилу умн-ия получим $A_{25}^1\ A_{24}^1 = 25 \cdot 24 = 600$.

**п8**. В группе 25 чел. Сколькими способами из них можно выбрать двоих на дежурство?

Р. Ясно, что здесь соединения отличаются друг от друга только самими эл-ми, сд-но, получим всего $C_{25}^2 = \dfrac{25 \cdot 24}{2!} = 300$ способов выбора.

Рас-им теперь метод мтч-ой индукции, на основе к-ой док-ся многие мтч. утв-ия.

Пусть $A(n)$ – нек-ое утв., имеющее смысл для нтр. чисел $n$. И пусть $A(n)$ ист-но для $n = 1$. Тогда, если из истс-и $A(n)$ для $n = k$ следует истс-ть $A(n)$ для $n = k + 1$, то утв. $A(n)$ ист-но для любого нтр. числа $n$.

Д-во методом мтч. индукции состоит в сд-ем: 1) док-ся, что утв. $A(1)$ ист-но; 2) предполагается, что утв. $A(n)$ ист-но для $n = k$, и док-ся его справедливость при $n = k + 1$. После этого на основании принципа мтч-ой индукции делается вывод, что утв. $A(n)$ ист-но для любого нтр. $n$.

**п9**. Д-ем, что для любого нтр. числа $n$ и любого дсв. числа $a > -1$ имеет место нерав-во Бернулли:

$$(1 + a)^n \geq 1 + an. \tag{29}$$

При $n = 1$ (1) верно: $(1 + a)^1 \geq 1 + a \cdot 1$. Предположим, что (29) верно при $n = k$: $(1 + a)^k \geq 1 + a \cdot k$. И д-ем его справедливость при $n = k + 1$: $(1 + a)^{k+1} \geq (1 + a \cdot k)(1 + a) = 1 + ak + a + a^2k \geq 1 + a(k + 1)$.

Значит, на основании принципа мтч. индукции (29) верно при любом $n$.

**зм8**. Вместо $A(1)$ и $A(k)$, $A(k + 1)$ можно взять $A(2)$ и $A(k - 1)$, $A(k)$ (или $A(n - 1)$, $A(n)$), т.к. от этого принцип мтч. индукции не нарушается.

**зм9**. Иногда утв. $A(n)$, заранее неизвестное, получается методом **обобщения**. Н-р, используем его для вывода фм-ы бинома Ньютона.

Двучлен вида $a + x$ наз. биномом. Найти, чему равен $(a + x)^n$. Находим

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + \frac{2}{1!}\,ax + \frac{2 \cdot 1}{2!}\,x^2; \tag{30}$$

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + \frac{3}{1!}\,a^2x + \frac{3 \cdot 2}{2!}\,ax^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}\,x^3;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a + x)^n = a^n + \frac{n}{1!}\,a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\,x^n =$$

$$= C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1} x^1 + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \ldots + C_n^n a^0 x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} x^i\ . \tag{31}$$

Стн. (31) наз. фм-ой бинома Ньютона. Справедливость этого стн., полученного методом **обобщения**, не вызывает сомнений. Более того, этот метод указывает способ получения желаемого утв. $A(n)$.

Конечно, при нх-ти полученный результат можно д-ть и методом мтч. индукции. В этом случае задается (31), справедливость к-го надо д-ть. Устанавливаем справедливость $A(2)$ по (30).

Пусть справедливо $A(n - 1)$: $(a + x)^{n-1} = a^{n-1} + \dfrac{n-1}{1!}\,a^{n-2}x + \ldots + \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(n-1)!}\,x^{n-1}$. $\quad$ (32)

Д-ем справедливость $A(n)$, учитывая (32): $(a + x)^n = (a + x)^{n-1}(a + x) = a^n + \dfrac{n-1}{1!}\,a^{n-1}x\ +$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots 1}{(n-1)!}\,ax^{n-1} + a^{n-1}x + \frac{n-1}{1!}\,a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n-2)!}\,ax^{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n(n-1)!}\,x^n = a^n + \frac{n}{1!}\,a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n-2)!}\,ax^{n-1} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\,x^n,$$ т.е.

получили (31). Значит, стн. (31) справедливо для любого $n$.

**п10**. $(1 + x)^4 = 1 + \dfrac{4}{1!}\,x + \dfrac{4 \cdot 3}{2!}\,x^2 + \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}\,x^3 + \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!}\,x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

# ЛЕКЦИЯ 16

## 6.2. ФУНКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**1°. Понятие и график функции**. Читателю еще со школы известны [32] рациональные (рац.), иррациональные (иррац.) и основные (осн.) элр-ые [показательная (пкзт.), логарифмическая (лгрч.), степенная (спн.), тригонометрическая (тригч.), обратная тригч.] функции (фк.), графики (грф.) к-ых в кач-ве повторения приведены в приложении (прлж.) $T_1$. В данном параграфе (§) напомним осн. понятия и изучим более подробно характеристики (хркс.) этих и др. фк-й.

Пусть имеются произвольные мн. $D$ (назм-ое обл-ю опр-ия) и $E$ (назм. обл-ю зн-й). Соответствие (ств.), к-ое каждому эл. $x \in D$ относит нек-ый эл. $y \in E$, наз. фк-ей и обз-ся

$$y = f(x),\ \text{или}\ x \to f(x),\ \text{или}\ f\colon D \to E, \tag{1}$$

где $x$ наз. незв. пер-ой (аргументом (арг.)), $y$ – зв. пер-ой (фк-ей). Иногда вместо $D$ и $E$ пишут $D(f)$ и $E(f)$ или $X$ и $Y$.

Пусть дана фк. $y = f(x)$ с обл-ю опр-ия $D$. Грф-ом фк-и $f(x)$ наз. мн-о точек (тч.) крдн-ой пл-и с крд-ми $\{x, f(x)\}$, где $x \in D$.

**п1**. Найти обл-ти опр-ия и зн-й сд-их фк-й и построить их грф-и: 1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = x$; 3) $y = x^3$; 4) $y = x^2$.

Р. 1) Т.к. $y = 3 - 2x$ – прямая (пм.), то дт-но найти две тч-и: если $x = 0$, то $y = 3$; если $y = 0$, то $x = 3/2$ (рис. 1), $X = ]-\infty; \infty[$ и $Y = ]-\infty; \infty[$; 2) аналогично (анч.) находим $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$ и построим $y = x$, к-ый наз. биссектрисой (бист.) I и III крдн-ых углов (рис. 2), где $X = ]-\infty; \infty[$ и $Y = ]-\infty; \infty[$; 3) $y = x^3$ есть кубическая парб., ее можно построить по тч-ам (рис. 3), где $X = ]-\infty; \infty[$, $Y = ]-\infty; \infty[$; 4) т.к. $y \geq 0$, то $X = ]-\infty; \infty[$ и $Y = ]0; \infty[$ (рис. 4).

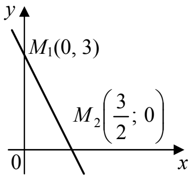



Рис. 1

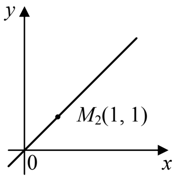



Рис. 2

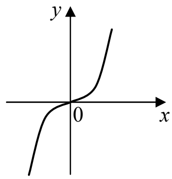



Рис. 3

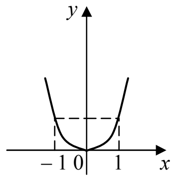



Рис. 4

**п2**. Найти обл-ти опр-ия и зн-й фк-й: 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = 1\big/\sqrt{x^2 - 1}$. Построить их грф-и.

Р. $0 \leq 1 - x^2 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$, т.е. $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$, а $y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, тогда грф-к есть полуокр-ть (рис. 5); 2) $0 < x^2 - 1 \Rightarrow 1 < |x|^2 \Rightarrow 1 < |x| \Rightarrow 1 < x$, $1 < -x$ или $-1 > x$, т.е. $D = ]-\infty; -1[ \cup [1; \infty[$. Если $x \to \pm 1$, то $y \to \infty$; если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Отсюда получим грф-к фк-и $y = 1\big/\sqrt{x^2 - 1}$ (рис. 6). Причем $Y = ]0; \infty[$.

**2°. Функции четные, нечетные и периодические**. При изучении фк-й и построении их грф-ов полезны сд-ие

**о1**. Фк. $f(x)$ наз. четной (чет.), если 1) $\forall\, x \in D \Rightarrow -x \in D$ и 2) $f(-x) = f(x)$. Грф-к чет. фк-и симметричен (симч.) оси $Oy$. Н-р, $y = x^2$ (рис. 4), $y = \sqrt{1 - x^2}$ (рис. 5), $y = 1\big/\sqrt{x^2 - 1}$ (рис. 6), $y = \cos x$.

**о2**. Фк. $f(x)$ наз. нечетной (нечет.), если 1) $\forall\, x \in D \Rightarrow -x \in D$ и 2) $f(-x) = -f(x)$. Грф-к нечет. фк-и симч-ен нач-у крд-т. Н-р, $y = x$ (рис. 2), $y = x^3$ (рис. 3), $y = \sin x$ (рис. 11).

Возможны случаи, когда фк-я не относится (отс.) ни к одному из указанных классов. Н-р, фк. $y = x^2 - x + 1$ не яв-ся ни чет-й, ни нечет-й; такова и фк-я $y = \sin x + \cos x$.

Любую фк., опрн-ю на симч-ой обл-и, можно представить в виде суммы двух фк-й, из к-ых первая чет., а вторая – нечет.

**о3**. Фк. $f(x)$ наз. периодической (прдч.), если сущ-ет такое пст. число $C \neq 0$, что $f(x) = f(x + C)$. Такое наименьшее (нм.) число наз. периодом (прд.) фк-и и в дальнейшем его обз-им $2l$. Н-р, для фк. $y = \sin x$ (рис. 11) прд-ом будет $2l = 2\pi$.

**3°. Обратная функция**. Пусть фк. $y = f(x)$ с обл-ю опр-ия $D$ такова, что различным зн-м арг-а $x_1, x_2 \in D$ ств-ют различные зн. $y_1, y_2 \in E$ (см. п1, п2). При этом фк. $y = f(x)$ устанавливает взаимно однозначное (биективное) ств-ие между обл-ю опр-ия $D$ и обл-ю зн-й $E$.

Тогда каждому зн-ю $y \in E$ ств-ет едн. число $x \in D$, т.е. на мн-ве $E$ опр-на фк-я, к-ая наз. обратной фк-ей для фк-и $f$ и обз-ся $f^{-1}$:

$$x = f^{-1}(y) \tag{2}$$

с обл-ю опр-ия $E$ и обл-ю зн-й $D$.

Ств-ие (2) будем писать в привычном виде

$$y = f^{-1}(x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Грф-и фк-и $y = f(x)$ и ее обратной фк-и $y = f^{-1}(x)$ симч-ны бист-е $y = x$ I и III крдн-ых углов.

Дсв-но, если тч. $M(a, b)$ принадлежит грф-у фк-и $y = f(x)$, то $b = f(a)$ (рис. 7). Т.к. сущ-ет обратная фк-я, то $a = f^{-1}(b)$, т.е. тч. $M'(b, a)$ принадлежит грф-у обратной фк-и $y = f^{-1}(x)$.

Верно и обратное: если тч. $M'(b, a)$ принадлежит грф-у обратной фк-и $y = f^{-1}(x)$, то $a = f^{-1}(b)$. Сдт-но, $b = f(a)$ и тч. $M(a, b)$ принадлежит грф-у фк-и $y = f(x)$.

Покажем, что тч. $M(a, b)$ и $M'(b, a)$ симч-ны бист-е $y = x$. Эти тч. равноудалены от нач. крд-т $OM = OM' = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Кроме того, тч. $N\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$, как середина отрезка $MM'$, лежит на пм. $y = x$. Значит, тч. $M$ и $M'$ симч-ны бист-е $y = x$.

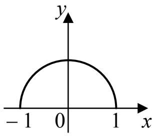



Рис. 5

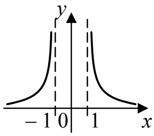



Рис. 6

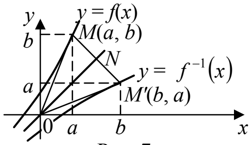



Рис. 7

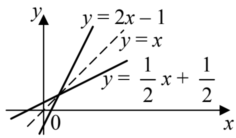



Рис. 8

**п3**. Найти обратную фк-ю к фк-и $y = 2x - 1$, построить их грф-и.

Р. Из $y = 2x - 1$ находим $x = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}$ и получим обратную фк-ю $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Построим их грф-и (рис. 8).

**п4**. Найти обратную фк-ю к фк-и $y = x^3$, построить их грф-и.

Р. Из $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x}$ – обратная фк. Построим их грф-и (рис. 9).

Отметим, что фк. $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда (ттогда), когда эта фк. двум разным арг-ам ставит в ств-е разные зн. фк-и. Н-р, фк. $y = x^2$, $X = R = ]-\infty, \infty[$ не имеет обратную фк-ю. Однако фк. $y = x^2$ при $X = [0, \infty[$ имеет обратную, т.к. она становится однозначной фк-ей (рис. 10).

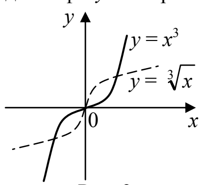



Рис. 9

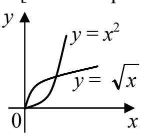



Рис. 10

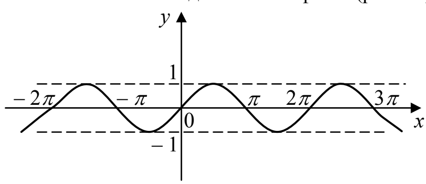



Рис. 11

**п4а**. Найти обратную фк-ю к фк-и $y = 2^x$, построить их грф-и.

**4°. Способы задания функций**. Фк-и задаются различными способами:

1*. Табличный. Каждому зн-ю $x \in M$ указывается зн. $y \in N$ в виде табл-ы. Н-р, табл-ы тригч-х, лгрч-х и др. фк-й;

2*. Графический. Зв-ти между $x \in M$ и $y \in N$ задаются грф-ом. Этот способ часто используется на первых порах обучения мт-ке с целью наглядного представления изучаемого объекта;

3*. Аналитический. Фк-и задаются аналитическим (антч.) врж-ем или фм-ой. Н-р:

а) $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $M = ]-\infty; \infty[$; $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $M = [-1, 1]$; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $M = ]-1, 1[$;

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $M = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, \infty[$;

б) фк-и могут опр-ся различными фм-ми для различных зн-й $x$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > 1, \\ 0, & \text{если } x = \pm 1, \\ -1, & \text{если } |x| < 1; \end{cases}$$

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ – фк. Кронекера «сигнум } x\text{»}, \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рац.}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррац.} \end{cases} \text{ – фк. Дирихле;}$$

4*. Условный способ задания фк-и. В этом случае фк-и задаются без помощи фм-л с указанием нек-го усл-я. Н-р, фк. $E(x) = [x]$ – «целая часть числа $x$»: $E(1) = 1$, $E(2{,}5) = 2$, $E\left(\sqrt{13}\right) = 3$, $E(-\pi) = -4$ и т.д. Фк. $n!$ – «факториал числа $n$»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Фк. $\tau(n)$ – «число делителей числа $n$»: $\tau(10) = 4$, $\tau(12) = 6$, $\tau(16) = 5$ и т.д. Фк. $\varphi(n)$ – «число взаимно простых чисел в ряду $1, 2, \ldots, n \subset n$»: $\varphi(10) = 4$, $\varphi(12) = 4$, $\varphi(16) = 8$ и т.д.

**5°. Классификация функций**. Фк-и, заданные антч-ки, делятся на два класса: алгебраические (алгч.) и неалгебраические (неалгч.) (см. рис. 12).

1*. Алгч-ми наз. фк-и, содержащие алгч. врж-ия с алгч. операциями. Алгч. фк-и делятся на рац-ые и иррац-ые. А рац-ые фк-и, в свою очередь, делятся на целые и дробные.

Целой рац. фк-ей или мчл-ом степени (сп.) $n$ наз. фк-я вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $n$ – целое плж. число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – пст. коэф-ы.

При различных зн-ях $n$ получим фк-и: $y = kx + b$ – лин-я, $y = ax^2 + bx + c$ – квч-я и т.д. Дробно-рац. фк-я имеет вид:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

В част., $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ – дробно-лин. фк-я.

Алгч. фк-я наз. иррац-ой, если в составе указываемых операций над арг-ом имеется извлечение корня или возведение в дробную сп-нь, н-р, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x^{2/3}$.

2*. Неалгч. фк-и наз. осн-ми элр. фк-ми. Рас-им их:

1) пкзт-я фк. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

2) лгрч-я фк. $y = \lg_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

3) спн-я фк. $y = x^\alpha$ ($\alpha$ – иррац. число); иногда будем полагать, что $\alpha$ – любое дсв. число;

4) тригч. фк-и: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ и (секанс, косеканс) $y = \mathrm{sc}x = 1/\cos x$, $y = \mathrm{csc}x = 1/\sin x$;

5) обратные тригч. фк-и: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$.

Классификация фк-й приведена на рис. 12, а их грф-и см. в прлж. 1°: $\Pi_2$.

**6°. Сложная функция и операции над функциями**. Если для каждого $x \in M$ опр-на фк. $y = f(x) \in N$, для к-ой, в свою очередь, опр-на фк. $z = \varphi(y) \in Q$, то каждому $x \in M$ ств-ет фк-я $z = \varphi[f(x)] \in Q$, к-ая наз. сложной фк-ей, или композицией (суперпозицией) отображения (отб.) $\varphi$ на $f$ и обз. $\varphi \circ f = \varphi[f(x)]$. Анч-но опр-ся $\psi \circ \varphi \circ f = \psi[\varphi(f(x))]$.

**п5**. Если $y = \sqrt{x} = f(x)$ и $z = \sin y = \varphi(y)$, т.е. $\varphi(x) = \sin x$, то $\varphi \circ f = \varphi[f(x)] = \varphi\left(\sqrt{x}\right) = \sin\sqrt{x}$ – сложная фк.

Из опр-ия сложной фк-и получаем сд-ие ее св-ва:

**с1**. $\varphi \circ f \neq f \circ \varphi$ (композиция не комм-на). Н-р, если $f(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = \sin x$, то $\varphi \circ f = \sin\sqrt{x}$ и $f \circ \varphi = \sqrt{\sin x}$, т.е. $\sin\sqrt{x} \neq \sqrt{\sin x}$.

**с2**. $\psi \circ (\varphi \circ f) = (\psi \circ \varphi) \circ f$ (композиция асс-на). Н-р, $\ln\left(\sin\sqrt{x}\right) = (\ln\sin)\sqrt{x}$.

Если $f$ – взаимно однозначное (биективное) отб. $M$ на $N$, то $f^{-1}$ есть отб. $N$ на $M$, а $f^{-1} \circ f$ есть тождественное (тожд.) отб. мн. $N$. Точно так же $f \circ f^{-1}$ есть тожд-ое отб. мн. $M$.

Пусть $f$ есть биективное отб. $M$ на $N$, а $\varphi$ – биективное отб. $N$ в $Q$, тогда $\varphi \circ f$ есть биективное отб. $M$ на $Q$ и $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Классификация фк-й

- Алгебраические фк-и
  - Рац. фк. $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
    - Целые рац. фк. $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n = 1$, $y = kx + b$ – лин. фк., $n = 2$, $y = ax^2 + bx + c$ – кв. фк.
    - Дробно-рац. фк. $y = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$, $n = m = 1$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ – дробно-лин. фк.
  - Иррац. фк-и, н-р, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x^{2/3}$
- Неалгебраические фк-и
  - Пкзт. фк. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
  - Лгрч. фк. $y = \lg_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
  - Спн. фк. $y = x^\alpha$ ($\alpha$ – любое дсв. число)
  - Тригч. фк. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{sc} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \operatorname{csc} x = \dfrac{1}{\sin x}$
  - Обратные тригч. фк-и $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Рис. 12

**п6**. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = \sin x$. Проверить справедливость $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Р. $f^{-1} = x^2$, $\varphi^{-1} = \arcsin x \Rightarrow \varphi \circ f = \sin\sqrt{x} \Rightarrow (\varphi \circ f)^{-1} = (\arcsin x)^2$. А $f^{-1} \circ \varphi^{-1} = f^{-1}(\arcsin x) =$ $= (\arcsin x)^2$, т.е. $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Элементарной (элр.) фк-ей наз. всякая фк., к-ая может быть получена из конечного числа осн-ых элр. фк-й с помощью арифч-их операций и операции композиции.

Грф-ом сложной фк-и наз. мн. $\Gamma = \{(x, y) \in R^2 : x \in D, y = f(x)\}$, где $R^2$ – мн. тч-к пл-ти (дек-во пзв-ие $R^2 = R \times R$).

**7°. Построение графиков функций с помощью параллельного переноса и изменения масштабов**. Грф-и более сложных фк-й можно получить из грф-ов осн. элр. фк-й с помощью прл-го переноса и изменения (изм.) масштабов.

Пусть грф-к фк-и $y = f(x)$ известен. Требуется построить грф-и фк-й $y = f(mx)$, $y = f(x + a)$, $y = nf(x)$ и $y = f(x) + b$.

Грф-к фк-и $y = f(mx)$ получается из грф-а фк. $f(x)$ сжатием его вдоль оси абсцисс в $m$ раз, т.е. каждая тч. $M(x, y)$ грф-а фк-и $f(x)$ заменяется на грф-е фк-и $f(mx)$ тч-й $M\left(\dfrac{x}{m}, y\right)$ (рис. 13а).

Грф-к фк-и $y = f(x + a)$ получается из грф-а фк-и $f(x)$ сдвигом оси $Ox$ на $-a$ ед., т.е. каждая тч. $M(x, y)$ грф-а фк-и $f(x)$ заменяется на грф-е фк-и $y = f(x + a)$ тч-й $M_1(x - a, y)$ (рис. 13б).

Грф-к фк-и $y = nf(x)$ получается из грф-а фк. $f(x)$ растяжением его вдоль оси $Oy$ в $n$ раз, т.е. каждая тч. $M(x, y)$ грф-а фк-и $f(x)$ переходит в тч-у $M_1(x, ny)$ фк-и $nf(x)$ (рис. 13в).

Грф-к фк-и $y = f(x) + b$ получается из грф-а фк. $f(x)$ прл. сдвигом оси $Oy$ на $b$ ед., т.е. каждая тч. $M(x, y)$ грф-а фк-и $f(x)$ переходит в тч-у $M_1(x, y + b)$ фк-и $f(x) + b$ (рис. 13г).

Указанные прб. позволяют строить грф-и фк-й более сложного вида:

$$y = Cf[k(x - a)] + b. \tag{4}$$

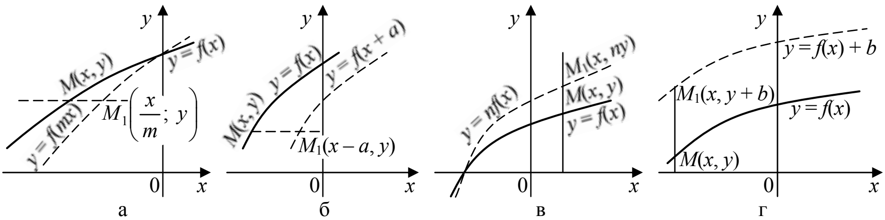



Рис. 13

**п7**. Построить грф-к фк-и $y = 3 + 2\sin\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$.

Р. Исходя из грф-а фк. $y = \sin x$ (рис. 14), строим грф-ки сд-их фк-й: $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$,

$y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$, $y = 2\sin\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$, $y = 3 + 2\sin\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$.

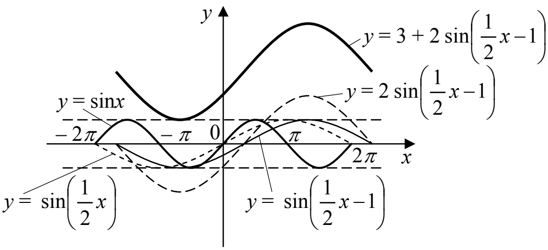



Рис. 14

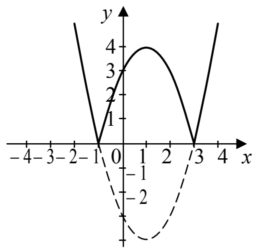



Рис. 15

**п8**. Построить грф-к фк-и $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Р. Построим сначала грф-к фк-и $y = x^2 - 2x - 3$. Прб-уя правую часть последнего ур-ия, получим $y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$ или $y = (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow y + 4 = (x - 1)^2$. Это ур-ие опр-ет парб-у с верш-й в тч. $O'(1, -4)$ и осью, прл-ой оси $Oy$ (рис. 15). Парб-а перк-ет ось $Ox$ в тч-х $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. При этом $y = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, откуда видно, что

$$(x^2 - 2x - 3) > 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } x > 3,$$
$$(x^2 - 2x - 3) < 0 \text{ при } -1 < x < 3.$$

Причем $f(x) = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ если } x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ -\left(x^2 - 2x - 3\right), \text{ если } \left(x^2 - 2x - 3\right) < 0. \end{cases}$

Т.о., грф-к фк-и $y = |x^2 - 2x - 3|$ при $x < -1$ и $x > 1$ совпадает с грф-ом фк-и $y = x^2 - 2x - 3$, а при $-1 < x < 3$ – с грф-ом $y = -(x^2 - 2x - 3)$, т.е. изм-ся знак фк-и (рис. 15).

## ЛЕКЦИЯ 17

# 6.3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

**1°. Числовая последовательность**. Понятие предела играет исключительно важную роль во всех разделах мт-ки. Поэтому целесообразно изложить его с наиболее общей точки (тч.) зрения, как основу остальных специфических пределов. Именно такую роль играют пределы мн-ва и отб-й, к-ые, в свою очередь, основываются на понятии числа и их св-ах. Мн. дсв. чисел $R$ и мн. тч-к $M$ числовой прямой (пм.) биективны (т.е. взаимно однозначны). Поэтому можно говорить «тч. $x$» вместо «число $x$», «мн. тч-к $x$» вместо «мн. чисел $x$». Иногда вместо понятия тч-и или числа будем употреблять понятие величины.

Величина (вел.) наз. постоянной (пст.) (обз-ся $a$, $b$, $c$, $x_0$, $y_0$; $a_1$, $a_2$, …), если она сохраняет одно и то же значение (зн.). Н-р, $\pi$ – отн-ие длины окр-ти к диаметру, $g$ = 9,81 м/сек$^2$ – ускорение свободно падающего тела.

Вел-а наз. переменной (пер.) (обз-ся $x$, $y$, $z$, …), если она принимает различные числовые зн-ия из нек-ой обл-ти. Н-р, скорость $v$ свободно падающего тела, изменение (изм.) температуры $t°$ воздуха за сутки.

Пер. вел-у можно расв-ть и как последовательность (посл.) принимаемых зн-й

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{x_n\}, \qquad (1)$$

где каждому зн. (номеру) $n$ отнесено число (фк-я) $x_n$, т.е. $f(n) = x_n$, к-ая наз. общим членом числовой посл-ти. Чтобы задать числовую посл., нх-мо знать ее общий член.

**п1**. Пусть $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Тогда получим посл-ть: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \ldots, \dfrac{n}{2n+1}, \ldots$

**п1а**. Если $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, то имеем посл.: 0, 1, 0, 1, …, $\dfrac{1+(-1)^n}{2}$, …, к-ая как точечное мн. яв-ся конечным, ибо состоит из двух тч-к 0 и 1, а как посл-ть – беск-на.

Посл. (1) наз. ограниченной (огрн.), если $\forall\ n$ сущ-ет $k$ (т.е. $\exists\ k$), такое, что

$$|x_n| < k. \qquad (2)$$

Н-р, для п1 имеем, что $x_n = \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}} < \dfrac{1}{2}$.

Дадим сд. опр-ия.

**о1**. Мн. $\varepsilon(a) = \{x: |x - a| < \varepsilon\}$ наз. $\varepsilon$-окрестностью (окрс.) тч. $a$, где число $\varepsilon$ наз. радиусом, тч. $a$ – центром окрс-ти (рис. 1).

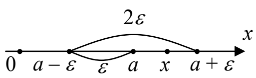



Рис. 1а

Теперь дадим несколько экв-ых опр-й предельной тч-и.

**о2**. Тч. $a$ наз. предельной тч-й (или тч-й сгущения) мн-ва $E \subset R$, если во всякой окр-ти тч-и $a$ имеется беск. много тч-к $E$ (сама $a \in E$ или $a\ \overline{\in}\ E$). Н-р, мн. нтр-ых $N$ не имеет предельных тч-к, ибо окрс-ть $\varepsilon(a)$ при $\varepsilon$ = 1/2 содержит не более одного нтр. числа, а не беск. число. В мн. рац. чисел $Q$ всякое $x$ – предельное число. Мн. $E = \{1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\}$ имеет одну предельную тч-у $x = 0$, к-ая не принадлежит $E$.

Если тч. $x \in E$, но не яв-ся его предельной тч-й, то $x$ наз. изолированной тч-й мн-ва $E$. Н-р, тч-и мн. $N$ есть изолированные тч.

**о3**. Тч. $a$ – предельная тч. мн-ва $E$, если любая окрс. тч-и $a$ содержит тч-у мн-ва $E$, отличную от тч. $a$.

Опр-ия о2 и о3 экв-ны.

**о4**. Пст. число $a$ наз. пределом пер-ой вел. $x$, если для каждого наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое зн. $x$, что все последующие зн-ия пер-ой будут уд-ть нерав-у

$$|x - a| < \varepsilon. \qquad (3)$$

В этом случае говорят, что $x \to a$ и пишут $\lim x = a$. (3а)

Если вместо пер-ой $x$ возьмем числ. посл-ть (1), то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число

$N$, такое, что выполнится нерав-во $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$ (4)
и пишут $$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \quad (4а)$$

Стн-ие (4а) можно сформулировать и как опр-ие:

**о5**. Тч. $a$ наз. предельной тч. мн-ва $E$, если из этого мн-ва можно выделить посл. $\{x_n\}$, такую, что $$a = \lim_{n\to\infty} x_n. \quad (4б)$$

Причем опр-ия о2 и о5 экв-ны в силу сд-их теорем.

**т1** (Больцано-Вейерштрасса). Всякое беск. огр-ое мн. $E$ имеет хотя бы одну предельную тч. (к-ая может и не принадлежать $E$).

Если мн. $E$ есть посл. $\{x_n\}$, то т1 формулируется так:

**т2**. Из всякой огрн-ой посл-ти $x = \{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ (5)
можно выделить сходящуюся подпосл-ть $x_{n_1}$, $x_{n_2}$, …, $(n_1 < n_2 < \ldots)$.

Отсюда получим

**сл1**. Взрщ-ая (убщ-я) посл-ть, огрн-ая числом $M(m)$, имеет предел, не превосходящий (не меньший) числа $M(m)$.

**о6**. Нб-я (нм-я) предельная тч. $\overline{a} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ ($\underline{a} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$) наз. верхним (нижним) пределом посл-ти $\{x_n\}$.

Отметим, что у всякой огрн. посл-ти сущ-ет верхний и нижний пределы. Конечно, возможен и случай, когда $\overline{a} = \underline{a} = a$. Н-р, посл. $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ имеет один предел $a = 0$, посл. $\{x_n\} = \{1, 3, \frac{1}{2}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, 3, \ldots\}$ имеет две предельные тч-и $\underline{a} = 0$, $\overline{a} = 3$, а посл-ть, эл-ы к-ой без повторений пробегают все рац. числа сегмента $[0, 1]$, имеет беск. число пределов, причем $\underline{a} = 0$, $\overline{a} = 1$.

**2°. Некоторые свойства предела переменной**. Приведем сд-ие

**с1**. Предел пст-ой равен самой пст-ой.

Д. Пусть $x = c$. Д-ем, что $a = c$. Дсв-но, $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

**с2**. Пер-ая вел-а не может иметь два предела.

Д. Если пер-ая вел. имеет два предела $\lim x = a$ и $\lim x = b$ $(a < b)$, то $x$ должен уд-ть одновременно нерав-ам $|x - a| < \varepsilon$ и $|x - b| < \varepsilon$, но это невозможно при $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (см. рис. 1).

**зм1**. Не следует думать, что каждая пер. вел-а имеет предел. Н-р, для посл. $\frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $1 - \frac{1}{2^4}$, …, $1 - \frac{1}{2^{2k}}$, $\frac{1}{2^{2k+1}}$, … при $k \to \infty$ все нечетные члены стремятся к 0, а четные – к 1, значит, посл. не имеет предела. Однако эта посл. имеет две предельные тч-и $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{a} = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{a} = 1$. Т.е. слова «предел» и «предельная тч.» путать нельзя!

**3°. Пределы функции. Левосторонние и правосторонние пределы**. Рас-им изменение (изм.) фк-и $y = f(x)$ при $x \to a$ или $x \to \infty$.

**о7**. Пст. $A$ наз. пределом фк-и $y = f(x)$ при $x \to a$, если для всякого сколь угодно малого плж-го $\varepsilon$ можно указать такое плж. число $\delta$, что нерав-во $|f(x) - A| < \varepsilon$ (6)
выполнится $\forall$ $x$, удщ. условию (усл.) $|x - a| < \delta$. (7)

Кратко это можно писать так: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (или $f(x) \to A$ при $x \to a$). (8)

Т.о., (8) $\Leftrightarrow$ (6), (7). Геомч. интерпретацию (инпц.) предела фк-и см. на рис. 2.

Теперь рас-им пределы слева и справа.

Если $f(x) \to A_1$ так, что $x < a$, то пишут $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A_1$

$A_1$ наз. пределом фк-и $f(x)$ в тч-е $a$ слева.

Если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ $(x > a)$, то пишут $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A_2$

и $A_2$ наз. пределом фк. $f(x)$ в тч-е $a$ справа (см. рис. 3).

**п2**. Найти пределы фк-и слева и справа: $\lim\limits_{x \to 2 \mp 0} \dfrac{5}{x-2}$ .

Р. Если $x \to 2 - 0$, то $x - 2 \to -0$, а $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{5}{x-2} = -\infty$. Если $x \to 2 + 0$, то $x - 2 \to 0$, а $\dfrac{1}{x-2} \to \infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{5}{x-2} = \infty$.

**п2а**. Выч-ть $\lim\limits_{x \to 1 \mp 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/(x-1)}$ .

Р. Если $x \to 1 - 0$, то $x - 1 \to -0$, а $\dfrac{1}{x-1} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 1-0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/(x-1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty$. Если $x \to 1 + 0$, то $x - 1 \to 0$, а $\dfrac{1}{x-1} \to \infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 1+0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/(x-1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$.

Если пределы слева и справа сущ-ют и равны, т.е. $A_1 = A_2 = A$, то $A$ будет пределом в тч. $a$ в смысле о7.

И обратно, если сущ. предел фк. $f(x)$ в тч. $a$, то сущ. пределы фк. $f(x)$ в тч. $a$ слева и справа и они равны (см. рис. 2).

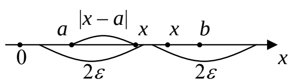



Рис. 1

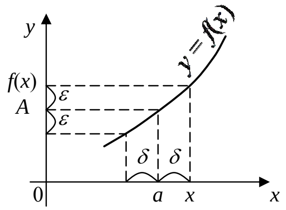



Рис. 2

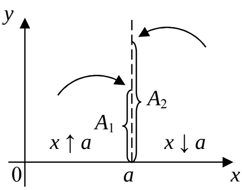



Рис. 3

**п3**. Д-ть, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1) = 7$. Для этого по заданному $\varepsilon$ надо найти $\delta$. $|f(x) - A| = |2x + 1 - 7| = 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$.

**зм2**. Для сущв-ия предела фк. $f(x)$ при $x \to a$ не требуется, чтобы фк. была опр-на в тч. $x = a$. Н-р, фк. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ неопр-на в тч. $x = 2$, но в этой тч. предел сущ-ет: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, т.к. $|f(x) - A| = \left|\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \varepsilon$ и $|x - 2| < \delta$.

При нахождении предела фк-и иногда полезна

**т3** (критерий Коши сущв-ия предела фк-и). Для того чтобы фк. $y = f(x)$ имела предел в тч. $a$, нх. и дт., чтобы $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, как только $|x' - a| < \delta(\varepsilon)$ и $|x'' - a| < \delta(\varepsilon)$.

**о7а**. Пст. $A$ наз. пределом фк. $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого плж. $\varepsilon$ можно указать такое плж. число $N$, что нерав-во $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполнится $\forall\ x$, удщ. усл. $|x| > N$. Кратко пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

**п4**. Д-ть, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, т.е. найти $N$ по заданному $\varepsilon$. $|f(x) - A| = \left|\dfrac{x+1}{x} - 1\right| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} = N$, $|x| > N$ (см. рис. 4).

**о7б**. Фк. $y = f(x)$ наз. огр-ой в данной обл. опр-ия $x$, если $\exists\ M$, такое, что $\forall\ x \in X$ выполняется нерав. $|f(x)| \le M$. Если же такого числа $M$ не сущ., то фк. $f(x)$ наз. неогр-ой в данной обл. $X$. Н-р, $y = \sin x$ огр-на, т.к. $\forall\ x \in\ ]-\infty, \infty[\ = X$ имеем $|\sin x| \le 1 = M$. Фк. $y = \text{tg}x$ неогр-на, т.к. $\forall\ x \in X$, такой, что $|\text{tg}x| > M$.

Рас-им случай, когда фк. $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ или $x \to \infty$.

**о7в**. Фк. $f(x)$ стремится к беск-ти ($f(x) \to \pm\infty$) при $x \to a$, если для каждого сколь угодно большого плж. $M$ можно найти такое $\delta > 0$, что нерав. $|f(x)| > M$ выполнится $\forall\ x$, удщ. усл-ю $|x - a| < \delta$. Кратко пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

**п5**. Д-ть, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2} = \infty$, т.е. по $M$ найти $\delta$. $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right| = \dfrac{1}{(1-x)^2} > M \Rightarrow |1-x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$ (см. рис. 5). Если $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Н-р, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

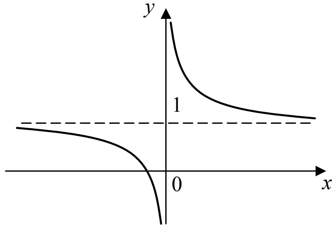


Рис. 4

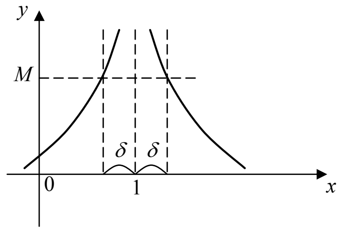


Рис. 5

**4°. Бесконечно малые величины и их основные свойства**.

**о8**. Фк. $\alpha = \alpha(x)$ наз. беск. малой фк-ей (б.м.ф.) при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого плж. $\varepsilon$ найдется $\delta > 0$, такое, что нерав. $|\alpha(x)| < \varepsilon$
выполнится $\forall\ x$, удщ. усл-ю $|x - a| < \delta$.

Иначе фк. $\alpha = \alpha(x)$ наз. б.м.ф. при $x \to a$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$. В дальнейшем будем обз-ть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, где $x_0 = a$ или $x_0 = \infty$.

**п6**. Фк. $\alpha(x) = (x-1)^2$ есть б.м.ф. при $x \to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ (см. рис. 6).

**п7**. Фк. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ есть б.м.ф. при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ (см. рис. 7).

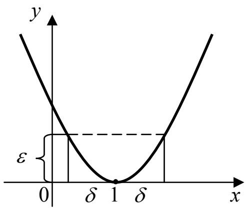


Рис. 6

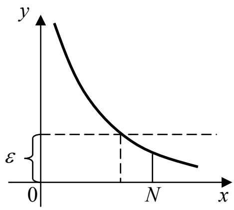


Рис. 7

Изучим основные св. беск. малых вел-н (б.м.в.).

**т4** (основная). Если фк. $y = f(x)$ представима в виде суммы пст. числа $A$ и б.м.в., т.е.

$$y = A + \alpha, \tag{9}$$

то при $x \to a$ или $x \to \infty$ имеет место стн-ие $\lim y = A$. (10)

И обратно, из (10) $\Rightarrow$ (9).

Д. Если $y = A + \alpha$, то $|y - A| = |\alpha|$. Но при произвольном $\varepsilon$ все зн-ия $\alpha$, начиная с нек-го, уд-ют стн-ию $|\alpha| < \varepsilon$, т.е. $|y - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim y = A$.

Обратно, если $\lim y = A$, то $|y - A| < \varepsilon$, начиная с нек-го $y$. Но если обз-им $y - A = \alpha$ (т.е. $y = A + \alpha$), то $|\alpha| < \varepsilon$, начиная с нек-го $\alpha$, значит, $\alpha$ – б.м.в. ■

**п8**. Пусть дана фк. $y = 1 + \dfrac{1}{x} = 1 + \alpha$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$. И обратно, если $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$, то $y = 1 + \alpha$, где $\alpha$ – б.м.в.

**т5**. Если $\alpha = \alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$, то $y = \dfrac{1}{\alpha}$ есть беск. большая вел-а (б.б.в.).

Д. Т.к. $\alpha$ – б.м.в., то $|\alpha| < \varepsilon$. Отсюда $\dfrac{1}{|\alpha|} > \dfrac{1}{\varepsilon} = M$ или $\dfrac{1}{|\alpha|} > M$, т.е. $\dfrac{1}{\alpha} \to \infty$ ■

**т6**. Алг. сумма конечного числа (к.ч.) беск-но малых слагаемых (слг.) есть фк. беск. малая (ф.б.м.).

Д. Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(x)$, $\alpha_2 = \alpha_2(x)$, $\alpha_3 = \alpha_3(x)$ – б.м.в-ы, т.е. $|\alpha_1| = \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|\alpha_2| = \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|\alpha_3| = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Д-ем, что $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ – б.м.в.: $|\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

Анч. д-во можно привести для любого к.ч. слг-ых.

**зм3**. Если уменьшением каждого слг-го число слг-ых увеличивается, то утв-ие т6 может оказаться неверным. Н-р, $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x}$. При $x = 1$ $u = \dfrac{1}{1} = 1$; $x = 2$, $u = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$; $x = 3$, $u = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$ и т.д.

При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x}$ есть б.м.в., но $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x} = 1$ не б.м.в., т.е. кол-во переходит в новое качество (реализуется закон диалектики).

**т7**. Произведение (пзв.) огр-ой фк. на беск. малую есть вел. беск. малая.

Д. Пусть фк. $f(x)$ – огр-ая, т.е. $|f(x)| \le M$, а $\alpha(x)$ – б.м.в., т.е. $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Д-ем, что $f(x)\alpha(x)$ – б.м.ф.: $|f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ ■

Отсюда легко получаются сд. следствия:

**сл1**. Пзв-ие пст-ой на беск. малую есть вел. беск. малая.

**сл2**. Частное от деления беск. малой на фк-ию, предел к-ой отличен от нуля, есть б.м.в.

**сл3**. Пзв-ие конечного числа б.м.в. есть б.м.в.

**5°. Арифметические операции над пределами**. Пусть сущ. пределы $\lim f_1(x) = A_1$ и $\lim f_2(x) = A_2$ при одном и том же $x \to a$.

**т8**. Предел алг. суммы конечного числа фк-й, имеющих пределы, равен такой же сумме пределов этих фк-й.

Д. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2 \underset{\text{т1}}{\Rightarrow} f_1(x) = A_1 + \alpha_1, f_2(x) = A_2 + \alpha_2$; $f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)$, где $(A_1 + A_2)$ – пст., $(\alpha_1 + \alpha_2)$ – б.м.в. Тогда по т4 $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = A_1 + A_2 = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ ■

**т9**. Предел пзв-ия конечного числа фк-й, имеющих пределы, равен пзв-ию пределов этих фк-й.

Д. $f_1(x) \cdot f_2(x) = (A_1 + \alpha_1) + (A_2 + \alpha_2) = A_1A_2 + \underbrace{A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2}_{\text{б.м.в.}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = A_1 \cdot A_2 = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ ■

**сл4**. Предел сп-и фк., имеющей предел с целым плж. показателем, равен той же сп. предела этой фк.: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$. Анч-но, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

**сл5**. Пст. множитель (мнж.) можно выносить за знак предела, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

**т10**. Предел частного от деления двух фк-й, имеющих пределы, равен частному от деления пределов этих фк-й, если только предел делителя не равен нулю.

Д. $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{A_1 + \alpha_1}{A_2 + \alpha_2} = \dfrac{A_1}{A_2} + \dfrac{A_1 + \alpha_1}{A_2 + \alpha_2} - \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_1}{A_2} + \dfrac{A_2\alpha_1 - A_1\alpha_2}{(A_2 + \alpha_2)A_2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ ■

На основе вышеизложенного р-им сд-й

**п9**. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 1}x^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{2\lim\limits_{x\to 1}x^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$

$=\dfrac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^1-5\cdot 1+6}=\dfrac{6}{3}=2.$

**зм3а**. Выч-ие предела рац-ой фк-и (отн-ия двух мнч-ов) свелось к выч-ю зн-ия этой фк. при предельном зн-и аргумента (арг.). Тогда для выч-ия предела рац-ой фк-и

$$R(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}{c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m}$$

при $x\to a$ дт-но найти зн-ие ее при $x=a$.

**п9а**. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-2x^4+7x^2-6x+9}{3x^4-12x^2+7x-11}=\dfrac{2^5-2\cdot 2^4+3\cdot 2^2-6\cdot 2+9}{3\cdot 2^4-12\cdot 2^2+7\cdot 2-11}=\dfrac{9}{3}=3.$

**6°. Раскрытие неопределенностей**. Не всегда подстановка (подн.) пер-го зн-я арг-та в врж-ие фк., как в п9а, позволяет найти зн-ие предела этой фк-и. В этом случае возникают неопр-ти вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, от к-ых предварительно освобождаемся сокращением числителя и знаменателя (при нх-ти умн-ив на их сопряженные), а затем поступаем как в п9а.

**п10**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}.$

**п11**. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+10x-39}{x^3-27}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+13)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+13}{x^2+3x+9}=\dfrac{16}{27}.$

**п12**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+x-a+x}{x\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{2}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

Для раскрытия неопр-ти вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ сначала числитель и знаменатель разделим на старшую сп-нь $x$, а затем выч-ем предел.

**п13**. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{6+0+0}{3+0-0}=2.$

**7°. Замечательные пределы**. Рас-им сд-ие пределы.

**а) Первый замечательный** (змч.) **предел**. Предварительно д-ем:

**л1**. Если $u(x)\le z(x)\le v(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}z(x)=A$.

Д. Из $u\le z\le v\Rightarrow u-A\le z-A\le v-A$, а из $\lim u=A\Rightarrow |u-A|<\varepsilon$ или $-\varepsilon<u-A<\varepsilon$. Анч-но, $-\varepsilon<v-A<\varepsilon$. Тогда $-\varepsilon<u-A\le z-A\le v-A<\varepsilon$. Откуда $-\varepsilon<z-A<\varepsilon$ или $|z-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim z=A$ ■

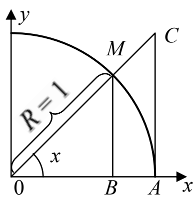


Рис. 8

**л2**. Если $\lim\limits_{x\to a}y=A$ и $y\ge 0$, то $A\ge 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}y\ge 0$.

Д. Допустим противное, т.е. $A<0$. Отсюда $|y-A|>|A|$. Тогда $y$ не стремится к $A$. Полученное противоречие д-ет лемму ■

Анч-но д-ся, что если $y\le 0$, то $\lim y\ne\le 0$.

**л3**. Если $u\ge v$, каждый из к-ых имеет предел, то $\lim u\ge\lim v$.

Д. По усл-ю, $u-v\ge 0$, тогда по л2 $\lim(u-v)\ge 0$ или $\lim u-\lim v\ge 0$ $\Rightarrow\lim u\ge\lim v$ ■

**т11** (о первом змч. пределе). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Д. Из рис. 8 имеем: пл. $\Delta MOA \le$ пл. сек. $MOA \le$ пл. $\Delta COA$. (11)

Но пл. $\Delta MOA = \dfrac{1}{2}\,OA\cdot MB = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x$, пл. сек. $MOA = \dfrac{1}{2}\,OA\,\overset{\frown}{AM} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \dfrac{1}{2}x$, пл. $\Delta COA = \dfrac{1}{2}\,OA\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{tg}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x$. Подставив (подс.) их в (1) и сократив на $\dfrac{1}{2}$, получим: $\sin x \le x \le \mathrm{tg}x$. Разделив на $\sin x$, имеем $1 \le \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{1}{\cos x}$ или

$$1 \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x. \tag{12}$$

Нерав-во (12) выведено в предположении $x > 0$. Но оно верно и при $x < 0$, т.к. $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$. Но $\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Тогда по л1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ ■

**п14**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = 1$.

**п15**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x} = 3$.

**б) Второй змч. предел**. Натуральные логарифмы.

**т12** (о втором змч. пределе). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Д. Дт-но показать, что посл. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ взр-ет и огр-на, тогда на основании сл1: т2 из 1° она имеет предел. По фм-е бинома Ньютона (см. 5°: 6.1), имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^n + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{13}$$

Из (13) видно, что посл. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ взр-ет, т.к. при переходе от $n$ к $n+1$ каждое слг. суммы взр-ет: $\dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ и т.д., и добавляется еще один член, а все члены разложения плж-е.

Кроме того, из (13) также видно, что $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Теперь покажем, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. Из (13) следует $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} =$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] < 3.$$

Итак, посл. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ взр-ет и огр-на, значит, она имеет предел, к-ый обз. буквой $e$ – числом Эйлера – иррац. числом, $e$ = 2,7182…, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ■ (14)

**зм4**. Если полагать $\dfrac{1}{n} = \alpha$, то (14) принимает вид $\lim\limits_{\alpha\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$. (15)

**зм5**. Стн. (14) верно не только при целом $n$, но и при любом $x$: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. (16)

**п16**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e$.

**п17**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^3 = e^3$.

**п18**. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x-1}\right)^x = \left|\begin{array}{c} -\dfrac{2}{x-1}=\alpha, \\ x\to\infty,\ \alpha\to 0, \\ x = 1-\dfrac{2}{\alpha} \end{array}\right| = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1-\frac{2}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-2} =$$

$= 1\cdot e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

С числом $e$ связан нтр-ый логарифм (лгр.). Из фк. $e^y = x$ находим лгр-м по основанию $e$: $y\ln e = \ln x$. Но $\lg_e e = \ln e = 1$, поэтому фк-я $y = \ln x$, (17)
к-ая наз. нтр. лгр-ом.

Установим связь между нтр-ым и десятичным лгр-ми. Пусть $e^y = x$. Отсюда, лгр-уя по основанию 10, получим $y\lg e = \lg x$ или (учитывая (17)) $\ln x\lg e = \lg x$. Тогда

$$\ln x = \frac{1}{\lg e}\lg x . \qquad (18)$$

**в) Другие важные змч. пределы**. Д-ем, что 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

Д. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lg_a \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lg_a e$. В част., $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Значит, $x \sim \ln(1+x)$ при $x\to 0$.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left|\begin{array}{l} a^x-1=y;\ x\to 0, \\ y\to 0;\ a^x = 1+y; \\ x\ln a = \ln(1+y); \\ x = \dfrac{1}{\ln a}\ln(1+y) \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{1}{\ln a}\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{y} = \ln a.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = \left|\begin{array}{c} (1+x)^a-1=y; \\ a\ln(1+x) = \ln(1+y); \\ \text{если } x\to 0, \text{ то } y\to 0; \\ \text{тогда } ax = y,\ x = \dfrac{1}{a}y \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{1}{a}y} = a.$$

**п19**. $$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(2x^2+3x-26)}{x^2-7x+12} = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2+3x-27}{x^2-7x+12} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+9)}{(x-3)(x-4)} = \frac{15}{-1} = -15.$$

**п20**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}\right) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

**п21**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

**8°. Сравнение бесконечно малых величин**. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ ($x_0 = a$ или $x_0 = \infty$).

Беск. малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз. сравнимыми, если сущ. хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha$ и $\beta$ наз. малыми одинакового порядка. Н-р, если $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x} = 2$.

**о10**. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то беск. малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз. экв-ми и обз. $\alpha \sim \beta$. Н-р, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, значит, $\sin x \sim x$.

Экв-ть беск. малых используется при нахождении предела. Так, $\operatorname{tg}x \sim x$, ибо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = 1$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x} = 5$.

**о11**. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ наз. беск. малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$ (н-р, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2+\dfrac{1}{x}} = 0$). Если при этом сущ. дсв. число $r > 0$, такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ наз. беск. малой порядка $r$ отс-но $\beta(x)$.

**зм6**. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ (т.е. предел не сущ.), то расв-ем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. В этом случае $\beta(x)$ есть беск. малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ (т.е. $\alpha(x)$ имеет порядок более низкий, чем $\beta(x)$).

**т14**. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – экв-ые беск. малые, то $\alpha(x) - \beta(x)$ есть б.м.в. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ или $\beta(x)$.

Д. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right) = 1 - 1 = 0$ ■

**9°. Непрерывность и разрывность функции**. Дадим

**о1**. Фк. $y = f(x)$ наз. непр-ой в тч. $x = x_0$, если она опр-на в этой тч. и ее окрестности (окрс.), и если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Стн. (1) можно писать и в другом виде. Пусть фк. $y = f(x)$ опр-на в тч. $x_0$ и ее окрс-ти и пусть $f(x_0) = y_0$. Дадим $x_0$ нек-ое приращение $\Delta x$ (плж. или отц.), тогда $y_0$ получит приращение $\Delta y$, т.е. $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$ (2)

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) = f(x_0). \tag{3}$$

Т.к. п. 9° относится к § 6.2, то нумерацию обз-й начали сначала.

**п1**. Д-ть, что $y = x^2$ непр-на в произвольной тч. $y_0 = x_0^2$.

Д. $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 \Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[2x\Delta x + (\Delta x)^2] = 2x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x + [\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x]^2 = 0 + 0 = 0$. Т.к. $x_0$ выбран произвольно, то по (2) или (3) фк. $y = x^2$ непр-на в этой тч.

**о2**. Если фк. $y = f(x)$ непр-на в каждой тч. интервала (инр.) $]a, b[$, то она наз. непр-ой в этом инр.

**зм1**. Рас-им пределы фк. $f(x)$ в тч. $x_0$ слева и справа (см. 3°): $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, очевидно, имеет место (1) и наоборот, если имеет место (1), то сущ-ют пределы в этой тч. слева и справа и они равны.

**зм2**. Для непр-ти фк. $f(x)$ в тч. $x_0$ нх-ма опр-сть фк-и в этой тч. Н-р, фк. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ неопр-на в тч. $x_0 = 2$, сд-но, и не непр-на в этой тч., хотя предел сущ-ет: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} =$ $= \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

**о3**. Если фк. $f(x)$ такова, что сущ. конечные пределы слева и справа, но $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $f(x)$ в тч. $x = x_0$ не опр-на, то тч. $x = x_0$ наз. тч-й разрыва 1-го рода (см. рис. 1а и 2а). Н-р, $y =$ $= \begin{cases} x^2, \ x \in [-2, 1]; \\ 3, \ x \in ]1, 2] \end{cases}$ или $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Причем разрыв вида (рис. 1а) наз. неустранимым разрывом, а вида (рис. 2а) – устранимым. Устранение разрыва производится доопределением (доопр.) фк-и, н-р, $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \ x \neq 2, \\ 4, \ x = 2. \end{cases}$

**о4**. Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\,\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\,\infty$, то тч. $x = x_0$ наз. тч-й разрыва 2-го рода (рис. 3а). Н-р, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\,\infty$.

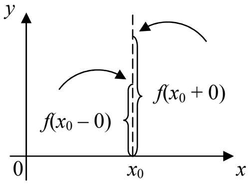


Рис. 1а

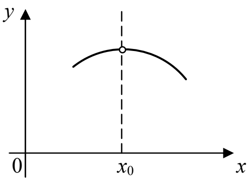


Рис. 2а

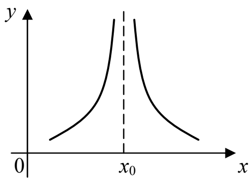


Рис. 3а

Теперь рас-им вопрос непр-сти элр-ых фк-й. Справедлива

**т1**. Всякая элр. фк. непр-на в каждой тч-е, в к-ой она опр-на, т.е. во всех тч-ах обл. опр-ия.

Н-р, д-ем непр-ть $y = \sin x$ в прзвл. тч. $y_0 = \sin x_0$. $y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) -$ $- \sin x_0 = \sin(x_0 + \Delta x) + \sin(-x_0) = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\dfrac{\Delta x}{2} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right) =$ $= 2 \cdot 0 \cdot \cos x_0 = 0$. Здесь мы использовали опр-ие непр-ти фк-и. Однако непр-ть элр-ых фк-й можно установить и на др. основе.

**о5**. Фк. $f(x)$, опрн-я в обл. $X$, наз. монотонно взрщ-ей (убщ-ей) в этой обл., если $\forall\, x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

**т2**. Монотонно взрщ-я (убщ-я) фк. $f(x)$ может иметь в $X$ разве лишь разрывы 1-го рода, т.е. скачки.

Д. Пусть фк. $f(x)$ взрщ-я. Возьмем тч. $x_0 \in X$, к-ая не яв-ся левым концом промежутка $X$. Тогда для $x < x_0$ имеем $f(x) \leq f(x_0)$ и сущ-ет конечный предел $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0)$.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то слева в тч. $x_0$ фк. $f(x)$ непр-на, в противном случае – скачок. Анч-но, в каждой тч. $x_0 \in X$, к-ая не яв-ся правым его концом, справа имеет место непр-ть либо скачок.

**т3**. Если зн-ия монотонно взрщ-ей (убщ-ей) в промежутке $X$ фк. $f(x)$ содержатся в промежутке $Y$ и сплошь заполняют его, то эта фк. непр-на в $X$.

Д. Допустим противное: $\exists\, x_0 \in X$, где фк. $f(x)$ имеет разрыв, н-р, слева, и по т2 этот разрыв может быть только скачком. Но тогда сущ-ет предел в этой тч. и $f(x_0 - 0) < f(x_0)$. Т.к. для $x < x_0$

будет $f(x_0) \le f(x_0 - 0)$, а для $x > x_0$, очевидно, $f(x) \ge f(x_0)$, то фк-я не может принимать зн-й $y$, лежащих между числами $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0)$, принадлежащими промежутку $Y$, что усл-ю теоремы. Значит, фк-я $f(x)$ разрывов не имеет ■

**п2**. Фк. $y = \sin x$ в промежутке $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно взр-ет и зн-ия сплошь заполняют промежуток $y = [-1, 1]$. То же относится к любому промежутку $\left[\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\right]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Значит, $\sin x$ непр. на всей обл. опр-ия $X = ]-\infty; \infty[$.

**п3**. Фк. $y = a^x$ $(a > 1)$ монотонно взр-ет при $X = ]-\infty; \infty[$; зн-ия ее сплошь заполняют промежуток $Y = ]0, \infty[$. Значит, она непр-на.

Рас-им непр-ть суперпозиции фк-й и арифч-ие операции над непр. фк-ми. Обширные классы непр-ых фк-й можно построить с помощью суперпозиции фк-й, непр-ть к-ых уже известна.

**т4**. Если фк. $y = f(x)$ непр-на в тч. $x_0 \in X$, а $z = \varphi(y)$ непр-на в тч. $y_0 \in Y$, то сложная фк. $\varphi(f(x))$ непр-на в тч. $x_0$.

Д. Т.к. $\varphi(y)$ непр-на при $y = y_0$, то по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что из $|y - y_0| < \sigma \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. А ввиду непр-ти $f(x)$ при $x = x_0$ по $\sigma > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |y - y_0| < \sigma$. Тогда из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon$, т.е. $\varphi(f(x))$ непр-на в тч. $x_0$ ■

Н-р, из непр-ти суперпозиции лргч-ой и пкзт-ой фк-й вытекает непр-ть спн. фк-и $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

В силу т4 можно сформулировать арифч. операции над непр. фк-ми.

**т5**. Если две фк-и $f(x)$ и $g(x)$ опр-ны в одном и том же промежутке $X$ и обе непр-ны в тч. $x_0 \in X$, то в этой же тч. будут непр-ны и фк-и $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \ne 0)$.

Д. Для примера д-ем последнее. Непр-ть $f(x)$ и $g(x)$ в тч. $x_0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Отсюда по теореме о пределе частного (т10: 5°) имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, т.е. фк. $\frac{f(x)}{g(x)}$ непр-на в тч. $x_0$ ■

**зм3**. Можно обобщить т5: сумма или пзв-ие конечного числа непр-ых фк-й есть непр. фк-я.

На основе вышеизложенного приведем св-ва непр-ых фк-й.

**с1**. Ограниченность функции. Если фк. $f(x)$ опр-на, т.е. принимает конечные зн-ия $\forall\ x$ из конечного промежутка $X$, то отсюда не вытекает огрн-ть фк-и. Н-р, фк-я $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ принимает конечные зн. в промежутке $X = [0, 1]$, но не огр-на, ибо $|f(x)| > M$ при $x \to 0$. Заметим, что эта фк. в полуоткрытом инр-е $]0, 1[$ непр-на, но в тч. $x = 0$ имеет разрыв. Огрн-ть фк. $f(x)$ устанавливает

**т6** (первая теорема Вейерштрасса об огрн-ти фк-и). Если фк. опр-на и непр-на в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она огр-на, т.е. сущ-ют конечные числа $m$ и $M$, такие, что

$$m \le f(x) \le M \text{ при } a \le x \le b.$$

**с2**. Наибольшее и наименьшее значения функции. Пусть фк. $f(x)$ опр-на и даже огр-на в нек-ом промежутке $X$, но она может не достичь нб. и нм. зн-ий в этом промежутке. Н-р, фк. $f(x) = x - E(x)$ ($E(x)$ – целая часть числа $x$, см. 4°: 6.2) при $x \in [0, b]$, $b \ge 1$ имеет точную верхнюю границу, равную 1, но она не достигается (рис. 1), т.е. фк-я не имеет нб-го зн-ия.

**т7** (вторая теорема Вейерштрасса о достижении нб. и нм. зн-ий фк-и). Если фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ, т.е. $\exists\ x_1, x_2 \in [a, b]$, такие, что $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут ств-но нм-им и нб-им из всех зн-й фк. $f(x)$ (рис. 2).

**с3**. Обращение функции в нуль. Справедлива

**т8** (первая теорема Больцано-Коши об обращении фк-и в нуль). Пусть фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает зн-ия разных знаков. Тогда $\exists\ c \in [a, b]$, такое, что $f(c) = 0$.

**зм4**. В т8 требование непр-ти фк-и яв-ся сущ-ым. Н-р, фк. $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$ нигде не принимает зн-ие 0, хотя $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ (рис. 4).

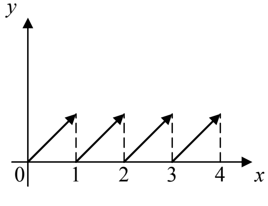



Рис. 1

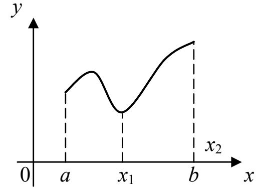



Рис. 2

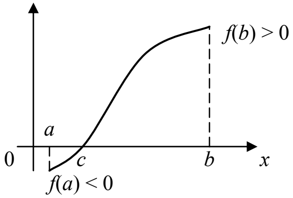



Рис. 3

**с4**. О промежуточном значении функции. Верна

**т9** (вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном зн-и фк-и). Пусть фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в нек-ом промежутке $X$ (замкнутом или нет, конечном или беск-ом). Если в двух тч-х $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) этого промежутка фк-я принимает неравные зн-ия $f(a) = A$ и $f(b) = B$ ($A < B$), то каково бы ни было $M \in ]A, B[$, найдется (рис. 5) тч. $c \in ]a, b[$, такая, что $f(c) = M$.

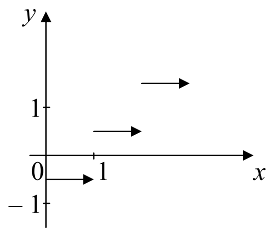



Рис. 4

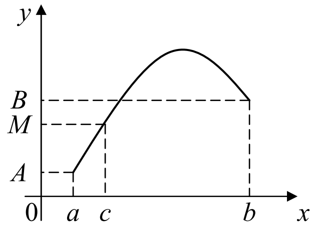



Рис. 5

**с5**. Существование обратной функции. Справедлива

**т10**. Если фк. $f(x)$ опр-на, монотонно взр-ет (уб-ет) и непр-на в нек-ом промежутке $X$, то в ств-ем промежутке $Y$ зн-й этой фк-и сущ-ет обратная фк. $x = g(y)$, также монотонно врзщ-ая (убщ-я) и непр-я.

**п4**. Фк. $y = x^n$ ($n$ – нтр. число) опр-на и яв-ся монотонной и непр. в промежутке $X = [0, \infty[$. Отсюда следует сущв-ие и непр-ть монотонной фк. $x = \sqrt[n]{y}$ в $Y = [0, \infty[$.

**п5**. Из монотонности и непр-ти $y = a^x$ в $X = ]-\infty, \infty[ \Rightarrow$ сущв-ие и непр-ть фк. $x = \log_a y$.

**п6**. Из монотонности и непр-ти $y = \sin x$ в $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ сущв-ие и непр-ть фк. $x = \arcsin y$ в $Y = [-1, 1]$.

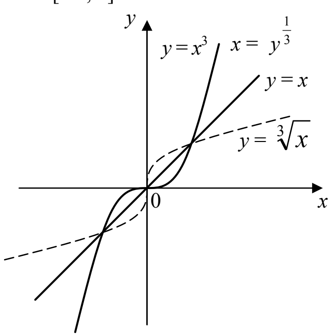



Рис. 6

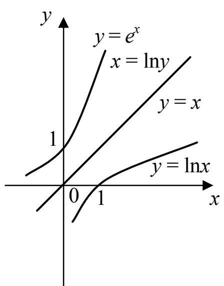



Рис. 7

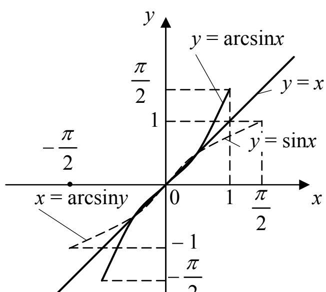



Рис. 8

**зм5**. Если фк-и $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ яв-ся взаимно обратными, то грф-ми их яв-ся одна и та же крв-я. Но если арг-т обратной фк-и мы обз-им снова через $x$, а фк-ю – через $y$ и построим их в одной крд-ой системе, то получим два различных грф-а, симч-ых отс-но бист-ы $y = x$ первой и третьей четверти. Н-р, на рис. 7 построены грф-и фк-и $y = e^x$ (или $x = \ln y$) и обратной ей фк-и $y = \ln x$.

**п7**. Найти фк-ю, обратную данной, и построить их грф-и: а) $y = x^3$; б) $y = e^x$; в) $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Р. а) $x = y^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 6); б) $x = \ln y$, $y = \ln x$ (рис. 7); в) $x = \arcsin y$, $y = \arcsin x$ (рис. 8).

Теперь рас-им понятие равномерной непр-сти фк-и. Если фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в нек-ом промежутке $X$, то при $\forall\, x_0 \in X$ имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

или «на языке $\varepsilon - \delta$»: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

При этом если $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, то фк. $f(x)$ наз. непр-ой (рис. 9). Если $\delta = \delta(\varepsilon)$, то фк. $f(x)$ наз. равномерно непр-ой (рис. 10).

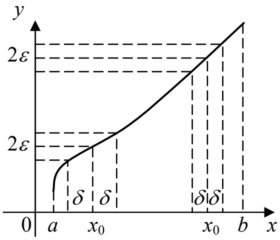



Рис. 9

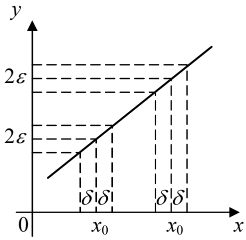



Рис. 10

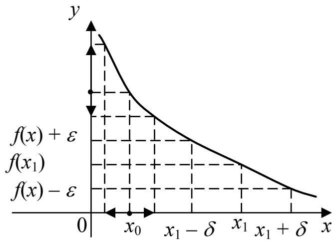



Рис. 11

Иначе: фк. $y = f(x)$ наз. равномерно непр-ой на мн. $X$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall\, x', x'' \in X$ из нерав. $|x' - x''| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

**т10** (Кантора о равномерной непр-ти фк-и). Если фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она и равномерно непр-на в этом промежутке.

**сл1**. Пусть фк. $f(x)$ опр-на и непр-на в замкнутом промежутке $[a, b]$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если промежуток произвольно разбить на частичные промежутки с длинами, меньшими $\delta$, то в каждом из них колебание фк. $f(x)$ будет меньше $\varepsilon$.

На основе сл1 фк. $f(x)$ на рис. 9 можно расв-ть как равномерно непр-ую. Для этого выберем $\min\delta$ и промежуток $[a, b]$ разобьем на чистичные промежутки, меньшие, чем $\min\delta$. Тогда в каждом частичном промежутке колебание $f(x)$ будет меньше $\varepsilon$.

**зм6**. Теорема т10 не верна, если отрезок $[a, b]$ заменить инр-ом или полуинр-ом.

**п8**. Показать, что фк. $y = \dfrac{1}{x}$ непр-на на инр-е $]0, 1[$, но не яв-ся равномерно непр-ой на нем.

Р. Т.к. для фк. $y = \dfrac{1}{x}$ при $\forall\ x_0 \in\ ]0, 1[$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$ или из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, то фк. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in\ ]0, 1[$ непр-на. Но фк. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in\ ]0, 1[$ не яв-ся равномерно непр-ой, т.к. для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, какое бы $\delta > 0$ мы ни взяли, всегда найдутся тч-и $x'$ и $x''$, такие, что $|x'' - x'| < \delta$, но $|f(x'') - f(x')| > \varepsilon$ (рис. 11).

## 6.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 6.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое мн., подмн. и кванторы импликации (имп.), экв-и, общности и сущв-ия?
2. Как опр-ся операции объед-ия, перч-ия, разности (дпн-ия) и симч-ой разности?
3. Как опр-ся мн. дсв-их чисел $R$ и их промежутки (сегмент, инр-л, полуинр-л)?
4. Приведите осн. св-ва операций над мн-ми.
5. Что такое высказывание (вск.), пст-ое и пер. вск-ия? Приведите примеры.
6. Как опр-ся лгч-ие операции дизъюнкции (диз.), конъюнкции (кон.), имп-и, экв-и, отрицания и альтернативной диз-и?
7. Что такое фм-а, фк-ия, равносильность фм-л?
8. Какая связь сущ-ет между понятиями равносильности ($\Leftrightarrow$) и экв-и ($\sim$)?
9. Приведите осн. св-ва лгч-их операций.
10. Что такое предикат и как вы понимаете утв-ия: $(\forall\, x)P(x)$ и $(\exists\, x)P(x)$?
11. Дайте схемы авт-а и реализации $Z = X$, $Z = \overline{X}$, $Z = XY$, $Z = X + Y$. Приведите примеры.
12. Как вводятся комплексные (комп.) числа в алгч-ой, трич-ой и пкзт-ой формах?
13. Приведите операции над комп. числами в алгч-ой форме.
14. Как врж-ся фм-ы умн-ия и деления комп-ых чисел в тригч-ой форме?
15. Приведите фм-ы возведения в сп-нь, извлечения корня, Муавра и примеры.
16. Как разлагается мчл-н на мнж-ли? Приведите примеры.
17. Что наз. перестановками, размещениями, сочетаниями и какими св. они обладают?
18. Что такое метод мтч-ой индукции? Приведите примеры.
19. Приведите фм-у бинома Ньютона и примеры.

### Задачи для самостоятельной работы

### 1°. Операции над множествами

1. Задать перечислением все эл-ы мн-а, опрн-ые с помощью сд. хркч-их св-в: а) $A = \{x \in N: x \le 6\}$. О: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; б) $B = \{x \in N: x < 0\}$. О: $B = \varnothing$; в) $C = \{x \in Z: |x| \le 3\}$. О: $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

2. Составить мн. $B$ всех подмн-в мн-ва $A = \{1, 3\}$. О: $B = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$.

3. Найти объед-е и перч-ие сд. двух мн-в: а) $A = ]4, 8[$, $B = ]1, 4]$; б) $A = ]-3, 7]$, $B = [5, 6]$. О: а) $A \cup B = ]1, 8[$, $A \cap B = \varnothing$; б) $A \cup B = ]-3, 7]$, $A \cap B = [5, 6]$.

4. Д-ть, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. Д-ть, что $S \setminus \cap A_\alpha = \cup (S \setminus A_\alpha)$, $\alpha \in M$.

6. Д-ть, что если $A \cup B = A$ для любого мн-а $A$, то $B = \varnothing$.

7. Д-ть, что если $A \cap B = B$ для любого $A$, то $B = \varnothing$.

8. Д-ть, что рав-а $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$ верны ттогда, когда $A \subset B$.

9. Найти разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$ сд-их мн-в: $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 10\}$.

### 2°. Алгебра высказываний

10. Указать, какие из сд-их предложений опр-ют вск-ия, и найти их зн-ия истс-ти: а) «Число 25 делится на 5»; б) «3 > 7»; в) «Уфа – столица РБ»; г) «Сущ-ют такие зн-ия $x \in R$, для к-ых $x - 2 < 5$»; д) «Волга впадает в Черное море»; е) «Сегодня хорошая погода»; ж) «Пойдешь ли ты сегодня в кино?»; з) «Да здравствует Первое мая!» О: предложения «а», «в», «г» опр-ют ист-ые вск-ия, а «б», «д» – ложные. Предложения «е», «ж», «з» не опр-ют вск-ия.

11. Построить отрицание вск-ия $A$: «Число 27 делится на 3». О: $\overline{A}$ = «Число 27 не делится на 3» – ложное вск-ие (знак «=» употребляем условно).

12. Пусть $r$ = «Число 43 чет.» и $s$ = «Волга впадает в Черное море». Образовать из $r$ и $s$ кон-ю, диз-ю, имп-ю, экв-сть и опр-ть зн-ия их истс-ти. О: $r \wedge s$ = «Число 43 чет. и Волга впадает в Черное море» $\Leftrightarrow$ 0 (ложь), $r \vee s$ = «Число 43 чет. или Волга впадает в Черное море» $\Leftrightarrow$ 0, $r \to s$ = «Если число 43 чет., то Волга впадает в Черное море» $\Leftrightarrow$ 1 (ист.), $r \leftrightarrow s$ = «Число 43 чет. ттогда, когда Волга впадает в Черное море» $\Leftrightarrow$ 1.

13. Пользуясь табл-ми истс-ти вск-й, установить равносильность $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow \overline{p \wedge q} \vee r$.

14. Сост-ть схемы (используя графы), ствщ-ие фм-ам: а) $(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t)$; б) $(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$ .

14а. По мишени произведено три выстрела. Пусть $p_k$ – вск-ие: «Мишень поражена $k$-м выстрелом», $k = \overline{1, 3}$ . Что означают сд. вск-ия: а) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; б) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$; в) $\left(\overline{p}_1 \vee \overline{p}_2\right) \wedge p_3$? Какие из этих вск-ий ист-ны, если ист-но $p_3$, а $p_1$ и $p_2$ ложны?

Р. «а» есть вск-ие «Мишень поражена хотя бы одним выстрелом», причем $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Leftrightarrow 1$; «б» есть вск-ие: «Все три выстрела попали в цель», $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Leftrightarrow 0$; «в» есть вск-ие: «Мишень не поражена первым выстрелом, или вторым выстрелом, или обоими выстрелами и поражена третьим выстрелом», при этом $\left(\overline{p}_1 \vee \overline{p}_2\right) \wedge p_3 \Leftrightarrow |\wedge| \Leftrightarrow 1$.

15. Для заданного предиката указать, при каких зн-ях предметных пер-ых полученное вск-ие ист-но, а при каких – ложно: а) $(|x - 2| > 4) \wedge x \in N$; б) «$y$ находится между $x$ и $z$», где $x, y, z \in R$; в) $P(x, y) \wedge Q(x)$, где $P(x, y)$ – предикат «$x$ предшествует $y$»; $Q(x)$ – «$x$ – простое число».

Р. Задача сводится к замене предметных пер-х пст-ми, учитывая св-ва эл-ов мн-ва, на к-ом задан предикат;

а) из того, что $x \in N$ и $|x - 2| > 4$, следует, что данный предикат обращается в ложное вск. при $x = \overline{1, 6}$ , а при всех остальных $x \in N$ – в ист-ое;

б) в этом случае дт-но указать три дсв-ых числа, при к-ых предикат обращается в ист. или ложное вск-ие. Н-р, при $x = 2$, $y = 3$, $z = 3{,}5$ («Число 3 находится между числами 2 и 3,5» – ист. вск-ие) предикат обращается в ист. вск-ие, а при $x = 5$, $y = \sqrt{2}$ , $z = 7{,}1$ – в ложное;

в) данный предикат будет ист. вск-ем, н-р, при $x = 3$, $y = 6$ («Число 3 предшествует числу 6 и яв-ся простым числом» – ист. вск-ие). Этот же предикат будет ложным вск-ем, н-р, при $x = 4$, $y = 6$.

16. На мн-ве однозначных нтр. чисел заданы два предиката $P(n)$ = «число 3 – делитель числа $n$» и $Q(n)$ = «$n \leq 6$». Найти мн-во истс-и предиката: а) $P(n) \vee Q(n)$; б) $P(n) \wedge \overline{Q(n)}$; в) $\overline{P(n)} \to Q(n)$; г) $\overline{P(n) \to Q(n)}$.

Р. а) мн. истс-и предиката $P(n) = \{3, 6, 9\}$. Мн. истс-и предиката $Q(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда мн. истс-и предиката $P(n) \vee Q(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$;

б) мн. истс-и предиката $\overline{Q(n)} = \{7, 8, 9\}$. Тогда мн. истс-и предиката $P(n) \wedge \overline{Q(n)} = \{9\}$;

в) мн. истс-и предиката $\overline{P(n)} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, то мн. истс-и предиката $\overline{P(n)} \to Q(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$; г) мн. истс-и предиката $P(n) \to Q(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда $\overline{P(n) \to Q(n)} = \{9\}$.

17. Выяснить, ист-на или ложны вск-ия: $p$ = «Сущ-ет такое плж. число $M$, что для всех членов посл-и $\{a_n\}$, у к-ой $n$-й член $a_n = (-1/2)^n$, выполняется нерав-во $|a_n| \leq M$» и $q$ = «Для всякого плж. дсв. числа $M$ найдется такой член посл-и $\{b_n\}$ с $n$-м членом $b_n = (-2)^n$, для к-го выполняется нерав-о $|b_n| > M$». Записать каждое из этих вск-й с помощью лгч-ой символики.

Р. Вск. $p$ ист., т.к. все члены посл-и $\{a_n\}$ уд-ют нерав-у $|a_n| < 1/2$ (здесь за $M$ можно взять любое из чисел, к-ое больше или равно 1/2). С помощью лгч-ой символики оно запишется так: $(\exists\, M \in R_+)(\forall\, n \in N)(|a_n| \leq M)$.

Вск. $q$ также ист., т.к. с взр-ем номера $n$ модули членов посл-и $\{b_n\}$ превзойдут сколь угодно большой дсв. число $M > 0$, т.е. всегда найдется номер $n$, такой, что $|b_n| > M$, каково бы ни было $M > 0$. С помощью лгч-ой символики получим: $(\forall\, M \in R_+)(\exists\, n \in N)(|b_n| > M)$.

18. Выяснить, какое св. фк-и записывается с помощью фм-ы

$$(\exists\, l)(\forall\, x)(f(x + l) = f(x)) \ (x \in R;\ l \in R).$$

Построить отрицание этой фм-ы и записать его словами.

Р. С помощью данной фм-ы записано св. периодичности фк-и. Отрицанием данной фм-ы будет фм-а $(\forall\, l)(\exists\, x)(f(x + l) \neq f(x))$ $(x \in R;\ l \in R)$. Она чт-ся так: «Для всякого дсв. числа $l$ найдется такое дсв. число $x$, что $f(x + l) \neq f(x)$» (св. непериодичности фк-и $f(x)$).

19. Для каждого из сд-их вск-й построить его отрицание: а) $(\exists\, x)((x \in Q)\ \&\ (x^2 = 2))$; б) $(\forall\, x)(\exists\, y)(x + y \neq x)$, где $x \in R$; $y \in R$.

Р. а) $(\forall\, x)((x \in Q)\ \&\ (x^2 \neq 2))$ – «Всякое рац. число обладает тем св-ом, что кв-т его не равен двум»; б) $(\exists\, x)(\forall\, y)(x + y = x)$, где $x \in R$; $y \in R$ – «Сущ-ет такое дсв. число $x$, что для любого дсв. числа $y$ справедливо рав. $x + y = x$».

**зм10**. Приведем общий прием построения отрицания любой фм-ы: квантор общности заменяется квантором сущв-ия, и наоборот, а врж-ие, стоящее под квантором, заменяется противоположным.

20. Пользуясь табл-ми истс-и, д-ть равносильность фм-ы $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow (p \wedge \overline{r}\,) \to \overline{q}$ и начертить схему.

21. Сост-ть схему, ствщ-ю фм-е $(p \vee q) \wedge \overline{p}$ .

22. Сд. вск-ия записать с помощью лгч-их символов: а) «Не сущ-ет такого дсв. числа $x$, что $x^2 + x + 1 > 0$»; б) «Для всякого дсв. числа $x$ верно нерав. $x^2 + x + 1 > 0$»; в) «Чтобы нтр. число $n$ делилось на 9, нх-мо и дт-но, чтобы сумма его цифр делилась на 9»; г) «Для любых чисел $x$ и $y$ сущ-ют такие дсв. числа $a$ и $b$, что $ax + by = 1$».

23. Рас-ите вск-ия, получающиеся в результате связывания пер-х $x$ и $y$ (где $x \in R$; $y \in R$) предиката $y = x^2$ всеми возможными комбинациями кванторов $\forall$ и $\exists$. Установите, какие из полученных вск-й ист-ы, какие ложны.

### 3°. Операции над комплексными числами

24. Представить в тригч. форме сд. числа: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ , $z_4 = -2$, $z_5 = -2i$.

О: $z_1 = 1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, $z_2 = i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \right.$

$\left.+\ i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $z_4 = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_5 = -2i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

25. Какие мн. тч-к пл-ти задаются усл-ми: 1) $\mathrm{Re}z = \alpha$; 2) $\alpha < \mathrm{Re}z \le \beta$; 3) $\mathrm{Im}z = \gamma$, 4) $\mathrm{Im}z \ge \delta$; 5) $\alpha \le \mathrm{Re}z < \beta$, $\gamma < \mathrm{Im}z \le \delta$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ – дсв. числа? О: 1) усл-е $\mathrm{Re}z = \alpha$ экв-но ур-ю $x = \alpha$ и задает пм-ю, прл-ю мним. оси $Oy$; 2) усл. $\alpha < \mathrm{Re}z \le \beta$ или $\alpha < x \le \beta$ задает беск. вертикальную полосу (рис. 1); 3) усл. $\mathrm{Im}z = \gamma$ экв-но ур-ю $y = \gamma$ и задает пм-ю, прл-ю дсв. оси $Ox$; 4) усл. $\mathrm{Im}z \ge \delta$ или $y \ge \delta$ задает полупл-ть, расположенную выше пм. $y = \delta$, включая и эту пм-ю (рис. 2); 5) усл-я $\alpha \le \mathrm{Re}z < \beta$, $\gamma < \mathrm{Im}z \le \delta$ задают пуг-к $\alpha \le x < \beta$, $\gamma < y \le \delta$ (рис. 3).

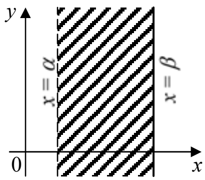


Рис. 1

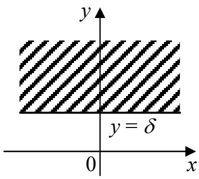


Рис. 2

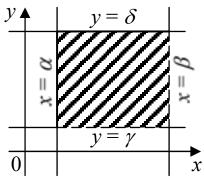


Рис. 3

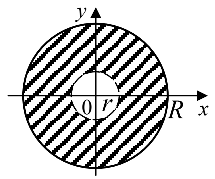


Рис. 4

26. Какие мн. тч-к пл-ти задаются усл-ми: 1) $|z| = r$; 2) $r < |z| \le R$; 3) $\arg z = \alpha$; 4) $\alpha < \arg z < \beta$, где $\alpha$, $\beta$, $r$, $R$ – дсв. числа, причем $r > 0$ и $R > 0$? О: 1) из усл. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ следует ур.

– окр-ть; 2) усл. $r < |z| \le R$ задает кольцо между концентрическими окр. радиусов $r$ и $R$ с центром в нач. крд-т, включая внешнюю окр. (рис. 4); 3) усл. $\arg z = \alpha$ задает луч, выходящий из нач. крд-т под углом $\alpha$ к дсв. оси $Ox$; 4) усл. $\alpha < \arg z < \beta$ задает беск. сектор, заключенный между лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$, причем сами эти лучи иск-ся (рис. 5).

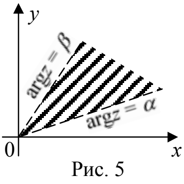


Рис. 5

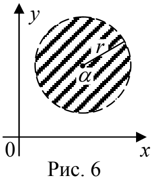


Рис. 6

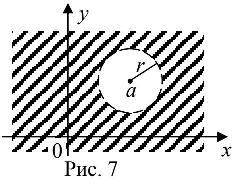


Рис. 7

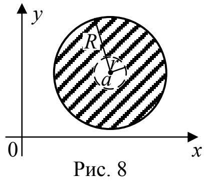


Рис. 8

27. Какие мн. тч. пл-ти $z$ задаются усл-ми: 1) $|z - a| = r$; 2) $|z - a| < r$; 3) $|z - a| > r$; 4) $r < |z - a| < R$, где $a$ – комп. число, $r$ и $R$ – плж-ые дсв. числа? О: 1) усл. $|z - a| = r$ опр-ет окр-ть с центром в тч. $a$ радиуса $r$; 2) усл. $|z - a| < r$ опр-ет круг с центром в тч. $a$ радиуса $r$ (рис. 6), исключая окр-ть; 3) усл. $|z - a| > r$ опр-ет мн-во тч-к, назм-ое внешностью окр-ти $|z - a| = r$ (рис. 7); 4) усл.

$r < |z - a| < R$ опр-ет кольцо (рис. 8).

28. Д-ть фм-ы Эйлера $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$. Ук: проверить $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ или $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

29. Д-ть фм-у Муавра: если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$ или $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; в част., $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ или $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$.

30. Найти: а) $(3 + 5i)(4 - i)$; б) $\dfrac{3 - i}{4 + 5i}$; в) $\dfrac{1}{1 + 4i} + \dfrac{1}{4 - i}$. О: а) $17 + 7i$; б) $\dfrac{7}{41} - \dfrac{19}{41}i$; в) $\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}i$.

30а. Найти дсв. р-ия ур-й: а) $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$; б) $12((2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)) = 17 + 6i$. О: а) $x = 2$, $y = 3$; б) $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$.

31. Р-ть системы лин. ур-й: а) $\begin{cases}(3 - i)x + (4 + 2i)y = 1 + 3i;\\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2 + i)x + (2 - i)y = 6;\\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8.\end{cases}$ О: а) $x = 1$, $y = i$; б) $x = 2 + i$, $y = 2 - i$.

32. Р-ть ур-ия: а) $|z| - z = 1 + 2i$; б) $|z| + z = 2 + i$. О: а) $\dfrac{3}{2} - 2i$; б) $\dfrac{3}{4} + i$.

33. Представить в пкзт-ой форме сд. комп. числа: 1) $\dfrac{7 + 24i}{5}$; 2) $5 - 12i$; 3) $-2 + i$; 4) $\sin\alpha - i\cos\alpha$; 5) $\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)$. О: 1) $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$; 2) $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$; 3) $\sqrt{5}e^{i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$; 4) $e^{i\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$; 5) $2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

34. Используя фм-у Муавра, выч-ть врж-ия: 1) $(1 + i)^{10}$; 2) $\dfrac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$; 3) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$; 4) $(1 + i)^2\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$. О: 1) $32i$; 2) 2; 3) $512\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; 4) $-\dfrac{1}{4}$.

35. Используя фм-ы Эйлера, врз-ть через фк-и синуса и косинуса кратных дуг сд. фк-и: а) $\cos^3\varphi$; б) $\sin^3\varphi$. О: а) $\dfrac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$; б) $\dfrac{1}{4}(3\sin\varphi + \sin 3\varphi)$.

36. Используя фм-у Муавра, врз-ть через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ кратных дуг сд. фк-и: а) $\cos 3\varphi$; б) $\sin 3\varphi$; в) $\cos 4\varphi$; г) $\sin 4\varphi$. О: а) $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$; б) $3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$; в) $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$; г) $4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.

37. Найти все зн-ия корней: 1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[9]{-9}$; 4) $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{2\sqrt{3} + 2i}$.

О: 1) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; 2) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$; 3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9}\right)$, $k = \overline{0, 8}$; 4) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; 5) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{2}\right)\right]$.

38. Р-ть квн. ур-ия: 1) $z^2 + 2z + 5 = 0$; 2) $4z^2 - 2z + 1 = 0$; 3) $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$.

О: 1) $-1 \pm 2i$; 2) $\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -3 + i$.

39. Р-ть трехчленные ур.: 1) $z^3 - 1 = 0$; 2) $z^3 + 1 = 0$; 3) $(z + 1)^4 - 16 = 0$; 4) $(z + 1)^4 + 16 = 0$.
О: 1) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $1, -3, -1 + 2i$; 4) $\left(-1+\sqrt{2}\right) \pm i\sqrt{2}$, $\left(-1-\sqrt{2}\right) \pm i\sqrt{2}$.

40. Р-ть трехчленные ур.: 1) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$; 2) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$; 3) $z^4 - (1 + i)z^2 + 2(1 + i) = 0$; 4) $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$; 5) $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$. О: 1) $z_{1,2} = z_{3,4} = \pm 3i$; 2) $\pm i$, $\pm\ i\sqrt{3}$; 3) $\pm (1 + i)$, $\pm \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$, $-1$, $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$, $\sqrt[3]{3}$; 5) $\pm 1$, $\pm i$; $\pm\ \sqrt{2}\ (1 \pm i)$.

41. Мчл-ы разложить на лин. и кв. мчл-ы с дсв. коэф-ми: 1) $z^4 - 1$; 2) $z^4 + 1$; 3) $z^4 + z^2 + 1 = 0$. О: 1) $(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$; 2) $(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$; 3) $(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$.

42. Разделить: а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1$ на $x + 4$; б) $f(x) = x^7 - 1$ на $x - 1$. О: а) $f(x) = (x + 4)(x^2 - 8x + 40) - 161$; б) $f(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

## 4°. Комбинаторика

43. Выч-ть: а) $\frac{6!}{A_{10}^7}\left(C_7^5 + C_7^3\right)$; б) $\frac{P_{k+1}}{(k-n)!\,A_{k-1}^{n-1}}$. О: а) $\frac{1}{15}$; б) $k(k + 1)$.

44. Найти $n$, если: 1) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 15(n + 2)$; 2) $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$; 3) $5C_n^3 = C_{n+2}^2$; 4) $(n + 2)! = 132A_n^k P_{n-k}$; 5) $C_{n+3}^{n+1} - C_{3n}^2 + 19n^2 = 6$; 6) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{143}{4P_n}$; 7) $8C_{105}^n < 3C_{105}^{n+1}$. О: 1) 27; 2) 2; 3) 3; 4) 10, если $k \le 10$; 5) 3; 6) $\{0, 1, 2\}$; 7) $\{0, 1, 2, \ldots, 27\}$.

45. Найти мн-во зн-й фк.: а) $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$; б) $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$. О: а) $\{1, 2, 3\}$; б) $\{1, 9, 28, 15, 35\}$.

46. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: а) все путевки различны; б) все путевки одинаковы. О: а) $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; б) $C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$.

47. Сколько диагоналей имеет выпуклый $n$-угольник?

Если при выборе эл-ов из исх. мн-а возможны повторения, то фм-ы для подсчета числа перестановок, размещений и сочетаний изменятся. Н-р, кол-во перестановок из $n$ эл-ов, разбитых на $k$ классов по $n_i$ неразличимых эл-ов ($i = \overline{1, k}$) равно (с. (26′): 5°)

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} \quad (n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n). \tag{1}$$

48. Сколько различных анаграмм можно составить из букв слова «баба»? О: $\widetilde{P}_n = \frac{4!}{2!\cdot2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6$, аабб, абба, ббаа, бааб, абаб, баба.

Кол-во различных размещений из эл-ов $n$ классов $m$ эл-ов с неогр. повторениями равно

$$\widetilde{A}_n^m = n^m. \tag{2}$$

49. а) Сколько различных трехзначных чисел можно сост-ть из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6? б) Сколько различных шестизначных чисел можно сост-ть из чисел 1, 2, 3? О: а) $\widetilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$; б) $\widetilde{A}_3^6 = 3^6 = 729$.

Кол. различных сочетаний из эл-ов $n$ классов $m$ эл-ов с неогр. повторениями равно

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)...n}{m!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \quad (3)$$

50. Набор костяшек домино представляет собой всевозможные пары, составленные из символов «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6» с повторениями. Сколько всего костяшек домино в комплексе? О: т.к. $n = 7$, $m = 2$, то $\widetilde{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$.

**зм1**. При рас-и соединений $\widetilde{P}_n$, $\widetilde{A}_n^m$, $\widetilde{C}_n^m$ и $P_n$, $A_n^m$, $C_n^m$ (см. (26)-(28) из 6.1) удобно $n$ эл-ов распределять (рсп.) по местам $m$, т.е. установить ств-ие между эл-ми и местами, но это одновременно яв-ся ств-ем между местами и эл-ми. Иначе говоря, можно выбирать эл-ы для конкретного места, а можно подбирать места для конкретного эл-а. Такая «обратимость» выбора во многих задачах сущ-но упрощает р-ие. Иногда даже при р-и одной задачи приходится менять порядок (мест для эл-ов или эл-ов на место), н-р, если в одной задаче встречаются соединение с волной (скажем, $\widetilde{A}_n^m$) вместе с соединением без волны ($A_n^m$).

**п51**. Сколько различных трехзначных чисел без повторения цифр можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Р. Эл-ы $n = 6$ – цифры исх. мн-а, места $m = 3$ – разряды чисел. Выбираем эл-ы на каждое место поочередно: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, т.е. $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

**п52**. Двое размещаются в пустом четырехместном купе; каждый выбирает себе место. Сколькими способами они могут это сделать?

Р. Места $m = 4$, эл-ы $n = 2$ и получается $m > n$. Поэтому выбирать эл-ы на каждое место неудобно. Тогда выберем места для эл-ов: для первого пассажира можно выбрать любое из 4 мест в купе, а для второго – любое из трех оставшихся. Всего будет $4 \cdot 3 = 12$, т.е. $A_m^n = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

**п53**. Сколько различных четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, в к-ых цифры не повторяются, а цифры 1 и 2 встречаются ровно по одному разу?

Р. По усл-ю задачи, $m = 4$, $n = 6$, но два из этих эл-ов должны появляться обязательно. Поэтому сначала выбираем места для эл-ов 1 и 2: любое из 4 мест для первого, любое из трех оставшихся – для второго, тогда всего вариантов (врт.) $4 \cdot 3 = 12$ ($A_m^{n'} = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$). Теперь в составляемом числе осталось $m' = 2$ места, а число эл-ов $n' = 4$. Меняем порядок выбора: выбираем эл-ы на каждое оставшееся место. На первое место можно выбрать любой из 4 эл-ов, на второе – любой из 3 оставшихся, всего $4 \cdot 3 = 12$ ($A_{n'}^{m'} = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$). При этом оба врт-а наступают одновременно, тогда $A_m^{n'} \cdot A_{n'}^{m'} = 12 \cdot 12 = 144$.

**зм2**. В нек-ых задачах в усл-и говорится, что один или несколько эл-ов должны занимать опрн-ые места («фиксирование» эл-ов), или чтобы два или более эл-ов стояли рядом («склеивание» эл-ов), или исходя из усл. задачи выгодно найти противоположные комбинации (подсчет «ненужных» врт-ов), или на основе правила пзв-ия выгодно выбирать порядок заполнения мест в ств-и с усл-ем задачи (выбор «простейшего» порядка заполнения мест). Во всех таких задачах сначала уд-ем указанные усл., а затем уд-ем остальные усл. задачи и получим р-е.

**п54**. Сколько различных четырехзначных чисел, начинающихся с двух нечет. цифр, можно сост-ть из цифр 1, 2, 3, 4, 6, 8 (цифры в числе не повторяются)?

Р. Число мест $m = 4$ и эл-ов $n = 6$, из к-ых два нечет., их уд-ем сначала; затем уд-ем на два места оставшиеся цифры: $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ ($A_2^1 \cdot A_4^2 = (2 \cdot 1)(4 \cdot 3) = 24$).

**п55**. Сколько можно сост-ть пятизначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в к-ых цифры 4 и 5 стоят рядом (цифры не повторяются).

Р. $m = 5$ и $n = 5$, из к-ых цифры 4 и 5 «склеены», поэтому $n = 4$, тогда всего перестановок $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Но две цифры можно переставлять местами: $2 \cdot 1 = 2$. Т.е. всего врт-ов будет $2 \cdot 24 = 48$ ($A_2^1 \cdot P_4 = (2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 48$).

**п56**. Сколько есть пятизначных чисел, в записи к-ых есть хотя бы одна чет. цифра?

Р. По усл., $n = 10$ эл-ов, $m = 5$ мести допускается повторение цифр. Общее кол. пятизначных чисел по правилу пзв-ия равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ (в старшем разряде не может стоять нуль). Из пяти нечет. цифр 1, 3, 5, 7, 9 можно составить $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$ пятизначных чисел, состоящих только из нечет. цифр. Это и есть «ненужные» врт-ы. Тогда в каждом из 90000 – 3125 = 86875 пятизначных чисел есть хотя бы одна чет. цифра (нуль яв-ся чет. цифрой) ( $\widetilde{A}_9^1\widetilde{A}_{10}^4 - \widetilde{A}_5^5 = 9 \cdot 10^4 - 5^5 = 90000 - 3125 = 86875$).

**п57**. Сколько различных шестизначных чисел без повторения цифр, в к-ых вторая и четвертая цифры нечет.?

Р. Здесь $n = 10$ эл-ов, $m = 6$ мест. Выберем «простейший» порядок заполнения мест в комбинации: второе, четвертое, первое, третье, пятое, шестое. Тогда кол-во врт-ов равно $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \times \times 6 \cdot 5 = 29400$ чисел с заданными св., где на первое место выбираем 7 врт-ов, ибо нуль на первое место ставить нельзя, затем на третье место выбираем любую из 7 оставшихся цифр, включая нуль, далее из оставшихся 6, потом 5 цифр ( $A_5^2 A_7^1 A_7^3 = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29400$).

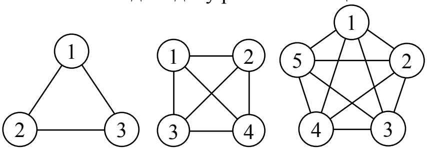
**п58**. Найти все трехзначные числа, в записи к-ых встречаются только цифры 8 и 9.

О: $\widetilde{A}_n^m = \widetilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$; 888, 889, 898, 899, 988, 989, 998, 999.

**п59**. Найти все трехзначные числа, в записи к-ых используются цифры 0, 1 и 2, при усл., что: 1) все цифры в числах различны; 2) цифры в числах могут повторяться.

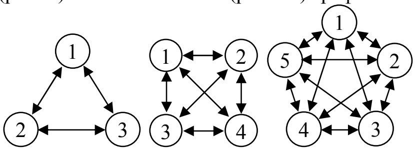
О: 1) $A_2^1 \cdot A_3^2 = 2 \cdot (2 \cdot 1) = 4$; 2) $\widetilde{A}_2^1 \cdot \widetilde{A}_3^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

**зм3**. Иногда задачу р-ют с помощью полных (рис. 9) и полных нпвн-х (рис. 10) графов.



*a* *b* *c*

Рис. 9



*a* *b* *c*

Рис. 10

**п60**. При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было: a) трое; b) четверо; c) пятеро? О: a) 3; b) 6; c) 10 (рис. 9).

**п61**. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали: a) 3 человека; b) 4 человека; c) 5 человек? О: a) 6; b) 12; c) 20 (рис. 10).

## 6.2. ФУНКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое обл-ть опр-ия, обл. зн-й и грф-к фк-и? Приведите примеры.
2. Приведите примеры чет., нечет. и периодических (прдч.) фк-й.
3. Как найти обратную фк-ю и ее грф-к по заданной фк-и?
4. Приведите способы задания фк-й с примерами.
5. В чем состоит классификация фк-й?
6. Что такое сложная фк-я и операции над фк-ми?
7. Постройте грф-и конкретных фк-й с помощью прл-го переноса и изм. масштабов.

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Построить грф-и фк-й: 1) $y = \sqrt{x}$ ; 2) $y = -\sqrt{16 - x^2}$ ; 3) $y = \dfrac{1}{x^2}$ .

Р. 1) Фк. $y = \sqrt{x}$ опр-на, когда $x \geq 0$. Грф-ом яв-ся часть парб-ы, для к-ой $y \geq 0$ (рис. 1).

1*. Построить грф-к $y = -\sqrt{x}$ .

2) Фк. $y = -\sqrt{16 - x^2}$ опр-на, когда $16 - x^2 \geq 0$ или $x^2 \leq 16$, т.е. $-4 \leq x \leq 4$. Возводя в кв-т обе части ур-ия $y = -\sqrt{16 - x^2}$ , получим $x^2 + y^2 = 16$ – окр-ть. Поскольку исх. фк-я принимает лишь отц. зн-ия, то грф-ом будет полуокр-ть, расположенная ниже оси $Ox$ (рис. 2).

2*. Построить грф-к $x = -\sqrt{16 - y^2}$ .

3) Фк. $y = 1/x^2$ опр-на на $X = ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[$, $y \in ]0, \infty[$ (рис. 3).

3*. Построить грф-к $y = 1/(x-1)^2$.

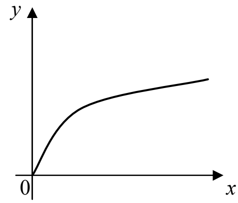



Рис. 1

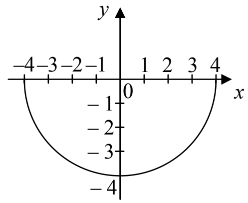



Рис. 2

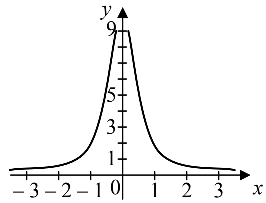



Рис. 3

**у2**. Построить грф-и фк-й: 1) $f(x) = x + \sin x$; 2) $f(x) = x\sin x$; 3) $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

Р. 1) Грф-к фк-и $f(x) = x + \sin x$ получим сж-ем двух фк-й: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, изб-ных на рис. 4 штриховыми линиями. Ряд тч-к грф-а фк-и $f(x) = x + \sin x$ можно построить, принимая во внимание сд-щее:

а) $f(x) = x$ для тех $x$, при к-ых $\sin x = 0$;

б) $f(x) = x + 1$ для тех $x$, при к-ых $\sin x = 1$;

в) $f(x) = x - 1$ для тех $x$, при к-ых $\sin x = -1$.

1*. Построить грф-к $y = x + \cos x$.

2) Грф-к фк-и $y = x\sin x$ представляет собой пзв-ия двух фк-й: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$. Грф-к можно построить по тч-ам, учитывая:

а) т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, то $-x \le f(x) \le x$, т.е. грф-к фк-и $f(x) = x\sin x$ целиком расположен между пм-ми $y = x$ и $y = -x$ (рис. 5);

б) $f(x) = 0$, если $\sin x = 0$;

в) $f(x) = x$, если $\sin x = 1$;

г) $f(x) = -x$, если $\sin x = -1$.

2*. Построить грф-к $y = x\cos x$.

3) Фк. $\operatorname{cosec} x = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ опр-на на всем мн-ве дсв-ых чисел, кроме тч-к $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), т.е. обл-ю ее опр-ия яв-ся инр-ы: $\ldots ]-\pi, 0[$, $]0, \pi[$, $]\pi, 2\pi[$, … Грф-к ее можно получить из грф-а фк-и $f_1(x) = \sin x$. Построим грф-к фк-и $f(x) = \csc x$ в инр-е $]0, \pi[$. При $x = \dfrac{\pi}{2}$ получим $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. При $x \to 0$ и $x \to \pi$ фк-я $f(x) \to \infty$ (рис. 6).

В инр-е $]\pi, 2\pi[$ фк-я принимает отц. зн-ия, причем $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = -1$. Грф-к фк-и в др. инр-ах строится из усл. прдч-сти.

3*. Построить грф-к $y = \operatorname{sc} x$.

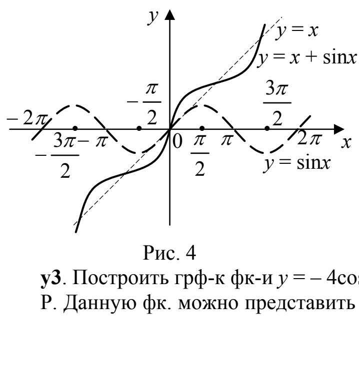



Рис. 4

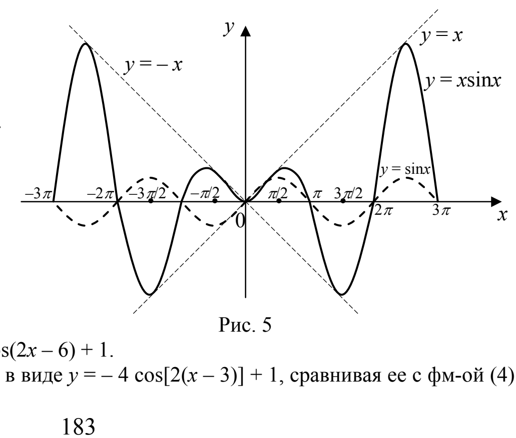



Рис. 5

**у3**. Построить грф-к фк-и $y = -4\cos(2x - 6) + 1$.

Р. Данную фк. можно представить в виде $y = -4\cos[2(x-3)] + 1$, сравнивая ее с фм-ой (4):

6.2, имеем: $c = -4$, $k = 2$, $a = 3$, $b = 1$. Используя простейшие прб-ия грф-а, получаем осн. этапы построения ее грф-а:

а) увеличивая в 4 раза ординаты тч-к грф-а фк-и $y = \cos x$, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы тч-к, строим грф. фк-и $y = -4\cos x$ (рис. 7);

б) уменьшая в 2 раза абсциссы тч-к грф-а фк-и $y = -4\cos x$ и сохраняя их ординаты, строим грф-к фк-и $y = -4\cos 2x$;

в) перенося тч-и грф-а фк-и $y = -4\cos 2x$ по оси $Ox$ на 3 ед. вправо, строим грф-к фк-и $y = -4\cos[2(x-3)]$;

г) перенося тч-и грф-а фк-и $y = -4\cos[2(x-3)]$ по оси $Oy$ на 1 ед-у вверх, получаем грф-к исх-ой фк-и $y = -4\cos[2(x-3)] + 1$.

Пользуясь прдч-стью расв-ой фк-и, полученный грф-к можно продолжить в обе стороны (рис. 7).

3*. Построить грф-к фк-и $y = -2\sin(3x + 9)$.

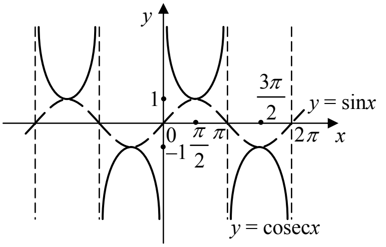



Рис. 6

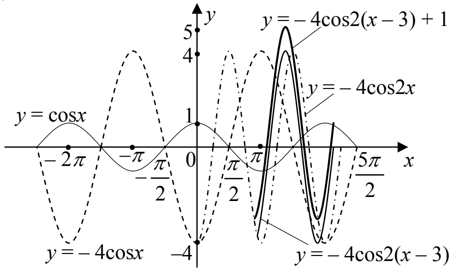



Рис. 7

**у4**. Построить грф-и фк-й: 1) $f(x) = \sin^2 x$; 2) $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

Р. 1) Фк. $y = \sin^2 x$ опр-на при всех $x$. Построим сначала грф-к фк-и $y = \sin x$ (рис. 8). Т.к. $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f(\pi) = 0$, то тч-и $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $M_3(\pi,\ 0)$ яв-ся общими для обоих грф-ов. Грф-к фк-и $f(x) = \sin^2 x$ в сегменте $[0,\ \pi]$ расположен ниже синусоиды (поскольку кв-ы чисел, меньших ед-ы, меньше самих чисел), в промежутке $[\pi,\ 2\pi]$ грф-к также проходит выше оси $Ox$, т.к. $\sin^2 x \geq 0$ при любых $x$ (рис. 8).

1*. Построить грф-к фк-и $y = \cos^2 x$.

2) Фк. $y = \sqrt{\sin x}$ опр-на лишь для тех $x$, для к-ых $\sin x \geq 0$, т.е. в отрезках вида $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Строим сначала грф-к фк-и $y = \sin x$ (рис. 9). Грф-к фк-и $f(x) = \sqrt{\sin x}$ расположен выше ствщ-ей дуги синусоиды (т.к. кв-ый корень из числа, меньшего ед-ы, больше самого числа). Тч-и, имеющие ординаты $y = 0$, $y = 1$ яв-ся общими для обоих графиков.

2*. Построить грф-к фк-и $y = \sqrt{\cos x}$.

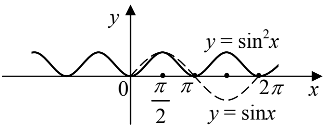



Рис. 8

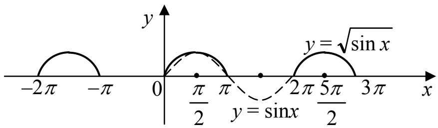



Рис. 9

**у5**. Построить грф-и фк-й: 1) $y = |\sin x|$, 2) $y = \sin|x|$.

Р. 1) По опр-ю абс-ой вел-ы $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x, \text{ если } \sin x \geq 0, \\ -\sin x, \text{ если } \sin x < 0. \end{cases}$ Сдт-но, если $\sin x \geq 0$, то грф-к фк-и $y = |\sin x|$ совпадает с грф-ом $y = \sin x$, если $\sin x < 0$, то дуга грф-а $y = \sin x$ отб-ся отс-но $Ox$ (рис. 10).

1*. Построить грф-к фк-и $y = |\cos x|$.

2) Т.к. $f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x)$, то фк. $y = \sin|x|$ яв-ся чет., т.е. ее грф-к симч-н отс-но оси $Oy$ (рис. 11).

2*) Построить грф-к фк-и $y = \cos|x|$.

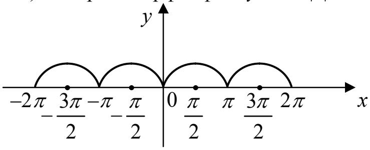



Рис. 10

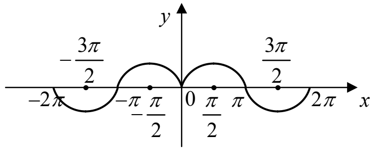



Рис. 11

**у6**. Построить по тч-ам грф-и фк-й: 1) $y = \sqrt{x+1} + 2$, 2) $y = 4 - \sqrt{1-3x}$ .

**у7**. Построить грф-и фк-й (с помощью сж-ия, умн-ия, деления): 1) $y = x - \sin x$; 2) $y = \lg_a x + x$; 3) $y = -\ln x + x$.

**у8**. С помощью простейших прб-й построить грф-и фк-й: 1) $y = 4\cos 3x$; 2) $y = \cos x - 2$; 3) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = |x^2 + 5x - 6|$ (см. п7 из 6.2).

**у9**. Построить грф-к фк-и $y = 2 - 3(2x + 1)^2$, $x \in [-2, 2]$.

## 6.3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая посл-ть? Приведите примеры.
2. Что такое $\varepsilon$-окрс-ть тч-и $a$? Дайте опр-ие предельной тч-и.
3. Что наз. пределом пер-ой вел-ы $x$ и посл-ти $\{x_n\}$?
4. Что наз. верхним (нижним) пределом посл-ти $\{x_n\}$?
5. Приведите св-ва предела пер-ой.
6. Что наз. пределом фк-и $y = f(x)$ при $x \to a$?
7. Что такое левосторонние и правосторонние пределы?
8. Что такое беск. малые вел-ы и их осн. св-ва?
9. В чем состоят арифч. операции над пределами?
10. Какие неопрс-ти вы знаете и как от них освободиться?
11. Какие замечательные пределы вы знаете?
12. Как используется экв-сть беск. малых при нахождении предела?
13. Дайте опр-ие непр-сти и разрывности фк-и.
14. Как двумя способами устанавливается непр-ть элр-ых фк-й?
15. Перечислите св-ва непр-ых фк-й.
16. Как вы понимаете равномерную непр-сть фк-и?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Исходя из опр-ия предела фк-и в тч-е, д-ть, что: а) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x} = 3$; б) $y_n = 4 - \dfrac{1}{3^n}$ при $n \to \infty$; в) д-ть, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+6}{6x} = \dfrac{5}{6}$ .

Р. Рас-им нерав. $|\sqrt{11-x} - 3| < \varepsilon$ и найдем зн-ие $\delta$ из $|x - 2| < \delta$.

Из $|\sqrt{11-x} - 3| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \sqrt{11-x} - 3 < \varepsilon \Rightarrow 3 - \varepsilon < \sqrt{11-x} < 3 + \varepsilon \Rightarrow (3-\varepsilon)^2 < 11 - x < (3+\varepsilon)^2 \Rightarrow -(3+\varepsilon)^2 < x - 11 < -(3-\varepsilon)^2 \Rightarrow 3^2 - (3+\varepsilon)^2 < x - 2 < 3^2 - (3-\varepsilon)^2 \Rightarrow -(6\varepsilon + \varepsilon^2) < x - 2 < 6\varepsilon - \varepsilon^2$. Т.к. $6\varepsilon - \varepsilon^2 < |-(6\varepsilon + \varepsilon^2)| = 6\varepsilon + \varepsilon^2$, то $\delta = 6\varepsilon - \varepsilon^2$.

1а*. Д-ть, что $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-2} = 1$.

б) Зададим произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и рас-им нерав. $|y_n - a| = \left|\left(4 - \dfrac{1}{3^n}\right) - 4\right| = \dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$

и найдем число $N$, такое, что $n > N$. Из $\frac{1}{3^n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 3^n \Rightarrow \lg\frac{1}{\varepsilon} < n\lg 3 \Rightarrow n > \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 3}$. В кач-ве $N$ можно взять меньшее из двух целых чисел, между к-ми заключено число $\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 3}$. Тогда при всех $n > N$ указанное нерав. будет выполнено, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{3^n}\right) = 4$. Отметим, что одновременно д-ли: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$.

1б*. Д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-3 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = -3$. О: $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. В част., если $\varepsilon_1 = 0{,}01$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{1/100}} = 10$, тогда $N_1 = 10$. Сдт-но, при $n > 10$ имеем $|z_n - (-3)| < 0{,}01$. Если $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} = 100$, $N_2 = 100$. Сдт-но, при $n > 100$ $|z_n - (-3)| < 0{,}001$.

в) Для д-ва дт-но убедиться, что разность между пер. вел-ой $y = \frac{5x+6}{6x}$ и пст-ой $b = \frac{5}{6}$ при $n \to \infty$ есть беск. малая вел-а (б.м.в.). Прб-уя эту разность, получим $\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{(5x+6)-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$. Т.к. при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}$ яв-ся б.м.в., то $\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \alpha$, где $\alpha$ – б.м.в. Это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$.

**у2**. Д-ть, что $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2 - 5x + 4\right) = 7$.

Р. Поскольку $x \to 3$, то $x = 3 + \alpha$, где $\alpha$ – б.м.в. Подставляя ее в исх. врж-ие, получим $[2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4] - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$. Т.к. $\alpha$ – б.м.в., то вел. $\beta = 2\alpha^2 + 7\alpha$ также б.м.в. Сдт-но, $y - b = \beta$, где $y = 2x^2 - 5x + 7$, $b = 7$, $\beta = 2\alpha^2 + 7\alpha$, т.е. $y = b + \beta$. Откуда заключаем, что $\lim y = b$, или $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2 - 5x + 4\right) = 7$.

2*. Д-ть, что $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 4x + 1\right) = 5$.

**у3**. Найти односторонние пределы фк-й слева и справа: 1) $\lim\limits_{x\to 3\mp 0}\frac{6}{x-3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0\mp 0} 3^{\frac{1}{x}}$, 3) $\lim\limits_{x\to 2\mp 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{2-x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1\mp 0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

Р. 1) Если $x \to 3 - 0$, то $x - 3 \to -0$, а $\frac{1}{x-3} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{6}{x-3} = -\infty$. Если $x \to 3 + 0$, то $x - 3 \to 0$, а $\frac{1}{x-3} \to \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{6}{x-3} = \infty$.

2) Если $x \to 0 - 0$, то $x - 0 \to -0$, а $\frac{1}{x} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0-0} 3^{-\frac{1}{|x|}} = \lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{3^{\frac{1}{|x|}}} = 0$.

Если $x \to 0 + 0$, то $x - 0 \to 0$, а $\dfrac{1}{x} \to \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 0+0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} 3^{\frac{1}{|x|}} = 3^{\infty} = \infty$.

3) Если $x \to 2 - 0$ ($x < 2$), то $2 - x \to 0$, а $\dfrac{1}{2-x} \to \infty$. Тогда, учитывая опр-ие фк-и $z = \operatorname{arctg} y$ и тот факт, что $\operatorname{tg} z \to \infty$, когда $z \to \dfrac{\pi}{2}$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to 2-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{\pi}{2}$; анч-но получим $\lim\limits_{x\to 2+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) Если $x \to 1 - 0$, то $x - 1 \to -0$, а $\dfrac{1}{x-1} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^{\infty} = \infty$. Если $x \to 1 + 0$, то $x - 1 \to 0$, а $\dfrac{1}{x-1} \to \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\infty} = 0$.

**у4**. Найти односторонние пределы при $x \to 2$ слева и справа для сд-их фк-й:

1) $f(x) = \dfrac{8}{2-x}$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$; 3) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$. О: 1) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{8}{2-x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{8}{2-x} = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{4}{(x-2)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{(x-2)^2} = \infty$.

**у5**. Показать, что каждая из посл-ей имеет пределом нуль. Начиная с какого номера зн-ия, каждая из них остается меньше $\varepsilon = 0{,}0001$: 1) $x_n = \dfrac{1}{n}$; 2) $y_n = \dfrac{1}{n^2}$; 3) $z_n = \dfrac{1}{n^4}$? О: 1) $N_1 = 10000$, 2) $N_2 = 100$, 3) $N_3 = 10$.

**у6**. Д-ть, что каждая из посл-ей имеет пределом нуль. Начиная с какого номера зн-ия, каждая из них по абс. вел-е остается меньше $\varepsilon = 0{,}001$: 1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$; 2) $y_n = -\dfrac{1}{2^n}$; 3) $z_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. О: $N = 10$.

**у7**. Д-ть, что 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{5x} = \dfrac{4}{5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7) = 5$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}(5x+8) = 3$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+6) = 10$.

**у8**. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Р. Здесь имеем неопрн-ть вида $\infty - \infty$, от к-ой освобождаемся так: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x-2}{(x-1)(x+2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \begin{cases} +\infty, \text{если}\, x \to 1-0; \\ -\infty, \text{если}\, x \to 1+0. \end{cases}$$

8*. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+x-6}$.

**у9**. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+px} - \sqrt{x^2+q}\right)$.

Р. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+px} - \sqrt{x^2+q}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{px-q}{\sqrt{x^2+px}+\sqrt{x^2+q}} = p\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+p/x}+\sqrt{1+q/x^2}} \times$

$$\times \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|} = p\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|} = \begin{cases} p/2, \text{при}\, x \to \infty; \\ -p/2, \text{при}\, x \to -\infty. \end{cases}$$

**у10**. Выч-ть пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

О: 1) 0; 2) – 1; 3) 1/2; 4) 1/3; 5) 0; 6) 1.

**у11**. Выч-ть пределы рац-ых врж-й: 1) $\lim\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m, n\in N$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^3}{2x+1}\right)$; 5) $\lim\dfrac{(x+1)^7+...+(x+n)^7}{x^7-n^7}$, $n\in N$. О: 1) $\infty$; 2) $m/n$; 3) $3x^2$; 4) 1/4; 5) $n$.

**у12**. Выч-ть пределы иррац-ых врж-й: 1) $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2}-1}$.

О: 1) 1/6; 2) 0; 3) 3/5; 4) 1/6; 5) $\sqrt{2}/2$.

**у13**. Выч-ть первый змч. предел: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\pi x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$. О: 1) 5; 2) $\dfrac{5}{7}$; 3) $\dfrac{1}{\pi}$; 4) $\dfrac{3}{4}$; 5) 2; 6) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2}$.

**у14**. Выч-ть второй змч-ый предел: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$. О: 1) $e^{-6}$; 2) $e^2$; 3) $e^{10}$; 4) $e^{-\frac{1}{2}}$; 5) $e^3$; 6) 1.

**у15**. Д-ть др. важные змч. пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg_a(1+x)}{x}=\lg_a e$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$.

**у16**. Используя важные змч. пределы, выч-ть: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\lg_a x-1}{x-a}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. О: 1) $\ln a$; 2) $a\ln a$; 3) $\dfrac{\lg_a e}{a}$; 4) $a-b$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п21 из 6.3 и у1-у16 р-ть з1-з20.

1. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{5n}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x\cos 3x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sin^2 2x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\operatorname{tg}3x}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$; а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}2x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cos 5x}{\sin 3x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\mathrm{tg}4x}{\sin^2 6x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\mathrm{tg}4x}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$; а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}5x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x+7}{2x^2+5x+3}\right)^{x}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+x-6}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\mathrm{tg}2x}{\sin^2 3x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+2}{6-x-x^2}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\mathrm{tg}2x}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-7x-8}{2x^2+5x+3}$; а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}2x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{2x-x^3}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-3x-1}{5x-x^2-4}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos 8x}{\sin 10x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\mathrm{tg}4x}{\sin^2 6x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-x^2}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-6}{5x-x^2-6}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\mathrm{tg}3x}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$; а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}3x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 5x}{\sin 8x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot\mathrm{tg}2x}{\sin^2 4x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+3}{13x-10}\right)^{x-3}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-x-10}{7x-x^2-10}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x\cdot\mathrm{tg}2x}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-7}\right)^{x/6+1}$.

# 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

> Человек без принципов и без воли похож на корабль, у которого нет руля и компаса, он меняет свое направление с каждой переменой ветра.
>
> С. Смайльс

## ЛЕКЦИЯ 18

## 7.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ЗАДАЧИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ

**1°. Производная функции в точке и ее геометрический, механический, экономический смыслы**. Перечислим нек-ые задачи, приводящие к понятию производной (прв).

**о1**. Касательной (кас.) к непр-ой кривой (крв.) $y = f(x)$ в тч. $M_0(x, y)$ наз. пм. $M_0T$ (рис. 1), полученная из секущей $M_0M_1$ при $M_1 \to M_0$ по крв-й.

**з1** (угловой коэф. кас-й к крв). Найти угловой (угл.) коэф. $k = \text{tg}\varphi$ кас-ой к крв. $y = f(x)$ в тч. $M_0$, полагая, что кас-я сущ-ет.

Р. При $M_1 \to M_0$ имеем $\alpha \to \varphi$ ($\text{tg}\alpha \to \text{tg}\varphi$, но $\text{tg}\varphi = k$), при этом $\Delta x \to 0$ ($\Delta y \to 0$). Отсюда и из $\Delta M_0NM_1$ получим (рис. 1)

$$k = \text{tg}\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \text{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Т.о. угл-й коэф. кас-ой к крв. опр-ся с помощью предельного перехода, связывающего секущую с кас-й.

**з2** (мгновенная скорость неравномерного движения). Пусть материальная тч. движется (двж.) неравномерно по пм-й в одном направлении (нпв.) по закону $S = S(t)$. К моменту времени (вр.) $t$ тч. прошла путь $S_0 = S(t)$. Найти скорость (скр.) $v_0 = v(t)$.

Р. Дадим $t$ приращение (прщ.) $\Delta t$, тогда $S_0$ получит прщ-ие $\Delta S$, т.е. $S(t) + \Delta S = S(t + \Delta t)$ или $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. Находим среднюю (ср.) скр.:

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Если тч-а двж-ся неравномерно, то ср. скр-ть $\bar{v}$ не совпадает со скр-ю $v$ в момент $t$, к-ую наз. мгновенной.

Мгновенная скр. $v_0 = v(t)$ опр-ся как предел скр-ти $\bar{v}$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Содержание задач з1 и з2 разное. Но они р-ся общим методом, приводящим к понятию прв-й.

**о2**. Прв-ой фк-и $y = f(x)$ в данной тч. $x$ наз. предел отн-ия прщ-ия фк-и к прщ-ю аргумента (арг.), когда прщ-ие арг-та стремится к нулю (если этот предел сущ-ет).

Для нахождения прв-й фк-и $y = f(x)$ в тч. $x$ делаем сд. шаги:

I. Пер-ой $x$ даем прщ-ие $\Delta x$ – дт-но малое число (плж. или отц.), тогда $y$ получит прщ. $\Delta y$, т.е. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

II. Находим прщ-ие фк-и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

III. Разделив его на $\Delta x$, получим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

IV. Находим предел этого отн-ия при $\Delta x \to 0$. Если сущ-ет этот предел, то его наз-ют прв-ой фк-и $y = f(x)$ и обз-ют:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Операция нахождения прв-ой фк-и $f(x)$ наз. дифференцированием (дифв.) этой фк-и.

Теперь стн-ия (1) и (2) можно писать ств-но в виде

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \text{ и } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t), \qquad (3а)$$

к-ые врж-ют геомч-й и механический смыслы прв-й.

**п1**. Найти: а) ур-ие кас-ой к крв. $y = x^3$ в тч. $M_0(1, 2)$; б) мгновенную скр. $S(t) = t^2 - 2t + 5$ в момент вр-и $t = 3$.

Р. а) $y' = 3x^2$, $y'(1) = 3 = k$, тогда $y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$, б) $v = S'(t) =$ $= 2t - 2$, $v(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ ед./сек.

Заметим, что при помощи прв-ой врж-ся также быстрота протекания физических, химических, биологических, экономических (экнч.) и др. процессов, н-р, скр-ть охлаждения тела, скр. химической реакции и т.д.

**з3** (скр. взр-ия вклада). Обз-им размер вклада в сберегательной кассе в момент $t$ через $x = x(t)$. Найти скр-ть взр-ия вклада.

Р. Врз-им ср-ю скр. взр-ия вклада $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$. Найдя ее предел при $\Delta t \to 0$, получим скр-ть взр-ия вклада:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t). \qquad (4)$$

Стн-ие (4) врж-ет экнч-й смысл прв-ой. Если же $x = x(t)$ есть темп-ра тела, то (4) врж-ет скр-ть охлаждения тела.

**п2**. Найти прв-ю фк-и $y = x^n$ (где $n$ – плж. нтр. число).

Р. Используя фм-у бинома Ньютона (см. 5°: 6.1) и выполняя посл-но 4 шага, находим:

I. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n$;

II. $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n$;

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}$;

IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = nx^{n-1}$. Итак,

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (5)$$

Заметим, что стн. (5) имеет место при любом дсв. $n$. Так, $(x^2)' = 2x$, $x' =$ $= 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**2°. Дифференцируемость и непрерывность функций**. Приведем сд-ю

**л1**. Из диф-сти фк-и $f(x)$ в тч. $x$ вытекает ее непр-сть в этой тч-е.

Д. Если фк-я диф-ма в тч. $x$, т.е. сущ-ет

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y', \qquad (6)$$

то $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, иначе

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] = 0 \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x), \qquad (7)$$

а это врж-ет непр-сть (см. 9°: 6.3) фк-и $f(x)$ в тч. $x$.

Кроме того, заметим, что из сущв-ия предела (6) вытекает сущв-ие и рав-во левостороннего и правостороннего пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (8)$$

Обратное утв. не верно, т.е. из непр-сти фк-и $f(x)$ в тч. $x$ не следует ее диф-сть в этой тч., н-р, фк. $y = f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } x < 0; \\ x \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$ в тч. $x$ непр-на (рис. 2), но $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = (-x)' = -1$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = x' = 1$, т.е. усл-е (8) не выполняется, значит, фк. $f(x)$ в тч. $x = 0$ прв-ю не имеет. Геомч-ки это означает появление на крв. угл-й тч., где усл. (8) не выполняется.

В кач-ве дальнейших примеров, в к-ых непр. фк-я недиф-ма, рас-им их тч-и, где прв-ая беск-на, т.е. не сущ-ет ни правой, ни левой прв-ой.

**п3**. Фк. $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ в тч. $x = 0$ непр-на (рис. 3), но $y'(0) = \infty$, т.е. в тч. $x = 0$ прв-я не сущ-ет. Геомч. смысл беск. прв-ой состоит в том, что кас-ая к крв. в этой тч. прп-на оси $Ox$, а крв-ая в этой тч. гладкая, угл. тч-а отсутствует (рис. 3).

**п4**. Фк. $y = \sqrt{x}$ непр-на (рис. 4) в тч. $x = 0$, но $y'(0) = \infty$, т.е. прв-я не сущ-ет.

**п5**. Фк. $y = x^{\frac{2}{3}}$ непр-на (рис. 5) в тч. $x = 0$ $\left(y' = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$, но $y'(0) = -\infty$ при $\Delta x \to 0 - 0$ и $y'(0) = \infty$ при $\Delta x \to 0 + 0$.

Заметим, что полукубическая парб. $y = x^{\frac{2}{3}}$ в тч. $x = 0$ имеет острие, прп-ое оси $Ox$ (рис. 5).

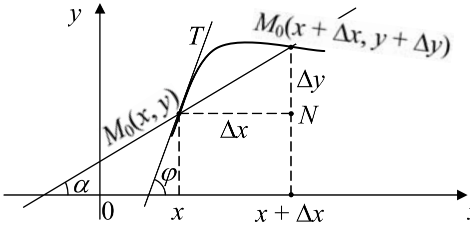



Рис. 1

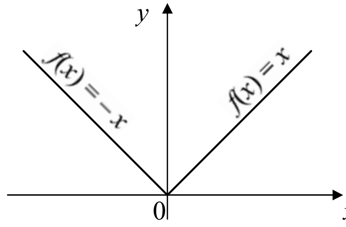



Рис. 2

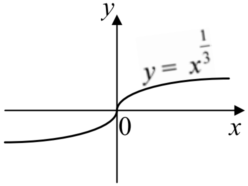



Рис. 3

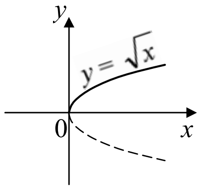



Рис. 4

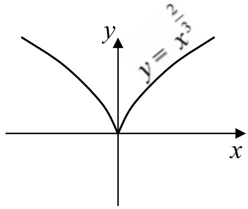



Рис. 5

**3°. Свойства производной**. Прв-ые фк-й обладают сд. св-ми:

**с1**. Прв-я пст-ой равна нулю, т.е. если $y = f(x) = C$, то $y' = 0$.

Д. I. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$; II. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$. Итак, $y' = C' = 0$ ■

**п5**. Найти прв-ые фк-й: $y = 2$, $y = \sqrt{a}$.

Р. $y' = 2' = 0$, $y' = \left(\sqrt{a}\right)' = 0$.

**с2**. Прв-ая суммы конечного числа дифм-ых фк-й равна сумме прв-ых этих фк-й, т.е. если $y = u + v$, то $y' = u' + v'$. Здесь и в дальнейшем $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифм-ые фк-и, т.е. они яв-ся непр-ми, откуда по (7) $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Д. I. $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$; II. $\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v = \Delta u + \Delta v$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$ ■

**п6**. Найти прв-ю фк-и $y = x^2 + x + 3$.

Р. $y' = (x^2 + x + 3)' = 2x + 1$.

**с3**. Пст-ый множитель (мнж.) можно выносить за знак прв-й, т.е. если $y = Cu$, то $y' = (Cu)' = Cu'$.

Д. I. $y + \Delta y = C(u + \Delta u)$; II. $\Delta y = C(u + \Delta u) - Cu = C\Delta u$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$;

IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} C\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = C\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'$ ■

**п7**. Найти прв-ю фк-и $y = 2x^5$.

Р. $y' = (2x^5)' = 2(x^5)' = 2\cdot 5x^4 = 10x^4$.

**4°. Производные произведения и частного.**

а) Если $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$.

Д. I. $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v$; II. $\Delta y = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv' + 0\cdot v' = u'v + uv'$ ■

**п8**. Найти прв-ю фк-и $y = (2x + 3)(x^4 + 2x)$.

Р. $y' = (2x + 3)'(x^4 + 2x) + (2x + 3)(x^4 + 2x)' = 2(x^4 + 2x) + (2x + 3)(4x^3 + 2)$.

б) Если $y = \dfrac{u}{v}$, то $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v = v(x) \neq 0$.

Д. I. $y + \Delta y = \dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$; II. $\Delta y = \dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{\Delta uv - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)v} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ ■

**п9**. Найти прв-ю фк-и $y = \dfrac{3x^2+5}{x-2x^2}$.

Р. $y' = \dfrac{(3x^2+5)'(x-2x^2) - (3x^2+5)(x-2x^2)'}{(x-2x^2)^2} = \dfrac{6x(x-2x^2) - (3x^2+5)(1-4x)}{(x-2x^2)^2}$.

**5°. Производные сложной и неявной функций**.

а) Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y$ наз. сложной фк-ей от $x$ и пишут $y = f[\varphi(x)]$.

**т1**. Прв-я сложной фк-и $y = f[\varphi(x)]$ (где $y = f(u)$ диф-ма по $u$, а $u = \varphi(x)$ диф-ма по $x$) по $x$ сущ-ет и равна $y' = f'(u)u' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

Д. Из дифм-ти $u = \varphi(x)$ следует ее непр-сть, т.е. $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда из $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ получим $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x = f'(u)u' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$ ■

Анч-но, если $y = f(\varphi(\psi(x))$, то $y' = f'(\varphi(\psi(x))\cdot\varphi'(\psi(x))\cdot\psi'(x)$.

**п10**. Найти прв-ю фк-и $y = (3x - 2)^4$.

Р. $y' = [(3x - 2)^4]' = 4(x - 2)^3(3x - 2)' = 4(x - 2)^3\cdot 3 = 12(x - 2)^3$.

б) Фк-я вида $F(x, y) = 0$ считается заданной в неявном, а $y = f(x)$ – в явном виде. Прв-ю неявной фк-и можно найти (не приводя ее к явному виду) в том порядке, в каком она записана. Н-р, найдем прв-ю фк-и $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$.

**п11**. Найти прв-ю неявной фк-и $2xy^2 - 3x = 0$.

Р. $2(y^2 + x \cdot 2y \cdot y') - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 2xyy' = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{3}{2} - y^2}{2xy}$.

**6°. Производные логарифмической и показательной функций**.

а) Если $y = \lg_a x$, то $y' = \dfrac{1}{x}\lg_a e$.

Д. I. $y + \Delta y = \lg_a(x + \Delta x)$; II. $\Delta y = \lg_a(x + \Delta x) - \lg_a x = \lg_a \dfrac{x+\Delta x}{x} =$

$= \lg_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$; III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\lg_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x}{\Delta x}\lg_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) =$

$= \dfrac{1}{x}\lg_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\lg_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$

$= \dfrac{1}{x}\lg_a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \dfrac{1}{x}\lg_a e$ ■

В част., если $y = \ln x$, то $y' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $\ln e = 1$.

б) Если $y = a^x$, то $y' = a^x\ln a$.

Д. Фк-ю $y = a^x$ пролгр-ем: $\ln y = x\ln a$. Тогда, диф-уя $\ln y$ как сложную фк., получим $\dfrac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Rightarrow y' = a^x\ln a$ ■

В част., если $y = e^x$, то $y' = e^x$, т.к. $\ln e = 1$.

**сл1**. Прв-я спн-ой фк-и $y = x^\alpha$ ($\alpha$ – любое дсв. число) равна $y' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Д. Находим $\ln y = \alpha\ln x$. Отсюда $\dfrac{1}{y}y' = \alpha \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ ■

**7°. Производные тригонометрических функций**.

**а)** Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$.

Д. I. $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$; II. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$;

III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$; IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$

$= \cos x \cdot 1 = \cos x$ ■

**б)** Если $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$.

Д. $y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$ ■

**в)** Если $y = \mathrm{tg}x$, то $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Д. $y' = (\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ■

**г)** Если $y = \mathrm{ctg}x$, то $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Д. $y' = (\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$

$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ■

**8°. Производные обратно-тригонометрических функций**. Если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – обратные фк-и, то $x$ можно представить в виде сложной фк-и $x = \varphi[f(x)]$. Тогда $1 = \varphi'(y) f'(x)$, откуда

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad (9)$$

при $\varphi(y) \neq 0$. Используя (9), найдем прв-ые обратно-тригч. фк-й:

а) Если $y = \arcsin x$, то $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Д. $x = \sin y \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow} 1 = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ■

б) Если $y = \arccos x$, то $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Д. $x = \cos y \Rightarrow 1 = -\sin y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ■

в) Если $y = \mathrm{arctg}x$, то $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Д. $x = \mathrm{tg}y \Rightarrow 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$; $y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$ ■

г) Если $y = \mathrm{arcctg}x$, то $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Д. $x = \text{ctg}y \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow} 1 = -\dfrac{1}{\sin^2 y} \cdot y'$; $y' = -\sin^2 y = -\dfrac{1}{1+\text{ctg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ ■

**9°. Гиперболические функции и их производные**. Во многих приложениях (прлж.) мтч-го анализа встречаются комбинации пкзт-х фк-й вида $\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и $\dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Эти комбинации расв-ют как новые фк-и, их обз-ют и наз-ют так:

$$\begin{aligned} \text{sh}x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический (гпрбч.) синус,} \\ \text{ch}x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ – гпрбч. косинус.} \end{aligned} \tag{10}$$

С помощью фк-й sh$x$ и ch$x$ можно опр-ть еще две фк-и:

$$\begin{aligned} \text{th}x &= \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ – гпрбч. тангенс,} \\ \text{cth}x &= \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ – гпрбч. котангенс.} \end{aligned} \tag{11}$$

Фк-и sh$x$, ch$x$, th$x$ опр-ны, очевидно, для всех зн-й $x$. А фк. cth$x$ опр-на всюду, за иск-ем тч. $x = 0$. Грф-и их см. на рис. 6, 7, 8.

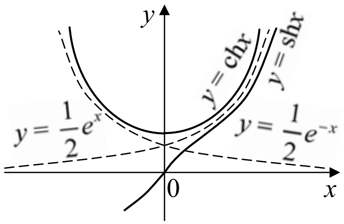



Рис. 6

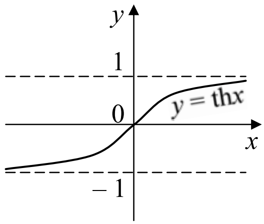



Рис. 7

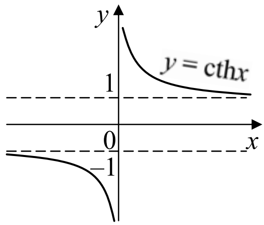



Рис. 8

Из опр-ия фк-й sh$x$ и ch$x$ по (10) следуют стн-ия, анч-ые стн-ям между ств-ми тригч. фк-ми:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \tag{12}$$

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch}x\,\text{ch}y + \text{sh}x\,\text{sh}y, \tag{13}$$

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh}x\,\text{ch}y + \text{ch}x\,\text{sh}y. \tag{14}$$

Д. (12): $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$

(13): $\text{ch}(x + y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$, $\text{ch}x\,\text{ch}y + \text{sh}x\,\text{sh}y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} +$

$+ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} =$

$= \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \text{ch}(x + y).$

Анч-но д-ся и справедливость стн-ия (14).

Наз-ие «гпрбч-ие фк-и» объясняется тем, что фк-и ch$x$, sh$x$ играют ту же роль для параметрического (пармч.) представления гпрб-ы $x^2 - y^2 = 1$, какую тригч. фк-и $x = \cos t$, $y = \sin t$ – для пармч-го представления окр-ти (рис. 9) $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, т.е.

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{15}$$

Анч-но ур-ия $x = \text{ch}\,t$, $y = \text{sh}\,t$ яв-ся пармч. ур-ми гпрб-ы (рис. 10) $x^2 - y^2 = \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$, т.е.

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{16}$$

Заметим, что в ур-ях $x = \cos t$, $y = \sin t$ параметр (парм.) $t$ численно равен центральному $\angle AOM$ или удвоенной площади $S$ сектора $AOM$, т.е. $t = 2S_{AOM}$ (рис. 9). И в пармч-их ур-ях гпрб-ы $x = \text{ch}\,t$, $y = \text{sh}\,t$ парм. $t = 2S_{AOM}$ (рис. 10).

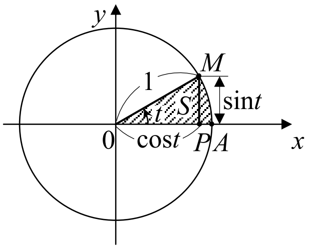



Рис. 9

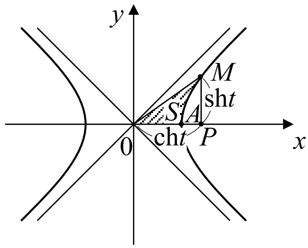



Рис. 10

Прв-ые гпрбч-их фк-й опр-ся фм-ми:

$$(\text{sh}\,x)' = \text{ch}x,\ (\text{ch}\,x)' = \text{sh}x,\ (\text{th}\,x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x},\ (\text{cth}\,x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}, \tag{17}$$

к-ые вытекают из самого опр-ия гпрбч-их фк-й. Н-р, для фк. $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

имеем $(\text{sh}\,x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x$. Остальное д-ть самим!

**п12**. Найти прв-ые фк-й: 1) $y = x\text{sh}x$; 2) $y = \dfrac{x^2}{\text{ch}x}$; 3) $y = \text{th}x - x$.

Р. 1) $y' = \text{sh}x + x\text{ch}x$; 2) $y' = \dfrac{2x\text{ch}x - x^2\text{sh}x}{\text{ch}^2 x}$; 3) $y' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} - 1 = \dfrac{1 - \text{ch}^2 x}{\text{ch}^2 x} = -\dfrac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = -\text{th}^2 x$.

**10°. Таблица производных и правила дифференцирования**.

а) Таблица прв-ых:

1) $y = C$, $y' = 0$.

2) $y = x^\alpha$, $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, в част., $y = \sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

3) $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, в част., $y = e^x$, $y' = e^x$.

4) $y = \lg_a x$, $y' = \dfrac{1}{x}\lg_a e$, в част., $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$.

5) $y = \sin x$, $y' = \cos x$; Анч-но: $y = \operatorname{sh} x$, $y' = \operatorname{ch} x$;

$y = \cos x$, $y' = -\sin x$; $y = \operatorname{ch} x$, $y' = \operatorname{sh} x$;

$y = \operatorname{tg} x$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $y = \operatorname{th} x$, $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$y = \operatorname{ctg} x$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $y = \operatorname{cth} x$, $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

6) $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$y = \arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$y = \operatorname{arcctg} x$, то $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

8) Общие правила дифференцирования:

1) $y = Cu$, $y' = (Cu)' = Cu'$.

2) $y = u + v$, $y' = u' + v'$.

3) $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

4) $y = \dfrac{u}{v}$, $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

5) $y = f[\varphi(x)]$, $y' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

6) $y = u^v$, $\ln y = v\ln u$, $\dfrac{1}{y}y' = v'\ln u + v\dfrac{1}{u}u'$, $y' = u^v\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$.

**п13**. Найти прв-ю сложной фк-и $y = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

Р. $y' = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \ln 3}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

**п14**. Найти прв-ю пкзт.-спн. фк-и $y = x^{\sin x}$.

Р. Из $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \dfrac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' =$

$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$.

## ЛЕКЦИЯ 19

### 7.2. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

**1°. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Формула Тейлора**. Прв-я фк-и $y = f(x)$ наз. прв-ой первого порядка и обз-ся $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, к-ая, в свою очередь, яв-ся фк-ей от $x$. Прв-я от прв-ой $f'(x)$ наз. прв-ой второго порядка фк-и $f(x)$ и обз-ся $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$. Анч-но опр-ся и обз-ся:

прв-я 3-го порядка $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$;

прв-я 4-го порядка $y^{\mathrm{IV}} = f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

прв-я $n$-го порядка $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.

**п1**. Найти прв-ю $n$-го порядка фк-й: а) $y = e^{kx}$, б) $y = \sin x$.

Р. а) $y = e^{kx}$, $y' = e^{kx}(kx)' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, …, $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

б) $y = \sin x$, $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $y^{\mathrm{IV}} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, …, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Анч-но выводятся прв-ые любого порядка от др. элр-ых фк-й, н-р, $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$ и т.д.

На случай прв-ых любого порядка легко общаются основные (осн.) правила дифв-ия. В част., имеют место: $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$, $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$. Легко также вывести фм-у Лейбница, т.е. найти $(uv)^{(n)} = ?$

$y = uv$;

$y' = u'v + uv'$;

$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'' = u''v + \frac{2}{1!}u'v' + \frac{2\cdot 1}{2!}uv''$;

$y''' = u'''v + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u'''v + \frac{3}{1!}u''v' + \frac{3\cdot 2}{2!}u'v'' + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}uv'''$;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}uv^{(n)}. \quad (1)$$

Стн-ие (1) есть фм-а Лейбница, к-ая получается разложением врж-ия $(u+v)^n$ по биному Ньютона и заменой сп-ни на прв-ые, причем $u^0$ и $v^0$ заменяются самими фк. $u$ и $v$.

**п2**. Найти прв-ю $n$-го порядка фк-и $y = e^{ax}x^2$.

Р.
$$\left.\begin{array}{l} u = e^{ax} \\ u' = ae^{ax} \\ u'' = a^2e^{ax} \\ u''' = a^3e^{ax} \\ \dots\dots\dots \\ u^{(n)} = a^ne^{ax} \end{array}\right| \begin{array}{l} v = x^2 \\ v' = 2x \\ v'' = 2 \\ v''' = 0 \\ \dots\dots \\ v^{(n)} = 0 \end{array}\left| \begin{array}{l} y^{(n)} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x + \\ + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2 + 0 = \\ = e^{ax}(a^nx^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}). \end{array}\right.$$

Рас-им фм-у Тейлора. Пусть фк. $y = f(x)$ имеет все прв-ые до $(n+1)$ порядка включительно в нек-ом промежутке, содержащем тч-у $x = a$. Найдем мчл. $y = P_n(x)$ сп-и не выше $n$, зн-ие к-го в тч. $x = a$ равно зн-ю фк-и $f(x)$ в этой тч-е, а зн-я прв-ых до $n$-го порядка в тч. $x = a$ равны зн-ям ствщ-их прв-ых фк-и $f(x)$ в этой тч-е, т.е.

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \dots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1а}$$

Будем искать этот мчл. в форме мчл-а по сп-ям $(x-a)$ с неопр. коэф-ми

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n. \tag{1б}$$

Неопр. коэф-ы $C_1, C_2, \dots, C_n$ опр-им так, чтобы уд-ись усл. (1а). Находим прв-ые

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \tag{1в}$$

Подс-в вместо $x$ зн-ие $a$ в (1б), (1в) и заменяя $P_n(a)$ на $f(a)$, в силу (1а) получим:

$$\begin{array}{l} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2\cdot 1C_2, \\ f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1C_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1C_n, \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} C_0 = f(a), \\ C_1 = f'(a), \\ C_2 = \dfrac{1}{2!}f''(a), \\ C_3 = \dfrac{1}{3!}f'''(a), \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a). \end{array}$$

Подс-я зн-ия $C_0, C_1, \dots, C_n$ в фм-у (1б), получим искомый мчл.

$$\begin{array}{l} P_n(x) = f(a) + \dfrac{x-a}{1}f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \\ + \dfrac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a) + \dots + \dfrac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a). \end{array} \tag{1г}$$

Разность между фк-ей $f(x)$ и мчл-ом $P_n(x)$ наз. остаточным членом и обз.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{1д}$$

Если $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)$, то говорят, что это есть остаточный член в форме Лагранжа, где $\xi$ заключено между $x$ и $a$. Из (1д) и (1г) получим

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \quad (1е)$$

Стн-ие (1е) наз. фм-ой Тейлора. Если $a = 0$, то получим фм-у Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (1ж)$$

где $\xi$ заключено между $x$ и 0.

**п2а**. Разложить фк-ю $f(x) = e^x$ по фм-е Маклорена.

Р. Находим прв-ые $f(x) = e^x, f(0) = 1,$

$f'(x) = e^x, f'(0) = 1,$

. . . . . . . . . . . . . . .

$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1.$

Подставляя полученные врж-ия в фм-у (1ж), получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}.$$

Если $|x| < 1$, то, взяв $n = 8$, получим оценку $R_8 < \dfrac{1}{9!}3 < 10^{-5}$. При $x = 1$ получим фм-у, позволяющую найти прж. зн-ие числа $e$: $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{8!} = 2{,}71828$. Здесь ошибка не превосходит $\dfrac{3}{9!}$ или 0,00001.

Отметим, что обычно берут $\xi = a + \Theta(x - a)$ для (1е) и $\xi = \Theta x$ для (1ж) при $\Theta \in \,]0, 1[$, причем каков бы ни был $x$, остаточный член $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \to 0$ при $n \to \infty$.

**2°. Дифференциал и его применение**. Из опр-ия прв-ой имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, откуда следует (см. т4 из 4°: 6.3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha$ – б.м.в. вместе с $\Delta x$. Тогда имеем

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x. \quad (2)$$

В стн-и (2) слг-ое $y'\Delta x$ прц-но $\Delta x$, поскольку $y'$ не зв-т от $\Delta x$. Причем при $\Delta x \to 0$ $y'\Delta x$ есть б.м.в. более низкого порядка, чем б.м.в. $\alpha\Delta x$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = 0$ для $y' \neq 0$. Поэтому слг-ое $y'\Delta x$ яв-ся главной частью прщ-ия фк-и и наз.

дифференциалом (диф.) фк-и $y = f(x)$, обз-ся $\mathrm{d}y = y'\Delta x$. Причем отсюда $\mathrm{d}x = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Тогда

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \text{ (или } \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x). \tag{3}$$

Т.о., диф-л фк-и равен пзв-ю ее прв-ой на диф-л аргумента (арг.). Из табл. прв-ых легко получить диф-лы фк-й: $y = x^{\alpha}$, $\mathrm{d}y = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$, $y = a^x$, $\mathrm{d}y = a^x\ln a\mathrm{d}x$, $y = \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x\mathrm{d}x$ и т.д.

Имеют место также стн-ия $\mathrm{d}(u + v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$ и т.д. Н-р, д-ем истинность второго стн-ия: $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (vu' + uv')\mathrm{d}x = vu'\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$.

**зм1**. Из стн-ия (3) получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'. \tag{4}$$

Значит, прв-я фк-и равна отн-ю ее диф-ла к диф-у арг-та. В дальнейшем вместо (3) иногда будем расв-ть (4).

**зм2**. Стн-ие (3) имеет место и для сложной фк-и $y = f[\varphi(t)]$, когда $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$. Дсв-но, если $y = f[\varphi(t)]$, то $\mathrm{d}y = y'_t\,\mathrm{d}t$. А по правилу дифв-ия сложной фк-и имеем $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Отсюда $\mathrm{d}y = y'_x x'_t\,\mathrm{d}t = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(x)\mathrm{d}x$, т.е. док-на сд.

**т1**. Диф-л сложной фк-и $y = f(x)$, для к-ой $x = \varphi(t)$, имеет такой же вид $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$, когда арг-т яв-ся незв. пер-ой.

Св-во диф-ла сложной фк-и, врж-мое этой теоремой, наз. инвариантностью форм диф-ла.

**зм3**. Если фк. $y = f(x)$ задана пармч. ур-ми: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ где $x(t)$ и $y(t)$ диф-мы по $t$ и $x'(t) \neq 0$. Тогда по (4) легко найти $y'_x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Т.к. $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, то

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5}$$

**п3**. Найти прв-ю фк-и $y$ от $x$, заданной пармч. ур-ми $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Р. В силу (5) имеем $y'_x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t\cos t} = \dfrac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 2\mathrm{ctg}2t.$

Отметим, что диф-л высших порядков опр-ся исходя из их прв-ых, так $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ – диф-л первого порядка (где $\mathrm{d}x$ не зв-т от $x$, т.е. $\mathrm{d}x$ – пст-я);

$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(y'\mathrm{d}x) = (y''\mathrm{d}x)\mathrm{d}x = y''\mathrm{d}x^2$ – диф. второго порядка;

$\mathrm{d}^3y = \mathrm{d}(y''\mathrm{d}x^2) = (y'''\mathrm{d}x)\mathrm{d}x^2 = y'''\mathrm{d}x^3$ – диф. третьего порядка и т.д.

$$\mathrm{d}^n y = y^{(n)}\mathrm{d}x^n. \tag{5a}$$

Из (5а) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\,. \tag{5б}$$

Геомч-й смысл диф-ла 1-го порядка фк-и $y = f(x)$ в прзвл-ой тч. $M(x, y)$ состоит в том, что прщ-ие ординаты кас-ой $NT$ в тч. $M'(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$, $N(x + \Delta x,\ y)$ равен диф-лу $\mathrm{d}y$ (рис. 1). Дсв-но, из пуг-го $\Delta MNT$ имеем $NT = \operatorname{tg}\alpha \cdot MN$; но согласно геомч. смыслу прв-ой $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x) = y'$, а $MN = \Delta x = \mathrm{d}x$. Поэтому $NT = f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Как видно из рис-а, $\mathrm{d}y < \Delta y$ (рис. 1, а) или $\mathrm{d}y > \Delta y$ (рис. 1, б); если фк-я равна пст-ой, то $\mathrm{d}y = \Delta y = 0$.

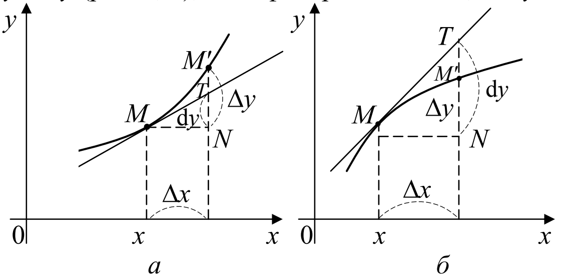


Рис. 1

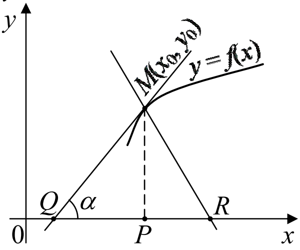


Рис. 2

Рас-им применение диф-ла в прж-ых выч-ях. Пусть известно зн-ие фк-и $y = f(x)$ и ее прв-ой в тч. $x$. Найти зн-ие фк-и $f(x + \Delta x)$.

Для этого воспользуемся прж-ым рав-ом (2): $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ или $\Delta y \approx y'\Delta x$. Т.к. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx y'\Delta x$, то получим

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + y'\Delta x. \tag{6}$$

Фм. (6) тем точнее, чем меньше $\Delta x$.

**п4**. Выч-ть sin46°.

Р. По (6) получим $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$, где $x = 45° = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$, $46° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$, $\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}017 = 0{,}7194$.

**п5**. Выч-ть $\sqrt[3]{24}$.

Р. Т.к. $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, то $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 - 3} = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(-3) = 3 + \frac{1}{27}(-3) = 3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9}$.

**3°. Уравнения касательной и нормали к кривой**. Рас-им крв-ю $y = f(x)$. Через тч-и крв-й $M(x_0, y_0)$ проведем кас-ю к крв. (рис. 2). Ур-ие пм-й с угл. коэф-ом $k$ и проходящей через тч. $M(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Но по (3а): 7.1 $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, тогда ур-ие кас-ой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{7}$$

Нормалью (норм.) к крв. в данной тч. $M(x_0, y_0)$ наз. пм-я, прп-я к кас-ой в этой тч. Угл-ой коэф. кас-ой равен $k_n = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, тогда ур-ие норм-и имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{8}$$

**п6**. Написать ур-ие кас-ой и норм-и к крв. $y = x^3$ в тч. $M(1, 2)$.

Р. Из $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$, $y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$. Отсюда получим $y - 2 = 3(x - 1)$ – ур. кас-ой, $y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$ – ур. норм-и.

**4°. Основные теоремы о дифференцируемых функциях**. Рас-им сд-ие

**т1** (Ферма). Пусть фк. $f(x)$, опрн-ая в интервале (инр.) $]a, b[$, принимает в нек-ой тч. $x = c$ этого инр-а нб. или нм. зн-ие. Тогда, если в тч. $x = c$ сущ-ет прв-я этой фк-и, то она равна нулю.

Д. Предположим для опрс-ти, что $f(c) = M$ есть нб. зн-ие (рис. 3) фк-и в инр-е $]a, b[$. Покажем, что $f'(c) = 0$. По опр-ю пзв-ой имеем $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Т.к. в тч. $c$ фк-я принимает нб. зн-ие, то при любом знаке $\Delta x$ имеем $f(c) \ge f(c + \Delta x)$, т.е. $f(c + \Delta x) - f(x) \le 0$. Если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$, сдт-но, $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$. Если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$, сдт-но, $f'(c) =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$. Откуда $f'(c) = 0$ ■

Геомч-ки теорема Ферма означает, что в тч. $x = c$ (рис. 3) кас-я прл-на оси $Ox$, т.е. $f'(c) =$ $= \operatorname{tg}\alpha = k = 0$.

**т2** (Ролля). Если фк. $y = f(x)$ непр-на на сегменте $[a, b]$ и диф-ма в каждой тч. инр-ла $]a, b[$, а зн-ия ее на концах сегмента обращаются в нуль, т.е. $f(a) = f(b) = 0$ (рис. 3), то в этом инр-ле сущ-ет по крайней мере одно такое число $c$, для к-го $f'(c) = 0$.

Д. Т.к. фк. $f(x)$ непр-на в $[a, b]$, то она имеет нб. зн-ие $M$ и нм. зн. $m$. Если $m = M$, то $f(x)$ – пст-ая и $f'(x) = 0$, теорема доказана.

Пусть $m \ne M$, тогда одно из этих чисел, н-р, $M \ne 0$, точнее, $M > 0$. Поэтому, если нб. зн-ие $M$ достигается в тч. $c$: $f(c) = M$, то $c \in\ ]a, b[$ (т.к. на концах сгм-а $f(a) = f(b) = 0$). Сдт-но, по теореме Ферма $f'(c) = 0$ ■

Геомч-ки теорема Ролля означает, что если грф-к непр-ой на сгм-е $[a, b]$ и дифм-ой внутри него фк-и перк-ет ось $Ox$ в двух тч-ах $x = a$ и $x = b$, то найдется хотя бы одна тч. $c$ ($a < c < b$), для к-ой кас-я к грф-у прл-на оси $Ox$ (рис. 3).

**зм4**. Если не выполнено требование о дифм-сти фк-и $f(x)$ в $]a, b[$, то утв-ие теоремы Ролля может оказаться неверным, н-р, фк. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непр-на на сгм-е $[a, b]$. Однако прв-я $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ внутри этого сгм-а в нуль не обращается (рис. 4). Происходит это потому, что при $x = 0$ прв-я не сущ-ет.

**т3** (Лагранжа). Если фк. $f(x)$ непр-на на сгм-е $[a, b]$ и диф-ма на инр-ле $]a, b[$, то сущ-ет в этом инр-ле по крайней мере одна тч. $x = c$ (рис. 5), такая, что имеет место рав-во

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{9}$$

Д. Положим $Q = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и д-ем, что $Q = f'(c)$. Рас-им вспомогательную фк-ю

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \tag{10}$$

Фк. $F(x)$ непр-на на сгм-е $[a, b]$, диф-ма на инр-ле $]a, b[$ и $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ или $F(a) = F(b)$, значит, имеет место теорема Ролля, т.е. найдется тч. $c$, такая, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q \Rightarrow$

$F'(c) = f'(c) - Q = 0$, откуда $Q = f'(c)$ или $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Отсюда получаем (9) ■

Фм-а (9) наз. фм-ой Лагранжа или фм-ой конечных прщ-й.

Геомч. смысл теоремы Лагранжа (рис. 5) состоит в том, что в хорде с угл. коэф-ом $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ найдется прл. кас-ая к этой крв., т.е. $\mathrm{tg}\alpha = f'(c)$. Таких тч. может быть несколько (рис. 6).

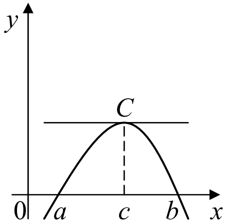


Рис. 3

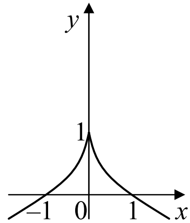


Рис. 4

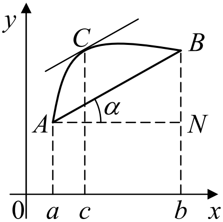


Рис. 5

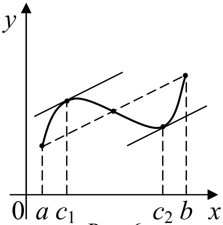


Рис. 6

**т4** (Коши). Если фк-и $f(x)$ и $\varphi(x)$ непр-ны на сегменте $[a, b]$ и диф-мы в инр-ле $]a, b[$, причем $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in\ ]a, b[$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{11}$$

Д. Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, ибо иначе было бы $\varphi'(c) = 0$. Обз-им через

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \tag{12}$$

и покажем, что $Q = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Сост-им вспомогательную фк-ю

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Эта фк. диф-ма в инр-ле $]a, b[$ и на его концах обращается в нуль: $F(a) = F(b) = 0$. Сдт-но, по теореме Ролля $\exists\, c \in\ ]a, b[$, такая, что $F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0$, откуда получим $Q = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ ■

Заметим, что теорема Лагранжа яв-ся частным случаем теоремы Коши при $\varphi(x) = x$.

**5°. Правило Лопиталя**. Применение прв-ой позволяет выч-ть предел отн-й двух фк-й, когда при $x = a$ обе фк. обращаются в нуль или беск-ть, т.е. раскрыть неопр-ть вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

**т5** (Лопиталя). Пусть фк-и $f(x)$ и $\varphi(x)$ непр-ны на сгм-е $[a, b]$ и диф-мы в инр-ле $]a, b[$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ (т.е. выполняются усл-я теоремы Коши) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$. Тогда, если сущ-ет предел отн-ия $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то сущ-ет и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{13}$$

Д. Рас-им случай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0$. Для тч. $x \neq a$ из $[a, b]$ используем фм-у Коши.

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \tag{14}$$

где $\xi \in\ ]a, x[$. Откуда следует $\xi \to a$, если $x \to a$. Сдт-но,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \qquad (15)$$

т.е. имеет место (13).

Для случая $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \varphi(a) = \infty$ фм-у Коши предварительно нх-мо прб-ть:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)} = \frac{f(x)\left(1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}\right)}{\varphi(x)\left(1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}\right)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)\left(1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}\right)}{\varphi'(\xi)\left(1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}\right)}.$$

Отсюда, с учетом $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}\right) = 1$, а также (15), получим (13) ■

**п7**. По правилу Лопиталя найти: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Р. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a - b^x\ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = k\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{k}{x} = k\cdot 1 = k.$

**п8**. Найти пределы фк-й: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

Р. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x} = 0.$

**зм5**. Неопр-сти вида а) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a}f(x) - \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty - \infty$, б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0\cdot\infty$ могут быть сведены к неопрс-ям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и к ним может быть применено правило Лопиталя.

**п9**. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \mathrm{tg}x\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} = 0;$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}2x[\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x}{\mathrm{ctg}2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\dfrac{2}{\sin^2 2x}} = -2.$

**зм6**. Чтобы использовать правило Лопиталя для неопрс-ей вида

а) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} = 1^{\infty};$

б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} = 0^{0};$

в) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} = \infty^{0},$

предварительно врж-ие $[f(x)]^{\varphi(x)}$ нх-мо пролгр-ть и привести к неопрс-ти вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Н-р, рас-им

**п10**. в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$. Обз-им $y = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{x}\ln(1+x^2),$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x} = 2\cdot 0 = 0.$$

Т.к. $\ln y$ – непр. фк-я, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \ln\lim\limits_{x\to\infty} y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 = 1.$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$

**зм7**. По правилу Лопиталя, если сущ-ет предел отн-ия прв-ых данных фк-й, то сущ-ет и предел отн-ия самих фк-й. Если же предел отн-ия прв-ых не сущ-ет, то это еще не означает, что не сущ-ет предел отн-ия самих фк-й.

**п11**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$ сущ-ет. Однако предел отн-ия прв-ых данных фк-й $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \dfrac{(x+\sin x)'}{x'} = 1 + \cos x$ не сущ-ет, т.к. $\cos x$ при $x \to \infty$ не имеет предела.

# ЛЕКЦИЯ 20

## 7.3. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

**1°. Применение производной. Возрастание и убывание функции**. Применение прв-ой и диф-ла мы уже приводили при р-и различных задач (н-р, задачи о кас-ой и нормали к крв-й, о скорости двж-ия тч-и, нахождения пределов фк-й по правилу Лопиталя, вывода прв-ых фк-й, заданных пармч. ур-ми, для р-я ур-й при прж-ых выч-ях, о конечном прщ-и фк-и (теорема Лагранжа), о корнях пзв-ой (теорема Ролля), о связи фм-ы Лейбница с фм-ой бинома Ньютона и т.д.). В данном параграфе продолжим приводить прлж-ия прв-ой в различных аспектах. И в дальнейших параграфах будут приведены прлж. прв-ой в различных областях науки и техники на основе связи прв-ой с интегралами.

Приведем понятия возрастания (взр.) и убывания (уб.) фк-и.

Фк. $y = f(x)$, опрн-ая в нек-ой обл-и $X$ (сгм-е или инр-ле) наз. возрастающей (взрщ.) [убывающей (убщ.)] в этой обл., если $\forall\ x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$], см. рис. 1, 2.

Обз-им через $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Тогда, если фк. $f(x)$ взрщ-я (убщ.), то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0\right)$.

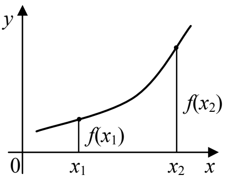


Рис. 1

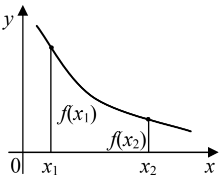


Рис. 2

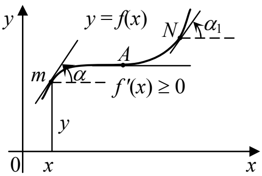


Рис. 3

**т1** [нх. усл-и взр-ия (уб-ия) фк-и]. Если фк. $y = f(x)$ диф-ма и взр-ет (уб-ет) в инр-ле $]a, b[$, то $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] $\forall\ x \in\ ]a, b[$.

Д. Пусть фк. $f(x)$ диф-ма и взр-ет в инр-ле $]a, b[$. Рас-им две тч. $x$, $x + \Delta x \in\ ]a, b[$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$ ■

Анч-но док-ся, что если фк. $f(x)$ убщ-ая в инр-ле $]a, b[$, то $f'(x) \leq 0$.

Геомч-й смысл т1 состоит в том, что для взрщ-ей фк-и $f(x)$ (рис. 3) угл. коэф-т кас-ой к крв. не отц-ен, т.е. $f'(x) = k \geq 0$. А для убщ-ей фк-и $f(x)$ имеем $f'(x) = k \leq 0$ (рис. 4).

**т2** [дт. усл. взр-ия (уб-ия) фк-и]. Если непр-я на сгм-е $[a, b]$ фк. $y = f(x)$ в каждой тч. инр-ла $]a, b[$ имеет плж-ю (отц-ю) прв-ю, то эта фк-я взр-ет (уб-ет) на сгм-е $[a, b]$.

Д. Пусть $f'(x) > 0$ $\forall\ x \in\ ]a, b[$. Рас-им $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$, причем $x_1 < x_2$. Напишем фм-у Лагранжа для сгм-а $[x_1, x_2]$: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Причем $f'(c) > 0$, т.к. $f'(x) > 0$ $\forall\ x \in\ ]a, b[$. Кроме того, $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, т.е. фк. $f(x)$ взр-ет на сгм-е $[a, b]$.

Анч-но док-ся, что фк. $f(x)$ уб-ет, если $f'(x) < 0$.

Фк-ия наз. монотонной в нек. промежутке, если она только взр-ет (только уб.) в этом промежутке.

Для иссл-ия нек-ой фк-и на взр-ие и уб-ие нх-мо: 1) найти ее прв-ю; 2) найти корни ур-я $f'(x) = 0$; 3) используя найденные корни, разбить всю обл. на отдельные промежутки, для к-ых проверить нерав-во $f'(x) > 0$ (фк-ия взр-ет в этом промежутке) или $f'(x) < 0$ (уб-ет).

**п1**. Иссл-ть на взр-ие и уб-ие фк-ю $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.

Р. 1) $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$; 2) $y' = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$, $x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + 6} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ $x_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2} = -3$, $x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 2$; 3) $]-\infty, -3[$, $f'(-4) = 6(16 - 4 - 6) = 36 > 0$, значит, $f(x)$ взр-ет; $]-3, 2[$, $f(0) = -36 < 0$, $f(x)$ уб-ет; $]2, \infty[$, $f(3) = 6(9 + 3 - 6) = 36 > 0$, $f(x)$ взр-ет.

**2°. Максимум и минимум функции**. Дадим понятия максимума (max) и минимума (min) фк-й.

Фк. $y = f(x)$ имеет max (min) при $x = x_1$ ($x = x_2$), если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ ($f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$) при любых дт-но малых $\Delta x$ плж-ых, так и отц-ых (рис. 5).

Максимум (мкс.) или минимум (мнм.) фк-и наз. экстремумом (эксм.).

**т3** (нх. усл-е сущв-ия эксм-а). Если дифм-я в инр-е $]a, b[$ фк-я $y = f(x)$ имеет эксм. в тч. $x = x_1$, то ее прв-я обращается в нуль в этой тч., т.е. $f'(x_1) = 0$.

Д. Пусть фк. $y = f(x)$ при $x = x_1 \in\ ]a, b[$ имеет мкс. Тогда при $x = x_1$ выполняются нерав-ва:

$f(x_1 - \Delta x) < f(x_1)$ и $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$; $\dfrac{f(x-\Delta x) - f(x_1)}{-\Delta x} > 0$, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0$;

$\lim\limits_{-\Delta x \to 0} \dfrac{f(x-\Delta x) - f(x_1)}{-\Delta x} = f'(x_1) \geq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1) \leq 0$, тогда $f'(x_1) = 0$ ■

Анч-но док-ся случай для мнм-а фк-и.

Геомч. смысл теоремы состоит в том, что в тч-х эксм-а кас-я к крв-й прл-на оси $Ox$, т.е. $f'(x_1) = f'(x_2) = \mathrm{tg}\alpha = k = 0$ (рис. 6).

Чтобы найти эксм-м фк-и, нх-мо найти корни ур-ия $f'(x) = 0$. Эти корни наз. критическими (крт.) тч-ми. Не всякая крт. тч. яв-ся эксм-ом. Н-р, $f'(x_3) = 0$ (рис. 6), но $x_3$ не яв-ся тч-й эксм-а. Выясним, когда крт-я ч. яв-ся тч-й эксм-а.

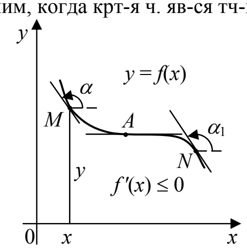



Рис. 4

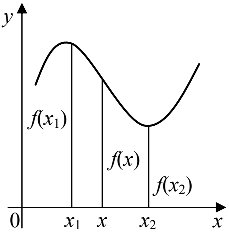



Рис. 5

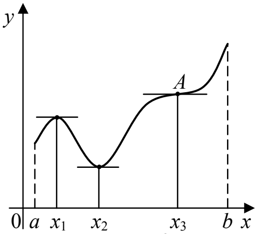



Рис. 6

**т4** (дт. усл. сущв-ия эксм-а). Пусть фк. $y = f(x)$ непр-на в инр-ле $]a, b[$, содержащем крт-ю тч. $x_1$, и диф-ма во всех тч. этого инр-ла (кроме, быть может, самой тч. $x_1$). Если при переходе слева направо через эту тч. прв-я меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ фк-я имеет мкс-ум. Если же при переходе через тч-у $x_2$ (рис. 6) слева направо прв-я меняет знак с минуса на плюс, то фк-я имеет в этой тч. мнм-ум (первое дт. усл.).

Д. Пусть при переходе через тч-у $x = x_1$ прв-я меняет знак с плюса на минус, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$, $f'(x) < 0$ при $x_1 < x$. Применим теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1)$, где $\xi$ лежит между $x$ и $x_1$. Проверим: 1) пусть $x < x_1$. Тогда $\xi < x_1$, $f'(\xi) > 0$, $f'(\xi)(x - x_1) < 0$, откуда $f(x) - f(x_1) < 0$ или

$$f(x) < f(x_1); \tag{1}$$

2) пусть $x_1 < x$. Тогда $x_1 < \xi$, $f'(\xi) < 0$, $f'(\xi)(x - x_1) < 0$, откуда $f(x) - f(x_1) < 0$ или

$$f(x) < f(x_1); \tag{2}$$

Из стн-й (1), (2) получаем, что $\forall\ x$, дт-но близких к $x_1$, $f(x) < f(x_1)$. Значит, в тч. $x_1$ фк. $f(x)$ имеет мкс-ум.

Анч-но док-ся вторая часть теоремы о дт-ом усл-и мнм-а.

Геомч. смысл т4 приведен на рис. 6. Причем $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

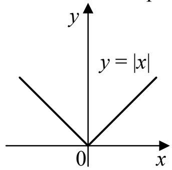



Рис. 7

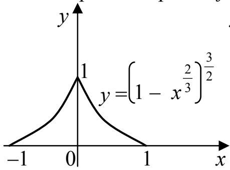



Рис. 8

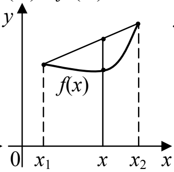



Рис. 9

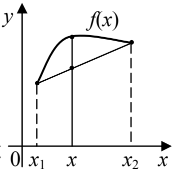



Рис. 10

**зм1**. Как указывается в усл. т4, фк-ия в тч. эксм-а $x = x_1$ может быть и не дифм-ой, н-р: 1) фк. $y = |x|$ в тч. $x = 0$ не имеет прв-ю, но тч-а яв-ся тч-й мнм-а (рис. 7); 2) фк. $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ не имеет прв-ю при $x = 0$, т.к. $y'(0) = -\left[\dfrac{\sqrt{1 - x^{2/3}}}{\sqrt[3]{x}}\right]_{x=0} = \infty$. Но в тч. $x = 0$ фк-ия имеет мкс.: $f(0) = 1$ (рис. 8).

**зм2**. Если при переходе через крт. тч-у $x = x_3$ фк-ия не меняет свой знак, то тч. $x = x_3$ не яв-ся экстремальной (эксл.) тч-й (рис. 6). Дсв-но, $f'(x_3) = 0$, но $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_3; \\ f'(x) > 0 \text{ при } x_3 < x. \end{cases}$

**Первое правило** отыскания эксм-а фк-и: 1) найти прв-ю фк-и; 2) найти крт. тч-и, р-в ур-ие $f'(x) = 0$; 3) проверить знаки пзв-ых при переходе через крт-е тч-и.

**п2**. Найти эксм-ы фк-и $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$ (см. п1).

Р. 1) $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$; 2) $y' = 0$, $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$;

3)

| $x$ | $-4$ | $-3$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | взр. | $\cap$ | уб. | $\cup$ | взр. |

$y(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) + 15 = 96$, $(-3, 96)$ – тч. мкс-а; $y(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 15 = -43$, $(2, -43)$ – тч. мнм-а.

**3°. Применение второй производной при нахождении экстремума функции**. Сформулируем сд-ю

**т5**. Если в нек-ой тч. первая прв. исслм-ой фк-и обращается в нуль, а вторая пзв. в нуль не обращается, то фк-ия имеет в этой тч. эксм-ум – max при $y'' < 0$ и min при $y'' > 0$ (второе дт. усл. сущв-ия эксм-а).

Д. $f'(c) = 0, f''(c) \neq 0$. Но $f''(c) = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x - c}$. Проверим:

1) Пусть $f''(c) > 0$. Тогда $\dfrac{f'(x)}{x-c} > 0$. Отсюда $\begin{cases}\text{при } x < c \text{ имеем } f'(x) < 0;\\ \text{при } x > c \text{ имеем } f'(x) > 0.\end{cases}$ $\overset{-}{\cup}\overset{+}{}$. Это означает, что при $x = c$ фк. $y = f(x)$ имеет min;

2) Пусть $f''(c) < 0$. Тогда $\dfrac{f'(x)}{x-c} < 0$. Отсюда $\begin{cases}\text{при } x < c \text{ имеем } f'(x) > 0;\\ \text{при } x > c \text{ имеем } f'(x) < 0.\end{cases}$ $\overset{+}{\cap}\overset{-}{}$, т.е. в тч. $x = c$ фк. $y = f(x)$ имеет max.

**Второе правило** отыскания эксм-а фк-и: 1) найти первую прв. фк-и; 2) найти крт. тч-и, р-в ур-ие $f'(x) = 0$; 3) найти вторую прв. и в крт. тч-ах выч-ть его зн-ие: если $f''(c) < 0$, то это max; если $f''(c) > 0$, то min.

**п3**. Найти эксм-ы (используя второе правило) фк-и $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.

Р. 1) $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$; 2) $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$;

3) $y'' = 6(2x + 1)$

| $x$ | $-3$ | 2 |
|---|---|---|
| $y'$ | 0 | 0 |
| $y''$ | – | + |
| $y$ | $\cap$ | $\cup$ |

$y''(-3) = 6[2(-3) + 1] = -30$, значит, $(-3, y(-3))$ – тч. max; $y''(2) = 6(2 \cdot 2 + 1) = 30$, а $(2, y(2))$ – тч. min.

Дадим несколько понятий, связанных с понятиями локального и глобального эксм-а.

Признак монотонности и строгой монотонности фк-и: фк. $f(x)$, дифм-ая на инр-е $]a, b[$, взр-ет (уб-ет) на $]a, b[$ ттогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall\, x \in\, ]a, b[$; если при этом не сущ-ет инр-ла $]\alpha, \beta[\, \subset\, ]a, b[$, такого, что $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in\, ]\alpha, \beta[$, то $f(x)$ строго взр-ет (уб-ет) на $]a, b[$.

Зн-ие $f(x_0)$ наз. локальным мкс-ом (мнм-ом) фк-и $f(x)$, если сущ-ет такая $\delta$-окрс-ть тч-и $x_0$, что $\forall\, x \in\, ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ и $x \neq x_0$ выполняется нерав-во $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Локальный мкс-ум или локальный мнм-ум наз. локальным эксм-ом.

Нх.усл-е эксм-а: если фк. $f(x)$ в тч. $x_0$ имеет локальный эксм., то ее прв-я в этой тч-е равна нулю или не сущ-ет.

Внутренние тч. мн-ва $D(f)$, в к-ых $f(x)$ непр-на, а ее прв-я $f'(x)$ равна нулю или не сущ-ет, наз. крт. тч-ми фк-и $f(x)$.

Наибольшее (нб.) зн-ие фк-и $f(x)$ на мн-ве $X$ наз. глобальным мкс-ом, а наименьшее (нм.) зн-ие – глобальным мнм-ом.

Чтобы найти глобальные эксм-ы фк-и $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, на к-ом она непр-на, надо: найти крт. тч-и, принадлежащие инр-у $]a, b[$, и выч-ть зн—ия фк-и в этих тч.; выч-ть зн-ия фк-и в граничных тч. отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$; из всех полученных зн-й выбрать нм-е и нб-е.

Далее изучим фк-и выпуклые (вып.) ($\cup$), вогнутые (вог.) ($\cap$) и дадим несколько опр-й, связанных с ними и тч-ми перегиба.

**4°. Направление выпуклости и точки перегиба**. Дадим сд. понятия.

Крв. $y = f(x)$ в инр-е $]a, b[$ наз. вып-ой (вог-ой), если $\forall\, x_1, x_2 \in\, ]a, b[$ выполняется нерав-во

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ (рис. 9) } \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ (рис. 10)}\right].$$

Геомч-ки это означает, что середина любой хорды грф-а фк-и $f(x)$ лежит над (под) грф-ом, либо на нем, если $y = c$ (где $c$ – пст-я).

Тч., отделяющая вып-ую часть крв-й от вог-ой, наз. тч-й перегиба крв-й (рис. 11, 12).

**т6**. Грф-к дважды дифм-ой в инр-е $]a, b[$ фк-и $y = f(x)$ имеет при $x = x_0$ тч-у перегиба, если $f''(x_0) = 0$ (или $f''(x_0)$ не сущ-ет) и при переходе через тч-у $x = x_0$ прв-я $f''(x)$ меняет знак. Причем

при $f''(x_0 - \Delta x) > 0, f''(x_0 + \Delta x) < 0$, 

при $f''(x_0 - \Delta x) < 0, f''(x_0 + \Delta x) > 0$. 

Д. 1) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, тогда при $x < x_0$ крв. вып-а, а при $x > x_0$ – вог-а. Значит, тч. $A$ при $x = x_0$ есть тч-а перегиба (рис. 11); 2) если $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$, то при $x < x_0$ крв. вог-а и при $x > x_0$ – вып-а. Сдт-но, тч. $B$ крв-й при $x = x_0$ есть тч-а перегиба (рис. 12).

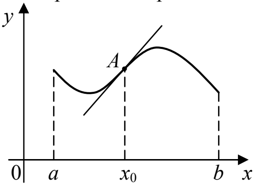



Рис. 11

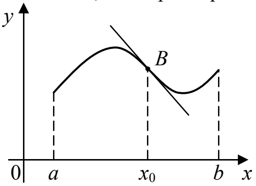



Рис. 12

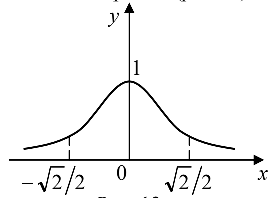



Рис. 13

**Правило** иссл-ия фк-и на нпв-ие выпуклости (випс.) и тч-и перегиба: 1) найти вторую прв.; 2) найти крт-ие тч., р-в ур-ие $f''(x) = 0$; 3) в крт-их тч. всю обл. разбиваем на отдельные промежутки, устанавливаем знак $f''(x)$ при переходе через крт-ие тч.

**п4**. Иссл-ть фк-ю $y = e^{-x^2}$ (крв. Гаусса) и построить ее грф-к.

Р. 1) $y' = -2x\, e^{-x^2}$, $y'' = -2\, e^{-x^2} + 4x^2\, e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}$; 2) $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3)

| $x$ | $-2$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

$y''(0) = 2(2 \cdot 0 - 1)e^0 = -2 < 0$, $\overline{\cap}$;
$y(0) = e^0 = 1$, $(0; 1)$ – тч. мкс-а (рис. 13).

**5°. Асимптоты**. В 3°: 5.1 рас-ли асимптоты гпрб-ы, теперь изучим их подробнее. Асимптотой (асим.) крв-й $y = f(x)$ наз. пм. $Y = kx + b$, рст-ие $\delta$ к-ой до этой крв-й стремится к нулю при взр-и $x$ (рис. 14, 15), т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \delta = \lim\limits_{x\to\infty}(y - Y) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0$. (3)

Из стн-ия (3) имеем
$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) \qquad (4)$$

Разделив стн. (3) на $x$, получим $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{b}{x}\right)$; т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$, то
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (5)$$

Используя стн-ия (4) и (5), находим асим-у $Y = kx + b$, (6)
к-ая наз. наклонной (накл.) асим-ой крв-й $y = f(x)$.

Возможны также горизонтальные (грзт.) (когда $k = 0$, $Y = b$) и вертикальные (вртк.) (когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $x = a$) асим-ы крв-й $y = f(x)$.

**п7**. Найти асим-ы грф-а фк-и $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

Р. Пм. $x = 1$ яв-ся вртк. асим-ой (рис. 16), т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$. Поскольку $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1} = x + 2 +$
$+\dfrac{2}{x-1}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-1} = 0$, то грф-к имеет накл. асим-у $Y = x + 2$.

**п8**. Найти асим-ы крв-й $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Р. Пм-ые $x = -1$, $x = 1$ яв-ся вртк. асим-ми (рис. 17). Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x^2-1}\right) = 1$,

то $Y = 1$ – грзт. асим-а, т.к. $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}\right) = 0$. Находим $Y(0) = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Исходя из полученных результатов, строим грф-к фк-и (рис. 17).

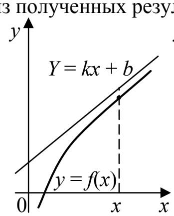


Рис. 14

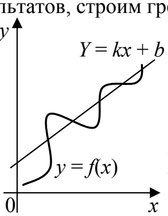


Рис. 15

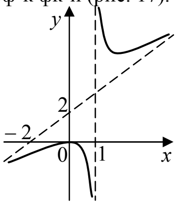


Рис. 16

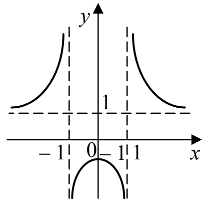


Рис. 17

**6°. Исследование функций и построение их графиков**. Под «иссл-ем фк-и» понимают изучение ее изменения (изм.) в зв-ти от изм-ия арг-та. На основании иссл-ия фк-и строят ее грф-к, предварительно изб-я хрк-ые тч.

Иссл-ие фк-й и построение их грф-ов проводят по схеме:

1) найти обл-ть опр-ия фк-и, тч-и разрыва;
2) изучить изм-ие фк-и при стремлении арг-та к концам промежутков обл-ти опр-ия;
3) найти тч-и эксм-ов, промежутки взр-ия и уб-ия фк-и;
4) выч-ть зн-ия арг-ов, построить ств. тч-и;
5) опр-ть промежутки выпс-ти и вогс-ти грф-а, найти тч-и перегиба;
6) найти тч-и перч-ия грф-а с крд. осями;
7) найти асим-ы грф-а фк-и.

Порядок иссл-ия фк-и иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной фк-и. Это избавляет нас от выполнения нек-ых пунктов. Н-р, если расв-ся фк-я чет. или нечет., то ее дт-но иссл-ть при плж. зн-ях арг-а из обл-ти ее опр-ия и принять во внимание, что грф-к чет. фк-и симч-ен отс-но оси ординат, грф-к нечет. фк-и – отс-но нач. крд-т, а грф-и взаимно-обратных фк-й – отс-но бист-ы первого крд. угла.

**п9**. Иссл-ть фк-ю $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ и построить ее грф-к.

Р. 1) Обл. опр. $]-\infty, \infty[$; фк-я не имеет тч-к разрыва;

2) фк-я нечет, т.к. $f(-x) = -f(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$, поэтому изучим только обл. $x \ge 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+x} = 0$, значит, $y = 0$ – гориз. асим-а;

3) $y' = \dfrac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $y' = 0$, $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – крт. тч-и.

$y'' = \dfrac{-2x\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \dfrac{-2x\left(1+x^2\right)\left(1+x^2+2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$; $y''(1) =$

$= -\dfrac{1}{2} < 0$ max; $y(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$, сдт-но, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ – тч. мкс-а.

$y'' = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ – крт. тч-и.

| $x$ | $-2$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

$Y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}44$, $\left(\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – тч. перегиба.

$y''(-2) = -\dfrac{4}{125} < 0$, $\overset{-}{\cap}$; $y''(-1) = \dfrac{1}{2} > 0$, $\underset{+}{\cup}$; 4) итак, $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ – тч. эксм-а,

$\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – тч-и перегиба. На основе этих данных строим грф-к (рис. 18).

**7°. Задачи на наибольшие и наименьшие значения**. Нб. зн-ем фк-и $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ наз. такое ее зн-ие, к-ое больше всех др. зн-й, принимаемых фк-ей на данном отрезке. Чтобы найти нб. зн-ие фк-и на отрезке, нх-мо выч-ть зн-ия мкс-ов на этом отрезке и зн-ия фк-и на концах отрезка, из полученных чисел выбрать самое большое. Анч-но опр-ся и находится нм. зн-ие фк-и.

В мт-ке, физике, химии, технических и др. науках, а также в повседневной жизни часто встречаются задачи на отыскание нб. и нм. зн-й нек-ых фк-й.

Общая схема р-я таких задач состоит в сд-ем. Сначала устанавливается зв-сть расв-мой вел-ны $y$ от нек-ой незв. пер-ой вел-ны $x$. Из усл. задачи опр-ся промежуток, в к-ом может изм-ся арг-т фк-и. Фк. $y = f(x)$ иссл-ся с помощью теории, расн-ой выше.

**п10**. Дальность $s = s(\varphi) = OA$ (рис. 19) полета снаряда (в пустоте), выпущенного с начн. скр-ю $v_0$ из орудия, наклоненного под углом $\varphi$ к горизонту, опр-ся фм-ой

$$s(\varphi) = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}, \tag{7}$$

где $g$ – ускорение силы тяжести. Опр-ть угол $\varphi$, при к-ом дальность $s(\varphi)$ будет нб-ей при данной начн. скр. $v_0$.

Р. Иссл-ем фк-ю $s(\varphi)$ на мкс-ум в сгм-е $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Из стн. (7) находим $s'(\varphi) = \frac{v_0^2 \cos 2\varphi \cdot 2}{g}$; $s'(\varphi) = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ – крт. тч. Выч-им $s''(\varphi) = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$, $s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$, max, т.к. $s(0) = s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то при $s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g} = OA$ есть мкс. рст-ие (рис. 19).

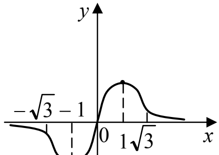


Рис. 18

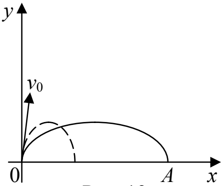


Рис. 19

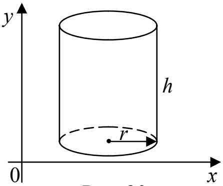


Рис. 20

**п11**. Какие размеры надо придать консервной банке, чтобы при данном объеме $V$ ее полная пвх-ть $S$ была нм-ей?

Р. Пусть $r$ – радиус, $h$ – высота цлн-а (рис. 20). Тогда $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$. А $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ или $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$. Найдем нм. зн-ие этой фк. в инр-е $0 < r < \infty$.

Выч-им $S' = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$, из $S' = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. $S''(r_1) = 2\left(2\pi r - \frac{2V}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0$, min. Итак, размеры консервной банки должны быть $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, а $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$ (рис. 20).

**п12**. Найти нм. зн-ие суммы плж-ых чисел, пзв-ие к-ых пст-но и равно $a$.

Р. Обз-им искомые числа $x$ и $y$. По усл. $xy = a$, где $a > 0$, поэтому $y = \frac{a}{x}$. Сумма этих чисел $s = x + y$ или $s(x) = x + \frac{a}{x}$. Находим прв. $s'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$. Из $s'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$. Первый корень не уд-ет усл-ю, берем $x = \sqrt{a}$ – крт. тч. Найдем $s''(x) = \frac{2a}{x^3}$, $s''\left(\sqrt{a}\right) > 0$, тогда $x = \sqrt{a}$ – тч. мнм-а, причем $\min s(x) = s\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$.

## 7.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 7.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ЗАДАЧИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию прв-й. Дайте опр-ие прв-й в тч-е.
2. Как связаны понятия диф-сть и непр-сть фк-й?
3. Приведите св-ва прв-й.
4. Как найти прв-ые пзв-ия и частного?
5. Как выч-ся прв-ые сложной и неявной фк-й?
6. Как выч-ся прв-ые лгрч-ой и пкзт-ой фк-й?
7. Приведите фм-ы прв-ых тригч. фк-й.
8. Как выч-ся прв-ые обратно-тригч. фк-й?
9. Что такое гпрб-ие фк-и и как найти их прв-ые?
10. В чем состоят общие правила дифв-ия?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Исходя из опр-ия, найти прв-ю фк-и $y = \sqrt[3]{x}$ .

Р. I. $y + \Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x}$ , II. $\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$ , III. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$ ,

IV. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left[(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right]\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

1*. $y = \sqrt{x}$ , $y' = ?$

**у2**. Найти прв-ю фк-и $f(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} - \dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{3}$ .

Р. $f'(x) = \left(2x^3 - x^{-4} + \dfrac{x^{1/2}}{\sqrt{5}} - 4x^{5/3} - \dfrac{2}{3}\right)' = 6x^2 - (-4)x^{-5} + \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{5}} - 4\cdot\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 0 = 6x^2 + \dfrac{4}{x^5} +$

$+ \dfrac{1}{2\sqrt{5x}} - \dfrac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}$ .

2*. $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{a}$ , $y' = ?$

**у3**. Найти прв-ю фк-и $S(t) = \dfrac{e^t\sin t}{2t^2-1}$ .

Р. $S'(t) = \dfrac{\left(e^t\sin t + e^t\cos t\right)\left(2t^2-1\right) - 4te^t\sin t}{\left(2t^2-1\right)^2} = \dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{2t^2-1} - \dfrac{4te^t\sin t}{\left(2t^2-1\right)^2}$ .

3*. $y = \dfrac{e^t\cos t}{t^3+1}$ , $y' = ?$

у4. Выч-ть зн-ие прв-ой фк-и $f(x) = (1 + x^2)\ln x \cdot \mathrm{arctg}x$ при $x = 1$.

Р. Используя фм-у $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, получим $f'(x) = [(1 + x^2)\ln x\cdot \mathrm{arctg}x]' = 2x\ \times$

$\times$ ln$x$ $\times$ arctg$x$ + (1 + $x^2$) · $\dfrac{1}{x}$ arctg$x$ + (1 + $x^2$)ln$x$ · $\dfrac{1}{1+x^2}$ = 2$x$ ln$x$ arctg$x$ + $\dfrac{(1+x^2)\text{arctg}x}{x}$ + ln$x$,

$f'(1) = 2\text{arctg}1 = 2\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

4*. $y = (1 - x^2)\ln x\,\text{arctg}x$, $y'(1)$ = ?

**у5**. Тело, брошенное вртк-но вверх, двж-ся по закону $S(t) = -4{,}905t^2 + 981t + 950$ ($S$ – в метрах, $t$ – в секундах). Найти: скр-ть тела в любой момент вр-и; его нач. скр-ть; момент вр-и, при к-ом скр-ть тела станет равной нулю; высоту, к-ой достигает тело в этот момент вр-и.

Р. $V(t) = S'(t) = -9{,}81t + 981$. Полагая $t = 0$, получим нач-ю скр. тела $V_0 = S'(0) = 981$ (м/с). Опр-им теперь, в какой момент вр-и $t$ скр-ть тела станет равной нулю. Из ур-ия $-9{,}81t + 981 = 0$ найдем, что $t$ = 100°С. Тогда высота, достигнутая телом в момент вр-и $t$ = 100 с равна $S =$ $= -4{,}905\cdot 100^2 + 981\cdot 100 + 950 = 50000$ (м). Ясно, что эта высота яв-ся нб-ей.

5*. $S(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 3$, $V(2)$ = ?

**у6**. Найти прв-ю фк-и $y = \sin^4(5 - x^2)$.

Р. $y' = 4\sin^3(5 - x^2)\cos(5 - x^2)(-2x) = -8x\sin^3(5 - x^2)\cos(5 - x^2)$.

6*. $y = \cos^3(x^2 - 4)$, $y'$ = ?

**у7**. Найти прв-ю фк-и $y = 4^{\arcsin\sqrt{x+x^3/7}}$.

Р. $y' = 4^{\arcsin\sqrt{x+x^3/7}}\cdot\ln 4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x-x^3/7}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+x^3/7}}(1 + 3x^2/7)$.

7*. $y = 3^{\text{arctg}\sqrt{x}}$, $y'$ = ?

**у8**. $y = \dfrac{1}{\ln(4+\ln 5x)}$, $y'$ = ?

Р. Учитывая, что $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$, находим $y' = -\dfrac{1}{\ln^2(4+\ln 5x)}\cdot\dfrac{1}{4+\ln 5x}\cdot\dfrac{5}{5x} =$

$= -\dfrac{1}{x(4+\ln 5x)\ln^2(4+\ln 5x)}$.

8*. $y = \dfrac{1}{\lg_3(4-\ln 7x)}$, $y'$ = ?

**у9**. Найти прв-ю фк-и $\varphi(x) = \sqrt[3]{\text{tg}(x^5 - 2/x^4)}$.

Р. $\varphi'(x) = \dfrac{1}{3}\left[\text{tg}(x^5 - 2/x^4)\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2(x^5-2/x^4)}(5x^4 + 8x^{-5}) = \dfrac{5x^9+8}{3x^5\sqrt[3]{\text{tg}^2(x^5-2/x^4)}\cos^2(x^5-2/x^4)}$.

9*. $y = \sqrt[3]{\text{ctg}(x^4 - 2/x^3)}$, $y'$ = ?

**у10**. $V(t) = \dfrac{1}{\omega}e^{-\omega^2t^2}\text{sh}^6\dfrac{\omega t}{2}$ ($\omega$ = const), $V(t)$ = ?

Р. $V'(t) = \dfrac{1}{\omega}\left[e^{-\omega^2t^2}(-2\omega^2t)\text{sh}^6\dfrac{\omega t}{2} + e^{-\omega^2t^2}6\text{sh}^5\dfrac{\omega t}{2}\text{ch}\dfrac{\omega t}{2}\cdot\dfrac{\omega}{2}\right] = \left(3\text{sh}^5\dfrac{\omega t}{2}\text{ch}\dfrac{\omega t}{2} - 2\omega t\,\text{sh}^6\dfrac{\omega t}{2}\right)e^{-\omega^2t^2}$.

10*. $y = \dfrac{1}{\omega}e^{-t^2}\text{ch}^6\dfrac{\omega t}{3}$, $y'$ = ?

**у11**. Найти прв-ю фк-и $y = (\text{arctg}4x)^{x^2}$.

Р. Предварительно лгр-ем и используем св-ва лгр-ов: $\ln uv = \ln u + \ln v$, $\ln\dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$, $\ln u^v = v\ln u$. Тогда имеем $\ln y = \text{arctg}4x$, отсюда получим $\dfrac{1}{y}\cdot y' = 2x^2\text{arctg}4x + x^2\cdot\dfrac{1}{1+(4x)^2}\cdot 4 \Rightarrow$

$y' = (\mathrm{arctg}4x)^{x^2}\left(2x\ln\mathrm{arctg}4x + \dfrac{4x^2}{(1+16x^2)\mathrm{arctg}4x}\right)$.

11*. $y = (\mathrm{arcctg}2x)^{x^3}$, $y' = ?$

**у12**. $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{2x^3\mathrm{tg}3x\cdot\sqrt{1-\mathrm{sh}x}}{\ln(1-x^2)}}$, $y' = ?$

Р. $\ln f(x) = \dfrac{1}{5}$ [ln2 + 3ln$x$ + ln tg3$x$ + $\dfrac{1}{2}$ ln(1 – sh$x$) – ln ln(1 – $x^2$)], тогда $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{\mathrm{tg}3x}\times\right.$

$\left.\times\ \dfrac{3}{\cos^2 3x} + \dfrac{(-\mathrm{ch}x)}{2(1-\mathrm{sh}x)} - \dfrac{1}{\ln(1-x^2)}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)\right]$, отсюда получим

$$f'(x) = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{2x^3\mathrm{tg}3x\cdot\sqrt{1-\mathrm{sh}x}}{\ln(1-x^2)}}\left[\frac{3}{x} + \frac{6}{\sin 6x} - \frac{\mathrm{ch}x}{2(1-\mathrm{sh}x)} + \frac{1}{(1-x^2)\ln(1-x^2)}\right].$$

12*. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x^4\mathrm{ctg}2x\sqrt{1-\mathrm{ch}x}}{\ln(1-x^2)}}$, $y' = ?$

**у13**. Найти прв-ю неявной фк-и $x^3 - 2xy^2 + y^3 = a^2$.

Р. Диф-уем обе части ур-ия по пер-ой $x$, считая $y$ фк-ей арг-та $x$ (тогда $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) = 2yy'$ и $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^3) = 3y^2y'$) и учитывая, что $a^3$ = const, получим $3x^2 - 2(y^2 - 2xyy') + 3y^2y' = 0 \Rightarrow (3y^2 - 4xy)y' =$ $= 2y^2 - 3x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{2y^2-3x^2}{3y^2-4xy}$.

13*. $xy^2 - x^3 + y^4 - 5 = 0$, $y' = ?$

**у14**. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = y^2$, $y' = ?$

Р. $-\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{y'x - y\cdot 1}{x^2} = 2yy' \Rightarrow \left(2x^2y + x\sin\dfrac{y}{x}\right)y' = y\sin\dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{y\sin\dfrac{y}{x}}{2x^2y + x\sin\dfrac{y}{x}}$.

14*. $\sin\dfrac{y}{x} = y^3$, $y' = ?$

**у15**. Найти прв-ю $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ фк-и, заданной пармч-ки: $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Р. Находим d$y$ = $3a\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$, d$x$ = $-3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$, тогда $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t}{-3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t} = -\mathrm{tg}t$.

Искомую фк. запишем пармч-ки: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{tg}t; \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$ 15*. $\begin{cases} x = a\sin^2 t; \\ y = b\cos^2 t. \end{cases}$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = ?$

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п14 и у1-у15 р-ть з1-з20.

1. 1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y = 2\mathrm{tg}^2(1-x)$; 3) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

4) $y=\arcsin\sqrt{x}$; 5) $y^3-3y+3ax=0$; 6) $\begin{cases} x=e^{t^2}; \\ y=\sin t. \end{cases}$

2. 1) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 2) $y=\dfrac{\sin x}{1+\mathrm{tg}x}$; 3) $y=x^2e^{-2x}$;

4) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5y$; 6) $\begin{cases} x=\ln\cos t; \\ y=3\sin t. \end{cases}$

3. 1) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^3-x+1}}$; 2) $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$; 3) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

4) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$; 5) $x^2+y^3-10x+y=0$; 6) $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

4. 1) $y=\dfrac{5}{\sqrt[4]{\left(2-x^2\right)^3}}$; 2) $y=x^2\sin^3x$; 3) $y=x\ln^2x$;

4) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}$; 5) $x^2=6y-y^3$; 6) $\begin{cases} x=2\left(t^3+t\right); \\ y=e^{t^2}. \end{cases}$

5. 1) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$; 2) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}x}{2\sin x}$; 3) $y=3e^{\sin^2x}$;

4) $y=\ln\left(x^2+5x+\sqrt{x}\right)$; 5) $x^2-2xy+y^3=1$; 6) $\begin{cases} x=t+\mathrm{arctg}x; \\ y=\dfrac{1}{3}t^3+t. \end{cases}$

6. 1) $y=2\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$; 2) $y=\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}$; 3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

4) $y=e^{\mathrm{arctg}x}$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a+\dfrac{1}{4}y^2$; 6) $\begin{cases} x=2\sin^3t; \\ y=3\cos^2t. \end{cases}$

7. 1) $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x^2+1}}$; 2) $y=x\sin x^2$; 3) $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$;

4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; 5) $y^3-3x^3y+a^2=0$; 6) $\begin{cases} x=e^{-t^2}; \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

8. 1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$; 2) $y=\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$; 3) $y=7^{x^2+2x}$;

4) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$; 5) $y\sin x=\cos y$; 6) $\begin{cases} x=2t-t^3; \\ y=t^2-3. \end{cases}$

9. 1) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; 2) $y=\dfrac{x}{\cos^2x}$; 3) $y=e^{-x}\ln x$;

4) $y=3\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$; 5) $y^4-4x^2y+a^2=0$; 6) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t}; \\ y=\dfrac{1+t}{1+t}. \end{cases}$

10. 1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; 2) $y = \dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$; 3) $y = x\ln \sin x$;

4) $y = 2^{\arcsin x}$; 5) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$; 6) $\begin{cases} x = 2t - t^3; \\ y = t^2 - 3. \end{cases}$

11. 1) $y = \left(3x - 4\sqrt[3]{x} + 2\right)^4$; 2) $y = \dfrac{4x + 7\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+9x^2}}$; 3) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$;

4) $y = \ln \operatorname{arctg} 2x$; 5) $x^2 + y^2 - 2y = 0$; 6) $\begin{cases} x = b\cos^3 u; \\ y = b\sin^3 u. \end{cases}$

12. 1) $y = \left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2$; 2) $y = \dfrac{\arcsin x}{1-8x^2}$; 3) $y = 2^{3x}\operatorname{tg} 2x$;

4) $y = \cos \ln 5x$; 5) $\sin x - \operatorname{arctg} y = 0$; 6) $\begin{cases} x = at\cos t; \\ y = at\sin t. \end{cases}$

13. 1) $y = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^3} + 5\sqrt{x}\right)^4$; 2) $y = \dfrac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x}$; 3) $y = e^{\operatorname{tg} x}\ln 2x$;

4) $y = \cos\sqrt{x^2+3}$; 5) $e^x - x - y^3 = 0$; 6) $\begin{cases} x = t^2; \\ y = 4t \text{ при } t = 1. \end{cases}$

14. 1) $y = \left(4x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 4\right)^3$; 2) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$; 3) $y = 2^{8x}\operatorname{tg} 3x$;

4) $y = \arcsin \ln 4x$; 5) $x + \ln x + \sqrt{3+2y} = 0$; 6) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right); \\ y = \dfrac{b}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) \text{ при } t = 2. \end{cases}$

15. 1) $y = \left(x^5 - \sqrt[3]{x} + 1\right)^5$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x + \operatorname{tg} x}$; 3) $y = e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \sin 4x$;

4) $y = \sin \ln 5x$; 5) $\operatorname{ctg} x + \ln\sqrt{4y+1} = 0$; 6) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

16. 1) $y = \left(6x^2 - \dfrac{2}{x^4} + 5\right)^2$; 2) $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$; 3) $y = 3^{\operatorname{tg} x}\arcsin(x^2)$;

4) $y = \ln \sin 6x$; 5) $e^x - x^2 + e^y = 0$; 6) $x = \omega t$, $y = te^{\omega t}$.

17. 1) $y = \left(x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + 2\right)^3$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{2-9x^2}$; 3) $y = e^{\operatorname{ctg} x}\cos 6x$;

4) $y = \sin \ln 2x$; 5) $2x - \sin 2x - y^2 = 0$; 6) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$ при $t = 0$.

18. 1) $y = \left(x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4\right)^4$; 2) $y = \dfrac{x^3 + e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$; 3) $y = 4^{\cos x}\operatorname{arctg} 2x$;

4) $y = \ln \cos 5x$; 5) $\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{2y+3} = 0$; 6) $x = \sin 2\alpha$, $y = \sin^2\alpha$ $(\alpha \in [-\pi/4, \pi/4])$.

19. 1) $y = \left(3x^5 - \dfrac{5}{x^3} - 2\right)^5$; 2) $y = \dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$; 3) $y = e^{x^3}\operatorname{tg} 7x$;

4) $y = \arcsin \ln 2x$; 5) $\operatorname{tg}x - \sqrt{4y+5} + 2 = 0$; 6) $\begin{cases} x = t^3 + 1; \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

20. 1) $y = \left(x^4 + 2\sqrt[3]{x} + 1\right)^2$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{3 - 5x^3}}{e^x - \operatorname{ctg}x}$; 3) $y = 2^{\sin x}\arcsin x$;

4) $y = \ln\cos 5x$; 5) $x\ln x - e^y + 1 = 0$; 6) $x = \sqrt{t}$, $y = e^{-t}\cos t$.

## 7.2. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

### Вопросы для самопроверки

1. Как опр-ся и обз-ся прв-ые высших порядков? Приведите примеры.
2. Что наз. диф-ом и инвариантностью форм диф-ла?
3. Как выч-ся прв-ые фк-й, заданных пармч. ур-ми?
4. В чем состоит геомч. смысл диф-ла?
5. Как используется диф-л в прж. выч-ях?
6. Как врж-ся ур-ия кас-ой и норм-и к крв-й?
7. Сформулируйте основные теоремы (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши) о дифм-ых фк. Объясните их на рис-ах.
8. В чем состоит суть правила Лопиталя?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Д-ть, что фк. $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ уд-ет стн-ю $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Д. Находим посл-но $y' = 4e^{4x} - 2^{-x}$, $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$, $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$. Подставляем их в заданное стн., получим $(64e^{4x} - 52e^{4x} - 12e^{4x}) - (2e^{-x} - 26e^{-x} + 24e^{-x}) = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

1*. $y = 3^x$, $y^{(n)} = ?$

**у2**. Найти прв-ю $n$-го порядка фк-и $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

Р. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{1\cdot 2}{(x+2)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+2)^4}$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+2)^5}$, …, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

2*. Найти прв-ю $n$-го порядка фк-и $\varphi(x) = \sin\alpha x + \cos\beta x$. О: $\alpha^n\sin(n\pi/2 + \alpha x) + \beta^n\cos(n\pi/2 + \beta x)$.

**у3**. Найти вторую прв-ю неявной фк-и $y = \ln(x + y)$.

Р. $y' = \dfrac{1+y'}{x+y} \Rightarrow y'(x+y) = 1 + y' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x+y-1} \Rightarrow y'' = -\dfrac{1+y'}{(x+y-1)^2}$. Заменив здесь $y'$ на $\dfrac{1}{x+y-1}$, получим $y'' = -\dfrac{1+1/(x+y-1)}{(x+y-1)^2} = -\dfrac{x+y-1+1}{(x+y-1)^3} = \dfrac{x+y}{(1-x-y)^3}$.

3*. Найти $y''$, если $e^y = xy$. О: $y'' = \dfrac{y(y^2+2y)+2}{x^2(1-y)^3}$.

**у4**. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, если $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Р. В у15: 7.1 уже была найдена $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}t; \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$ Т.к. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}(-\operatorname{tg}t) = -\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$, то из $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ получим $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}; \\ x = a\cos^3 t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) =$

$= -\dfrac{\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t}{3a\sin^2 t\cos^8 t} = -\dfrac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{3a\sin^2 t\cos^5 t}$, учитывая, что $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t$, получим

$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \dfrac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\sin^3 t\cos^7 t}; \\ x = a\cos^3 t \end{cases}$ Поступая анч-но, можно найти $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ и т.д.

4*. Найти $y''_x$, если $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$ О: $y''_x = \dfrac{2}{t^2-1}$.

**у5**. Найти d$y$, если $y = \sqrt[6]{\ln \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{4}}$.

Р. Сначала найдем прв-ю $y' = \dfrac{1}{6}\left(\ln \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{4}} \cdot 2\mathrm{tg}\dfrac{x}{4} \cdot \dfrac{1/4}{\cos^2 \dfrac{x}{4}} = \dfrac{1}{6\sin\dfrac{x}{2}\sqrt[6]{\ln^5 \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{4}}}$.

Тогда $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{6\sin\dfrac{x}{2}\sqrt[6]{\ln^5 \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{4}}}$.

5*. Найти d$y$, если $y = x\ln(1 - x^2)$. О: $\mathrm{d}y = \dfrac{\ln(1-x^2) - 2x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

**у6**. Найти $\mathrm{d}^2 u$, если $u(x) = \mathrm{arctg}2x$.

Р. Т.к. $u'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$ и $u'' = -\dfrac{16x}{(1+4x^2)^2}$, то $\mathrm{d}^2 u = u''(x)(\mathrm{d}x)^2 = -\dfrac{16x}{(1+4x^2)^2}(\mathrm{d}x)^2$.

6*. Найти $\mathrm{d}^2 y$, если $y = \sqrt{1+x^2}$. О: $\mathrm{d}^2 y = -\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Теперь используем диф-ы в прж-ых выч-ях (см. (6) из 2°: 7.2) по фм-е:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y,\ f(x_0 + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

**у7**. Найти прщ-ие и диф-л фк-и $y = x^3 + 4$ при переходе арг-та от зн-ия $x_1 = 2$ к зн. $x_2 = 2{,}01$.

Р. Найдем сначала прщ-ие фк-и при прзвл-ых $x$ и $\Delta x$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 4 - (x^3 + 4) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 4 - x^3 - 4 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$, значит, $\mathrm{d}y = 3x^2\Delta x$.

Найдем теперь $\Delta y$ и d$y$ при заданных числовых зн. арг-та. Учитывая, что $\Delta x = x_2 - x_1 = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$, будем иметь:

$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = [3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3]_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 2(0{,}01)^2 + (0{,}01)^3 = 0{,}12 + 0{,}0006 + 0{,}000001 = 0{,}120601$, $\mathrm{d}y_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = [3x^2\Delta x]_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$. Выч-им абс-ю погр-ть, к-ю допустили, заменив прщ-ие фк-и ее диф-ом: $|\Delta y - \mathrm{d}y| = |0{,}120601 - 0{,}12| = 0{,}000601$. Отс-ая погр-ть $\dfrac{|\Delta y - \mathrm{d}y|}{|\Delta y|} = \dfrac{0{,}000601}{0{,}120601} \approx 0{,}00498 \approx 0{,}005$ (или 0,5%).

7*. Найти прщ-ие и диф-л фк-и $y = x^2 + 3$, когда $x_1 = 2$ и $x_2 = 2{,}01$.

**у8**. Найти диф-л фк-и $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$ в тч. $x = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Р. Найдем $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = f'(x)\Delta x = \left(\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)\Delta x$. Отсюда при $\Delta x = 0{,}1$ имеем $\mathrm{d}f(1) = \left(1 + \dfrac{1}{4}\right) \cdot 0{,}1 = 0{,}125$.

8*. Найти диф-л фк-и $r(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{3\sin^2\varphi}$ в тч. $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, если $\Delta\varphi = 0{,}1$. Ук: подставляем исх. данные в $dr(\varphi) = r'(\varphi)\Delta\varphi = -\dfrac{1+\cos^2\varphi}{3\sin^2\varphi}\Delta\varphi$.

**у9**. Показать, что при $\Delta x \to 0$ с точностью до беск-но малой фк. более высокого порядка малости, чем $\Delta x$, имеет место прж. рав-во $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$.

Р. Рас-им фк-ю $y = e^x$. Найдем ее прщ-ие и диф-л в произвольной тч. $x$: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$, $dy = y'\Delta x = e^x\Delta x$. Т.к. $\Delta y \approx dy$ с точностью до б.м.ф. более высокого порядка малости, чем $\Delta x$, при $\Delta x \to 0$, то $e^{x+\Delta x} - e^x \approx e^x\Delta x$ или $e^{x+\Delta x} - e^x \approx e^x + e^x\Delta x$, откуда при $x = 0$ получим $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$.

9*. Д-те, что с точностью до б.м.ф. более высокого порядка малости, чем $\Delta x$, при $\Delta x \to 0$ верно прж. рав-во $\sin\Delta x \approx \Delta x$.

**у10**. Д-ть, что $\operatorname{tg}\Delta x \approx \Delta x$.

**у11**. Д-ть, что $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$.

**у12**. Выч-ть прж-но $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

Р. Рас-им фк-ю $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$ и выч-им ее прж. зн-ие в тч. $x = 2{,}037$, предположив, что $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}037$. Тогда $f(x_0) = f(2) = \dfrac{1}{3}$. Выч-им $f'(x_0) = f'(2) = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{x^2-3}} \cdot \dfrac{8x}{(x^2+5)^2}\Bigg|_{x=2} = \dfrac{16}{27}$ и по фм-е $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ находим $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{16}{27} \cdot 0{,}037 \approx 0{,}333 + 0{,}022 = 0{,}355$.

12*. Выч-ть прж-но arctg 0,98. О: 0,7754.

**у13**. Выч-ть прж-но $\sqrt[4]{82}$. О: 3,009.

Раскрыть неопрс-и с помощью правила Лопиталя и найти пределы:

**у14**. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Р. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. Здесь правило Лопиталя использовали дважды.

14*. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-\cos x}{(e^{bx}-\cos bx)\operatorname{ch}x}$. О: $\dfrac{a}{b}$.

**у15**. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Р. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{1+x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2} = 2 \cdot 1 = 2$.

15*. Найти $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{a}}$. О: 0.

**у16**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$.

Р. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot(1-\cos x)}{\sin x\cdot \sin x} = \left| \begin{matrix} 1-\cos x \sim x^2/2 \\ \sin^2 x\sim x^2 \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x\to 0}\cos x\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2} = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

16*. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\mathrm{tg}x - \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sc}x\right)$. О: – 1.

**у17**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{sh}x}-\dfrac{1}{x}\right) = |\infty-\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{sh}x}{x\mathrm{sh}x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x - x\mathrm{ch}x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}x+x\mathrm{sh}x} = \dfrac{0}{1+1+0} = 0.$

17*. Найти $\lim\limits_{t\to 1}(1-t)\mathrm{tg}\dfrac{\pi t}{2}$. О: $\dfrac{2}{\pi}$.

**у18**. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\mathrm{arctg}x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\frac{1}{x}} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x} = 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2} = 2\cdot 1 = 2.$

18*. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x$. О: – 1. Ук: $\mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x = \dfrac{\ln\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}2x}$.

**у19**. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$.

Р. Здесь неопрс-ть вида $1^\infty$, используем врж-е $(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = e^{\mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x}$ (т.к. $\mathrm{tg}2x\cdot\ln\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x$), приводим к виду $0\cdot\infty$, а затем к виду $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\ln\mathrm{tg}x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}2x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1/\mathrm{tg}x)(1/\cos^2 x)}{-2/\sin^2 2x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{2\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

19*. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{3/(1+\ln x)}$. О: $e^3$.

**у20**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. О: 1.

## 7.3. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте и д-те нх-ое и дт-ое усл-я взр-ия (уб-ия) фк-и.
2. Сформулируйте и д-те нх-ое и дт-ое усл-я сущв-ия эксм-а фк-и.
3. Как используется вторая прв. при нахождения эксм-а фк-и?
4. Как опр-ся выпс-ть, вогс-ть и тч-и перегиба фк-и?
5. Что такое асим-ы и как они опр-ся?
6. В чем состоит общий план иссл-ия фк-й и построения их грф-ов?
7. Как решаются задачи на нб-е и нм-е зн-ия?

8. Как опр-ся кривизна плоской крв-й?
9. Что такое радиус и круг кривизны, эволюта и эвольвента?
10. Как вы понимаете кривизну и кручение прн-ой крв-й?

**Упражнения для самостоятельной работы**

**у1**. Используя первое дт. усл., найти локальные эксм-ы фк-и $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ .

Р. Найдем обл-ть опр-ия фк-и: $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow - 1 \leq x \leq 1$ или $x \in [- 1, 1]$. Находим $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Из $f'(x) = 0$ находим крт-ие тч. $1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а $f'(1)$ не сущ-ет. Если $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, то $f'(x) > 0$; если $x \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$, то $f'(x) < 0$. Сдт-но, в тч. $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ фк. $f(x)$ имеет локальный эксм.: $f_{\max} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$. А поскольку фк-я $f(x)$ яв-ся нечет., то в тч. $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ она имеет локальный мнм-ум: $f_{\min} = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

1*. Найти локальный эксм.: $f(x) = x^4e^{-x^2}$. О: $f_{\max} = f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = 4/e^2$, $f_{\min} = f(0) = 0$.

**у2**. Найти инр-ы монотонности и локальные эксм-ы фк-и $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

Р. Обл-ть опр-ия $x \in ]- \infty, - 2[ \cup ]- 2, \infty[$.

Находим $f'(x) = \dfrac{(2/3)x^{-1/3}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$. Прв. $f'(x)$ не сущ-ет в тч-х $x_1 = - 2$, $x_2 = 0$ и обращается в нуль в тч. $x_3 = 4$. Тч-и $x_2$ и $x_3$ – крт-ие.

Знаки прв-ой на инр-ах и между крт. тч-ми иссл-ем в табл-е:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 4 | 5 |
| $y'$ | – | ∞ | – | ∞ | + | 0 | – |
| $y$ | уб. | | уб. | ∪ | взр. | ∩ | уб. |

В тч-х $x_2 = 0$ и $x_3 = 4$ фк. $f(x)$ имеет локальный эксм-ум, причем $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(4) = \sqrt[3]{2}/3$ .

2*. Найти локальный эксм-ум фк-и $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$. О: $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = 4/e^2$.

**у3**. Используя второе усл., найти локальные эксм-ы фк-и $\varphi(x) = e^{-x}\sin x$ на отрезке $[- \pi, \pi]$.

Р. Находим $\varphi'(x) = - e^{-x}\sin x + e^{x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$ или $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$. Очевидно, что на отрезке $[- \pi, \pi]$ находятся только две крт. тч-и: $x_1 = - 3\pi/4$ $(k = - 1)$ и $x_2 = \pi/4$ $(k = 0)$.

Найдем теперь вторую прв-ю и установим ее знак в каждой из крт-их тч-к $\varphi''(x) = - e^{-x}(\cos x - \sin x) - e^{-x}(\sin x + \cos x) = - e^{-x}(\cos x - \sin x + \sin x + \cos x) = - 2e^{-x}\cos x$. Выч-им $\varphi''(- 3\pi/4) = \sqrt{2}\, e^{3\pi/4} > 0$, $\varphi''(\pi/4) = - \sqrt{2}\, e^{-\pi/4} < 0$.

Сдт-но, в тч. $x_1 = - 3\pi/4$ фк. $\varphi(x)$ имеет локальный мнм-ум: $\varphi_{\min} = \varphi(- 3\pi/4) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, а в тч. $x_2 = \pi/4$ имеет мкс-ум: $\varphi_{\max} = \varphi(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$.

3*. Найти локальные эксм-ы фк. $y = x\sin x + \cos x - x^2/4$ на отрезке $[- \pi/2, \pi/2]$. О: $y_{\max} = y\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = (6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18)/36$, $y_{\min} = y(0) = 1$.

**у4**. Найти глобальные эксм-ы фк. $f(x) = \arccos x^2$ на отрезке $\left[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right]$ .

Р. Найдем $f'(x) = -2x\Big/\sqrt{1-x^4}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$. Прв-я не сущ-ет в тч-х $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Тч. $x_1 = 0$ яв-ся едн-ой тч-ой, принадлежащей этому инр-у, и $f(0) = \pi/2$. Т.к. фк-я чет., то ее зн-ия в граничных тч. указанного отрезка равны между собой: $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Т.о., в тч. $x_1 = 0$ фк. $f(x)$ принимает нб-е зн-ие: $f_{\max} = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$; на концах отрезка она принимает нм-е зн-ие: $f_{\min} = f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

4*. Найти глобальные эксм-ы фк-и $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ на отрезке $[-2, 2]$. О: $f_{нб} = f(0) = 2$, $f_{нм} = f(-2) = 0$.

**у5**. Найти глобальные эксм-ы фк. $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. О: $f_{нб} = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f_{нм} = f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$.

**у6**. Найти высоту конуса нм-го объема, описанного вокруг полушара радиуса $r$. Основание полушара и конуса лежат в одной пл-ти и концентричны.

Р. Здесь нужно рац-но выбрать незв. пер-ю. Пусть ею будет вел-а угла, заключенного между высотой и образующей конуса (при др. выборе незв. пер-ой р-е задачи усложняется). В ств-и с рис. 1: $R = \dfrac{r}{\cos\alpha}$, $h = \dfrac{r}{\sin\alpha}$. Сдт-но, задача сводится к нахождению нм. зн-ия фк-и

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi r^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$$

в инр-е $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Найдем прв-ю $V'(\alpha) = \dfrac{\pi r^3}{3}\,\dfrac{2\cos\alpha\sin^2\alpha - \cos^3\alpha}{\cos^4\alpha\sin^2\alpha} = \dfrac{2\pi r^3}{3}\,\dfrac{\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}^2\alpha - 1/2\right)}{\cos^4\alpha\sin^2\alpha} = \dfrac{2\pi r^3}{3}\left(\mathrm{tg}^2\alpha - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\cos\alpha\sin^2\alpha}$. Из $V'(\alpha) = 0$ получим $\mathrm{tg}^2\alpha - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. в тч-х $\alpha_1 = -\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, но $\alpha_1 \overline{\in} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Прв-я $V'(\alpha)$ не сущ-ет в тч-х $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = \dfrac{\pi}{2}$, но $\alpha_3$ и $\alpha_4$ $\overline{\in} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. А крт-ая тч. $\alpha_2 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, причем $\mathrm{tg}\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \Rightarrow \alpha_2 \approx 35°$ и при переходе арг-та $\alpha$ через тч-у $\alpha_2$ прв-я $V'(\alpha)$ меняет знак с минуса на плюс: $V'(30°) = \dfrac{2\pi r^3}{3}(0{,}333 - 0{,}5)\cdot\dfrac{1}{\cos 30°\sin^2 30°} < 0$ и $V'(40°) = \dfrac{2\pi r^3}{3}(0{,}704 - 0{,}5)\cdot\dfrac{1}{\cos 40°\sin^2 40°} > 0$, в тч-е $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ фк-я $V(\alpha)$ имеет едн. локальный мнм-ум и $V(\alpha_2)$ яв-ся ее нм. зн-ем на $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Найдем теперь высоту: $h = \dfrac{r}{\sin\alpha_2} = r\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_2}}{\mathrm{tg}\alpha_2} = r\dfrac{\sqrt{1+1/2}}{1\big/\sqrt{2}} = r\cdot\sqrt{3}$.

Итак, высота конуса нм. объема $V(\alpha_2) = \dfrac{\pi r^3}{3\cos^2\alpha_2\sin\alpha_2}$, описанного вокруг полушара радиуса $r$, должна быть равна $r\sqrt{3}$.

6*. Из всех равнобедренных туг-ов, имеющих боковую сторону длиной $l$, найти тот, пщ-дь к-го нб-ия. О: нб-я пщ. у туг-ка с высотой, равной $l/\sqrt{2}$ .

**у7**. Расв-ся замкнутая электрическая цепь, состоящая из источника ЭДС $E$ с внутренним сопротивлением $r_{\text{вн}}$ и нагрузки – сопротивления $r_{\text{н}}$ (рис. 2). Подобрать такое сопротивление нагрузки, чтобы при заданном внутренним сопротивлении источника получить нб. мощность в нагрузке.

Р. Сопротивление нагрузки $r_{\text{н}}$ возьмем в кач-е незв. пер-ой. Как известно из физики, мощность, потребляемая нагрузкой, опр-ся фм-ой $P = UI$, где $U$ – падение напряжения на сопротивлении $r_{\text{н}}$; $I$ – сила тока. Т.к по закону Ома для участка цепи $U = r_{\text{н}}I$, то $P = r_{\text{н}}I^2$, где $I = E/(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})^2$. Тогда окончательно получим $P = E^2r_{\text{н}}/(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})^2$.

Поскольку сопротивление $r_{\text{н}}$ яв-ся пер-ым, то мощность есть фк-я от $r_{\text{н}}$, т.е. $P = P(r)$. Т.о. задача сводится к нахождению нб. зн-ия этой фк-и на $]0, \infty[$. Находим

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r_{\text{н}}} = \frac{E^2\left((r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})^2 - 2(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})r_{\text{н}}\right)}{(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})^4} = \frac{E^2(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})}{(r_{\text{вн}} + r_{\text{н}})^3},$$

откуда следует, что $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r_{\text{н}}} = 0$ при $r_{\text{н}} = r_{\text{вн}}$.

Т.к. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r_{\text{н}}} > 0$, если $r_{\text{н}} < r_{\text{вн}}$, и $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r_{\text{н}}} < 0$, если $r_{\text{н}} > r_{\text{вн}}$, то при $r_{\text{н}} = r_{\text{вн}}$ фк. $P = P(r_{\text{н}})$ имеет локальный мкс-ум, к-ый и яв-ся нб. зн-ем (в силу непр-сти фк-и на $]0, \infty[$). Сдт-но, нб. мощность в нагрузке будет тогда, когда сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника. При этом нб. зн-ие мощности в нагрузке $P_{\text{нб}} = E^2/4r_{\text{вн}}$.

7*. От реки шириной $a$ отходит под прямым лучом канал шириной $b$. Какой нб. длины суда могут входить в этот канал? О: $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$ .

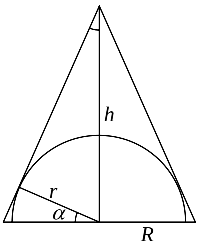



Рис. 1

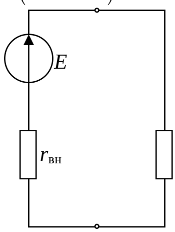



Рис. 2

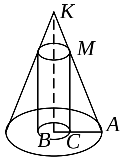



Рис. 3

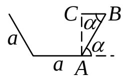



Рис. 4

**у8**. Найти нб. объем цлн-ра, вписанного в данный конус.

Р. Пусть задан конус высотой $H$ и радиусом осн-я $R$ (рис. 3). Обз-им $KB = H$, $BA = R$ (даны), $BC = r$, $MC = h$ (неизвестные). Найдем объем цлн-ра $V = \pi r^2h$. Пусть $CA = x$. Тогда $r = R - x$. А из $\dfrac{H}{R} = \dfrac{h}{x}$ получим $h = \dfrac{H}{R}x$. Отсюда $V = \dfrac{\pi H}{R} \cdot (R - x)^2x = \dfrac{\pi H}{R}(R^2x - 2Rx^2 + x^3)$; $V' = \dfrac{\pi H}{R}(R^2 - 4Rx + 3x^2)$. Из $V' = 0$ или $3x^2 - 4Rx + R^2 = 0$ находим $x_{1,2} = \dfrac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 3R^2}}{3} = \dfrac{2R \pm R}{3}$, т.е. $x = R$ (не уд-ет усл-ю задачи) и $x = \dfrac{R}{3}$. Установим, что $x = \dfrac{R}{3}$ есть тч-а мкс-ма: $V'' = \dfrac{\pi H}{R}(-4R + 6x)$, $V''\left(\dfrac{R}{3}\right) = \dfrac{\pi H}{R}(-4R + 2R) = -2\pi H < 0$, значит, $x = \dfrac{R}{3}$ есть тч-а мкс-ма. Итак, $V\left(\dfrac{R}{3}\right) = \dfrac{4}{27}\pi HR^2$.

8*. Из кв-го жестяного листа со стороной $a$ сделать коробку нб. объема. О: $x = a/6$, $V(a/6) = 2a^3/27$.

**у9**. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. Какой угол $\alpha$ наклона боковых стенок к днищу желоба создает нб. пщ-дь поперечного сечения желоба?

Р. Пусть ширина досок равна $a$. Рас-им поперечное сечение желоба (рис. 4). Обз-им $CB = x =$

$= a\cos\alpha$, $AC = h = a\sin\alpha$. Тогда $S = \dfrac{a+(a+2a\cos\alpha)}{2} \cdot a\sin\alpha = a^2(\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) = a^2 \cdot (\sin\alpha +$

$+ \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha)$; $S' = a^2(\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2) = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha)$. Из $S' = 0$ или $\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0$, $2\cos^2\alpha +$

$+ \cos\alpha - 1 = 0$ получим $\cos\alpha = -1$ (не уд-ет усл-ю задачи), $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ яв-ся тч-й

мкс-ма, т.к. $S'' = a^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha)$ и $S''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a^2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$.

9*. Требуется огородить забором пуг-ый участок земли пщ-ю 294 м$^2$ и разделить затем этот земельный участок забором на две равные части. При каких лин. размерах участка длина всего забора окажется нм-ей? О: 14 м × 21 м.

Заметим, что в усл-ях многих задач явно не формулируется, что требуется найти нб. и нм. зн-ия и эксм-ы. К таким задачам относятся, н-р, задачи, связанные с нахождением мн-ва зн-й фк-й.

**у10**. Найти образ промежутка $[-1, 3]$ при отб-и, заданном фк-ей $f(x) = 4x^3 - 12x$.

Р. $f'(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1. \end{cases}$ Сравнивая зн-ия фк. $f(x)$ в крт. тч-х и на концах промежутка, получаем $\max\limits_{x\in[-1,3]} f(x) = f(3) = 72$, $\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x) = f(1) = -8$. О: $[-8; 72]$.

10*. Опр-ть нб. и нм. зн. фк-и $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на сгм. $[-1, 4]$. О: нб. зн. при $x = 4$, нм.: $x = -1$, $x = 2$.

**у11**. Д-ть, что при $x \ge 0$ имеет место нерав-во $x - x^3/6 \le \sin x \le x$.

Р. $\sin x \le x$ верно для $x \ge \pi/2$, ибо $\sin x \le 1 < \pi/2$. Теперь рас-им фк-ю $h(x) = \sin x - x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Т.к. фк. $h(x)$ непр-на на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(0) = 0$ и $h'(x) = \cos x - 1 < 0$ на $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, то $h(x) < 0$, т.е. $\sin x < x$ при $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Тогда $\sin x \le x$, ибо $\sin 0 = 0$. Для д-ва $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6}$ рас-им фк-ю $q(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, $x \ge 0$. Т.к. $q(0) = 0$ и фк. $q(x)$ непр-на на $[0, \infty[$, то дт-но д-ть, что фк. $q(x)$ взр-ет на промежутке $]0, \infty[$. Дсв-но, $q'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$. Итак, $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6}$.

11*. Опр-ть нб. и нм. зн-я фк-и $f(x) = \ln x/x$ на инр-е $(0, \infty)$. О: $M = f(e) = 1/e$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п9 и у1-у5 р-ть з1-з20 (иссл-ть и построить грф-и фк-й)

1. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; $\alpha = -1$; $\beta = 3$; б) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

2. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; $\alpha = -1$; $\beta = 2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

3. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$; $\alpha = 2$; $\beta = 4$; б) $y = \dfrac{x^2-3}{x+2}$.

4. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$; $\alpha = -1$; $\beta = 2$; б) $y = \dfrac{x^2-8}{x-3}$.

5. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$; $\alpha = 0$; $\beta = 4$; б) $y = \dfrac{x^2+9}{x+4}$.

6. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$; $\alpha = -2$; $\beta = 3$; б) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.

7. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$; $\alpha = -3$; $\beta = 0$; б) $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

8. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$; $\alpha = -3$; $\beta = 1$; б) $y = \dfrac{x^2+5}{x+2}$.

9. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$; $\alpha = 1$; $\beta = 4$; б) $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.

10. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$; $\alpha = -1$; $\beta = 4$; б) $y = \dfrac{x^2-15}{x+4}$.

11. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$; $\alpha = -4$; $\beta = 1$; б) $y = \dfrac{x^2+9}{x}$.

12. а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$; $\alpha = -4$; $\beta = 0$; б) $y = \dfrac{x^2+8}{x+1}$.

13. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$; $\alpha = 1$; $\beta = 5$; б) $y = \dfrac{x^2+21}{x-2}$.

14. а) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$; $\alpha = -2$; $\beta = 3$; б) $y = \dfrac{x^2+16}{x+3}$.

15. а) $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$; $\alpha = -5$; $\beta = 2$; б) $y = \dfrac{x^2-12}{x-4}$.

16. а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$; $\alpha = -5$; $\beta = 0$; б) $y = \dfrac{x^2+25}{x}$.

17. а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$; $\alpha = 0$; $\beta = 3$; б) $y = \dfrac{x^2+24}{x+1}$.

18. а) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$; $\alpha = -3$; $\beta = 5$; б) $y = \dfrac{x^2+32}{x-2}$.

15. а) $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$; $\alpha = -5$; $\beta = 3$; б) $y = \dfrac{x^2+27}{x+3}$.

16. а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$; $\alpha = -5$; $\beta = -1$; б) $y = \dfrac{x^2-7}{x-4}$.

**Задание для кр. работы на эксм-ум**: по образцу п10-п12 и у6-у11 р-ть з21-з40.

1. Около данного шара описать конус нм-го объема. О: $V(4R) = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot \dfrac{16R^2}{2R} = \dfrac{8}{3}\pi R^3$.

2. Найти $R$ осн-я цлн-ра, имеющего при данном объеме $V$ нм. полную пвх. О: $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

3. Найти мн-во, на к-ое отб-ет луч $[1, \infty[$ прв-я фк-и $f(x) = x(\ln x - 1)$. О: $[0, \infty[$.

4. Найти образ мн-а $[0; 0,5]$ при отб-и, заданном прв-ой фк-и $f(x) = \operatorname{tg}3x$. О: $\left[3, \dfrac{3}{\cos^2 1,5}\right]$.

5. Найти мн-во зн-й фк-и: 1) $y = \dfrac{x^2}{x^4+1}$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. О: 1) $y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; 2) $y \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

6. Д-ть, что справедливо нерав-во $\dfrac{x}{ax^2+b} \le \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.

7. Д-ть, что для фк. $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо нерав-во $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\dfrac{7}{9}$.

8. Д-ть, что для фк. $f(x) = \sin x \sin 2x$ выполнено нерав-во $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) < 0{,}77$.

9. Д-ть, что при $x \ge 0$ имеет место нерав-во $1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$.

10. Сумма третьего и девятого членов ариф-ой прогрессии равна нм. зн-ю кв-го трехчлена $2x^2 - 4x + 10$. Найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии. О: 44. Ук: воспользуемся тем, что $a_9 + a_3 = a_1 + a_{11}$.

11. При каком зн-и парм-а $a$ зн-ия фк-и $y = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ в тч. $x = 2$ и в тч-х эксм-а, взятых в нек-ом порядке, яв-ся членами геомч-ой прогрессии? О: $a = -\dfrac{4}{3}$, $a = -\dfrac{8}{3}$. Ук: использовать св-во геомч. прогрессии: $a^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

12. Сумма членов беск. убщ-ей геомч. прогрессии равна нб. зн-ию фк. $f(x) = x^3 + 3x - 9$ на промежутке $[-2, 3]$. Найти знаменатель прогрессии. О: 2/3.

13. Сумма беск. убщ-ей геомч. прогрессии равна нм. зн-ию фк. $f(x) = 3x^2 - x + \dfrac{25}{12}$, а первый член прогрессии равен кв-у ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии. О: $\sqrt{3} - 1$.

14. Число 26 представить в виде суммы трех плж. слг-ых, сумма кв-ов к-ых нм-ая, если известно, что второе слг. втрое больше первого. О: 4, 12, 10.

15. Число 36 представить в виде пзв-ия двух сомножителей так, чтобы сумма их кв-ов была нм-ей. О: $36 = 6 \cdot 6$.

16. Число 180 представить в виде суммы трех плж. слг-ых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а пзв-ие всех трех слг-ых было нм-им. О: $40 + 80 + 100 = 180$.

17. Путнику требуется попасть на противоположный берег реки. Под каким углом $\alpha$ ему следует нпв-ть лодку, чтобы добиться нм-го сноса, если скр-ть лодки равна $V_л$, а скр-ть течения реки $V_р$? О: $\alpha = \arccos\, V_р/V_л$.

18. Тело бросают под углом $\alpha$ к горизонту со скоростью $V_0$. При каком зн-и угла $\alpha$ тело улетит дальше всего? О: $\alpha = \pi/4$.

19. Найти высоту конч. воронки нм-го объема, если ее образующая равна $l$. О: $H = l/\sqrt{3}$. Ук: воспользуемся фм-ой $V = \dfrac{1}{3}SH$, $S = \pi R^2$.

20. Найти число, к-ое превышало бы свой кв-т на max зн-ие. О: 0,5.

21. Пуг-ый лист жести имеет лин-ые размеры 5 × 8 дм. В его четырех углах вырезают одинаковые кв-ты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова нб. вместимость полученной коробки? О: 18 дм$^2$.

22. В пуг-ый туг-к с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан пуг-к, основание к-го лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон пуг-ка, чтобы его пщ-дь была нб.? О: 12 см и $3\sqrt{3}$ см.

23. Среди равнобедренных туг-ов с данной боковой стороной найти туг-к нб. пщ-ди.

О: Пуг-ый туг-к с длиной гипотенузы $a\sqrt{2}$.

24. Из пункта А на прогулку вышел пешеход со скр-ю $V$ км/ч. После того, как он отошел от А на 6 км, из А следом за ним выехал велосипедист, скр-ть к-го была на 9 км/ч больше скр-и пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и возвратились вместе в А со скр. 4 км/ч. При каком зн-и $V$ время прогулки пешехода окажется нм-им? О: 6 км/ч.

25. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цлнч. бака, чтобы при данном объеме $V$ на его изготовление пошло нм. кол-во листового металла? О: $H = R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

# 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

> Три пути ведут к знанию: путь размышления – самый благородный, путь подражания – самый легкий и путь опыта – это путь самый горький.
>
> Конфуций

## ЛЕКЦИЯ 21

## 8.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1°. Первообразная функция. Свойства и таблица неопределенных интегралов**. В дифн-ом исчислении мы расв-ли задачу: дана фк. $F(x)$, найти ее прв-ю, т.е. фк-ю $f(x) = F'(x)$. Н-р, дано ур. двж-ия $S = S(t)$, найти ее скорость: $V(t) = S'(t)$.

В интегральном (интн.) исчислении будем р-ть обратную задачу: дана фк. $f(x)$, найти такую фк. $F(x)$, прв-я к-ой равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \text{ или } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Н-р, дана скорость $V = V(t)$, найти ур-ие двж-ия $S = S(t)$, т.е. по фк-и $V = V(t)$ нх-мо восстановить фк-ю $S(t)$, для к-ой $S'(t) = V(t)$.

**о1**. Фк. $F(x)$ наз. первообразной фк. от фк-и $f(x)$ на сегменте (сгм.) $[a, b]$, если во всех тч-х этого сгм-а выполняется рав-во $F'(x) = f(x)$.

**п1а**. Найти первообразную от фк-и $f(x) = x^2$.

Р. Первообразной будет $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, т.к. $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = \dfrac{1}{3}\cdot 3x^3 = x^2 = f(x)$.

**т1**. Если в нек-ом промежутке $X$ (н-р, в $[a, b]$) фк. $F(x)$ есть первообразная для фк-и $f(x)$, то и фк. $F(x) + C$ (где $C$ – любая пст-ая), также будет первообразной. Обратно, каждая первообразная для $f(x)$ в промежутке $X$ может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Д. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ – также первообразная для $f(x)$, т.к.

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x). \tag{2}$$

Пусть теперь $\Phi(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Отсюда и из (2) следует, что $\Phi(x) = F(x) + C$ ■

Н-р, для $f(x) = x^2$ имеем, что $[F(x) + C]' = \left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)' = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$.

**о2**.Если фк. $F(x)$ яв-ся первообразной для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то врж-ие $F(x) + C$ наз. неопределенным (неопрн.) интегралом (инт.) от фк-и $f(x)$ и обз-ся

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \tag{3}$$

где $f(x)$ наз. подынтегральной (подынт.) фк-ей, $f(x)\mathrm{d}x$ – подынт-ым врж-ем, $\int$ – знак инт-ла.

Нахождение первообразной $F(x)$ для подынт. фк-и $f(x)$ наз. интегрированием (интв.) фк-и. А вопрос – для всякой ли фк-и $f(x)$ сущ-ет первообразная $F(x)$ – рас-им в 6°.

Операции интв-ия и дифв-ия взаимно обратны и связаны сд. стн-ми:

1*. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x \underset{(3)}{=} \mathrm{d}[F(x) + C] = \mathrm{d}F(x) \underset{(1)}{=} f(x)\mathrm{d}x$ (т.е. знаки $\mathrm{d}\int$ ликвидируются).

2*. $\int \mathrm{d}F(x) \underset{(1)}{=} \int f(x)\mathrm{d}x \underset{(3)}{=} F(x) + C$ (знаки $\mathrm{d}\int$ ликвидируются с точностью до пст-ой). Это в нек-ом смысле анч-но знакам $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ и $\sqrt{x^2} = |x|$.

Неопрн-ый инт-л обладает сд. св-ми:

**с1**. Пст-ый множитель (мнж.) можно выносить за знак инт-а, т.е.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x . \tag{4}$$

Д. По 1* для левой и правой части (4) получим $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = kf(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}k\int f(x)\mathrm{d}x = k\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = kf(x)\mathrm{d}x$. Откуда следует (4) ■

**с2**. Инт-л от конечной алгч. суммы фк-й равен такой же сумме инт-ов от этих фк-й, т.е.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x - \int f_3(x)\mathrm{d}x . \tag{5}$$

Д. По 1* имеем $\mathrm{d}\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = f_1(x)\mathrm{d}x + f_2(x)\mathrm{d}x - f_3(x)\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}\left[\int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x - \int f_3(x)\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}\int f_1(x)\mathrm{d}x + \mathrm{d}\int f_2(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}\int f_3(x)\mathrm{d}x = f_1(x)\mathrm{d}x + f_2(x)\mathrm{d}x - f_3(x)\mathrm{d}x \Rightarrow (5)$ ■

**с3**. Вид инт-а не меняется при переходе от пер-ой $x$ к пер-ой $u$, где $u = \varphi(x)$ – непр-но дифм. фк-ия, т.е.

$$\text{если } \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ то } \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C. \tag{6}$$

Справедливость (6) следует из того, что вид первообразной фк. зв-т только от вида подынт. фк-и, к-ая может зв-ть от $x$ или $u$, а от них форма первообразной не зв-т.

## Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$, $\int \mathrm{d}x = x + C$.

2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$, $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$. Анч-но: $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$.

5. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$. $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$.

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x + C$. $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{th}x + C$.

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}x + C.$ $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\mathrm{d}x = -\operatorname{cth}x + C.$

8. $\int \operatorname{ctg}x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \operatorname{tg}x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C,$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right) + C.$

Справедливость рав-в 1-13 легко проверить дифв-ем. Н-р, учитывая, что $F'(x) = f(x)$, проверим: 1. $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha} = x^{\alpha}$; 2. $(\ln|x| + C)' =$

$$= \begin{cases} \ln' x, \ x \geq 0; \\ \ln'(-x), \ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{-x}(-1) \end{cases} = \frac{1}{x} \text{ и т.д.}$$

Проверить справедливость остальных рав-в предоставляется читателю. Инт-ы, содержащиеся в этой таблице (табл.), будем наз. табличными (таблч.). Их необходимо твердо запомнить.

Иногда в фм-ах 2, 8, 9, 12 знак абс. вел-ы будем опускать, предполагая, что расв. вел-а плж-на.

**зм1**. На основе с3 таблч. инт-ы можно расширить; н-р, из 1 следует

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C. \tag{7}$$

Заменив здесь $x$ на $\sin x$, получим

$$\int \sin x\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \text{ т.е. } \int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Далее, в фм-у (7) вместо $x$, подставляя (подс.) фк-ю $\ln x$, будем иметь

$$\int \ln x\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \text{ т.е. } \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + C \text{ и т.п.}$$

**2°. Методы интегрирования неопределенных интегралов**. Рас-им осн. методы интв-ия:

**1***. Непосредственное интегрирование. Если подынт. фк-ия имеет дт-но простой вид, то с использованием таблч. инт-ов и св-в неопрн-го инт-а можно интв-ть непосредственно.

**п1**. $\int \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x = \int (x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

**п2**. $\int \left(1 + \dfrac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int x^{-5}\mathrm{d}x = x + \dfrac{x^{-4}}{-4} + C = x - \dfrac{1}{4x^4} + C.$

**2***. Интегрирование подстановкой (подн.). Пусть требуется выч-ть инт. $\int f(x)\mathrm{d}x$, к-ый (ввиду сложности подынт. фк-и) не может быть непосредственно прб-н к виду таблч-го. Тогда введем новую пер-ю $t$ звт-ю $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ есть дифм. фк-я от $t$, и получим $f(x) = f[\varphi(t)]$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Откуда имеем

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \Phi(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + C = F(x) + C.$$

Здесь при удачной подн-ке $x = \varphi(t)$ инт. $\int \Phi(t)\mathrm{d}t$ интегрируется (инту.) легче, чем $\int f(x)\mathrm{d}x$.

**п3**. $\int \sqrt{3x^2 + 8}\,x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 8 = t^2 \\ 6x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \dfrac{1}{3}\int t^2\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{1}{9}\sqrt{(3x^2 + 8)^3} + C.$

**п4**. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \mathrm{d}t,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}t \end{array} \right| = 2\int e^t\mathrm{d}t = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

**п5**. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\mathrm{d}t = \dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C.$

**п6** (подстановка Эйлера). $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 \pm k} = t - x \Rightarrow x^2 \pm k = \\ = t^2 - 2tx + x^2 \text{ или } t^2 = 2tx \pm k \\ \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}t \Rightarrow \\ (t - x)\mathrm{d}t = t\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{t - x} \\ \text{или } \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \end{array} \right| =$

$= \int \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right) + C.$

**3***. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифм-ые фк. по $x$. Тогда $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ или $u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$. Откуда, инт-уя, получим $\int u\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}(uv) - \int v\mathrm{d}u$, но $\int \mathrm{d}(uv) = uv$, тогда

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u. \qquad (8)$$

Стн. (8) наз. фм-ой интв-ия по частям. Здесь при удачном разбиении подынт-ой фк-и $\int v\mathrm{d}u$ инту-ся легче, чем $\int u\mathrm{d}v$.

Интв-ие по частям применяется для выч-ия инт-ов вида: $\int P(x)\sin ax\mathrm{d}x$, $\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\int P(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int P(x)\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$ и т.д., где $P(x)$ – нек-ый мчл. от $x$.

**п7**. $\int \ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - x + C.$

**п8**. $\int \arcsin x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x +$

$+ \sqrt{1-x^2} + C$, т.к. $J = \int \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t^2 \\ -2x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x = -t\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \dfrac{t\mathrm{d}t}{t} = -t = -\sqrt{1-x^2}$ .

**п9**. $\int (2x-5)e^{-3x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = 2x - 5,\ \mathrm{d}v = e^{-3x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x,\ v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} \end{array} \right| = -\dfrac{1}{3}e^{-3x}(2x-5) + \dfrac{2}{3}\int e^{-3x}\mathrm{d}x =$

$= -\dfrac{2x-5}{3}e^{-3x} - \dfrac{2}{9}e^{-3x} + C = \dfrac{13-6x}{9}e^{-3x} + C.$

**3°. Интегрирование рациональных функций**. Рациональной (рац.) фк-ей наз. дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, числитель и знаменатель к-ой – мчл-ы.

Дробь наз. правильной (неправильной), если степень (сп.) числителя ниже (не ниже) сп-и знаменателя. Н-р, дроби $\dfrac{x-2}{x^2+x-3}$, $\dfrac{1}{(x+3)^2}$, $\dfrac{x^2}{x^3+8}$ – правильные, $\dfrac{x^3}{x^2-4}$, $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $\dfrac{x}{ax+b}$ – неправильные.

Если требуется проинтв-ть неправильную дробь, то предварительно следует перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

**п1**. $\int \dfrac{x^3}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int \left( x + \dfrac{x}{x^2-1} \right)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + \int \dfrac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(x^2-1)}{x^2-1} =$

$= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\ln(x^2-1)}{2} + C.$

Рас-им интв-ие правильных дробей.

I. Инт. $\int \dfrac{A}{ax+b}\mathrm{d}x$ выч-ся непосредственно как инт-л от спн. фк-и при $n = -1$.

**п2**. $\int \dfrac{2}{3x+1}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\int \dfrac{\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1} = \dfrac{2}{3}\ln(3x+1) + C.$

II. Инт. $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ $(a \neq 0)$ делением числителя и знаменателя на $a$ приводится к виду $J = \int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$, где возможны три случая:

1) $\frac{p^2}{4} - q = 0$, т.е. корни знаменателя дсв-ые и равные. Тогда $x^2 + px + q =$ $= (x - x_1)^2$ и инт. $J = \int \frac{mx+n}{(x-x_1)^2}\mathrm{d}x$, выч-ся подн-ой $x - x_1 = t$.

**п3**. $$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x-2=t \\ x=t+2 \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{t+3}{t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + 3\int t^{-2}\mathrm{d}t =$$
$$= \ln t + 3\frac{t^{-1}}{-1} + C = \ln t - \frac{3}{t} + C = \ln(x-2) - \frac{3}{x-2} + C;$$

2) $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. корни знаменателя – мнимые числа, тогда квадратный (квн.) трехчлен $x^2 + px + q$ дпн-ют до полного кв-а.

**п4**. $$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2}=t \\ x=t-\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} +$$
$$+ \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) +$$
$$+ \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

**п5**. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-10x+16} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^2-9} = \int \frac{\mathrm{d}(x-5)}{(x-5)^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C;$$

3) **метод неопределенных коэффициентов**: $\frac{p^2}{4} - q > 0$, т.е. корни знаменателя дсв-ые и разные. Тогда $\frac{mx+n}{x^2+px+q} = \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.

Числитель этих дробей опр-ся методом неопрн-ых коэф-ов: $\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} =$

$= \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{x-x_2} = \dfrac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$. Сравнение числителей дает систему $\begin{cases} A+B=m; \\ -Ax_2 - Bx_1 = n, \end{cases}$ р-ив к-ую, находим $A$ и $B$, затем инту-ем данный инт-л.

**п6**. $\int \dfrac{x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ ; $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Тогда имеем $\dfrac{x}{x^2-5x+6} =$

$= \dfrac{x}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{(A+B)x-2A-3B}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1; \\ -2A-3B=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{array}{r|l} 2A+2B=2 & B=-2; \\ -2A-3B=0 & A=3. \\ \hline -B=2 & \end{array}$ Отсюда $\int \dfrac{x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 3\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x-3} -$

$- 2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x-2} = 3\ln(x-3) - 2\ln(x-2) + \ln C = \ln\dfrac{C(x-3)^3}{(x-2)^2}$.

**зм2**. Если в знаменателе мчл. имеет более высокую сп-нь и дсв-ые корни, то р-е анч-но можно искать методом неопрн. коэф-ов.

**п7**. $\int \dfrac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\mathrm{d}x$ ; $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x^2 + 2x - 8) = x(x-2)(x+4)$, тогда

$\dfrac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \dfrac{x^2-2x+2}{x(x-2)(x+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+4} =$

$= \dfrac{A(x-2)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+4)} \Rightarrow A(x-2)(x+4) + Bx(x+4) + Cx(x-2) =$

$= x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{если } x = 0, \text{ то } A(-8) = 2,\ A = -1/4; \\ \text{если } x = 2, \text{ то } B \cdot 12 = 2,\ B = 1/6; \\ \text{если } x = -4, \text{ то } C \cdot 24 = 26,\ C = 13/12. \end{cases}$ Тогда

$\int\dfrac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{-1/4}{x} + \dfrac{1/6}{x-2} + \dfrac{13/12}{x+4}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{1}{6}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x-2} + \dfrac{13}{12}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x+4} =$

$= -\dfrac{1}{4}\ln x + \dfrac{1}{6}\ln(x-2) + \dfrac{13}{12}\ln(x+4) + \ln C = \ln C\sqrt[12]{\dfrac{(x+4)^{13}(x-2)^2}{x^3}}$.

**зм3**. Если знаменатель имеет кратные корни, то неопрн-ые коэф-ы нх-мо вводить сд. образом:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha\left(x^2+px+q\right)^\beta} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x+N_\beta}{\left(x^2+px+q\right)^\beta},$$

где $P(x)$ – полином сп-и ниже сп-и знаменателя.

**п8**. $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = J.$ $\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} +$

$+ \frac{Mx+N}{x^2+2x+2} = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} \Rightarrow$

$x^2-5x+9 = A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Mx+N)(x-1)^2$ или

$x^2-5x+9 = (A_1+M)x^3 + (A_1+A_2-2M+N)x^2 + (2A_2+M-2N)x + (-2A_1+2A_2+N)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1+M=0; \\ A_1+A_2-2M+N=1; \\ 2A_2+M-2N=-5; \\ -2A_1+2A_2+N=9 \end{cases} \left| \begin{matrix} A_1=-7/5 \\ A_2=1 \\ M=7/5 \\ N=21/5 \end{matrix} \right| \quad J = \int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x = -\frac{7}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} +$$

$+ \frac{7}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = -\frac{7}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{5}J_1 + C$, где $J_1 = \int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x =$

$= \int\frac{x+3}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int\frac{t+2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} + 2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) +$

$+ 2\mathrm{arctg}\,t = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\mathrm{arctg}(x+1).$

**зм4**. Метод неопрн-ых коэф-ов позволяет интв-ть обширный класс элр. фк-й. Однако на практике не всегда следует действовать по трафарету.

**п9**. $\int\frac{(3x^2+4x-1)\mathrm{d}x}{x^3+2x^2-x-2} = \int\frac{\mathrm{d}(x^3+2x^2-x-2)}{x^3+2x^2-x-2} = \ln(x^3+2x^2-x-2) + C.$

**4°. Интегрирование некоторых иррациональных функций**. Не от всякой иррац. фк-и инт-л врж-ся через элр. фк-и. Здесь мы рас-им те иррац. фк-и, инт-ы от к-ых с помощью подн-к приводятся к инт-ам от рац. фк-й и, сдт-но, до конца инту-ся. Рас-им инт-ы вида:

1) $\int R\left[x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right]\mathrm{d}x$, здесь и далее $R$ есть рац. фк-я от своих арг-ов, т.е. запись $R\left[x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right]$ указывает, что над вел-ми $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$ производятся только рац. операции.

Пусть $k$ – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Сделаем подн-у $x = t^k$, $\mathrm{d}x = kt^{k-1}\mathrm{d}t$. Тогда каждая дробная сп-нь врз-ся через целую сп. $t$, к-ая легко инту-ся.

**п1**. $\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x = \int\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x=t^6 \\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t \\ t=x^{\frac{1}{6}} \end{matrix} \right| = 6\int\frac{(t^3+1)\,t^5}{t^4}\mathrm{d}t = 6\int(t^4+t)\mathrm{d}t =$

$$= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right) + C = 6\left(\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right) + C = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right) + C;$$

2) Инт. $\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]\mathrm{d}x$ сводится к инт-у от рац. фк-и с помощью подн-и $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где $k$ – общий знаменатель $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

**п2**. $$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} x+4=t^2 \\ x=t^2-4 \\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t \end{array}\right| = 2\int\frac{t^2}{t^2-4}\mathrm{d}t = 2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t = 2\int\mathrm{d}t +$$

$$+ 8\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2^2} = 2t + \frac{8}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

**п3**. $$\int\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}\mathrm{d}x}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)x^2} = \left|\begin{array}{l} \frac{x}{x-1} = t^6 \\ x = \frac{t^6}{t^6-1} \\ \mathrm{d}x = \frac{-6t^5\mathrm{d}t}{\left(t^6-1\right)^2} \end{array}\right| = -6\int\frac{t^5\cdot t^3\left(t^6-1\right)^2\mathrm{d}t}{\left(t^6-1\right)^2\left(1+t^2\right)t^{12}} = -6\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4\left(t^2+1\right)} = J.$$

$\frac{1}{t^4\left(t^2+1\right)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \frac{A_4}{t^4} + \frac{Mt+N}{t^2+1} \Rightarrow 1 = A_1t^3(t^2+1) + A_2t^2(t^2+1) + A_3t(t^2+1) + A_4(t^2+1) + (Mt+N)t^4$. Полагая $t = 0$, найдем $A_4 = 1$. Сравнение коэф-ов при сп-ях $t$ дает пять рав-в:

$$\begin{array}{r|l|l} t^5 & 0 = A_1 + M & A_4 = 1 \\ t^4 & 0 = A_2 + N & A_3 = 0 \\ t^3 & 0 = A_3 + A_1 \ \Rightarrow & A_2 = -1 \\ t^2 & 0 = A_4 + A_2 & A_1 = 0 \\ t & 0 = A_3 & M = 0 \\ & & N = 1 \end{array}$$

. Тогда $J =$

$$= -6\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4\left(t^2+1\right)} = -6\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{t^3} - \frac{6}{t} - 6\mathrm{arctg}t + C = \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}} -$$

$$- \frac{6}{\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}}} - 6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}} + C;$$

3) Инт. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ $(a \neq 0)$ приводится к инт-у от рац. фк-и с помощью сд. подн-к:

а) Первая подн. Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$, тогда $ax^2 + bx + c = ax^2 - 2\sqrt{a}xt + t^2 \Rightarrow \left(b+2\sqrt{a}t\right)x = t^2 - c \Rightarrow x = \dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$,

тогда получим $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + z = -\sqrt{a}\,\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t} + t$, сдт-но, расн-ый инт-л прб-ся в инт-л от рац. фк-и пер-ой $t$.

**п4**. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = -x+t \Rightarrow x^2+1 = x^2-2xt+t^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2-1}{2t}, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t;\ \sqrt{x^2+1} = -\dfrac{t^2-1}{2t} + t = \dfrac{t^2+1}{2t^2} \end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{\dfrac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{t^2+1}{2t}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C;$$

б) Вторая подн. Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ $\Rightarrow ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}\,xt + c \Rightarrow (a - t^2)x^2 = \left(2\sqrt{c}t-b\right)x \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$.

Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} = \dfrac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}t + \sqrt{c}$, т.е. свели к рац. фк-и.

**п5**. $$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \sqrt{1+x+x^2} = xt+1 \Rightarrow 1+x+x^2 = \\ = x^2t^2+2xt+1 \Rightarrow (1-t^2)x^2 = (2t-1)x \Rightarrow \\ x = \dfrac{2t-1}{1-t^2},\ \mathrm{d}x = \dfrac{2t^2-2t+2}{\left(1-t^2\right)^2}\mathrm{d}t;\ \sqrt{1+x+x^2} = \\ = xt+1 = \dfrac{(2t-1)t}{1-t^2} + 1 = \dfrac{t^2-t+1}{1-t^2} \end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{1-\dfrac{t^2-t+1}{1-t^2}}{\dfrac{2t-1}{1-t^2}\cdot\dfrac{t^2-t+1}{1-t^2}}\cdot 2\frac{t^2-t+1}{\left(1-t^2\right)^2}\mathrm{d}t = 2\int\frac{1-t^2-t^2+1-1}{\left(1-t^2\right)(2t-1)}\mathrm{d}t = -2\int\frac{t(2t-1)}{\left(1-t^2\right)(2t-1)}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}\left(1-t^2\right)}{1-t^2} = \ln(1-t^2) + C = \ln\left[1-\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)^2}{x^2}\right] + C;$$

в) Третья подн. Эйлера. Если $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, то полагаем $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x - \alpha)t \Rightarrow a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2t^2 \Rightarrow a(x - \beta) = (x - \alpha)t^2$

$\Rightarrow x = \dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$. Тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t = \left(\dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} - \alpha\right)t$.

**п6**. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+4)(x-1)}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t \Rightarrow \\ (x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2 \Rightarrow \\ x - 1 = (x+4)t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1+4t^2}{1-t^2}; \\ \mathrm{d}x = \dfrac{10t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t;\ \sqrt{(x+4)(x-1)} = \\ = \left(\dfrac{1+4t^2}{1-t^2} + 4\right)t = \dfrac{5t}{1-t^2} \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}\mathrm{d}t = \int \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \ln\frac{1+t}{1-t} + C = \ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}} + C = \ln\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}} + C;$$

г) Общая подн-а. Полагаем $t = \dfrac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' = ax + \dfrac{b}{2}$. Тогда инт-л $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ сводится в звт-и от коэф-ов к одному из сд. инт-ов:

1*. $\int R\left(t, \sqrt{m^2 - t^2}\right)\mathrm{d}t$. Тогда подн-ой $t = m\sin z$ освободимся от иррац-ти.

2*. $\int R\left(t, \sqrt{m^2 + t^2}\right)\mathrm{d}t$. Тогда полагаем $t = m\,\mathrm{tg}z$.

3*. $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - m^2}\right)\mathrm{d}t$. В этом случае полагаем $t = \dfrac{m}{\cos z}$.

**п7**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2}(2x+2) = x+1 \\ x = t-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t^2-2t+1+2t-2-3}}{t^3}\mathrm{d}t =$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{2}{\cos z},\ \mathrm{d}t = \dfrac{2\sin z}{\cos^2 z}\mathrm{d}z \\ \sqrt{t^2-4} = \sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 z} - 4} = 2\mathrm{tg}z \end{array} \right| = \int \frac{2\mathrm{tg}z \cdot 2\sin z}{\dfrac{8}{\cos^3 z}\cos^2 z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int \sin^2 z\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 2z}{2}\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right) + C = \frac{1}{4}(z - \sin z\cos z) + C = \frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{t} - \right.$$

$$-\frac{2\sqrt{t^2-4}}{t^2}\Bigg)+C=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x+1}-\frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\right)+C.$$

Общая подн. иногда приводит к сложным выч-ям, поэтому полезны и др. методы интв-ия, н-р:

**п8**. $\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u=\sqrt{x^2+1}\,,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x,\ v=x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2+1} - \int\dfrac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x =$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow 2\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow \int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Bigg(x\sqrt{x^2+1}\ +$$

$$+\ \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Bigg) + C.$$

**5°. Интегрирование тригонометрических функций**. Рас-им инт-л вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Покажем, что с помощью подн-ки (назм-ой универсальной)

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \qquad (2)$$

инт. (1) всегда сводится к инт-у от рац. фк-и. Для этого находим

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}\,t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

и получим инт-ы от рац. фк.: $\int R\,(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

**п1**. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln\mathrm{tg}\frac{x}{2} + C.$

Универсальная подн. всегда дает возможность проинтв-ть фк-ю вида $R(\sin x,\ \cos x)$. Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рац. фк-ям. Поэтому нх-мо знать и др. подн-ки, к-ые в нек. случаях быстрее приводят к цели.

1*. Простые подстановки. Рас-им различные случаи:

1) инт. $\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ с помощью подн-и $\sin x = t$, $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ легко приводится к инт-у от рац. фк-и: $\int R(t)\mathrm{d}t$;

2) анч-но инт. $\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ приводится к инт-у от рац. фк-и подн-ой $\cos x = t$.

**п2**. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x = \mathrm{d}t \\ \sin x\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$

$= -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t+2}\mathrm{d}t = \int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln(t+2) + C =$

$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$;

3) инт. $\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$ заменой $\mathrm{tg}x = t$, $x = \mathrm{arctg}t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ приводится к инт-у $\int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ от рац. фк-и;

4) с помощью такой же подн-и выч-ся инт-ы $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, если $\sin x$ и $\cos x$ входят в подынт. врж-е только в чет. сп-ях.

**п3**. $\int \mathrm{tg}^3 x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}x = t \\ x = \mathrm{arctg}t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{vmatrix} = \int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2 +$

$+ 1) + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{tg}^2 x + 1) + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 1}} + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} +$

$+ \ln\cos x + C$.

**п4**. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}x = t \\ x = \mathrm{arctg}t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

2*. Инт-ы вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$, где $m$ и $n$ – целые числа. Здесь возможны три случая:

1) $\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$, где хотя бы одно из чисел $m$, $n$ – нечет., н-р, $n = 2p + 1$.

Тогда $\int\sin^m x\cos^{2p+1}x\mathrm{d}x = \int\sin^m x\cos^{2p}x\cos x\mathrm{d}x = \int\sin^m x(1-\sin^2 x)^p\cos x\mathrm{d}x =$
$= \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^m\left(1-t^2\right)^p\mathrm{d}t$ – инт. от рац. фк-и пер-ой $t$.

**п5**. $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int\frac{1-t^2}{t^4}\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^4} -$
$\displaystyle - \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C;$

2) $\int\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$, где $m$ и $n$ – числа неотц-ые и чет. Положим $m = 2p$, $n = 2q$. Используя фм-ы $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, получим

$$\int\sin^{2p}x\cos^{2q}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^p 2^q}\int(1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^q\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Возводя в сп-нь и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечет. и чет. сп-ях. Члены с нечет. сп-ми инту-ся, как указано в 1), а чет. сп-ни снова понижаем по фм-е (3). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int\cos kx\mathrm{d}x$, к-ые легко инту-ся.

**п6**. $\displaystyle\int\sin^4\mathrm{d}x = \frac{1}{2^2}\int(1-\cos 2x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}[x-\sin 2x +$
$\displaystyle + \frac{1}{2}\int(1+\cos 4x\mathrm{d}x)] = \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C;$

3) $\int\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$, где $m$ и $n$ – чет., причем хотя бы один из них отц-ен, полагаем $\mathrm{tg}x = t$ (или $\mathrm{ctg}x = t$).

**п7**. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{\cos^6 x} = \int\frac{\sin^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2\mathrm{d}x}{\cos^6 x} = \int\mathrm{tg}^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)^2\mathrm{d}x =$
$\displaystyle = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}x = t \\ x = \mathrm{arctg}t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int\frac{t^2\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int\left(t^2+t^4\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}+C.$

3*. Инт-ы вида $\int\cos mx\cos nx\mathrm{d}x$, $\int\sin mx\cos nx\mathrm{d}x$, $\int\sin mx\sin nx\mathrm{d}x$ ($m \neq n$) легко инту-ся с помощью фм-л:

$$\left.\begin{array}{l} \cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x], \\ \sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x], \\ \sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Дст-но, $\displaystyle\int\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]\mathrm{d}x = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} +$

$+\dfrac{\sin(m-n)}{2(m-n)}+C.$

**п8**. $\int \sin 5x \sin 3x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int[-\cos 8x + \cos 2x]\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 8x}{16} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C.$

**6°. Теорема Коши. Понятие о «неберущихся» интегралах**. До сих пор для нек-ых непр. фк-й $f(x)$ мы находили их неопрн-ые инт-ы $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Возникает вопрос, всегда ли это будет так. Иными словами, 1) всегда ли непр. фк-я имеет неопрн. инт-л и 2) каким способом найти этот инт-л, если он сущ-ет.

Ответом на первую часть этого вопроса служит теорема Коши, яв-яся основной теоремой интн-го исчисления.

**т2** (Коши). Всякая непр. фк-я имеет первообразную, иначе для каждой непр. в инр-е $]a, b[$ фк-и $f(x)$ сущ-ет фк. $F(x)$, прв-ая к-ой в инр-е $]a, b[$ в точности равна данной фк-и $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ и тем самым сущ-ет неопрн. инт-л $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, где $C$ – произвольная пст-я.

Этим не решается вторая часть указанного вопроса, т.е. теорема Коши не утв-ет, что первообразную данной фк-и можно врз-ть через конечное число элр. фк-й. Более того, имеются непр. элр. фк-и, инт-ы от к-ых не яв-ся элр. фк-ми. Такие инт-ы наз. «неберущимися», н-р, $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, $\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$, $\int x \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$.

## ЛЕКЦИЯ 22

## 8.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1°. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла**. Рас-им сд. задачи.

**з1** (задача нахождения площади криволинейной трапеции). Найти площадь (пщ.) криволинейной (крвл.) трапеции (рис. 1), образованной линиями $\{y = f(x), y = 0, x = a, x = b\}$.

Р. Сгм. $[a, b]$ произвольно разобьем на $n$ частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Рас-им элр. сгм-т $[x_{i-1}, x_i]$, длину к-го обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Произвольно (прзвл.) выберем тч-у $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и опр-им фк-ю $f(\xi_i)$. Выч-им пщ. элр. трапеции $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$. Тогда вся пщ. прж-но равна $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$ и найдем точную пщ. крвл. трапеции

$$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{1}$$

**з2** (задача о пройденном пути). Найти путь, пройденный тч-ой, движущейся (двжщ.) прямолинейно, за время от $t_0$ до $T$ с пер-ой скр-ю $v = v(t)$.

Р. Разделим промежуток вр-и $[t_0, T]$ на $n$ частей:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_0.$$

Рас-им подсгм-т $[t_{i-1}, t_i]$ с длиной $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Прзвл-но выбираем тч-у $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ и находим скр-ть в этой тч. $v_i = v(\xi_i)$. Тогда элр-й путь равен $S_i \approx$ $\approx v(\xi_i)\Delta t_i$, а весь путь прж-но равен $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$. Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta t_i$ и найдем пройденный путь точно:

$$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i . \tag{2}$$

Содержание задач з1 и з2 разное, но р-ся они общ. методом, приводящим к понятию опрн-го инт-ла.

**Понятие определенного интеграла**. Из расн-ых задач видно, что для их р-ия мы делали опрн. шаги незв-мо от самой природы задачи. Поэтому анч. шаги можно проделать для прзвл. фк-и $f(x)$, непр-ой на сгм-е $[a, b]$.

I. Сгм. $[a, b]$ разделим на $n$ прзвл. промежутков

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и выберем $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$.

II. Прзвл-но выберем тч-у $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и опр-им фк-ю $f(\xi_i)$. Выч-им для каждого подсгм-а пзв-ие $f(\xi_i)\Delta x_i$.

III. Сост-м сумму $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, к-ая наз. интн-ой суммой.

IV. Если фк. $f(x)$ непр-на на сгм-е $[a, b]$, то сущ-ет предел интн-ой суммы при $\sigma \to 0$. Этот предел наз. опрн. инт-ом фк-и $f(x)$ на сгм-е $[a, b]$ и обз-ся:

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,, \tag{3}$$

где $f(x)$ наз. подынт. фк-ей, $f(x)\mathrm{d}x$ – подынт. врж-ем, $a$ и $b$ – пределами интв-ия.

Теперь фм-ы (1) и (2) можно писать ств-но в виде

$$S_{\text{пщ}} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,, \tag{1a}$$

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\mathrm{d}t \,, \tag{2a}$$

**п1**. Выч-ть пщ. крвл. трапеции: $y = x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ (рис. 2).

Р. I. Сгм. [0, 1] разобьем на $n$ частей: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{i-1}{n} < \frac{i}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$. Найдем $\Delta x_i = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$, $\delta = \max\limits_i \Delta x_i = \frac{1}{n}$.

II. $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $f(\xi_i) = \frac{i}{n}$, $f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$.

III. $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(1+n)n}{2} = \frac{1+n}{2n}$.

IV. $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1+n}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) = \frac{1}{2}$ ед.

**п2**. Выч-ть пщ. крвл. трапеции: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ (рис. 3).

Р. I. Сгм. [0, 1] разобьем на $n$ частей: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{i-1}{n} < \frac{i}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$. Найдем $\Delta x_i = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$, $\delta = \max\limits_i \Delta x_i = \frac{1}{n}$.

II. $\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $f(\xi_i) = \xi_i^2 = \frac{i^2}{n^2}$. Найдем $f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$.

III. $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$,

т.к.

$$\begin{array}{ll|}
1^3 = & 1^3 \\
2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3 & \\
3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3 & \\
4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 + 1^3 & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(n+1)^3 \qquad = n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3 & \\
\hline
\end{array}$$

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)$ ⊛

Из ⊛ получим: $(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+ 3\dfrac{(n+1)n}{2} + (n+1) \Rightarrow 1^2 +$
$+ 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{3}(n+1)^3 - \dfrac{(n+1)n}{2} - \dfrac{n+1}{3} = \dfrac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6} =$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, отсюда следует III.

IV. $\int\limits_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{6}\cdot 2 = \dfrac{1}{3}$ ед.

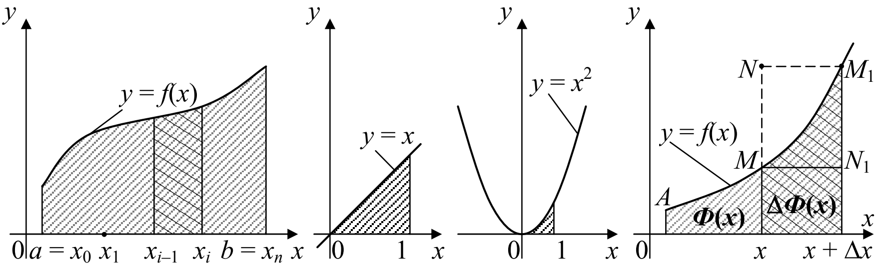



Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

**2°. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница**. Из п1 и п2 видно, что выч-ие опрн. инт-а по опр-ю с помощью 4-х шагов очень сложно. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли свести выч-ие опрн. инт-а к выч-ю неопрн. инт-а? Оказывается, можно.

Рас-им крвл. трапецию, у к-ой правая граничная прямая (пм.) не фкс-на (рис. 4). Пщ-дь этой трапеции зв-т от положения (пж.) правой границы, обз-им эту фк. через $\Phi(x)$. Тогда справедлива

**т1**. Фк-ия $\Phi(x)$, врж-ая пщ-дь пер-ой крвл. трапеции (с подвижной правой стороной), яв-ся первообразной для фк-и $f(x)$, грф-ом к-ой яв-ся кривая (крв.), огрв-щая эту трапецию сверху.

Д. Если $x$ дадим прщ-ие $\Delta x$, то $\Phi(x)$ получит прщ-ие $\Delta\Phi(x)$ и, исходя из рис. 4, мы можем написать $f(x)\Delta x < \Delta\Phi(x) < f(x+\Delta x)\Delta x$. Разделив ее на $\Delta x$, получим $f(x) < \dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$.

Имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$, тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$, значит, $\Phi(x)$ есть первообразная фк-и $f(x)$ ■

Теперь установим связь между опрн-ым и неопрн-ым инт-ми. По т1 имеем, что

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{4}$$

С другой стороны, если $x = b$, то пщ. крвл. трапеции равна $\Phi(b)$, но эта пщ. равна $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

значит, $\Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Анч-но, если правая граница будет $x$, то

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Тогда из (4) и (5) следует, что $\int\limits_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Найдем пст-ю $C$. Для этого возьмем $b = a$.

$$\Phi(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Итак, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$. Полагая $x = b$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6)$$

Стн-ие (6) наз. фм-ой Ньютона-Лейбница.

Используя фм-у Ньютона-Лейбница, выч-им п1 и п2:

$$\int\limits_a^b x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

**3°. Свойства определенного интеграла**. Справедливы сд.

**с1**. При перемене местами пределов интв-ия опрн. инт-л меняет знак на обратный, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Д. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$ ■

**сл1**. Если $a = b$, то $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x$, значит, $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

**с2**. Пусть $c \in \,]a, b[$. Тогда имеет место рав-во

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

если указанные инт-ы сущ-ют.

Д. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ ■

**с3**. Пст. мнж-ль можно выносить за знак опрн. инт-а, т.е.

$$\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Д. По опр-ю опрн. инт-а имеем

$$\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \; ■$$

**с4**. Опрн. инт-л от алгч. суммы конечного числа непр-ых фк-й равен алгч. сумме опрн. инт-ов от этих фк-й, т.е.

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$$

Д. $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i)\Delta x_i + f_2(\xi_i)\Delta x_i - f_3(\xi_i)\Delta x_i] =$

$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i - \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f_3(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x -$

$- \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x$ ■

**с5**. Если $f(x) \ge 0$ на сгм-е $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

Д. Т.к. $f(\xi_i) \ge 0$ и $\Delta x_i \ge 0$ $\forall$ $i$, то интн. сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$. Поэтому $\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$ ■

**с6**. Если $f(x) \ge \varphi(x)$ на сгм-е $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.

Д. Из $f(x) \ge \varphi(x) \Rightarrow f(x) - \varphi(x) \ge 0$, тогда по с5 имеем $\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x \ge 0$ или по с4 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ ■

Геомч. смысл с6 приведен на рис. 5. Пусть фк-и $f(x)$ и $\varphi(x)$ не отц-ны на сгм-е $[a, b]$. Тогда крвл. трапеция I, огрн-ая крв-й $y = f(x)$, содержит крвл. трапецию II, огрн-ю крв-й $y = \varphi(x)$. Сдт-но, пщ-дь I ≥ пщ-ди II.

**сл2**. Т.к. $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, то из с6 $\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{7}$$

**с7** (теорема о среднем). Если фк. $f(x)$ непр-на на сгм-е, то $\exists$ $c \in ]a, b[$, такая, что

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c). \tag{8}$$

Д. Обз-им через $m$ и $M$ ств-но нм-е и нб-е зн-ия фк-и на сгм. $[a, b]$. Тогда $\forall$ $x \in [a, b]$ имеем $m \le f(x) \le M$, откуда, применяя с6 и с3, получим $m\int_a^b \mathrm{d}x \le$

$\leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M\int\limits_a^b \mathrm{d}x \Rightarrow m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leq M$. Найдется тч. $c$, такая, что $m \leq f(c) \leq M$, т.е. $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} = f(c)$. Откуда получим (8) ■

Геомч. смысл теоремы о среднем (рис. 6) состоит в сд-ем: найдется тч. $c \in \,]a, b[$, такая, что пщ. $ABba$ равна пщ-ди крвл. трапеции, т.е. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

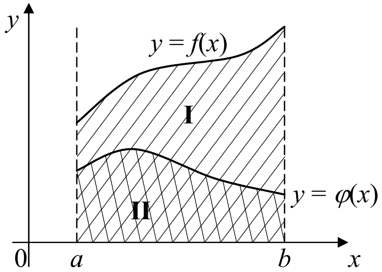


Рис. 5

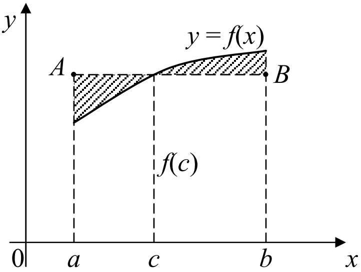


Рис. 6

**с8**. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$, если фк. $f(x)$ чет. на $[-a, a]$.

**с9**. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$, если фк. $f(x)$ нечет. на $[-a, a]$.

**4°. Методы вычисления определенного интеграла**. Как и для неопрн. инт-ов (см. 8.1), сущ-ют три метода интв-ия опрн. инт-ов.

**1***. Непосредственное интегрирование. Если подынт. фк-ия имеет простой вид, то использованием св-в опрн. инт-а можно выч-ть инт-л непосредственно.

**п1**. $\int\limits_1^e \dfrac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[x-\ln x\right]_1^e = e - \ln e - e + \ln 1 = e - 1 - 1 + 0 = e - 2.$

**2***. Интегрирование подстановкой. Пусть требуется проинтв-ть $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, где $f(x)$ – довольно сложная фк. Цель интв-ия подн-ой состоит в получении простой подынт. фк-и введением новой пер-ой: $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_A^B f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_A^B \Phi(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_A^B = F(B) - F(A).$$

При удачной подн-е инт. $\int\limits_A^B \Phi(t)\mathrm{d}t$ инту-ся легче, чем $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**п2**. $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = 4,\ t = 2 \end{array} \right| = 2\int\limits_0^2 \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2\left[t - \ln(1+t)\right]_0^2 =$
$= 2(2 - \ln 3)$.

**п3**. $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = a,\ t = \pi/2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, a\cos t\mathrm{d}t = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} \times$

$\times \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$.

**3***. Интегрирование по частям. Фм-а интв-ия по частям для неопрн. инт-а имеет вид $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$. Отсюда и из фм-ы Ньютона-Лейбница следует фм-а интв-ия по частям для опрн. инт-а:

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u. \qquad (9)$$

**п4**. $\int\limits_1^2 \ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = \ln 4 -$
$- 2 + 1 = \ln 4 - 1$.

**п5**. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{\pi}{2} - 1$.

**5°. Несобственные интегралы**. В расв-мых выше опрн. инт-ах мы полагали, что пределы интв-ия $a$ и $b$ – конечные числа, а подынт. фк-я $f(x)$ в сгм-е $[a, b]$ огр-на, т.е. рас-ли собственные (сбт.) инт-ы. Теперь рас-им случаи, когда эти усл-я не выполняются:

**1***. Интегралы с бесконечными границами. Пусть $b = \infty$ или $a = \infty$.

**о1**. Если инт. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный предел ($A$) при $b \to \infty$ (рис. 7), то этот предел наз. несобственным (несбт.) инт-ом с беск. верхней границей фк-и $f(x)$ и обз. символом $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, т.е.

$$\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = A. \qquad (10)$$

В этом случае говорят, что несбт-ый инт-л $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сущ-ет или сходится (сх.). Если указанный предел не сущ-ет или равен беск-ти, то говорят, что несбт. инт-л не сущ-ет или расходится (рсх.).

Используя фм-у Ньютона-Лейбница, стн. (10) можно записать в виде

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[F(b)-F(a)]. \qquad (11)$$

Анч-но опр-ся несбт. инт-л с беск. нижней границей:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}[F(b)-F(a)]. \qquad (12)$$

Несбт. инт-л с двумя беск. границами опр-ся фм-ой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x, \qquad (13)$$

где $c$ – любая фксн. тч. оси $Ox$.

**п6**. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$ (сх.).

В дальнейшем (учитывая опр-ие несбт. инт-а) для удобства примеры будем записывать кратко: $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 + 1 = 1$.

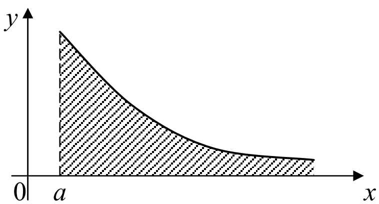



Рис. 7

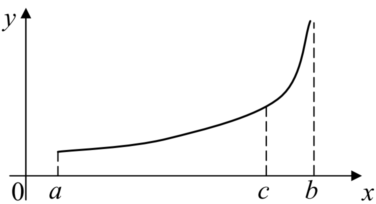



Рис. 8

**п7**. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty$ (рсх.).

**п8**. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (сх.).

Несбт. инт-ы (11)-(13) иногда наз-ют несбт. инт-ми первого рода.

**2***. Интегралы от разрывных функций. Пусть фк. $y = f(x)$ непр-на при $a \le x < b$, а в тч. $b$ имеет разрыв $\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty\right)$, т.е. $f(x)$ непр-на на сгм-е $[a, c]$ $\forall$ $c \in\, ]a, b[$.

**о2**. Если инт. $\int\limits_a^{c} f(x)\mathrm{d}x$ имеет конечный предел при $c \to b$ слева (рис. 8), то этот предел наз. несбт. инт-ом от разрывной фк. и обз-ся символом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{c\to b-0}\,[F(c)-F(a)]. \qquad (14)$$

В этом случае говорят, что несбт. инт-л $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ сущ-ет или сх-ся. Если указанный предел не сущ-ет или равен беск-ти, то говорят, что несбт. инт-л $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ не сущ-ет или рсх-ся.

Анч-но опр-ся несбт. инт-л разрывной фк. в тч. $x = a$:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{c\to a+0}\,[F(b)-F(c)]. \qquad (15)$$

Несбт. инт-л от разрывной фк. $f(x)$ в нек-ой внутренней тч. $c \in \,]a, b[$ опр-ся так:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \;+\; \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{d\to c-0}\int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x \;+\; \lim_{d\to c+0}\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (16)$$

Несбт. инт-ы (14)-(16) иногда наз. несбт. инт-ми второго рода.

**зм1**. При интв-и несбт. инт-ов как первого, так и второго рода иногда используют для удобства краткую запись (опуская пределы) с осторожностью, если при выч-и их первообразных $F(x)$ не возникают неопрн-ти вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$.

**п9**. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{c\to 1-0}\left(-\int\limits_0^c (1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x)\right) = \lim\limits_{c\to 1-0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]\Big|_0^c = \lim\limits_{c\to 1-0} 2\left(-\sqrt{1-c}+1\right) =$ $= 2$ (сх.) или кратко: $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \;=\; -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^1 = -\,2\cdot 0 + 2 = 2.$

**п10**. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{c\to 0+0}\int\limits_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{c\to 0+0}\left[\ln x\right]\Big|_c^1 = \lim\limits_{c\to 0+0}\,(\ln 1 - \ln c) = 0 - (-\infty) = \infty$ (рсх.).

$$\left(\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = \infty,\ \text{т.к.}\ \ln 0 = \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty\right).$$

**п11**. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} \;=\; \int\limits_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} \;+\; \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} \;=\; 3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^0 \;+\; 3\sqrt[3]{x}\Big|_0^1 \;= (0 - 3(-1)) + (3\cdot 1 -$ $- 0) = 3 + 3 = 6$ (сх.).

# ЛЕКЦИЯ 23

## 8.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

**1°. Вычисление площадей**. В 1°: 8.2 рас-ли выч-ие крвл. трапеции (рис. 1) в дек. крд-ах с помощью фм-ы:
$$S=\int_a^b y\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Анч-но выч-ся пщ. фигуры (рис. 2), прилегающей к оси $Oy$: $S=\int_\alpha^\beta x\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y\,.$ (2)

Фигура, огрн-я линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $[f_1(x)<f_2(x)]$, $x=a$, $x=b$ (рис. 3), выч-ся по фм-е
$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Если фк. $f(x)$ на сгм. $[a, b]$ меняет знак конечное число раз (рис. 4), то фигура, образованная линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ выч-ся так: $S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (где $f(c)=0$). (4)

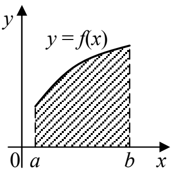


Рис. 1

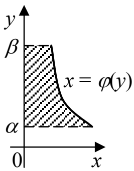


Рис. 2

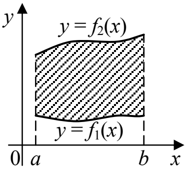


Рис. 3

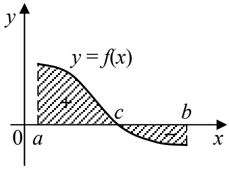


Рис. 4

**п1**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$, огр-ной пм. $y=3x$, осью $Ox$ и пм. $x=2$ (рис. 5), т.е. $\sigma$: $\{y=3x, x=0, x=2\}$ (или $\sigma=\{(x, y)\colon y=3x, x=0, x=2\}$).

Р. $S=\int_0^2 y\,\mathrm{d}x=3\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=3\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=3\cdot\frac{4}{2}=6$ кв. ед.

**п2**. Найти пщ. фигуры (рис. 6) $\sigma$: $\{y=x^3, y=8\}$.

Р. По (2) имеем $S=\int_0^8 x\,\mathrm{d}y=\int_0^8 y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y=\left.\frac{y^{4/3}}{4/3}\right|_0^8=\frac{3}{4}\left(2^3\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\cdot 16=12$ кв. ед.

**п3**. Выч-ть пщ. фигуры (рис. 7) $\sigma$: $\{y^2=9x, y=3x\}$.

Р. Совместно р-в систему ур-й, найдем пределы интв-ия: $9x=9x^2$, $x(x-1)=0\Rightarrow a=0$, $b=1$.

$$S=\int_0^1 [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(3\sqrt{x}-3x\right)\mathrm{d}x=3\left.\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}\right]\right|_0^1=3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\text{ кв. ед.}$$

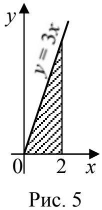


Рис. 5

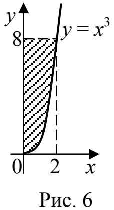


Рис. 6

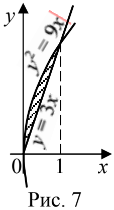


Рис. 7

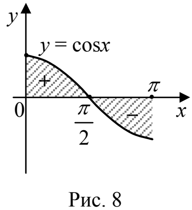


Рис. 8

**п4**. Найти пщ. фигуры (рис. 8) $\sigma$: $\{y=\cos x, x=0, x=\pi\}$.

Р. По (4) находим $S=\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-0-0+1=2$ ед.$^2$

Заметим, что п4 можно р-ть, и используя симч-ть фигуры: $\int\limits_0^{\pi} \left|\cos x\right| \mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{d}x = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1 = 2.$

**п5**. Выч-ть пщ. элс-а (рис. 9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Р. Выч-им пщ. $\dfrac{1}{4}$ части элс-а, лежащей в первой четверти системы крд-т:

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_0^a y\mathrm{d}x = \int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = a\sin t,\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \\ x = 0,\ t = 0;\ x = a,\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\ a\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \frac{ab}{4}\pi.$$ Тогда $S = \pi ab$.

Если $a = b = R$, то элс. вырождается в круг, и получим $S = \pi R^2$ – пщ. круга.

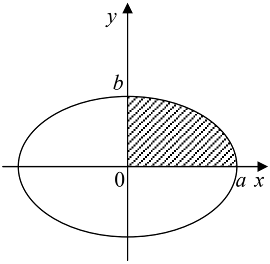



Рис. 9

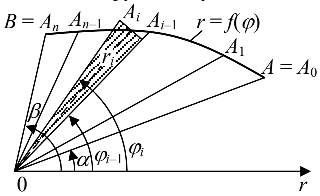



Рис. 10

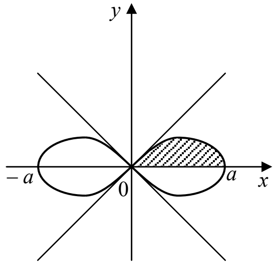



Рис. 11

Теперь выч-им **пщ. фигур, заданных в полярных крд-ах**.

**з1**. Найти пщ. сектора (рис. 10) $OAB$: $\{r = f(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\}$.

Р. I. Угол $AOB = [\alpha, \beta]$ разбиваем прзв-но на $n$ частей

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Рас-им элр. угол $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, обз-им через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ и выберем $\delta = \max\limits_i \Delta\varphi_i$.

II. Прзв-но выберем радиус $r_i$ в секторе $A_{i-1}OA_i$ и найдем пщ. этого сектора $\Delta S_i \approx \dfrac{\pi r_i^2}{2\pi}\Delta\varphi_i = \dfrac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$.

III. Выч-им прж-но пщ. всего сектора $S \approx \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i^2\Delta\varphi_i$ .

IV. Найдем предел этой суммы при $\delta \to 0$, т.е. точную пщ. всего сектора

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\Delta\varphi_i\ . \tag{5}$$

**п6**. Выч-ть пщ. фигуры, огрн-ой лемнискатой (рис. 11): $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

Р. Радиус-вк. опишет обл. с пщ., равной $\dfrac{1}{4}$ искомой пщ., если $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\dfrac{1}{4}S =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow S = a^2.$$

**2°. Вычисление объема тел**. Выч-им сначала объем тела прзвл. фигуры.

**з1**. Зная закон изменения (изм.) пщ-ди $S(x)$ поперечного сечения с пл-ю, прп-ой оси $Ox$ на сгм. $[a, b]$, найти объем $V$ этого тела (рис. 1).

I. Сгм. $[a, b]$ прзвл-но разобьем на $n$ частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Через тч-и деления $x_1, \ldots, x_{i-1}, \ldots, x_{n-1}$ проведем пл-ти, прп-ые оси $Ox$, к-ые отсекают тело по поперечным сечениям с пщ-ми $S(x_1)$, …, $S(x_{i-1})$, $S(x_i)$, …, $S(x_{n-1})$. Толщина каждого такого слоя равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$.

II. Найдем элр-ый объем слоя $\Delta V_i \approx S(x_i)\Delta x_i$.

III. Выч-им прж-но объем всего тела $V \approx \sum\limits_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$ .

IV. Найдем предел этой суммы при $\delta \to 0$, т.е. точный объем всего тела:

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i \,. \tag{1}$$

**п1**. Найти объем эллипсоида (элси.) (рис. 2): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Р. Проведем сечения прп. пл-ями к оси $Ox$: $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1$.

Отсюда и по п5 из 1° имеем: $S(x) = \pi b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\; c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Тогда $V = 2\int\limits_0^a S(x)\mathrm{d}x =$

$= 2\pi bc\int\limits_0^a\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi bc\left(x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi bc\left(a - \dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\pi abc$ ед.$^3$

Если $a = b = c = R$, то получим объем шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

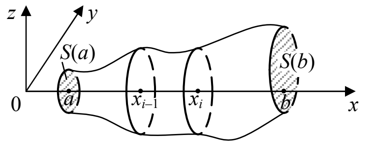



Рис. 1

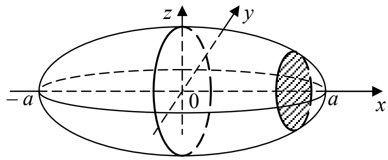



Рис. 2

Теперь рас-им объем тела вращения (врщ.).

**з2**. Найти объем тела $V_x$, образованного врщ-ем вокруг оси $Ox$ крвл. трапеции $aABb$, огрн-ой данной непр. линией $y = f(x)$ и пм-ми $x = a$, $y = b$ (рис. 3).

Р. Эта задача яв-ся част. случаем з1 и поперечное сечение $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$. Тогда по (1) имеем

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

Анч-но, если крв-я $x = \psi(y)$ врщ-ся вокруг оси $Oy$:

$$V_y = \pi\int_A^B x^2\mathrm{d}y = \pi\int_A^B \psi^2(y)\mathrm{d}y \,. \tag{3}$$

**зм1**. Вместо фм-ы (3) можно использовать и фм-у

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|\mathrm{d}x \quad (a \ge 0). \tag{4}$$

Д. $V_y = \pi\int\limits_A^B x^2\mathrm{d}y = \pi\int\limits_A^B \psi^2(y)\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{l} y = f(x),\ x = \psi(y) \\ y = A,\ x = a;\ y = B,\ x = b \\ \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\varphi\mathrm{d}x = \dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = 2\pi\int\limits_a^b x^2\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_a^b x\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

с учетом того, что $a \ge 0$.

**п2**. Найти объем тела, образованного врщ-ем синусоиды (рис. 4) вокруг оси $Ox$ в сгм. $[a, b] = [0, \pi]$.

Р. По фм. (2) имеем $V_x = \pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ куб. ед.

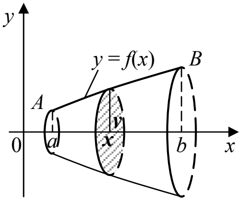


Рис. 3

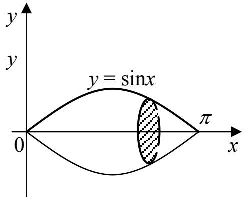


Рис. 4

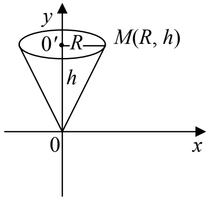


Рис. 5

**п3**. Найти объем конусообразной воронки (рис. 5) радиуса $R$ и высоты $h$.

Р. Напишем ур-ие пм-й, проходящей через тч-и $O(0, 0)$ и $M(R, h)$: $\frac{x-0}{R-0} = \frac{y-0}{h-0} \Rightarrow x = \frac{R}{h}y$.

Тогда по (3) имеем $V_y = \pi\int\limits_0^{h}x^2\mathrm{d}y = \pi\frac{R^2}{h^2}\int\limits_0^{h}y^2\mathrm{d}y = \pi\frac{R^2}{h^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{h} = \frac{1}{3}\pi R^2h$. Итак,

$$V_y = \frac{1}{3}\pi R^2h. \tag{5}$$

**п4**. Найти объем $V_x$ и $V_y$ тел врщ-я фигуры (рис. 6), огрн-ой крв-ми $y^2 = 2x$, $y^2 = 4(x-1)^3$.

Р. Находим пределы интв-ия $2x = 4(x-1)^3 \Rightarrow x = 2$, тогда $y = 2$, рис. 6. По (2) имеем

$$V_x = \pi\int\limits_0^{2}y_2^2\mathrm{d}x - \pi\int\limits_1^{2}y_1^2\mathrm{d}x = \pi\left(\int\limits_0^{2}2x\mathrm{d}x - 4\int\limits_1^{2}(x-1)^3\mathrm{d}(x-1)\right) = \pi\left(x^2\Big|_0^2 - (x-1)^4\Big|_1^2\right) = \pi(4-1) = 3\pi \text{ ед.}^3;$$

$$V_y = \pi\int\limits_0^{2}x_2^2\mathrm{d}y - \pi\int\limits_0^{2}x_1^2\mathrm{d}y = \pi\left(\int\limits_0^{2}\left(\frac{y^{2/3}}{2^{2/3}}+1\right)^2\mathrm{d}y - \int\limits_0^{2}\frac{y^4}{4}\mathrm{d}y\right) = \pi\left(\int\limits_0^{2}\left(\frac{y^{4/3}}{2^{4/3}} + 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 1\right)\mathrm{d}y - \frac{y^5}{20}\Bigg|_0^2\right) =$$

$$= \pi\left(\left(\frac{3y^{7/3}}{2^{4/3}\cdot 7} + \frac{2^{1/3}y^{5/3}}{5}\cdot 3 + y\right)\Bigg|_0^2 - \frac{32}{20}\right) = \pi\left(\frac{6}{7} + \frac{12}{5} + 2 - \frac{8}{5}\right) = \frac{128\pi}{35} \text{ ед.}^3$$

Расн-ые выше фм-ы применимы и тогда, когда крв. задана пармч. ур-ми.

**п5**. Найти объем врщ-ия вокруг оси $Oy$ фигуры, огрн-ой крв-ми $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ и осью $Ox$.

Р. При $t = 0$ имеем $x = a$, $y = 0$, при $t = \frac{\pi}{2}$ получим $x = 0$, $y = 0$, а при $t = \frac{\pi}{4}$ имеем $y = a$, т.е. $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le a$ (рис. 7). Используя фм-у (4), получим $V_y = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2}xy\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t\\ x = 0,\ t = \pi/2\\ x = a,\ t = 0\end{array}\right| =$

$$= 2\pi\int\limits_{\pi/2}^{0}a\cos t\cdot a\sin 2t(-a\sin t)\mathrm{d}t = \pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{\pi a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^4 t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi a^3}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2a^3}{4}.$$

**зм2**. Если крвл. сектор (рис. 10: 1°), огрн-ый крв-й $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ врщ-ся вокруг полярной оси, то объем тела врщ-я равен $V_r = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$. (6)

Д. Учитывая (5), из рис. 10: 1° получим $R_i = r_i\sin\varphi_i$, $h_i = r_i\cos\varphi_i$. Тогда $V_i = \frac{1}{3}\pi R_i^2h_i = \frac{1}{3}\pi r_i^3 \times$

$\times\cos\varphi_i\sin^2\varphi_i$ и $V_{i-1} = \dfrac{1}{3}\ \pi r_{i-1}^3 \cos\varphi_{i-1}\sin^2\varphi_{i-1}$. Отсюда в силу $r_i \approx r_{i-1}$, $\varphi_i \approx \varphi_{i-1}$ имеем $\Delta V_i = V_i - V_{i-1} \approx$

$\approx \dfrac{1}{3}\ \pi r_i^3 \cos\varphi_i(\sin^2\varphi_i - \sin^2\varphi_{i-1}) = \dfrac{1}{3}\ \pi r_i^3 \cos\varphi_i(\sin\varphi_i + \sin\varphi_{i-1})(\sin\varphi_i - \sin\varphi_{i-1}) \approx \dfrac{1}{3}\ \pi r_i^3 \cdot 2\sin\varphi_i(\sin\varphi_i\cos\varphi_i -$

$- \cos\varphi_{i-1}\sin\varphi_{i-1}) = \dfrac{2}{3}\ \pi r_i^3 \sin\varphi_i\sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \approx \dfrac{2}{3}\ \pi r_i^3 \sin\varphi_i\Delta\varphi_i$, где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} \approx \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1})$.

Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta\varphi_i$ и найдем предел интн-ой суммы при $\delta \to 0$ $V = \lim\limits_{\delta\to 0} \sum \Delta V_i = \dfrac{2}{3}\pi \times$

$\times \lim\limits_{\delta\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} r_i^3 \sin\varphi_i\Delta\varphi_i = \dfrac{2}{3}\ \pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ ■

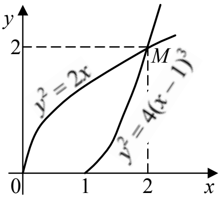



Рис. 6

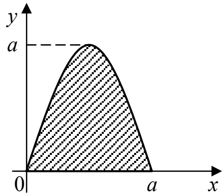



Рис. 7

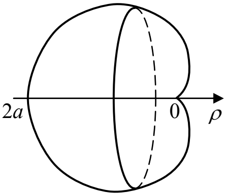



Рис. 8

**п6**. Кардиоида $r = a(1 - \cos\varphi)$ врщ-ся вокруг полярной оси. Найти объемы тел врщ-ия (рис. 8).

Р. По (6) получим $V_r = \dfrac{2}{3}\pi \displaystyle\int\limits_0^{\pi} a^3(1-\cos\varphi)^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{2a^3}{3}\pi \int\limits_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^3\mathrm{d}(1-\cos\varphi) = \dfrac{2\pi a^3}{3} \times$

$\times \left.\dfrac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\right|_0^{\pi} = \dfrac{2\pi a^3}{3}\cdot\dfrac{16}{4} = \dfrac{8}{3}\pi a^3.$

**зм3**. Значительно проще выч-ие объемов тел производится с помощью кратных инт-ов. Поэтому мы здесь ограничились простейшими задачами.

**3°. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения**. Рас-им сд-ие

**з1** (длина дуги кривой). Пусть крв-я (рис. 1) $y = f(x)$ непр-на и диф-ма в сгм-е $[a, b]$. Найти длину дуги от $A$ до $B$.

Р. Дугу $AB$ разделим прзв-но на $n$ частей: $\overset{\frown}{AM_1}$, $M_1M_2$, …, $M_{i-1}M_i$, …, $M_{n-1}B$. Обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и выч-им длину дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ через ломаную $\Delta l_i$ с учетом т3 (Лагранжа): 7.2, т.е. $M_{i-1}M_i \approx \Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \approx \Delta x_i\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$, где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Отсюда прж-но найдем длину всей ломаной $l \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$. Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$. За длину дуги примем предел, к к-му стремится ломаная при $\delta \to 0$, т.е.

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x_i\ . \qquad (1)$$

Если крв. задана в пармч. форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, где $x(t)$, $y(t)$ непр-ны и диф-мы (причем $x'(t) \ne 0$) в сгм. $[\alpha, \beta]$, то $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, и вместо (1) получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\,x'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\ . \qquad (2)$$

Если крв. задана в полярных крд., т.е. $r = f(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то сначала переходим к крв-й в пармч. форме, затем используем (2):

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x'(\varphi) = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi \end{array}\right| \; [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = [f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2 = r'^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \qquad (3)$$

**п1**. Выч-ть длину дуги крв-й $y = x^{\frac{3}{2}}$ от тч. $A(0, 0)$ до $B(4, 8)$ (рис. 2).

Р. Находим $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{9}{4}x$. Тогда $l = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{9}\int\limits_0^4 \left(1 + \dfrac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(1 + \dfrac{9}{4}x\right) =$

$$= \frac{4}{9}\left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8\left(10\sqrt{10} - 1\right)}{27}.$$

**п2**. Опр-ть длину одной арки циклоиды (рис. 3): $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Р. Находим $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$; $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = a\sqrt{-1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$

$= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\sin\dfrac{t}{2}$. Тогда по (2) имеем $l = \int\limits_0^{2\pi} \sin\dfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -4a\cos\left.\dfrac{t}{2}\right|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a$.

**п3**. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 4).

Р. Находим $r' = -a\sin\varphi$, $\sqrt{r'^2 + r^2} = a\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi} = a\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} = 2a\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Тогда $l = 2 \cdot 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\dfrac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 8a\sin\left.\dfrac{\varphi}{2}\right|_0^{\pi} = 8a$.

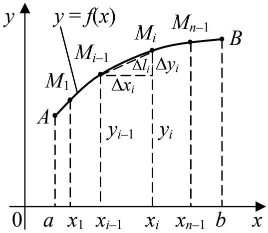



Рис. 1

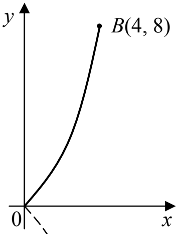



Рис. 2

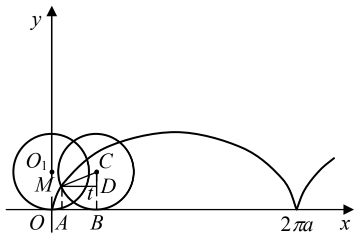



Рис. 3

**з2** (площадь поверхности вращения). Пусть дана пвх-ть, образованная врщ-ем вокруг оси $Ox$ крв-й $y = f(x)$, непр-ой и дифм-ой на промежутке $[a, b]$ Найти пщ. этой пвх. (рис. 5).

Р. Дугу $AB$ разделим прзв-но на $n$ частей: $AM_1$, $M_1M_2$, …, $M_{i-1}M_i$, …, $M_{n-1}B$. Ств-но сгм. $[a, b]$ делится на $n$ частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и выч-им длину хорды с учетом т3 (Лагранжа): 7.2: $\Delta l_i = M_{i-1}M_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} =$

$= \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$, где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Каждая хорда $\Delta l_i$ при врщ-и опишет усеченный конус, пщ. пвх-ти к-го равна

$$\Delta P_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta l_i = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Отсюда найдем пщ. пвх-ти, описанной ломаной:

$$P_n = 2\pi\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\,.$$

Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$ и найдем предел этой суммы при $\delta \to 0$, сдт-но, $x_{i-1} \to \xi_i$, $x_i \to \xi_i$. Если этот предел сущ-ет, то он наз. пщ-ю расв. пвх-ти врщ-я и обз-ся:

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\,. \qquad (4)$$

Если крв. задана пармч. ур-ми $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$), то вместо (4) получим

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (5)$$

Если же крв. задана в полярных крд. (см. (3)) $r = f(\varphi)$ ($\alpha \le \varphi \le \beta$), то

$$P = \int_\alpha^\beta y\sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_\alpha^\beta f(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \qquad (6)$$

**п4**. Опр-ть пщ. пвх-ти парби-да, образованного врщ-ем вокруг оси $Ox$ дуги парб-ы $y^2 = 4x$ при $0 \le x \le 3$ (рис. 6).

Р. Находим $y = 2\sqrt{x}$ , $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y'^2 = \dfrac{1}{x}$, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ . Тогда по (4) имеем $P_x = 2\pi\displaystyle\int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = 4\pi\left.\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 = \frac{8\pi}{3}\,(8-1) = \frac{56}{3}\,\pi.$

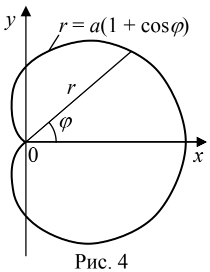


Рис. 4

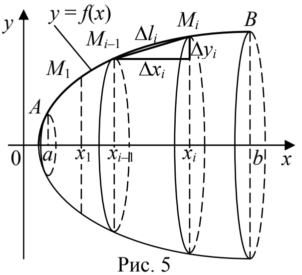


Рис. 5

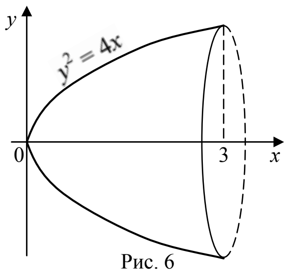


Рис. 6

**п5**. Найти пщ. пвх-ти, образованной врщ-ем крв-й $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси $Ox$.

Р. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ . По (4) и с учетом симч-ти фигуры найдем: $P_x = 2\pi\cdot 2\displaystyle\int_0^R y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x =$

$= 4\pi\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi R\int_0^R \mathrm{d}x = 4\pi R x\Big|_0^R = 4\pi R^2$ (пвх-ть шара).

**п6**. Найти пщ. пвх-ти одной арки циклоиды (рис. 3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, образованной врщ-ем вокруг оси $Ox$.

Р. Находим $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$; $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$

$= a\sqrt{2(1-\cos t)} = 2a\sin\dfrac{t}{2}$ . Тогда по (5) получим $P = 2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,\times$

$\times\,\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t = 8\pi a^2\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\frac{3t}{2}\mathrm{d}t = -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2\left.\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\right|_0^{2\pi} =$

$= -16\pi a^2\left(-1+\frac{1}{3}\ -1+\frac{1}{3}\right)\ = -16\pi a^2\left(-\frac{4}{3}\right)\ =\ \frac{64}{3}\ \pi a^2.$

**4°. Вычисление механических и физических величин**. Рас-им сд-ие подпункты.

**1***. Общая схема вычисления механических и физических величин. Пусть требуется найти нек-ую механическую или физическую вел-у $Q$, имеющую опрн. зн-ие $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Предполагается, что $Q$ обладает св-ом линс-ти и аддс-ти в этом промежутке.

Как мы знаем, для р-ия подобных задач используется стдн. схема:

I. Сгм. $[a, b]$ прзвл-но разбиваем на $n$ частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Прзв-но выбираем тч. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, обз-ем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

II. Выч-ем $\Delta Q_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i = k\Delta x_i$ (линс-ть $Q$ отс-но $\Delta x_i$).

III. Находим $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta Q_i\ \approx\ \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (аддс-ть $Q$).

IV. Обз-им через $\delta = \max\limits_{i} \Delta x_i$ и найдем предел суммы при $\delta \to 0$:

$$Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ =\ \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \tag{1}$$

Подынт. врж-ие $f(x)\mathrm{d}x$, дающее прж. зн-ие вел-ы $Q$ на сгм. $[x, x + \mathrm{d}x]$, наз. эл-ом вел-ы $Q$ и обз-ся через $\mathrm{d}Q$, т.е.

$$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Если врж-ие (2) найдено, что нет нх-ти сост-ть инт. сумму и переходить к пределу (т.е. выполнять шаги I-IV), а дт-но это врдж-е проинтв-ть:

$$Q = \int_a^b \mathrm{d}Q\ =\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ . \tag{3}$$

В кач-ве примеров рас-им сд. задачи:

**з1** (путь, пройденный точкой). Пусть тч-а двж-ся по пм-й с пер-ой скр-ю $V = V(t)$. Найти путь, пройденный тч-ой за вр. $[t_1, t_2]$.

Р. Возьмем элр-ый промежуток вр-и $[t, t + \mathrm{d}t] \subset [t_1, t_2]$. За это вр. тч. пройдет путь $\mathrm{d}S = V(t)\mathrm{d}t$. Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\mathrm{d}t\ . \tag{4}$$

**з2** (работа силы). Пусть материальная тч. двж-ся вдоль оси $Ox$ в промежутке $[a, b]$ под действием пер-ой силы $F = F(x)$, нпв-е к-ой совпадает с нпв-ем двж-ия. Найти работу, произведенную силой в этом нпв-и.

Р. Возьмем элр. перемещение $[x, x + \mathrm{d}x] \subset [a, b]$. Работа силы на этом промежутке равна $\mathrm{d}A = F(x)\mathrm{d}x$. Отсюда

$$A = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x\ . \tag{5}$$

**п1**. Сжатие $S$ винтовой пружины прцн-но приложенной силе $F$. Выч-ть работу силы $F$ при сжатии пружины на 5 см, если для сжатия ее на 1 см нужна сила 1 кг.

Р. По усл-ю $F = KS$, где $K$ – коэф. прцн-сти. При $S$ = 1 см = 0,01 м $F$ = 1 кг, т.е. $1 = 0{,}01K$, откуда $K = 100$. Тогда $F = 100S$. Возьмем элр. сжатие $[S, S + \mathrm{d}S] \subset [0; 0{,}05]$. Работа сж-ия равна $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}S = 100S\mathrm{d}S$. Тогда

$$A = \int_0^{0{,}05} 100S\mathrm{d}S\ = 100 \cdot \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^{0{,}05} = 0{,}125 \text{ кгм.}$$

**2***. Статистические моменты и координаты центра тяжести. Пусть на пл-ти $xOy$ дана система материальных тч-к $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, …, $P_n(x_n, y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (рис. 1).

Статистическими (стсч.) моментами $M_x^i$ и $M_y^i$ массы $m_i$ отс-но осей $Ox$ и $Oy$ наз. пзв-ие $y_i m_i$ и $x_i m_i$, т.е.

$$M_x^i = y_i m_i,\ M_y^i = x_i m_i, \tag{6}$$

а стсч. моменты системы опр-ся как их суммы

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i\ ,\ M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i\ . \tag{7}$$

Если все массы системы сосредоточить в одной тч. $P(\bar{x}, \bar{y})$, назм-ой центром тяжести, то вместо (7) получим

$$M_x = \bar{y}m\ ,\ M_y = \bar{x}m\ . \tag{8}$$

Откуда, учитывая (7), найдем центр тяжести $\overline{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $\overline{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$. (9)

Теперь рас-им крвл. трапецию (рис. 2) $aABb$: $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Предположим, что по этой трапеции равномерно распределена (рсп.) масса, т.е. плотность $\gamma = \text{const}$. Найти стсч. моменты и центр тяжести.

Возьмем элр-ый сгм. $[x, x + \mathrm{d}x] \subset [a, b]$. Тогда масса полоски равна $\mathrm{d}m = \gamma y \mathrm{d}x$. (10)

Будем считать, что эта масса сосредоточена в центре полоски, т.е. в тч. $P\left(x, \dfrac{y}{2}\right)$, т.к. $\mathrm{d}x$ – малая вел-а. Тогда элр-ые стсч. моменты трапеции отс-но осей врз-ся фм-ми:

$$\mathrm{d}M_x = \mathrm{d}m \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\gamma y^2 \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}M_y = \mathrm{d}m \cdot x = \gamma xy\mathrm{d}x, \tag{11}$$

инту-я к-ые по отрезку $[a, b]$, получим стсч. моменты $M_x = \dfrac{1}{2}\gamma\displaystyle\int_a^b y^2\mathrm{d}x$, $M_y = \gamma\displaystyle\int_a^b xy\mathrm{d}x$. (12)

Теперь, используя (7), (10) и (12), легко найти центр тяжести фигуры

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy\mathrm{d}x}{\int_a^b y\mathrm{d}x},\ \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\mathrm{d}x}{\int_a^b y\mathrm{d}x}. \tag{13}$$

**зм1**. Если плотность пер-я, т.е. $\gamma = \gamma(x, y)$, то в стн-ях (12), (13) вел-у $\gamma(x, y)$ надо взять под инт-ом.

**зм2**. Если крвл. трапеция задана в виде $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_1(x) < f_2(x))$, $x = a$, $x = b$, то вместо (11)-(13) можно взять ($\gamma = \text{const}$): $\mathrm{d}M_x = \dfrac{1}{2}\gamma\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]$, $\mathrm{d}M_y = \gamma x\,[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$, (14)

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x,\ M_y = \gamma\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x, \tag{15}$$

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b\left[f_2(x) - f_1(x)\right]\mathrm{d}x},\ \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b\left[f_2(x) - f_1(x)\right]\mathrm{d}x}. \tag{16}$$

Пусть теперь требуется найти стсч. моменты и центр тяжести материальной крв-й $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ с пст. плотностью $\gamma$ (рис. 3).

Т.к. крв-я непр-я, то вместо прщ-й пер-ых можно взять их диф-лы: $\mathrm{d}x \approx \Delta x_i$, $\mathrm{d}y \approx \Delta y_i$. Тогда $\mathrm{d}l \approx \Delta l_i = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$. Отсюда легко найти массу элр-ых дуг, ствщ-их подсгм-у $[x, x + \mathrm{d}x]$ $\quad \mathrm{d}m = \gamma\mathrm{d}l = \gamma\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$. (17)

Отсюда, анч-но (11)-(13), получим

$$\mathrm{d}M_x = y\mathrm{d}m = \gamma y\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}M_y = x\mathrm{d}m = \gamma x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$M_x = \gamma\int_a^b y\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x,\ M_y = \gamma\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x, \tag{19}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}. \tag{20}$$

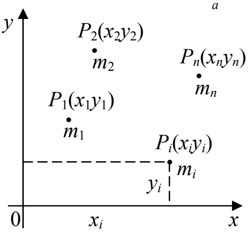



Рис. 1

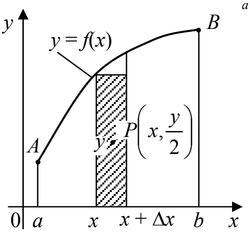



Рис. 2

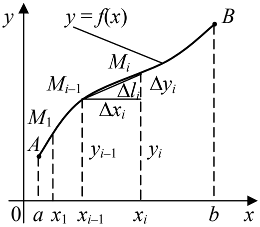



Рис. 3

**п2**. Опр-ть центр тяжести парб-ы $y^2 = ax$, отсекаемого пм-й $x = a$ (рис. 4).

Р. Здесь $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, поэтому $\bar{y} = 0$, а по (13) $\bar{x} = \dfrac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x}{2\int\limits_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x} = \dfrac{\sqrt{a}\,\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \dfrac{3}{5}x\Big|_0^a = \dfrac{3}{5}\,a.$

**п3**. Найти центр тяжести полуокр-ти $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной над осью $Ox$ (рис. 5).

Р. Находим $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\mathrm{d}l = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$,

$\bar{x} = 0$, т.к. полуокр-ть симч-на отс-но оси $Oy$. По (20) находим $\bar{y} = \dfrac{\int\limits_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x} =$

$$= \frac{a\int\limits_{-a}^a \mathrm{d}x}{a\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^a} = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

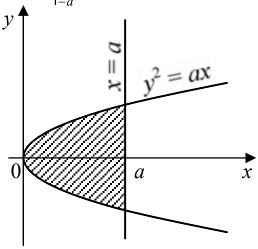



Рис. 4

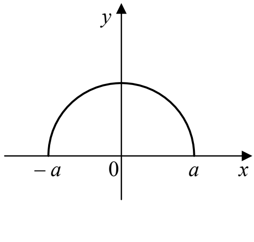



Рис. 5

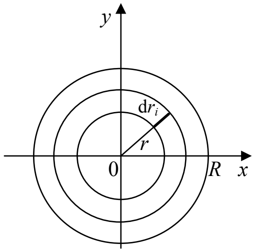



Рис. 6

**3***. Момент инерции геометрической фигуры. Пусть на пл-ти $xOy$ дана система материальных тч-к $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, …, $P_n(x_n, y_n)$ с массами $m_1$, $m_2$, …, $m_n$ (рис. 1).

Момент инерции системы материальных тч-к отс-но тч-и $O$ опр-ся так:

$$J_0 = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + y_i^2\right)m_i = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i. \tag{21}$$

Теперь рас-им момент инерции нек-ых фигур для непр-го случая (см. 2*).

Пусть требуется найти момент инерции материальной крвл. трапеции ($y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, рис. 2) с пст. плотностью $\gamma$.

Согласно (10) находим элр. массу на подсгм-е $[x, x + \mathrm{d}x]$: $\mathrm{d}m = \gamma y\mathrm{d}x$.

Предполагая, что масса полоски сосредоточена в тч. $P\left(x, \frac{y}{2}\right)$, найдем элр. момент инерции этой полоски:

$$\mathrm{d}J_0 = \left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}m = \gamma y\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}x. \tag{22}$$

Откуда, инту-я по отрезку $[a, b]$, получим

$$J_0 = \gamma\int_a^b y\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}x\ . \tag{23}$$

Пусть теперь требуется найти момент инерции материальной непр. крв. $y = f(x)$ на сгм. $[a, b]$ с пст. плотностью $\gamma$ (рис. 3).

Используя (17), находим элр-ый момент инерции

$$\mathrm{d}J_0 = (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \gamma(x^2 + y^2)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{24}$$

Тогда
$$J_0 = \gamma\int_a^b \left(x^2 + f^2(x)\right)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{25}$$

**п4**. Найти момент инерции одн-го круга $x^2 + y^2 = R^2$ отс-но центра (рис. 6).

Р. Находим элр. массу кольца подсгм-а $[r, r + \mathrm{d}r]$:

$$\mathrm{d}m = \delta 2\pi r\mathrm{d}r \ (\delta - \text{пвх-я масса}),$$

откуда легко опр-ть элр. момент инерции

$$\mathrm{d}J_0 = r^2\mathrm{d}m = \delta 2\pi r^3\mathrm{d}r.$$

Тогда
$$J_0 = 2\pi\delta\int_0^R r^3\mathrm{d}r = 2\pi\delta\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{2}\pi\delta R^4. \tag{26}$$

Если дана масса круга $M$, то пвх. масса плотности $\gamma$ опр-ся так:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}; \tag{27}$$

подставив ее в (26), получим

$$J_0 = \frac{1}{2}MR^2. \tag{28}$$

Если имеем круглый цлн., радиус осн-ия к-го $R$ и масса $M$, то его момент инерции отс-но оси врж-ся фм-ой (28).

**п5**. Найти момент инерции окр-ти $x^2 + y^2 = R^2$.

Р. Находим $m = 2\pi R\gamma$, откуда $J_0 = mR^2 = 2\pi\gamma R^3$.

**п6**. Найти: 1) стсч. момент и момент инерции конуса отс-но его осн-ия; 2) момент инерции конуса отс-но его оси; 3) момент инерции шара радиуса $R$ отс-но его центра.

Р. 1) Обз-им радиус осн-ия и высоту конуса через $R$ и $H$ (рис. 7). Выделим из конуса элр-ый диск радиуса $r$, прл-й осн-ию, отстоящий от осн-ия на рст-и $x$ и имеющий толщину $\mathrm{d}x$, т.е. $[x, x + \mathrm{d}x] \subset [0, H]$. Из подобия туг-ов (рис. 7) имеем $\frac{r}{H} = \frac{H - x}{H}$. Отсюда $r = \frac{R}{H}(H - x)$, и объем диска будет равен $\pi r^2\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{H^2}(H - x)^2\mathrm{d}x$. Все тч-и диска лежат на рст-и $x$ от осн-ия конуса, и поэтому

$$\mathrm{d}M = \pi\frac{R^2}{H^2}(H - x)^2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}J = \pi\frac{R^2}{H^2}(H - x)^2x^2\mathrm{d}x.$$

Тогда

$$M = \pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H (H-x)^2 x\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H \left(H^2x - 2Hx^2 + x^3\right)\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{H^2}\left[H^2\frac{x^2}{2} - 2H\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^H =$$

$$= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{1}{12}\pi R^2H^2, J = \pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H (H-x)^2x^2\mathrm{d}x =$$

$$= \pi\frac{R^2}{H^2}\int\limits_0^H \left(H^2x^2 - 2Hx^3 + x^4\right)\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{H^2}\left[H^2\frac{x^3}{3} - H\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^H = \pi R^2H^3\frac{10-15+6}{30} = \frac{1}{30}\pi R^2H^3.$$

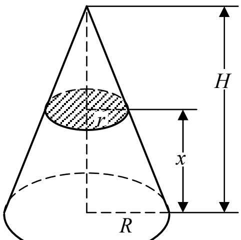


Рис. 7

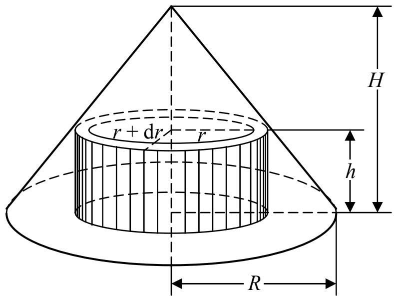


Рис. 8

2) Выделим (рис. 8) на осн-и конуса элр. кольцо радиусами $r$ и $r + \mathrm{d}r$ кругов, центры к-ых совпадают с центром осн-ия конуса радиуса $R$. Рас-им цлнч. пвх-ти, для к-ых эти окр-ти служат нпвщ-ми, а образующие прл-ны оси конуса. Объем элр-го тела (кольца) равен $\mathrm{d}v = 2\pi R\mathrm{d}r \cdot h$, где $h$ – высота тела. Из подобия туг-ов $\dfrac{h}{H} = \dfrac{R-r}{R}$, откуда $h = \dfrac{H}{R}(R-r)$ и

$$\mathrm{d}v = 2\pi\frac{H}{R}r(R-r)\mathrm{d}r.$$

Рст-ия от всех тч-к элр. тела до оси конуса равны $r$ и поэтому

$$\mathrm{d}J = 2\pi\frac{H}{R}r^3(R-r)\mathrm{d}r.$$

Значит,

$$J = 2\pi\frac{H}{R}\int\limits_0^R r^3(R-r)\mathrm{d}r = 2\pi\frac{H}{R}\int\limits_0^R \left(Rr^3 - r^4\right)\mathrm{d}r = 2\pi\frac{H}{R}\left[R\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^R = 2\pi HR^4\frac{5-4}{20} = \frac{1}{10}\pi HR^4.$$

3) Выделим элр. шаровой пояс между двумя концентрическими шаровыми пвх-ями радиусов $r$ и $r + \mathrm{d}r$. Объем такого эл-а равен $\mathrm{d}v = 4\pi r^2\mathrm{d}r$. Поскольку рст-ия до тч-к эл-та от центра шара равны $r$, то $\mathrm{d}J = 4\pi r^4$. Отсюда получим

$$J = \int\limits_0^R 4\pi r^4\mathrm{d}r = 4\pi\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^R = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

## 8.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### 8.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое первообразная фк-я и неопрн. инт-л?
2. Как связаны операции интв-ия и дифв-ия? Приведите св-ва неопрн. инт-а.
3. Приведите методы интв-ия неопрн. инт-а с примерами.
4. Что вы знаете об интв-ии рац. фк-й? В чем заключается суть метода неопрн. коэф-ов?
5. Какие иррац. фк-и можно интв-ть и какими способами?
6. Приведите методы интв-ия тригч. фк-й.
7. Сформулируйте теорему Коши в связи с понятием о «неберущихся» инт-ах.

**Упражнения для самостоятельной работы**

**у1**. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$. 1*. Выч-ть $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx$.

**у2**. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}x + C.$

2*. Найти $\int \left(\frac{6}{2x^2+9} - \frac{12}{2x^2-9}\right)dx$.

**у3**. $\int \frac{1+\cos^2 t}{1+\cos 2t}dt = \int \frac{1+\cos^2 t}{2\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\cos^2 t}dt + \int dt\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}t + t) + C.$

3*. Найти $\int \frac{a+\sin^3 x}{b-b\cos 2x}dx$.

**у4**. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{2\left(3-x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2/3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2/3}} + C.$

4*. Выч-ть $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$.

**у5**. $\int \frac{xdx}{(x+4)^4} = \left|\begin{matrix} x+4=t \\ x=t-4 \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t-4}{t^4}dt = \int\left(\frac{1}{t^3} - \frac{4}{t^4}\right)dt = \int t^{-3}dt - 4\int t^{-4}dt = \frac{t^{-2}}{-2} - 4\frac{t^{-3}}{-3} +$

$+ C = -\frac{1}{2t^2} + \frac{4}{3t^3} + C = -\frac{1}{2(x+4)^2} + \frac{4}{3(x+4)^3} + C$. 5*. Найти $\int \frac{x^7dx}{\left(1+x^4\right)^2}$.

**у6**. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \left|\begin{matrix} e^x+1=t^4,\ e^x=t^4-1,\ e^xdx=4t^3dt \\ e^{2x}dx=e^xe^xdx=(t^4-1)4t^3dt \end{matrix}\right| = 4\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)}{t}dt = 4\int\left(t^6-t^2\right)dt = \frac{t^7}{7} -$

$- \frac{t^3}{3} + C = 4\left(\frac{1}{7}\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^7} + \frac{1}{3}\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}\right) + C$. 6*. Найти $\int te^{2-3t^2}dt$.

**у7**. $\int \sqrt[3]{(4-3x)^2}dx = -\frac{1}{3}\int(4-3x)^{\frac{2}{3}}d(4-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}\sqrt[3]{(4-3x)^5} + C.$

7*. Найти $\int \sqrt[4]{(3-2x)^3}dx$.

**у8**. $\int x^2\cos\left(x^3+5\right)dx = \left|\begin{matrix} x^3+5=t,\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=1/3\ dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{\sin\left(x^3+5\right)}{3} + C.$

8*. Найти $\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\cos(x^3+5)}$.

**у9**. $\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+4}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x^3}{\sqrt{(y^3)^2+4}} = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+4}\right) + C$. 9*. Найти $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\mathrm{d}x$.

**у10**. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\mathrm{tg}x) = \frac{(\mathrm{tg}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$. 10*. Найти $\int\left(1+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3 \sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$.

**у11**. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)\ln(3x-1)} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\ln(3x-1))}{\ln(3x-1)} = \frac{1}{3}\ln[\ln(3x-1)] + C$. 11*. Найти $\int \frac{\ln(x-2)}{x}\mathrm{d}x$.

**у12**. $\int \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{e-e^{-2x}} = \int \frac{\mathrm{d}e^{-x}}{e-(e^{-x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{e}}\ln\left|\frac{\sqrt{e}+e^{-x}}{\sqrt{e}-e^{-x}}\right| + C$. 12*. Найти $\int \frac{p^3\mathrm{d}p}{(a^2-b^2p^4)^2}$.

**у13**. $\int \frac{x+\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{18}\int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-9x^2) -$

$-\frac{1}{3}\int \arccos 3x\,\mathrm{d}(\arccos 3x) = -\frac{1}{18}\frac{(1-9x^2)^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{3}\frac{(\arccos 3x)^2}{2} + C = -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{6}(\arccos 3x)^2 + C.$

13*. Найти $\int \frac{5x-3}{4x^2+3}\mathrm{d}x$.

**у14**. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{3-x}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{3}} + C$. 14*. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x}}$.

**у15**. $\int (3x^2-x+4)e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} u = 3x^2-x+4,\ \mathrm{d}v = e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (6x-1)\mathrm{d}x,\ v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array}\right| = -2(3x^2-x+4)e^{-\frac{x}{2}} + \int (6x-1)e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x =$

$= \left|\begin{array}{l} u = 6x-1,\ \mathrm{d}v = e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x,\ v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array}\right| = -2(3x^2-x+4)e^{-\frac{x}{2}} + 2[-2(6x-1)e^{-\frac{x}{2}} + 12\int e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x] = -2(3x^2-x+$

$+4)e^{-\frac{x}{2}} + \left[-2(6x-1)e^{-\frac{x}{2}} - 24e^{-\frac{x}{2}}\right] + C = -(6x^2+22x+52)e^{-\frac{x}{2}} + C$. 15*. Найти $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

**у16**. $\int \lg_2(1-3x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln(1-3x)}{\ln 2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\int \ln(1-3x)\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} u = \ln(1-3x),\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\frac{3\mathrm{d}x}{1-3x},\ v = x \end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$

$\times\left[x\ln(1-3x) + \int \frac{3x\mathrm{d}x}{1-3x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x\ln(1-3x) + \int\left(4+\frac{1}{1-3x}\right)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x\ln(1-3x) + x - \frac{1}{3}\ln(1-3x)\right] +$

$+ C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)\ln(1-3x) - x\right] + C$. 16*. Найти $\int (x^3-27)\ln 2x\,\mathrm{d}x$.

Найти инт-ы у17-у20, применив сначала ствщ-ю замену пер-ой, а затем интв-ие по частям.

**у17**. $\int e^{3x}\cos e^x\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} e^x = t,\ e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ e^{3x}\mathrm{d}x = e^{2x}e^x\mathrm{d}x = t^2\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int t^2\cos t\mathrm{d}t = t^2\sin t - 2\int t\sin t\mathrm{d}t = t^2\sin t - 2(-t\cos t +$

$+ \int \cos t\mathrm{d}t) = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t + C = (e^{2x}-2)\sin e^x + 2e^x\cos e^x + C$. 17*. Найти $\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x$.

**у18**. $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \arcsin x = t,\ x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int t^2\cos t\mathrm{d}t = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t + C = [(\arcsin x)^2 -$

$-2]\sin\arcsin x + 2\arcsin x\cdot\cos\arcsin x + C = [(\arcsin x)^2 - 2]x + 2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2} + C.$

18*. Выч-ть $\int t^3 \sin t^2 \mathrm{d}t$.

**у19**. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = 2\int \operatorname{arctg} t\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} t,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\ v = t \end{matrix} \right| = 2t\operatorname{arctg} t - 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} =$

$= 2t\operatorname{arctg} t - \ln(1 + t^2) + C = 2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln(1 + x) + C$. 19*. Найти $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

**у20**. $\int \cos(2\ln x)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \ln x = t,\ x = e^t \\ \mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int e^t \cos 2t\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = e^t,\ \mathrm{d}v = \cos 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t,\ v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} e^t\sin 2t - \frac{1}{2} \times$

$\times \int e^t \sin 2t\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = e^t,\ \mathrm{d}v = \sin 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t,\ v = \frac{1}{2}\cos 2t \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} e^t\sin 2t + \frac{1}{4} e^t\cos 2t - \frac{1}{4}\int e^t \cos 2t\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{5}{4}\int e^t \cos 2t\mathrm{d}t =$

$= \frac{1}{2}e^t\left(\sin 2t + \frac{\cos 2t}{2}\right) \Rightarrow \int e^t \cos 2t\mathrm{d}t = \frac{2}{5}e^t\left(\sin 2t + \frac{\cos 2t}{2}\right) + C$. Тогда $\int \cos(2\ln x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5} x \times$

$\times \left(\sin(2\ln x) + \frac{1}{2}\cos(2\ln x)\right) + C$. 20*. Найти $\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$.

**у21**. $\int(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{sh}\omega)\mathrm{d}\omega$. О: $\omega\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch}\omega + C$.

**у22**. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2e^x\mathrm{d}x}{(e^x)^2+1} = 2\int \frac{\mathrm{d}e^x}{(e^x)^2+1} = 2\operatorname{arctg} e^x + C$.

22*. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x}$. Ук: $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

**у23**. $\int \frac{\operatorname{sh} 2\theta}{3 + 4\operatorname{ch}^2 2\theta}\mathrm{d}\theta$. О: $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{ch} 2\theta}{\sqrt{3}} + C$.

**у24**. $\int x^3 \operatorname{ch}(3x - 2)\mathrm{d}x$. О: $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}(3x - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}(3x - 2) + C$.

**Задание для кр. работы**: по образцу примеров 8.1 и у1-у24 р-ть задачи 1-20.

1. 1) $\int \sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{4x-1}{x^2 - 4x + 8}\mathrm{d}x$; 3) $\int \ln x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

2. 1) $\int (\ln x)^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$; 2) $\int \frac{5x+8}{x^2 + 2x + 5}\mathrm{d}x$; 3) $\int (2x+1)\sin 3x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x+2}{x^3-8}\mathrm{d}x$.

3. 1) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{2x-2}{x^2 + 4x + 8}\mathrm{d}x$; 3) $\int (x-1)e^{2x}\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

4. 1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{8x-3}{x^2 + 6x + 10}\mathrm{d}x$; 3) $\int x\cos 2x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}\mathrm{d}x$.

5. 1) $\int e^{-x^2} x\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{7x+3}{x^2 - 4x + 5}\mathrm{d}x$; 3) $\int \operatorname{arctg} 2x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}\mathrm{d}x$.

6. 1) $\int \frac{x}{2+x^4}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{9x+10}{x^2 - 6x + 10}\mathrm{d}x$; 3) $\int (5x+1)\ln x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}\mathrm{d}x$.

7. 1) $\int \sqrt{\ln x}\frac{\mathrm{d}x}{x}$; 2) $\int \frac{3x+10}{x^2 - 8x + 10}\mathrm{d}x$; 3) $\int (8x-2)\sin 5x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

8. 1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{3x+7}{x^2 + 8x + 17}\mathrm{d}x$; 3) $\int (x-3)e^{-2x}\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

9. 1) $\int \frac{x}{2x^4+5}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$; 3) $\int \sqrt{x}\ln 3x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

10. 1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; 2) $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x$; 3) $\int (2x+8)e^{-7x}\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{2x}{x^3-1}\mathrm{d}x$.

11. 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{8x-7}{x^2+10x-29}\mathrm{d}x$; 3) $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{3x-1}{x(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

12. 1) $\int \frac{x^2}{2x^3+3}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{11x-3}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x$; 3) $\int (3x+7)\cos 5x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{5x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

13. 1) $\int \sqrt{5x^4+3}\,x^3\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20}\mathrm{d}x$; 3) $\int (12x+2)\sin 3x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{2x-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$.

14. 1) $\int x^2e^{x^3+1}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68}\mathrm{d}x$; 3) $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{2x+5}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

15. 1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17}\mathrm{d}x$; 3) $\int x\sin 8x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x}{(x+5)(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

16. 1) $\int \frac{x}{2x^2+3}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20}\mathrm{d}x$; 3) $\int \arccos x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

17. 1) $\int \frac{\arcsin^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{17x+5}{x^2-12x+40}\mathrm{d}x$; 3) $\int \arcsin 2x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x}{(x-3)(x^2+10)}\mathrm{d}x$.

18. 1) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{12x-7}{x^2+16x+65}\mathrm{d}x$; 3) $\int (2x-1)\cos 3x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{2x+5}{x(x^2+6)}\mathrm{d}x$.

19. 1) $\int \frac{\ln x+3}{x}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{8x-7}{x^2-2x+17}\mathrm{d}x$; 3) $\int (8x-10)\sin 7x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x-3}{(x+2)(x^2+5)}\mathrm{d}x$.

20. 1) $\int \sqrt{1+2x^2}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{17x-3}{x^2+8x+32}\mathrm{d}x$; 3) $\int \ln 8x\mathrm{d}x$; 4) $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

## 8.2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию опрн-го инт-а. Что такое опрн. инт-л?
2. Приведите фм-у Ньютона-Лейбница на основе связи опрн. инт-а с неопрн-ым.
3. Какими св-ми обладает опрн. инт-л?
4. Приведите методы выч-ия опрн. инт-а.
5. Какие несбт. инт-ы вы знаете и как они выч-ся?

### Задачи для самостоятельной работы

**з1**. $\int\limits_{1/2}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \int\limits_{1/2}^{2}x^{-4}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{1/2}^{2} = -\left.\frac{1}{3x^3}\right|_{1/2}^{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(1/2)^3}\right) = \frac{63}{24}$. 1*. Выч-ть $\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

**з2**. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^t\cos 2t\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u=e^t,\ \mathrm{d}v=\cos 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=e^t\mathrm{d}t,\ v=\frac{1}{2}\sin 2t\end{matrix}\right| = \underbrace{\left.\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^t\sin 2t\mathrm{d}t =$

$= \left|\begin{matrix} u=e^t,\ \mathrm{d}v=\sin 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=e^t\mathrm{d}t,\ v=-\frac{1}{2}\cos 2t\end{matrix}\right| = \left.\frac{1}{4}e^t\sin 2t\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^t\cos 2t\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{5}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^t\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{4} \Rightarrow$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^t \cos 2t\mathrm{d}t = -\dfrac{2}{5}\,\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} = -\dfrac{2}{5}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi}{2} \approx -0{,}9205$. 2*. Выч-ть $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \sin 2x\mathrm{d}x$ .

**з3**. $\int_1^e (1+\ln x)^2\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = (1+\ln x)^2,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}\mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right| = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)\mathrm{d}x =$

$= \left| \begin{array}{l} u = 1+\ln x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right| = e(1+\ln e)^2 - (1+\ln 1)^2 - 2[x(1+\ln x)]^2 + 2\int_1^e x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = 4e - 1 - 2(2e-1) +$

$+ 2x\Big|_1^e = 1 + 2r - 2 = 2e - 1$. 3*. Выч-ть $\int_1^e (1+\ln^2 x)\mathrm{d}x$ .

**з4**. $\int_{-7}^{28} x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1-x = t^3,\ x = 1-t^3 \\ \mathrm{d}x = -3t^2\mathrm{d}t \\ x = -7,\ t = 2;\ x = 28,\ t = -3 \end{array} \right| = \int_2^{-3}(1-t^3)t(-3t^2)\mathrm{d}t = 3\int_2^{-3}(t^3 - t^6)\mathrm{d}t = 3\left[\dfrac{t^4}{4} -\right.$

$\left.-\dfrac{t^7}{7}\right]\Bigg|_{-3}^{2} = -\dfrac{29145}{28}$ . 4*. Выч-ть $\int_{-6}^{6} y^3\sqrt{6+3y^2}\mathrm{d}y$ .

**з5**. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos\dfrac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\dfrac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi\right) =$

$= \sqrt{2}\left(2\sin\dfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \sqrt{2}\,(2 - 0 - 0 + 2) = 4\sqrt{2}$ . 5*. Выч-ть $\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\mathrm{d}t$ . О: $T/2$.

**з6**. $\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin^3 t\cos 2t\mathrm{d}t = 0$ в силу 9 из 3°: 8.2. 6*. Выч-ть $\int_0^{\pi/4}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$ . О: $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ . Ук: $t = \mathrm{tg}x$.

**з7**. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/3}\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \mathrm{d}v = \dfrac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = \dfrac{1}{\cos x} \end{array} \right| = \dfrac{x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3}\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \dfrac{\pi}{3\cos\dfrac{\pi}{3}} -$

$-\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \dfrac{2\pi}{3} - \ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) + \ln\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} - \ln\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{12}$ .

7*. Выч-ть $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$. О: 0. Ук: фк. нечет.

**з8**. $\int_0^r\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = r\sin t,\ \mathrm{d}x = r\cos t\mathrm{d}t \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = r,\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t = \dfrac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \dfrac{r^2}{2}\left[t + \dfrac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\pi\right) = \dfrac{\pi r^2}{4}$ . 8*. Выч-ть $\int_0^1\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^4}$ . О: $\pi/8$.

**з9**. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$ . О: $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ . **з10**. $\int_1^2\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$ . О: $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ .

**з11**. $\int t\cos\dfrac{k\pi t}{3}\mathrm{d}t$ $(k \in N)$. О: $\dfrac{9}{(k\pi)^2}[1 - (-1)^k]$. **з12**. $\int_0^{2\pi}\cos 5x\cos x\mathrm{d}x$ . О: 0.

з**13**. $\int_0^{\pi/3}\cos^3 x\sin 2x\mathrm{d}x$. О: $\frac{2}{5}$. з**14**. $\int_0^{\pi/4}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$. О: $\frac{\pi}{2}$. з**15**. $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$. О: ln(4/3).

з**16**. $\int_0^{\pi/2}e^x\cos x\mathrm{d}x$. О: $\frac{1}{2}$ (ln3 – 1). з**17.** $\int_{-3}^{3}\frac{x^2\sin 2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. О: 0. Ук: фк. нечет.

з**18**. $\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x$. О: $\frac{\pi}{2}$ – 1. Ук: фк. чет.

з**19**. $\int_0^\infty e^{-px}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-px}\mathrm{d}x = -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-pb}-1\right) = \begin{cases}1/p\ \forall\, p\in\,]0,\infty[,\\ \infty\ \forall\, p\in\,]-\infty,0[.\end{cases}$ При $p = 0$ $\int_1^\infty\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\mathrm{d}x =$

$= \lim_{b\to\infty}x\Big|_0^b = \infty - 0 = \infty$, т.е. инт-л сх. и равен $1/p$ при $p\in\,]0,\infty[$ и расх. при $p\in\,]-\infty, 0]$.

19*. Найти $\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$. О: $\frac{2}{3}$ ln2.

з**20**. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+10} = \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+1} + \int_0^\infty\frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+1} = \mathrm{arctg}(x-3)\Big|_{-\infty}^0 + \mathrm{arctg}(x-3)\Big|_0^\infty = \mathrm{arctg}(-3) +$

$+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(-3) = \pi$ (сх.). 20*. Найти $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1}$. О: расх.

Иссл-ть на сх-ть несбт. инт-ы 21-23 первого рода.

з**21**. $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Применим признак сравнения. Фк-я $e^{-x^2} > 0\ \forall\, x\in[0,\infty[$. Нерав-во $e^{-x^2}\le e^{-x}$ верно только для $x\in[1,\infty[$. Поэтому представим исх. инт-л в виде $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Инт. $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ сбт-ый. Ко второму инт-у применим признак сравнения: $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \le \int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$, а инт. $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{e^\infty}+e^{-1} = \frac{1}{e}$ (сх.). Значит, исх. инт-л тоже сх-ся.

21*. Иссл-ть на сх-ть инт-л $\int_1^\infty\frac{\ln(x^2+1)}{x}\mathrm{d}x$. О: рсх.

з**22**. Иссл-ть на сх-ть $\int_1^\infty\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+\sin x}$. Фк. $f(x) = \frac{x}{x^2+\sin x} > 0\ \forall\, x\in[1,\infty[$. Воспользуемся предельным признаком сравнения. Фк. $f(x) = \frac{x}{x^2+\sin x}$ яв-ся б.м.ф. при $x\to\infty$. Опр-им ее порядок малости отс-но фк-и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ : $\lim_{x\to\infty}\frac{x/(x^2+\sin x)}{(1/x)^\lambda} = \left|\begin{matrix}x^2+\sin x\sim x^2\\ \text{при } x\to\infty\end{matrix}\right| = \lim\frac{1/x}{(1/x)^\lambda} = 1$ ($\lambda = 1$), а $\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty$, расх. ($\lambda = 1$). Значит, исх. инт-л тоже рсх.

22*. Иссл-ть инт. $\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$. О: сх.

з**23**. Иссл-ть $\int_1^\infty\frac{\cos x\mathrm{d}x}{x^3+\sqrt{x}}$. Подынт. фк-я в полуинтервале (полуинр.) $[1,\infty[$ меняет знак вместе с изм-ем знака числителя, поэтому воспользоваться признаком сравнения нельзя. Иссл-ем на сх-ть $\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^3+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ . По признаку сравнения, $\frac{|\cos x|}{x^3+\sqrt{x}} \le \frac{1}{x^3}$ $\forall\ x \in [1, \infty[$, а $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^\infty = 0 + + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (сх.). Тогда искомый инт. сх. абс-но. 23*. Иссл-ть $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ . О: сх. абс-но.

**з24**. Д-ть, что инт-л Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ сх. условно.

Д. В тч. $x = 0$ подынт. фк-я $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не задана. Однако $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, поэтому можно до-опр-ть подынт. фк-ю, полагая $f(0) = 1$, и тем самым устранить разрыв в тч. $x = 0$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

(точка разбиения $x = \pi/2$ выбрана для простоты дальнейших выч-й). Инт. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ сбт-ый (хотя и не выч-ся с помощью первообразной). Второй инт. берем по частям: $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x},\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x,\ v = -\cos x \end{array} \right| = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty - \int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x\mathrm{d}x}{x^2}.$$ Т.к. $\frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $\forall\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right[$ ,

а $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty = \frac{1}{\infty} + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ – сх-ся ($\lambda = 2$), то $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ , а значит, и $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ , сх-ся.

Д-ем теперь, что $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ рсх-ся. Дсв-но, $\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$ $\forall\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right[$ , отсюда имеем $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ . Первый инт. $\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ рсх-йся, а второй сх-йся, т.к. $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x},\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x,\ v = -\frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_{\pi/2}^\infty + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin 2x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin 2x}{x^2}\mathrm{d}x \le$

$\le \int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{\pi/2}^\infty = 0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ – сх-ся. Значит, $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ расх-ся. По признаку сравнения, $\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ тоже рсх. Т.о., инт. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ сх. условно. 24*. Д-ть, что $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ сх. условно.

Выч-ть несбт. инт-ы 25, 26 второго рода.

**з25**. $\int\limits_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = \left| \begin{array}{l} \text{Подынт. фк-я не огр-на в окрс-ти тч. } x = 1 \ (x = 1 \text{ – особая тч.}) \\ u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}},\ v = 2\sqrt{x-1} \text{ и с учетом зм1 и из 5°: 8.2 выч-им} \end{array} \right| =$

$= 2x\sqrt{x-1}\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \sqrt{x-1}\mathrm{d}x = 4 - 0 - \dfrac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$ (сх-ся). 25*. Выч-ть $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$ .

**з26**. $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{2-x} = -\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}(2-x)}{2-x} = -\ln(2-x)\Big|_0^{2-0} = -(-\infty) + \ln 2 = \infty$ – рсх-ся. Здесь, поставив $2-0$ вместо 2, мы как бы учитывали пределы. 26*. Выч-ть $\int_0^{2/\pi} \sin\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . О: рсх-ся.

27. Иссл-ть на сх-ть $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ . Особая тч. $x = 1$. Фк. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} > 0\ \forall\ x \in [0, 1[$. Сравним ее с фк-ей $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ . Ясно, что $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\ \forall\ x \in [0, 1[$. Но $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x}} =$ $= -\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-x) = -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}\Big|_0^1 = -0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$ (сх-ся). По признаку сравнения исх. инт-л тоже сх-ся. 27*. Иссл-ть $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^4}$ . О: сх-ся.

**з28**. Иссл-ть $\int_0^5 \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ . Особая тч. $x = 0$. Фк. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ в промежутке интв-ия принимает зн-ия разных знаков, поэтому нельзя применять признак сравнения. Рас-им инт-л $\int_0^5 \dfrac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ . Т.к. $\dfrac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \forall\ x \in\ ]0, 5]$, а $\int_0^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^5 = 2\sqrt{5}$ – сх-ся, то исх. инт-л сх-ся абс-но, а значит, и вообще сх-ся. 28*. Иссл-ть $\int_0^1 \dfrac{e^x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos x}}$ . О: расх-ся.

**з29**. Иссл-ть $\int_0^2 \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$ . Фк. $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1} > 0\ \forall\ x \in\ ]0, 2]$, а в тч. $x = 0$ она не задана, однако из этого еще не следует, что $x = 0$ – особая тч. Покажем, что в окрс-ти этой тч. она не огр-на. Дст-но, с учетом $\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right) \sim \sqrt[5]{x^3}$ , $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$, получим $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1} =$ $= \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \infty$. Применим предельный признак сравнения в случае, когда $f(x)$ не огр-на справа от тч. $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)\Big/\left(e^{\sin x}-1\right)}{1/x^{\lambda}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1/x^{2/5}}{1/x^{\lambda}} = 1\ \left(\lambda = \dfrac{2}{5}\right)$. Т.к. $\lambda < 1$, то $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}$ сх-ся. Значит, исх. инт-л тоже сх-ся. 29*. Иссл-ть $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ . О: сх-ся.

**з30**. Выч-ть $\int_0^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} =$ | Инт-л яв-ся комбинированным несбт. инт-ом, т.к. внутри беск-го инт-а есть особая тч. $x = 1$. Поэтому разобьем его на два инт-а. Пусть число $a$ больше ед-цы. | $=$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{a}\frac{dx}{1-x^2}\right) + \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon}+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{a}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_a^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| = 0$$ – сх-ся. 30*. Выч-ть $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1-x}$.

## 8.3 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### Вопросы для самопроверки

1. Как выч-ся пщ-ди в дек. крд-ах при различных видах фигуры?
2. По какой фм. выч-ся пщ-ди фигур, заданных в полярных крд.?
3. Выведите фм-у выч-ия объема прзвл. фигуры. Приведите пример.
4. Как выч-ся объем тела, образованного врщ-ем кривой вокруг оси $Ox$?
5. Выведите фм-у выч-ия длины дуги крв-й. Приведите пример.
6. Как выч-ся пщ-дь пвх-сти врщ-я?
7. В чем состоит общая схема выч-ия механических и физических вел-н?
8. Как выч-ся путь, пройденный тч-ой, и работа силы?
9. Что такое стсч. моменты и крд-ы центра тяжести. Приведите примеры.
10. Что такое момент инерции геомч-ой фигуры и по какой фм. он выч-ся?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Выч-ть пщ-дь фигуры, огрн-ой линиями: $y = 1 - e^x$, $x = 2$, $y = 0$.

Р. Построив грф-к фк-и $y = 1 - e^x$ и проведя пм-ю $x = 2$, выделим искомую фигуру (рис. 1). Т.к. $f(x) = 1 - e^x \le 0\ \forall\ x \in [0, 2]$, то

$$S = -\int\limits_0^2 f(x)dx = -\int\limits_0^2 \left(1-e^x\right)dx = \int\limits_0^2\left(e^x-1\right)dx = \left[e^x - x\right]\Big|_0^2 = e^2 - 2 - e^0 = e^2 - 3.$$

1*. Выч-ть пщ-дь фигуры $\sigma$: $\{y = 1 - e^x, y = 1 - e^x, x = 0\}$. О: $e^2 + 1$.

**у2**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{y = x^2 - 6x + 10, y = 6x - x^2, x = -1\}$.

Р. Параболы построим, приведя их ур-ия к виду $y = (x - 3)^2 + 1$ и $y = -(x - 3)^2 + 9$ с верш. ств-но $Q_1(3, 1)$ и $Q_2(3, 9)$. Проведя пм-ю $x = -1$, выделяем искомую пщ. (рис. 2). Находим тч-у перч-ия парб-л. $x^2 - 6x + 10 = 6x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$, уд-ет $x_1 = 1$. Итак, $f_1(x) \ge f_2(x)\ \forall\ x \in [-1, 1]$. Тогда $S = \int\limits_{-1}^{1}\left[\left(x^2-6x+10\right)-\left(6x-x^2\right)\right]dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(2x^2-12x+10\right)dx =$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} + 3 + 5 = \frac{64}{3}.$$

2*. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2\ (x \ge 0, y \ge 0), x = 0\}$. О: $\pi - \dfrac{4}{3}$.

**у3**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{y = \arcsin x, y = \pm\dfrac{\pi}{2}, x = 0\}$.

Р. Строим искомую фигуру (рис. 3). Из $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$, эта фк. яв-ся нечет., поэтому $S = 2S_1$. Тогда $2\int\limits_0^{\pi/2}\sin y\,dy = -2\cos y\Big|_0^{\pi/2} = 0 + 2\cdot 1 = 2$. 3*. Выч-ть $\sigma = \{y = \cos x, y = x + 1, y = 0\}$. О: 1,5.

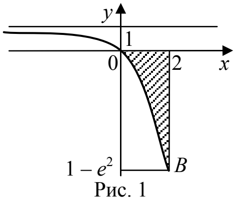



Рис. 1

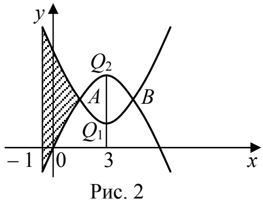



Рис. 2

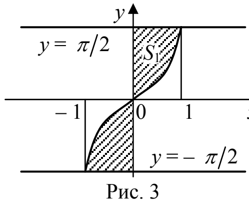



Рис. 3

**у4**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{x = t^2 - 1, y = t^3 - t\}$.

Р. Опр-им пределы интв-ия. Поскольку $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$, крв. симч-на отс-но оси $Ox$. Фк. $x = t^2 - 1$ имеет обл. опр-ия $t \in [-1, \infty[$, т.е. крв. находится справа от пм. $x = -1$. Р-я ур-ие $t^3 - t = 0$, находим, что $y = 0$ при $t = 0$ (ств-но, $x = -1$) и $t = \pm 1$ (ств-но, $x = 0$). Р-я нерав-во $t^3 - t > 0$, получим, что $y > 0$ $\forall$ $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, \infty[$. Придавая $t$ различные зн-ия из этих инр-ов, получим ствщ-ие зн-ия $x$ и $y$ и тем самым тч-и крв-й. Учитывая, что крв. симч-на оси $Ox$, строим ее (рис. 4). В силу симч-ти выч-им пщ-дь части фигуры $S_1$, огрн-ой дугой $ABO$ и осью $Ox$, и результат удвоим. Причем на отрезке [0, 1] фк. $x = t^2 - 1$ строго взр-ет, а фк. $y = t^3 - t$ принимает неположительные (неплж.) зн-ия ($y \le 0$), поэтому $S_1 = -\int_0^1 y\mathrm{d}x = -\int_0^1 yx'_t\mathrm{d}t = -\int_0^1 (t^3 - t)(t^2 - 1)'\mathrm{d}t =$

$$= -\int_0^1 (t^3 - t)2t\mathrm{d}t = -2\int_0^1 (t^4 - t^2)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2 - t^4)\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{4}{15}.$$ Тогда $S = 2S_1 = \dfrac{8}{15}$.

4*. Выч-ть пщ. $\sigma$: $\{x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\}$ (астроида). О: $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

**у5**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{r = 4\sin^2\varphi\}$.

Р. Т.к. $\sin^2\varphi \ge 0$ $\forall$ $\varphi \in [0, 2\pi]$, то крв-ю построим, изменяя $\varphi$ от 0 до $2\pi$. Причем при $\varphi \in [0, \pi]$ получим верхнюю часть крв-й, а при $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ – нижнюю часть (рис. 5). Тогда $S = 2S_1 = 2 \cdot \dfrac{1}{2}$ ×

$$\times \int_0^\pi r^2\mathrm{d}r = \int_0^\pi (4\sin^2\varphi)^2\mathrm{d}\varphi = 16\int_0^\pi \sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi = 16\int_0^\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\mathrm{d}\varphi = 16\left[\frac{3}{8}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right]\Bigg|_0^\pi = 6\pi.$$

5*. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{r = a\sin 3\varphi\}$ (трехлепестковая роза). О: $0{,}25\pi a^2$.

**у6**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 4y, y = x, y = -x\}$.

Р. Из $x^2 + y^2 = 2y$ и $x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ и $x^2 + (y-2)^2 = 4$, к-ые опр-ют окр-ти с центрами $O_1(0, 1)$ и $O_2(0, 2)$, радиусы к-ых равны 1 и 2 (рис. 6). В данном случае р-ие значительно проще, если перейти к полярным крд-ам по фм-ам $\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ к-ые устанавливают связь между полярными и пуг-ми крд-ми, тогда получим: $r = 2\sin\varphi$ и $r = 4\sin\varphi$. Ур-ия лучей, огрв-щих фигуру, таковы: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Из рис. 6 получим: $S = (S_{OBCO} - S_{OAO_2O}) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(4\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi -\right.$

$$\left. -\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi\right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2}(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi = 12\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = 12\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 6\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = 6\left[\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} + 1\right] = 6\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{3\pi}{2} + 3.$$

6*. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\{r = a(1 - \cos\varphi), r = a\}$ (рас-ть часть круга $0 \le r \le a$, вырезанную данной кардиоидой). О: $a^2(5\pi/4 - 2)$.

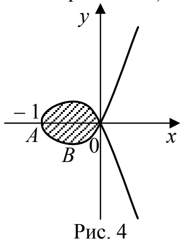


Рис. 4

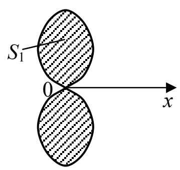


Рис. 5

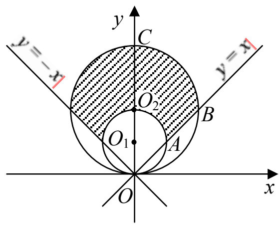


Рис. 6

**п7**. Выч-ть пщ. фигуры $\sigma$: $\begin{Bmatrix} x = a\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{Bmatrix}$ (кардиоида, рис. 7). О: $6\pi a^2$.

**у8**. Выч-ть объем тела, огрн-го однополостным гпрби-ом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ и пл-ми $z = 0$, $z = h$ ($h > 0$).

Р. Рас-им сечения с пл-ми, прп-ми оси $Oz$ (рис. 8). Тогда $V = \int\limits_0^h S(z)\mathrm{d}z$. При перч-и пл-ю $z =$ $=$ const получаем элс., к-ый опр-ся ур-ми $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{z^2}{c^2}; \\ z = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 + z^2/c^2\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + z^2/c^2\right)} = 1; \\ z = \text{const}, \end{cases}$

откуда следуют врж-я для полуосей элс-а $a_1 = \sqrt{a^2\left(1 + z^2/c^2\right)}$, $b_1 = \sqrt{b^2\left(1 + z^2/c^2\right)}$. Тогда $S(z) = \pi a \times$ $\times\, b(1 + z^2/c^2)$, $z \in [0, h]$. Отсюда получим $V = \int\limits_0^h \pi ab\left(1 + \dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \pi ab\left(z + \dfrac{z^3}{3c^2}\right)\Bigg|_0^h = \pi abh\left(1 + \dfrac{h^3}{3c^2}\right)$.

8*. Выч-ть объем тела, огрн-го пл-ю $z$ и конч. пвх-ю $\sigma$: $\{(z-2)^2 = x^2/3 + y^2/2, z = 0\}$. О: $8\pi\sqrt{6}/3$.

**у9**. Выч-ть объем тела врщ-я вокруг оси $Ox$ плоских фигур $\sigma$: $\{x^2 + y^2 = 1, x + y = 1\}$.

Р. При выч-и объемов тел врщ-я дт-но построить ствщ-ие крвл-ые трапеции (не изб-ая самих тел). Построив окр-ть $x^2 + y^2 = 1$ и пм-ю $x + y = 1$, получим круговой сегмент (рис. 9), к-ый огр-ен грф-ми двух фк.: $y = f_2(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq y = f_1(x) = 1 - x$ $\forall\, x \in [0, 1]$. Тогда

$$V_x = \pi\int\limits_0^1\left[\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - (1 - x)^2\right]\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_0^1\left(x - x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

9*. Выч-ть $V_x$, $\sigma$: $\{(y-3)^2 + 3x, x = -3\}$. О: $72\pi$.

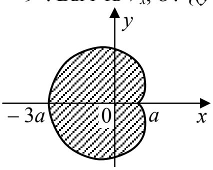



Рис. 7

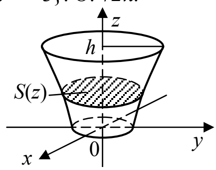



Рис. 8

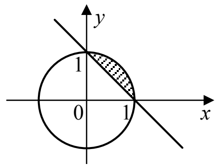



Рис. 9

**у10**. Выч-ть объем тела врщ-я вокруг оси $Ox$ фигуры $\sigma$: $\begin{Bmatrix} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t \end{Bmatrix}$.

Р. Данное тело создается врщ-ем петли (рис. 4) вокруг оси $Ox$. В этом случае $V_x = \pi\int\limits_{-1}^0 y^2\mathrm{d}y =$

$$= \begin{vmatrix} x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x = -1,\ t = 0;\ x = 0,\ t = 1 \end{vmatrix} = 2\pi\int\limits_0^1\left(t^3 - t\right)^2 t\mathrm{d}t = 2\pi\int\limits_0^1\left(t^7 - 2t^5 + t^3\right)\mathrm{d}t = 2\pi\left[\frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

10*. Выч-ть объем тела, огрн-го парбч-им цлн-ом, пл-ми крд-т и пл-ю $x = a$. О: $16a/3$.

**у11**. Выч-ть длину дуги крв-й, заданной ур-ем $y = 1 - e^x$, между тч-ми $O(0, 0)$ и $B(2, 1 - e^x)$ (рис. 1).

Р. Поскольку $y' = -e^x$, $1 + (y')^2 = 1 + e^{2x}$, то, полагая $a = 0$, $b = 2$, имеем

$$l = \int\limits_a^b\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2\sqrt{1 + e^{2x}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2\frac{1 + e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2\frac{e^x\left(\dfrac{1}{e^x} + e^x\right)}{e^x\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}} + 1}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2\frac{\dfrac{1}{e^x}}{\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}} + 1}}\mathrm{d}x\ +$$

$$+\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}}\mathrm{d}x = -\int_0^2 \frac{\mathrm{d}\frac{1}{e^x}}{\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}} + \int_0^2 \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \left[-\ln\left(\frac{1}{e^x}+\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}\right)+\sqrt{1+e^{2x}}\right]_0^2 = \Big[\sqrt{1+e^{2x}} -$$

$$-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)\Big]_0^2 = \sqrt{1+e^4} - \ln\left(e^{-2}+\sqrt{e^{-4}+1}\right) - \left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \approx 6{,}789.$$

11*. Выч-ть длину дуги крв-й $y = \ln(1 - x^2)$ от тч. $O(0, 0)$ до тч. $\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{3}{4}\right)$.

**у12**. Выч-ть длину дуги крв-й $\begin{cases} x = R\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = R\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$.

Р. Здесь нет нх-ти строить крв-ю на пл-ти, т.к. пределы интв-ия даны. Находим $x'_t = R(-\sin t + \sin t + t\cos t) = Rt\cos t$, $y'_t = R(\cos t - \cos t + t\sin t) = Rt\sin t$. Тогда

$$l = \int_0^\pi \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{R^2t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\mathrm{d}t = \int_0^\pi Rt\mathrm{d}t = R\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2 R}{2}.$$

12*. Выч-ть длину дуги кардиоиды $\begin{cases} x = a\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases}$ (рис. 7). О: $16a$.

**у13**. Выч-ть длину кардиоиды $r = 2(1 + \sin\varphi)$.

Р. Данная кардиоида симч-на отс-но пм-й, проходящей через тч. $O$ и прп-ой полярной оси (рис. 10), т.к. если $\varphi = 0$, то $r = 0$; если $\varphi = \pi/2$, то $r = 4$, $A(4)$. Половина кардиоиды от тч. $O$ до $A$ описывается концом полярного радиуса при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ – пределы интв-ия. Находим $r' = 2\cos\varphi$, $r^2 + r'^2 = 4(1 + \sin\varphi)^2 + (2\cos\varphi)^2 = 4(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 8(1 + \sin\varphi)$. Тогда

$$\frac{l}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{8\left(1+\sin\varphi\right)}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi = 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 8\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8(0 - (-1)) = 8$$

$\Rightarrow l = 16$. При выч-и было учтено, что $\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

13*. Выч-ть длину дуги крв-й $r = \sin^4\frac{\varphi}{4}$ (рис. 11).

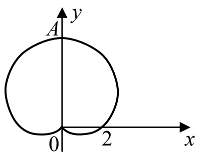


Рис. 10

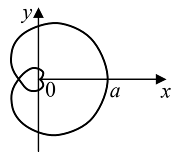


Рис. 11

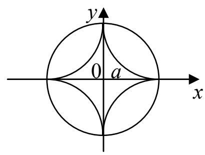


Рис. 12

**у14**. Дуга крв-й, заданной ур-ем $1 - e^x$ (рис. 1), от тч. $O(0, 0)$ до тч. $B(2, 1 - e^x)$, врщ-ся вокруг оси $Ox$. Выч-ть пщ. этой пвх-ти.

Р. Поскольку в данном случае $y \leq 0$ $\forall$ $x \in [0, 2]$, то $P_x = -2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = -2\pi\int_0^2 \left(1-e^x\right) \times \sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x = 2\pi\left[\int_0^2 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x - \int_0^2 \sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x\right]$. Здесь второй инт. выч-ли в у11, а первый выч-им, используя п8 из 4°: 8.1.

$$\int_0^2 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}e^x = \frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)\right]\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left[e^2\sqrt{1+e^4}\ + \right.$$

$$\left. +\ \ln\left(e^2+\sqrt{e^4+1}\right) - \left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\right] \approx 27{,}749.$$

Т.о., $P_x \approx 2\pi(27{,}749 - 6{,}789) \approx 131{,}696$.

14*. Выч-ть пщ. пвх-ти катеноида, образованного врщ-ем вокруг оси $Ox$ крв-й $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, $x \in [-a, a]$. О: $\pi a^2(2 + \mathrm{sh}2)$.

**у15**. Выч-ть пщ. пвх-ти, образованной врщ-ем вокруг оси $Oy$ крв. $y = \ln x$ на отрезке $[1, e^2]$.

Р. Из $y = \ln x$ находим $x = e^y$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = e^y$ и $y_1 = \ln 1 = 0$, $y_2 = \ln e^2 = 2$ и с учетом р-я у14 получим:

$$P_y = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^2 e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y = 2\pi\cdot 27{,}749 \approx 174{,}352.$$

15*. Выч-ть пщ. пвх-ти, образованной врщ-ем одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$ вокруг: а) оси $Ox$; б) оси $Oy$. О: а) $64\pi a^2/3$; б) $16\pi^2 a^2$.

**у16**. Выч-ть пщ. пвх-ти, образованной врщ-ем вокруг оси $Ox$ кардиоиды (см. рис. 7) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t).\end{cases}$

Р. Для выч-ия пщ-ди пвх-ти дт-но огр-ся верхней частью кардиоиды при $t \in [0, \pi]$. Находим: $x_t' = 2a(\sin 2t - \sin t) = 4a\cos\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2}$, $y_t' = 2a(\cos t - \cos 2t) = 4a\sin\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2}$; $x_t'^2 + y_t'^2 =$

$= 16a^2\cos^2\dfrac{3t}{2}\sin^2\dfrac{t}{2} + 16a^2\sin^2\dfrac{3t}{2}\sin^2\dfrac{t}{2} = 16a^2\sin^2\dfrac{t}{2}$. Тогда $P_x = 2\pi\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,\mathrm{d}t =$

$$= 2\pi\int_0^\pi a(2\sin t - \sin 2t)\sqrt{16a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 16\pi a^2\int_0^\pi \sin t(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 16\pi a^2\int_0^\pi 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\ \times$$

$$\times\ 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 128\pi a^2\int_0^\pi \sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 128\pi a^2\,\frac{\sin^5\frac{t}{2}}{5}\Bigg|_0^\pi = 25{,}6\pi a^2.$$

16*. Выч-ть пщ. пвх-ти, образованной врщ-ем вокруг полярной оси лемнискаты $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (см. рис. 9б из 4°: П$_2$ – приложение). О: $4\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

**у17**. Найти крд-ы центра масс дуги астроиды (рис. 12) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первой крд. четверти.

Р. Учитывая, что $t \in [0, \pi/2]$, имеем: $\mathrm{d}l = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\left(-3a\sin t\cos^2 t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t =$

$= \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{d}t = 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \dfrac{3a}{2}\sin 2t\,\mathrm{d}t \Rightarrow l = \dfrac{3a}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\ \times$

$\times \cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = -\dfrac{3a}{4}(-1-1) = \dfrac{3a}{2}$. Тогда $x_c = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3a/2}\int_0^{\pi/2} 3a^2\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = -2a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{d}(\cos t) =$

$= -2a\dfrac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \dfrac{2a}{5}$. $y_c = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^b y\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{3a/2}\int_0^{\pi/2} 3a^2\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = 2a\dfrac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \dfrac{2a}{5}$.

17*. Найти крд-ы центра масс первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ О: $x_c = \pi a$, $y_c = \dfrac{4a}{3}$.

**у18**. Найти центр масс фигуры, огрн-ой осью $Ox$ и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

Р. Т.к. фигура симч-на отс-но пм. $x = \pi/2$, то $x_c = \pi/2$. Для нахождения $y_c$ сначала найдем пщ. ствщ. фигуры: $S = \int\limits_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2$. Теперь выч-им $y_c = \dfrac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2S}\int\limits_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{2S}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4S}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{4S}\pi = \frac{\pi}{8}.$$

18*. Найти крд-ы центра масс фигуры $\sigma = \{y = 2x - x^2, y = 0\}$. О: $x_c = 1$, $y_c = 0{,}4$.

**у19**. Найти стсч. моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в I четверти (рис. 12).

Р. В силу симч-и астроиды отс-но крд-ых осей $M_x = M_y$, $J_x = J_y$ дт-но выч-ть моменты отс-но оси $Ox$. Для I четверти имеем $t \in [0, \pi/2]$. Находим $\mathrm{d}l = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t$ (см. у17). Тогда имеем

$$M_x = \int\limits_a^b y\mathrm{d}l = \int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t = 3a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\mathrm{d}(\sin t) = \frac{3}{5}a^2\sin^5 t\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}a^2,$$

$$J_x = \int\limits_a^b y^2\mathrm{d}l = \int\limits_0^{\pi/2} a\sin^6 t \cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t = 3a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7 t\mathrm{d}(\sin t) = \frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}a^3.$$

Итак, $M_x = M_y = \dfrac{3}{5}a^2$, $J_x = J_y = \dfrac{3}{8}a^3$.

19*. Найти стсч. момент и момент инерции дуги цепной линии $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, где $0 \le x \le a$, отс-но оси $Ox$. О: $M_x = a^2(e^2 - e^{-2} + 4)/8$, $J_x = a^3(e - e^{-1})(e^2 + e^{-2} + 10)/24$.

**у20**. Цлн. радиусом $r = 0{,}1$ м и высотой $h_0 = 0{,}8$ м заполнен паром под давлением $p_0 = 10^6$ Па. Какую работу надо совершить, чтобы уменьшить объем пара в два раза (температура пст-на).

Р. Для изотермического процесса справедлив закон Бойля-Мариотта $pV = C$ ($C = \mathrm{const}$), где $V$ – объем газа. Обз-ив через $V_0$ объем цлн-а, найдем пст-ю $C$: $C = p_0V_0 = 10^6\pi r^2h_0 = 10^6 \cdot 0{,}01 \times \times 0{,}8\pi = 8\pi \cdot 10^3$ (Н · м). Элр. работа $\mathrm{d}A$ силы $F$ давления газа при уменьшении высоты столба газа на $\mathrm{d}h$ по опр-ю механической работы врж-ся фм-ой $\mathrm{d}A = -F\mathrm{d}h$ (минус означает, что высота столба уменьшается). Т.к. $F = pS$, где $S$ – пщ. поперечного сечения цлн-а, то $\mathrm{d}A = pS\mathrm{d}h = -p\pi r^2\mathrm{d}h = -p\mathrm{d}(\pi r^2h) = -p\mathrm{d}V$. Тогда вся работа, затраченная на уменьшение объема вдвое, равна $A = \int\limits_{V_0}^{V_0/2}\mathrm{d}A =$

$$= -\int\limits_{V_0}^{V_0/2} p\mathrm{d}V = -C\int\limits_{V_0}^{V_0/2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = C\int\limits_{V_0/2}^{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{V} = C\ln V\Big|_{V_0/2}^{V_0} = C\ln 2 \approx 8 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}693 \text{ (Н · м)} \approx 17417 \text{ Дж} \approx 17{,}4 \text{ кДж}.$$

20*. Какую работу надо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м, если известно, что при нагрузке в 10 Н она сжимается на 0,01 м? О: 3,2 Дж. Ук: используйте закон Гука: $F = kx$ – сила, сжимающая пружину на $x$ м, где $k$ – пст., хркз-щая материал пружины.

**у21**. При прохождении пст-го тока $I$ через активное сопротивление $r$ за промежуток вр-и $t$ выделяется энергия $W = rI^2t$. Найти энергию, к-ая будет выделена за период $T$ при прохождении через это сопротивление пер-го синусоидального тока $i(t) = I_m\sin(\omega t + \varphi)$, где $I_m$ – амплитудное зн. тока; $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота; $\varphi$ – начн. фаза.

Р. Если ток пер-ый, то диф-л энергии врз-ся так: $\mathrm{d}W = ri^2(t)\mathrm{d}t$. Энергия, выделяемая за промежуток вр-и от $t_1$ до $t_2$ опр-ся инт-ом $W = \int\limits_{t_1}^{t_2} i^2(t)\mathrm{d}t = rI_m^2\int\limits_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}\varphi = rI_m^2\int\limits_0^T \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)\right)\mathrm{d}t =$

$$= \frac{rI_m^2}{2}\left[t - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t + 2\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T = \frac{rI_m^2 T}{2}.$$

21*. Выч-ть работу, нх-ю для того, чтобы выкачать жидкость, плотность к-ой $\rho$, из резервуара, имеющего форму обращенного верш-й вниз конуса, высота к-го $H$, а радиус основания $R$. О: $\frac{1}{12}\pi g\rho R^2H^2$.

**Задание для кр. работы**: по образцу примеров из 8.3 и у1-у21 р-ть з1-з21. Найти: 1) пщ, огрн-ю заданными парб-ми; 2) объем тела врщ-я вокруг оси $Ox$ в первом квадранте и огрн-ой парб-ой, прямой и осью $Ox$; 3) пщ. фигуры в полярных крд-ах для з1-з10 и длину дуги крв-й для з1-з20.

| | | |
|---|---|---|
| 1. 1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$, | 2) $y = 2x^2$, | 3) $r = 2\cos\varphi$, |
| $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. | $y = -2x + 4$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$. |
| 2. 1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$, | 2) $y = x^2$, | 3) $r = 8(1 + \cos\varphi)$, |
| $y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$. | $y = -x + 2$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. |
| 3. 1) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2$, | 2) $y = 3x^2$, | 3) $r = 4\cos\varphi$, |
| $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$. | $y = -x + 4$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. |
| 4. 1) $y = 2x^2 + 6x - 3$, | 2) $y = \frac{1}{4}x^2$, | 3) $r = 2\sin\varphi$, |
| $y = -x^2 + x + 5$. | $y = -x + 3$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$. |
| 5. 1) $y = 3x^2 - 5x - 1$, | 2) $y = \frac{1}{2}x^2$, | 3) $r = 10\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, |
| $y = -x^2 + 2x + 1$. | $y = -3x + 8$. | $\varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. |
| 6. 1) $y = x^2 - 3x - 1$, | 2) $y = \frac{1}{3}x^2$, | 3) $r = 1 - \cos 2\varphi$, |
| $y = -x^2 - 2x + 5$. | $y = -3x + 12$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}$. |
| 7. 1) $y = 2x^2 - 6x + 1$, | 2) $y = 4x^2$, | 3) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, |
| $y = -x^2 + x - 1$. | $y = -2x + 2$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}$. |
| 8. 1) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, | 2) $y = \frac{1}{4}x^2$, | 3) $r = 2 + \cos\varphi$, |
| $y = -\frac{2}{3}x^2 - x + 2$. | $y = -\frac{1}{2}x + 2$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}$. |
| 9. 1) $y = x^2 - 5x - 3$, | 2) $y = 4x^2$, | 3) $r = 2\varphi$, |
| $y = -3x^2 + 2x - 1$. | $y = -2x + 6$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. |
| 10. 1) $y = x^2 - 2x - 5$, | 2) $y = x^2$, | 3) $r = e^{\varphi}$, |
| $y = -x^2 - x + 1$. | $y = -x + 3$. | $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$. |

11. 1) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5,$ $y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1.$ 2) $y = 2^2,$ $y = -3x + 14.$ 3) $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 12.$

12. 1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2,$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3.$ 2) $y = \frac{1}{3}x^2,$ $y = -x + 6.$ 3) $y = \ln\sin x,$ $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

13. 1) $y = 2x^2 - 6x + 3,$ $y = -2x^2 + x + 5.$ 2) $y = 3x^2,$ $y = -2x + 5.$ 3) $y = 1 - \ln\cos x,$ $0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$

14. 1) $y = x^2 - 3x - 4,$ $y = -x^2 - x + 8.$ 2) $y = \frac{1}{3}x^2,$ $y = -2x + 9.$ 3) $r = a\sin\varphi,$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

15. 1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1,$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2.$ 2) $y = \frac{1}{4}x^2,$ $y = -2x + 6.$ 3) $r = a\cos\varphi,$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

16. 1) $y = 2x^2 + 4x - 7,$ $y = -x^2 - x + 1.$ 2) $y = 2x^2,$ $y = -x + 10.$ 3) $r = 1 - \cos\varphi,$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

17. 1) $y = 2x^2 + 3x + 1,$ $y = -x^2 - 2x + 9.$ 2) $y = 3x^2,$ $y = -3x + 6.$ 3) $r = 2(1 + \cos\varphi),$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

18. 1) $y = 2x^2 - 6x - 2,$ $y = -x^2 + x - 4.$ 2) $y = x^2,$ $y = -2x + 5.$ 3) $y = \ln x,$ $\frac{3}{4} \le x \le 1.$

19. 1) $y = x^2 - 2x - 4,$ $y = x^2 - x + 2.$ 2) $y = \frac{1}{2}x^2,$ $y = -x + 3.$ 3) $y = \ln\cos x,$ $0 \le x \le \frac{\pi}{3}.$

20. 1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2,$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3.$ 2) $y = 3x^2,$ $y = -5x + 8.$ 3) $y = \frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$, $0 \le x \le 1.$

# 9. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

> Я старался писать так, чтобы изучающий всегда мог видеть внутреннюю основу изучаемых им вещей, чтобы он мог обнаружить источник открытия и, следовательно, во всем разобрался так, как если бы он это придумал сам.
>
> Г. Лейбниц

## ЛЕКЦИЯ 24

## 9.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**1°. Основные понятия. Пределы и непрерывность функций**. Во многих вопросах геом-и, естествознания и т.д. мы имеем дело с фк-ми двух, трех и более пер-ых. Н-р, пщ-дь туг-ка $U = \frac{1}{2}xy$ с основанием $x$ и высотой $y$ есть фк-я двух пер-ых. Р-я ур-ие сферы (сф.) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ отс-но $z$, при $z \geq 0$ (полусфера) получим фк-ю $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ двух пер-ых. Объем пуг. прлп-да $V = xyz$ с измерениями (измр.) $x$, $y$, $z$ есть фк-я трех пер-ых в плж-ом октанте пр-ва $Oxyz$.

**о1**. Фк-ей $n$ пер-ых наз. отображение (отб.) нек-го мн-ва $D \subset R^n$ в мн-во $E \subset R$ (иногда вместо $D$ и $E$ будем брать ств-но $X$ и $Y$) и обз-ся

$$f\colon D \to E \text{ или } y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ или } y = f(p), \tag{1}$$

где $D$ наз. обл-ю опр-ия, $E$ – обл-ю зн-й, $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка (тч.).

При $n = 2$ получаем фк-ю двух пер-ых

$$z = f(x_1, x_2) \text{ или } z = f(x, y). \tag{2}$$

Мн-во тч-к из $R^3$, крд-ы к-ых уд-ют ур-ию $z = f(x, y)$, наз. графиком (грф.) фк-и двух пер. Грф-ки фк-й трех и более пер-ых не имеют простого геомч. смысла.

**о2**. Линией уровня фк-и $z = f(x, y)$ наз. линия на пл-ти $Oxy$, в тч-х к-ой фк—я принимает одно и то же пст. зн-ие (т.е. $f(x, y) = C$) и используется при построении грф-ов фк-й.

Поверхностью (пвх.) уровня фк-и трех пер. $u = f(x, y, z)$ наз. пвх-ть в $R^3$, в тч-х к-ой фк-я принимает одно и то же пст. зн-ие, т.е. $f(x, y, z) = C$.

Линии и пвх-ти уровня часто встречаются также в физических и др. вопросах. Н-р, соединив на карте пвх-ти Земли тч-и с одинаковой средней (ср.) суточной температурой (темп.) или с одинаковым ср. суточным давлением, получим ств-но изотермы и изобары, яв-еся важными исх. данными для прогноза погоды.

**п1**. Найти обл-ти опр-ия и построить грф-и фк-й: 1) $z = xy$; 2) $z = x^2 + y^2$, 3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 4) $z = 1\big/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Р. Обл-ти опр-ия: 1) $D$: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ (рис. 1); 2) $D$: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ (рис. 1); 3) $D$: $0 \leq 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ (рис. 2); 4) $D$: $0 < 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$ (рис. 3).

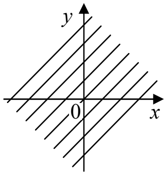


Рис. 1

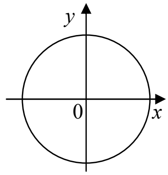


Рис. 2

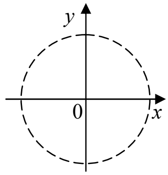


Рис. 3

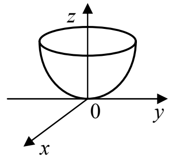


Рис. 4

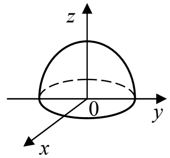


Рис. 5

Теперь рас-им их грф-и: 2) $x^2 + y^2 = C$ – концентрические окр-ти, значит, грф-к фк-и $z = x^2 + y^2$ есть не огрн-ый парби. врщ-я вокруг оси $Oz$ (рис. 4); 3) из обл. опр-ия $x^2 + y^2 \leq 1$ получаем

$\sqrt{1-x^2-y^2} = C = 1$ при $x^2 + y^2 = 0$ и $C = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$, значит, грф-к фк-и $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ есть парби. врщ-я вокруг оси $Oz$ дном вверх (рис. 5); 4) анч-но из обл. опр-ия $x^2 + y^2 < 1$ (сама окр-ть не входит в обл. опр.) $\Rightarrow 1\Big/\sqrt{1-x^2-y^2} = C = 1$ при $x^2 + y^2 = 0$ и $C \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to 1$, значит, грф-к фк-и $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ есть не огрн-ый парби. врщ-я вокруг оси $Oz$ с верш. в тч. (0, 0, 1) (рис. 6).

Возвратимся к случаю 1) $z = xy$ с обл-ю опр-ия $D = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$. При $xy = C \geq 0$ имеем $y = \dfrac{C}{x}$ – гпрб-ы на I и III четвертях симч-но пм-й $y = x$ (рис. 7). Тогда грф-ом фк-и $z = xy$ яв-ся парби. элч-й (рис. 8). Если возьмем $xy = C \leq 0$, то $y = \dfrac{C}{x}$ – гпрб-ы на II и IV четвертях и грф-к получится перевернутым отс-но пл-ти $xOy$, т.е. $z$ переходит в $-z$.

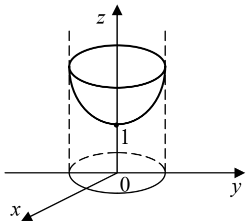



Рис. 6

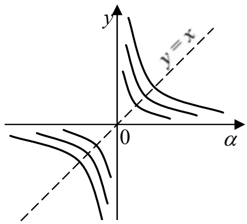



Рис. 7

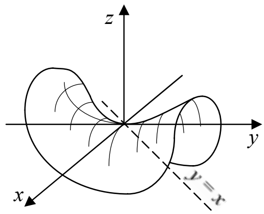



Рис. 8

**о3**. Число $A$ наз. пределом фк-и $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, если $\forall\ \varepsilon\ \exists\ r$, такое, что нерав-во

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

выполняется для всех тч-к $M(x, y)$, удщ-их нерав-у

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r. \tag{4}$$

Если число $A$ яв-ся предельной тч. фк-и $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то пишут

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A, \tag{5}$$

т.е. стн-ия (3), (4) экв-ны стн-ю (5) и наоборот. Экв-сть обз-ют (3), (4) ~ (5).

**п2**. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Р. При $x \to 0, y \to 0$ имеем, что $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho + 1} - 1} =$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)}{\rho^2 + 1 - 1} = \lim_{\rho \to 0}\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right) = 2.$$

**о4**. Фк. $f(p) = f(x^\circ)$ наз. непр-ой в тч. $x^\circ \in X$, если $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta > 0$, такое, что нерав-во

$$\rho_1[f(x), f(x^\circ)] < \varepsilon \ (x = x_1, \ldots, x_n;\ x^\circ = \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n) \tag{6}$$

выполнится $\forall\ x \in X$, удщ-их нерав-ву

$$\rho[x, x^\circ] < \delta, \tag{7}$$

где $\rho$ – рст-ие в $X$, $\rho_1$ – рст. в $Y$.

Стн-ия (6), (7) экв-ны стн-ю

$$\lim_{x \to x^\circ} f(x) = f(x^\circ). \tag{8}$$

В част., для фк-и $f(x, y)$ непр-ой в тч. $M_0(x_0, y_0) = M_0(p_0)$ стн. (8) имеет вид

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{9}$$

Если обз-им $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то вместо (9) получим

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) = f(x_0, y_0). \qquad (9а)$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)\right] = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0. \qquad (9б)$$

Обз-ив через $\Delta\delta = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ и учитывая, что $\Delta\delta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, вместо (9б) будем иметь

$$\lim_{\Delta\delta\to 0}\Delta z = 0. \qquad (9в)$$

**о5**. Фк-я $f(x, y)$, непр-ая в каждой тч. обл-ти $X$, наз. непр-ой в этой обл., т.е. вместо (9б) выполняется усл.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-f\left(x, y\right)\right] = 0 \ \forall\ x \in X. \qquad (10)$$

Из фм-ы (10) следует, что

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \alpha, \qquad (10а)$$

где $\alpha$ – б.м.в. при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Т.о., если фк. $f(x, y)$ непр-на, то зн-ия ее в двух беск. близких тч. отличаются друг от друга на б.м.ф.

Если в нек-ой тч. $M_0(x_0, y_0) \in X$ не выполнятся усл. (9а) или (10а), то тч. $M_0(x_0, y_0)$ наз. тч-ой разрыва фк-и $f(x, y)$.

**п3**. Фк. $z = x^2 + y^2$ непр-на всюду, т.к. $\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2)] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0$.

**п4**. Фк. $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ опр-на во всех тч., кроме $x = 0$, $y = 0$, и тч. $M_0(0, 0)$ яв-ся тч-й разрыва.

**2°. Частные приращения и частные производные функций**. Рас-им непр. фк-ю $z = f(x, y)$ в нек-ой обл. $D$. Дадим пер-ой $x$ приращение (прщ.) $\Delta x$, тогда $z$ получит прщ-ие $\Delta_x z$, т.е. $z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y)$, откуда получим

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \qquad (11)$$

анч-но получим

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (12)$$

Данные величины наз. частными (част.) прщ. фк-и ств-но по $x$ и по $y$. Иногда вместо $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ пишут $\Delta_x f(x, y)$ и $\Delta_y f(x, y)$.

Если дадим $x$ прщ-ие $\Delta x$, $y$ – прщ. $\Delta y$, то $z$ получит прщ. $\Delta z = \Delta f(x, y)$, т.е. $z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, откуда

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (13)$$

– полное прщ. фк-и $f(x, y)$.

Заметим, что из фм-л (11)-(13) следует, что полное прщ. фк-и, вообще говоря, не равно сумме част. прщ-й этой фк-и, т.е.

$$\Delta f(x, y) \neq \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y). \qquad (14)$$

**п5**. Найти прщ-ие фк-и $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$, где $x$ изменилось (изм.) от 2 до 2,2 и $y$ – от 1 до 0,9.

Р. Находим $\Delta x = 2{,}2 - 2 = 0{,}2$; $\Delta y = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$; $f(x, y) = f(2, 1) = 2^2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 4$, $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(2{,}2; 0{,}9) = 2{,}2^2 + 2{,}2 \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}9^2 = 5{,}20$, сдт-но, $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 5{,}20 - 4 = 1{,}20$. Выч-им $f(x + \Delta x, y) = f(2{,}2; 1) = 2{,}2^2 + 2{,}2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 5{,}04$, тогда $\Delta_x f(x, y) = 5{,}04 - 4 = 1{,}04$; $f(x, y + \Delta y) = f(2; 0{,}9) = 2^2 + 2 \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}9^2 = 4{,}18$, тогда $\Delta_y f(x, y) = 4{,}18 - 4 = 0{,}18$. Отсюда $\Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y) = 1{,}22$, а $\Delta f(x, y) = 1{,}20$, $1{,}20 \neq 1{,}22$, значит, стн. (14) имеет место.

Анч-но опр-ся и записываются част. и полные прщ-ия фк-и трех и более пер-ых, н-р, $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t)$, $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t)$, $\Delta_{xy} z = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t)$.

**о6**. Част. производной (прв.) по $x$ от фк-и $z = f(x, y)$ наз. предел отн-ия част. прщ-я $\Delta_x z$ по $x$ к прщ-ю $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ и обз-ся:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x, y\right)-f\left(x, y\right)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} = z'_x = f'_x\left(x, y\right). \qquad (15)$$

Анч-но опр-ся

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y). \qquad (16)$$

Выясним геомч. смысл част. прв-х $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$. Геомч. изб-ем фк-и $z = f(x, y)$ яв-ся нек-ая пвх-ть $P$ (рис. 9). Полагая $y = \text{const}$, получаем плоскую крв. $\Gamma_x$, представляющую собой сечение пвх-ти $P$ ствщ-ей пл-ю, прл-ой крд. пл-ти $Oxz$. Пусть $MK$ – кас-ая к крв. $\Gamma_x$ в тч. $M(x, y, z)$ и $\alpha$ – угол, образованный этой кас. с плж. направлением (нпв.) оси $Ox$. Т.к. $\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right]_{y=\text{const}}$, на основании геомч. смысла обычной прв-ой имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$. Анч-но, если $\Gamma_y$ есть сечение пвх-ти $P$ пл-ю $x = \text{const}$ и $\beta$ – угол, образованный осью $Oy$ и кас-ой $ML$ в тч. $M(x, y, z)$ к крв. $\Gamma_y$, то $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta$.

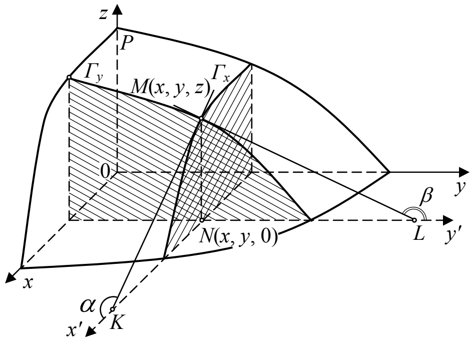


Рис. 9

Заметим, что если от фк-и $z = f(x, y)$ берется прв-я $\frac{\partial z}{\partial x}$, то $y$ считается пст-ым; если находится $\frac{\partial z}{\partial y}$, то пст. считается $x$.

**п6**. Найти част. прв-ые фк-й: 1) $z = x^2\sin y$; 2) $x = x^y$.

Р. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos y$; 2) $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y\ln x$.

Анч-но опр-ся част. прв-ые фк-и любого числа пер-ых.

**п7**. Найти част. прв-ые фк-и $u = x^2 + y^2 + xtz^3$.

Р. $u'_x = 2x + tz^3$, $u'_y = 2y$, $u'_t = xz^3$, $u'_z = 3xtz^2$.

**3°. Полный дифференциал и его применение в приближенных вычислениях**. По опр-ю част. прв-й по $x$ имеем $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_1$ (где $\alpha_1$ – б.м.в.) $\Rightarrow$

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \alpha_1\Delta x. \qquad (17)$$

Анч-но получим

$$\Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\Delta y. \qquad (18)$$

Учитывая (17) и (18), получим полное прщ. фк-и $z = f(x, y)$:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \Rightarrow$

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y, \qquad (19)$$

где $\Delta_x z = \Delta_x f(x, y + \Delta y)$, поэтому противоречий с стн-ем (14) нет.

Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ – пст-ые, не звщ-ие от $\Delta x$, $\Delta y$. Поэтому сумма $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ наз. главной (линейной) частью. А сумма $\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y = \omega(\Delta x, \Delta y)$ – б.м.в. более высокого порядка, чем рст-ие $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$.

Фк. $z = f(x, y)$ наз. дифм-ой в тч. $P = P(x, y)$, если ее полное прщ. $\Delta z$ можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \tag{20}$$

где $\Delta x$, $\Delta y$ – любые прщ. арг-ов $x$, $y$ тч-и $P$.

Главная часть полного прщ. фк-и $f(x, y)$ наз. ее полным диф. и обз-ся $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Если $z = x$, то $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x + 0$ или $\mathrm{d}x = \Delta x$; если $z = y$, то $\mathrm{d}z = \mathrm{d}y = 0 + 1 \cdot \Delta y$ или $\mathrm{d}y = \Delta y$. Тогда получим

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{21}$$

**зм1**. Отметим, что сущв-ие диф-ла фк-и одной пер. оказалось экв-ым сущв-ию ее прв-ой. А для сущв-ия диф-ла фк-и двух и более пер-ых требуется не только сущв-ие част. прв-х, но и их непр-сть. Это подтверждается сд-ми теоремами.

**т1**. Если фк. $z = f(x, y)$ в тч. $P(x, y)$ диф-ма, т.е. имеет место

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y, \tag{21a}$$

то она имеет в этой тч. част. прв-ые, причем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

**т2**. Если част. прв-ые $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ фк-и $z = f(x, y)$ непр-ны в нек-ой окрс-ти тч. $P(x, y)$, то эта фк. в тч. $P(x, y)$ диф-ма и врж-ся фм-й (21).

Д-во т1 и т2 см. в [14].

Геомч. смысл диф-ла демонстрируем на сд-ем

**п8**. Найти диф-л фк-и $z = xy$.

Р. Фк-ю $z$ можно расв-ть как пщ. пуг-ка со сторонами $x$ и $y$ (рис. 10). Давая сторонам прщ-ие $\Delta x$ и $\Delta y$, получим прщ-ие $\Delta z$ пщ-ди $z$, представляющее собой пщ. «каймы»:

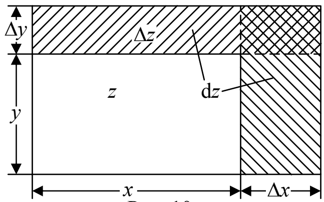


Рис. 10

$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$. Главная часть этого прщ-ия при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ состоит из двух пуг. со сторонами $y$, $\Delta x$ и $x$, $\Delta y$, и это есть диф-л $\mathrm{d}z$ пщ-ди $z$, т.е. $\mathrm{d}z = y\Delta x + x\Delta y$ или $\mathrm{d}z = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, т.к. $\Delta x = \mathrm{d}x$, $\Delta y = \mathrm{d}y$. Тогда $\Delta z = \mathrm{d}z + \Delta x\Delta y$.

**п9**. Найти полный диф-л фк-и $z = x^3\mathrm{tg}y$.

Р. Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\mathrm{tg}y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{\cos^2 y}$, тогда $\mathrm{d}z = 3x^2\mathrm{tg}y\mathrm{d}x + \dfrac{x^3}{\cos^2 y}\mathrm{d}y$.

Анч-но опр-ся полный диф. фк-и любого числа пер-ых.

**п10**. Найти полный диф. фк-и $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

Р. Находим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z$, тогда

$$\mathrm{d}u = 2e^{x^2+y^2}\sin^2 z\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + \mathrm{ctg}z\mathrm{d}z).$$

Теперь рас-им приложение (прлж.) полного диф. в прж. выч-ях. Пусть фк. $z = f(x, y)$ диф-ма, т.е. имеет место (20):

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y),$$

где $\omega(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Тогда $\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{22}$$

Анч. фм-а имеет место для фк-и трех и более пер-ых.

**п11**. Выч-ть $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

Р. Рас-им фк-ю $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)$ и применим фм-у (22).

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right) + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]'_x \Delta x + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]'_y \Delta y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right) +$$

$+ \dfrac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x - \dfrac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y$. Здесь $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$. Сдт-но,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-0{,}03}{1+0{,}02}-1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}-1\right) + \frac{1}{1^2+(2-1)^2}(-0{,}03) - \frac{2}{1^2+(2-1)^2}\cdot 0{,}02 =$$

$= \operatorname{arctg} 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}03 - 0{,}02 = \dfrac{\pi}{4} - 0{,}015 - 0{,}02 \approx 0{,}75.$

**п12**. Центральный угол кругового сектора, равный 80°, нх-мо уменьшить на 15′. Насколько надо удлинить радиус $r = 30$ см, чтобы компенсировать изм-е пщ-ди?

Р. Имеем $S = \dfrac{\pi r^2}{2\pi}\varphi = \dfrac{r^2\varphi}{2}$ – пщ. сектора. По усл., $\Delta S = \dfrac{\partial S}{\partial r}\Delta r + \dfrac{\partial S}{\partial \varphi}\Delta\varphi = 0$, где $r = 30$ см,

$\varphi = 80°$, $\Delta\varphi = -15' = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{\circ}$. Отсюда получим $\Delta r = -\dfrac{\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Delta\varphi}{\frac{\partial S}{\partial r}} = -\dfrac{\frac{r^2}{2}\Delta\varphi}{\frac{2r\varphi}{2}} = -\dfrac{r\Delta\varphi}{2\varphi} = -\dfrac{30\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{2\cdot 80} =$

$= \dfrac{3}{64}$ см $\approx 0{,}5$ мм.

**4°. Производные сложных и неявных функций. Инвариантность дифференциала**. Пусть дана сложная фк. $z = f(x, y)$ (где $x = x(t)$, $y = y(t)$), дифм-я в тч. $P(x, y)$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, зная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$.

Т.к. фк. $z$ диф-ма, то ее полное прщ. врж-ся так:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \tag{23}$$

причем $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\omega}{\rho} = 0$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\omega(\Delta x, \Delta y) = \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$. Разделив (23) на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega}{\Delta t}. \tag{23а}$$

Учитывая, что $\Delta\rho \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (т.к. $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ в силу непр-сти $x(t)$, $y(t)$), найдем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\omega}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega}{\rho}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega}{\rho}\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = 0\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0.$$

Тогда (23а) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{23б}$$

**зм2**. Есль роль $t$ играет $x$, т.е. $x = x$, $y = y(x)$, то $z = f(x, y) = f(x, y(x))$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dx} = 1$ и вместо (23б) получим

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,. \tag{23в}$$

**зм3**. Если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то $z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$ и, используя (23б), находим

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}\,; \tag{23г}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}\,. \tag{23д}$$

Пусть фк. задана в неявном виде

$$F(x, y) = 0. \tag{24}$$

Разрешив ур. (24) отс-но $y$, явное (вопрос сущв-ия явного ур. см. в 8°: 9.1) ур. $y = \varphi(x)$, подс-ив к-ое в (24), получим $F(x, \varphi(x)) = 0$. Тогда, используя (23в), будем иметь $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \times$ $\times\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Отсюда получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,. \tag{24а}$$

Если фк. $z = z(x, y)$ задана неявно, $F(x, y, z) = 0$, то при нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ мы считаем $y$ $[x]$ пст-ым и вместо (24а) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x}{F'_z}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_y}{F'_z}\,. \tag{24б}$$

Заметим, что фм-у (24б) можно получить и используя фм-ы (23г), (23д).

Анч. фм-ы легко получить (это предоставляем читателю!) для фк-и трех и более пер-ых.

**п13**. Найти прв-ю $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, если $z = x^y$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

Р. По (23б) находим $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \left(x^y\right)'_x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(x^y\right)'_y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = yx^{y-1}\cos t + x^y\ln x \cdot 2t = t^2(\sin t)^{t-1}\cos t +$ $+\ 2t(\sin t)^{t^2}\ \ln\sin t = t(\sin t)^{t^2-1}\,(t\cos t + 2\sin t\ln\sin t)$.

**п14**. Д-ть, что $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$.

Р. По (23г), (23а) находим $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\ \times$ $\times\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot 1 = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1\ +$ $+\ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)(-1) = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y+x}{x^2+y^2}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y-x}{x^2+y^2} + \frac{y+x}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{2y}{x^2+y^2} = \dfrac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2} = \dfrac{2(u-v)}{2(u+v)^2} = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$ .

**п15**. Найти прв-ю $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ неявной фк. $2^y - x^2 - 1 = 0$.

Р. По (24) находим $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-2x}{2^y \ln 2} = \dfrac{2x}{2^y \ln 2}$ .

Теперь рас-им инвариантность формы полного диф-ла. Как известно, для диф-а фк-и одной пер. $y = f(x)$ имеет место инвариантность его формы, т.е. врж-ие диф-а $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ остается верным незв-мо от того, яв-ся ли $x$ незв. пер-ой или фк-ей нек-ой пер.: $x = x(t)$ (см. 2°: 7.2). Анч. утв-ие верно и для фк-и нескольких пер-ых.

**т3**. Полный диф-л фк-и $n$ пер-ых $z = f(x, y, \ldots, t)$ сохраняет свою форму

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y + \ldots + \frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t$$

незв-мо от того, яв-ся ли $x, y, \ldots, t$ незв. пер-ми или фк-ми от др. пер-ых.

Д. Огр-мся д-ом для фк-и двух пер. $z = f(x, y)$. Если $x$, $y$ – незв. пер-ые, то полный диф-л имеет вид

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{25}$$

Пусть теперь $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, тогда $z = f(x, y) = f[x(u, v), y(u, v)] = F(u, v)$. Учитывая, что $\mathrm{d}x = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y = \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$, покажем справедливость (25) и здесь: $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u +$ $+ \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u +\right.$ $\left.+ \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ ■

**5°. Производная по направлению и градиент**. Сначала напомним, что скалярным (скн.) полем наз. часть или все пр-во, каждой тч. $P$ к-ой ств-ет скн. вел-на $u = u(P) = u(x, y, z)$, назм-ой скн. фк-й. Н-р, скн. полями яв-ся: неодн. тело с плотностью $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$ в каждой тч. $P$, распределение (рсп.) темп-ры в данном теле, поле рсп-ия электрического потенциала и д.т. Обратно, всякая фк. $u = u(x, y, z)$ задает скн. поле в трехмерном пр-ве.

Скн-ые поля геомч-ки изб-ся с помощью пвх-ей уровня, где скн. фк-я пст-на, т.е. $u(x, y, z) = C$. В част., для двухмерного случая плоские скн. поля изб-ся геомч-ки с помощью линий уровня $u(x, y) = C$ (см. о2: 9.1).

Пусть дана фк. $u = u(x, y, z)$ скн. поля. Рас-им тч. $P(x, y, z)$, из к-ой выходит луч $l$ (рис. 11) в направлении (нпв.) едч. вк-а

$$l^\circ = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}, \tag{26}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы вк. $l^\circ$ с осями крд-т. Пусть $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ – другая тч. луча $l$.

Прщ-ем фк-и $u = u(x, y, z)$ в нпв-и $l$ наз. разность

$$\Delta_l u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z), \tag{26a}$$

Обз-им через $\Delta l = PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ .

**о7**. Прв-ой фк-и $u = u(x, y, z)$ в тч. $P(x, y, z)$ по нпв-ию $l$ наз. предел отн-ия прщ-ия фк-и $\Delta_l u$ к $\Delta l$ при $\Delta l \to 0$ и обз-ся

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta l}. \tag{27}$$

Заметим, что если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial l} < 0\right)$, то фк. $u = u(x, y, z)$ в непв-и $l$ взр-ет (уб-ет), т.е. прв-я по нпв-ю $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изм-ия фк-и $u = u(x, y, z)$ в этом нпв-и.

Прв-ю по нпв-ю врз-им через част. прв. Из рис. 11 имеем

$$\Delta x = \Delta l\cos\alpha,\ \Delta y = \Delta l\cos\beta,\ \Delta z = \Delta l\cos\gamma. \tag{27а}$$

Т.к. фк. $u$ диф-ма, то ее прщ-я $\Delta u$ в тч. $P(x, y, z)$ имеет вид

$$\Delta u = u'_x(x,y,z)\,\Delta x + u'_y(x,y,z)\,\Delta y + u'_z(x,y,z)\,\Delta z + \omega = u'_x\,\Delta x + u'_y\,\Delta y + u'_z\,\Delta z + \omega, \tag{27б}$$

причем $\omega \to 0$ быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, т.е. $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\omega}{\rho} = 0$.

Если расв-ть прщ-ие фк-и вдоль луча $l$, то $\Delta u = \Delta_l u$, $\rho = \Delta l$. Тогда стн. (27б) принимает вид

$$\Delta_l u = u'_x\,\Delta l\cos\alpha + u'_y\,\Delta l\cos\beta + u'_z\,\Delta l\cos\gamma + \omega. \tag{27в}$$

Разделив (27в) на $\Delta l$, переходя к пределу при $\Delta l \to 0$ и учитывая $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\omega}{\Delta l} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\omega}{\rho}$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = u'_x\cos\alpha + u'_y\cos\beta + u'_z\cos\gamma. \tag{28}$$

Из фм-ы (28) следует, что если вк. $l°$ совпадает с одним из ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, то прв-я по нпв-ю $l$ совпадает с ствщ-ей част. прв. этой фк. Н-р, если $l° = \boldsymbol{i}$, то $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, сдт-но, $\frac{\partial u}{\partial l} = u'_x(x,y,z)$.

**о8**. Градиентом в тч. $P(x, y, z)$ скн-го поля, заданного дифм фк-ей $u = u(x, y, z)$ наз. фк. grad$u$ (или $\nabla u$ (где $\nabla$ – набла)), равный

$$\mathrm{grad}u = \nabla u = u'_x\,\boldsymbol{i} + u'_y\,\boldsymbol{j} + u'_z\,\boldsymbol{k}. \tag{29}$$

Т.о., каждая тч. $P(x, y, z)$ скн-го поля хркз-ся скн. фк-ей $u = u(P)$ и вк-ом $\nabla u(P)$.

Из фм-л (29) и (26) получим еще раз прв-ю нпв-ю

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot l° = (u'_x\,\boldsymbol{i} + u'_y\,\boldsymbol{j} + u'_z\,\boldsymbol{k})(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}) = u'_x\cos\alpha + u'_y\cos\beta + u'_z\cos\gamma. \tag{29а}$$

**п16**. Найти прв-ю фк-и $u = x^2 - 2xz + y^2$ в тч. $P_1(1, 2, -1)$ по нпв-ю к тч. $P_2(2, 4, -3)$.

Р. Находим $l = P_1P_2 = (1-1)\boldsymbol{i} + (4-2)\boldsymbol{j} + (-3+1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, отсюда опр-им едч. вк-р $l° =$

$$= \frac{l}{|l|} = \frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}.\quad \left.\begin{array}{l|l} u'_x = 2x-2z & u'_x(1,\ 2,\ -1) = 4 \\ u'_y = 2y & u'_y(1,\ 2,\ -1) = 4 \\ u'_z = -2x & u'_z(1,\ 2,\ -1) = -2 \end{array}\right|$$

, отсюда по (28) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

**п17**. Найти градиент фк-и $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в тч. $P_0(2, -1, 1)$.

$$\text{Р.}\quad \left.\begin{array}{l|l} u'_x = 2x & u'_x(2,\ -1,\ 1) = 4 \\ u'_y = 4y & u'_y(2,\ -1,\ 1) = -4 \\ u'_z = -2z & u'_z(2,\ -1,\ 1) = -2 \end{array}\right|\quad \nabla u(P_0) = u'_x\,(2,-1,1)\boldsymbol{i} + u'_y\,(2,-1,1)\boldsymbol{j} + u'_z\,(2,-1,1)\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Между grad$u$ и прв-ой по нпв-ю $\frac{\partial u}{\partial l}$ в нек-ой тч. $P$ имеется связь, к-ую устанавливает

**т4**. Проекция вк-а grad$u$ на едч. вк-р $l° = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ равна прв-й фк-и по нпв. $l$:

$$\text{Пр}_{l°}\nabla u = \frac{\partial u}{\partial l}. \tag{30}$$

Д. Учитывая, что пркц-я какого-либо вк. на едч. вк-р равна скн. пзв-ю этих вк-ов, и используя (28а), получим $\text{Пр}_{l°}\nabla u = \nabla u \cdot l° = u'_x\cos\alpha + u'_y\cos\beta + u'_z\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$ ■

Если обз-им через $\varphi$ угол между $l°$ и $\nabla u$, то $\text{Пр}_{l°}\nabla u = |\nabla u|\cos\varphi$. Тогда в силу (30) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\nabla u|\cos\varphi. \tag{30а}$$

Если нпв-ия $l°$ и $\nabla u$ совпадают ($\varphi = 0$), то прв-я имеет нб. зн-ие:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\nabla u|. \tag{30б}$$

Все сказанное имеет место и для плоского скн. поля.

**п18**. Найти нб. скорость взр-ия фк-и $z = x^2y - 5y^3$ в тч. $P_0(2, 1)$.

Р. Находим $\nabla z = z'_x\,\boldsymbol{i} + z'_y\,\boldsymbol{j} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 15y^2)\boldsymbol{j}$, $\nabla z(P_0) = 4\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j}$. Тогда по (30б) нб. скорость взр-ия равна $|\nabla z(P_0)| = \sqrt{4^2 + (-11)^2} = \sqrt{137}$ .

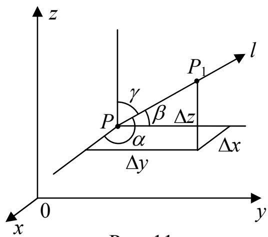


Рис. 11

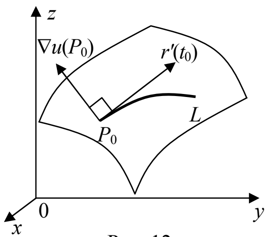


Рис. 12

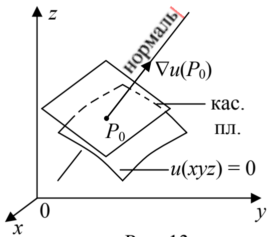


Рис. 13

**6°. Взаимное расположение градиента и поверхности уровня в точке**. Выясним взаимное расположение grad$u$ в данной тч. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и пвх-ти уровня, проходящей через эту тч. Пусть

$$u(x, y, z) = C_0 \text{ или } u(x, y, z) - C_0 = 0. \tag{31}$$

Рас-им кривую (крв.) $L$, лежащую на пвх-ти (31) и проходящую через тч. $P_0$ (рис. 12). Пусть крв. $L$ задана пармч-ки с дифм. фк-ми: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Крв. $L$ лежит на пвх-ти, поэтому $u[x(t), y(t), z(t)] - C_0 = 0$. Тогда по (23б) имеем $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial u}{\partial y}y'(t) + \dfrac{\partial u}{\partial z}z'(t)$. В част., при $t = t_0$ получим

$$u'_x(x_0, y_0, z_0)\,x'(t_0) + u'_y(x_0, y_0, z_0)\,y'(t_0) + u'_z(x_0, y_0, z_0)\,z'(t_0) = 0, \tag{31а}$$

т.е. (31а) есть скн. пзв-ие вк-ов $\nabla u(P_0) = u'_x(P_0)\,\boldsymbol{i} + u'_y(P_0)\boldsymbol{j} + u'_z(P_0)\,\boldsymbol{k}$ и $r'(t_0) = x'(t_0)\boldsymbol{i} + y'(t_0)\boldsymbol{j} + z'(t_0)\boldsymbol{k}$. Тогда вместо (31а) получим

$$\nabla u(P_0)\cdot r'(t_0) = 0. \tag{31б}$$

Предположим, что $\nabla u(P_0) \neq 0$, тогда в силу (31б) $\nabla u(P_0) \perp r'(t_0)$, нпвн-му по кас-ой к крв. $L$ в тч. $P_0$.

Т.к. крв. $L$ была выбрана произвольно, то приходим к выводу, что если скн. поле задано дифм. фк-ей $u = u(x, y, z)$, тогда все кас-ые, проведенные в тч. $P_0$ к линиям (лежащим на пвх-ти уровня и проходящим через тч. $P_0$), расположены в одной пл., прп-ой к $\nabla u(P_0)$ при условии $\nabla u(P_0) \neq 0$.

**7°. Касательная плоскость и нормаль к поверхности**. Пусть дифм. фк-я $u = u(x, y, z)$ опр-ет скн. поле, причем в тч. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\nabla u(P_0) \neq 0$. Рас-им пвх-ть уровня (рис. 13).

$$u(x, y, z) = 0. \tag{32}$$

Проведем кас-ю пл. к пвх-ти (32) в тч. $P_0$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{32а}$$

где $n = (A, B, C)$ – нормаль (норм.) к кас. пл-ти. Согласно (31б) вк-р $\nabla u(P_0) = u'_x(P_0)\,\boldsymbol{i} + u'_y(P_0)\boldsymbol{j} + u'_z(P_0)\,\boldsymbol{k} = \left(u'_x(P_0),\ u'_y(P_0),\ u'_z(P_0)\right) = n$ также есть норм. к кас. пл-ти. Тогда (32а) принимает вид

$$u'_x(P_0)\,(x - x_0) + u'_y(P_0)\,(y - y_0) + u'_z(P_0)\,(z - z_0) = 0, \tag{32б}$$

Пусть пвх-ть (32) в тч. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет кас. пл-ть. Пм., проходящая через тч. $P_0$ прп-но к кас. пл-ти, наз. норм-ю к пвх-ти в тч. $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Т.к. вк. $\nabla u(P_0)$ нпв-ен вдоль норм-и, то канч. ур-ие норм-и имеет вид

$$\frac{x-x_0}{u'_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{u'_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{u'_z(P_0)}. \tag{32в}$$

Легко найти также едч. вк-р норм-и

$$n^\circ = \frac{\nabla u(P_0)}{|\nabla u(P_0)|} = \frac{u'_x\boldsymbol{i} + u'_y\boldsymbol{j} + u'_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}}. \tag{32г}$$

Из (32г) получим нпвщ-ие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{u'_x}{\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}},\ \cos\beta = \frac{u'_y}{\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}},\ \cos\gamma = \frac{u'_z}{\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}}. \tag{32д}$$

Если пвх-ть задана ур-ем $z = f(x, y)$, то ее можно записать в виде $z - f(x, y) = u(x, y, z)$. Тогда $u'_x = -f'_x$, $u'_y = -f'_y$, $u'_z = 1$ и, сдт-но, $\nabla u(P_0) = -f'_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} - f'_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = -f'_x\,\boldsymbol{i} - f'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

А стн-ия (32б)-(32д) примут вид

$$-f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) + (z-z_0) = 0 \text{ или } z-z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0), \tag{33}$$

$$\frac{x-x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{1}, \tag{33а}$$

$$n^\circ = \frac{\nabla u(P_0)}{|\nabla u(P_0)|} = \frac{-f'_x\boldsymbol{i} - f'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}. \tag{33б}$$

$$\cos\alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},\ \cos\beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}. \tag{33в}$$

**п19**. Найти ур-ия кас-ой пл. и норм-и к однополостному гпрби. $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ в тч. $P_0(2, -1, 1)$ (см. п17).

Р. Находим $\nabla u(P_0) = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Тогда ур-ие кас. пл-ти в тч. $P_0$ имеет вид $4(x-2) - 4(y+1) - 2(z-1) = 0$ или $2x - 2y - z - 5 = 0$, а ур-ие норм-и $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{-2}$ или $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

**п20**. Найти ур-ие кас. пл-ти к элч. парби-ду $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ в тч. $P_0(1, -2, 3)$.

Р. Из $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ находим $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = y \Rightarrow f'_x(1, -2) = 2$, $f'_y(1, -2) = -2$.

По (33) ур-ие кас. пл-ти будет $z - 3 = 2(x-1) - 2(y+2)$ или $2x - 2y - z - 3 = 0$.

**8°. Теорема существования неявной функции**. Напомним, что неявная фк. одной пер. опр-ся ур-ем

$$F(x, y) = 0. \tag{34}$$

Ур. (34) в нек. случаях может и не опр-ть фк-и, н-р, ур. $x^2 + y^2 + 5 = 0$ не имеет никаких дсв. корней, значит, мы не можем расв-ть $y$ как фк-ю от $x$. А для неявной фк-и $2x + 3y - 6 = 0$ получим явную фк. $y = 2 - \frac{2}{3}x$; неявное ур. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ представляет две явные фк.: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$, каждая из к-ых определена в инр-е $[-1, 1]$. Чтобы перейти к явному заданию фк-и, нужно разрешить данное ур. отс-но $y$. Такой переход не всегда легок, а иногда и вовсе невозможен. Н-р, неявное ур. $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ врз-ть через $y$ трудно, т.к. для этого нужно р-ть ур. третьей сп. А ур. $y + x2^y - 1 = 0$ вообще нельзя р-ть алгч-ки отс-но $y$, т.е. нельзя явно врз-ть $y$ через $x$.

Выясним сейчас, при каких усл-ях можно утв-ть, что заданное ур. (34) дсв-но опр-ет одну из пер-ых как фк-ю др-й. Имеет место теорема, к-ую примем без д-ва.

**т5**. Пусть фк. $F(x, y) = 0$ непр-на вместе со своими част. прв-ми в какой-нибудь окрс-ти тч. $M_0(x_0, y_0)$. Если

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ и } F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то ур. (34) при зн-ях $x$, близких к $x_0$, имеет едн., непр-но звщ-е от $x$ р-ие $y = \varphi(x)$, такое, что $\varphi(x_0) = y_0$. Фк-я $\varphi(x)$ имеет также непр. прв-ю.

Разъясним смысл этой теоремы на примерах.

1) Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$. Ур. $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ яв-ся ур-ем окр-ти. В любой тч. окр-ти $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 \neq 0$ (рис. 14) все усл-я теоремы выполнены:

$$x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0,\ F'_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

Фк. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , где знак у корня выбирается такой же, как у $y_0$, и яв-ся едн. непр. фк-ей, удщ-ей заданному ур-ю и такой, что $\sqrt{R^2 - x_0^2} = y_0$.

2) Пусть неявная фк. опр-на ур-ем

$$x^3y + \ln y - x = 0. \tag{34а}$$

Здесь $F(x, y) = x^3y + \ln y - x$ в тч. $M_0(1, 1)$ имеет зн. $F(1, 1) = 0$. Част. прв-ые $F'_x = 3x^2y - 1$ и $F'_y = x^3 + \dfrac{1}{y}$ непр-ны в окрс-ти этой тч. и $F'_y(1,1) = 2 \neq 0$, значит, сущ-ет фк. $y = \varphi(x)$, обращающая данное ур. в тожд-во и такая, что $\varphi(1) = 1$. Но врз-ть $\varphi(x)$ в виде элр-ой фк. от $x$ нельзя, т.к. заданное ур. алгч-ки не разрешимо отс-но $y$. Част. зн-ие фк-и $\varphi(x)$ можно найти, задаваясь числовыми зн. $x$ сд. образом: ур. (34а) запишем в виде $\ln y = x - x^3y$ и построим грф-к его левой части: $u = \ln y$ и грф-ки правой части при различных зн. $x$: это пм-ые $u = x - x^3y$ (рис. 15). Зн-я $y$ в тч-х перч-ия этих пм. с лгрч-ой фк. и будут зн-ми фк-и $y = \varphi(x)$. При $x = 1$ пм. $u = 1 - y$ перк-ет лгрч. фк-ю на оси $Oy$ в тч. $y = 1$. Это ств-ет нач. тч-е $M_0$. Пользуясь этим анализом, читатель сам сможет построить схематический грф-к фк-и $y = \varphi(x)$ в инр-е $[0, \infty[$, найдя $y' = -\dfrac{3x^2y - 1}{x^3 + 1/y}$, затем max и min фк-и.

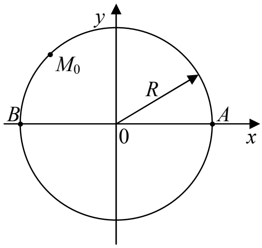



Рис. 14

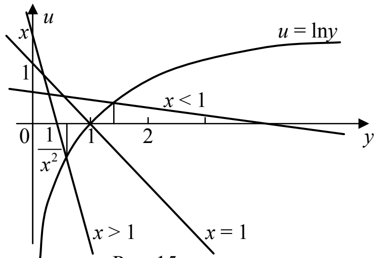



Рис. 15

Неявная фк. двух пер. опр-ся ур-ем $F(x, y, z) = 0$, для к-го имеет место

**т6**. Пусть фк. $F(x, y, z)$ непр-на вместе со своими част. прв-ми в какой-нибудь окрс-ти тч. $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ и } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то ур. $F(x, y, z) = 0$ в нек-ой окрс-ти тч. $(x_0, y_0)$ имеет едн., непр-но звщ-е от $x$ и $y$ р-ие $z = \varphi(x, y)$, такое, что $\varphi(x_0, y_0) = z_0$. Фк. $\varphi(x, y)$ имеет также непр-ые част. прв-ые.

Отметим, что если в тч. $M_0$ прв-я $F'_z = 0$, а, скажем, $F'_y \neq 0$, то ур. $F(x, y, z) = 0$ может не опр-ять $z$ как фк-ю $x$ и $y$, но опр-ет $y$ как фк-ю $x$ и $z$.

Заметим также, что т6 можно обобщать для фк-и $n$ пер-ых $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

# ЛЕКЦИЯ 25

## 9.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**1°. Частные производные высших порядков**. Допустим, что фк. $z = f(x, y)$ имеет част. прв-ые $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ (первого порядка), к-ые в свою очередь яв-ся фк-ми пер-ых $x$, $y$. Поэтому можно снова найти их част. прв-ые (второго порядка), обз-мые $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, т.е. всего $2^2 = 4$.

Прв-ые второго порядка можно снова дифв-ть по $x$ и $y$. Тогда получим част. прв-ые третьего порядка (их будет восемь): $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ и т.д. Так $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ есть прв-ая $n$-го порядка.

**п1**. Выч-ть част. прв-ые 2-го порядка от фк-и $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Р.
$$\begin{array}{l|l|l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{array}$$

Возникает вопрос, зв-т ли результат дифв-ия от порядка дифв-ия по разным пер-ым, т.е. будет ли всегда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}$ и т.д.

**т1**. Если фк. $z = f(x, y)$ и ее част. прв-ые $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ опр-ны и непр-ны в тч. $M(x, y)$ и в нек-ой ее окрс-ти, то в этой тч. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right)$. (1)

Д. Рас-им врж-ие $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$. (2)

Введем вспомогательную фк. $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Тогда $A$ можно записать в виде $A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Т.к. $f'_x$ опр-на и непр-на в окрс-ти тч. $M(x, y)$, то $\varphi(x)$ диф-ма на отрезке $[x, x + \Delta x]$, тогда, применяя т3 (Лагранжа) из 4°: 7.2, получим $A = \Delta x \varphi'(\bar{x})$, $\bar{x} \in ]x, x + \Delta x[$, но $\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$. Т.к. $f''_{xy}$ опр-на и непр-на в окрс-ти тч. $M(x, y)$, то $f'_x$ диф-ма на отрезке $[y, y + \Delta y]$, тогда, снова применяя т3 (Лагранжа), получим
$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{y} \in [y, y + \Delta y].$$

Сдт-но,
$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{2а}$$

Представив ср. слг-ые (2), получим
$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Введем вспомогательную фк. $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, тогда $A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \Delta y \psi'(\bar{\bar{y}})$, $\bar{\bar{y}} \in ]y, y + \Delta y]$, но $\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x \psi'(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, $\bar{\bar{x}} \in ]x, x + \Delta x[$. Сдт-но,
$$A = \Delta x \Delta y f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \tag{2б}$$

Сравнивая (2а) и (2б), имеем $f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Т.к. $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ непр-ны, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) =$

$= f''_{xy}(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x,y)$. Отсюда следует $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, т.е. (1) ■

**сл1**. Из т1 следует, что если част. прв-ые $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ и $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-p}\partial x^p}$ непр-ны, то

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-p}\partial x^p}.$$

Анч. теорема имеет место и для фк-и любого числа пер-ых.
**п2**. Найти вторые прв. и проверить выполнимость усл-я т1: $z = \sin x \cos x$.

Р. $\left.\begin{array}{l} z'_x = \cos x\cos y \\ z'_y = -\sin x\sin y\end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z''_{xx} = -\sin x\cos y \\ z''_{xy} = -\cos x\sin y\end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z''_{yx} = -\cos x\sin y \\ z''_{yy} = -\sin x\cos y\end{array}\right| \Rightarrow z''_{xy} = z''_{yx}$.

**2°. Полные дифференциалы высших порядков**. Рас-им полный диф-л фк-и $z = f(x, y)$

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

к-ый зв-т от $x$, $y$, d$x$, d$y$. А диф-лы d$x$, d$y$ не зв-т от $x$, $y$.

Полным диф-ом второго порядка наз. полный диф-л от полного диф-ла первого порядка d$z$ при усл-и, что d$x$, d$y$ считаются пст-ми, т.е.

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y \text{ или}$$

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \tag{3}$$

Анч-но опр-ся диф-лы третьего и более порядка:

$$\mathrm{d}^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3 \tag{4}$$

а врж-ие d$^n z$ формально можно записать так: $\mathrm{d}^n z = \left(\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n z$ (4а)

– врж-ие, напоминающее ф-му бинома Ньютона.

Если же требуется найти полный диф-л от сложной или неявной фк., то нх-мо еще учесть известные факты из 4°: 9.1, так если в свою очередь $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$, то вместо (3) возьмем фм-у:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}^2 y. \tag{3а}$$

**п3**. Найти d$^2$z, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Р. Находим $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$. Выч-им вторые част. прв-ые:
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) =$
$= -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ и получим $\mathrm{d}^2 z = \dfrac{2\left[xy\mathrm{d}x^2 + (y^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}y^2\right]}{(x^2+y^2)^2}$.

**п4**. Найти d$^3$z, если $z = \dfrac{xy}{x+y}$.

Р. Находим $z'_x = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; $z'_y = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$ $\Rightarrow$ $z''_{x^2} = -\dfrac{2y^2}{(x+y)^3}$; $z''_{xy} = \dfrac{2xy}{(x+y)^3}$; $z''_{y^2} = -\dfrac{2x^2}{(x+y)^3}$
$\Rightarrow$ $z'''_{x^3} = \dfrac{6y^2}{(x+y)^4}$, $z'''_{x^2y} = \dfrac{2y^2-4xy}{(x+y)^4}$, $z'''_{xy^2} = \dfrac{2x^2-4xy}{(x+y)^4}$, $z'''_{y^3} = \dfrac{6x^2}{(x+y)^4}$ и (4) $\Rightarrow$ $\mathrm{d}^3 z = \dfrac{6}{(x+y)^4}$ [$y^2\mathrm{d}x^3$ +

$+ (y^2 - 2xy)\mathrm{d}x^2y + (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + x^2\mathrm{d}y^2]$.

**п5**. Найти $\mathrm{d}^2z$, если $z = x^y$, где $x = uv$, $y = u + v$.

Р. Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ $= x^y\ln^2 x$. Подставив их в фм-у (3а), получим

$$\mathrm{d}^2z = y(y-1)x^{y-2}\mathrm{d}x^2 + 2(yx^{y-1}\ln x + x^{y-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^y\ln^2 x\mathrm{d}y^2 + yx^{y-1}\mathrm{d}^2x + x^y\ln x\mathrm{d}^2y.$$

Врж-ие $\mathrm{d}^2z$ нашли через $x$, $y$ $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2x$, $\mathrm{d}^2y$. Если учесть, что $x = uv$, $y = u + v$, $\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u +$ $+ \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$; $\mathrm{d}x^2 = (v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v)^2$; $\mathrm{d}^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2 = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$; $\mathrm{d}y = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$; $\mathrm{d}y^2 = (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v)^2$; $\mathrm{d}^2y = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2 = 0$, то врж-е $\mathrm{d}^2z$ через $u$, $v$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ можно записать в виде $\mathrm{d}^2z = (u + v)(u + v - 1)(uv)^{u+v-2}(u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u)^2 + 2((u + v)(uv)^{u+v-1}\ln uv + (uv)^{u+v-1})(v\mathrm{d}u +$ $+ u\mathrm{d}v)(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) + (uv)^{u+v}\ln^2 uv(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v)^2 + 2(u + v)(uv)^{u+v-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

**3°. Формула Тейлора для функции нескольких переменны**х. Для фк-и одной пер. фм-а Тейлора (см. 1°: 7.2) имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}, \qquad (5)$$

где $\theta \in ]0, 1[$. Врж-е $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}$ наз. остаточным членом фм-ы Тейлора в форме Лагранжа (рис. 1).

При $x_0 = 0$ получим фм-у Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}, \ \theta \in ]0, 1[. \qquad (5а)$$

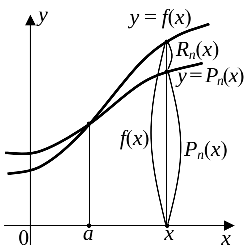



Рис. 1

Разл-ие фк-и двух пер-ых в ряд Тейлора устанавливает сд-ая

**т2**. Пусть фк. $z = f(x, y)$ опр-на и напр-на вместе со всеми своими част. прв-ми до порядка $n + 1$ включительно ($n \geq 1$) в $\delta$-окрс. тч-и $P_0(x_0, y_0)$, тогда для $\Delta x$, $\Delta y$, таких, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, сущ-ет такое число $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $\theta \in ]0, 1[$, что справедлива фм-а (с учетом фм-ы (4а)):

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n + R_n(\Delta x, \Delta y),$$ или короче

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(P_0) + R_n(\Delta x, \Delta y), \qquad (6)$$

где
$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \ \theta \in ]0, 1[. \qquad (6а)$$

Фм. (6) наз. фм-ой Тейлора фк-и $f(x, y)$, а (6а) наз. остаточным членом фм-ы Тейлора в форме Лагранжа.

Д. Пусть $\Delta x$ и $\Delta y$ зафиксированы так, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Тогда тч-и вида $(x_0 + t\Delta x, y_0 +$ $+ t\Delta y)$, где $0 \leq t \leq 1$, лежат на отрезке, соединяющем тч-и $(x_0, y_0)$ и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, и поэтому все принадлежат $\delta$-окрс-ти тч. $(x_0, y_0)$. Имеет смысл суперпозиция фк-й $z = f(x, y)$ и $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $0 \leq t \leq 1$, т.е. сложная фк-я $F(t) = f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, $0 \leq t \leq 1$. (6б)

Причем
$$\Delta z = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \qquad (6в)$$

Поскольку фк. $f(x, y)$ имеет в $\delta$-окрс. тч. $(x_0, y_0)$ $n + 1$ непр. прв-ых, то $F(t)$ имеет на сгм-е $[0, 1]$ непр. прв-ю $(n + 1)$-го порядка и в силу (5а) принимает вид

$$F(1) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},\ 0 < \theta < 1. \tag{6г}$$

Выразив $F^{(k)}(t)$ через прв-ые $f(x, y)$ и полагая в (6б) $t = 1$, получим (6). Дсв-но,

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Для $F''(t)$, опуская для краткости обз-ия арг-ов, получим

$$F''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще, по мт. индукции получим $F^{(k)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$.

Отсюда при $t = 0$ имеем

$$F^{(k)}(0) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0). \tag{6д}$$

Для $k = n + 1$ и $t$ заменив на $\theta t$, получим

$$F^{(n+1)}(\theta t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y). \tag{6е}$$

Подставив теперь (6д) и (6е) в (6г), положив $t = 1$, в силу (6в) получим

$$\Delta z = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y),\ 0 < \theta < 1\ \blacksquare$$

Итак,

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y),\quad 0 < \theta < 1. \tag{7}$$

**зм1**. Фм-у (7) можно обобщить для фк-и $z = f(x_1, \ldots, x_m)$ $m$ пер-ых:

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_1, \ldots, x_m) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} \times f(x_1 + \theta x_1, \ldots, x_m + \theta x_m), \tag{7а}$$

где $\theta \in\ ]0, 1[$. Фм-ы (7) и (7а) можно писать и в таком виде:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta x, y_0 + \theta y), \tag{8}$$

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_1, \ldots, x_m) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(x_1 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m + \theta\Delta x_m). \tag{8а}$$

Стн-ие (8) [или (8а)] наз. фм-ой Тейлора. Част. случай ее при $x_0 = 0$, $y_0$ [или $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$] наз. фм-ой Маклорена. Причем эти фм-ы можно писать и через их полные диф-лы с учетом фм-ы (4а), полагая (н-р, для фм-ы Маклорена (8) $\mathrm{d}x = \Delta x = x - 0 = x$, $\mathrm{d}y = \Delta y = y$).

**п6**. Разложить по фм-е Маклорена до членов 4-го порядка включительно фк-ю $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

Р. Находим $\mathrm{d}f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2 f(x, y) = -\frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-3/2}(-2x\mathrm{d}x -$

$-2y\mathrm{d}y)^2+\dfrac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x\mathrm{d}x^2-2y\mathrm{d}y^2)$; $\mathrm{d}^3f(x,y)=\dfrac{3}{8}(1-x^2-y^2)^{-5/2}(-2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)^3-\dfrac{3}{4}(1-x^2-$ $-y^2)^{-3/2}(-2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)(-2x\mathrm{d}x^2-2y\mathrm{d}y^2)$; $\mathrm{d}^4f(x,y)=-\dfrac{15}{16}(1-x^2-y^2)^{-7/2}(-2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)^4+\dfrac{9}{4}(1-x^2-$ $-y^2)^{-5/2}(-2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)^2(-2x\mathrm{d}x^2-2y\mathrm{d}y^2)-\dfrac{3}{4}(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2x\mathrm{d}x^2-2y\mathrm{d}y^2)^2$.

Полагая $x=y=0$, $\mathrm{d}x=x$, $\mathrm{d}y=y$, имеем: $f(0,0)=1$; $\mathrm{d}f(0,0)=0$; $\mathrm{d}^2f(0,0)=-(x^2+y^2)$; $\mathrm{d}^3f(0,0)=0$; $\mathrm{d}^4f(0,0)=-3(x^2+y^2)^2$. Тогда $f(x,y)\approx f(0,0)+\mathrm{d}f(0,0)+\dfrac{1}{2!}\mathrm{d}^2f(0,0)+\dfrac{1}{3!}\mathrm{d}^3f(0,0)+\dfrac{1}{4!}\mathrm{d}^4f(0,0)$ или

$$(1-x^2-y^2)^{-1/2}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

**п7**. Найти прщ-ие, получаемое фк-ей $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ при переходе от зн-й $x=1$, $y=2$ к зн-ям $x_1=1+h$, $y_1=2+k$.

Р. Выч-им част. прв-ые и их зн-ия в тч. (1, 2):

$f'_x(x,y)=3x^2+3y,\qquad f'_x(1,2)=3\cdot 1+3\cdot 2=9,$

$f'_y(x,y)=-6y^2+3x,\qquad f'_y(1,2)=-6\cdot 4+3\cdot 1=-21,$

$f''_{xx}(x,y)=6x,\qquad f''_{xx}(1,2)=6\cdot 1=6,$

$f''_{xy}(x,y)=3,\qquad f''_{xy}(1,2)=3,$

$f''_{yy}(x,y)=-12y,\qquad f''_{yy}(1,2)=-12\cdot 2=-24,$

$f'''_{xxx}(x,y)=6,\qquad f'''_{xxx}(1,2)=6,$

$f'''_{xxy}(x,y)=0,\qquad f'''_{xxy}(1,2)=0,$

$f'''_{xyy}(x,y)=0,\qquad f'''_{xyy}(1,2)=0,$

$f'''_{yyy}(x,y)=-12,\qquad f'''_{yyy}(1,2)=-12.$

Все дальнейшие прв-ые тожд-но равны нулю. Подс-я найденные результаты в (7), получим: $\Delta f(x,y)=f(1+h,2+k)-f(1,2)=\dfrac{1}{1!}[h\cdot 9+k(-21)]+\dfrac{1}{2!}[h^2\cdot 6+2hk\cdot 3+k^2(-24)]+\dfrac{1}{3!}[h^3\cdot 6+$ $+3h^2k\cdot 0+3hk^2\cdot 0+k^3(-12)]=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$.

Отсюда легко найти $\Delta f(x,y)$, н-р, для $h=0{,}1$ и $k=-0{,}2$.

**4°. Экстремумы функций. Наибольшее и наименьшее значения функции**. Фк. $z=f(x,y)$ имеет max (min) в тч. $P_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $[f(x_0,y_0)<f(x,y)]$ (9)
для любой тч. $P(x,y)$ из окрс-ти тч. $P_0(x_0,y_0)$ и отличных от нее.

Максимум и минимум фк-и наз. экстремумами (эксм.) фк-и.

Если полагать $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ и $f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta f$, то опр-ие эксм-а можно сформулировать так:

Фк. $f(x,y)$ достигает max (min) в тч. $P_0(x_0,y_0)$, если $\Delta f<0$ $(\Delta f>0)$ (9а)
$\forall\ \Delta x,\Delta y$ (дт-но малых).

Эти формулировки переносятся и на фк-и любого числа пер-ых.

**т3** (нх. условие сущв-ия эксм-а). Если $P_0(x_0,y_0)$ есть тч. эксм-а фк-и $f(x,y)$, то

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

в предположении, что $\exists\ f'_x,\ f'_y$ в тч. $P_0$.

Д. Пусть $y=y_0$. Тогда получим фк-ю одной пер. $\varphi(x)=f(x,y_0)$. Т.к. при $x=x_0$ эта фк. имеет эксм. и сущ-ет част. прв-ая, то $\varphi'(x_0)=f'(x_0,y_0)$. Анч-но док-ся, что $f'_y(x_0,y_0)=0$ ■

**зм2**. Фк. $z=f(x,y)$ может иметь эксм. также в тех тч-х, где хотя бы одна из част. прв-ых не сущ-ет. Н-р, фк. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет min в тч. $O(0,0)$, но в этой тч. част. прв-ые не сущ-ют.

Точки, в к-ых $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$ или они не сущ-ют, наз. критическими (крт.) тч-ми фк-и $z=f(x,y)$. Тч-и эксм-а фк-и ищут среди ее крт. тч-к.

**т4** (дт-ые усл. сущв-ия эксм-а). Пусть в нек-ой обл. $M$, содержащей тч-у $P_0(x_0, y_0)$, фк. $f(x, y)$ имеет непр. част. прв-ые до третьего порядка включительно, причем $P_0(x_0, y_0)$ – крт. тч-а, т.е. $f'_x(P_0) = 0$, $f'_y(P_0) = 0$. Пусть $A = f''_{xx}(P_0)$, $B = f''_{xy}(P_0)$, $C = f''_{yy}(P_0)$. Тогда при $x = x_0$, $y = y_0$ фк. $f(x, y)$ имеет:

1) max, если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$;
2) min, если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$;
3) не имеет ни max, ни min, если $AC - B^2 < 0$;
4) имеет или не имеет эксм-а, если $AC - B^2 = 0$ (нх-мы дпнт. иссл-ия).

Д. Учитывая, что $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0$, напишем фм-у Тейлора (7) второго порядка:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(P_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0(\rho)^3, \tag{9б}$$

где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а $\alpha_0 \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$.

Обз-им через $A = \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}$, а $\varphi$ – угол между нпв-ем отрезка $P_0(x_0, y_0)P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и осью $Ox$, тогда $\Delta x = \Delta\rho\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta\rho\sin\varphi$. Подс-я их в (9б), найдем

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + 2\alpha_0\Delta\rho]. \tag{9в}$$

Пусть $A \neq 0$. Разделив и умн-ив на $A$, вместо (9в) получим:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right]. \tag{9г}$$

Рас-им теперь четыре возможных случая:

1) пусть $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$. Тогда члт. дроби состоит из двух неотц. вел-н, к-ые одновременно обращаются в нуль, т.к. первый член обращается в нуль при $\text{tg}\varphi = -\dfrac{A}{B}$, второй – при $\sin\varphi = 0$. Значит, при $A < 0$ дробь есть отц. вел-а; обз-им ее через $-m^2$, тогда

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[-m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho],$$

где $m$ не зв-т от $\Delta\rho$, а $\alpha\Delta\rho \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$. Тогда при дт-но малых $\Delta\rho$ будет $\Delta f < 0$, т.е. согласно (9а) фк. $f(x, y)$ в тч. $P_0(x_0, y_0)$ достигает max;

2) пусть $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Тогда, рассуждая анч-но, получим

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho] \text{ или } \Delta f > 0,$$

т.е. $f(x, y)$ имеет min в тч. $P_0(x_0, y_0)$;

3а) пусть $AC - B^2 < 0$, $A > 0$. В этом случае $\Delta f$ опр-го знака не имеет. Так при перемещении вдоль луча $\varphi = 0$ фк. $f(x, y)$ взр-ет, ибо $\Delta f = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A + 2\alpha_0\Delta\rho] > 0$.

Если же перемещаться вдоль луча $\varphi = \varphi_0$, такого, что $\text{tg}\varphi_0 = -\dfrac{A}{B}$, то $f(x, y)$ уб-ет при $A > 0$, ибо

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_0 + 2\alpha_0\Delta\rho\right] < 0.$$

Сдт-но, фк. $f(x, y)$ не имеет ни max, ни min;

3б) пусть $AC - B^2 < 0$, $A < 0$. Анч-но 3а) устанавливаем, что в этом случае фк-я тоже не имеет ни max, ни min;

3в) пусть $AC - B^2 < 0$, $A = 0$. Тогда $B \neq 0$ и рав-во (9в) принимает вид

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha_0\Delta\rho].$$

При $\varphi \to 0$ имеем $2B\cos\varphi + C\sin\varphi \to 2B$, значит, знак $\Delta f$ зв-т от знака $\sin\varphi$, т.е. $\Delta f > 0$, если $\varphi > 0$ и $\Delta f < 0$, если $\varphi < 0$. Сдт-но, фк. $f(x, y)$ не имеет ни max, ни min;

4) пусть $AC - B^2 = 0$. Тогда знак $\Delta f$ не опр-ен, т.к. при $A \neq 0$ имеем

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right]$$

и при $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{A}{B}$ знак $\Delta f$ опр-ся знаком $2\alpha_0$, т.е. здесь требуется дпнт. иссл-ия, н-р, с помощью фм-ы Тейлора более высокого порядка или каким-нибудь иным способом ■

**п7**. Найти эксм. фк-и $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Р. $\begin{array}{l|l|l|c|l|l} f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 30 & f'_x = 0 & x^2 + y^2 = 10 & + & x^2 + 2xy + y^2 = 16 & x + y = \pm 4 \\ f'_y(x,y) = 6xy - 18 & f'_y = 0 & 2xy = 6 & - & x^2 - 2xy + y^2 = 4 & x - y = \pm 2 \end{array}$

Отсюда находим четыре крт. тч.: $P_1(3, 1)$, $P_2(1, 3)$, $P_3(-1, -3)$, $P_4(-3, -1)$. Находим $A = f''_{x^2} = 6x$, $B = f''_{xy} = 6y$, $C = f''_{y^2} = 6x$ и сост. врж-ие

$\Delta(P) = f''_{x^2}(P)\, f''_{y^2}(P) - \left[f''_{xy}(P)\right]^2 = 36(x^2 - y^2)$, отсюда убеждаемся, что

1) $\Delta(P_1) = 36(3^2 - 1^2) = 36 \cdot 8 > 0$, $f''_{x^2}(P_1) = 6 \cdot 3 = 18 > 0$, тогда $P_1(3, 1)$ – тч. min.

2) $\Delta(P_2) = 36(1^2 - 3^2) = 36(-8) < 0$, тогда в тч. $P_2(1, 3)$ эксм-а нет.

3) $\Delta(P_3) = 36((-1)^2 - (-3)^2) = 36(-8) < 0$, в тч. $P_3(-1, -3)$ эксм-а нет.

4) $\Delta(P_4) = 36((-3)^2 - (-1)^2) = 36 \cdot 8 > 0$, $f''_{x^2}(P_4) = -18 < 0$, тогда $P_4(-3, -1)$ – тч. max.

Т.о., фк-я имеет два эксм-а: в тч. $P_1$ min $f(P_1) = -72$, в тч. $P_4$ max $f(P_4) = 72$.

Теперь рас-им нб-е и нм-е зн-ия фк-и нескольких пер-ых. Пусть фк. $z = f(x, y)$ непр-на в огрн. обл-ти $D$ и диф-ма внутри этой обл. Тогда она имеет в этой обл. нб. и нм. зн-ия, к-ые достигаются внутри обл-ти либо на границе, т.е. в тч-х эксм-а или граничных тч. Поэтому выч-ем зн-ия фк-и в крт. тч-ах этой обл., а также ее зн-ия на границе обл-ти $D$, среди к-ых выбираем нб. и нм.

**п8**. Найти нб. и нм. зн-ия фк-и $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Р. $\begin{array}{l|l|l} z'_x = 2x & 2x = 0 & P_0(0, 0) \text{ – крт. тч. внутри обл-ти;} \\ z'_y = -2y & -2y = 0 & z(P_0) = 0. \end{array}$

Теперь, учитывая, что $x^2 + y^2 = 4$, где $-2 \leq x \leq 2$, получим $z = x^2 - y^2 = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$. Отсюда $z' = 4x$; $4x = 0$. $K_0(0)$ – крт. тч. на границе, т.е. $K_0(0, \pm 2)$. Находим $z(K_0) = -(\pm 2)^2 = -4$. Далее выч-ем $z(-2) = 2(-2)^2 - 4 = 4$, $z(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 = 4$.

Итак, фк. $z = x^2 - y^2$ в тч-х $M_1(-2, 0)$ и $M_2(2, 0)$ окр-ти $x^2 + y^2 = 4$ принимает нб. зн-е $z = 4$, а в тч-х $M_3(0, -2)$, $M_4(0, 2)$ – нм. зн. $z = -4$.

**п9**. Разл-ть данное плж. число $a$ на три плж. слг-ых так, чтобы их пзв-ие имело нб-е зн-ие.

Р. Пусть $x$ – первое слг., $y$ – второе, тогда $a - x - y$ – третье. Их пзв-ие обз-им через $z = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2$.

По усл. задачи $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, т.е. $x + y < a$. Сдт-но, обл-ю опр-ия пер-ых яв-ся $M = \{x = 0, y = 0, x + y = a\}$. Находим

$$\begin{array}{l|l|l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 & y(a - 2x - y) = 0 & \left.\begin{array}{l} M_1(0, 0) \\ M_2(0, a) \\ M_3(a, 0) \end{array}\right\} \text{ лежат на границе обл-ти, где } z = 0, \\ & & \Rightarrow \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ax - x^2 - 2xy & x(a - x - 2y) = 0 & M_4\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right) \text{ – внутри обл-ти.} \end{array}$$

Иссл-ем крт. тч-и, пользуясь дт. усл-ми: $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$. Сост. врж-ие $\Delta(M) = AC - B^2 = 4xy - (a - 2x - 2y)^2 = 4xy - a^2 - 4x^2 - 4y^2 + 4ax + 4ay - 4xy = -a^2 - 4(x^2 + y^2) + 4a(x + y)$. Отсюда получим:

1) $\Delta(M_1) = -a^2 < 0$, тогда в тч. $M_1(0, 0)$ эксм-а нет.

2) $\Delta(M_2) = -a^2 - 4a^2 + 4a^2 = -a^2 < 0$, тогда в тч. $M_2(0, a)$ эксм-а нет.

3) $\Delta(M_3) = -a^2 - 4a^2 + 4a^2 = -a^2 < 0$, тогда в тч. $M_3(a, 0)$ эксм-а нет.

4) $\Delta(M_4) = -a^2 - \dfrac{8a^2}{9} + \dfrac{8a^2}{3} = \dfrac{7a^2}{9} > 0$, $A = -2\cdot\dfrac{a}{3} = -\dfrac{2a}{3} < 0$, тогда в тч. $M_4\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$ имеем max.

Т.о., в тч. $M_4\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$ фк-я имеет max $z = \dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a}{3}\left(a-\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{a^3}{27}$.

Заметим, что данную задачу можно обобщить, разложив на $n$ слг-ых.

До сих пор мы рас-ли эксм-ы, к-ые наз-ют локальными (или безусловными) эксм-ми, а теперь рас-им

**5°. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа**. Пусть требуется найти эксм. фк-и

$$u = f(x, y) \tag{10}$$

при усл., что $x$ и $y$ связаны ур-ем

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{10а}$$

Эту задачу наз-ем задачей условного (усн.) эксм-а, в отличие от задачи безусловного (безусн.) эксм-а, изложенной в 4°.

Если из (10а) найти $y = \psi(x)$ и подс. ее в (10), то задачу усн-го эксм-а можно свести к задаче безусн. эксм-а.

Однако из (10а) не всегда можно опр-ть $y$. В таких случаях для нахождения усн-го эксм-а используют метод множителей (мнж.) Лагранжа.

Находим $\dfrac{du}{dx}$, считая, что $y$ есть фк-я от $x$, т.е. $y = y(x)$: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

Сдт-но, в тч-ах эксм-а
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{10б}$$

Из (10а) находим
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{10в}$$

Умн-ив (10в) на неопрн-ый коэф-т $\lambda$ и сложив с (10б), получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

или
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{10г}$$

что выполняется во всех тч. эксм-а. Подберем $\lambda$ так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ &\varphi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10д}$$

Ур-ия (10д) яв-ся нх. усл-ми усн-го эксм-а. Но не при всяких $x$, $y$, $\lambda$, удщ-их (10д), будет усн. эксм. Поэтому требуется выяснить хрк-р усн-го эксм-а. Это можно опр-ть по знаку второго диф-а фк-и $F(x, y, \lambda)$ (см. (10е)) с учетом того, что $dx$ и $dy$ связаны ур-ем $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$ $(dx^2 + dy^2 \neq 0)$.

А именно, если $d^2F < 0$, то фк $f(x, y)$ имеет усн. max, а если $d^2F > 0$, то усн. min. При $d^2F = 0$ требуется дпнт. иссл-я, н-р, на основании сути задачи.

Заметим, что левые части ур-й (10д) яв-ся част. прв-ми фк-и

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{10е}$$

наз-ой фк-ей Лагранжа, а $\lambda$ наз мнж-ем Лагранжа.

Метод Лагранжа распространяется на иссл-ие усн. эксм-а фк-и любого числа пер-ых.

Пусть требуется найти эксм. фк-и $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ при усл., что пер-ые связаны $m$ $(m < n)$ ур-ми:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Для этого сост-им фк-ю Лагранжа. $F(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$

$\ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$, приравняем к нулю ее част. прв-ые по $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11а}$$

и из $m + n$ ур-й (11) и (11а) опр-им пер-ые $x_1, \ldots, x_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. И здесь при найденных зн-ях пер-ых фк-я $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ может иметь эксм., а может и не иметь. Этот вопрос р-ся на основании тех же соображений, что и для (10д).

**п10**. Из данного куска жести пщ-ю $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме прлп-да, имеющую нб-ий объем.

Р. Пусть $x, y, z$ – длина, ширина, высота коробки. Найти max фк-и $V = xyz$ при усл-и, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ или $xy + xz + yz = a$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$. (11б)

Сост-м фк-ю Лагранжа $F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$. Найдем ее част. прв-ые и приравняем их к нулю:

$$\left.\begin{aligned} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11в}$$

Р-им систему (11в) и (11б). Для этого ур-ия (11в) умн-им ств-но на $x, y, z$, сложим их, найдем $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$ и подс. в (11в):

$$\begin{aligned} yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0 \\ xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0 \\ xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0 \end{aligned} \;\Bigg|\; \begin{aligned} \frac{3x}{2a}(y+z) = 1 \\ \frac{3y}{2a}(x+z) = 1 \\ \frac{3z}{2a}(x+y) = 1 \end{aligned} \;\Bigg|\; \begin{aligned} \frac{3x}{2a}(y+z) = \frac{3y}{2a}(x+z) \\ \frac{3y}{2a}(x+z) = \frac{3z}{2a}(x+y) \end{aligned} \;\Bigg|\; \begin{aligned} y = x \\ z = y \end{aligned}$$

Тогда из (11б) следует $x = y = x = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$, т.е. $M\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}, \sqrt{\dfrac{a}{3}}, \sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$ есть тч-а max, т.к. $0 < x, y, z < a$, а др-х крт. тч-к нет.

**п11**. Опр-ть нб. зн-ие корня $n$-й сп-и из пзв-ия чисел $x_1x_2\ldots x_n$ при усл-и, что их сумма равна данному числу $a$, т.е. найти max фк-и $u = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ при усл-и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0 \; (x_1 > 0, \ldots, x_n > 0). \tag{12}$$

Р. Сост-м фк-ю $F(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a)$.

Находим
$$\begin{cases} F'_{x_1} = \dfrac{1}{n}\,(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}-1}\,(x_2, \ldots, x_n) + \lambda = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{u}{x_1} + \lambda = 0 \text{ или } u = -n\lambda x_1 \\ F'_{x_2} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{u}{x_2} + \lambda = 0 \text{ или } u = -n\lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{x_n} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{u}{x_n} + \lambda = 0 \text{ или } u = -n\lambda x_n \end{cases}$$

Отсюда и из (12) имеем $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{a}{n}$. По замыслу задачи эти зн-ия дают мксм. фк-и $u$, т.е. $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \dfrac{a}{n}$ или $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. (13)

Это нерав-во справедливо для любых плж. чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Т.о., ср. геом-е нескольких плж. чисел не больше их ср-го ариф-го.

**6°. Примеры конкретного характера. Расстояние между двумя прямыми в пространстве**. На практике часто встречается нх-сть нахождения нб-го зн-ия фк-и $f(x, y)$, заданной в обл. $S$, огрн-ой замкнутым контуром $K$, если известно, что всюду на $K$ будет $f(x, y) = 0$, а внутри $S$ будет $f(x, y) > 0$. Ясно, что в этом случае дт-но найти все тч-и мксм-а фк-и, лежащие внутри $S$ и выбрать $\max f(x, y)$. Если внутри $S$ окажется одна крт-я тч. $(x^*, y^*)$, то $f(x^*, y^*)$ будет искомым нб. зн-ем. В таких случаях отпадает применение т4 при поиске $\max f(x, y)$. Рас-им примеры.

**п12**. Данное число $A > 0$ разл-ть на слг-ые $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ так, чтобы их пзв-ие $P = xyz$ оказалось нб-им (см. п9).

Р. Т.к. $z = A - x - y$, то $P = xy(A - x - y)$, т.е. задача свелась к нахождению нб-го зн-ия фк-и двух пер-ых при усл-и $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le A$. Эти три нерав. задают туг-к $S$ (рис. 2), где требуется найти $P_{нб}$. На контуре этого туг-ка будет $P = 0$, а внутри $P > 0$, т.е. указанное усл. выполняется. Из $P = Axy - x^2y - xy^2$ находим

$$\begin{array}{l|l|c|c|c|c|l} P'_x = Ay - 2xy - y^2 = 0 & y(A-2x-y)=0 & \text{выберем} & & 2x+y=A & & x = A/3, \\ P'_y = Ax - x^2 - 2xy = 0 & x(A-x-2y)=0 & x \ne 0, y \ne 0 \in S & \Rightarrow & x+2y=A & \Rightarrow & y = A/3. \end{array}$$

Эта едн. тч. и дает нб. зн-ие $P$. Т.к. при найденных зн-ях $x$, $y$ имеем $z = A - x - x = A/3$, т.е. $xyz = \left(\frac{A}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = \frac{x+y+z}{3}$. Итак, док-на

**т5**. Пзв-ие трех неотц-ых чисел, имеющих заданную сумму, будет нб-им ттогда, когда все эти числа равны друг другу.

Анч. теорема верна для любого числа сомножителей, т.е. для $n$ чисел $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, …, $x_n \ge 0$ при $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ числа $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, …, $\frac{A}{n}$ имеют ту же сумму. А т.к. все эти числа равны другу, то их пзв-ие не меньше, чем $x_1x_2\ldots x_n$, иными словами, $x_1x_2\ldots x_n \le \left(\frac{A}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n$,

т.е. (см. (13))

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \tag{14}$$

Нерав-во (14) позволяет р-ть и такую задачу: данное число $P > 0$ разл-ть на $n$ плж-ых сомножителей так, чтобы их сумма оказалась нм-ей. Дсв-но, если $P = x_1x_2\ldots x_n$ – какое-нибудь разл-ие $P$, то по (14) получим $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge n\sqrt[n]{P}$.

Итак, нельзя получить сумму, меньшую $n\sqrt[n]{P}$. А последнюю сумму получить легко, взяв все сомножители равными $\sqrt[n]{P}$. Значит, док-на

**т6**. Сумма нескольких плж-ых чисел, имеющих данное пзв., оказывается нм-ей ттогда, когда все эти числа равны между собой.

**п13**. Из всех пуг-ых прлп-ов, имеющих заданную полную пвх-ть $A$, найти тот, который имеет нб-й объем $V$.

Р. Обз-ив через $x$, $y$, $z$ длины ребер прлп-а, получим $V = xyz$, причем

$$2(xy + yz + zx) = A. \tag{15}$$

Из (15) следует $z = \frac{A/2 - xy}{x+y}$, тогда получим

$$V = xyz = \frac{Axy - 2x^2y^2}{2(x+y)}. \tag{16}$$

Надо найти $V_{нб}$, если пер-ые $x$ и $y$ плж-нв и $2xy < A$, т.е. тч. $(x, y$ должна лежать в обл. $S$, огрн-ой осями крд. и гпрб-ой $2xy = A$ (рис. 3) Из (16) следует $V'_x = \frac{(Ay - 4xy^2)(x+y) - (Axy - 2x^2y^2)}{2(x+y)^2}$, откуда $V'_x = \frac{y^2}{2(x+y)^2}(A - 2x^2 - 4xy)$. Анч-но получим $V'_y = \frac{x^2}{2(x+y)^2}(A - 2y^2 - 4xy)$. Ур-ия $V'_x = V'_y = 0$

дают $2x^2 + 4xy = A$, $2y^2 + 4xy = A$. Отсюда $2x^2 = 2y^2$, т.е. $x = y$. Тогда $6x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{\frac{A}{6}}$ , тогда $y = \sqrt{\frac{A}{6}}$ и (15) дает $z = \sqrt{\frac{A}{6}}$ , т.е. искомым прлп-ом яв-ся куб, имеющий нб. объем при заданной пвх-ти. Чтобы убедиться в этом, напишем (16) в виде $V = \frac{xy}{2(x+y)}(A - 2xy)$, откуда видно, что $V \to 0$ при $2xy \to A$, т.е. когда тч. $(x, y)$ приближается к границе $S$.

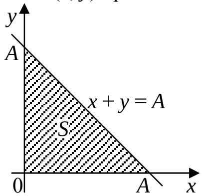



Рис. 2

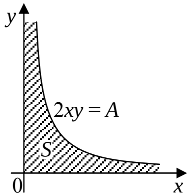



Рис. 3

Вышеизложенная теория позволяет легко найти рст-ие $d$ между двумя пм-ми в пр-ве. Дсв-но, эти пм. можно задать пармч. ур-ми

$$x = x_1 + l_1u, \quad y = y_1 + m_1u, \quad z = z_1 + n_1u, \qquad (\mathrm{I}) \qquad\qquad x = x_2 + l_2v, \quad y = y_2 + m_2v, \quad z = z_2 + n_2v. \qquad (\mathrm{II})$$

Взяв на пм. $I$ тч-у $M$, отвечающую нек-му зн-ю парм-а $u$, а на пм. II тч-у $N$, отвечающую парм-у $v$, найдем рст-ие $MN$. Оно будет зв-т от $u$ и $v$. Нм. зн-ие этой фк. от $u$ и $v$ будет равно искомому рст-ю $d$.

**п14**. Найти рст-ие между пм-ми

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0, \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0. \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Р. Перейдем к канч. ур-ию пм-й. Если из второго кр-ия I вычтем первое, то найдем $x = 1$. Подс-я ее в первое ур., находим $y = z$. Значит, пм. I проходит через тч-и (1, 0, 0), (1, 1, 1). Ее канч. ур-ие имеет вид $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = u \Rightarrow x = 1, y = u, z = u$. Вычитание из второго ур-ия II первое дает $z = -2$. Подс-я ее в первое ур-ие, получим $x + 2y = 0$, т.е. $x = -2y$. Взяв $y = 0$, $y = 1$, находим на пм. II две тч. (0, 0, – 2), (– 2, 1, – 2). Значит, канч. ур-ие пм. II имеет вид $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{0} = v$ $\Rightarrow x = -2v, y = v, z = -2$. Т.о., $M(1, u, u)$ – тч. пм. I и $N(-2v, v, -2)$ – тч. пм. II кв. рст-ия $MN$ есть

$$f(u, v) = (1 + 2v)^2 + (u - v)^2 + (u + 2)^2. \qquad (16)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} f'_u = 4u - 2v + 4 = 0 & 2u - v + 2 = 0 & u = -4/3 & \\ f'_x = 10v - 2u + 4 = 0 & 5v - u + 2 = 0 & v = -2/3 & \end{array} f(-4/3, -2/3) = d^2 = \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 +$$

$$+ \left(-\frac{4}{3} + 2\right)^2 = 1.$$ Значит, $d = 1$.

## 9.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 9.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### Вопросы для самопроверки

1. Приведите осн. понятия и примеры фк-и нескольких пер-х.
2. Как опр-ся предел и непр-сть фк-и двух пер.?
3. Что такое частные (част.) прщ-ия и част. прв-ые фк-й?
4. Как опр-ся полный диф-л и как он применяется в прж. выч-ях?
5. Как выч-ся прв-ые сложных и неявных фк-й?
6. В чем состоит суть инвариантности диф-ла?
7. Как опр-ся прв-я по нпв-ю и градиент?
8. Как взаимно располагаются градиент и пвх-ть уровня?
9. Как опр-ся кас-я пл-ть и нормаль к пвх-ти в данной тч.?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Найти обл-ть опр-ия фк-и $z = \lg\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

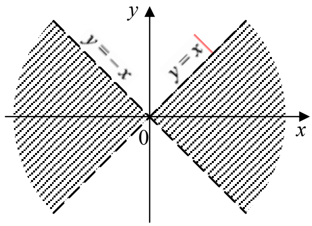


Рис. 1

Р. Обл-ть опр-ия находим из усл-ия $x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow |y| < |x|$, к-му уд-ет мн. тч-к пл-ти, лежащих между двумя пм-ми $y = x$, $y = -x$, кроме тч-к этих пм-х (рис. 1).

1*. Найти обл. опр-ия фк-и $\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

**у2**. Найти обл. опр. фк-и $u = 1\Big/\sqrt{2z^2-6x^2-3y^2-6}$.

Р. Фк. $u$ сущ-ет при усл-и, что $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$ или $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} < -1$. Это нерав. опр-ет часть $R^3$ расположенного внутри двуполостного гиперболоида (гпрби.).

2*. Найти обл. опр-ия фк-и $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$. О: $1 - x \le y \le 1 + x \ \forall\ x > 0$, $1 + x \le y \le 1 - x \ \forall\ x < 0$, кроме тч-и (0, 1).

**у3**. Найти линии уровня фк-и $z = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$.

Р. По опр-ю $\dfrac{1}{4x^2+9y^2} = C \Rightarrow 1 = 4Cx^2 + 9Cy^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1/4C} + \dfrac{y^2}{1/9C} = 1$ – семейство эллипсов (элс.) с центром в нач. крд-т с полуосями $a = 1\Big/\left(2\sqrt{C}\right)$, $b = 1\Big/\left(3\sqrt{C}\right)$.

3*. Найти линии уровня фк-и $z = \sqrt{x}\big/y$. О: семейство парабол (парб.) $y = C\sqrt{x}$.

**у4**. Найти пвх-ть уровня фк-и $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Р. По опр-ю имеем $x^2 - y^2 + z^2 = C$. При $C = 0$ $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ (ур-ие конуса), при $C > 0$ $x^2 - y^2 + z^2 = C$ (семейство однополостных гпрби.). При $C < 0$ получим семейство двуполостных гпрби.

4*. Найти линии пвх-ти уровня $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2$. О: семейство сфер $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{C}$, если $C > 0$; тч. (0, 0, 0), если $C = 0$.

**у5**. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1}$.

Р. При $x = 0$, $y = 0$ имеем неопр-сть вида 0/0, от к-ой избавляемся умн-ем врж-ия на сопряженное: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+y^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left( \sqrt[3]{\left(x^2+y^2+1\right)^2} + \sqrt[3]{x^2+y^2+1} + 1 \right) = 3.$$

5*. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \frac{\sqrt{x^2+(y-5)^2}-1}{x^2+(y-5)^2}$. О: $\frac{1}{2}$.

**у6**. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Р. Переходим к полярным крд. с центром в тч. $O(0, 0)$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Имеем $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} =$ $= \frac{r^4\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)}{r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)$. Т.к. фк. $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi$ огр-на ($\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \le 2$), то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = 0$. 6*. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$. О: 0.

**у7**. Д-ть, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не сущ-ет.

Р. Пусть пер-ая тч. $P(x, y) \to O(0, 0)$ по пм. $y = kx$, где $k = \text{const}$. Тогда имеем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} =$ $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$, т.е. фк. $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ вдоль всякой пм., проходящей через нач. крд-т, сохраняет пст. зн-ие, звщ-ие от угл. коэф-та $k$ пм-й. Поэтому при $P(x, y) \to O(0, 0)$ различным пм-м данная фк. будет иметь различные предельные зн-ия, а это значит, что она не имеет предела в тч. $O(0, 0)$.

7*. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 x^2y^2}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}$. О: 0.

**у8**. Найти тч-и разрыва фк-и $z = \frac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$.

Р. Усл-ие непр-сти данной фк. нарушено в тех тч. мн-ва $R^2$, крд-ы к-ых уд-ют ур-ю $y^2 - 2x + 1 = 0$. Это есть ур-ие парб-ы с верш. в тч. $(1/2, 0)$. Сдт-но, тч-и разрыва образуют парб-у – линию разрыва данной фк.

8*. Найти тч-и разрыва фк-и $z = \frac{x^2+2y}{x^2+y^2-4}$. О: $x^2 + y^2 = 4$, линия разрыва.

**у9**. Найти тч-и разрыва фк-и $u = \frac{1}{x^2+y^2-z}$.

Р. Фк-я разрывна в каждой тч. парби-да $z = x^2 + y^2$. Он яв-ся пвх-ю разрыва данной фк.

9*. Найти тч-и разрыва фк-и $u = \frac{1}{z^2-x^2-y^2}$. О: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – конус, пвх-ть разрыва.

**у10**. Найти част. прв-ые фк-и $z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

Р. $z'_x = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cdot \cos\frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $z'_y = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cdot \cos\frac{x+a}{\sqrt{y}} \times$

$\times \left(-\dfrac{x+a}{2y\sqrt{y}}\right) = -\dfrac{x+a}{2y\sqrt{y}}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$ .

10*. Найти част. прв-ые фк. $z = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{y}$ .

О: $z'_x = -\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}$ , $z'_y = -\dfrac{1}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}$ .

**у11**. Найти част. прв-ые фк. $u = z^{xy}$.

Р. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$.

11*. Выч-ть $v'_\psi(\pi/4,\ \pi)$, если $v(\varphi,\ \psi) = \dfrac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. О: 4.

**у12**. Найти част. прв-ые фк. $z = \dfrac{x}{y} - e^x\mathrm{arctg}y$.

Р. $z'_x = \dfrac{1}{y} - e^x\mathrm{arctg}y$, $z'_y = -\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{e^x}{1+y^2}$ .

12*. Какой угол образует с плж. нпв-ем оси $Ox$ кас-я к линии $\begin{cases} z = \sqrt{(x^2+y^2)/4}; \\ y = 4 \end{cases}$ в тч. $P_0(2, 4, 5)$? О: $\pi/4$.

**у13**. Найти полное прщ-ие $\Delta z$ и полный диф-л d$z$ фк-и $z = 3x^3 + xy - y^2 + 1$ в тч. $P_0(1, 2)$, если $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$. Выч-ть абс-ю погр-ть, к-ая возникает при замене полного прщ-ия фк-и ее полным диф-ом.

Р. Находим $\Delta z$ и d$z$ фк-и $z$ в прзвл-ой тч. $P(x, y)$: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y - y^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2 + 1 - 3x^2 - xy + y^2 - 1$, т.е.

$$\Delta z = (6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y + 3\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2. \quad (1)$$

Тогда
$$dz = (6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y, \quad (2)$$
$$|\Delta z - dz| = |3\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2|. \quad (3)$$

Подс-в зн-ия $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ в фм-ы (1)-(3), получим: $\Delta z = 3$, d$z = 2$, $|\Delta z - dz| = 1$.

13*. Найти $\Delta z$, d$z$, $|\Delta z - dz|$ по усл-м у13, если $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$. О: $\Delta z = 0{,}21$; d$z = 0{,}20$; $|\Delta z - dz| = 0{,}01$.

**зм1**. С уменьшением (умш.) прщ-й $\Delta x$ и $\Delta y$ абс-я погр-ть также умш-ся. Причем выч-ие полного прщ-я фк-и нескольких пер-х представляет собой задачу более сложную, чем выч-ие ее диф-ла, а поэтому на практике при малых прщ-х незв. пер-ыхзн-ие прщ-я фк-и с дт-ой точнстью заменяют зн-ем ее диф-ла.

**у14**. Найти полный диф-л фк-и $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Р. Найдем сначала част. прв-ые $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , откуда $dz = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

14*. Найти полный диф-л фк-и $u = x^{y^2z}$ . О: $du = y^2z\,x^{y^2z-1}dx + 2yz\,x^{y^2z}\ln x dy + y^2\,x^{y^2z}\ln x dz$.

**у15**. С помощью полного диф-а фк-и выч-ть прж-но: $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$ .

Р. Будем считать, что $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ есть частное зн-ие фк-и $f(x, y, z) = \sqrt{x^y+\ln z}$ в тч. $P_1(1{,}04;\ 1{,}99;\ 1{,}02)$. За нач. тч-у выберем $P_0(1,\ 2,\ 1)$. Тогда $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$, $\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$. Найдем част. прв-ые фк-и $f(x, y, z)$: $f'_x(x, y, z) = \dfrac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}$;

$f'_y(x, y, z) = \dfrac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}$; $f'_z(x, y, z) = \dfrac{1}{2z\sqrt{x^y+\ln z}}$. Выч-им теперь зн-ия этих част. прв. в тч.

$P_0$: $f'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_x(1, 2, 1) = \dfrac{2\cdot 1}{2\sqrt{1+\ln 1}} = 1$; $f'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_y(1, 2, 1) = 0$; $f'_z(1, 2, 1) = 1/2$.

Тогда $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx f(P_0) + f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y + f'_z(P_0)\Delta z = \sqrt{1^2+\ln 1} + 1\cdot 0{,}04 + 0\cdot(-0{,}01) + \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}02 = 1{,}05$.

16*. Выч-ть прж-но $1{,}04^{2{,}02}$. О: 1,08.

**зм2**. Напомним правила дифв-ия сложных и неявных фк-й. Пусть $z = f(u, v)$, а $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тогда $z = f(u(x, y), v(x, y))$ есть сложная фк-я пер-х $x$ и $y$. Если фк-и $f$, $u$, $v$ диф-мы каждая в своей обл., то част. прв-ые сложной фк. находят по фм-ам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4}$$

Полный диф-л этой фк. сохраняет свою форму и в случае, когда пер. $u$, $v$ яв-ся фк-ми незв. пер-ых $x$, $y$, а именно:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \tag{5}$$

(инвариантность формы).

Фк. $z = z(x, y)$ незв. пер-ых $x$ и $y$ наз. явной, если она задана ур-ем $F(x, y, z) = 0$, не разрешенным отс-но $z$, наз. неявным. Ее част. прв-ые находят по фм-ам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{6}$$

Если ур-ие $F(x, y) = 0$ задает неявно фк-ю одной пер-ой $y = y(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{7}$$

**у16**. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2+v^2)$, где $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Р. По (4) находим: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2u}{u^2+v^2}y + \dfrac{2v}{u^2+v^2}\dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2u}{u^2+v^2}x + \dfrac{2v}{u^2+v^2}\left(-\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}$.

16*. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2y - y^2x$, где $x = \cos u$, $y = u\sin v$. О: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v\cos v)$.

**у17**. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

Р. Сложная фк. $z$ зв-т от одной пер. $t$ через промежуточные пер. $x$ и $y$, к-ые в свою очередь зв-т от одной пер. $t$. Поэтому, согласно фм-ам (4), полная прв. фк-и:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{8}$$

По (8) получим $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\sin\left(x/\sqrt{y}\right)}\cos\dfrac{x}{\sqrt{y}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{y}}\,6t + \dfrac{1}{\sin\left(x/\sqrt{y}\right)}\cos\dfrac{x}{\sqrt{y}} \times$

$$\times\ \frac{-x}{2y\sqrt{y}}\ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y\sqrt{t^2+1}}\right).$$

Откуда, подс-в вместо $x$, $y$ ств-но $3t^2$, $\sqrt{t^2+1}$, получим $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3t\left(3t^2+4\right)}{2\left(t^2+1\right)\sqrt[4]{t^2+1}}\operatorname{ctg}\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}$.

17*. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4\omega)$, где $u = \sqrt[3]{x^2}$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\omega = \dfrac{\ln x}{x}$.

О: $\dfrac{dz}{dx} = 2\cos(3u + 2v - 4\omega)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} + \dfrac{2\left(\ln x - 1\right)}{x^2}\right)$.

**у18**. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = x\sin v\cos\omega$, где $v = \ln(1 + x^2)$, $\omega = -\sqrt{1-x^2}$.

Р. Фк-я $z$ есть фк-я трех пер-х $x$, $v$, $\omega$. Однако $v$ и $\omega$ яв-ся фк-ми одной пер. $x$. Поэтому фм-а полной прв-ой фк-и $z$ в данном случае имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dx}. \tag{8a}$$

Согласно (8а) имеем $\dfrac{dz}{dx} = \sin v\cos\omega + x\cos v\cos\omega \cdot \dfrac{2x}{1+x^2} - x\sin v\sin\omega \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. В полученное врж. вместо $v$ и $\omega$ нх-мо подс-ть ств-но $\ln(1 + x^2)$ и $-\sqrt{1-x^2}$.

18*. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

О: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{3}{\cos^2\left(3t + 2x^2 - y\right)}$, $\dfrac{dz}{dt} = \left(3 - \dfrac{4}{t^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\dfrac{1}{\cos^2\left(3t + \dfrac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)}$.

**у19**. Найти полный диф-л фк-и $z = x^2 - y^2$, где $x = u\cos v$, $y = \sin v$.

Р. Воспользуемся св-ом инвариантности формы (5), к-ое для данного случая имеет вид $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, т.е. конкретно $dz = 2x dx - 2y dy$. Т.к.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \cos v\,du - u\sin v\,dv;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = \sin v\,du + u\cos v\,dv,$$

то врж. полного диф-а имеет вид

$$dz = 2u\cos v(\cos v\,du - u\sin v\,dv) - 2u\sin v(\sin v\,du + u\cos v\,dv)$$

$$\text{или } dz = 2u(\cos 2v\,du - u\sin 2v\,dv).$$

19*. Найти полный диф-л фк-и $z = xy\operatorname{arctg}xy$, где $x = t^2 + 1$, $y = t^3$.

О: $dz = (5t^4 + 3t^2)\left(\operatorname{arctg}\left(t^5 + t^3\right) + \dfrac{t^5 + t^3}{1 + \left(t^5 + t^3\right)^2}\right)dt$.

**у20**. Найти прв-ю неявной фк. $y = y(x)$, заданной ур-ем $\sqrt{x^2+3y^2} = 5 - y^2x^3$.

Р. Данное ур. записываем в виде $y^2x^3 + \sqrt{x^2+3y^2} - 0$ и рас-им фк-ю $F(x, y) = y^2x^3 + \sqrt{x^2+3y^2} - 5$. Тогда по фм-е (7) имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y^2 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{2yx^3 + \dfrac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}} = \frac{3x^5y^4 + 15x^2y^2 - x}{10x^3y - 2x^6y^3 + 3y}.$$

(Здесь воспользовались тем, что по усл. $\sqrt{x^2+3y^2} = 5 - y^2x^3$).

20*. Найти прв-ю неявной фк. $y = y(t)$, заданной ур-ем $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. О: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

**у21**. Фк-я $z$ незв. пер-х $x$, $y$ задана неявно ур-ем $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$. Найти част. прв-ые $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ этой фк. при $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Р. Расв-ая фк-ю $F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$, по фм-е (4) находим: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x+y+1}{6z+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+4y-z}{6z+y}$. Тогда при $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ будем иметь $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{10}{7}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{7}$.

21*. Найти част. прв-ые неявной фк. $z = z(x, y)$, заданной ур-ем $xe^y + ye^x + ze^x = a$. О: $\frac{\partial z}{\partial x} = -y - z - e^{y-x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1 - xe^{y-x}$.

**у22**. Написать ур-ия кас-ой пл-ти и нормали к пвх-ти $z = 2x^2 + y^2$ в тч. (1, 1).

Р. Опр-им тч-у касания из $z(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, т.е. $M_0(1, 1, 3)$ – тч. касания. Из $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$ находим $\left.\begin{matrix} F'_x = 4x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = -1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} F'_x(M_0) = 4 \\ F'_y(M_0) = 2 \\ F'_z(M_0) = -1 \end{matrix}\right| \Rightarrow 4(x-1) + 2(y-1) - 1(z-3) = 0$ или $4x - 2y - z - 3 = 0$. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

22*. Написать ур-ия кас. пл-ти и нормали к пвх-ти $z = \ln(x^2 + y^2)$ в тч. (1, 0, 0). О: $z = 2(x - 1)$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

**у23**. Написать ур-ия кас-ой пл-ти и нормали к пвх-ти $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в тч. $M_0(a, b, c)$.

Р. Рас-им фк-ю $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$ и находим $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F'_z = -\frac{2z}{c^2}$. Тогда $F'_x(M_0) = \frac{2}{a}$, $F'_y(M_0) = \frac{2}{b}$, $F'_z(M_0) = -\frac{2}{c}$ и ур-ие кас. пл-ти $\frac{2}{a}(x-a) + \frac{2}{b}(y-b) - \frac{2}{c} \times (z-c) = 0$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$ и ур-ие нормали $\frac{x-a}{2/a} = \frac{y-b}{2/b} = \frac{z-c}{-2/c}$.

23*. Написать ур-ия кас. пл-ти и нормали к пвх-ти $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в тч. $P_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$. О: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0$, $\frac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{z-R}{0}$.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п20 и у1-у23 р-ть з1-з20: 1) найти част. прв-ые (з1-з10) и полный диф-л (з11-з20); 2) найти градиент и прв-ю фк-и в тч. $M(x_0, y_0)$ в нпв-и $l$, сост-щем угол $\alpha$ с плж. нпв-ем оси $Ox$ (з1-з11) и в нпв-и $MN$, где $N(x_1, y_1)$ (з12-з20); 3) найти прв-ые сложных и неявных фк-й (з1-з10), кас-ю пл-ть и нормаль (з11-з20).

| | | |
|---|---|---|
| 1. 1) $z = 3\sin(x^3 + y^2) - 5x^3y - 7$; | 2) $z = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}xy^3$, $M(1, -1)$, $\alpha = \pi/4$; | 3) $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; |
| 2. 1) $z = 8\ln(xy^2) + 10xy^2 - 8x$; | 2) $z = \mathrm{tg}x + x - 2\sin y$, $M(\pi/4, \pi/3)$, $\alpha = \pi/4$; | 3) $z = \ln(x^2 - y^2)$, $y = e^x$. О: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2\left(x - ye^x\right)}{x^2 - y^2}$; |
| 3. 1) $z = 2e^{3x+y^2} - 2x^2y^2 + 9y$; | 2) $z = 2\cos(x + y) + 2x$, $M(\pi/6, \pi/6)$, $\alpha = \pi/3$; | 3) $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{u}{v}$, $u = \mathrm{tg}^2x$, $v = \mathrm{ctg}^2x$. О: $4/\sin 2x$; |
| 4. 1) $z = 8\cos(xy) - 3x - 12x^4y$; | 2) $z = x\sin(x + y) - 1$, $M(\pi/6, \pi/6)$ $\alpha = \pi/4$; | 3) $z = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}$, $y = 3x + 1$. О: $2x(3x + 2)/(x^2 + 3x + 1)^2$; |
| 5. 1) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 5xy^3 + 8y$; | 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(3, 4)$, $\alpha = \pi/6$; | 3) $z = x^2y$, $y = \cos x$. О: $x(2\cos x - x\sin x)$; |
| 6. 1) $z = 8\sin(xy) + 8x^2y^2 - 7x$; | 2) $z = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^4}{4}$, $M(1, -2)$, $\alpha = \pi/4$; | 3) $z = \ln\dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, $y = x\cos\alpha$. О: $\dfrac{dz}{dx} = 0$; |
| 7. 1) $z = 0{,}5\ln(x^3 + y^2) - 9x^3y + 2x$; | 2) $z = x\mathrm{tg}y + \cos x$, $M(\pi/6, \pi/4)$, $\alpha = \pi/4$; | 3) $z = u^2 + v^2$, $u = x + y$, $v = x - y$. О: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x$, $\dfrac{dz}{dy} = 4y$; |
| 8. 1) $z = \sqrt{x + 2y} + 3x^4y - 8x - 2$; | 2) $z = \ln(x + 2y) - xy$, $M(1, 1)$, $\alpha = \pi/3$; | 3) $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$. О: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2\left(y^4 - 1\right)}{y\left(y^4 + 1\right)}$; |
| 9. 1) $z = 8e^{x+y^3} - 3xy^3 + 7x - 3$; | 2) $z = e^{x^2-y^2}$, $M(2, 2)$, $\alpha = \pi/6$; | 3) $\cos(x + y) + y = 0$. О: $y' = \dfrac{\sin\left(x + y\right)}{1 - \sin\left(x + y\right)}$; |
| 10. 1) $z = 8\ln(x^2 + y^2) - 6x^2y^3 + 8x - 1$; | 2) $z = 3x^2 + \sqrt{xy}$, $M(2, 2)$, $\alpha = \pi/6$; | 3) $y - \sin y = x$. О: $y' = \dfrac{-1}{2\sin^2\left(y/2\right)}$; |
| 11. 1) $z = \ln(x^2 + y^2)$; | 2) $z = x^2 - y^2$, $M(1, -1)$, $\alpha = 60°$; | 3) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M(1, 1, 1)$; |
| 12. 1) $z = \ln\mathrm{tg}(y/x)$; | 2) $u = xy^2z^3$, $M(3, 2, 1)$, $MN$, $N(5, 4, 2)$. О: 68/3; | 3) $z = 1 + x^2 + y^2$б $M(1, 1, 3)$. |
| 13. 1) $z = \sin(x^2 + y^2)$; | 2) $z = x^2 - xy + y^2$, $M(1, 1)$, $N(6, 8)$; | 3) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ $M(2, 2, 3)$; |
| 14. 1) $z = x^y$; | 2) $u = \arcsin\left(z\big/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $M(1, 1, 1)$, $N(3, 2, 3)$; | 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(1, 0, 0)$; |
| 15. 1) $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; | 2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M(1, 2, 1)$, $N(2, 4, 2)$; | 3) $z = \sin x\cos y$, $M(\pi/4, \pi/4, 1/2)$; |

16. 1) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$; 2) $u = xuz$, $M(2, 1, 1)$, $N(4, 2, 3)$; 3) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $M(1, 2, 2)$;

17. 1) $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$; 2) $u = x/2 + y/3 + z/6$, $M(1, 1, 1)$, $N(7, 4, -5)$; 3) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$, $M(2, 3, 2)$;

18. 1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{2(x + \sin y)}{4 - x\sin y}$; 2) $z = x^2 + y^2x$, $M(1, 2)$, $N(3, 0)$; 3) $z = xy$, $M(3, 4, 12)$.

19. 1) $u = e^{xyz}$; 2) $z = x^2 + 2y^2 - 5$, $M(2, -1)$, $N(5, 3)$; 3) $z = x^2 - y^2$, $M(5, 4, 9)$;

20. 1) $z = x^2 + xy^2 + \sin y$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(-1, 2, 0)$, $N(1, 3, 2)$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 = 26$, $M(3, 4, 1)$.

## 9.2 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

### Вопросы для самопроверки

1. Как опр-ся част. прв-ые высших порядков и когда имеет место $f''_{xy} = f''_{yx}$?
2. Как пор-ся диф-ы высших порядков и как записывается формально $d^nz$?
3. Приведите фм-у Тейлора для фк-и одной пер.
4. Как выводится фм-а Тейлора для фк-и двух пер.?
5. Как обобщается фм-а Тейлора для фк-и $n$ пер-х с остаточным членом в форме Лагранжа?
6. Чем отличается фм-а Маклорена от фм-ы Тейлора?
7. Как опр-ся эксм-ы фк-и двух пер.?
8. Как найти нб. и нм. зн-ия фк-и двух пер. в данной обл.?
9. Что такое усн. эксм-ы и метод мнж-ей Лагранжа?
10. Как обобщаются усн. эксм-ы для фк-и $n$ пер-х?

### Упражнения для самостоятельной работы

**у1**. Найти част. прв-ые второго порядка фк-и $z = (x^2 + y^2)^2$.

Р. Находим $z'_x = 2(x^2 + y^2)2x = 4x^3 + 4xy^2$, $z'_y = 2(x^2 + y^2)2y = 4x^2y + 4y^3$ | $z''_{x^2} = 12x^2 + 4y^2$, $z''_{xy} = 8xy$, $z''_{y^2} = 4x^2 + 12y^2$, $z''_{yx} = 8xy$ | $z''_{xy} = z''_{yx}$.

1*. Найти вторые част. прв. фк-и $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. О: $z''_{x^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{y^2} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$.

**у2**. Найти диф-л второго порядка фк-и $z = e^{x-y^2} + \cos x$.

Р. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} + \sin x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y\,e^{x-y^2}$ | $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y^2} - \cos x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -2y\,e^{x-y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2y\,e^{x-y^2}(1 - 2y^2)$. Отсюда получим $d^2z = \left(e^{x-y^2} - \cos x\right)dx^2 - 4y\,e^{x-y^2}\,dxdy + 2\,e^{x-y^2}\,dxdy + 2\,e^{x-y^2}(2y^2 - 1)dy^2$.

2*. Найти $d^2z$, если $z^3 - 3xyz = a^3$. О: $d^2z = 2z(xy^3dx^2 + (x^2y^2 + 2xyz^2 - z^4)dxdy + x^3ydy^2)/(z^2 - xy)^3$.

**у3**. Найти $d^2z$, если $z = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2$. О: $d^2z = 4\varphi''(t)(xdx + ydy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$.

**у4**. Разложить фк-ю $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ по фм-е Тейлора в тч. $(1, -2)$.

О: $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$.

**у5**. Найти локальные (лкн.) эксм-ы фк-и $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Р. Обл-ю опр-ия яв-ся вся евк-ва пл. $R^2$. Находим част. прв-ые и крт. тч-и:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 4x^3 - 4x + 4y \\ f'_y = 4y^3 + 4x - 4y \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{2} \\ y_3 = -\sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

Т.о., имеем три

крт. тч. $P_1(0, 0)$, $P_2\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $P_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Найдем част. прв-ые второго порядка $f''_{xx}(x,y)$ = $= 12x^2 - 4$; $f''_{xy}(x,y) = 4$; $f''_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$ и сост-м врж-ие $\Delta(P) = f''_{x^2}(P)\ f''_{y^2}(P) - \left[f''_{xy}(P)\right]^2 =$ $= 16[(x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1]$, отсюда убеждаемся, что

1) $\Delta(P_1) = 0$, т.е. дт-ый признак ответа не дает. Заметим, что в любой окрс-ти этой тч. имеются тч., в к-ых зн-ия данной фк. $f(x, y)$ могут быть как плж-ми, так и отц-ми. Н-р, вдоль оси $Ox$ $(y = 0)$: $f(x,y)\big|_{y=0} = f(x, y) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0$ вблизи тч-и $P_1(0, 0)$, а вдоль бист-сы $y = x$ $f(x,y)\big|_{y=0} = f(x, x) = 2x^4 > 0$. Т.о., для различных тч. из нек-ой окрс-ти тч. $P_1(0, 0)$ полное прщ. $\Delta f(x, y)$ не сохраняет знака, т.е. в этой тч. фк-я не имеет лкн. эксм-а.

2) $\Delta(P_2) = 16[5 \cdot 5 - 1] > 0$, $f''_{x^2}(P_2) = 12 \cdot 2 - 4 = 20 > 0$, значит, в этой тч. фк-я имеет лкн-ый мнм. $f_{\min} = -8$.

3) $\Delta(P_3) = 16[5 \cdot 5 - 1] > 0$, $f''_{x^2}(P_3) = 20 > 0$, значит, и в этой тч. фк-я имеет лкн-ый мнм. $f_{\min} = -8$.

5*. Найти лкн-ый эксм. фк-и $z = xy(x + y + 1)$. О: $z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$.

**у6**. Найти лкн. эксм-ы фк-и $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

Р. Обл. опр-ия фк-и $R^2$. Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$. Част. прв-ые не сущ-ют в тч. $P_1(1, 1) \in R^2$, значит, эта тч. яв-ся крт-ой.

Чтобы опр-ть, имеет ли фк-я эксм. в тч. $P_1$, иссл-ем знак $\Delta z$ в нек-ой окрс-ти расв. тч-и: $\Delta z = f(1 + \Delta x, 1 + \Delta y) - f(1, 1) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Очевидно, что $\Delta z > 0$, значит, в этой тч. фк-я имеет лкн-ый мнм.: $z_{\min} = z(P_1) = 0$.

6*. Найти лкн-ый эксм. фк-и $z = -\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1$. О: $z_{\max} = z(1, 1) = -\frac{2}{3}$; в тч. (0, 0) лкн. эксм-а нет.

**у7**. Найти эксм-ы фк-и $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ при усл-и, что $x + y = 4$.

Р. Из $x + y = 4$ находим $y = 4 - x$ и подс-м в врж-ие данной фк-и: $z = x^2 + (4 - x)^2 + x(4 - x) -$ $- 5x - 4(4 - x) + 10 = x^5 - 5x + 10$. Получили фк-ю одной пер. $z = g(x) = x^2 - 5x + 10$. Лкн-ый эксм. фк-и $g(x)$ и будет искомым усн-ым эксм. фк-и $z = f(x, y)$.

В нашем случае $g'(x) = 2x - 5$, $g'(x) = 0$ при $x = 5/2$. Находим $g''(x) = 2$. Т.к. $g''(x) > 0\ \forall\ x \in R$, то в тч. $x = 5/2$ фк. $g(x) = x^2 - 5x + 10$ имеет лкн-ый мнм. $g_{\min} = g(5/2) = 15/4$. Тогда данная фк. $z =$ $= f(x, y)$ в тч. $P_1(5/2, 3/2)$ имеет усн-ый мнм. $z_{\min} = f(5/2, 3/2) = 15/4$.

7*. Найти усн-ый эксм. фк-и $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

О: $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$, $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11$.

**у8**. Найти эксм-ы фк-и $z = 8 - 2x - 4y$ при усл., что $x^2 + 2y^2 = 12$.

Р. Сост-м фк-ю Лагранжа $F(x, y, \lambda) = 8 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 12)$. Найдем част. прв-ые

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -2 + 2x\lambda\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -4 + 4y\lambda\end{aligned}\right|\quad \left.\begin{aligned}2x\lambda + 2 &= 0\\ 4y\lambda - 4 &= 0\\ x^2 + 2y^2 - 12 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x_1 &= -2\\ y_1 &= -2\\ \lambda_1 &= -1/2\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}x_2 &= 2\\ y_2 &= 2\\ \lambda_2 &= 1/2\end{aligned}\right\}$$

Итак, $P_1(-2, -2)$ и $P_2(2, 2)$ – крт. тч-и. Для иссл-ия их хрк-ра перейдем к фк. одной пер., прб-уя ур-ие связи к виду $x^2/12 + y^2/6 = 1$ – ур-ие элс-а с полуосями $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{6}$, запишем в пармч. форме $\left.\begin{aligned}x &= 2\sqrt{3}\cos t\\ y &= \sqrt{6}\sin t\end{aligned}\right\}$, где $t \in [0, 2\pi]$. Подс-в в фк-и $z = 8 - 2x - 4y$ вместо $x$ $2\sqrt{3}\cos t$, а вместо $y$ $\sqrt{6}\sin t$, получим фк-ю от пер-ой $t$: $z = g(t) = 8 - 4\sqrt{3}\cos t - 4\sqrt{6}\sin t$. Иссл-ем ее на локальный эксм. Тем самым будет р-н вопрос об усн. эксм-е данной фк-и $z = f(x, y)$. Находим част. прв-ые $g'(t) = 4\sqrt{3}\,\sin t - 4\sqrt{6}\,\cos t$; $g''(t) = 4\sqrt{3}\,\cos t + 4\sqrt{6}\,\sin t$. Введем обз-ие $t_1$, ствщ-ее тч-е $P_1(-2, -2)$ и будем иметь

$$\cos t_1 = -\,1\big/\sqrt{3}\,;\ \sin t_1 = -\,2\big/\sqrt{6}\,;\ g''(t_1) = 4\sqrt{3}\,\left(-1\big/\sqrt{3}\right) + 4\sqrt{6}\,\left(-2\big/\sqrt{6}\right) < 0.$$

Сдт-но, в тч. $t_1$ фк. $g(t)$ имеет лкн-ый мксм. Тогда данная фк. $z = f(x, y)$ имеет в ствщ-ей тч. $P_1(-2, -2)$ усн-ый мксм. $z_{\max} = f(-2, -2) = 20$.

Введем обз-ив $t_2$, ствщ-ее тч-е $P_2(2, 2)$ и будем иметь

$$\cos t_2 = 1\big/\sqrt{3}\,;\ \sin t_2 = 2\big/\sqrt{6}\,;\ g''(t_2) = 4\sqrt{3}\,\cdot\,1\big/\sqrt{2}\,+\,4\sqrt{6}\,\cdot\,2\big/\sqrt{6}\,>0.$$

Сдт-но, в тч. $t_2$ фк. $g(t)$ имеет лкн-ый мнм., но тогда данная фк. $z = f(x, y)$ имеет в ствщ-ей тч. $P_2(2, 2)$ усн-й мнм. $z_{\min} = f(2, 2) = -4$.

8*. Найти усн-й эксм. фк-и $f(x, y) = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 6 = 0$. О: $f_{\min} = (-2, 4) = -2$.

**у9**. Найти усн-й эксм. фк-и $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Р. Фк-я Лагранжа имеет вид $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Отсюда получим

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1,\ 2,\ -1/2) \\ (-1,\ -2,\ 1/2) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} P_1(1, 2) \text{ при } \lambda = -1/2; \\ P_2(-1, -2) \text{ при } \lambda = 1/2. \end{array}$$

Найдем теперь знак $d^2F$ в каждой тч. при ствщ-ем ей зн-и $\lambda$:

$d^2F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dxdy + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dy^2$. Т.к. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$ при $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = -1/2$ $d^2F < 0$, сдт-но, в тч. $P_1(1, 2)$ фк-я имеет мкс-ум: $z_{\max} = 5$. При $x = -1$, $y = -2$, $\lambda = 1/2$ $d^2F > 0$, сдт-но, в тч. $P_2(-1, -2)$ фк-я имеет мнм-ум: $z_{\min} = -5$.

9*. Найти усн-й эксм. фк-и $z = -x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 4$.

**у10**. Найти нб. и нм. зн-ия (глб-ые эксм.) фк-и $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \le 25$.

Р. Находим $\left.\begin{array}{l} z'_x = 2x - 12 \\ z'_y = 2y + 16 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x - 6 = 0 \\ y + 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Крт-я тч. $P_0(6, -8)$ не принадлежит к расв. кругу, поэтому не подлежит к иссл-ю.

Найдем нб. и нм. зн-ия фк-и на окр-ти. Сост-м фк-ю Лагранжа $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$. Находим $\left.\begin{array}{r} F'_x = 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1(3,\ -4); \\ P_2(-3,\ 4). \end{array}$

Выч-им $z(P_1) = -75$ и $z(P_2) = 125$, значит, $z_{\min} = z(3, -4) = -75$ и $z_{\max} = z(-3, 4) = 125$.

10*. Найти нб. и нм. зн-ия фк-и $z = x^2 + y^2$ в круге $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$. О: $z_{\text{нм}} = z(0, 0) = 0$, $z_{\text{нб}} = z\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$.

**у11**. Найти нб. и нм. зн-ия фк-и $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в туг-ке: $2x + 3y - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Р. Находим $\left.\begin{array}{l} z'_x = 2x + 4y - 6 \\ z'_y = 4x - 2y - 2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1(1,\ 1)$ – крт-я тч. находится внутри

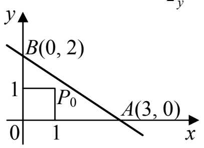


Рис. 2

обл-и, причем $z(P_1) = f(1, 1) = -4$. Найдем нб. и нм. зн-ия фк-и на границе обл-и (рис. 2). На отрезке $OA$ имеем: $y = 0$, $z = f(x, 0)$ или $z = g_1(x) = x^2 - 6x$, где $x \in [0, 3]$; $g'_1(x) = 2x - 6$; $g'_1(3) = 0$; $g_1(0) = f(0, 0) = 0$; $g_1(3) = f(3, 0) = -9$.

На отрезке $OB$ имеем $x = 0$, $z = f(0, y)$ или $z = g_2(y) = -y^2 - 2y$, где $y \in [0, 2]$; $g'_2(y) = -2y - 2$; $g'_2(-1) = 0$; $g_2(0) = f(0, 0) = 0$; $g_2(2) = f(0, 2) = -8$.

На отрезке $AB$ имеем: $y = 2 - \frac{2}{3}x$, $z = f\left(x,\ 2 - \frac{2}{3}x\right)$ или $z = g_3(x) = -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8$, где $x \in [0, 3]$;

$g_3'(x) = -\frac{38}{9} + 6$; $g_2'\left(\frac{27}{19}\right) = 0$; $g_3\left(\frac{27}{19}\right) = f\left(\frac{27}{19}, \frac{20}{19}\right) = -\frac{71}{19}$; $g_3(0) = g_2(2) = f(0, 2) = -8$; $g_3(3) = g_1(3) = f(3, 0) = -9$. Сравнивая зн-ия $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = -8$, $f(3, 0) = -9$, $f(27/19, 20/19) =$ $= -71/19$, получим $z_{нб} = z(0, 0) = 0$, $z_{нм} = z(3, 0) = -9$.

11*. Найти нб. и нм. зн-ия фк-и $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в пуг-ке $\begin{cases} 1 \le x \le 4; \\ -3 \le y \le 2. \end{cases}$

О: $f_{нм} = f(3, -2) = -11$, $f_{нб} = f(1, 2) = 9$.

**Задание для кр. работы**: по образцу п1-п11 и у1-у11 найти эксм-ы з1-з20.

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2$;
2. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1$;
3. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$;
4. $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2$;
5. $z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y + 1$;
6. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9$;
7. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2$;
8. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$;
9. $z = 0{,}5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8$;
10. $z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 1$;
11. $z = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 16y + 3$;
12. $z = 6xy - 2x^2 - y^2 - 14x +$;
13. $z = 2x^2 + 3xy - y^2 - 2x + 7y + 6$;
14. $z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 1$;
15. $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 + 18x + 8y - 1$;
16. $z = 3 - 3x^2 - 8xy + 5y^2 + 4x + 26y$;
17. $z = 2x^2 - 2xy - 3y^2 + 8x + 10y - 6$;
18. $z = 5x^2 + 2xy - 3y^2 - 18x - 10y + 4$;
19. $z = 5 - 7x^2 + 2xy - 5y^2 - 34x + 34y$;
20. $z = 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 10x + 16y - 7$.

# 10. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

> То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы можете снова воспользоваться, когда в этом возникает необходимость.
>
> Г. Лихтенберг

## ЛЕКЦИЯ 26

## 10.1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**1°. Задачи, приводящие к двойным интегралам**. Рас-им сд-ие задачи:

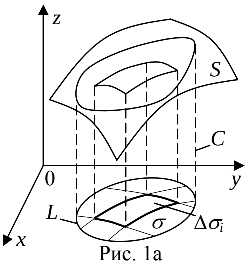



Рис. 1а

**з1** (задача об объеме). Пусть $\sigma$ – обл. на пл-ти $xOy$ огр-на замкнутым контуром $L$ (рис. 1а). Рас-им тело, огр-ое обл-ю $\sigma$, цилиндрической (цлнч.) пвх-ю $C$, полученной образующими, прл-ми оси $Oz$ по нпвщ-ей $L$ и частью пвх-ти $S$, ур-ие к-ой $z = f(x, y)$, где $f$ опр-на и непр-на в обл. $\sigma$. Такое тело назовем цлнч-им. Требуется выч-ть объем цлнч. тела.

Для этого обл. $\sigma$ произвольно разобьем на $n$ пщ-ок: $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_i$, …, $\Delta\sigma_n$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \sigma$. На элр-ой пщ-ке $\Delta\sigma_i$ произвольно выберем тч. $P_i = P(x_i, y_i)$, тогда фк. $f(P_i) = f(x_i, y_i)$ есть высота элр-го цлн-а (рис. 1а) и его объем $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$. Отсюда весь объем цлн-а прж-но равен

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \ . \tag{1}$$

Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i$ и находя предел (1) при $\delta \to 0$, получим

$$V = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ . \tag{1a}$$

**з2** (задача о массе плоской пластинки). Пусть дана тонкая материальная пластинка $\sigma$, расположенная на пл-ти $xOy$. В каждой тч. $P_i = P(x_i, y_i)$ пластинки известна ее плотность $\gamma_i = \gamma(x_i, y_i)$. Найти массу пластинки.

Анч-но предыдущей задаче $\sigma$ прзвл-но разобьем на $n$ частей: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_i, \ldots, \Delta\sigma_n$. Прзвл-но выберем тч-у $P_i = P(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$. Находим элр. массу $\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$. Отсюда прж-но получим всю массу

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ . \tag{2}$$

Обз-ив через $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i$ и переходя к пределу в (2) при $\delta \to 0$, получим

$$m = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ . \tag{2a}$$

**2°. Понятие двойного интеграла и его существование**. Из расн-ых задач видно, что для их р-ия мы использовали один и тот же метод незв-мо от самой природы задачи. Поэтому указанные действия можно проделать для произвольной фк-и $z = f(x, y)$, непр-ой в замкнутой обл. $\sigma$, т.е. выполняем сд. шаги:

1*. Обл. $\sigma$ произвольно разобьем на $n$ элр-ых пщ-ок: $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_i$, …, $\Delta\sigma_n$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \sigma$. Выберем $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i$.

2*. Произвольно выберем тч-у $P_i = P(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$ и находим пзв-ие $f(P_i)\Delta\sigma_i = f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$.

3*. Составляем (сост.) сумму всех таких пзв-й

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ , \tag{3}$$

к-ая наз. интн-ой суммой.

4*. Если фк. $f(x, y)$ непр-на в обл. $\sigma$, то сущ-ет предел интн. суммы (3) при $\delta \to 0$. Этот предел наз. двойным (двн.) инт-ом в обл. $\sigma$ и обз-ся

$$J = \iint_{\sigma} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ . \tag{4}$$

Учитывая (4), получим из (1а) объем цлнч-го тела (при $f(x, y) \geq 0$) в виде

$$V = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y)\mathrm{d}\sigma \ , \tag{4а}$$

в к-ом и состоит геомч. смысл двн. инт-а.

Анч-но вместо (2а) получим

$$m = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma \ . \tag{4б}$$

Если в (4) $f(x, y) = 1$, то $\iint_{\sigma} \mathrm{d}\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum \Delta\sigma_i = \lim_{\delta\to 0}\sigma = \sigma$.

**т1** (сущв-ие двн. инт-а). Если обл. $\sigma$ с кусочно гладкой границей $L$ огр-на и замкнута, а фк. $f(x, y)$ непр-на в обл. $\sigma$, то двн. инт-л

$$J = \iint_{\sigma} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ , \tag{4в}$$

т.е. предел ствщ. двумерной интн. суммы сущ-ет и не зв-т от способа дробления обл-и $\sigma$ на элр. ячейки $\Delta\sigma_i$ и выбора тч-к в них.

Д. Используем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу. Из непрс-ти фк-и $f(x, y)$ следует, что $m_i \leq f(x_i, y_i) \leq M_i$ в $\Delta\sigma_i$. Обз-им через $s = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$ , $S = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$ . Тогда $s \leq J \leq S$. А $S - s =$ $= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i$ . Причем по заданному $\varepsilon$ можно подобрать число $\tau > 0$, такое, что как только будет верно нерав. $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i < \tau$, то все $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$. Отсюда имеем $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i < \dfrac{\varepsilon}{\sigma} \times$ $\times \sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sigma = \varepsilon$. Откуда следует $\lim_{\delta\to 0}(S - s) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0$, т.е. инт-л сущ-ет ■

**зм1**. Из т1 следует, что обл. $\sigma$ можно разбить пм-ми, прл-ми осям крд-т. Тогда $\Delta\sigma_i = \Delta x_i\Delta y_i$, сдт-но, $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ и вместо (4) получим

$$J = \iint_{\sigma} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i\Delta y_i \ . \tag{5}$$

**3°. Свойства двойного интеграла**. Опр-ие двн. инт-а

$$\iint_{\sigma} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

конструктивно анч-но опр-ю опрн. инт-а (см. 8.2).

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \;.$$

Поэтому двн. инт-л обладает теми же св-ми (к-ые и док-ся анч-но), что и опрн. инт-л. По этой причине св-ва двн. инт-а мы приведем без д-в, представив их читателю.

**с1**. Пст-ый мнж. можно выносить за знак двн. инт-а, т.е.

$$\iint_\sigma kf(x,y)\mathrm{d}\sigma \;=\; k\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;.$$

**с2**. Двн. инт-л от суммы нескольких фк-й равен сумме инт-ов от этих фк-й, т.е.

$$\iint_\sigma [f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]\mathrm{d}\sigma \;=\; \iint_\sigma f_1(x,y)\mathrm{d}\sigma \;+\; \iint_\sigma f_2(x,y)\mathrm{d}\sigma \;-\; \iint_\sigma f_3(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

Свк-ть св-в с1 и с2 наз. св-ом линейности (линс.).

**с3**. Если в обл. интв-ия $\sigma$ имеет место $f(x, y) \ge 0$, то и $\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;\ge 0$. Если же в $\sigma$ $f(x, y) \ge 0$ и хотя бы в одной тч. $f(x, y) > 0$, то $\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;> 0$.

**с4**. Если в обл. интв-ия $\sigma$ имеет место нерав. $f(x, y) \ge \varphi(x, y)$, то

$$\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;\ge\; \iint_\sigma \varphi(x,y)\mathrm{d}\sigma \;.$$

**с5** (аддитивности (аддс.)). Если обл. интв-ия $\sigma$ разбита на части $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k}\Delta\sigma_i = \sigma\right)$, то

$$\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;=\; \iint_{\sigma_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;+\; \iint_{\sigma_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;+\ldots+\; \iint_{\sigma_k} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;.$$

**с6** (теорема о среднем (ср.)). Если фк. $f(x, y)$ непр-на в замкнутой огрн. обл. $\sigma$, то сущ-ет тч. $P_0(x_0, y_0) \in \sigma$, такая, что

$$\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;= f(x_0, y_0)\sigma.$$

**4°. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных и полярные координаты**. Пусть для простоты в обл. интв-ия $\sigma = \{y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), x = a, y = b\}$ (рис. 1) подынт. фк-я $f(x, y) \ge 0$. Тогда двн. инт-л численно равен объему цлнч-го тела (см. (4а): 2°):

$$V = \iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;. \tag{6}$$

Подсчитаем теперь объем $V$ цлнч. тела с помощью метода (см. 2°: 8.3) поперечных сечений по рис. 2:

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x \;. \tag{6а}$$

А пщ-дь $S(x)$ трапеции $C_1M_1M_2C_2$ равен опрн. инт-у

$$S(x) = \int_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вых}}} z\mathrm{d}y \;=\; \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \;, \tag{6б}$$

подс-в к-ый в (6а) и учитывая (6), получим

$$\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}\sigma \;=\; \int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \;, \tag{7}$$

т.е. при выч-ии двн. инт-ла сначала находится опрн. (внутренний) инт. $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = J(x)$ при $x = \mathrm{const}$, а затем – $\int\limits_a^b J(x)\mathrm{d}x$.

**зм2**. Если обл. $\sigma = \{x = \psi_1(y),\ x = \psi_2(y),\ y = c,\ y = d\}$ (рис. 3), то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right\}\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

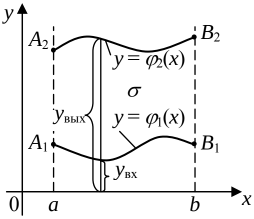


Рис. 1

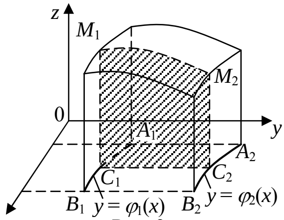


Рис. 2

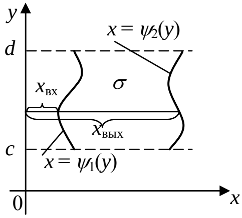


Рис. 3

**зм3**. Если контур обл-ти $\sigma$ более сложный (рис. 4), то $\sigma$ разбивают на конечное число частей и используют фм-у (7) или (8), учитывая с5: 3°.

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\,.$$

**п1**. Выч-ть $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, где $\sigma$: $\{y = 0,\ y = x/2,\ x = 2\}$ (рис. 5).

Р. По (7) имеем $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x/2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$. Выч-им внутренний инт. при $x = \mathrm{const}$:

$\int\limits_0^{x/2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y = \left[x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{x}{2}} = x^2\cdot\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{24} = \dfrac{13}{24}x^3$. Тогда $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^2 \dfrac{13}{24}x^3\mathrm{d}x = \dfrac{13}{24}\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^2 =$

$= \dfrac{13}{24}\cdot\dfrac{16}{4} = \dfrac{13}{6}$.

Выч-я по (8), получим тот же результат: $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y\int\limits_{2y}^2(x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y\left[\dfrac{x^3}{3}+y^2x\right]_{2y}^2 =$

$= \int\limits_0^1\left(\dfrac{8}{3}+2y^2-\dfrac{14}{3}y^3\right)\mathrm{d}y = \left[\dfrac{8}{3}y+\dfrac{2y^3}{3}-\dfrac{7}{6}y^4\right]_0^1 = \dfrac{13}{6}$.

**п2**. Выч-ть $\iint\limits_{\sigma} xy^2\mathrm{d}\sigma$, где $\sigma = \{(x, y)\colon y = x,\ y = 2 - x^2,\ x = 0)$ (обл. $\sigma$ можно задавать так или как в п1) (рис. 6).

Р. По (7) получим $\iint\limits_{\sigma} xy^2\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\int\limits_x^{2-x^2} xy^2\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\left[x\dfrac{y^3}{3}\right]_x^{2-x^2} = \int\limits_0^1\left(\dfrac{x(2-x^2)^3}{3}-\dfrac{x^4}{3}\right)\mathrm{d}x =$

$= -\dfrac{1}{6}\int\limits_0^1(2-x^2)^3\mathrm{d}(2-x^2) - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^4\mathrm{d}x = -\left[\dfrac{1}{6}\dfrac{(2-x^2)^4}{4}+\dfrac{x^5}{15}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{16}{24} = \dfrac{67}{120}$.

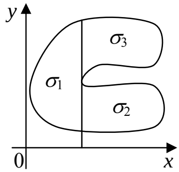


Рис. 4

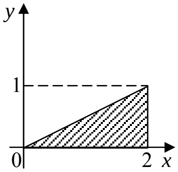


Рис. 5

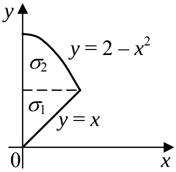


Рис. 6

Если р-ть по (8), то обл. интв-ия $\sigma$ нх-мо разбить на две части $\sigma_1$ и $\sigma_2$ (рис. 6), и по св-у аддс-и получим: $\iint\limits_{\sigma} xy^2 \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} xy^2 \mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} xy^2 \mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y xy^2 \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} xy^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \left[\frac{x^2}{2} y^2\right]_0^y +$

$$+ \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \left[\frac{x^2}{2} y^2\right]_0^{\sqrt{2-y}} = \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} \mathrm{d}y + \int\limits_1^2 \frac{(2-y)y^2}{2} \mathrm{d}y = \left.\frac{y^5}{10}\right|_0^1 + \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Как можно заметить, здесь использование фм-ы (7) выгоднее, чем (8).

Замена пер-ых в двн. инт-е, как и в опрн-ом (4°: 8.2), часто приводит к экономным выч-ям.

Пусть требуется выч-ть $\iint\limits_{\sigma} f(x, y) \mathrm{d}\sigma$, где $f(x, y)$ – дт-но сложная фк., заданная в замкнутой огрн. обл. $\sigma$ (рис. 7). Введем новые пер. $u$, $v$ (назм. криволинейными (крвл.) крд.) (рис. 8), такие, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v); \\ y &= \psi(u, v). \end{aligned}\right\} . \tag{9}$$

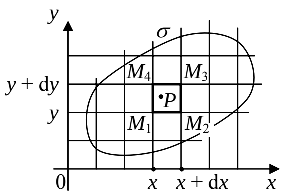


Рис. 7

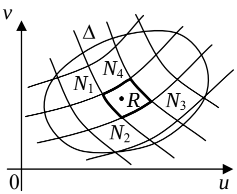


Рис. 8

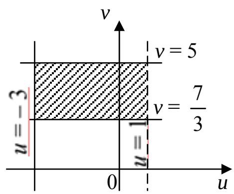


Рис. 9

В результате прб-ия (9) тч-е $P(x, y)$ ств-ет тч. $R(u, v)$, а элр-ая обл. $\sigma_i = \{M_1M_2M_3M_4\}$ переходит в $\Delta_i = \{N_1N_2N_3N_4\}$, тогда $\sigma$ переходит в $\Delta$.

Опр-им эл-т пщ-ди $\mathrm{d}\sigma$ в крвл. крд-ах $(u, v)$. Для этого старые крд. тч-к $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ выразим через новые $u$, $v$.

$N_1$: $x_1 = \varphi(u, v)$, $y_1 = \psi(u, v)$,

$N_2$: $x_2 = \varphi(u + \mathrm{d}u, v) = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}\mathrm{d}u$, $y_2 = \psi(u + \mathrm{d}u, v) = \psi(u, v) + \dfrac{\partial\psi(u, v)}{\partial u}\mathrm{d}u$,

$N_3$: $x_3 = \varphi(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v) = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}\mathrm{d}v$, $y_3 = \psi(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v) = \psi(u, v) +$
$+ \dfrac{\partial\psi(u, v)}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\psi(u, v)}{\partial v}\mathrm{d}v$,

$N_4$: $x_4 = \varphi(u, v + \mathrm{d}v) = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}\mathrm{d}v$, $y_4 = \psi(u, v + \mathrm{d}v) = \psi(u, v) + \dfrac{\partial\psi(u, v)}{\partial v}\mathrm{d}v$.

Из написанных фм. непосредственно вытекает, что $x_2 - x_1 = x_3 - x_4$ и $y_2 - y_1 = y_3 - y_4$, откуда следует, что отрезки $N_1N_2$ и $N_4N_3$ равны и одинаково нпв-ны. То же можно сказать об отрезках $N_1N_4$ и $N_2N_3$, т.е. с точностью до малых высших порядков $N_1N_2N_3N_4$ есть прлг-м и его пщ. равна удвоенной пщ. туг-ка $N_1N_2N_3$, к-ую можно найти как модуль вкн-го пзв-ия вк-ов $\overline{N_2N_1} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$, $\overline{N_2N_3} = (x_3 - x_2,\ y_3 - y_2)$ в пркц-х (см. 2°: 2.2), т.е. $\mathrm{d}\sigma = \left|\overline{N_2N_1} \times \overline{N_2N_3}\right| =$

$$=\begin{Vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v & \frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v \end{vmatrix} = |D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ \text{где } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

наз. фнц-ным опрт-ем или Якобианом.

Учитывая полученный результат, окончательно будем иметь

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Delta} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\,|D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Delta} F(u,v)\,|D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (10)$$

Стн. (10) наз. фм-ой замены пер-ых в двн. инт-е.

Переход от пуг. крд-т к полярным (рис. 15 из 4°: 3.1) яв-ся част. случаем замены пер-ых в двн. инт-е. В этом случае получим

$$\begin{matrix} u=\theta \\ v=\rho \end{matrix}\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ v=\rho\sin\theta \end{matrix}\right| D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\rho\sin^2\theta - \rho\cos^2\theta = -\rho,\ \text{т.е. } |D| = \rho.\ \text{Тогда}$$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Delta} F(\theta,\rho)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} F(\theta,\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\ . \qquad (11)$$

**зм4**. Если замена пер-ых произведена удачно, то фк. $F(\theta, \rho)$ оказывается проще, чем фк. $f(x, y)$ и двн. инт-л (11) легко выч-ся, причем пер-ые $(x, y)$ и $(u, v)$ равноправны, т.е. прб-ие можно делать и обратно.

**п3**. Выч-ть $\iint\limits_{\sigma}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $\sigma$: $\{y = x + 1,\ y = x - 3,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\ y = -\frac{1}{3}x + 5\}$.

Р. Непосредственное выч. этого инт. было бы затруднительным, однако простая замена пер-ых позволяет свести этот инт. к инт-у по пуг-ку, стороны к-го прл-ны осям крд-т (рис. 9). Для этого полагаем:

$$\begin{matrix} u = y - x \\ v = y + \frac{1}{3}x \end{matrix}\ \left|\ \begin{matrix} \text{тогда из} \\ y = x+1 \\ y = x-3 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 5 \end{matrix}\ \right|\ \Rightarrow\ \begin{matrix} u = 1 \\ u = -3 \\ v = \frac{7}{3} \\ v = 5 \end{matrix}\ \left|\ \begin{matrix} \text{из} \\ -u + v = \frac{4}{3}x \\ \frac{1}{3}u + v = \frac{4}{3}y \end{matrix}\ \right|\ \Rightarrow\ \begin{matrix} x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \\ y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v, \end{matrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4} \Rightarrow |D| = \frac{3}{4}.\ \text{Тогда получим: } \iint\limits_{\sigma}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\Delta}\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v + \frac{3}{4}u - \frac{3}{4}v\right)\cdot\frac{3}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Delta}\frac{3}{4}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{3}{4}\int\limits_{7/3}^{5}\mathrm{d}v\int\limits_{-3}^{1}u\mathrm{d}u = -8.$$

**п4**. Выч-ть $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, где $\sigma$: $\{x^2 + y^2 \le 4\}$.

Р. По фм-е (11) имеем $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\Delta}\sqrt{4-(\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$

$$= \iint\limits_{\Delta}\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho = \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{8}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\pi.$$

**5°. Тройные интегралы**. Рас-им задачу, приводящую к тройным (трн.) инт.

**з3** (задача о массе). Пусть в пр-е $Oxyz$ дано неодн. тело $V$ с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в тч. $P(x, y, z)$. Найти массу $m$.

Р. Если тело было одн., т.е. $\gamma_0 = \gamma_0(x, y, z) = \text{const}$, то $m = \gamma_0 V$. В общем случае $\gamma$ – пер-я, поэтому поступаем анч-но з2: разобьем тело $V$ на $n$ малых тел $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, где $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$. В элр. объеме $\Delta V_i$ произвольно выберем тч-у $P_i = P(x_i, y_i, z_i)$ и найдем $\gamma(P_i) = \gamma(x_i, y_i, z_i)$. Выч-им элр. массу $\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$. Тогда $m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ .

Отсюда точное зн. массы находим как предел суммы при $\delta = \max\limits_i \Delta V_i \to 0$

$$m = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \tag{12а}$$

Таким методом р-тся многие задачи, незв-мо от их природы. Поэтому опишем этот метод для произвольной фк-и $u = f(x, y, z)$, непр-ой в замкнутой обл. $V$, и тем самым придем к понятию трн. инт-а. Выполним сд. шаги:

1*. Обл. $V$ произвольно разобьем на $n$ элр. обл-ей $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$. Выберем $\delta = \max\limits_i \Delta V_i$.

2*. Произвольно выберем тч-у $P_i = P(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ и выч-им пзв. $f(P_i)\Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

3*. Сост-им сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ , к-ю наз. интн. суммой.

4*. Если фк. $f(x, y, z)$ непр-на в обл. $V$, то сущ-ет предел интн. суммы при $\delta \to 0$. Этот предел наз. трн. инт-ом фк-и $f(x, y, z)$ в обл-ти $V$ и обз-ся

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \tag{12}$$

Учитывая (12), стн. (12а) можно переписать в виде

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z)\mathrm{d}V \ . \tag{12б}$$

Если в (12) $f(x, y, z) \equiv 1$, то находим объем $\iiint_V \mathrm{d}V = \lim\limits_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim\limits_{\delta \to 0} V = V$.

**т2** (сущв-ие трн. инт-ла). Для всякой фк. $u = f(x, y, z)$, непр-ой в огрн. замкнутой обл. $V$, сущ-ет трн. инт-л, не звщ-й от способа разбиения обл-ти $V$ и выбора тч-к в подобл-х.

Д-ся анч-но т1 из 2°.

Трн. инт-л обладает теми же св-ми, что и двн. инт-л:

**с1**. Пст-ый мнж-ль можно выносить за знак инт-а, т.е.

$$\iiint_V kf(x, y, z)\mathrm{d}V = k\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V \ .$$

**с2**. Трн. инт-л от суммы нескольких фк. равен сумме трн. инт-ов от этих фк., т.е.

$$\iiint_V [f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)]\mathrm{d}V = \iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V + \iiint_V \varphi(x, y, z)\mathrm{d}V \ .$$

**с3**. Если в обл-ти интв-ия $f(x, y, z) \geq 0$, то

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V \geq 0.$$

**с4**. Если в обл-ти интв-ия $f(x, y, z) \ge \varphi(x, y, z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \ \ge\ \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)\mathrm{d}V\ .$$

**с5** (аддс-и). Если обл-ть $V$ разбита на части $V_1, V_2, \ldots, V_k$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \ =\ \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V\ +$$

$$+\ \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V\ +\ldots+\ \iiint\limits_{V_k} f(x,y,z)\mathrm{d}V\ .$$

**с6** (теорема о ср.). Если фк. $f(x, y, z)$ непр-на в огрн. замкнутой обл. $V$, то $\exists$ тч. $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V$, такая, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V\ = f(x_0, y_0, z_0)V.$$

**6°. Вычисление тройного интеграла. Замена переменных, цилиндрические и сферические координаты**. Выч-ие трн. инт-а сводится к посл. выч-ю трех опрн. инт-ов.

Пусть обл-ть интв-ия $V$ огр-на снизу пвх-ю $z = h_1(x, y)$, а сверху $z = h_2(x, y)$ и пркт-ся на пл-ть $xOy$ в пщ-ку $\sigma$, огрн-ую крв-ми $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$ и пм-ми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (рис. 10).

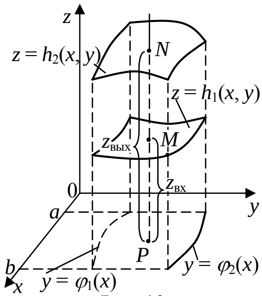


Рис. 10

Проведем через тч-у $P(x, y, 0) \in \sigma$ пм-ю, прл-ю оси $Oz$. Эта пм. перк-ся с пвх-ю $z = h_1(x, y)$ в тч. $M$ аппликатой $z_{\text{вх}}$, а с $z = h_2(x, y)$ – в тч. $N$ аппликатой $z_{\text{вых}}$.

Тогда, если $f(x, y, z)$ – непр. фк-я в обл-ти $V$, то трн. инт-л выч-ся по фм-е

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_\sigma\left(\int\limits_{z_{\text{вх}}=h_1(x,y)}^{z_{\text{вых}}=h_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma, \qquad (13а)$$

т.е. сначала выч-ся опрн. инт-л $\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ , где $x$ и $y$ считаются пст-ми, а затем – двойной инт. по пщ-ке $\sigma$:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad (13)$$

Иногда (13) будем писать в виде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V\ =\ \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\ . \qquad (13б)$$

Если обл-ть $V$ более сложная, то ее разбивают на конечное число обл-ей $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и к каждой применяют фм-у (13).

**п5**. Выч-ть $\iiint\limits_V z\mathrm{d}V$ , где $V = \{x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1\}$ (рис. 11).

Р. Используя фм-у (13), получим $\iiint\limits_V z\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z$ . Выч-ив посл-но инт-лы, получим

$$\int\limits_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z\ = \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y}\ = \frac{(1-x-y)^2}{2}\ ;\ \int\limits_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y\ = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}(1-x-y) = -\frac{1}{6}(1-x-y)\Bigg|_0^{1-x}\ =$$

$$= \frac{(1-x)^3}{6}\ ;\ \int\limits_0^1\frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x\ =\ -\frac{(1-x)^4}{24}\Bigg|_0^1\ =\ \frac{1}{24}\ .\ \text{Итак,}\ \iiint\limits_V z\mathrm{d}V\ =\ \frac{1}{24}\ .$$

Пусть с помощью замены пер-ых требуется выч-ть $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V$ .

Введем новые пер. $u$, $v$, $w$ (крвл. крд-ы), такие, что

$$x = \varphi(u, v, w),\ y = \psi(u, v, w),\ z = \gamma(u, v, w). \tag{13в}$$

С помощью прб-ия (13в) элр. пуг. прлп-ед $\mathrm{d}V$ (рис. 12) отб-ся в крвл. прлп-ед (рис. 13), объем к-го нх-мо найти. И путь обл-ть $V$ отб-ся в обл. $W$.

Анч-но 4° рас-им тч-и:

$N_1$: $x_1 = \varphi(u, v, w) = \varphi$, $y_1 = \psi(u, v, w) = \psi$, $z_1 = \gamma(u, v, w) = \gamma$,

$N_2$: $x_2 = \varphi(u + \mathrm{d}u, v, w) = \varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u$, $y_2 = \psi(u + \mathrm{d}u, v, w) = \psi + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u$, $z_2 = \gamma(u + \mathrm{d}u, v, w) = \gamma + \dfrac{\partial\gamma}{\partial u}\mathrm{d}u$;

$N_3$: $x_3 = \varphi(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w) = \varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$, $y_3 = \psi(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w) = \psi + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u +$ $+ \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v$, $z_3 = \gamma(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w) = \gamma + \dfrac{\partial\gamma}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\gamma}{\partial v}\mathrm{d}v$;

$N_6$: $x_6 = \varphi(u + \mathrm{d}u, v, w + \mathrm{d}w) = \varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\mathrm{d}w$, $y_6 = \psi(u + \mathrm{d}u, v, w + \mathrm{d}w) = \psi + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u +$ $+ \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\mathrm{d}w$, $z_6 = \gamma(u + \mathrm{d}u, v, w + \mathrm{d}w) = \gamma + \dfrac{\partial\gamma}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\gamma}{\partial w}\mathrm{d}w$.

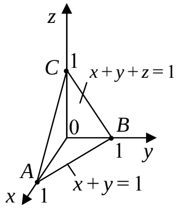


Рис. 11

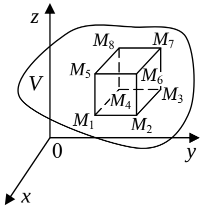


Рис. 12

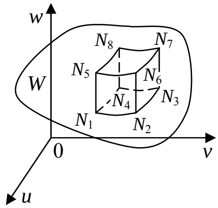


Рис. 13

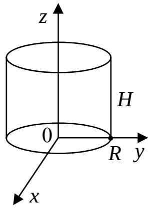


Рис. 14

Чтобы выч-ть элр. объем $\mathrm{d}V$, дт-но найти вкн.-скн. пзв-ие (3°: 2.2) вк-ов

$$\pm\,\mathrm{d}V = \left(\overline{N_2N_1} \times \overline{N_2N_3}\right)\overline{N_2N_6} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ x_6 - x_2 & y_6 - y_2 & z_6 - z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u}\mathrm{d}u \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v}\mathrm{d}v \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\mathrm{d}w & \dfrac{\partial\psi}{\partial w}\mathrm{d}w & \dfrac{\partial\gamma}{\partial w}\mathrm{d}w \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} & \dfrac{\partial\psi}{\partial w} & \dfrac{\partial\gamma}{\partial w} \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = -D\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Откуда

$$\mathrm{d}V = |D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{13г}$$

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_W f\left(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \gamma(u,v,w)\right)|D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iiint\limits_W F(u,v,w)\,|D|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{14}$$

Стн-ие (14) есть фм-а замены пер-ых в трн. инт-ле, частным случаем к-ой яв-ся цлнч. крд-ы (рис. 15). Они связаны с дек. крд-ми стн-ми:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right| \Rightarrow D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Тогда $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_W F(r,\varphi,z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} \mathrm{d}z \int\limits_{\gamma_1(\varphi,z)}^{\gamma_2(\varphi,z)} F(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\ . \tag{15}$$

Сфч. крд-ы тоже яв-ся частным случаем замены пер-ых. Они связаны с дек. крд-ми (см. (16) и рис. 15 из 4°: 3.1, т.е. рис. 16 ниже) стн-ми:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\varphi \\ y &= r\cos\psi\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}\right| \Rightarrow D = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi \\ -r\sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi \\ -r\cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -r^2\cos\psi \Rightarrow |D| = r^2\cos\psi.$$

Тогда $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_W F(r,\varphi,z)\,r^2\cos\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}z. \tag{16}$$

**зм5**. Иногда вместо рис. 16 используют рис. 17. Тогда сфч. крд-ы связаны с дек. крд-ми стн-ми: $x = r\sin\psi\cos\varphi$, $y = r\sin\psi\sin\varphi$, $z = r\cos\psi$. Заметим также, что вместо $\psi$ и $r$ иногда используют обз-ия $\theta$ и $\rho$.

**п6**. Опр-ть массу $m$ прямого кругового цлн-а $V$ с высотой $H$ и радиусом основания $R$, если плотность $\gamma$ в любой его тч. равна рст-ю $r$ от этой тч. до оси цлн-а, т.е. $\gamma = r$.

Р. Систему крд-т выберем, как указано на рис. 14. По (15) находим

$$m = \iiint\limits_V \gamma\mathrm{d}V = \iiint\limits_V r\mathrm{d}V = \iiint\limits_W r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^R r^2\mathrm{d}r\int\limits_0^H\mathrm{d}z = H\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^R r^2\mathrm{d}r = \frac{2\pi R^3 H}{3}\ .$$

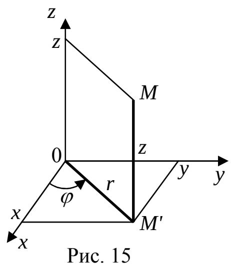


Рис. 15

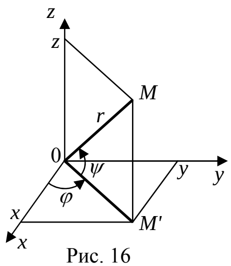


Рис. 16

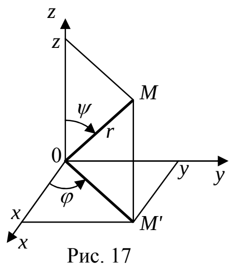


Рис. 17

**7°. Понятие интеграла произвольной кратности**. Полученные результаты двн. и трн. инт-ов легко обобщаются на инт-ы произвольной кратности. Поэтому эти результаты здесь только перечислим.

Рас-им $n$-мерный пуг. прлп-д $[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n]$, объем к-го равен

$$V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n). \tag{17а}$$

В общем случае объем (обл-ть) $V$ имеет произвольную форму.

Пусть в обл-ти $V$ задана непр. фк-я $n$ пер-ых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, разбивая обл-ть $V$ на элр. части и повторяя известные нам действия (см. 2*-5* из 5°), придем к понятию $n$-кратного инт.

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}\limits_V f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n. \tag{17б}$$

Св-ва двн. и трн. инт-ов имеют место и здесь.

Выч-ие $n$-кратного инт. (анч-но 4°, 6°) сводится к выч-ю $n$ опрн. инт-ов:

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}\limits_V f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \int\limits_a^b \mathrm{d}x_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \mathrm{d}x_n \int\limits_{\varphi_2(x_1,x_2)}^{\psi_2(x_1,x_2)} \mathrm{d}x_3 \ldots \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n. \tag{17}$$

Замена пер-ых в $n$-кратном инт. имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \end{aligned}\right\}. \tag{18а}$$

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{V} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{W} F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)|D|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\ldots\mathrm{d}\xi_n, \tag{18}$$

где $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$.

**п7**. Найти объем $T_n$ $n$-мерного симплекса $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le h$, $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$.

Р. $T_n = \overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{V} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = \int_0^h \mathrm{d}x_1 \int_0^{h-x_1} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{h-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}} \mathrm{d}x_n$ .

При $n = 2$ имеем $T_2 = \int_0^h \mathrm{d}x_1 \int_0^{h-x_1} \mathrm{d}x_2 = \int_0^h (h - x_1)\mathrm{d}x_1 = -\left.\frac{(h-x_1)^2}{2}\right|_0^h = \frac{h^2}{2!}$ ;

$n = 3$, $T_3 = \int_0^h \mathrm{d}x_1 \int_0^{h-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{h-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 = \int_0^h \mathrm{d}x_1 \int_0^{h-x_1} (h - x_1 - x_2)\mathrm{d}x_2 = \int_0^h \mathrm{d}x_1 \left[-\frac{(h-x_1-x_2)^2}{2}\right]_0^{h-x_1} = \int_0^h \frac{(h-x_1)^2}{2}\mathrm{d}x_1 =$

$= -\left.\frac{(h-x_1)^3}{3!}\right|_0^h = \frac{h^3}{3!}$. Отсюда $T_n = \frac{h^n}{n!}$ .

# ЛЕКЦИЯ 27

## 10.2. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНОГО И НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛОВ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

**1°. Общая схема использования интегралов**. При р-и задач с помощью двн. и трн. инт-ов используем те же принципы, к-ые рас-ли в прлж-ях опрн. инт-ла (см. 4°: 8.3), н-р, если найдем эл-т $\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x$ на сгм-е $[x, x + \mathrm{d}x]$, то

$$Q = \int_a^b \mathrm{d}Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,. \tag{1}$$

Анч-но, если найдем эл-т $\mathrm{d}Q = f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ подобласти $\mathrm{d}\sigma \subset \sigma$, то

$$Q = \iint_\sigma \mathrm{d}Q = \iint_\sigma f(x, y)\mathrm{d}\sigma \,. \tag{2}$$

Наконец, если найдем эл. $\mathrm{d}Q = f(x, y, z)\mathrm{d}V$ подобласти $\mathrm{d}V \subset V$, то

$$Q = \iiint_V \mathrm{d}Q = \iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}V \,. \tag{3}$$

Стн-ия (1)-(3) справедливы в том случае, если $Q$ аддитивна (адд.) ($Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i$ ) и лин-на отс-но подобл-ей ($\Delta Q_i = f(x, y, z)\Delta V_i$).

**2°. Статистические моменты и центр тяжести**. Анч-но 2* из 4°: 8.3 стсч. моментом $S_x$ отс-но оси $Ox$ материальной тч. $P(x, y)$ массой $m$ наз. пзв-ие массы на ординату, т.е. $S_x = my$. Тогда $S_y = mx$ – стсч момент отс-но оси $Oy$.

Если же материальная пщ. $\sigma$ задана плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$, то $\mathrm{d}m = \gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma$ для подобл-и $\mathrm{d}\sigma$. Тогда

$$\mathrm{d}S_x = y\mathrm{d}m = y\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma,\ \mathrm{d}S_y = x\mathrm{d}m = x\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

Откуда по (2) получим

$$S_x = \iint_\sigma y\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma \,,\ S_y = \iint_\sigma x\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma \,. \tag{5}$$

Из (5) легко получить крд-ы центра тяжести

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_\sigma x\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_\sigma \gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma} \,,\ \bar{y} = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint_\sigma y\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_\sigma \gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma} \,. \tag{6}$$

В част., если пластинка одн. ($\gamma = \gamma_0$), то

$$\bar{x} = \frac{\iint_\sigma x\mathrm{d}\sigma}{\iint_\sigma \mathrm{d}\sigma} = \frac{\iint_\sigma x\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \,,\ \bar{y} = \frac{\iint_\sigma y\mathrm{d}\sigma}{\iint_\sigma \mathrm{d}\sigma} = \frac{\iint_\sigma y\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \,. \tag{7}$$

Полученные стн. можно обобщить для материального тела $V$ с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$ отс-но крд. пл-ей:

$$S_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V \,,\ S_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V \,,\ S_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V \,. \tag{8}$$

Отсюда получим крд-ы центра тяжести:

$$\bar{x} = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\iiint_V x\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \gamma(x, y, z)\mathrm{d}V} \,,\ \bar{y} = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint_V y\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \gamma(x, y, z)\mathrm{d}V} \,,\ \bar{z} = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V z\gamma(x, y, z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \gamma(x, y, z)\mathrm{d}V} \,. \tag{9}$$

В част., если тело одн. ($\gamma = \gamma_0$), то

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V} = \frac{\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}V}{V},\quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V} = \frac{\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}V}{V},\quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V} = \frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V}{V}. \qquad (10)$$

**п1**. Найти крд-ы центра тяжести одн. пщ-ки $\sigma$, огрн-ой парб-ой $y = 4 - x^2$ и осью $Ox$ (рис. 1).

Р. В силу симч-сти фигуры $\bar{x} = 0$. Найдем $S_x = \iint\limits_\sigma y\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{-2}^{2}\mathrm{d}x \int\limits_0^{4-x^2} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\times$

$\times \int\limits_{-2}^{2}\left(16 - 8x^2 + x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{256}{15}$; $\sigma = \iint\limits_\sigma \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_0^{4-x^2}\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{32}{3} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\iint\limits_\sigma y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_\sigma \mathrm{d}\sigma} = \frac{256/15}{32/3} = \frac{8}{5}$.

**п2**. Найти центр тяжести одн. тела, огрн-го парби-ом врщ-ия $2z = 4 - x^2 - y^2$ и пл-ю $z = 0$ (рис. 2).

Р. В силу симч-сти тела имеем, что $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Выч-им $\bar{z}$, т.е. $S_{xy}$ и $V$ в цлнч-их крд-ах:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V = \int\limits_{-2}^{2}\mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y \int\limits_0^{\frac{1}{2}\left(4-x^2-y^2\right)} z\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2} r\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{\frac{1}{2}\left(4-r^2\right)} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2}\left(4-r^2\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\pi.$$

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}V = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2} r\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{\frac{1}{2}\left(4-r^2\right)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2}\left(4-r^2\right)r\,\mathrm{d}r = 4\pi. \text{ Тогда } \bar{z} = \frac{S_{xy}}{V} = \frac{\frac{8}{3}\pi}{4\pi} = \frac{2}{3}.$$

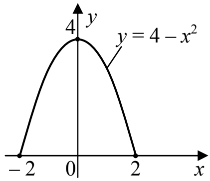


Рис. 1

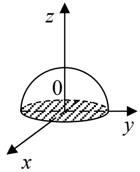


Рис. 2

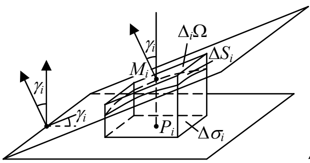


Рис. 3

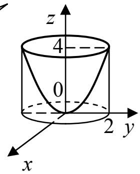


Рис. 4

**3°. Момент инерции**. Моментом инерции (анч-но 3* из 4°: 8.3) материальной тч. массой $m$ отс-но оси наз. пзв-ие массы этой тч. на кв-т ее рст-ия до оси. Н-р, $J_x = y^2m$ – момент инерции отс-но оси $Ox$. $J_y = x^2m$ – момент инерции отс-но оси $Oy$.

Если материальная пщ. $\sigma$ задана плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$, то $\mathrm{d}m = \gamma = \gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma$. Тогда

$$\mathrm{d}J_x = y^2\mathrm{d}m = y^2\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma,\ \mathrm{d}J_y = x^2\mathrm{d}m = x^2\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma. \qquad (11)$$

Отсюда
$$J_x = \iint\limits_\sigma y^2\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma,\ J_y = \iint\limits_\sigma x^2\gamma(x, y)\mathrm{d}\sigma. \qquad (12)$$

Стн-ие (12) легко обобщить для материального тела $V$ плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, учитывая, что здесь, н-р, кв-т рст-ия до оси $Ox$ равна $y^2 + z^2$. Тогда

$$J_x = \iiint\limits_V\left(y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\mathrm{d}V,\ J_y = \iiint\limits_V\left(x^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\mathrm{d}V,\ J_z = \iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y,z)\mathrm{d}V. \qquad (13)$$

**п3**. Найти момент инерции отс-но оси $Oy$ одн-ой пщ. п1, считая, что плотность $\gamma = 1$.

Р. $J_y = \iint\limits_\sigma x^2\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_\sigma x^2\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_0^{4-x^2}x^2\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2}x^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{128}{15}$.

**п4**. Опр-ть момент инерции отс-но оси $Oz$ одн. пирамиды $V$ плотностью $\gamma = 3$, огрн-ой пл-ми $x = y = z = 0$, $x + y + z = 1$ (рис. 11 из 6°: 10.1).

Р. $J_z = 3\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{1-x}\mathrm{d}y\int\limits_0^{1-x-y}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z = 3\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)(1-x-y)\mathrm{d}y = 3\int\limits_0^1\left[\frac{x^2\left(1-x^2\right)}{2} + \frac{(1-x)^4}{12}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{10}$.

**4°. Площадь поверхности**. В 3°: 8.3 была р-на задача о выч-и пщ-ди пвх-ти врщ-ия. Теперь р-им более общую задачу.

**з1**. Найти пщ-дь части пвх-ти (рис. 3) $S$ (пркц-ей $\sigma$ на крд. пл-ть $xOy$), заданной ур-ем $z = f(x, y)$.

Р. Обл. $\sigma$ произвольно разобьем на $n$ частей: $\Delta\sigma_1$, …, $\Delta\sigma_i$, …, $\Delta\sigma_n$, на каждой из к-ых построим цлнк-и с образующими, прл-ми оси $Oz$. Пвх-ть $S$ разобьет эти цлнк-и на $n$ частей: $\Delta S_1$, …, $\Delta S_i$, …, $\Delta S_n$. На элр. пщ-ке $\Delta\sigma_i$ (рис. 3) через произвольную тч. $P_i = P(x_i, y_i)$ восстановим прп-яр, к-ый перч-ся с элр. пвх-ю $\Delta S_i$ в тч. $M_i(x, y, z)$, через к-ю проведем кас-ю пл-ть к $\Delta S_i$ (7°: 9.1):

$$-f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) - f'_y(x_i, y_i)(y - y_i) + 1 \cdot (z - z_i) = 0. \tag{14}$$

Пусть эти пл., перк-ясь с цлнк-ми, образуют элр. пщ-ки: $\Delta\Omega_1$, …, $\Delta\Omega_i$, …, $\Delta\Omega_n$ (рис. 3). Тогда $\Delta S_i \approx \Delta\Omega_i = \dfrac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$. Но в силу (33в): 9.1 имеем, что $\cos\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}$. Отсюда

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i. \tag{15}$$

Находим сумму

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i, \tag{16}$$

к-ая наз. интн. суммой.

Обз-ив через $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i$, найдем предел интн. суммы при $\delta \to 0$:

$$S = \iint\limits_\sigma \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i, \tag{17}$$

Стн. (17) есть фм-а выч-ия пщ-ди пвх-ти.

**п5**. Выч-ть пщ-дь той части парби-да врщ-ия $z = x^2 + y^2$, к-ая вырезается цлн-ом $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 4).

Р. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Тогда $S = \iint\limits_\sigma \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}\sigma =$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 1\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) \approx 36{,}2.$$

**5°. Вычисление интеграла Пуассона**. В теории вер-ей большое зн-ие имеет несбт. инт-л $J = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, назм-ый инт-ом Пуассона. Для его выч-ия рас-им несбт. двн. инт-л $K = \iint\limits_\sigma e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}\sigma$, где $\sigma = \{0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le \infty\}$. К этому инт-у применимы фм. перехода к повторному инт. как дек-ой, так и в полярной системе крд.

Выч-им этот инт. в дек. крд-ах:

$$K = \iint\limits_\sigma e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y}_{J} = J\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = J^2. \tag{18}$$

Выч-ив этот инт. в полярных крд., получим

$$K = \iint\limits_\sigma e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\Bigg|_0^\infty \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Из фм-л (18) и (19) следует, что $J = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, т.е.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{20}$$

Анч-но получим, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (20а)$$

**6°. Интегралы, зависящие от параметра**. Рас-им инт-л, звщ-й от парм-а $\alpha$:

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x. \qquad (21)$$

Здесь нас будет интересовать дифв-ие и интв-ие $J(\alpha)$ по парм-у $\alpha$.

**т1**. Если $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ непр-ны при $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$, то фк. $J(\alpha)$ имеет непр. прв-ю $J'(\alpha)$ и справедлива фм.

$$J'(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x.$$

Д. $J'(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\dfrac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\dfrac{1}{\Delta\alpha}\displaystyle\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\mathrm{d}x =$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{f(x_i,\alpha+\Delta\alpha)-f(x_i,\alpha)}{\Delta\alpha}\Delta x_i = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f'_\alpha(x,\alpha)\,\Delta x_i = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Итак,

$$J'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x, \qquad (22)$$

т.е. прв-я инт-а по парм-у равна инт-у от прв-ой подынт. фк-и по этому парм-у. Фм-а (22) наз. фм-ой Лейбница.

**зм1**. Фм-у (22) можно обобщить на случай, когда в (21) пределы интв-ия яв-ся фк-ми от $\alpha$, т.е.

$$J(\alpha) = \Phi[\alpha, b(\alpha), a(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\mathrm{d}x. \qquad (21а)$$

Найдем прв-ю сложной фк.

$$J'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial\alpha}. \qquad (21б)$$

В силу теоремы о дифв-и опрн. инт-ла по верхнему пер. пределу получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x = f(b(\alpha), \alpha).$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x = -f(a(\alpha), \alpha),$$

подс-я их в (21б) и учитывая (22), будем иметь

$$J'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x + f(b(\alpha), \alpha)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\alpha} - f(a(\alpha), \alpha)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha}. \qquad (23)$$

**т2**. Если фк. $f(x, \alpha)$ непр-на при $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$, то фк. $J(\alpha)$ непр-на в сгм-е $[c, d]$, т.е. ее можно интв-ть в этом сгм.

$$\int_c^d J(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha. \qquad (24)$$

Д. Нам дт-но показать непр-сть $J(\alpha)$ $\forall$ $\alpha \in [c, d]$, т.е. $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\Delta J(\alpha) = 0$. Дсв-но, $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\Delta J =$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}[J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)] = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int\limits_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\mathrm{d}x = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}[f(x_i,\alpha+\Delta\alpha)-f(x_i,\alpha)]\Delta x_i =$

$= \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i = 0$, т.е. (24) имеет место ■

Теперь рас-им прлж-и инт-ов, звщ-их от парм-ов. Р-им

**п6**. Выч-ть инт. $J(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\dfrac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$ .

Р. Этот инт. непосредственно выч-ть нельзя, т.к. для фк-и $e^{-x}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ не сущ-ет первообразной в элр. фк-ях. Поэтому используем фм-у Лейбница (22): $J'(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x = e^{-x}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha}\Big|_0^\infty +$

$+\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin\alpha x\mathrm{d}x = 0 - 0 - \dfrac{e^{-x}\cos\alpha x}{\alpha^2}\Big|_0^\infty - \dfrac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x \Rightarrow$

$\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha^2} \Rightarrow J'(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+\alpha^2} \Rightarrow J(\alpha) = \mathrm{arctg}\alpha + C$. Опр-им $C$.

$J(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\dfrac{\sin 0\cdot x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0$. $J(0) = \mathrm{arctg}\,0 + C \Rightarrow 0 = 0 + C$, т.е. $C = 0$. Сдт-но, $J(\alpha) = \mathrm{arctg}\alpha$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\alpha. \tag{25}$$

**п7** (гамма-фк.). Выч-ть инт. $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ .

Р. Найдем зн-ия $\Gamma(\alpha)$ – гамма-фк-и при целых $\alpha$. При $\alpha = 1$ имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1. \tag{25а}$$

Пусть $\alpha > 1$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x} = 0$ при любом $k$, и инт-уя по частям, получим

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty \underbrace{x^{\alpha-1}}_{u}\underbrace{e^{-x}\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int\limits_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\mathrm{d}x = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \tag{25б}$$

На основании (25а) и (25б) находим при $\alpha = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{26}$$

**п8**. Выч-ть инт. $\int\limits_0^\infty\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ $(a > 0, b > 0)$.

Р. Неопрн-ый инт-л от подынт. фк-и не берется в элр. фк-ях. Для его выч-ия рас-им другой инт-л $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

Инт-уя это рав. в пределах $\alpha = a$ и $\alpha = b$, получим:

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha = \int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} = \ln\alpha\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$

или

$$\int_0^\infty\left(\int_a^b e^{-\alpha x}\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}.$$

Откуда, выч-я внутренний инт., получим

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}. \tag{27}$$

**7°. Несобственные интегралы, зависящие от параметра**. Приведенные выше т1, т2 относятся к инт-ам с конечными пределами и с непр. подынт. фк-ей. Для несбт. инт-ов ситуация значительно сложнее. Здесь огр-мся рас-ем наиболее часто встречающихся несбт. инт-ов вида

$$J(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x. \tag{28}$$

Обл-ю опр-ия фк-и $J(\alpha)$ служит свк-ть зн-й $\alpha$, при к-ых инт. (28) сх-ся.

**о1**. Несбт. инт-л $\int_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x$, звщ-й от парм-а $\alpha$, наз. правильно сх-мся, если можно указать такую плж. фк-ю $\varphi(x)$, что при всех расв-мых зн-ях $x$ и $\alpha$ соблюдается нерав-во $|f(x, \alpha)| \le \varphi(x)$ и несбт. инт-л

$$J = \int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x \tag{28a}$$

сх-ся. Н-р, инт. $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ сх. правильно $\forall\ x$, т.к. $|f(x, \alpha)| = \left|\frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$, а $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ сх.

**т3**. Если несбт. инт-л от непр-ых при $x \ge a$, $\alpha \in [c, d]$ фк-й $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x,\alpha)$ сх. правильно, то фк. $J(\alpha)$ имеет непр. прв-ю

$$J'(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\mathrm{d}x = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Д. Из сх. (28а) вытекает сх-ть (28), т.е. из $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x$, к-ые сх. Тогда в силу т1 имеет место (29) ■

**т4**. Если фк. $f(x, \alpha)$ непр-на при $x \ge 0$, $\alpha \in [c, d]$ и инт-л (28) сх. правильно, то $J(\alpha)$ непр-на в сгм-е $[c, d]$, т.е. можно интв-ть в этом сгм.

$$\int_c^d J(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_c^d\left(\int_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{30}$$

Д-ся с учетом $\int_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ и т2.

**п9**. Вычислить инт-л Пуассона, встречающийся при р-и задач мт. физики

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x. \tag{31a}$$

Р. Заметим, что по (20а) имеем $J(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Инт-л (31а) правильно сх., т.к.

$|\, e^{-x^2}\cos\alpha x \,| \le e^{-x^2}$ . Находим

$$J'(\alpha) = -\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\sin\alpha x\mathrm{d}x\ .$$

Это действие законное, т.к. последний инт. тоже сх. правильно. Дсв-но, $|\, xe^{-x^2}\sin\alpha x \,| \le xe^{-x^2}$, а $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$ .

Выч-им $J'(\alpha) = -\int_0^{\infty} \underbrace{\sin\alpha x}_{u}\underbrace{xe^{-x^2}\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}\sin\alpha x e^{-x^2}\Big|_0^{\infty} - \frac{\alpha}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x = -\frac{\alpha}{2}J(\alpha) \Rightarrow \frac{J'(\alpha)}{J(\alpha)} =$ $= -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow [\ln J(\alpha)]' = -\frac{\alpha}{2} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln J(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{4} + C$. При $\alpha = 0$ $J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Тогда $C = \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Сдт-но, $\ln J(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{4} + \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, т.е.

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x = e^{-\frac{\alpha^2}{4}+\ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\ . \tag{31}$$

## ЛЕКЦИЯ 28

## 10.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ТЕОРИЯ ПОЛЯ

**1°. Криволинейные интегралы I рода**. Пусть на пл. $xOy$ дана кривая (крв.) $AB$ (рис. 1) и предположим, что фк. $z = f(x, y)$ опр-на и огр-на на крв-й $AB$. Крв-ю $AB$ разделим произвольно на $n$ частей $AM_1$, $M_1M_2$, …, $M_{i-1}M_i$, …, $M_{n-1}B$. Обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и выч-им длину дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ через ломаную $\Delta l_i$, т.е. $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i} \approx \Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ и пусть $(x_i^*, y_i^*)$ - нек-ая тч., взятая на дуге $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Сост-м сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i \ , \tag{1}$$

к-ая наз. интн-ой суммой для фк-и $f(x, y)$ по длине дуги $AB$. Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta l_i$ и найдем предел интн-ой суммы при $\delta \to 0$. Если этот предел сущ-ет, то он наз. криволинейным (крвл.) инт-ом I рода от фк-и $f(x, y)$ по крв-й $AB$ и обз-ся

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i \ . \tag{2}$$

Крв. $AB$ может быть замкнутой лин. $L$, тогда крвл. инт-л обз-ся символом $\oint\limits_L$.

Крвл-ый инт. I рода сущ-ет, если подынт. фк-я $f(x, y)$ непр-на во всех тч-х крв-й $AB$.

Приведем осн. св-ва крвл-го инт-а I рода:

**с1**. Если линия $L$ состоит из двух линий $L_1$ и $L_2$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}l + \int\limits_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}l \text{ (адд-сть).}$$

**с2**. При изменении (изм.) направления (нпв.) интв-ия крвл-ый инт. не меняет своего зн., т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_{BA} f(x,y)\mathrm{d}l \ .$$

**с3**. $\int\limits_{AB} kf(x,y)\mathrm{d}l = k\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l$ .

**с4**. $\int\limits_{AB} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))\mathrm{d}l = \int\limits_{AB} f_1(x,y)\mathrm{d}l \pm \int\limits_{AB} f_2(x,y)\mathrm{d}l$ .

**с5**. Если для тч-к крв-й $AB$ выполнено $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то $\int\limits_{AB} f_1(x,y)\mathrm{d}l \le \int\limits_{AB} f_2(x,y)\mathrm{d}l$ .

**с6**. Если фк. $f(x, y)$ непр-на на крв-й $AB$, то на этой крв-й найдется тч. $(x_c, y_c)$, такая, что $\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = f(x_c, y_c)l$ (теорема о ср-ем).

Для выч-ия крвл-го инт-а I рода используют одну из сд. фм-л.

Если крв. $AB$ задана ур-ем $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то $\mathrm{d}l = \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,\mathrm{d}x \ ; \tag{3}$$

если крв. $AB$ задана ур-ем $x = \psi(y)$ $(c \le x \le d)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_c^d f(\psi(y),y)\sqrt{1+(\psi'(y))^2}\,\mathrm{d}y \ ; \tag{3а}$$

если крв. $AB$ задана пармч-ки: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то $\mathrm{d}l = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$, тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l \;=\; \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\;; \tag{4}$$

если крв. $AB$ задана ур-ем в полярных крд-х: $r = r(\varphi)$ ($\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$), то $\mathrm{d}l = \sqrt{r^2(\varphi)+\big(r'(\varphi)\big)^2}\,\mathrm{d}\varphi$, и

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l \;=\; \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+\big(r'(\varphi)\big)^2}\,\mathrm{d}\varphi\;. \tag{5}$$

Понятие крвл. инт-а I рода можно обобщить для фк-и трех пер-х $f(x, y, z)$, заданной в тч-х прн-ой крв-й. Выч-ие такого инт. по крв-й $AB$, н-р, с пармч. ур-ми $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$) производится по фм-е

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\mathrm{d}l \;=\; \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\;. \tag{6}$$

Рас-им нек-ые прлж-ия крвл. инт-а I рода:

1*. Длина кривой. Если $l$ – длина крв-й $AB$, то из фм-ы (2) при $f(x, y) = 1$ следует, что

$$l = \int\limits_{AB}\mathrm{d}l\;. \tag{7}$$

2*. Площадь цилиндрической поверхности. Если нпвщ. цлнч. пвх-ти служит крв. $AB$ на пл-ти $Oxy$, образующая прл-на оси $Oz$, то пщ-дь пвх-ти, задаваемой фк-ей $f(M) = f(x, y) \ge 0$ (рис. 2), находится по фм-е

$$S = \int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l\;. \tag{8}$$

3*. Масса крв-й. Если крв. $AB$ - материальная (провод, цепь, трос), т.е. вдоль крв-й рсп-на с плотностью $\gamma(x, y)$ нек-ая масса $m$, то фм. (2) имеет вид

$$m = \int\limits_{AB}\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;. \tag{9}$$

4*. Статистические моменты и центр тяжести. Стсч. моменты отс-но осей $Ox$ и $Oy$ и крд-ы центра тяжести материальной крв-й опр-ся фм-ми

$$S_x = \int\limits_{AB} y\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;,\; S_y = \int\limits_{AB} x\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;,\; x_c = \frac{S_y}{m}\;,\; y_c = \frac{S_x}{m}\;. \tag{10}$$

5*. Момент инерции. Для материальной крв. $AB$ моменты $J_x$, $J_y$, $J_0$ инерции отс-но осей $Ox$, $Oy$ и нач. крд-т опр-ся по фм-ам

$$J_x = \int\limits_{AB} y^2\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;,\; J_y = \int\limits_{AB} x^2\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;,\; J_0 = \int\limits_{AB}\big(x^2+y^2\big)\gamma(x,y)\mathrm{d}l\;. \tag{11}$$

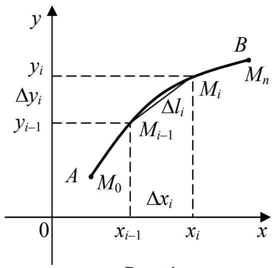



Рис. 1

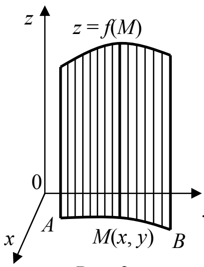



Рис. 2

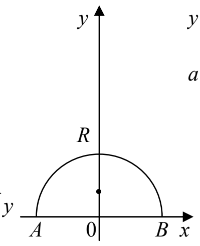



Рис. 3

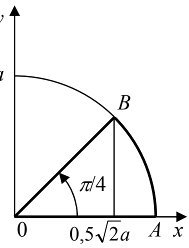



Рис. 4

**п1**. Выч-ть $\int\limits_{AB}\big(4y^2 - 16x^2 - 2\cos(11x - 4y - 5)\big)\mathrm{d}l$ , где $AB$ меняется от тч. $A(1, 2)$ до $B(3, 7)$.

Р. Находим ур-ие $AB$: $\dfrac{y-2}{7-2} = \dfrac{x-1}{3-1} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}(5x-1)$. Т.к. $y = \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(5x-1)$, $1 \le x \le 3$, то используем фм-у (3) $\int\limits_{AB}\left(4y^2-16x^2-2\cos(11x-4y-5)\right)\mathrm{d}l=\left|\begin{array}{l} y=0{,}5(5x-1),\ y'_x=2{,}5,\\ \mathrm{d}l=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{7{,}25}\,\mathrm{d}x\end{array}\right|=\int\limits_1^3\left(4(0{,}5(5x-1))^2-\right.$

$\left.-16x^2-2\cos(11x-4\cdot0{,}5(5x-1)-5)\right)\sqrt{7{,}25}\mathrm{d}x=\sqrt{7{,}25}\int\limits_1^3\left(9x^2-10x-2\cos(x-3)+1\right)\mathrm{d}x=\sqrt{7{,}25}\ \left[3x^3-5x^2-\right.$

$\left.-2\sin(x-3)+x\right]\Big|_1^3\ =\ \sqrt{20}\left(20+\sin 2\right).$

**п2**. Найти массу материальной линии $x = e^y$ между тч-ми $A$ и $B$, для к-ых ординаты равны 0 и ln2 ств-но, если в каждой тч. линии $AB$ плотность рсп-ия массы прц-на кв-у абсциссы точки.

Р. Т.к. $x = \psi(y) = e^y$, $0 \le y \le \ln 2$, то по (3а) с учетом $\gamma = kx^2$ применяем фм-у (9) и получим

$m=\int\limits_{AB}kx^2\mathrm{d}l=|x=e^y,\ \mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\ \mathrm{d}y=\sqrt{1+e^{2y}}\ \mathrm{d}y|=\ k\int\limits_0^{\ln 2}e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\mathrm{d}y\ =\ \frac{k}{2}\int\limits_0^{\ln 2}\left(1+e^{2y}\right)^{1/2}\mathrm{d}\left(1+e^{2y}\right)\ =$

$=\ \frac{k}{3}\ \left(5\sqrt5-2\sqrt2\right).$

**п3**. Найти центр тяжести полуокр-ти (рис. 3) $x^2 + y^2 = R^2$ с плотностью $\gamma = 1$ в каждой тч. крв-й.

Р. В силу сим-и $x_c = 0$. По (10), используя (4), найдем $y_c=\frac{S_x}{m}=\int\limits_{AB}y\mathrm{d}l\Big/\int\limits_{AB}\mathrm{d}l=\left|\begin{array}{l}x=R\cos t,x'=-R\sin t\\ y=R\sin t,y'=R\cos t\end{array}\right|=$

$=\int\limits_0^{\pi}R\sin t\cdot\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\Big/\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}l\ =\ R^2\int\limits_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t\Big/\pi R\ =\ \frac{2R^2}{\pi R}\ =\ \frac{2R}{\pi}$. Итак, $y_c=\ \frac{2R}{\pi}$.

**п4**. Выч-ть $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}l$, если $AB$ - часть гпрбч. спирали $r = 1/\varphi$ от $\varphi =\ \sqrt3$ до $\varphi =\ 2\sqrt2$ ($r$ и $\varphi$ - полярные крд-ы).

Р. По (5) находим $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}l=\int\limits_{\sqrt3}^{2\sqrt2}\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2}\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\left(\frac{1}{\varphi}\right)'^2}\ \mathrm{d}\varphi=\int\limits_{\sqrt3}^{2\sqrt2}r^{-3}\sqrt{\varphi^{-2}+\varphi^{-4}}\mathrm{d}\varphi=$

$=\int\limits_{\sqrt3}^{2\sqrt2}\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{-3}\varphi^{-2}\sqrt{\varphi^2+1}\mathrm{d}\varphi=\int\limits_{\sqrt3}^{2\sqrt2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\mathrm{d}\varphi=\frac13\left(1+\varphi^2\right)^{\frac32}\Big|_{\sqrt3}^{2\sqrt2}=\frac{19}{3}.$

**п5**. Выч-ть $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$, если $L$ - замкнутый контур (рис. 4), состоящий из отрезка $OA$ полярной оси $a$, дуги $AB$ окр-ти $r = a$ и отрезка $BO$ луча $\varphi = \pi/4$ ($r$ и $\varphi$ - полярные крд-ы).

Р. Линия $L$ состоит из отрезков $OA$ и $BO$ и дуги $AB$ окр-ти, поэтому, согласно св-ву аддс-и, имеем $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l\ =\ \oint\limits_{OA}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l\ +\ \oint\limits_{AB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l\ +\ \oint\limits_{BO}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$ .

На отрезке $OA$ имеем $y = 0$, $0 \le x \le a$, $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$. Сдт-но, по фм-е (3) находим

$$\oint\limits_{OA}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l\ =\ \int\limits_0^a e^x\mathrm{d}x\ =e^a-1.$$

На дуге $AB$ имеем $r = a$, $0 \le \varphi \le \pi/4$, $\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\varphi$. Сдт-но, по фм-е (5) получаем

$$\oint\limits_{AB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l\ =\ \int\limits_0^{\pi/4}e^a a\mathrm{d}\varphi\ =\ \frac14\ \pi a e^a.$$

На отрезке $BO$ имеем $y = x$, $\mathrm{d}l = \sqrt2\ \mathrm{d}x$. Т.к. $\oint\limits_{BO}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\oint\limits_{OB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$ и для $OB$ $x \in [0, 0{,}5\sqrt{a}\ \ a]$ (рис. 4), то по фм-е (3) находим

$$\oint\limits_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}l \; = \int\limits_0^{0,5\sqrt{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\mathrm{d}x \; = e^a - 1.$$

Итак, $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}l \; = 2(e^a - 1) + 0{,}25\pi a e^a$.

**п6**. Найти длину дуги прн-ой крв-й $y = x\mathrm{tg}z$, $x^2 + y^2 = z$ от тч. $O(0, 0)$ до тч. $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$.

Р. Используя (7) и (6), имеем $L = \int\limits_{OA}\mathrm{d}l \; = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ . Для выч-ия этого инт. нх-мо записать пармч. ур-ия крв. $OA$. Положим $z = t$, тогда $x^2 + y^2 = t$, $y = x\mathrm{tg}t$. С учетом этих ур. получаем: $x = \sqrt{t}\big/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} \; = \sqrt{t}\,\cos t$; $y = \sqrt{t}\,\sin t$; $z = t$, причем началу и концу линии $OA$ ств-ют зн-ия парм-ра $t = 0$ и $t = z_0$. Из пармч. ур-й находим:

$$x'(t) = -\sqrt{t}\,\sin t + \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,;\; y'(t) = \sqrt{t}\,\cos t + \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,;\; z'(t) = 1;$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \; = \sqrt{t + \frac{1}{4t} + 1} \; = \frac{2t+1}{2\sqrt{t}}\,.$$

Итак, $L = \int\limits_0^{z_0} \frac{2t+1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \; = \left(\frac{2}{3}t^{3/2} + t^{1/2}\right)\Bigg|_0^{z_0} \; = \sqrt{z_0}\,\left(\frac{2}{3}z_0 + 1\right)$.

**2°. Криволинейный интеграл II рода и его связь с интегралом I рода**. Напомним, что вкн. полем наз. обл-ть пл-ти, каждой тч-е $M(x, y)$ к-ой поставлен в ств-ие вк-р

$$\Phi = \Phi(M) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j},$$

где пркц-и $P$, $Q$ вк-а $\Phi$ яв-ся скн. фк-ми тч-и $M$.

Пусть на крв. $AB$, расположенной в пл-ти $xOy$ (рис. 5), опр-ны две огрн. и непр. фк-и $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем крв-ю $\overset{\frown}{AB}$ на $n$ частей тч-ми $A = M_0, m_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$.

Рас-им элр. дугу $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ , обз-им через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, произвольно выберем тч-у $M_i^* \; = M\left(x_i^*, y_i^*\right) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ и опр-им вк-р

$$\Phi_i = \Phi\left(M_i^*\right) = P\left(x_i^*, y_i^*\right)\boldsymbol{i} + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\boldsymbol{j}. \tag{12а}$$

Выч-им длину дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ через ломаную $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ вк-а

$$\Delta\bar{l}_i \; = \Delta S_i = \Delta x_i\,\boldsymbol{i} + \Delta y_i\,\boldsymbol{j}. \tag{12б}$$

Найдем скн. пзв-ие вк-ов (12а) и (12б): $\Phi_i\Delta S_i = P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i$.

Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta l_i$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i\Delta S_i \; = \sum_{i=1}^n \left(P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right), \tag{12в}$$

назм-ю интн. суммой и найдем ее предел при $\delta \to 0$. Если этот предел сущ-ет, то он наз. крвл. инт-ом II рода по крв-й $AB$ и обз-ся

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \; = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n \left(P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right). \tag{12}$$

Крв. $AB$ может быть замкнутой линией $L$, тогда крвл-ый инт. обз-ся символом $\oint\limits_L$.

Крвл-ый инт. II рода сущ-ет, если крв. $AB$ гладкая, а подынт. фк-и $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непр-ны и опр-ны во всех тч-х крв. $AB$.

Крвл. инт-л II рода обладает св-ми крвл. инт-а I рода и, кроме того, еще сд. св-ми:

1*. При изм-и нпв-ия пути интв-ия крвл. инт-л II рода меняет свой знак, т.е. $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.

2*. Если крв. $AB$ лежит на пл-ти, прп-ой оси $Ox$ ($Oy$), то

$$\int\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0 \ (\text{все } \Delta x_i = 0) \ \left[\int\limits_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \ (\text{все } \Delta y_i = 0)\right].$$

В случае, когда контур интв-ия $L$ замкнут, то обход его против (по) часовой стрелке условимся наз-ть плж-ым (отц-ым), как на рис. 6а (б).

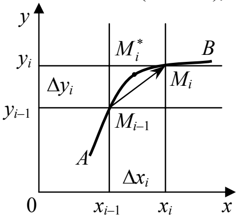



Рис. 5

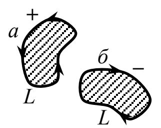



Рис. 6

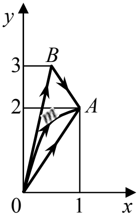



Рис. 7

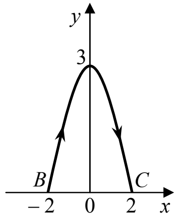



Рис. 8

Физический смысл крвл-го инт-а II рода заключается в сд-ем: если сила $F(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ действует на материальную тч., двжщ-юся вдоль линии $L$, то работа силы $F(x, y)$ вдоль линии $L$ равна

$$A = \int\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\ . \tag{13}$$

Для выч-ия крвл. инт-а II рода используют одну из приведенных ниже фм.

Если крв. $AB$ задана ур-ем $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ при перемещении из тч. $A$ в тч. $B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)\mathrm{d}x\ . \tag{14}$$

Если крв. $AB$ задана ур-ем $x = \psi(y)$ ($c \le x \le d$), то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \big(P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\big)\mathrm{d}y\ . \tag{14а}$$

Если крв. $AB$ задана пармч. ур-ми $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $\alpha \le t \le \beta$ при перемещении из тч. $A$ в тч. $B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\mathrm{d}t\ . \tag{15}$$

Анч-но опр-ся крвл. инт-л II рода от непр. фк-й $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ в тч-х прн. крв-й $AB$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z\ . \tag{16а}$$

Н-р, если прн. крв-я $AB$ задана пармч. ур-ми $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\iint\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\mathrm{d}t \tag{16}$$

**п7**. Выч-ть $J = \int\limits_L \left(xy - y^2\right)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ вдоль указанных путей (рис. 7): 1) $OA$ – отрезок пм-й; 2) $OmA$ –дуга парб-ы с верш-й в тч. $O$ и осью сим-и $Ox$; 3) $OBA$ – ломаная, где $B\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $A(1, 2)$.

Р. 1) Находим ур-ие $OA$: $\dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{x-0}{1-0} \Rightarrow y = 2x$ и $0 \le x \le 1$, поэтому по фм-е (14) имеем

$$I_1 = \int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy \ = \begin{vmatrix} y = 2x, \\ dy = 2dx \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \left(2x^2 - 4x^2 + 2x\right)dx \ = \ \frac{1}{3}.$$

2) Ур-ие парб-ы имеет вид $y^2 = px$ и проходит через тч. $A(1, 2)$, тогда $P = 4$. Стд-но, $y^2 = 4x$ или $x = y^2/4$ и $0 \le y \le 2$, поэтому, применяя фм-у (14а), находим

$$I_2 = \int\limits_{OmA} \left(xy - y^2\right)dx + xdy \ = \begin{vmatrix} x = y^2/4, \\ dx = 0{,}5ydy \end{vmatrix} = \int\limits_0^2 \left(\left(\frac{1}{4}y^3 - y^2\right)\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2\right)dy \ =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{4}y^2\right)dy \ = \left[\frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \ \frac{31}{30}.$$

3) Контур $OBA$ состоит из отрезков $OB$ и $BA$, поэтому $J_3 = \int\limits_{OBA} = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA}$. Находим ур-ие $OB$: $\dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \Rightarrow y = 6x$ и $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$, тогда по фм-е (14) получаем

$$\int\limits_{OB} \left(xy - y^2\right)dx + xdy \ = \begin{vmatrix} y = 6x, \\ dy = 6dx \end{vmatrix} = \int\limits_0^{0,5} \left(6x^2 - 36x^2 + 6x\right)dx \ = -\,0{,}5.$$

Находим ур. $BA$: $\dfrac{y-2}{3-2} = \dfrac{x-1}{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow y = 4 - 2x$ и $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$, то по (14) имеем

$$\int\limits_{BA} \left(xy - y^2\right)dx + xdy \ = \begin{vmatrix} y = 4 - 2x, \\ dy = -2dx \end{vmatrix} = \int\limits_{0,5}^{1} \left(x(4-2x) - (4-2x)^2 + x(-2)\right)dx \ =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{1} \left(18x - 6x^2 - 16\right)dx \ = \left[9x^2 - 2x^3 - 16x\right]_{0,5}^{1} \ = -\,3.$$

Т.о., $I_3 = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA} = -\,0{,}5 - 3 = -\,3{,}5$ (заметим, что здесь инт-л $I$ при фксн. концах пути интв-ия $L$ зв-т от вида этого пути).

**п8**. Выч-ть $I = \int\limits_L \left(xy - x\right)dx + 0{,}5x^2dy$ вдоль линий $L$, указанных в п7.

Р. Анч-но р-ю п7 получим:

$$I_1 = \int\limits_{OA} \left(xy - x\right)dx + 0{,}5x^2dy \ = \begin{vmatrix} y = 2x, \\ dy = 2dx \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \left(\left(2x^2 - x\right) + x^2\right)dx \ = \ \frac{1}{2};$$

$$I_2 = \int\limits_{OmA} \left(xy - x\right)dx + 0{,}5x^2dy = \begin{vmatrix} x = y^2/4, \\ dx = 0{,}5ydy \end{vmatrix} = \int\limits_0^2 \left(\left(\frac{1}{4}y^3 - \frac{1}{4}y^2\right)\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{1}{16}y^4\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{5}{32}y^4 - \frac{1}{8}y^3\right)dy \ = \ \frac{1}{2};$$

$$I_3 = \int\limits_{OB} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy + \int\limits_{BA} (xy - x)dx + 0{,}5x^2dy = \begin{vmatrix} OB: y = 6x, dy = 6dx \\ BA: y = 4 - 2x, dy = -2dx \end{vmatrix} = \int\limits_0^{1/2} \left(6x^2 - x + 32x^2\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{1/2}^{1} \left(x(4-2x) - x - x^2\right)dx = \int\limits_0^{1/2} \left(9x^2 - x\right)dx + \int\limits_{1/2}^{1} \left(3x - 3x^2\right)dx = \frac{1}{2}.$$

Т.о., инт. $I$ имеет здесь одно и то же зн. для различных путей, соединяющих тч-и $O$ и $A$.

Далее будет указано усл. незв-ти инт-а от пути интв-ия.

**п9**. Найти работу $A$ пер-ой силы $F(x, y) = (2 + xy^2)\boldsymbol{i} + (x^2y - 3)\boldsymbol{j}$ вдоль элс-а $x^2/4 + y^2/9 = 1$ от тч. $B(-2, 0)$ до тч. $C(2, 0)$ (рис. 8).

Р. По фм-е (13) имеем $A = \int\limits_{BC}\left(2 + xy^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2y - 3\right)\mathrm{d}y$.

Напишем пармч. ур-ия элс-а: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$. Из этих ур. находим, что тч-е $B(-2, 0)$ ств-ет зн-ие парм-а $t = \pi$, а тч. $C(2, 0)$ – зн-ие парм-а $t = 0$. Под действием силы $F(x, y)$ материальная тч. описывает дугу $BC$ в нпв-и от $B$ к $C$ при изм-и $t$ от $\pi$ до 0, поэтому по фм-е (15) получаем:

$$A = \int\limits_{\pi}^{0}\left(\left(2 + 2\cos t\cdot 9\sin^2 t\right)\left(-2\sin t\right) + \left(4\cos^2 t\cdot 3\sin t - 3\right)3\cos t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{0}\left(-4\sin t - 36\sin^3 t\cos t + 36\cos^3 t\sin t - 9\cos t\right)\mathrm{d}t = 8.$$

**п10**. Выч-ть $\oint\limits_{L} y\sqrt{3 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x - \left(z - 2y\right)\mathrm{d}y + \sin\left(xy + z^2\right)\mathrm{d}z$, если замкнутый контур $L$ с плж. нпв-ем обхода яв-ся линией перч-ия цлн-а $x^2 + y^2 = R^2$ с пл-ю $z = -1$.

Р. Контур $L$ описывается окр-ю $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = -1 \end{cases}$ или пармч. ур-ми $\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t; \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -R\sin t; \\ y'_t = R\cos t; \\ z'_t = 0, \end{cases}$

тогда по (16) найдем $\oint\limits_{L} y\sqrt{3 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x - \left(z - 2y\right)\mathrm{d}y + \sin\left(xy + z^2\right)\mathrm{d}z =$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\left(-R^2\sqrt{3 + R^2}\sin^2 t + \left(1 + 2R\sin t\right)R\cos t + 0\right)\mathrm{d}t = -\pi R^2\sqrt{3 + R^2}.$$

Теперь рас-им связь между крвл. инт-ми II и I рода. Обз-им через $\alpha$ и $\beta$ углы (рис. 8а), сост-мые осями крд-т и нпвн-ой кас. к крв. $AB$ в тч. $M(x, y)$, тогда получим

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}l,\ \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}l. \tag{16б}$$

Подс-в (16б) в (12), получим врт-ие крвл. инт-а II рода через инт-л I рода:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int\limits_{AB}\left[P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta\right]\mathrm{d}l. \tag{16в}$$

Анч-но имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z = \\ &= \int\limits_{AB}\left[P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}l. \end{aligned} \tag{16г}$$

**3°. Формула Грина**. Выясним усл-я незв-ти крвл. инт-а II рода от вида пути интв-ия.

**т1**. Пусть $\sigma$ – нек-ая замкнутая обл. на пл-ти $xOy$, огрн-ая контуром $L$, и на ней заданы фк-и $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$, непр-ые на $\sigma$ вместе со своими част. прв-ми $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$. Тогда имеет место фм-а Грина

$$\oint\limits_{L} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{17}$$

где на замкнутом контуре $L$ берется плж. нпв-ие (док-во см. в [28]).

Фм-у Грина можно применить к выч-ю пщ-ди плоской фигуры с помощью крвл. инт-а. Для этого полагаем $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$. Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1$ и по (17) получим $\iint\limits_{\sigma}(1 - 0)\,\mathrm{d}\sigma =$

$= \iint_{\sigma} \mathrm{d}\sigma \ = \oint 0 \ \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ или

$$\sigma = \oint_L x \ \mathrm{d}y. \tag{17а}$$

Теперь сформулируем усл-е незв-ти крвл. инт-а от пути интв-ия.

**т2**. Для того чтобы крвл. инт-л $\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ не зв-л от линии интв-ия $AB \subset \sigma$, нх-мо и дт-но, чтобы во всех тч-х односвязной обл. соблюдалось рав.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{17б}$$

Плоская обл. $\sigma$ наз. односвязной, если каков бы ни был замкнутый контур $L \subset \sigma$, огрн. обл-ть $\sigma_1$, границей к-ой яв-ся $L$, содержится в $\sigma$. Док-во т2 см. в [28].

Если усл. (17б) выполняется, то при произвольно (прзвл.) фксн. тч-х $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1) \in \sigma$ крвл. инт-л II рода может быть выч-ен по фм-е

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\mathrm{d}y. \tag{18}$$

К этой фм. придем, если за путь интв-ия возьмем ломаную $ABC$, звенья к-ой прл-ны осям крд-т (рис. 9).

Выполнение усл-я (18) в обл. $\sigma$ также приводит к сд. двум равносильным усл-м незв-ти крвл. инт-а II рода от вида пути интв-ия:

1*. Крвл. инт-л $\oint_L P \ \mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в обл. $\sigma$, равен нулю.

2*. Врж-ие $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ яв-ся полным диф-ом нек. фк-и $u = u(x, y)$:

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{19а}$$

Фк-ю $u = u(x, y)$ часто наз-ют потенциальной (первообразной (пероб.)) фк-ей для дифн. врж-ия $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Она может быть найдена по фм-е

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_1,y)\mathrm{d}y + C, \tag{19}$$

где $(x_0, y_0)$ – любая фксн. тч. обл-ти $\sigma$, $(x, y)$ – пер-ая тч.; $C$ – прзвл. пст-я.

Из фл-л (18) и (19) следует, что крвл. инт-л равен разности зн-й потенциальной фк. в конечной и нач-ой тч-х пути интв-ия, т.е.

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \tag{20}$$

**п11**. Выч-ть $I = \oint_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)\mathrm{d}x + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)\mathrm{d}y$, где $L$ – контур в плж. нпв-и, огрв-щий обл-ть, для к-ой $0 < x < 1$ и $0 < y < x^2$ (рис. 10).

Р. В данном инт-е фк-и $P(x, y) = e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2$ и $Q(x, y) = \sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}$ непр-ны вместе со своими част. прв-ми первого порядка в обл-ти $D$, поэтому при выч-и данного инт. можно воспользоваться фм-ой Грина.

Т.к. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x - (-10y) = 2(2x + 5y)$, то по фм-е (17) с учетом плж. нпв-ия на контуре $L$ получим

$$I = 2\iint_D (2x+5y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (2x+5y)\mathrm{d}y = 2\int_0^2 \left(2x^3 + 2{,}5x^4\right)\mathrm{d}x = 2.$$

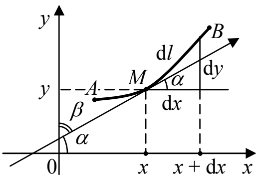


Рис. 8а

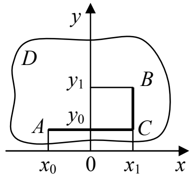


Рис. 9

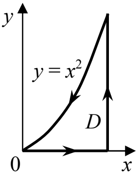


Рис. 10

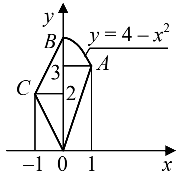


Рис. 11

**зм1**. Следует отметить простоту выч-й по фм-е Грина данного инт-а и невозможность выч-ия его без применения фм-ы Грина, т.к. не выполнимо интв-ие для фк-й $e^{x^2}$, $\sin x^2$.

**п12**. Выч-ть с помощью крвл. инт-а пщ-дь фигуры $D$, огрн-ой контуром $OABCO$, $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(0, 4)$, $C(-1, 2)$, $OA$, $BC$, $CO$ – отрезки пм-х, а $AB$ – дуга парб-ы $y = 4 - x^2$ (рис. 11).

Р. По (17а) имеем $S_D = \oint\limits_{OABCA} x\mathrm{d}y = \oint\limits_{OA} x\mathrm{d}y + \oint\limits_{AB} x\mathrm{d}y + \oint\limits_{BC} x\mathrm{d}y + \oint\limits_{CO} x\mathrm{d}y$. Выч-им каждый в отдельности. Ур. пм-ой $OA$: $y = 3x$ и $0 \le x \le 1$, тогда $\int\limits_{OA} x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} y = 3x, \\ \mathrm{d}y = 3\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 3x\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$; $AB$: $y = 4 - x^2$ и $x$ меняется от 1 до 0, тогда $\int\limits_{AB} x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} y = 4 - x^2, \\ \mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_1^0 x(-2x)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$; $BC$: $y = 4 + 2x$ и $x$ меняется от 0 до – 1, тогда $\int\limits_{BC} x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} y = 4 + 2x, \\ \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_0^{-1} 2x\mathrm{d}x = 1$; $CO$: $y = -2x$ и $-1 \le x \le 0$, тогда $\int\limits_{CO} x\mathrm{d}y =$
$= \begin{vmatrix} y = -2x, \\ \mathrm{d}y = -2\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_{-1}^0 x(-2)\mathrm{d}x = 1.$

Т.о. $S_D = 3/2 + 2/3 + 1 + 1 = 25/6$.

Заметим, что в фм-е (20) $u(x, y)$ играет роль пероб-ой фк-и.

**п13**. Найти первообразную для диф. врж-ия $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y$.

Р. $\begin{matrix} P(x, y) = x^2 + y^2 \\ Q(x, y) = 2xy \end{matrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y \end{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Сдт-но, (19) имеет вид

$$u(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = \int\limits_0^x \left(x^2 + 0^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^y 2xy\,\mathrm{d}y = \frac{x^3}{3} + 2x\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + xy^2,$$

т.е. $u(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + C$.

**4°. Поверхностные интегралы I рода**. Пусть на пвх-ти $S$, огрн-ой замкнутой крв. $L$, задана непр. фк. $u = f(x, y)$. Выполним сд. действия.

1. Прзвл-но разобьем пвх. $S$ на $n$ частей $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_i, \ldots, \Delta S_n$.

2. Прзвл-но выберем тч-у $P_i = P(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$, находим $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и выч-им пзв-ие $f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$. Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta S_i$.

3. Сост-м сумму всех таких пзв-й

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i\ , \tag{21а}$$

к-ая наз. интн. суммой.

4. Рас-им предел интн-ой суммы при $\delta \to 0$. Если этот предел сущ-ет и не зв-т от способа разбиения пвх-ти $S$ на части и выбора тч-к $P_i \in \Delta S_i$, то его наз-ют пвх. инт-ом I рода и обз-ют:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i\ . \tag{21б}$$

**т3** (сущв-ия инт-а по пвх-ти). Если гладкая пвх-ть пщ-ди $S$ задана фк-ей $z = \varphi(x, y)$, непр-ой вместе со своими част. прв-ми $\varphi'_x$, $\varphi'_y$, то для всякой непр. фк-и $u = f(x, y, z)$ сущ-ет инт-л по пвх-ти $S$. (Пвх-ть наз. гладкой, если в каждой ее тч. сущ-ет кас. пл-ть, непр-но изменяющаяся вдоль пвх-ти). Теорему примем без док-ва.

Пвх. инт-л I рода обладает св-ми, анч-ми св-ам крвл. инт-а I рода.

Покажем, что при выполнении усл-й т1 выч-ие пвх. инт-а сводится к выч-ю двн. инт-а.

Пусть $\sigma_{xy}$ – пркц-я пвх-ти $S$ на пл-ть $xOy$. Прзвл-но разобьем обл $\sigma_{xy}$ на $n$ малых пщ-ок $\Delta\sigma_1$, …, $\Delta\sigma_i$, …, $\Delta\sigma_n$, к-ым ств-ет разбиение пвх-ти $S$ на части $\Delta S_1$, …, $\Delta S_i$, …, $\Delta S_n$ (рис. 12). При этом $\Delta S_i$ есть часть пвх-ти (ствщ-ей кас. пл-ти $\Delta\Omega_i$), к-ая пркт-ся на пщ-ку $\Delta\sigma_i$. В силу (15): 10.2 и взяв тч-у $P_i = P(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$, имеем

$$\Delta S_i \approx \Delta\Omega_i = \sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i,y_i)+\varphi_y'^2(x_i,y_i)}\ \Delta\sigma_i.$$

Сост-м интн. сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,\varphi(x_i,y_i))\ \sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i,y_i)+\varphi_y'^2(x_i,y_i)}\ \Delta\sigma_i.$$

Найдем предел интн. суммы при $\delta = \max\limits_i \Delta S_i \to 0$, к-ый равен двн. инт-у по обл. $\sigma_{xy}$, т.е.

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x_i,y_i,\varphi(x_i,y_i))\ \sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma = \\ &= \lim_{\delta\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,\varphi(x_i,y_i))\ \sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i,y_i)+\varphi_y'^2(x_i,y_i)}\ \Delta\sigma_i.\end{aligned} \tag{21в}$$

Анч-но, пркт-уя $S$ на др. крд-ы пл-ти. получим

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\sigma_{yz}} f(g(y,z),y,z)\ \sqrt{1+g_x'^2(y,z)+g_z'^2(y,z)}\ \mathrm{d}\sigma. \tag{21г}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\sigma_{xz}} f(x,w(x,z),z)\ \sqrt{1+w_x'^2(x,z)+w_z'^2(x,z)}\ \mathrm{d}\sigma. \tag{21д}$$

Если гладкая пвх. $S$ задана пармч. ур-ми: $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$, где фк-и $x$, $y$, $z$ имеют непр. част. прв-ые первого порядка в замкнутой обл-ти $D$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ \sqrt{EG-F^2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{21}$$

где
$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2\ ;\ G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2\ ;\ F = x_u'^2x_v'^2 + y_u'^2y_v'^2 + z_u'^2z_v'^2. \tag{21е}$$

Принципы, лежащие в основе прлж-ия инт-ов по пвх-ти, те же, что и для двн. инт-ов (см. 10.2).

В част., если $\gamma(x, y, z)$ – пвх. плотность, то масса $m$ пвх-ти $S$ равна

$$m = \iint\limits_S \gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}S. \tag{22}$$

Если через $s$ обз-им пщ-дь пвх-ти $S$, то из (21б) при $f(x, y, z) = 1$ получим

$$s = \iint\limits_S \mathrm{d}S\ . \tag{23}$$

Если $z = z(x, y)$, то $\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, тогда вместо (23) получим

$$s = \iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{23а}$$

Крд-ы центра масс, стсч-ие моменты и моменты инерции материальной пвх-ти выч-ся по фм-ам, анч-ым фм-ам (5)-(7), (12), (13) из 10.2.

**п14**. Выч-ть массу $m$ части парби-да врщ-я $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, вырезанную цлн-ом $x^2 + y^2 = 4$, если плотность в каждой тч. равна кв-у рст-ия тч-и до оси $Oz$ (рис. 13).

Р. Находим плотность $\gamma = x^2 + y^2$. Т.к. $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, то $\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Поэтому $m = \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2 r^2\sqrt{1+r^2}\,r\mathrm{d}r$. $J = \int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r =$

$$= \left|\begin{array}{l} 1+r^2=t^2 \\ r\mathrm{d}r = t\mathrm{d}t \\ r=0, t=1 \\ r=2, t=\sqrt{5} \end{array}\right| = \int\limits_1^{\sqrt{5}} t\left(t^2-1\right)t\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^4-t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right).$$ Тогда $m = \dfrac{2}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right)\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi =$

$= \dfrac{4\pi}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right) \approx 47{,}6$ ед. массы.

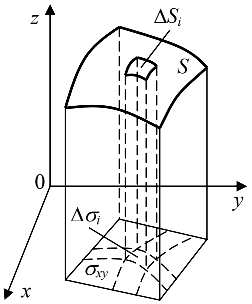


Рис. 12

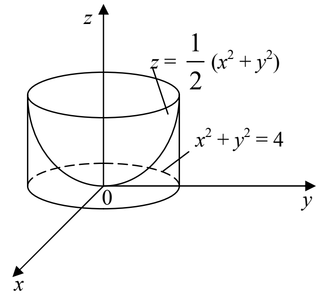


Рис. 13

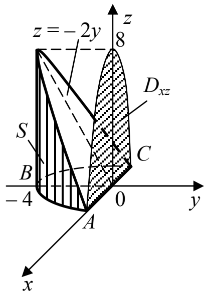


Рис. 14

**п15**. Выч-ть $\iint\limits_S \dfrac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}S$, где $S$ – часть цлнч. пвх-ти $y = x^2 - 4$, отсекаемая пл-ми $z = -2y$ и $z = 0$.

Р. Построив $S$ (рис. 14), убедимся, что она однозначно проецируется (прцу.) на пл-ть $xOy$. На др. крд. пл-ти пвх-ть $S$ прцу-ся неоднозначно. Т.к. ур-ие пвх-ти в этом случае имеет вид $y = x^2 - 4$, то $y_x' = 2x$, $y_z' = 0$. Граница обл-ти $D_{xz}$ состоит из отрезка оси $Ox$ и дуги парб-ы $z = 8 - 2x^2$, ур-ие к-ой получено из системы $\left.\begin{array}{l} y = x^2-4; \\ z = -2x. \end{array}\right\}$ Итак, по (21д) имеем $\iint\limits_S \dfrac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}S =$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x^2-x^2-4+2z}{\sqrt{1+4x^2}}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2\iint\limits_{D_{xz}}\left(x^2+z-2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2\int\limits_{-2}^{2}\left(\left(x^2-2\right)\left(8-2x^2\right)+\frac{1}{2}\left(8-2x^2\right)^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 8\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{256}{3}.$$

**5°. Поверхностные интегралы II рода и теория поля**. Рас-им сначала сд. физическую

**з1** (о потоке жидкости). Пусть скр-ть $V$ частицы, протекающей через тч-у $M$, зв-т от этой тч-и, но не зв-т от вр-и. В этом случае течение жидкости наз. установившимся (или стационарным), т.е.

$$V = V_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + V_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + V_z(x, y, z)\boldsymbol{k} = V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k}. \qquad (24а)$$

Найти поток жидкости через пвх-ть $S$, т.е. кол-во жидкости, протекающей через эту пвх-ть за ед-у вр-и, считая плотность жидкости $\gamma = 1$.

Р. Если $V = \text{const}$, а пвх. $S$ – плоская (рис. 15), то поток жидкости $\Pi = Sh$. Но $h = |V|\cos\varphi = |V||n|\cos\varphi = V \cdot n$ – скн. пзв-ие, где $n$ –едч. вк-р. Тогда

$$П = hS = (V \cdot n)S. \qquad (24б)$$

Теперь рас-им общий случай, когда скр-ть $V$ меняется от тч-и к тч-е по вел-е и нпв-ю, а $S$ не плоская. Пусть в пр-ве задано вкн. поле скр-ю $V$ жидкости с помощью стн. (24а) и пвх-ю $S$, огрн-й крв-й $L$ (рис. 16). Предположим, что в каждой тч. $M = M(x, y, z)$ этой пвх. опр-ен едч. вк-р $n = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} = \cos(n, x)\boldsymbol{i} + \cos(n, y)\boldsymbol{j} + \cos(n, z)\boldsymbol{k}$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы, образованные норм-ю $n$ с крд. осями.

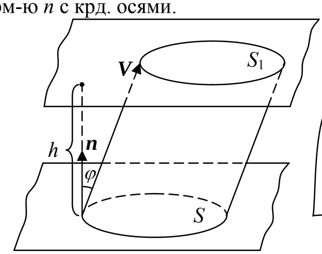


Рис. 15

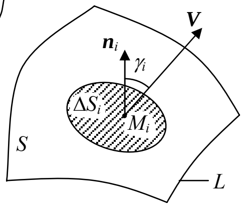


Рис. 16

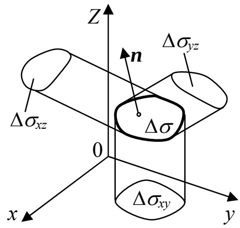


Рис. 17

Чтобы найти кол-во жидкости $П$, в этом случае поступаем так:

1. Прзвл-но разобьем пвх-ть $S$ на $n$ элр. частей $\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_i, \ldots, \Delta\sigma_n$.

2. Прзвл-но выберем тч-у $M_i = M(x_i, y_i, z_i) \in \Delta\sigma_i$, для к-ой находим $n_i = \cos\alpha_i\boldsymbol{i} + \cos\beta_i\boldsymbol{j} + \cos\gamma_i\boldsymbol{k}$ и $V_i = V_x(M_i)\boldsymbol{i} + V_y(M_i)\boldsymbol{j} + V_z(M_i)\boldsymbol{k}$. Тогда элр. кол-во жидкости равно $\Delta П_i \approx (V_i \cdot n_i)\Delta S_i$ ($i = \overline{1, n}$). Обз-им через $\delta = \max\limits_i \Delta\sigma_i$.

3. Сост-м сумму всех таких пзв. и прж-но найдем кол-во жидкости за ед-у вр-и

$$П = \sum_{i=1}^{n}\Delta П_i \approx \sum_{i=1}^{n}(V_i \cdot n_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(V_x(M_i)\cos\alpha_i + V_y(M_i)\cos\beta_i + V_z(M_i)\cos\gamma_i\Big)\Delta\sigma_i\,, \qquad (24в)$$

назм-ю интн. суммой.

4. Предел интн. суммы при $\delta \to 0$ врж-ет точное зн. кол-ва жидкости

$$П = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(V_i \cdot n_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(V_x(M_i)\cos\alpha_i + V_y(M_i)\cos\beta_i + V_z(M_i)\cos\gamma_i\Big)\Delta\sigma_i\,. \qquad (24г)$$

Нпвщ. косинусы едч-го норм. вк-а $n$, а также пркц-и $V_x$, $V_y$, $V_z$ вк-а $V$ яв-ся непр. фк-ми крд-т $x$, $y$, $z$ тч-к пвх-и $S$. Поэтому скн. пзв-ие $V \cdot n = V_x\cos\alpha + V_y\cos\beta + V_z\cos\gamma$ есть непр. фк-я, опрн-я в тч-х $S$. Сдт-но, предел суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}(V_i \cdot n_i)\Delta\sigma_i$ сущ-ет и равен инт-у по пвх-ти $S$ от фк-и $V \cdot n$:

$$П = \iint\limits_S (V \cdot n)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \big(V_x\cos\alpha + V_y\cos\beta + V_z\cos\gamma\big)\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (24д)$$

**Поток векторного поля**. По анг-и с потоком текущей жидкости введем понятие потока вк-а $\Phi = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ через пвх-ть $S$. При этом предположим, что каждой тч. $M = M(x, y, z)$ этой пвх-ти опр-ен едч. норм. вк-р $n = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$, нпвщ. косинусы яв-ся непр. фк-ми кр-т тч-и пвх-ти (иногда вместо $S$ и $\mathrm{d}S$ будем использовать обз. $\sigma$ и $\mathrm{d}\sigma$).

Потоком вк-а $\Phi$ (или потоком вкн. поля) через пвх-ть $S$ наз. инт-л по пвх-ти:

$$П = \iint\limits_S (\Phi \cdot n)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (24)$$

Пзв-ие $\Delta\sigma\cos\gamma = \Delta\sigma\cos(n, z)$ есть пркц-я $\Delta\sigma$ на пл-ть $xOy$ (рис. 17), т.е. $\Delta\sigma\cos\gamma = \Delta\sigma_{xy}$; анч. утв-ие справедливо и для др. пзв-й:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\sigma\cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz},\\ \Delta\sigma\cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz},\\ \Delta\sigma\cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}.\end{aligned}\right\} \qquad (25а)$$

С учетом (24г) и (25а) вместо24 получим

$$\iint_S (\Phi \cdot n)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S P\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (25б)$$

Инт-л

$$\iint_S P\ (x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S X\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (25)$$

наз. пвх. инт-ом II рода.

**зм2**. Пвх. инт-л (24) обладает специфической особенностью, связанной с нпв-ем норм-и к пвх-ти. Возьмем на гладкой пвх-ти $S$ прзвл-ю тч. $M$ и проведем из нее нормаль к пвх-ти. Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на пвх-и $S$ и не перкщ-му ее границы, при возвращении в исх. тч-у не меняет нпв-ия норм-и к пвх-и, пвх-ть наз. двусторонней (рис. 18). Если же на пвх-и $S$ сущ-ет замкнутый контур, при обходе к-го нпв-ие норм-и меняется после возвращения в исходную тч. на противоположное, пвх-ть наз. односторонней (рис. 19 – лист Мёбиуса).

Если незамкнутая пвх-ть $S$ однозначно прцу-ся на пл-ть $xOy$, т.е. ее ур-ие можно записать в виде $z = z(x, y)$, то ту сторону пвх-ти, к-ая видна (не видна) со стороны плж. нпв-ия оси $Oz$, если смотреть на пл-ть $xOy$, будем наз-ть плж-ой (отц-ой) по отн-ию к оси $Oz$ и обз-ть $S_z^+$ ($S_z^-$). Анч-но опр-ся $S_y^+$ ($S_y^-$) и $S_x^+$ ($S_x^-$) для пвх-ей $y = y(x, z)$ и $x = x(y, z)$. Если пвх-ть $S$ замкнутая, то за сторону $S^+$ ($S^-$) примем ее внешнюю (внутреннюю) сторону.

Если обз-им $f(M) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, то инт-л (24) обладает св-ом

$$\iint_{S^-} f(M)\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{S^+} f(M)\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (24е)$$

Из стн-й (25б) и (25) получим связь пвх. инт-а II рода с инт-ом I рода:

$$\iint_S P\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\ \mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (26)$$

В част., рас-им поток вк-а $\Phi = R(x, y)\boldsymbol{k}$ через пвх-ть $S$, заданную ур-ем $z = \varphi(x, y)$. Пусть $\gamma$ – острый угол. Т.к. $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}$, то в силу (15): 10.2 получим

$$\iint_S R\ (x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}S = \iint_{\sigma_{xy}} R\ (x, y, \varphi(x, y))\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} R\ (x, y, \varphi(x, y))\mathrm{d}\sigma. \qquad (26а)$$

Если же $\gamma$ – тупой угол, то имеем

$$\iint_S R\ (x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}S = -\iint_{\sigma_{xy}} R\ (x, y, \varphi(x, y))\mathrm{d}\sigma. \qquad (26б)$$

Анч-но, для ур. $y = \varphi(x, z)$, $(x, z) \in \sigma_{xz}$ и $x = \varphi(y, z)$, $(y, z) \in \sigma_{yz}$ ств-но получим

$$\iint_S Q\ (x, y, z)\cos\beta\mathrm{d}S = \pm\iint_{\sigma_{xz}} Q\ (x, \varphi(x, z), z)\mathrm{d}\sigma. \qquad (26в)$$

$$\iint_S P\ (x, y, z)\cos\alpha\mathrm{d}S = \pm\iint_{\sigma_{yz}} P\ (\varphi(y, z), y, z)\mathrm{d}\sigma. \qquad (26г)$$

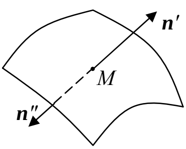


Рис. 18

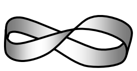


Рис. 19

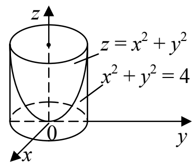


Рис. 20

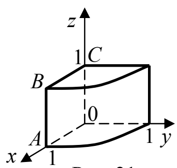


Рис. 21

**п16**. Найти поток $\Pi$ вк-р-фк-и $\Phi = xy^2\boldsymbol{i} + \dfrac{yz}{2}\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$ через часть парби-да врщ-я $z = x^2 + y^2$, вырезанную цлн-ом $x^2 + y^2 = 4$, принимая в кач-ве нпв-ия норм-и то, при к-ом норм. вк-р образует с осью $Oz$ острый угол (рис. 20).

Р. Согласно фм-е (24), $\Pi = \iint\limits_S (\Phi \cdot n)\, \mathrm{d}\sigma$. Т.к. $z = \varphi(x, y) = x^2 + y^2$, то едч. вк-р $n = \dfrac{-\varphi'_x \boldsymbol{i} - \varphi'_y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y}} =$

$= \dfrac{-2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$. Сдт-но, $\Phi \cdot n = \dfrac{-2x^2y^2 - y^2z + x^2z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$. По фм-е (21в) получим $\Pi = \iint\limits_S (\Phi \cdot n)\, \mathrm{d}S =$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{-2x^2y^2 - y^2(x^2 + y^2) + x^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left(-2x^2y^2 + (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)\right) \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^2 \left(-\frac{\sin^2 2\varphi}{2} + \cos 2\varphi\right) r^5 \mathrm{d}r = -\frac{16\pi}{3}.$$

**п17**. Выч-ть поток вк-а $\Phi = yz\boldsymbol{j}$ по той части цлнч. пвх-и $x^2 + y^2 = 1$, к-ая лежит в I октанте и огр-на пл-ми $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, считая, что нормаль к цлнч. пвх-и образует с осью $Oy$ острый угол $\beta$ (рис. 21).

Р. Т.к. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1 = 0$, то едч. вк-р $n = \dfrac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \dfrac{F'_x \boldsymbol{i} + F'_y \boldsymbol{j} + F'_z \boldsymbol{k}}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \dfrac{2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} =$

$= \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, ибо $x^2 + y^2 = 1$. Т.о., $\Pi = \iint\limits_S (\Phi \cdot n)\, \mathrm{d}S = \iint\limits_S y^2 z\, \mathrm{d}S$. Выч-им этот инт по фм-е (21д). Здесь $y = w(x, z) = \sqrt{1 - x^2}$, а $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + w'^2_x + w'^2_z}\, \mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}\sigma = \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1 - x^2}}$. Тогда

$\Pi = \iint\limits_S y^2 z\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\sigma_{xz}} \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 z \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1 - x^2}} = \iint\limits_{\sigma_{xz}} z \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^1 z \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$ (см рис. 21).

Т.к. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \sin\alpha,\ \mathrm{d}x = \cos x \mathrm{d}x \\ x = 0,\ \alpha = 0;\ x = 1,\ \alpha = \pi/2 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\alpha\, \mathrm{d}\alpha = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right]_0^{\pi/2} =$

$= \dfrac{\pi}{4}$, то окончательно находим $\Pi = \displaystyle\int\limits_0^1 z \frac{\pi}{4} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

**6°. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Дивергенция. Векторные линии. Ротор и циркуляция**. Покажем, что поток через замкнутую пвх. $S$ с объемом $V$ может быть выч-ен с помощью трн. инт-а по обл-ти $V$.

**т4**. Если фк-и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непр-ны вместе со своими част. прв-ми первого порядка в обл-и $V$, то справедлива фм-а

$$\iint\limits_S \left[P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right] \mathrm{d}S = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V, \tag{27}$$

где $S$ – граница обл-и $V$, причем поток берется по внешней стороне этой пвх., т.е. едч. вк-р $n$ направлен вне объема $V$.

Рав-во (27) наз. фм-ой Остроградского-Гаусса.

Д. Рас-им обл. $V$, огрн-ю пвх-ми $S_1$: $z = g(x, y)$, $S_2 = h(x, y)$ (где $g(x, y) \le h(x, y)$) и цлнч. пвх-ю $S_3$, образующие к-ой прл-ны оси $Oz$, нпвщ-я есть замкнутая крв. $L$ (в пл. $xOy$), огрв-щая обл-ть $\sigma$ (рис. 22). Выч-им инт-л

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}V = \iint\limits_\sigma \mathrm{d}\sigma \int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z = \int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} \mathrm{d}R = \iint\limits_\sigma R(x, y, h(x, y)) \mathrm{d}\sigma - \iint\limits_\sigma R(x, y, g(x, y)) \mathrm{d}\sigma. \tag{27а}$$

Теперь, учитывая (26а), (26б) и знаки косинусов $S_2$: $\cos\gamma > 0$, $S_1$: $\cos\gamma = 0$, найдем

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\ \mathrm{d}S = \iint_{S_2} R\cos\gamma\ \mathrm{d}S + \iint_{S_1} R\cos\gamma\ \mathrm{d}S + \iint_{S_3} R\cos\gamma\ \mathrm{d}S =$$
$$= \iint_\sigma R(x,y,h(x,y))\mathrm{d}\sigma - \iint_\sigma R(x,y,g(x,y))\mathrm{d}\sigma + 0. \tag{27б}$$

Сравнивая (27а) и (27б), получим

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\ \mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\ \mathrm{d}V. \tag{27в}$$

Анч-но выводятся фм-ы

$$\iint_S P(x,y,z)\cos\alpha\ \mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\ \mathrm{d}V. \tag{27г}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\cos\beta\ \mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\ \mathrm{d}V. \tag{27д}$$

Складывая почленно стн-ия (27в)-(27д), получим (27) ■

**п18**. С помощью фм-ы Остроградского-Гаусса выч-ть поток вк-а $\Phi = 3x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 4z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону пвх-и $S$ пирамиды, огрн-ой пл-ми $x + y + z = 1$, $x = y = z = 0$ (рис. 11: 10.1).

Р. Здесь $P = 3x$, $Q = 2y$, $R = -4z$. Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 3 + 2 - 4 = 1$. Отсюда и учитывая объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}HS$, получим

$$\Pi = \iint_S (3x\cos\alpha + 2y\cos\beta - 4z\cos\gamma)\ \mathrm{d}S = \iiint_V 1\cdot \mathrm{d}V = V = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{6}.$$

**Дивергенция векторного поля**. Иногда полезно фм-у Остроградского-Гаусса писать в вкн. форме. Для этого левую часть (27) запишем в виде

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iint_S (\Phi\cdot n)\ \mathrm{d}S.$$

Отсюда ясно, что левая часть фм-ы Остроградского-Гаусса имеет смысл незв-мо от системы крд-т. Рас-им теперь правую часть (27). Пусть $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \varphi(x, y, z)$. Покажем, что эта фк. не зв-т от выбора системы крд-т. Используя фм-у Остроградского-Гаусса для тч-и $M(x, y, z) \in V$ и учитывая теорему о среднем, получим $\iint_S (\Phi\cdot n)\ \mathrm{d}S = \iiint_V \varphi(x,y,z)\ \mathrm{d}V = \varphi(M_0)V$ (где $M_0 = M(x_0, y_0, z_0) \in V) \Rightarrow \varphi(M_0) = \dfrac{\iint_S (\Phi\cdot n)\mathrm{d}S}{V}$. Отсюда, переходя к пределу при $M_0 \to M$ (тогда $V$ стягивается в тч-у $M$), получим

$$\lim_{V\to 0} \varphi(M_0) = \varphi(M) = \varphi(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S (\Phi\cdot n)\mathrm{d}S}{V},$$

т.е. в тч. $M(x, y, z)$ имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S (\Phi\cdot n)\mathrm{d}S}{V}. \tag{27е}$$

**о1**. Дивергенцией вкн. поля $\Phi = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ в тч. $M(x, y, z)$ наз. предел отн-ия потока $\Pi = \iint_S (\Phi\cdot n)\ \mathrm{d}S$ вк-а $\Phi$ через пвх-ть, окружающую тч-у $M$, к объему $V$, огрн-му этой пвх., при усл-и, что объем стягивается в тч-у, и обз-ся

$$\operatorname{div}\Phi = \lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_S (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S}{V}. \tag{28}$$

Дивергенция есть скн. вел-а и из (27е) следует, что

$$\operatorname{div}\Phi = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{28а}$$

Используя понятие дивергенции, фм-у Остроградского-Гаусса можно записать в вкн. форме

$$\iint\limits_S (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div}\Phi\ \mathrm{d}V, \tag{28б}$$

т.е. поток кв-а через замкнутую пвх. равен трн. инт-у от дивергенции по обл-и, огрн-ой этой пвх-ю.

Выясним физический смысл фм-ы (28б). Рас-им поле скр-ей $V$ двжщ-йся жидкости с плотностью $\gamma = 1$. Возьмем обл. $W$, огрн-ю замкнутой пвх. $S$ – сф-й с центром в тч. $M$. Тогда (28б) запишется так:

$$\iint\limits_S (V\cdot n)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_W \operatorname{div}V\ \mathrm{d}W. \tag{28в}$$

Поток $\iint\limits_S (V\cdot n)\,\mathrm{d}S$ дает алгч. сумму кол-в вытекающей и втекающей через замкнутую пвх. $S$ жидкости. Если $\iint\limits_S (V\cdot n)\,\mathrm{d}S > 0$, то из обл-ти $W$ вытекает жидкости больше, чем втекает и тч. $M$ наз. источником ($\operatorname{div}V > 0$). Если же $\iint\limits_S (V\cdot n)\,\mathrm{d}S < 0$, то втекает больше, чем вытекает и тч. $M$ наз. стоком ($\operatorname{div}V < 0$). Если $\iint\limits_S (V\cdot n)\,\mathrm{d}S = 0$, т.е. $\operatorname{div}V = 0$, то через пвх-ть $S$ втекает столько же жидкости, сколько и вытекает.

**п19**. Выч-ть дивергенцию поля скр-ей жидкости $V = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, где $a$, $b$, $c$ – пст-ые.

Р. Т.к. $\operatorname{div}V = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$, то нет ни источников, ни стоков. Жидкость двж-ся поступательно, как твердое тело.

**Векторные линии**. Пусть задано вкн. поле $\Phi = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$. Линию, в каждой тч-е к-ой вк-р поля яв-ся касс-ым, наз-ют вкн. линией. Н-р, вкн. линиями поля скр-ей жидкости яв-ся трк-и, по к-ым двж-ся частицы жидкости. В электростсч. поле вкн. линиями служат силовые линии поля (т.е. линии тока).

Пусть в данном вкн. поле дана замкнутая крв. $L$, через каждую тч. к-ой проходит вкн. линия, свк-ть этих вкн. линий образует пвх-ть, назм-ю вкн. трубкой.

Допустим, что в каждой тч. этого поля $\operatorname{div}\Phi = 0$. Рас-им обл-ть $V$, огрн-ю частью $S$ вкн. трубки и двумя сечениями $S_1$ и $S_2$ этой обл-и (рис. 23). Согласно фм-е Остроградского-Гаусса имеем

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\Phi\ \mathrm{d}V = \iint\limits_S (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_1} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S.$$

Но $\iiint\limits_V \operatorname{div}\Phi\ \mathrm{d}V = 0$, т.к. $\operatorname{div}\Phi = 0$; $\iint\limits_{S_1} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S = -\iint\limits_{S_2} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S$. Тогда, взяв $n_1 = -n$ (рис. 23), получим

$$\iint\limits_{S_1} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_2} (\Phi\cdot n)\,\mathrm{d}S. \tag{29}$$

Стн. (29) означает, если вкн. поле $\Phi$ таково, что во всех его тч-х $\operatorname{div}\Phi = 0$, то поток вк-а через любое сечение вкн. трубки имеет одно и то же зн-ие.

Вкн. поле, в каждой тч. к-го $\operatorname{div}\Phi = 0$, наз. соленоидальным (или трубчатым).

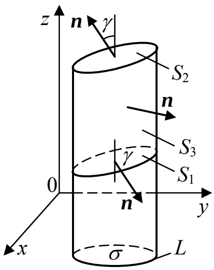


Рис. 22

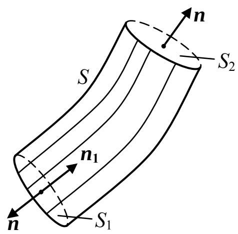


Рис. 23

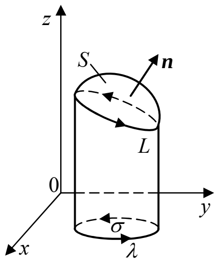


Рис. 24

**Формула Стокса. Ротор и циркуляция**. Фм-а Стокса яв-ся обобщением фм-ы Грина (см. 3°) и позволяет свести выч-ие крвл. инт-а по замкнутому контуру $L$ к выч-ю потока через пвх-ть $S$, огрн-ю этим контуром.

**т5**. Если фк-и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их част. прв-ые первого порядка непр-ны на пвх-ти $S$, огрн-ой замкнутым контуром $L$, то имеет место фм-а

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}y = \iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S, \tag{30}$$

назм-ая фм-ой Стокса.

Д. Пусть пвх-ть $S$ с ур-ем $z = \varphi(x, y)$, огрн-я контуром $L$ (рис. 24), пркт-на на пл-ть $xOy$ в обл-ть $\sigma$, огрн. замкнутой крв. $\lambda$ (нпв. $L$ и $\lambda$ против часовой стрелки). Тогда $n = \dfrac{-\varphi'_x\boldsymbol{i}-\varphi'_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}} \Rightarrow \cos\alpha =$

$$= \frac{-\varphi'_x}{\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}},\ \cos\beta = \frac{-\varphi'_y\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}} \Rightarrow$$

$$\frac{-\varphi'_x}{\cos\alpha} = \frac{-\varphi'_y\boldsymbol{j}}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\gamma}. \tag{30а}$$

Отсюда $-\varphi'_y = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ или $\varphi'_y\cos\gamma = -\cos\beta$. Учитывая, что

$$\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,\varphi'_y(x,y) \tag{30б}$$

и фм-у Грина при $Q(x, y, z) = 0$, а также (26а) получим $\oint_L P\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \oint_\lambda P\,(x, y, \varphi(x, y))\mathrm{d}x =$

$$= -\iint_\sigma\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\varphi'_y(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\sigma\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\sigma\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\varphi'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= -\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,\mathrm{d}S - \iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\,\varphi'_y(x,y)\cos\gamma\mathrm{d}S = -\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,\mathrm{d}S + \iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\mathrm{d}S,$$ т.е.

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x = -\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,\mathrm{d}S + \iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\mathrm{d}S. \tag{30в}$$

Анч-но можно написать фм-ы

$$\oint_L Q\,\mathrm{d}y = -\iint_S\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\,\mathrm{d}S + \iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma\mathrm{d}S, \tag{30г}$$

$$\oint_L R\,\mathrm{d}z = -\iint_S\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\,\mathrm{d}S + \iint_S\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha\mathrm{d}S. \tag{30д}$$

Складывая (30в)-(30д), получим (30) ■

**о2**. Ротором (или вихрем) вкн. поля $\Phi = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ наз. вк.

$$\mathrm{rot}\Phi = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{31a}$$

Учитывая (31а) и $\mathrm{d}r = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$, стн. (30) можно писать в виде

$$\oint_L \Phi\,\mathrm{d}r = \iint_S (\mathrm{rot}\,\Phi \cdot n)\,\mathrm{d}S. \tag{31}$$

Стн. (31) означает, что циркуляция (црк.) вк-а $\Phi$ по замкнутому контуру $L$ равна потоку ротора вк-а $\Phi$ через пвх-ть $S$, огрн-ю контуром $L$ (црк-ия вкн. поля хркз-ет врщт-ю способность поля на линии).

**п20**. Выч-ть с помощью фм-ы Стокса црк-ю вк-а $\Phi = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ по границе $ABCA$ туг-ка $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$,$C(0, 0, 1)$ (рис. 11 из 10.1).

Р. $\mathrm{rot}\Phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial x^2}{\partial y} - \dfrac{\partial z^2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\dfrac{\partial x^2}{\partial x} - \dfrac{\partial y^2}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial z^2}{\partial x} - \dfrac{\partial y^2}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = -2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k}$.

Т.к. ур. пл. $\Delta ABC$ имеет вид $x + y + z = 1$, то $n = \dfrac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$. Тогда $\mathrm{rot}\Phi \cdot n = -\dfrac{2}{3}(x + y + z)$. Используя фм-у Стокса, находим црк-ю вк-а $\Phi$: $\oint\limits_{ABCA} \Phi\,\mathrm{d}r = \oint\limits_{ABCA} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\,\Phi \cdot n)\,\mathrm{d}S =$ $= -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (z + x + y)\,\mathrm{d}S$. Полученный пвх. инт-л выч-им по фм-е (21в). Т.к. ур-ие пвх-ти $s$ имеет вид $z = 1 - x - y$, то $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Тогда получим $\oint\limits_{ABCA} \Phi\,\mathrm{d}r = \oint\limits_{ABCA} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z =$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (z + x + y)\,\mathrm{d}S = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\sigma [(1 - x - y) + x + y]\sqrt{3}\,\mathrm{d}\sigma = -2\iint_\sigma \mathrm{d}\sigma = -2\sigma = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

**7°. Независимость интеграла от пути интегрирования. Потенциальное поле. Оператор Гамильтона**. Анч-но 3° можно получить усл-е незв-ти крвл. инт-а $\int\limits_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ от пути интв-ия $L$. Используя фм-ы (30), (31), запишем $\int\limits_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_L \Bigg[\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha +$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\Bigg]\,\mathrm{d}S = \iint_S (\mathrm{rot}\,\Phi \cdot n)\,\mathrm{d}S.$$

Без док-ва примем сд-ие

**т6**. Для того чтобы крвл-ый инт-л $\int\limits_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ в $\boldsymbol{G}$ не зв-л от пути интв-ия, нх-мо и дт-но, чтобы инт-л по любому замкнутому контуру, лежащему в этой обл-ти, был равен нулю.

**т7**. Для того чтобы крвл-ый инт-л $\int\limits_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ от вк-р-фк-и не зв-л от пути инт-ия в однозвязной обл-ти $\boldsymbol{G}$, нх-мо и дт-но, чтобы всюду в этой обл-ти $\mathrm{rot}\Phi = 0$.

**зм3**. Усл. $\mathrm{rot}\Phi = 0$ равносильно усл-ю (см. (30а))

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{32}$$

**п21**. Д-ть, что крвл-ый инт-л $\int\limits_L (2xy + z^2)\mathrm{d}x + (x^2 + z)\mathrm{d}y + (y + 2xz)\mathrm{d}z$ не зв-т от пути интв-ия.

Р. Находим $\mathrm{rot}\Phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 + z & y + 2xz \end{vmatrix} = (1 - 1)\boldsymbol{i} + (2z - 2z)\boldsymbol{j} + (2x - 2x)\boldsymbol{k} = 0$, значит, от пути интв-ия инт-л не зв-т.

**п22**. Д-ть, что крвл-ый инт-л $\int\limits_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$ зв-т от пути инт-ия.

Р. Здесь $\Phi = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\mathrm{rot}\Phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = (0 + 0)\boldsymbol{i} + (0 - 0)\boldsymbol{j} + (-1 - 1)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{k} \neq 0$, инт-л зв-т от пути инт-ия.

Отметим, что незв-ть инт-а от пути интв-ия связана с отысканием первообразной по полному диф-лу.

**т8**. Для того чтобы дифн. врж-ие $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ (причем $P$, $Q$, $R$ непр-ны вместе со своими част. прв-ми) в односвязной обл. $\boldsymbol{G}$ было полным диф. нек. фк-и $u = u(x, y, z)$, нх-мо и дт-но, чтобы в этой обл-ти выполнялось условие (32).

И здесь (анч-но 3°) из полного диф.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \tag{32а}$$

можно найти фк-ю $u = u(x, y, z)$, назм-ю пероб-ой, по фм-е

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z. \tag{32б}$$

Выберем путь, как на рис. 25, тогда получим

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\mathrm{d}y + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\mathrm{d}z\,. \tag{32в}$$

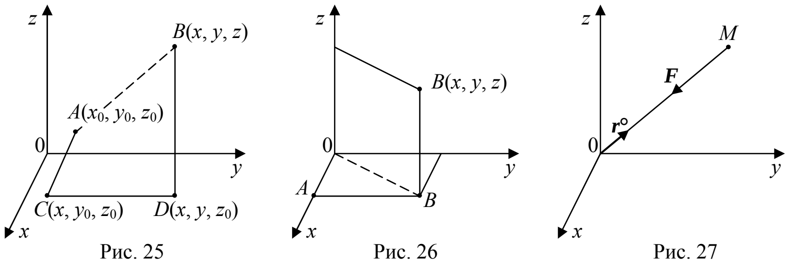



Рис. 25 Рис. 26 Рис. 27

**п22а**. Найти пероб-ю от дифн. врж-ия $2xy^3z\mathrm{d}x + 3x^2y^2z\mathrm{d}y + x^2y^3\mathrm{d}z$.

Р. Убедимся, что усл. (32) выполняется, и используем (32в). Здесь

$$\left.\begin{array}{l|l|l} P = 2xy^3z & \dfrac{\partial R}{\partial y} = 3x^2y^2, \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 3x^2y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2z \\ Q = 3x^2y^2z & & \\ R = x^2y^3 & \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2xy^3, \dfrac{\partial R}{\partial x} = 2xy^3 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2z \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Выч-им инт-л по ломаной $OABC$ (рис. 26): $u(x, y, z) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}$ по (32в), т.е.

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} 2xy^3z\mathrm{d}x + 3x^2y^2z\mathrm{d}y + x^2y^3\mathrm{d}z = \int\limits_0^x 0 \cdot \mathrm{d}x + \int\limits_0^y 0 \cdot \mathrm{d}y + \int\limits_0^z x^2y^2\mathrm{d}z = x^2y^3z + C.$$

Итак, $u(x, y, z) = x^2y^3z + C$.

**зм4**. Анч-но (20) из 3°, если $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ имеет пероб-ю $u(x, y, z)$, то

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1). \qquad (32г)$$

**о3**. Вкн. поле $\Phi = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ наз. безвихревым, если во всех тч. $\mathrm{rot}\Phi = 0$, т.е.

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (32)$$

Тогда в силу т8 при $\mathrm{rot}\Phi = 0$ дифн. врж-ие $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ в односвязной обл. $\boldsymbol{G}$ имеет пероб-ю (см. 32а) $u(x, y, z)$, т.е.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

сдт-но, $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Учитывая, что $\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, имеем $\mathrm{grad}\,u = P\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$. Это значит, что безвихревое поле яв-ся полем градиента нек. фк-и: $\Phi = \mathrm{grad}\,u$.

**о4**. Фк. $u(x, y, z)$, градиент к-ой равен вк-у $\Phi$, наз. потенциальной фк. (или просто потенциалом) поля $\Phi$. Поле, имеющее потенциал, наз. потенциальным.

Итак, каждое безвихревое односвязное поле имеет потенциал.

Имеет место и обратное утв.: всякое потенциальное поле яв-ся безвихревым. Это следует из того, что $\mathrm{rot}\,\Phi = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u = 0$. Для этого дт-но показать справедливость (32). Дсв-но, пусть $\Phi = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, где $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Находим $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$. Т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$, то $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$. Анч-но проверяется справедливость остальных стн. (32).

Если $\Phi = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ есть потенциальное силовое поле, то работа $E$ сил поля при перемещении едч. массы из тч. $A(x_1, y_1, z_1)$ в тч. $B(x_2, y_2, z_2)$ не зв-т от пути. Тогда, учитывая (32г), получим

$$E = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1), \qquad (32д)$$

т.е. работа равна разности потенциалов.

**п23**. Пусть в нач-е крд-т находится масса $m$, а в тч. $M(x, y, z)$ – едч. масса (рис. 27). Найти потенциал силы тяготения $F = \frac{-\lambda(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ ($\lambda$ – пст. тяготения).

Р. Здесь $P = \frac{-\lambda mx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $Q = \frac{-\lambda my}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $R = \frac{-\lambda mz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$. Силовое поле потенциально, т.к. $\mathrm{rot}\,F = 0$, т.е. выполняется (32). Используя (32в), (32д), находим $u(x, y, z) = -\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} F\mathrm{d}r =$

$$= -\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{\lambda m(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{\lambda m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{-\lambda m}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = -\frac{\lambda m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C.$$

Легко проверить, что фк. $\frac{\lambda m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ яв-ся пероб-ой для подынт. врж-ия.

**п24**. Материальная тч. с массой $m$ падает вниз под действием силы тяжести. Найти потенциал силы.

Р. Введем систему крд-т, направив ось $Oy$ вертикально вниз (к земле). Тогда $F = mg\boldsymbol{j}$, $P = 0$, $Q = mg$,

$R = 0$ и $\operatorname{rot} F = 0$, т.е. поле сил тяжести потенциально. Т.к. $du = Pdx + Qdy + Rdz = mgdy$, то $u(x, y) = mgy$. Работу, совершаемую при перемещении массы из тч. $A(x_1, y_1)$ до тч. $B(x_2, y_2)$ найдем по фм-е (32д):

$$E = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = mgy_2 - mgy_1 = mg(y_2 - y_1).$$

**Оператор Гамильтона**. Мы рас-ли основные дифн. вел-ы вкн. анализа: градиент, дивергенцию и ротор. Их можно записать короче с помощью оператора Гамильтона $\nabla$ (чт.: «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{33}$$

Этот оператор условно рас-им как вк-р и установим правила действий с ним. Пусть $u = u(x, y, z)$ – скн. фк-я. Тогда

1*. $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} u.$

2*. $\nabla \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \Phi.$

3*. $\nabla \times \Phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \operatorname{rot}\Phi.$ $(\nabla \times \Phi = [\nabla, \Phi])$.

Из 1*-3* видно, что операции с вк-ом производятся по правилам вкн. алг-ы (см. 2.2).

Пусть фк-и $P$, $Q$, $R$ непр-ны со своими част. прв-ми ($\Phi = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$) и найдем $\operatorname{div}\operatorname{rot}\Phi =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} -$$

$$- \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} = 0.$$

Итак,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\Phi = 0. \tag{33а}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\Phi = \nabla\operatorname{rot}\Phi = \nabla[\nabla, \Phi] = \nabla\nabla\Phi. \tag{33б}$$

Из последних двух фм. следует, что

$$\nabla[\nabla, \Phi] = \nabla\nabla\Phi = 0. \tag{33в}$$

Этот результат можно инпр-ть так: смешанное пзв. трех вк., среди к-ых два одинаковых, равно нулю, что согласуется с анч. рав-ом для обычных вк.

Находим теперь врж-ие для $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, считая, что фк. $u = u(x, y, z)$ имеет непр. част. прв-ые второго порядка. На основании 1*, 3* и полагая $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, получим $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u =$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} -\right.$$

$$\left.- \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0.$$

Итак,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0. \tag{33г}$$

С др. стороны, по 3* имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \operatorname{grad} u] = [\nabla, \nabla u]. \tag{33д}$$

Из двух последних фм. следует, что

$$[\nabla, \nabla u] = 0. \tag{33е}$$

Рав-во (33е) означает, что вкн. пзв-ие двух символических вк., отличающихся скн. мнж-ем (т.е. прл. вк-ы), равно нулю. Этот факт ств-ет анч. факту для обычных вк.

Пусть дана скн. фк-я $u = u(x, y, z)$, имеющая непр. част. прв-ые второго порядка, и вкн. поле ее градиента: $F = \operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

Найдем врж-ие для $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$. В ств-и с фм-ой 1* получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Итак,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{34а}$$

Правая часть ур. (34а) наз. оператором Лапласа от фк-и $u$ и обз-ся

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{34б}$$

С учетом 1*, 2* и (34а), (34б), получим

$$\nabla\nabla u = \Delta u \ (\Delta = \nabla^2). \tag{34в}$$

**зм5**. Ур-ие

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{34}$$

наз. ур-ем Лапласа. Фк. $u = u(x, y, z)$, удщ-ая этому ур., наз. гармонической.

## 10.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### 10.1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**Вопросы для самопроверки**

1. Как опр-ся объем цилиндрического (цлнч.) тела?
2. Что наз. двойным (двн.) инт-ом от данной фк. по данной обл.?
3. В чем состоит теорема сущв-ия двн. инт-а?
4. Перечислите св-ва двн. инт-а.
5. Как выч-ся двн. инт-л с помощью повторных инт. в системе дек. крд-т?
6. Как выч-ся двн. инт-л заменой пер-ых и в полярных крд.?
7. Как опр-ся масса неоднородного (неодн.) тела по заданной плотности?
8. Что наз. тройным (трн.) инт-ом от данной фк. по данной обл.?
9. Перечислите св-ва трн. инт-а.
10. Как выч-ся трн. инт-ы в дек. системе крд-т?
11. Как выч-ся трн. инт-ы в цлнч. системе крд-т?
12. Как выч-ся трн. инт-ы в сферических (сфч.) крд.?
13. Дайте понятие инт-а произвольной кратности.

### 10.2. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНОГО И НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛОВ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

**Вопросы для самопроверки**

1. В чем состоит суть общей схемы использования инт-ов?
2. Как опр-ся масса плоской пластинки по заданной плотности?
3. Выведите фм-ы для выч-ия стсч. моментов и центра тяжести.
4. Выведите фм-ы для выч-ия моментов инерции.
5. Как выч-ся пщ-дь пвх-ти?
6. Что такое инт-л Пуассона и как он выч-ся?
7. Дайте опр-ие инт-а, звщ-го от парм-а. Приведите примеры.
8. Дайте опр-ие несбт. инт-а, звщ-го от парм-а. Приведите примеры.

### 10.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

**Вопросы для самопроверки**

1. Как опр-ся крвл. инт-л I рода?
2. Перечислите св-ва крвл. инт-а I рода.
3. Как выч-ся крвл. инт-ы I рода?
4. Приведите нек-ые приложения (прлж.) крвл. инт-а I рода.
5. Как опр-ся крвл. инт-л II рода?
6. Какими св-ми обладает крвл. инт-л II рода?
7. Как опр-ся работа при движении (двж.) тч-и в силовом поле?
8. Как выч-ся крвл. инт-л II рода?
9. Сформулируйте теорему Грина.
10. Как опр-ся пвх. инт-л I рода?
11. Какими св. обладает и как выч-ся пвх. инт-л I рода.
12. Приведите нек-ые прлж. пвх. инт-а I рода.
13. Как опр-ся пвх. инт-л II рода? Сформулируйте задачу о потоке жидкости.
14. Какими св. обладает и как выч-ся пвх. инт-л II рода?
15. В чем состоит суть фм-ы Остроградского-Гаусса?
16. Что такое дивергенция вкн. поля?
17. Сформулируйте и док-те теорему Стокса.
18. Что такое ротор и циркуляция (црк.) вк-ов?
19. Приведите усл. незв-ти инт-а от пути интв-ия.
20. Что такое потенциальное поле?
21. Укажите правила действий с оператором Гамильтона.
22. Как связаны операторы Гамильтона и Лапласа?
23. Какое поле наз. гармоническим? Какому усл. уд-ет потенциал такого поля?

## Упражнения для самостоятельной работы

**у1(1)**. Привести двн. инт-л $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ к повторному двумя способами, если обл-ть интв-ия $D$: $\{2y = x,\ y = 2x,\ x = \pi\}$, ее можно задавать и как мн. $D = \{(x, y)\colon 2y = x,\ y = 2x,\ x = \pi\}$.

Р. Построив эти пм-ые, найдем обл. $\sigma$ (рис. 1). Из фм-ы

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

и рис. 1 получим:

1) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}y \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi/2}^{2\pi} \mathrm{d}y \int\limits_{y/2}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

1*. Изб-ть обл. $D$ и свести двн. инт-л $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ к повторным двумя способами, если $D = \{y = x^2,\ 4 - y = x^2\}$. О: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

**у1(2)**. Изменить (изм.) порядок интв-ия в повторном инт. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-1-\sqrt{1-y}}^{-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Р. Из пределов интв-ия в повторном инт. следует, что $D = \{y = 0,\ y = 1,\ x = -1 - \sqrt{1-y^2},\ x = y\}$. А линия $x = -1 - \sqrt{1-y^2}$ есть дуга окр-ти $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ с центром $C(-1, 0)$ и радиусом $R = 1$. Обл-ть интв-ия (рис. 2) такова, что фк. $\varphi_2(x)$ на отрезке $[-2, 0]$ задана двумя врж.: $y = -x$ и $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$, тогда $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-1-\sqrt{1-y}}^{-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_0^{-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

**2***. Изм-те порядок интв-ия в повторных инт.:

а) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{y/3}^{y/2} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 \mathrm{d}y \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

**у1(3)**. Выч-ть двн. инт-л $\iint\limits_D (\sin x - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $D = \{y = x^2,\ y = 2 + x^2,\ x = 0,\ x = \pi/2\}$.

Р. Строим обл. $D$ (рис. 3) и находим $\iint\limits_D (\sin x - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{2+x^2} (\sin x - 2y)\,\mathrm{d}y =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(y\sin x - y^2\right)\Big|_{x^2}^{2+x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\left(2+x^2\right)\sin x - x^2\sin x - \left(2+x^2\right)^2 + x^4\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \left(2\sin x - 4x^2 - 4\right) \mathrm{d}x =$$

$= 2(1 - \pi) - \dfrac{\pi^3}{6}$.

**3***. Выч-ть двн. инт-л $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = 4x^3\sqrt{y} + 3y^3\sqrt{x}$. О: $\dfrac{4}{3}$.

**у1(4)**. Выч-ть пщ-дь обл-и $D$: $\{y^2 + 2y - 3x + 1 = 0,\ 3x - 3y - 7 = 0\}$.

Р. Обл. $D$ огр-на пм-й $3x - 3y - 7 = 0$ и парб-й $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$ или $(y + 1)^2 = 3x$ с вершиной (верш.) $M(0, -1)$. Р-м систему $\left.\begin{matrix} 3x-3y-7=0; \\ (y+1)^2=3x \end{matrix}\right\}$; находим тч-и $B(16/3, 3)$, $C(1/3, 2)$ (рис. 4) и

выч-ем $S_D = \int\limits_{-2}^{3} \mathrm{d}y \int\limits_{(y+1)^2/3}^{(3y+7)/3} \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{3} \left( \frac{3y+7}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \left[ 7y + 3\frac{y^2}{2} - \frac{(y+1)^3}{3} \right] \Bigg|_{-2}^{3} = \frac{125}{18}$.

**4***. Выч-ть двн. инт-л $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $D = \{(x, y)\colon y = x/2, y = x, x = 4\}$. О: 752/5.

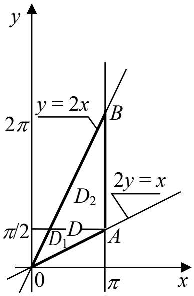


Рис. 1

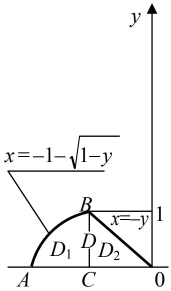


Рис. 2

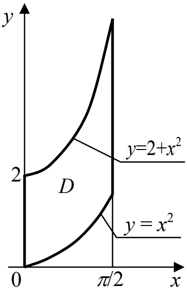


Рис. 3

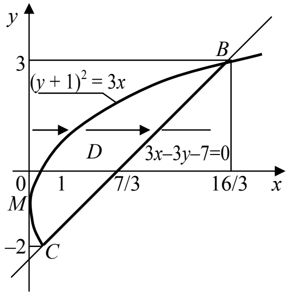


Рис. 4

**у1(5)**. Выч-ть объем тела, огрн-го цлнч. пвх-ю $z = 4 - x^2$ и пл-ми $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$.

Р. Построим данное тело (рис. 5) и выч-им $V = \iint\limits_D \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)\mathrm{d}x \int\limits_{0}^{3} \mathrm{d}y =$

$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \; y\Big|_0^3 = \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) \cdot 3 = \frac{32}{3} \cdot 3 = 32$. Инт-л можно выч-ть и с учетом симч-ти

фигуры $V = \iint\limits_D \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int\limits_0^2 \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x \int\limits_0^3 \mathrm{d}y = 6\int\limits_0^2 \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x = 6\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 32$.

**5***. Выч-ть объем цлнч. тела, огрн-го пвх-ми $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$, $x = y = z = 0$. О: 45.

**у1(6)**. Выч-ть двн. инт-л $\iint\limits_D 2\pi\ (x^2 - y^2)\sin\pi(x - y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $D$: $\{x + y = 2, x + y = 4, x - y = -1,$ $x - y = 2\}$ (рис. 6, а).

Р. Непосредственное инт. дт-но громоздкое, т.к. для сведения его к повторному инт. нх-мо обл. $D$ разбить на три обл-и. А простая замена пер-ых позволяет свести этот инт. к инт-у по пуг-ку, стороны к-го прл-ны осям крд-т.

Полагаем $\left.\begin{matrix} x+y=u \\ x-y=v \end{matrix}\right|$, тогда из $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x+y=4 \\ x-y=-1 \\ x-y=2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ (рис. 6б) $\left.\begin{matrix} u=2 \\ u=4 \\ v=-1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{matrix}\right|$ $J(u, v) =$

$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$. Тогда по фм-е (10): 10.1 $\iint\limits_D 2\pi\ (x^2 - y^2)\sin\pi(x - y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$= \iint\limits_{D^*} 2\pi\ uv\sin(\pi v^2)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi\int\limits_2^4 u\mathrm{d}u \int\limits_{-1}^{2} v\ \sin(\pi v^2)\mathrm{d}v = \pi\,\frac{u^2}{2}\Bigg|_2^4 \left(-\frac{1}{2\pi}\cos\pi v^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -6.$

**6***. Выч-ть объем тела, огрн-го обл-ю $D$: $\{z = 0, x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3\}$. О: $3\pi$.

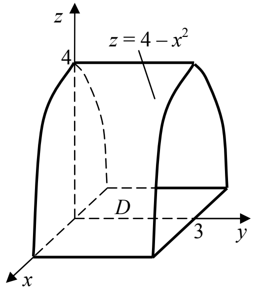



Рис. 5

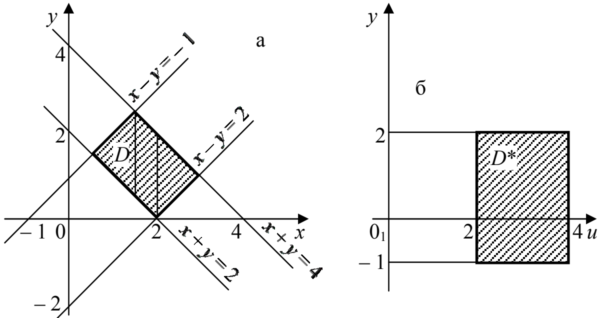



Рис. 6

**у1(7)**. Выч-ть $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ для обл-ти $D$: $\{x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4\}$.

Р. Инт-л выч-им в полярных крд.: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le r \le 2$ (рис. 7). Тогда

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_1^2 e^{r^2} r\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,e^{r^2}\Big|_1^2 = \pi e(e^3 - 1).$$

**7***. Выч-ть $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ для обл-ти $D$: $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

**у1(8)**. Выч-ть $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ для обл-ти $D$: $\{y = -x,\ y = \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 = ax,\ x^2 + y^2 = bx\ (0 < a < b)\}$.

Р. Обл. $D$ (рис. 8) огр-на пм-ми $y = -x$, $y = \sqrt{3}x$ и окр-ми, ур-ия к-ых можно записать в виде $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ и $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$. Инт-л удобно выч-ть в полярных крд. Опр-им углы, исходя из геомч. смысла углового коэф-та пм. $y = kx$, для пм. $y = -x$ имеем $\varphi_1 = -\pi/4$, а для пм. $y = \sqrt{3}x$ получим $\varphi_2 = \pi/3$. Ур-ия окр-ей $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = bx$ в полярных крд. принимают вид $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$. Сдт-но,

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} r\cos\varphi r\sin\varphi r\mathrm{d}r = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} r^3\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{b^4-a^4}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3}\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = -\frac{b^4-a^4}{24}\cos^6\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/3} = \frac{7\left(b^4-a^4\right)}{1536}.$$

**8***. Выч-ть $\iint\limits_D \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ для обл-ти $D = \left\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1\right\}$. Ук: использовать фм-у $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\iint\limits_{D^*} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ ($1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$). О: – 12.

**у1(9)**. Выч-ть пщ-дь обл-ти $D$: $\{(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3,\ a > 0\}$.

Р. Обл. $D$ расположена в правой полупл., т.к. $(x^2 + y^2) \ge 0$, сдт-но, $2ax^3 \ge 0$, т.е. $x \ge 0$. Причем вру. симч-на отс-но оси $Ox$ и непр-на, значит, замкнута (рис. 9). Запишем ее ур-ие в полярных крд. $r = 2a\cos^3\varphi$. Тогда

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D^*} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2a\cos^3\varphi} r\mathrm{d}r = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi = 2a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+3\cos 2\varphi+3\frac{1+\cos 4\varphi}{2}+(1-\sin 2\varphi)\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{5\pi a^2}{8}.$$

**9***. Выч-ть пщ-дь обл-ти $D = \{(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)\}$. О: 8.

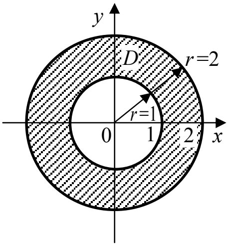


Рис. 7

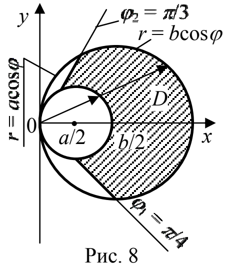


Рис. 8

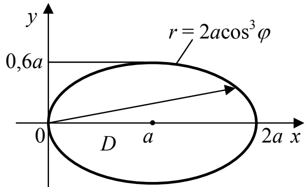


Рис. 9

**у1(10)**. Привести трн. инт-л $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ к трехкратному для обл-ти $V$: $\{z = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - y^2\}$.

Р. Строим парби-ды врщ-я $z = x^2 + y^2$ с верш. в нач. крд. и $z = 2 - x^2 - y^2$ с верш. в тч. (0, 0, 2) (рис. 10). Сдт-но, обл. $V$ прцу-ся на пл. $xOy$ в круг $x^2 + y^2 = 1$, ур-е к-го получено из парби-ов иск-ем $z$. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

**10***. Избз-ть обл. $V$ и выч-ть $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V = \{(x, y, z)$: $z = 2 - x^2$, $x + y = 1$, $x = y = z = 0\}$, $f = 4x - y + z$. О: 5/3.

**у1(11)**. Выч-ть $\iiint\limits_V (1-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V = \{(x, y, z)$: $z = y^2$, $z + 2x = 6$, $x = 0$, $z = 4\}$.

Р. Обл. $V$ огр-на парбч. цлн-ом $z = y^2$ с образующей, прл-ой оси $Ox$ и пл-ми $2x + z = 6$, $x = 0$, $z = 4$ (рис. 11а). Обл. $V$ прцу-ем на пл. $yOz$, при этом $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - z/2$. Граница $D$ образована парб-й $z = y^2$ и пм-й $z = 4$, к-ые перк-ся в тч-ах $F(-2, 4)$ и $E(2, 4)$ (рис. 11б). Сдт-но,

$$\iiint\limits_V (1-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2}^{4} \mathrm{d}z \int\limits_{0}^{3-z/2} (1-2y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} (1-2y)\,\mathrm{d}y \int\limits_{y^4}^{4} (3 - z/2)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} (1-2y) \left(3z - \frac{z^2}{4}\right)\Bigg|_{y^2}^{4} \mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2} (1-2y) \left((12-4) - \left(3y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\right) \mathrm{d}y = \frac{64}{5}.$$

**11***. Избз-те обл. $V$ и выч-те $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V$: $\{z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = 0$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1/2\}$, $f = z$. О: 7/192.

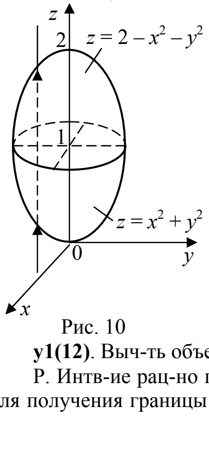


Рис. 10

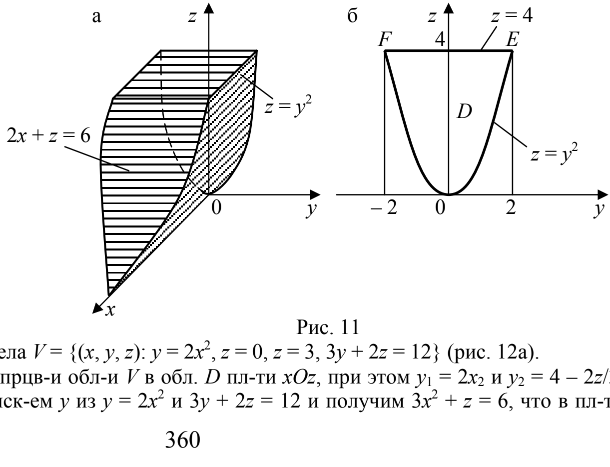


Рис. 11

**у1(12)**. Выч-ть объем тела $V = \{(x, y, z)$: $y = 2x^2$, $z = 0$, $z = 3$, $3y + 2z = 12\}$ (рис. 12а).

Р. Интв-ие рац-но при прцв-и обл-и $V$ в обл. $D$ пл-ти $xOz$, при этом $y_1 = 2x_2$ и $y_2 = 4 - 2z/3$. Для получения границы $D$ иск-ем $y$ из $y = 2x^2$ и $3y + 2z = 12$ и получим $3x^2 + z = 6$, что в пл-ти

$xOz$ опр-ет парб-у (рис. 12б). Т.о., граница $D$ состоит из дуг ветвей парб-ы $\left(x_1=-\sqrt{2-z/3}\right.$, $x_2 =$ $=\left.\sqrt{2-z/3}\right)$ и отрезков пм-х $z = 0$, $z = 3$. Сдт-но, $V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^3 \mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{2-z/3}}^{\sqrt{2-z/3}} \mathrm{d}x \int\limits_{2x^2}^{4-2z/3} \mathrm{d}y =$

$$= \int\limits_0^3 \mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{2-z/3}}^{\sqrt{2-z/3}} \left(4-\frac{2z}{3}-2x^2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left(\left(4-\frac{2z}{3}\right)x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2-z/3}}^{\sqrt{2-z/3}} \mathrm{d}z = \frac{8}{3}\int\limits_0^3 \left(2-\frac{z}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{16}{5}\left(2-\frac{z}{3}\right)^{5/2}\Bigg|_0^3 = \frac{16\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}.$$

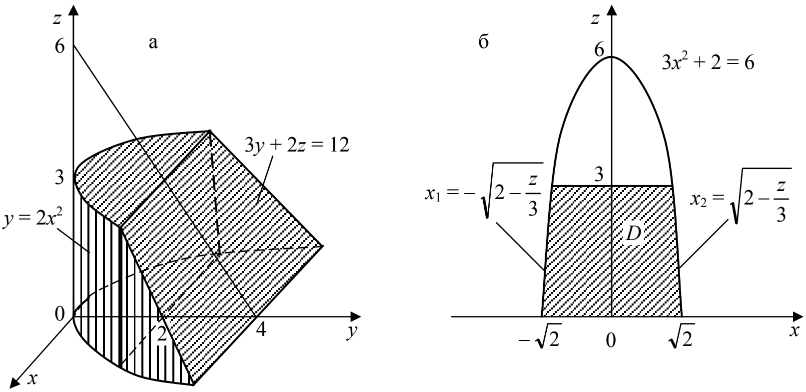



Рис. 12

**у1(13)**. Выч-ть $\iiint\limits_V \dfrac{x^3(1+x+y)^2}{(2+x+2y+z)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где $V = \{(x, y, z)\colon 0 \le x \le 2,\ 1 \le x + y \le 3,\ 1 \le x + 2y + z \le 4\}$.

Р. Обл. $V$ огр-на снизу пл-ю $x + 2y + z = 1$, а сверху прл-ой ей пл-ю $x + 2y + z = 4$. Пл-ти $x = 0$ и $x = 2$, $x + y = 1$ и $x + y = 0$ ств-но прл-ны между собой и все они прл-ны оси $Oz$. Сдт-но, обл. $V$ яв-ся прлп-ом и прцу-ся на пл-ть $xOy$ в обл-ть $D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 2,\ 1 \le x + y \le 3\}$ (рис. 13).

Непосредственное выч. инт-а громоздко вследствие сложности подынт. фк-и, поэтому перейдем к замене пер-ых: $x = u$; $x + y = v$; $x + 2y + z = w \Rightarrow x = u$; $y = v - u$; $z = u - 2v + w$.

Находим Якобиан прб-ия $J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Тогда по фм-е (14): 10.1 и с учетом $0 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$, $1 \le w \le 4$ (рис. 14) получим

$$\iiint\limits_V \frac{x^3(1+x+y)^2}{(2+x+2y+z)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V^*} \frac{u^3(1+v)^2}{(2+w)^3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \int\limits_0^2 u^3\,\mathrm{d}u \int\limits_1^3 (1+v)^2\,\mathrm{d}v \int\limits_1^4 \frac{1}{(2+w)^3}\,\mathrm{d}w = \frac{28}{9}.$$

**13***. Выч-ть $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1,\ 2x - 3y + z = 0,\ z = 4\}$, $f = 5x -$ $- 3z$. О: $-133\pi/8$.

**у1(14)**. Выч-ть $\iiint\limits_V x^2y^2(1-2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0\}$.

Р. Обл. $V$ прцу-ем на пл-ть $xOy$ в обл. $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ (рис. 15) и инт-л выч-им в црнч. крд-ах (рис. 15: 10.1), где ур-ие парби-да имеет вид $z = r^2$ (рис. 15). По фм-е (15): 10.1

получим:

$$\iiint\limits_V x^2y^2\left(1-2z\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V^*} r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi\left(1-2z\right)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r\int_0^{r^2}\left(1-2z\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\left(z-z^2\right)\Big|_0^{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{8}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{160}.$$

**14***. Выч-ть $\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 2Ry,\ x^2 + y^2 = 4Ry,\ z = 0,\ z = 4\}$, $f = R^2 - x^2 - y^2$. О: $-78R^4$.

**у1(15)**. Выч-ть $I = \iiint\limits_V\left(3z^2 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V$: $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Р. Граница обл. $V$ задана сф-й (рис. 16), ур-ие к-ой в сфч. крд-ах имеет вид $\rho = R$. Пркц-я обл. $V$ на пл-ть $xOy$ – круг с центром в нач. крд., поэтому $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ (рис. 17: 10.1, вместо $\psi$ и $r$ взяли ств-но $\theta$ и $\rho$). Тогда по фм-е (16): 10.1 получим

$$I = \iiint\limits_{V^*}\left(3\left(\rho\cos\theta\right)^2 - \left(\rho\cos\varphi\sin\theta\right)^2 - \left(\rho\sin\varphi\sin\theta\right)^2\right)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \iiint\limits_{V^*}\left(3\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\sin\theta\cdot\rho^4\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left(4\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= -\frac{2\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(4\cos^2\theta - 1\right)\mathrm{d}\cos\theta = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

**15***. Выч-ть $\iiint\limits_V\left(3z^2 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, если $V$: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz\}$. О: $\frac{64\pi R^5}{15}$.

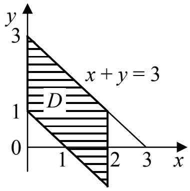



Рис. 13

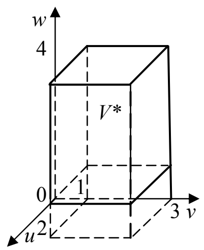



Рис. 14

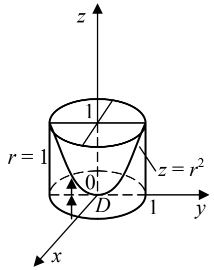



Рис. 15

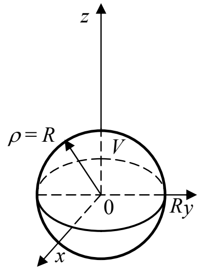



Рис. 16

**у2(1)**. Плотность $\gamma(x, y)$ рсп-ия массы в каждой тч. пластинки, занимающей на пл. $xOy$ обл. $D = \{(x, y)\colon y = x,\ y = x + 3,\ x = 0,\ x = 1\}$ равна сумме крд-т тч-и. Требуется опр-ть массу пластинки, стсч. моменты, крд-ы центра масс и моменты инерции.

Р. Из усл-я следует, что в тч-х обл-и (рис. 17) плотность $\gamma(x, y) = x + y$. Согласно физическому смыслу двн. инт-а, масса пластинки $m = \iint\limits_D\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, тогда $m = \int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+3}\left(x+y\right)\mathrm{d}y =$

$$= \int_0^1\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{x+3}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x\left(x+3-x\right) + \frac{1}{2}\left(\left(x+3\right)^2 - x^2\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(6x + \frac{9}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{2}.$$

Используя фм-ы (5)-(7), (12) из 10.2, находим стсч. моменты пластинки отс-но осей $Ox$, $Oy$:

$$S_x = \iint\limits_D y\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+3}\left(xy + y^2\right)\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_x^{x+3}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{2}x\left(\left(x+3\right)^2 - x^2\right)\right. +$$

$$+\frac{1}{3}\left((x+3)^3-x^3\right)\Big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(6x^2+\frac{27}{2}x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{71}{4};$$

$$S_y=\iint_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_x^{x+3}(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_x^{x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(3x+\frac{1}{2}\left((x+3)^2-x^2\right)\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1\left(6x^2+\frac{9}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{4}.$$

Крд-ы центра масс $x_c=\dfrac{S_y}{m}=\dfrac{17/4}{15/2}=\dfrac{17}{30}$; $y_c=\dfrac{S_x}{m}=\dfrac{71/4}{15/2}=\dfrac{71}{30}$.

Моменты инерции отс-но осей $Ox$, $Oy$ и нач. крд-т $I_x=\iint_D y^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+3}\left(xy^2+y^3\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_x^{x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3\left(x^2+3x^2+3x\right)+\frac{1}{4}\left((x+3)^4-x^4\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{189}{4};$$

$$I_y=\iint_D x^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^{x+3}(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_x^{x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(6x^3+\frac{9}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=3;$$

$I_0=I_x+I_y=189/4+4=201/4$.

**1***. Выч-ть крд-ы центра масс пуг. туг-ка с вер-ми (0, 0), (1/2, 0), (0, 1). Плотность в каждой тч. равна кв-у рст-ия от тч. до верш-ы прямого угла. О: $x_c=7/50$, $y_c=13/25$.

**у2(2)**. Опр-ть моменты инерции (см. у2(1)) $I_x$, $I_y$ и $I_0$ фигуры, огрн-ой парб-ми $y=2x-x^2$ и $y=x^2$, если плотность в каждой тч. численно равна ее ординате. О: $I_x=31/420$, $I_y=1{,}15$, $I_0=59/420$.

**у2(3)**. Выч-ть массу, стсч. моменты, крд-ы центра масс и моменты инерции тела, расположенного в первом октанте и огрн-го цлнч. пвх-ми $z=2x^2$, $z=3-x^2$ и пм-ми $x=0$, $y=0$, $y=2$, если в каждой тч. тела плотность $\gamma(x,y,z)=xy^2$.

Р. Избз-им обл. $V$, к-ую занимает данное тело (рис. 18). Пркц-я обл. $V$ на пл-ть $xOy$ есть пуг-к $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$. Отсюда с учетом фм-л (8)-(10), (13) из 10.2 получим $m=$

$$=\iiint_V xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\,\mathrm{d}y\int_{2x^2}^{3-x^2}\mathrm{d}z=\int_0^1 x\left(3-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\,\mathrm{d}y=3\left(x^2/2-x^4/4\right)\Big|_0^1\ y^3/3\Big|_0^2=2.$$

Стсч. моменты:

$$S_{xy}=\iiint_V zxy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_{2x^2}^{3-x^2}z\mathrm{d}z=\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2\int_0^1 x\frac{z^2}{2}\Bigg|_{2x^2}^{3-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\left(x\left(3-x^2\right)^2-4x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{3};$$

$$S_{xz}=\iiint_V yxy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^2 y^3\mathrm{d}y\int_{2x^2}^{3-x^2}\mathrm{d}z=\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^2\int_0^1 3x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=3;$$

$$S_{yz}=\iiint_V x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_{2x^2}^{3-x^2}\mathrm{d}z=\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 3\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{15}.$$

Крд-ы центра масс: $x_c=\dfrac{S_{yz}}{m}=\dfrac{8}{15}$; $y_c=\dfrac{S_{xz}}{m}=\dfrac{3}{2}$; $z_c=\dfrac{S_{xy}}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Итак, $(x_c,y_c,z_c)=\left(\dfrac{8}{15},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right)$.

Найдем моменты инерции тела отс-но крд. пл-ей, крд-х осей и нач. крд-т:

$$I_{xy}=\iiint_V z^2xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_{2x^2}^{3-x^2}z^2\mathrm{d}z=\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2\int_0^1 x\frac{z^3}{3}\Bigg|_{2x^2}^{3-x^2}\mathrm{d}x=$$

$= \dfrac{8}{9}\int\limits_0^1 \left( x\left(3 - x^2\right)^3 - 8x^7 \right) \mathrm{d}x = \dfrac{19}{3}$;

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x \int\limits_0^2 y^4 \mathrm{d}y \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} \mathrm{d}z = \left.\frac{y^5}{5}\right|_0^2 \int\limits_0^1 3x\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{24}{5};$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x \int\limits_0^2 y^2 \mathrm{d}y \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} \mathrm{d}z = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 3\int\limits_0^1 x^3\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3};$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{19}{3} + \frac{24}{5} = \frac{167}{15};\ I_y = I_{xy} + I_{yz} = \frac{19}{3} + \frac{2}{3} = 7;\ I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{24}{5} + \frac{2}{3} = \frac{82}{15};$$

$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = 59/5$.

**3***. Найти массу пирамиды, образованной пл-ю $x - y + z = 1$ и крд. пл-ми, если плотность в каждой тч. равна абсциссе этой тч. О: 1/24.

**у2(4)**. Найти крд-ы центра масс одн-го тела ($\gamma = 1$), огрн-го пл-ми $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$ и пвх-ю $z^2 = xy$. О: $x_c = y_c = 3$, $z_c = 45/32$. Ук: см. у2(3).

**у2(5)**. Выч-ть массу тела, огрн-го пвх-ю $9x^2 + 2y^2 + 18z^2 = 18$ и имеющего в каждой тч. плотность $\gamma(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2/2 + y^2/9 + z^2}$.

Р. Ур-ие эллипсоида (элси.) $9x^2 + 2y^2 + 18z^2 = 18$ приведем в канч. виду $x^2/2 + y^2/9 + z^2/1 = 1$, а его полуоси $a = \sqrt{2}$, $b = 3$, $c = 1$ (рис. 19).

Согласно физическому смыслу трн. инт-а, масса тела, занимающего обл. $V$, равна

$$m = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2/2 + y^2/9 + z^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Выч-им этот инт. в сфч. крд-ах (см. рис. 17 из 10.1). Для нашего примера

$$x = \sqrt{2}\,\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = 3\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta,$$

сдт-но, ур-ие элси-да имеет вид $\rho = 1$. Поэтому для обл-ти $V$ крд-ы меняются: $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, тогда получим $m = 3\sqrt{2}\iiint\limits_{V^*} \rho^2 \sin^2\theta\left(2\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right)\rho \cdot \rho^2 \sin\theta \ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = -3\sqrt{2}\ \times$

$$\times \int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi}\left(1 - \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta\int\limits_0^1 \rho^5 \ \mathrm{d}\rho = \frac{22\sqrt{2}}{3}\pi.$$

**5***. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x$, к-ый в каждой тч. имеет плотность, равную рст-ю от тч. до нач-а крд-т. О: $8\pi/5$.

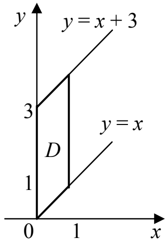


Рис. 17

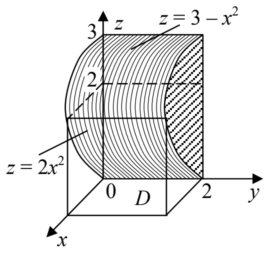


Рис. 18

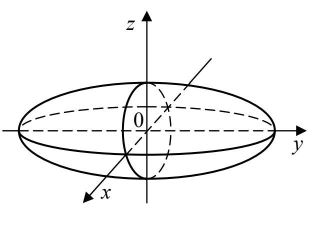


Рис. 19

**у2(6)**. Выч-ть пщ-дь той части пвх-ти конуса $x^2 + y^2 = z^2$, к-ая высекается цлн-ом $x^2 + y^2 = 2ax$. О: $\dfrac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$. Ук: см. п5: 10.2.

**у3(1)**. Выч-ть $\int\limits_{AB} xy \ \mathrm{d}l$, если $AB$ – часть эллипса (элс.) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащая в I крд. четверти.

Р. Перейдем к пармч. ур-ям элс-а: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ и по фм-е (4): 10.3 с учетом $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$,

$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$ получим

$$\int_{AB} xy\,dl = ab\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos 2t)+\frac{b^2}{2}(1+\cos 2t)}\ dt =$$

$$= -\frac{ab}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2+b^2)+(b^2-a^2)\cos 2t}\ d\cos 2t = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

**1***. Выч-ть $\int\limits_L f(x, y)\,dl$, если $L$ – часть астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в I четверти, $f = 3x - 2\sqrt[3]{a^2 y}$ $(a > 0)$. О: $a^2/5$.

**у3(2)**. Выч-ть $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где $l$ – отрезок пм-й, соединяющей тч-и $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

Р. Находим ур-ие пм-й $l$: $\dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow y = 2x$ $(0 \le x \le 1)$ и по (3): 10.3 получим

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2^2}\,dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\left|1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right| - \ln\left|\frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

**2***. Выч-ть $\int\limits_L \dfrac{dl}{x-y}$, где $L$ – отрезок пм-й $y = \dfrac{1}{2}x - 2$, соединяющий тч-и $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$. О: $\sqrt{5}\ln 2$.

**у3(3)**. Выч-ть $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где $L$ – контур окр-ти $x^2 + y^2 = ax$.

Р. Введем полярные крд. Ур-ие окр-ти имеет вид $\rho = a\cos\varphi$. Тогда $\rho' = -a\sin\varphi$ и $dl = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\ d\varphi = a\,d\varphi$. Т.к. окр-ть $x^2 + y^2 = ax$, т.е. $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$ лежит в I и IV четвертях, то $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, тогда по (5): 10.3 имеем $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho a\,d\varphi =$

$$= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = a^2\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

**3***. Выч-ть $\int\limits_L y\,dl$, где $L$ – дуга парб-ы $y^2 = 2px$, отсеченная парб-ой $x^2 = 2py$. О: $\dfrac{p^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

**у3(4)**. Найти $\int\limits_L xyz\,dl$, где $L$ – дуга линии $x = t$, $y = t^2/2$, $z = \dfrac{\sqrt{8t^3}}{3}$, $0 \le t \le 1$.

Р. По (6): 10.3 получим $J = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+t^2+2t}\ dt = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\ dt = \dfrac{16\sqrt{2}}{143}$.

**4***. Выч-ть $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}l$, где $L$ – дуга крв-й $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

О: $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}$ $(3a^2 + 4\pi^2b^2)$.

**у3(5)**. Найти $J = \int\limits_{AB}\left(4x-y\right)\mathrm{d}x + 5x^2y\mathrm{d}y$, где $AB$ – дуга парб-ы $y = 3x^2$, $A(0, 0)$, $B(1, 3)$.

Р. Т.к. $\mathrm{d}y = 6x\mathrm{d}x$, то $J = \int\limits_0^1\left[\left(4x-3x^2\right)+90x^5\right]\mathrm{d}x = \left[2x^2-x^3+15x^6\right]\Big|_0^1 = 16$.

**5***. Выч-ть $\int\limits_{AB} 6x^2y\,\mathrm{d}x + 10xy^2\mathrm{d}y$, где $AB$ – дуга крв-й $y = x^3$ от тч. $M(1, 1)$ до тч. $N(2, 8)$, $1 \le x \le 2$. О: 3132.

у3(6). Выч-ть $\int\limits_{AB} x^3\,\mathrm{d}x + 3zy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}z$ вдоль отрезка пм-й, идущего от тч. $M(3, 2, 1)$ до тч. $N(0, 0, 0)$.

Р. Найдем пармч. ур-ие линии $MN$: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} = t \Rightarrow x = 3t$, $y = 2t$, $z = t$, отсюда $x'_t = 3$, $y'_t = 2$, $z'_t = 1$. При этом нач-у отрезка $MN$ ств-ет зн-ие парм-а $t = 1$, а концу отрезка – зн-ие $t = 0$. Тогда $\int\limits_{AB} x^3\,\mathrm{d}x + 3zy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}z = \int\limits_1^0\left[(3t)^3\cdot 3 + 3t(2t)^2\cdot 2 - (3t)^2\cdot 2t\cdot 1\right]\mathrm{d}t = \int\limits_1^0 87t^3\,\mathrm{d}t = 87\cdot\dfrac{t^4}{4}\Big|_1^0 = -\dfrac{87}{4}$.

**6***. Выч-ть $\int\limits_{AB} yz\,\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$, где $AB$ – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$ при изм-и $t$ от 0 до $2\pi$. О: 0.

**у3(7)**. Д-ть, что зн-ие крвл. инт-а $J = \int\limits_{AB}\left(x^4+4xy^3\right)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$ не зв-т от вида линии, соединяющей тч-и $A(-2, -1)$ и $B(3, 0)$, и в случае плж. ответа найти этот инт.

Р. Т.к. $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$ и $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$, то $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, значит, инт-л не зв-т от пути интв-ия. Найдем зн-ие данного инт. для заданных тч. $A(-2, -1)$ и $B(3, 0)$ по фм-е (18): 10.3, полагая в ней $x_0 = -2$, $y_0 = -1$ и $x_1 = 3$, $y_1 = 0$: $J = \int\limits_{-2}^{3}\left(x^4+4x(-1)^3\right)\mathrm{d}x +$

$+ \int\limits_{-1}^{0}\left(6(3)^2y^2-5y^4\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{3}\left(x^4-4x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0}\left(54y^2-5y^4\right)\mathrm{d}y = 62$.

**7***. Выч-ть $\int\limits_L x^2\,\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$, где $L$ – верхняя половина окр-ти, пробегаемая по часовой стрелке. О: 16/3. Ук: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$, инт-ем по $-2 \le x \le 2$, $y = 0$, $\mathrm{d}y = 0$.

**у3(8)**. Выч-ть $J = \int\limits_{(0,-1)}^{(2,0)}\left(x-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-y\right)\mathrm{d}y$ как разность зн-й потенциальной (пероб-ой) фк-и в конечной тч. (2, 0) и нач-й тч. (0, – 1) пути интв-ия.

Р. В данном инт. $P(x, y) = x - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}$ и $Q(x, y) = \dfrac{x^2}{(x-y)^2} - y$, значит, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{(x-y)^3}$.

Принимая тч-у (1, 0) за нач-ю, по фм-е (19): 10.3 находим $u(x, y) = \int\limits_1^x\left(x-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)\Bigg|_{y=0}\mathrm{d}x +$

$+\int\limits_0^y\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-y\right)\mathrm{d}y+C=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{2}-x+C_1$, где $C_1=C-1/2$ – прзвл-я пст.

Т.к. нач. и конечная тч-и (0, – 1) и (2, 0) (где $y<x$, $u(x, y)$ сущ-ет), то по (20): 10.3 получим $J=u(2, 0)-u(0, -1)=(2+2-2+C_1)-(-1/2+C_1)=2{,}5$.

**8***. Выч-ть $\int\limits_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, где $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $P=x+3y$, $Q=y+3x$. О: 20,5.

**у3(9)**. Применяя фм-у Грина, выч-ть $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$, где $L$ – контур туг-ка с верш. $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$.

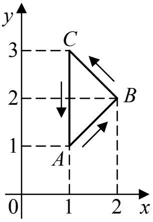


Рис. 20

Р. Здесь $P=2(x^2+y^2)$, $Q=(x+y)^2$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-4y=2(x-y)$, тогда по (17): 10.3 $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta ABC}2(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Выч-я двн. инт-л, найдем (рис. 20): $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y=2\int\limits_1^2\mathrm{d}x\int\limits_x^{-x+4}(x-y)\,\mathrm{d}y=$

$$=-\int\limits_1^2(x-y)^2\Big|_x^{-x+4}\mathrm{d}x=-4\int\limits_1^2(x-2)^2\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}(x-2)^3\Big|_1^2=-\frac{4}{3}.$$

**9***. Применяя фм-у Грина, выч-ть $\oint\limits_L(xy+x+y)\,\mathrm{d}x+(xy+x-y)\mathrm{d}y$, где $L$ – окр. $x^2+y^2=ax$.

О: $\frac{\pi a^3}{8}$.

**у3(10)**. Выч-ть пвх. инт-л I рода $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, где $S$ – часть пвх-ти $2az=x^2+y^2$ ($a>0$), вырезанная пвх-ю $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Р. Построим пвх-ть $S$, к-ая яв-ся частью парби-да $2az=x^2+y^2$, отсеченный конусом $z=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 21). Пвх-ть прцу-ем на пл-ть $xOy$ в обл. $D_{xy}$ – круг радиусом $2a$ с центром в нач. крд. Ур-ие окр-ти $x^2+y^2=4a^2$, к-ая яв-ся границей обл-и $D_{xy}$, получим, если из ур-й $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $2az=x^2+y^2$ иск-им $z$. Из $2az=x^2+y^2\Rightarrow z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$, сдт-но, $z'_x=x/a$, $z'_y=y/a$. Поэтому, используя фм-у (21в): 10.3, будем иметь

$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2a}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ |J|=r,\\ 0\le\varphi\le2\pi,\ 0\le r\le2a\end{matrix}\right|=\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2a}r^2\sqrt{a^2+r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{a^2}\int\limits_0^{2a}r^3\sqrt{a^2+r^2}\,\mathrm{d}r=$$

$$=\left|\begin{matrix}t^2=a^2+r^2,\ t\mathrm{d}t=r\mathrm{d}r,\\ r^2+t^2-a^2,\ a\le t\le a\sqrt5\end{matrix}\right|=\frac{\pi}{a^2}\int\limits_a^{a\sqrt5}\left(t^2-a^2\right)t^2\,\mathrm{d}t=\frac{\pi a^3\left(2+50\sqrt5\right)}{15}.$$

**10***. Выч-ть $\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$, если $S$ – часть пвх-и $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цлн-ом $x^2+y^2=$ $=2ax$ ($a>0$), $f=xy+yz+xz$. О: $64\sqrt2a^4/15$.

**у3(11)**. Найти пщ-дь части пвх-ти $2az=x^2+y^2$, к-ая заключена внутри цлн-а $(x^2+y^2)^2=$ $=2a^2xy$ ($a>0$).

Р. Основанием цлн-а яв-ся лемниската Бернулли (рис. 22), осью сим-и к-ой яв-ся $y = x$. Пвх-ть, пщ-дь к-ой надо выч-ть, есть часть парби-да врщ-я. Поэтому можно выч-ть 1/4 часть, проецирующуюся на петли лемнискаты. Из ур-ия парби-да $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ получим $z'_x = x/a$, $z'_y = y/a$, то по фм-е (23а): 10.3 имеем

$$\frac{1}{4}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Для выч-ия инт-а перейдем к полярным крд. Из рис. 22 видно, что $0 \le \varphi \le \pi/4$, $0 \le r \le a\sqrt{\sin 2\varphi}$, тогда получим $\frac{1}{4}S = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{a^2 + r^2}\,r\ \mathrm{d}r = \frac{1}{3a}\int\limits_0^{\pi/4} \left(a^2 + r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\ \mathrm{d}\varphi =$

$$= \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\left(1 + \sin 2\varphi\right)^{3/2} - 1\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\left(2\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - 1\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\left(2\sqrt{2}\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - 1\right)\mathrm{d}\varphi = -\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4} 2\sqrt{2}\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right)\mathrm{d}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) -$$

$$- \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi = -\frac{a^2}{3}\ 2\sqrt{2}\ \left.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right|_0^{\pi/4} - \frac{a^2\pi}{12} = \frac{a^2}{36}(20 - 3\pi) \Rightarrow S = \frac{a^2}{9}(20 - 3\pi).$$

**11***. Выч-ть $\iint\limits_S f(x, y, z)\ \mathrm{d}S$, если $S$ – часть пвх-ти $x^2 + y^2 = 2ay$ ($a > 0$), вырезанная пвх-ю $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f = z\sqrt{a + 2y}$. О: $3\pi a^3\sqrt{0{,}5a}$.

**у3(12)**. Найти массу пвх-ти сферы (сф.) радиусом $a$, если ее пвх-ная плотность в каждой тч. равна рст-ю от этой тч. до вертикального диаметра.

Р. Взяв за нач-о крд. центр сф-ы и направив ось $Oz$ по вертикали, получим, что рст-ие от тч. $P(x, y, z)$ сф-ы до оси $Oz$ равно $\sqrt{x^2 + y^2}$, значит, плотность $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Согласно фм-е (22): 10.3, искомая масса $m = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}S$, где $S$ – сф-а с центром $O(0, 0, 0)$.

Для выч-ия инт-а применим фм-у (21): 10.3, выразив пуг. крд-ы через сферические (сфч.) $x = a\cos\varphi\sin\theta$; $y = a\sin\varphi\sin\theta$; $z = a\cos\theta$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

По фм-ам (21е): 10.3 выч-им зн-ия для $E$, $G$, $F$ и найдем $\sqrt{EG - F^2}$:

$E = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + a^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 0 = a^2\sin^2\theta$;

$G = x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta = a^2$;

$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0$; $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta \cdot a^2 - 0} = a^2\sin\theta$. Тогда

$$m = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}S = a^2\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}\ \sin\theta\mathrm{d}\theta =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = 2\pi a^3\int\limits_0^{\pi}\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\ \mathrm{d}\theta = \pi^2 a^3.$$

**12***. Найти массу пвх-ти сф-ы, радиус к-ой $R$, если ее пвх. плотность в каждой тч. равна кв-у рст-ия от этой тч. до вртк. диаметра. О: $8\pi R^4/3$.

**у3(13)**. Выч-ть пвх. инт-л II рода $\iint\limits_S \left(x + z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2x^2 + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, где $S$ – верхняя сторона части парби-да $y = x^2 + z^2$, отсеченный пл-ю $y = 2$ и расположенный над пл-ю $xOy$.

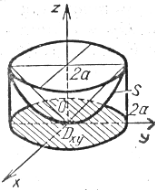



Рис. 21

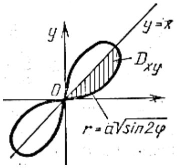



Рис. 22

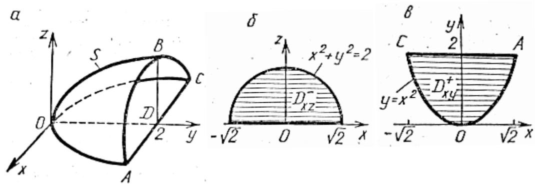



Рис. 23

Р. Запишем вк. $\Phi = (x + z^2)\boldsymbol{i} + (2x^2 + y)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$, т.к. в инт-е нет $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, значит, $R = 0$.

Построим пвх-ть $S$ (рис. 23а). Она однозначно прцу-ся как на пл. $xOz$ в обл. $D_{xz}$ (рис. 23б), так и на пл. $xOy$ в обл. $D_{xy}$ (рис. 23в). На пл. $xOy$ пвх-ть $S$ прцу-ся неоднозначно, т.к. части пвх-ти $ABO$ и $CBO$ прцу-ся на одну и ту же обл. $ODB$ (рис. 23а).

При выч-и инт-а используем пркц-ю $D_{xz}$, приписывая ей знак минус, т.к. $\cos\beta < 0$. Исходя из ур-ия $y = y(x, z) = x^2 + z^2$, пвх-и $S$ находим вк. $n$: $n\left(-y'_x,\ 1,\ y'_z\right) = (-2x, 1, -2z)$.

Сдт-но, применив фм-у (26в): 10.3, получим $\iint\limits_S \left(x + z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2x^2 + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z =$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} \left(\left(x + z^2\right)\left(-2x\right) + \left(2x^2 + \left(x^2 + z^2\right)\right)1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 + z^2 - 2xz^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z =$$

$$= \left|\begin{matrix} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{matrix}\right| = -\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(r^2 - 2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) r\ \mathrm{d}r = -\pi.$$

**13***. Выч-ть $\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $S$ – верхняя сторона части пвх-ти $z = 1 - x^2$, огрн-ой пм-ми $z = 0$, $y = -1$ и $y = 2$, $P = y^2 - x^2$, $Q = z^2\sin x$, $R = -2y^2z$. О: $-8$.

**у3(14)**. Выч-ть $I = \iint\limits_S \left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $S$ – внешняя сторона пирамиды, верш-ы к-ой находятся в тч. $O(0, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

Р. Из подынт. врж-ия следует, что $\Phi = (x^2 - 2y - z,\ 0,\ 3x - y^2 + z)$. Построим пвх-ть $S$ (рис. 24). Т.к. она состоит из четырех частей $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ (туг-ов $ABC$, $OBC$, $OBA$, $OAC$), заданных различными ур., то данный инт. по пвх-ти $S$ опр-ся как сумма инт-ов:

$$I = \sum_{i=1}^{4} \iint\limits_{S_i} \left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Рас-им $S_1$ ($\Delta ABC$), ур-ие к-ой имеет вид $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{4} = 1$. Эта пл-ть однозначно прцу-ся на пл. $xOy$ в обл. $D_{xy}$ и явно врж-ся фк-ей $z = 4 - 2x + 2y$. Сдт-но, $n_1(2, -2, 1)$. Интв-ие ведется по стороне $S^+_{1z}$ ($\cos\gamma > 0$), т.к. эта сторона яв-ся внешней для пирамиды, поэтому перед инт-ом по обл. $D_{xy}$ надо взять знак плюс. Обл. $D_{xy}$ огр-на линиями $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 2$, и, используя фм-у (26а): 10.3, получим

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\iint\limits_{D_{xy}} \left(\left(x^2 - 2y - \left(4 - 2x + 2y\right)\right)2 + \left(3x - y^2\ +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(4 - 2x + 2y\right)\right)1\right) = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_{x-2}^{0} \left(2x^2 + 5x - 6y - y^2 - 4\right)\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(\left(2x^2 + 5x - 4\right)y - 3y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{x-2}^{0} \mathrm{d}x = 8.$$

Рас-им $S_2$ ($\Delta OBC$), к-ая принадлежит крд-ой пл-ти $yOz$. Сдт-но, ее ур-ие есть $x = 0$, а пркц-я $D_{yz}$ – сама пвх-ть $S_2$, вк-р $n_2(1, 0, 0)$. Обл. $D_{yz}$ огр-на линиями $y = 0$, $z = 0$, $\dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{4} = 1$. Используя фм-у (26г): 10.3 при усл-и, что интв-ие ведется по стороне $S^-_{2x}$ ($\cos\alpha = -1 < 0$), а сдт-но, взяв знак минус перед инт-ом, получим

$$I_2 = \iint\limits_{S_2}\left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}}\left(-2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{-2}^{0}\mathrm{d}y\int\limits_{0}^{4+2y}\left(2y + z\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0}\left(2yz + \frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^{4+2y}\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{0}\left(8y + 4y^2 + \frac{1}{2}(4 + 2y)^2\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Анч-но получим:

$$I_3 = \iint\limits_{S_3}\left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}}\left(3x - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int\limits_{0}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_{x-2}^{0}\left(3x - y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$$= -\int\limits_{0}^{2}\left(3xy - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{x-2}^{0}\mathrm{d}x = -\frac{8}{3};$$

$$I_4 = \iint\limits_{S_4}\left(x^2 - 2y - z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (3x - y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |n_4(0, 1, 0)| = +\iint\limits_{D_{xz}}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0.$$

Итак, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 8 + 0 - 8/3 + 0 = 16/3$.

**14***. Выч-ть $J = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $S$ – нижняя сторона части пвх-ти $x^2 + z^2 = R^2$, отсеченной пм-ми $z = 0$, $y = 0$, $y = 2$ и расположенный над пл-ю $xOy$, $P = 0$, $Q = x^3 - 3y^2z^2$, $R = -(x + 1)z^2$. О: $8R^3/3$.

**у3(15)**. Выч-ть $\iint\limits_S x(z - R)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (2Rz - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если $S$ – верхняя сторона части пвх-ти $z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, опирающейся на конч-ю пвх-ть $x^2 + y^2 = z^2\mathrm{tg}^2\alpha$, где $\pi/4 < \alpha < \pi/2$.

Р. Построим пвх-ть $S$ (рис. 25), где ур-ие $z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ представляет верхнюю половину сф-ы $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ радиуса $R$ с центром в тч. $O(0, 0, R)$, а верш. конч-ой пвх-ти $x^2 + y^2 = z^2\mathrm{tg}^2\alpha$ совпадает с нач. крд. Пвх-ть $S$ однозначно прцу-ся на пл-ть $xOy$, к-ая огр-на окр-ю, задаваемой ур-ем $x^2 + y^2 = R^2\sin^2 2\alpha$, полученной из системы $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha; \\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \end{array}\right|$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{tg}\,\alpha}; \\ x^2 + y^2 + \left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{tg}\,\alpha} - R\right)^2 = R^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{из } tg^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \text{ и} \\ \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right) = 2R\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2\sin^2 2\alpha.$$

Из ур. $z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ пвх-ти находим вк. $n\left(\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1\right)$.

Для выч-ия инт-а $J$ применим фм-у (26а) с учетом $\Phi(x(z - R), 2y^{-1}, 2Rz - z^2)$, а интв-ие ведется по стороне $S_z^+$, то двн. инт-е подынт. фк-я имеет вид

$$\left(\Phi, n\right)\Big|_{z=R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Сдт-но, $I = +\iint\limits_{D_{xy}}\left(2x^2 + y^2 + \dfrac{2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{l} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le R\sin 2\alpha \end{array}\right| =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sin 2\varphi} \left( r^3\left(1+\cos^2\varphi\right) + \frac{2r}{\sqrt{R^2-r^2}} \right) dr = \int_0^{2\pi} \left( \left(1+\cos^2\varphi\right)\frac{r^2}{4} + 2\sqrt{R^2-r^2} \right)\Bigg|_0^{R\sin 2\varphi} d\varphi =$$

$$= \pi R\left( \frac{3}{4} R^3 \sin^4 2\alpha - 4\cos 2\alpha \right).$$

**15***. Выч-ть $\iint\limits_S P\,dydz + Q dxdz + R dxdy$, если $S$ – часть пвх-ти $y = 4x^2 + z^2$, отсеченная пл-ю $y = 0$, $P = z$, $Q = y + z^2$, $R = x^2 - x$; рас-ть сторону $S$, к-ая видна из нач. крд. О: $-5\pi$.

**у3(16)**. Найти пв-ю скн. поля $u = 2xy + y^2$ в тч. $M\left(\sqrt{2}, 1\right)$ элс-а $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ по нпв-ю внешней норм-и к элс-у в этой тч.

Р. Нпв-ие $n$ внешней норм-и к элс-у в тч. $M$ прп-но нпв-ю $\tau$ кас-ой к элс-у в этой тч. (рис. 26). Тч. $M\left(\sqrt{2}, 1\right)$ лежит на части элс-а $y = \sqrt{2 - x^2/2}$. Обз-им через $\varphi$ угол, к-ый образует нпв-ие кас-ой $\tau$ с осью $Ox$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = y'|_M = \left.\frac{-\sqrt{2}x}{2\sqrt{4-x^2}}\right|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Если обз-им через $\alpha$ угол, образованный нпв-ем $n$ с осью $Ox$, то из усл-я прп-сти $n$ и $\tau$ ($\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha = -1$) получим $\operatorname{tg}\alpha = -1/\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$. Находим нпв-щие косинусы вк-а $n$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \cos\beta = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Выч-им зн-ия частн. прв-ых фк-и $u = 2xy + y^2$ в тч. $M\left(\sqrt{x}, 1\right)$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2y|_M = 2$; $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M =$ $= 2(x + y)|_M = 2\left(1+\sqrt{2}\right)$. Тогда $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right|_M = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\left(1+\sqrt{2}\right) \times$ $\times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(3+\sqrt{2}\right)$.

**16***. В каких тч. пл-ти $xOy$ градиент поля $u = x^2 + y^2 - 3xy$: а) прп-ен оси $Oy$; б) прл-ен оси $Oy$? О: а) $y = 1{,}5x$; б) $y = 2x/3$.

**у3(17)**. Для скн. поля $u = \operatorname{tg}(yz) + e^{z\ln x} - z$ в тч. $M(1, 0, 2)$ найти: прв-ю по нпв. вк-а $n = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$; прв-ю по нпв., идущему от тч. $M$ к тч. $M_1(3, -2, 5)$; градиент; нб-ю скр. взр-ия; прв-ю по нпв. вк-а $n_1$, к-ый образует с градиентом в тч. $M$ угол $\varphi = 120°$.

Р. Данное поле $u$ опр-но и диф-мо в пр-ве для всех тч. $(x, y, z)$, для к-ых $x > 0$. Тч. $M(1, 0, 2)$ лежит в обл. опр-ия поля, поэтому прв-я поля в этой тч. сущ-ет по любому нпв. Найдем частн. прв-ые фк-и $u$: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}e^{z\ln x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{\cos^2(yz)}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{\cos^2(yz)} + e^{z\ln x}\ln x - 1$.

В тч. $M$ (1, 0, 2) имеем: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -1$.

Т.к. вк-р $n = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, а $|n| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$, то $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{1}{\sqrt{14}}$ (2(– 1) + 2 · 3 + (– 1) × × (– 2)) $= \frac{6}{\sqrt{14}} \approx 1{,}6$.

Находим прв-ю для вк-а $n = MM_1 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $|n| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (2 ×

$\times 2 + 2(-2) + (-1)3) = \dfrac{-3}{\sqrt{17}} \approx -0{,}73.$

Выч-им grad $u(M) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M \boldsymbol{i} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M \boldsymbol{j} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M \boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; $\max \left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M = |\text{grad}\, u(M)| =$

$= \sqrt{4+4+1} = 3.$

Найдем прв-ю по нпв. вк-а $n_1$: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right|_M = |\text{grad}\, u(M)|\cos\varphi = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1{,}5.$

**17***. Применить усл-ия предыдущей задачи для $u = xy^2z + yz^2 - 3z$, $M(0, 1, 2)$, $M_1(-2, 3, -1)$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\varphi = 30°$. О: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ при $n = MM_1$, grad $= 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\dfrac{\partial u}{\partial l_1} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

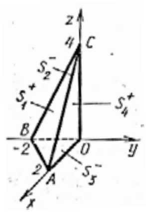


Рис. 24

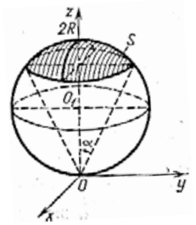


Рис. 25

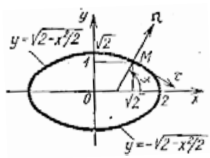


Рис. 26

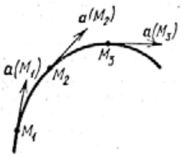


Рис. 27

Здесь и далее для лучшего понимания при р-и задач приведем нек-ые разъяснительные материалы.

Пусть в каждой тч. $M = M(x, y, z)$ пр-ва задан вк-р $\Phi = \Phi(M) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$. Если $R = 0$, то поле наз-ют плоским: $\Phi = \Phi(M) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$.

Вкн. линией поля наз. такая линия, кас-я в каждой тч. к-ой нпв-на вдоль заданного в этой тч. вк-а поля (рис. 27).

Всякое вкн. поле обладает семейством вкн. линий. Ур-ие этого семейства есть общее р-ие дифн. ур-й вида $\dfrac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)} = \mathrm{d}t$, откуда получим систему дифн. ур-й: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x, y, z)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x, y, z)$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = R(x, y, z)$.

Анч. врж-ия получим для плоского поля.

**у3(18)**. Для плоского поля $\Phi = (3x - y^2)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ найти ур-ия семейства вкн. линий и вкн. линии, проходящей через тч. $M(1, 1)$.

Р. По $\dfrac{\mathrm{d}x}{P(x,y)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Q(x,y)}$ получим $\dfrac{\mathrm{d}x}{3x - y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow y\mathrm{d}x - (3x - y^2)\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3}{y}x = -y.$ Расв-ая $x$ как фк-ю, $y$ – как арг-т, р-им диф. ур-ие методом подстановки (см. 4°: 11.1). $x = uv \Rightarrow x' = u'v + uv'$, тогда $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}v + u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3}{y}uv = -y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}v + u\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3v}{y}\right) = -y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3v}{y} = 0 \Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = 3\dfrac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \ln v = 3\ln y \Rightarrow v = y^3$; отсюда $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y^3 = -y \Rightarrow \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2} \Rightarrow u = \dfrac{1}{y} + C$. Тогда $x = y^2 + Cy^3$ – семейство линий. Отсюда $1 = 1 + C \cdot 1 \Rightarrow C = 0$. Итак, искомая вкн. линия есть парб-а $x = y^2$.

**18***. Анч. задачу р-ть для $\Phi = x\ln x\boldsymbol{i} + (2y + \ln x)\boldsymbol{j}$, $M(e, 2)$. О: $y = 3\ln^2 x - \ln x$.

**у3(19)**. Найти вкн. линии поля $\Phi = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Р. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{P} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Q} = \dfrac{\mathrm{d}z}{R}$ получим $\dfrac{\mathrm{d}x}{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{-2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{y} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{2}$. Из ур-ия

$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Rightarrow x dx + y dy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C^2$ ($C > 0$). Если ввести парм. $t$, то получим $x = C\cos t$, $y = C\sin t$. С учетом этого ур-ие $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{2}$ имеет вид $\frac{C\cos t dt}{C\cos t} = \frac{dz}{2} \Rightarrow dz =$ $= 2dt \Rightarrow z = 2t + C_1$.

Т.о., $x = C\cos t$, $y = C\sin t$, $z = 2t + C_1$ – пармч. ур-ия вкн. линий поля $\Phi$. При фксн-ом $C$ получаем ур-ие винтовой линии, расположенной на цлн-ре радиусом $C$ и осью $Oz$. Вдоль каждой вкн. линии вк. $\Phi$ имеет пст. длину, к-ая опр-ся врж-ем $|\Phi| = \sqrt{y^2 + x^2 + 4} = \sqrt{(C\sin t)^2 + (C\cos t)^2 + 4} = \sqrt{4 + C^2}$.

Если считать данное поле $\Phi$ полем скр-ей текущей жидкости, то каждая частица жидкости будет двигаться вдоль своей траектории с пст. лин. скр-ю.

**19***. Анч. задачу р-ть для $\Phi = (x + y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. О: $x - y^2 - z^2 = C_1 z$, $y = C_2 z$.

**у3(20)**. Выч-ть поток вкн. поля $\Phi = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ через верхнюю часть пвх-ти $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной пл-ю $z = 0$.

Р. Пвх-ть $z = 2 - x^2 - y^2$ яв-ся парби-ом врщ-я (рис. 28) и однозначно прцу-ся на пл. $xOy$ в обл. $D_{xy}$ – круг радиусом $R$ с центром в нач. крд. Поэтому применяем фм-у (26а): 10.3. Т.к. верхняя часть парби-да видна со стороны плж. нпв-я оси $Oz$, если смотреть на пл-ть $xOy$, то перед инт-ом по обл. $D_{xy}$ надо взять знак плюс. Исходя из ур-ия $z = 2 - x^2 - y^2$, находим вк. норм-и к пвх-ти $S$: $n = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Опр-им подынт. фк-ю $(\Phi, n)\big|_{z=2-x^2-y^2} = \left(2x^2 + 2y^2 - z\right)\big|_{z=2-x^2-y^2} = 3(x^2 +$ $+ y^2) - 2$. Сдт-но, $\Pi_S(\Phi) = \iint\limits_{D_{xy}} \left(3\left(x^2 + y^2\right) - 2\right) dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{vmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3r^2 - 2\right) r\, dr = 2\pi.$

**20***. Р-ть анч. задачу для $\Phi = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, $S$ – нижняя сторона пл-ти туг-ка с верш-ми (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2). О: – 4.

**у3(21)**. Выч-ть поток фк-а $\Phi = (4x - 3y)\boldsymbol{i} + (2y - 6x)\boldsymbol{j} - y^2z^2\boldsymbol{k}$ через внутреннюю сторону боковой пвх. части цлн-а $x^2 + y^2 = 4$, огрн-ой пл-ю $z = 0$, парби-ом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте (рис. 29).

Р. Выберем в пр-ве цлнч. крд-ы: $r$, $\varphi$, $z$, тогда $r = 2$, поэтому $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z$, где $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le z \le 4$. Откуда с учетом выбора внутренней стороны цлн-а получим

$$\Pi_S(a) = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^4 \left(x(4x - 3y) + y(2y - 6x)\right)\Big|_{\substack{x=2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \\ z=z}} dz = -2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^4 \left(2x^2 + y^2 - 4{,}5xy\right)\Big|_{\substack{x=2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi}} dz =$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^4 \left(8\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi - 18\cos\varphi\sin\varphi\right) dz = 24(3 - \pi).$$

**21***. Выч-ть поток вк-а $\Phi = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону сф-ы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, к-ая вырезана конч. пвх-ю $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. О: $2\pi\left(1 - 0{,}25\sqrt{2}\right)/3$. Ук: $\begin{cases} x = \cos\varphi\sin\theta; \\ y = \sin\varphi\sin\theta; \\ z = \cos\theta. \end{cases}$ Далее используем фм-ы Остроградского и дивергенции: $\oiint P\, dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$,

$\operatorname{div} a(M) = \lim\limits_{d\to 0} \frac{\oiint\limits_S (a, n^\circ) dS}{v}$. Если $\operatorname{div} a(M) > 0$, то в тч. $M$ источник, а если $\operatorname{div} a(M) < 0$, то сток. Если $\operatorname{div} a(M) = 0$, то источников и стоков в тч. $M$ нет.

Абс. вел-а $|\operatorname{div} a(M)|$ хркз-ет мощность источника или стока в тч. $M$, причем $\operatorname{div} a = \frac{\partial P}{\partial x} +$ $+ \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, тогда фм-у Остроградского можно записать в вкн. форме:

$$\oiint\limits_S (a, n^\circ)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div} a\ \mathrm{d}v.$$

**у3(22)**. Дано вкн. поле $a = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$. Выч-ть дивергенцию поля в тч. $M(-1, -2, 1)$ и поток вкн. поля через внешнюю сторону замкнутой пвх. $S$: $\{x^2 + y^2 = 3z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Р. Строим пвх-ть $S$ (рис. 30). Находим $\operatorname{div} a = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1 - 1 + 2z$, сдт-но, в тч. $M(-1, -2, 1)$ $\operatorname{div} a(M) = 2z|_{x=1} = 2$, значит, в тч. $M$ имеется источник, мощность к-го равна 2.

Найдем поток поля $\Pi_S(a) = \oiint\limits_S (a, n^\circ)\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V 2z\ \mathrm{d}v$. Для выч-ия инт-а используем цлнч. крд-ы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, тогда $r^2 = 3z$, $z = \sqrt{4 - r^2}$, откуда, исключив $z$, получим $r = \sqrt{3}$ и инту-ем по обл. $V$ (рис. 30):

$$\Pi_S(a) = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\ \mathrm{d}r \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z\ \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - r^2 - r^4/9\right) r\ \mathrm{d}r = 6{,}5\pi.$$

**22***. Выч-ть $\Pi_S(a)$ для заданных вкн. полей $a$ и плж. орнтв-ых замкнутых пвх. $S$: $z^2\boldsymbol{i} + (xy - 1)\boldsymbol{j} - (z - y)\boldsymbol{k}$, $S$: $\{3x + 2y + z = 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$. О: $-3$.

**у3(23)**. Выч-ть поток вкн. поля $a = 2xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону замкнутой пвх. $S$: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,\ \sqrt{x^2 + y^2} = z\sqrt{3}\}$.

Р. Находим $\operatorname{div} a = 2y - 2y + z^3 = 3z^2$, сдт-но, $\Pi_S(a) = \iiint\limits_V 3z^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где обл. $V$ изб-на на рис. 31. Инт-л удобно выч-ть в сфч. крд-ах $\rho$, $\varphi$, $\theta$, для к-ых эл-т объема $\mathrm{d}v = \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, а ур-ия сф-ы и конуса имеют вид $\rho = 2R\cos\theta$ и $\theta = \pi/3$ ств-но. Учитывая, что $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/3$, а $0 \le \rho \le 2R\cos\theta$, получаем $\Pi_S(a) = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2\cos^2\theta \cdot \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho = 6\pi \int_0^{\pi/3} \cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^4\ \mathrm{d}\rho =$

$$= \frac{192\pi R^5}{5} \int_0^{\pi/3} \cos^7\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{153\pi R^5}{32}.$$

**23***. Анч-но 22* р-ть задачу для $a = 3xy^2\boldsymbol{i} - (1 + yz^2)\boldsymbol{j} + (2 - zx^2)\boldsymbol{k}$, $S$: $\{x^2 + z^2 = y^2,\ y = 1,\ y \ge 0\}$. О: $\pi/2$.

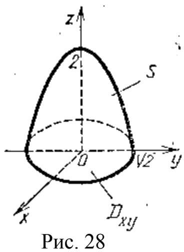


Рис. 28

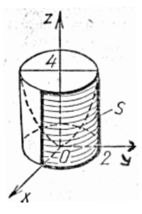


Рис. 29

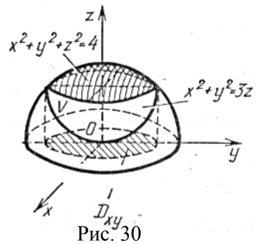


Рис. 30

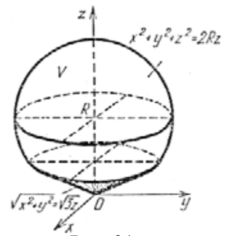


Рис. 31

Лин. инт-ом $W$ вкн. поля $a = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ вдоль линии $L$ наз. крвл. инт-л I рода от скн. пзв-ия $a$ и $\tau^\circ$ (едч. вк-а): $W = \int\limits_L (a, \tau^\circ)\,\mathrm{d}l$ ①, где $\mathrm{d}l$ – диф-л дуги линии. Инт. ① можно записать в различных видах, н-р, $W = \int\limits_L (a, \mathrm{d}r) = \int\limits_L P\ \mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ ②, где вк. $\mathrm{d}r = \tau^\circ\mathrm{d}l$ нпв-ен по кас-ой $L$. Правая часть ② есть крвл. инт-л II рода.

Если $a$ – силовое поле, то лин. инт-л равен работе, к-ую поле совершает по перемещению материальной тч. вдоль орнтв. линии $L$.

Если $a = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ – прзвл. вк. поле, а $L$ – замкнутая линия, то лин. инт-л наз. циркуляцией (црк.) вкн. поля $a$ вдоль $L$ и обз. $Ц_L(a) = \oint\limits_L (a, \mathrm{d}r) = \oint\limits_L P\ \mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ ③.

Црк-я вкн. поля хркз-ет врщт-ую способность поля на линии. Поэтому часто говорят, что если $Ц_L(a) > 0$ ($Ц_L(a) < 0$), то линия $L$, расположенная в поле $a$ под действием силы $a$ врщ-ся в плж. (отц.) нпв-и. Если $Ц_L(a) = 0$, то линия $L$ не врщ-ся.

**у3(24)**. Выч-ть лин. инт-л плоского вкн. поля $a = (2x - y^2 + 1)\boldsymbol{i} + (3x + 2y^2 - 10)\boldsymbol{j}$ по линии $L$, соединяющей тч-и $A(-1, -2)$ и $B(2, 1)$, если $L$ есть: а) парб-а $x = 3 - y^2$ ($L_1 = ACB$); б) пм. $AB$ ($L_2 = AB$) (рис. 32). Чему равна црк-я поля по замкнутой линии $ACBA$?

Р. По фм-е ② имеем $W_1 = \int\limits_{L_1}\left(2x - y^2 + 1\right)\mathrm{d}x + (3x + 2y^2 - 10)\mathrm{d}y$, где линия а) $L_1 = ACB$ (рис. 32) задана явным ур. $x = 3 - y^2$; подс-я ее в $W_1$ и учитывая, что $-2 \le y \le 1$, получаем

$$W_1 = \int\limits_{-2}^{1}\left(\left(2\left(3 - y^2\right) - y^2 + 1\right)(-2y) + \left(3\left(3 - y^2\right) + 2y^2 - 10\right)\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{1}\left(6y^3 - y^2 - 14y - 1\right)\mathrm{d}y = -7{,}5;$$

б) линия $L_2 = AB$ – отрезок пм-й $y = x - 1$, где $-1 \le x \le 2$, сдт-но,

$$W_2 = \int\limits_{-1}^{2}\left(\left(2x - (x-1)^2 + 1\right) + \left(3x + 2(x-1)^2 - 10\right)1\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\left(x^2 + 3x - 8\right)\mathrm{d}x = -16{,}5.$$

Зн-ия по различным линиям $L_1$ и $L_2$, соединяющим одни и те же тч. $A$ и $B$, не совпадают. Это обстоятельство хрк-но для многих вкн. полей.

Находим црк-ю $Ц_L(a) = W_1 + (-W_2) = -7{,}5 + 16{,}5 = 9$. Знак минус перед $W_2$ взят потому, что нпв-ие $BA$ противоположно нпв-ю $AB$.

**24***. Выч-ть $Ц_L(a)$ для полей $a$ и замкнутых линий $L$: $a = (z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + (x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + (y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$, $L$ – контур туг-ка с верш-ми (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). О: 2.

**у3(25)**. Выч-ть црк-ю вкн. поля $a = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + (x^2 - 2y)\boldsymbol{k}$ вдоль линии $L$: $\{z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x\}$.

Р. Линия $L$, полученная в результате сечения сф. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ цлн-ом $x^2 + y^2 = 2x$ (рис. 33), прцу-ся на пл. $xOy$ в окр-ть $x^2 + y^2 = 2x$, пармч. ур-ия к-ой имеют вид $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \le t \le 2\pi$). Линия $L$ лежит на полусф-е $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, поэтому для тч-к линии $L$ аппликата $z = \sqrt{4 - (1 + \cos t)^2 - (\sin t)^2} = 2\sin\frac{t}{2}$. Сдт-но, $Ц_L(a) = \oint\limits_L y^2\,\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + (x^2 - 2y)\mathrm{d}z =$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t(-\sin t) + 4\sin^2\frac{t}{2}\cos t + \left((1 + \cos t)^2 - 2\sin t\right)\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin^3 t + 2(1 - \cos t)\cos t + 4\cos^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 2\sin t\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{6\pi + 16}{3}.$$

**25***. Анч-но 24* р-ть задачу для $a = (x - y)\boldsymbol{i} + (y - z)\boldsymbol{j} + (z - )\boldsymbol{k}$, $L$ – линия, состоящая из части винтовой линии $x = accost$, $y = a\sin t$, $z = bt/(2\pi)$ от тч. $A(a, 0, 0)$ до тч. $B(a, 0, b)$ и прямолин. отрезка $BA$. О: $a(b + a\pi)$.

Если вкн. поле $a = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ диф-мо в тч. $M(x_0, y_0, z_0)$, то ротором (или вихрем) вкн. поля $a$ в тч. $M$ наз. вк-р

$$\mathrm{rot}a = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad ①,$$

где част. прв-ые выч-ны в этой тч.

Вкн. поле $a$ наз. безвихревым в обл. $V$, если в каждой ее тч. $\mathrm{rot}a = 0$.

Если вкн. поле $a$ диф-мо в пр-ой обл. $V$ и в этой обл. расположен нек. замкнутый контур $L$, то для любой незамкнутой пвх. $S \subset V$, опирающейся на контур $L$, имеет место фм. Стокса $\oint\limits_L(a, \mathrm{d}r) = \iint\limits_S(\mathrm{rot}\,a, n^\circ)\,\mathrm{d}S$ ②, где обход контура $L$ против часовой стрелки (плж. нпрв-ие). В част., если $z = z(x, y)$ есть ур—и-е пвх-ти $S$, то $Ц_L(a) = \pm\iint\limits_{D_{xy}}\left(\operatorname{rot} a,\ n\right)\Big|_{z=z(x,y)}\,dxdy$ ③, где знак плюс (минус) берется, когда контур $L$ имеет плж. (отц.) нпв-ие. $D_{xy}$ – пркц. $S$ на пл. $xOy$, $n = -z'_x\,\boldsymbol{i} - z'_y\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ – вк. норм-и к пвх-ти $S$.

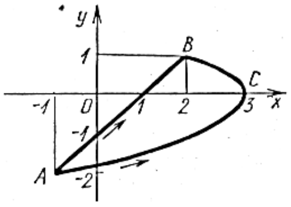


Рис. 32

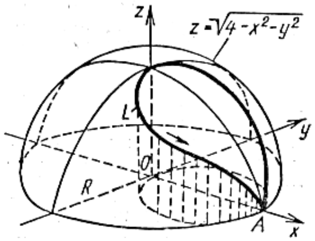


Рис. 33

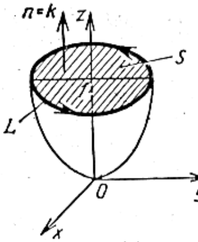


Рис. 34

Пусть вкн. поле $a$ диф-мо в обл. $V$ и тч. $M \in V$. Если через тч. $M$ провести пл-ть, прп-ю нек. заданному вк. $n°$, и описать в этой пл. замкнутый контур $L \subset V$, окружающий тч-у $M$ (нпв-ие обхода $L$ согласовано с орнтц-ей пл-ти), то предел, к к-му стремится отн-ие $Ц_L(a)/S$ ($S$ – пщ-дь обл-и, огрн-ой $L$) при стягивании контура $L$ к тч. $M$, наз. плотностью $\mu_M$ цркии поля в тч. $M$ в нпв-и вк-а $n°$.

Если к пвх. инт-у ② применить теорему о ср-ем, то $\mu_M = (\operatorname{rot}a(M),\ n°)$ ④. Отсюда следует, что плотность црк-и в тч. $M$ будет нб-ей в том случае, когда нпв-ие вк-а $n°$ совпадает с нпв-ем $\operatorname{rot}a(M)$. Это значит, что нпв-ие ротора – то нпв-ие, по к-му плотность црк-и в тч. мкс-на, а длина ротора равна этой мкс-ой плотности црк-и.

**у3(26)**. Для вкн. поля $a = (y^3 - 8yz - z)\boldsymbol{i} + (yz - x^3 + 2x)\boldsymbol{j} + (yx^3 - 2z^3)\boldsymbol{k}$ найти: ротор; плотность црк-и в тч. $M(2, 1, -1)$ по нпв-ю едч. вк-а $n_1^0 = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})/3$; нб. плотность црк-и в тч. $M$; црк-ю поля вдоль контура $L$, получающегося при перч-и парби-да $z = x^2 + y^2$ плотностью $z = 1$ и орнтв-го плж-но по отн-ю к оси $Oz$.

Р. По фм-е ① $\operatorname{rot}a = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^3 - 8yz - z & yz - x^3 + 2x & yx^3 - 2z^3 \end{vmatrix} = (x^3 - y)\boldsymbol{i} - (3yx^2 + 8y + 1)\boldsymbol{j} + (2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z)\boldsymbol{k}$.

В тч. $M(2, 1, -1)$ $\operatorname{rot}a(M) = 7(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$.

Плотность црк-и данного поля в тч. $M$ по нпв-ю $n_1^0$ найдем по фм-е ④:

$$\mu_M = \left(\operatorname{rot} a(M),\ n_1^0\right) = \frac{7}{3}\,(1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2) \approx 2{,}33.$$

Нб. плотность црк-и поля в тч. $M$ равна длине ротора в этой тч., т.е. $\max\mu_M = |\operatorname{rot}a(M)| = 7\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 7\sqrt{19} \approx 30{,}51$.

Построим крв-ю $L$ (рис. 34). Этот контур – окр-ть с радиусом, равным 1, с центром в тч. (0, 0, 1). Т.к. окр-ть лежит в пл-ти $z = 1$, то в кач-е пвх-и $S$, накрывающей контур $L$, выберем часть этой пл., огрн-ю указанным контуром. Вк-р норм-и к этой пл-ти есть $n = \boldsymbol{k}$, а ротор данного поля $\operatorname{rot}a = (x^3 - y)\boldsymbol{i} - (3yx^2 + 8y + 1)\boldsymbol{j} + (2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z)\boldsymbol{k}$, поэтому $(\operatorname{rot}a,\ n) = 2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z$.

Учитывая, что контур $L$ следует обходить в плж-ом нпв-и по отн-ю к оси $Oz$ и взятая пвх-ть $S$ однозначно прцу-ся на пл. $xOy$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$, по фм-е ③ получим

$$Ц_L(a) = +\iint\limits_{D_{xy}}\left(\operatorname{rot} a,\ n\right)\Big|_{z=1}\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\left(10 - 3x^2 - 3y^2\right)dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(10 - 3r^2\right) r\,dr = \frac{17\pi}{2}.$$

**26***. Сформулированную выше задачу р-ть для $n = (2y - 3xz^2)\boldsymbol{i} - (2xy - 3y^2)\boldsymbol{j} + (y^2 - 3x^2)\boldsymbol{k}$, $M(1, -2, -3)$, $n_1^0 = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{5}$, $L$ – контур $\Delta ABC$ с верш-ми $A(0, 0, 2)$, $B(0, 1, 2)$, $C(3, 0, 2)$.

О: $\mu = -28\big/\sqrt{5}$ , $\max\mu = 2\sqrt{149}$ , $Ц = -9$.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-7 из 10.1, п1-9 из 10.2, п1-24 из 10.3 и у1(1)-у1(15), у2(1)-у2(6), у3(1)-у3(26) р-ть з1-з20: 1) с помощью двн. инт-а выч-ть крд-ы центра тяжести фигуры, огрн-ой данными линиями (пвх-ю плотность считать равной ед-це); 2) выч-ть объем тела, огрн-го заданными пвх. и расположенного в первом октанте; 3) выч-ть работу, совершаемую пер. силой $F = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ на крвл. пути $L$, соединяющем заданные тч. $M$ и $N$; 4) установить незв-сть от пути интв-ия и выч-ть крвл. инт-л по контуру, связывающему тч-и $M(1, 2)$ и $N(3, 5)$.

1. 1) $x^2 + 4y^2 = 1$, $-x + 2y = 1$. 2) $x^2 + y^2 + z = 10$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $z = 0$. 3) $F = (3x + y^2)\boldsymbol{i} + (5xy + 1)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^2+2x\}$, $M(0,0)$, $N(1,3)$. 4) $\int(x^3 - 2y)\mathrm{d}x - (2x - 5)\mathrm{d}y$.

2. 1) $x^2/16+y^2/9=1$, $x/4 + y/3 = 1$. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$. 3) $F = (8x^2 + y)\boldsymbol{i} + (3x^2y + x)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^2+1\}$, $M(0,1)$, $N(2,9)$. 4) $\int(1 + 2xy)\mathrm{d}x + (x^2 + y)\mathrm{d}y$.

3. 1) $9x^2+16y^2=1$, $3x - 4y = 1$. 2) $x^2 + y^2 + 2$, $z = 0$, $x + y + z = 2$. 3) $F = (3xy + x^2)\boldsymbol{i} + (8y - x)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y = x^3\}$, $M(0, 0)$, $N(2, 8)$. 4) $\int(x^2 - y)\mathrm{d}x - (x - 3y)\mathrm{d}y$.

4. 1) $x^2 + y^2 = 9$, $x + y - 3 = 0$. 2) $x^2+y^2+z=12$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $z = 0$. 3) $F=(8x^2y+x)\boldsymbol{i}+(-2y+1)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=7x^2+2x\}$, $M(0,0)$, $N(2,32)$. 4) $\int(3+xy)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{2}x^2+2y\right)\mathrm{d}y$.

5. 1) $x^2/49+y^2/4=1$, $x/7 + y/2 = 1$. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$. 3) $F = (5x^2 - y)\boldsymbol{i} - (xy + 1)\boldsymbol{j}$, $L$: {отрезок $MN$}, $M(1,2)$, $N(3,5)$. 4) $\int(5x-2y)\mathrm{d}x-(2x-y)\mathrm{d}y$.

6. 1) $x^2+25y^2=1$, $x - 5y = 1$. 2) $x^2 + y^2 = 1/2$, $x + y + z = 1$, $z= 0$, 3) $F = (-xy + 3)\boldsymbol{i} + (2x^2 - y)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=3x^2+x\}$, $M(1,4)$, $N(3,30)$. 4) $\int(x^2 - y)\mathrm{d}x - (x + 3y)\mathrm{d}y$.

7. 1) $x^2/9 + y^2 = 1$, $x - 3y - 3 = 0$. 2) $z = 8 - x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = \sqrt{3}\,x$, $y = x$. 3) $F = (x^2y + x)\boldsymbol{i} + (3x^3 - y)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^3+1\}$, $M(0,1)$, $N(1,2)$. 4) $\int(4xy+3)\mathrm{d}x+(2x^2-y)\mathrm{d}y$.

8. 1) $4x^2+25y^2=1$, $2x-5y-1=0$. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$. 3) $F=(-3y+x^2)\boldsymbol{i}+(2xy+1)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^3+2\}$, $M(1,3)$, $N(2,10)$. 4) $\int(4+xy^2)\mathrm{d}x+(x^2y+{}^2y)\mathrm{d}y$.

9. 1) $x^2/25+y^2/9=1$, $x/5 - y/3 = 1$. 2) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1 + x^2 + y^2$. 3) $F = (xy + x^3)\boldsymbol{i} + (5x^2 + y)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^2+x\}$, $M(1,2)$, $N(3,12)$. 4) $\int(2xy+8)\mathrm{d}x+(x^2+2y)\mathrm{d}y$.

10. 1) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + 2 = 0$. 2) $x^2 + y^2 = 9/2$, $x + y + z = 3$, $z = 0$. 3) $F = (2x^2y + 1)\boldsymbol{i} + (3x + y)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=3x^2+2\}$, $M(2,14)$, $N(3,29)$. 4) $\int(5x^3-3y)\mathrm{d}x+(y^2-3x)\mathrm{d}y$.

11. 1) $y^2=x+1$, $y^2 = -\dfrac{1}{2}x + 1$. 2) $x^2 + y^2 = 3$, $z = 4 - x^2 - y^2$. 3) $F = xy\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j}$, $L$: {отрезок $ON$}, $O(0,0)$, $N(1,1)$. 4) $\int(3x^2-3y)\mathrm{d}x+(3y^2-3x)\mathrm{d}y$.

12. 1) $y^2=x+4$, $y^2=-\dfrac{1}{3}x+4$. 2) $x^2 + y^2 = 5$, $z = x^2 + y^2$. 3) $F = xy\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y = x^2\}$, $O(0, 0)$, $N(1, 1)$. 4) $\int(3x^2 - 6xy^2)\mathrm{d}x + \int(6x^2y + 4y^3)\mathrm{d}y$.

13. 1) $y^2 = 9x + 9$, $y^2 = -x + 9$. 2) $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + z^2 = 2$. 3) $F=(x^4+4xy^3)\boldsymbol{i}+(6x^2y^2-5y^2)\boldsymbol{j}$, $L$: {отрезок $MN$}, $M(-2,-1)$, $N(3,0)$. 4) $\int(x^3 - 3xy^2 + 2)\mathrm{d}x - (2x^2y - y^2)\mathrm{d}y$.

14. 1) $y^2=-2x+16$, $y^2 = x + 16$. 2) $x^2 + y^2 = 18$, $x + y + z = 6$, $z = 0$. 3) $F=(x^4+4xy^3)\boldsymbol{i}+(6x^2y^2-5y^2)\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y = x^3\}$, $M(1, 1)$, $N(2, 8)$. 4) $\int y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$.

15. 1) $x^2=2y+4$, $x^2 = -y + 1$. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2$. 3) $F = \dfrac{x}{(x-y)^2}\boldsymbol{i} - \dfrac{y}{(x-y)^2}\boldsymbol{j}$, $L$: {отрезок $MN$}, $M(0,-1)$, $N(1,0)$. 4) $\int(x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$.

16. 1) $x^2 = 9y + 3$, $x^2 = -y + 3$. 2) $z = 8 - x^2 - y^2$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 3$, $y = \sqrt{3}x$. 3) $F = \dfrac{x}{(x-y)^2}\boldsymbol{i} - \dfrac{y}{(x-y)^2}\boldsymbol{j}$, $L$: $\{y=x^2\}$, $M(1,1)$, $N(2,4)$. 4) $\int(x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

17. 1) $x^2=3y+9$, $x^2 = -y + 9$. 2) $x^2+y^2=1/8$, $y=x$, $y=0$, $x + y + z = 1/2$, $z = 0$. 3) $F = \dfrac{x+2y}{(x+y)^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{y}{(x+y)^2}\boldsymbol{j}$, $L$: {отрезок $MN$}, $M(1,1)$, $N(3,1)$. 4) $\int\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y$ $(y \neq 0)$.

18. 1) $x^2=-16y+1$, 2) $z=1-x^2-y^2, y=\sqrt{3}x$. 3) $F=(x^3+xy)\boldsymbol{i}+(5x^2+y)\boldsymbol{j}$, 4) $\int\left(3x^2+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

$x^2=y+1$. $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $z=0$. $L$: $\{y=x^2\}$, $M(1, 1)$, $N(2, 4)$.

19. 1) $x^2=25y+25$, 2) $x^2+y^2+z^2=4$, 3) $F=(3x^2y-y^3)\boldsymbol{i}+(x^3-3xy^2)\boldsymbol{j}$, 4) $\int(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+$
$x^2=5y+25$. $x^2+y^2=3$. $L$: {отрезок $MN$}, $M(0,0)$, $N(1,1)$. $+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$.

20. 1) $y^2=2x+4$, 2) $x^2+y^2=18, y=x, y=0$, 3) $F=(3x^2-y^3)\boldsymbol{i}+(x^3-3xy)\boldsymbol{j}$, 4) $\int\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$, $(y\neq x)$.

$y^2=-\dfrac{1}{2}x+4$. $x+y+z=6, z=0$. $L$: $\{y=x^2+1\}$, $M(1,2)$, $N(2,5)$.

**Решение типовых задач**

**тз1**. Найти крд-ы центра тяжести фигуры, огрн-ой элс-м $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ и пм-й $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$ (пвх-ю плотность в каждой тч. считать равной ед-це).

Р. Крд-ы центра тяжести находим по фм-е $\bar{x}=\dfrac{1}{S}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\bar{y}=\dfrac{1}{S}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $S$ – пщ-дь обл-ти $D$, $S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. В расв. случае (рис. 35) фигура огр-на линиями $y=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ и $y=3\left(1-\dfrac{x}{5}\right)$ при $0\le x\le 5$. Поэтому $S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^5\mathrm{d}x\int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}\mathrm{d}y=\int\limits_0^5\left[\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3\left(1-\dfrac{x}{5}\right)\right]\mathrm{d}x=$

$$=\frac{3}{5}\int\limits_0^5\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x-\left(3x-\frac{3x^2}{10}\right)\Bigg|_0^5=\frac{3}{5}\int\limits_0^5\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{15}{2}.$$

Выч-им $\dfrac{3}{5}\int\limits_0^5\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{vmatrix}x=5\sin t;\ x=0,\ t=0;\\ \mathrm{d}x=5\cos t\mathrm{d}r;\ x=5,\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{3}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{25-25\sin^2 t}\cdot 5\cos t\mathrm{d}t=$

$$=15\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=15\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{15}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{15}{4}\pi.$$ Итак, $S=\dfrac{15}{4}(\pi-2)$.

Далее $\bar{x}=\dfrac{1}{S}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 x\,\mathrm{d}x\int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}\mathrm{d}y=\dfrac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5\left[\dfrac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\dfrac{x}{5}\right)\right]\mathrm{d}x=$

$$=\frac{4}{25(\pi-2)}\int\limits_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{5(\pi-2)}\int\limits_0^5\left(x-\frac{x^2}{5}\right)\mathrm{d}x.$$

Выч-им $\int\limits_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{vmatrix}25-x^2=t^2;\ x=0,\ t=5;\\ -2x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t;\ x=5,\ t=0;\\ x\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t\end{vmatrix}=-\int\limits_5^0 t^2\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^5 t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}\Bigg|_0^5=\dfrac{125}{3}$. Отсюда имеем $\bar{x}=\dfrac{4}{25(\pi-2)}\cdot\dfrac{125}{3}-\dfrac{4}{5(\pi-2)}\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{15}\right)\Bigg|_0^5=\dfrac{20}{3(\pi-2)}-\dfrac{10}{3(\pi-2)}=\dfrac{10}{3(\pi-2)}$.

Наконец, $\bar{y} = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 \mathrm{d}x \int\limits_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} y\mathrm{d}y = \dfrac{2}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5\left[\dfrac{9}{25}\left(25-x^2\right)-9\left(1-\dfrac{x}{5}\right)^2\right]\mathrm{d}x =$

$$= \frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{2}{\pi-2}.$$

**тз1а**. Найти крд-ы центра тяжести фигуры, огрн-ой линиями $y^2 = x + 9$, $y^2 = -3x + 9$ (рис. 36) (пвх-ю плотность считать равной ед-це).

Р. Поскольку фигура симч-на оси $Ox$, то $\bar{y} = 0$. Выч-им $\bar{x} = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$= \int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_{y^2-9}^{\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)} \mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3\left[\dfrac{1}{3}\left(9-y^2\right)-\left(y^2-9\right)\right]\mathrm{d}y = 48$. Тогда центр тяжести $\bar{x} = \dfrac{1}{48}\cdot\int\limits_0^3 \mathrm{d}y\int\limits_{y^2-9}^{\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)} x\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{24}\int\limits_0^3 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2-9}^{\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)}\mathrm{d}y = \frac{1}{48}\int\limits_0^3\left[\frac{1}{9}\left(9-y^2\right)^2-\left(y^2-9\right)^2\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{48}\int\limits_0^3\left[-\frac{8}{9}y^4+16y^2-72\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{48}\times$$

$$\times\left[-\frac{8}{9\cdot 5}y^5+16\frac{y^3}{3}-72y\right]_0^3 = -\frac{12}{5}.$$

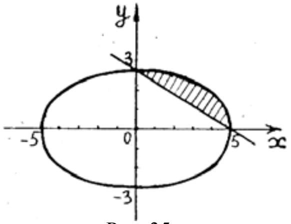


Рис. 35

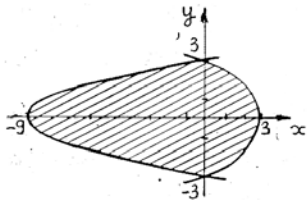


Рис. 36

**тз2**. Выч-ть объем тела, огрн-го пвх-ми $x^2 + y^2 = 8$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$ и расположенного в первом октанте.

Р. Заданное тело огр-но круговым цлн-ом $x^2 + y^2 = 8$, крд. пм-ми и пл-ю $x + y + z = 4$ (рис. 37). Объем цлнч. тела, огрн-го сверху пвх-ю $z = f(x, y)$, снизу пл-ю $z = 0$ и по бокам цлнч. пвх-ю, вырезающей на пл-ти $xOy$ обл. $D$, выч-ся по фм-е $V = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $D$ – часть круга радиусом $\sqrt{8}$, расположенная в I кв-нте, поэтому расв. инт-л удобно выч-ть в полярных крд.: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$. Тогда $V = \iint\limits_D (4-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}(4-r\cos\varphi-r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\left(4\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\varphi-\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{\sqrt{8}}\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}\left(16-\frac{16\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi = \left(16\varphi-\frac{16\sqrt{2}}{3}\sin\varphi\right. +$$

$$\left.+\frac{16\sqrt{2}}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 8\pi-\frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

**тз2а**. Найти объем тела, огрн-го пвх-ми $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + z^2 = 9$ и расположенного в первом октанте.

Р. Заданное тело огр-но двумя круговыми цлн. (рис. 38). Искомый объем врж-ся инт-ом

$V = \iint\limits_D \sqrt{9 - x^2}\, dxdy$, где $D$ – четверть круга радиусом 3. Тогда $V = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2}\, dy =$

$$= \int\limits_0^3 \left[ \sqrt{9 - x^2} \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \right] dx = \int\limits_0^3 \sqrt{9 - x^2} \left[ y \Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} \right] dx = \int\limits_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^3 = 27 - \frac{27}{3} = 18.$$

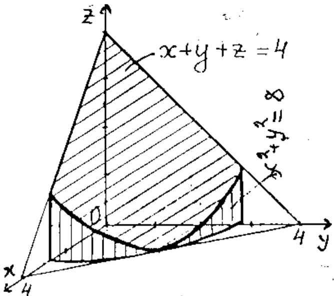


Рис. 37

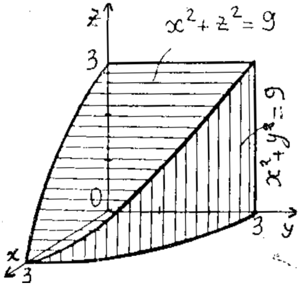


Рис. 38

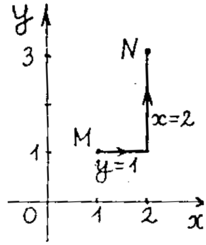


Рис. 39

**тз3**. Выч-ть работу, совершаемую пер. силой $F = (2xy + y)\boldsymbol{i} + (3x^2 - 1)\boldsymbol{j}$ на дуге парб-ы $y = 3x^2 + x$, соединяющей тч-и $M(1, 4)$ и $N(2, 14)$.

Р. Чтобы найти работу силы, выч-им крвл. инт-л $A = \int\limits_L (2xy + y)\, dx + (3x^2 - 1)dy$. От крвл-го переходим к опрн. инт-у, для этого выч-им диф-л $dy = d(3x^2 + x) = (6x + 1)dx$ и заметим, что $1 \le x \le 2$. Тогда $A = \int\limits_1^2 \left(2x\left(3x^2 + x\right) + \left(3x^2 + x\right) + \left(3x^2 - 1\right)\left(6x + 1\right)\right) dx = \int\limits_1^2 \left(24x^3 + 8x^2 - 5x - 1\right) dx =$

$$= \left( 24 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} - x \right)\Bigg|_1^2 = 90\,\frac{1}{6}.$$

**тз4**. Выч-им крвл. инт-л $I = \int \left(x^2 + 3xy\right) dx + \left(\frac{3}{2}x^2 + y\right) dy$ по контуру, соединяющему тч-и $M(1, 1)$ и $N(2, 3)$, предварительно убедившись в незв-сти крвл. инт-а от пути интв-ия. Здесь $\left.\begin{array}{l} P = x^2 + 3xy; \\ Q = \dfrac{3}{2}x^2 + y \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x \end{array}\right| \; \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Усл-е незв-сти выполняется. Путь изображен на рис. 39. На первом участке имеем $y = 1$, $dy = 0$, $1 \le x \le 2$; на втором участке $x = 2$, $dx = 0$, $1 \le y \le 3$. Тогда получим $I = \int\limits_1^2 \left(x^2 + 3x\right) dx + \int\limits_1^3 \left(6 + y\right) dy = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right)\Bigg|_1^2 + \left( 6y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_1^3 = 22\,\frac{5}{6}$.

# 11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

> Чтобы жить по-настоящему светлой, счастливой жизнью, надо много знать, много передумать, надо научиться работать и головой, и руками. Знания нужны человеку в жизни, как воздух.
>
> NN

## ЛЕКЦИЯ 29

## 11.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1°. Основные понятия о дифференциальных уравнениях. Задачи**. При изучении конкретных естественных и производственных процессов часто бывает невозможным найти законы, связывающие вел-ы расв. процесса (т.е. установить фк-ю $y = f(x)$), но удается установить зв-ть этих вел. с их прв-ми. В таких случаях мы приходим к понятию дифн. ур-й (см. з1-з3). С простейшим дифн. ур-ем мы встретились уже в интн. исчислении, когда по данной скорости движения (двж.) $S'(t) = v(t)$ потребовалось найти ур-ие двж-я $S(t) = \int v(t)dt + C$.

Изучая данную главу, читатель должен уметь не только решать дифн. ур-ия, но и составлять (сост.) модель поставленной задачи. Поэтому здесь расв-ся задачи из различных обл-ей, требующих сост-ия дифн. ур-й. Их будем приводить далее по мере освоения методов р-ия дифн. ур-й.

Обыкновенным дифн. ур-ем наз. ур-ие вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

к-ое связывает арг-т $x$, фк-ю $y$ и прв-ые $y', \ldots, y^{(n)}$.

Наибольший (нб.) порядок прв-ой в этом ур-и $n$ наз. порядком дифн. ур-ия. Н-р, $xy'' + yy''' - y = 0$ есть дифн. ур-ие 3-го порядка.

Если неизвестная фк. $y$ в ур-и (1) зв-т от двух или более пер-ых, то дифн. ур-ие наз. ур-ем в част. прв-ых, н-р, рас-им ур-ие Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z),$$

к-му уд-ет потенциал $u = u(x, y, z)$ электростатического (элкстсч.) поля с плотностью зарядов $\rho = \rho(x, y, z)$. Нек-ые дифн. ур-я в част. прв-ых приведены в 12.4.

Р-ем дифн. ур-ия наз. всякая фк. $y = \varphi(x)$, к-ая, будучи подставленной в ур-ие (1), обращает ее в тожд-о:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Причем дифн. ур-ие имеет не одно р-ие, а семейство р-й, назм-ых общим р-ем. Так дифн. ур-ие первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

имеет общее р-ие $y = \varphi(x, C)$, где $C$ – нек. постоянная (пст.). А общим р-ем ур-ия (1) будет $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные (прзвл.) пст.

**п1**. Найти общее р-ие ур-ия $y' - \sin x = 0$.

Р. $y' = \sin x \Rightarrow dy = \sin x dx$, инту-я, находим $y = -\cos x + C$, т.е. $y = \varphi(x, C)$.

**п2**. Найти общее р-ие ур-ия $y''' = 0$.

Р. $y''' = \dfrac{dy''}{dx} = 0 \Rightarrow dy'' = 0$, инту-я, находим $y'' = C_1 \Rightarrow dy' = C_1dx$, снова инту-я, получим $y' = C_1x + C_2 \Rightarrow dy = C_1xdx + C_2dx$, откуда найдем $y = \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$, т.е. $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3)$.

Задача нахождения всех р-й дифн. ур-ия наз. интв-ем дифн. ур-ия. Причем дифн. ур-ие считается р-ым, если найдено:

1) $y = \varphi(x, C)$ – явно, см. п1.

2) $y = \int f(x)dx + C$ – явно с квадратурами (кву.), н-р, $y' = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx + C$, см. и п6.

3) $\Phi(x, y, C) = 0$ – фк. $y$ найдена неявно, или изучена крв-я, установлены ее св-ва (см. п3).

Рас-им дифн. ур-ие 1-го порядка, разрешенное отс-но прв-ой

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Пусть ее общим р-ем яв-ся совокупность (свк.) крв-х

$$y = \varphi(x, C). \tag{3а}$$

к-ые наз. интн. крв-ми. Выясним геом. интерпретацию (инпц.) пст-ой $C$.

Дифн. ур-ие (3) устанавливает связь между крд-ми тч. $(x, y)$ и угл. коэф-ом кас-ой $\frac{dy}{dx}$ к грф-у в той же тч., т.е., зная $x$ и $y$, можно выч-ть $\frac{dy}{dx}$. Сдт-но, р-ие дифн. ур-ия состоит в нахождении интн. крв-х, нпв-ие кас-ых к к-ым совпадает с нпв-ем поля.

Для построения поля нпв-й найдем геомч. место тч-к, в к-ых кас-ые к искомым интн. крв-м сохраняют пст. нпв-ие, т.е. $\frac{dy}{dx} = k$ (пст-ое). Такие линии наз. изоклинами.

**п3**. Найти изоклины, поле нпв-й и интн. кривые, т.е. общее р-ие дифн. ур-ия $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Р. Ур-ие изоклин получим, считая $\frac{dy}{dx} = k$ или $x^2 + y^2 = k^2$, т.е. изоклинами яв-ся окр-ти с центром в нач. крд-т. Для построения поля нпв-й на ств-их окр-ях проведем одинаковые нпв-ия при конкретном $k$ (рис. 1а). Теперь можно уже прж-но провести искомые интн. крв., учитывая поле нпв-й (рис. 1б).

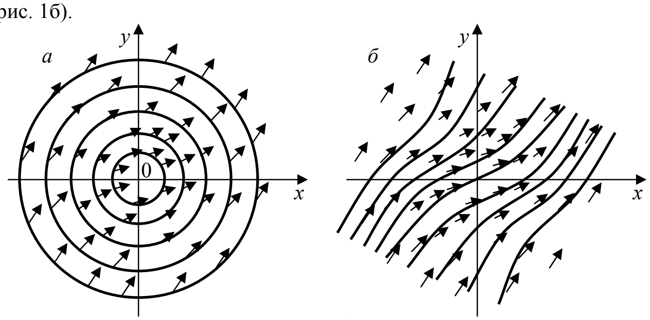



Рис. 1

Частным (част.) р-ем дифн. ур-ия наз. конкретная интн. крв., к-ая проходит через тч-у $(x_0, y(x_0))$, т.е. уд-ет нач. условию (усл.)

$$y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Задача нахождения част. р-ия дифн. ур-ия, удщ-го нач. усл-ю (4), наз. задачей Коши.

Част. р-ие можно найти двумя способами:

1) найти общее р-ие и исключить (иск.) пст-ю, используя нач. усл-е;

2) сразу найти част. р-ие, инту-я дифн. ур-ие в сегменте $[x_0, x]$ и используя нач. усл-ие.

**п4**. Найти двумя способами част. р-ие ур. $y' - \sin x = 0$ (см. п1) с нач. усл-ем $y(0) = 0$.

Р. 1) Находим общее р-ие $y = -\cos x + C$. Используем нач. усл. $0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$. Тогда $y = -\cos x + 1$.

2) Из $dy = \sin x dx$, инту-я в сегменте $[0, x]$, получим $y\Big|_0^x = -\cos x\Big|_0^x \Rightarrow y(x) - y(0) = -\cos x + \cos 0$. Откуда, используя нач. усл., находим $y(x) = -\cos x + 1$, т.е. $y = -\cos x + 1$.

**зм1**. Во многих задачах $x$ и $y$ совершенно равноправны. Поэтому вместо (3) (пусть его р-ие $y = y(x)$) можно взять

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{5}$$

к-ый имеет р-ие $x = x(y)$. Стн-я (3) и (5) экв-ны, если они имеют смысл, ибо фк-и $y = y(x)$ и $x = x(y)$ врж-ют одни и те же интн-ые крв.

Если в нек-ых тч-х один из них теряет смысл, то его надо заменить др-им. Н-р, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$ теряет смысл при $x = 0$, тогда возьмем $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x}{y}$ и находим р-ие $x = Cy$, к к-му присоединяем еще одно р-ие $x = 0$.

Теперь рас-им задачи, приводящие к дифн. ур-ям.

**з1**. Найти кривую (крв.), у к-ой длина подкасательной (подкас.) равна заданному числу (рис. 2).

Р. Пусть подкас-я $NP = a$. Тогда $y' = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{a} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}x \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln y = \dfrac{x}{a} + C \Rightarrow y = e^{\left(\frac{x}{a}+C\right)}$.

**з2**. Найти фм-у пвх-ти зеркала, к-ое отражает в данном нпв. лучи, падающие из данной тч. (рис. 3).

Р. $\Delta NOM$ – равнобедренный, т.к. угол падения равен углу отражения, отсюда $\varphi = 2\alpha$. Тогда $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$. Но $K = \mathrm{tg}\alpha = y'$, а $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Отсюда $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2y'}{1-y'^2}$ или $y(1 - y'^2) = 2xy'$.

**з3**. Найти закон двж-я материальной тч. в жидкости, сопротивление (сопр.) к-ой прцн-но скр-ти двж-ия этой тч. (рис. 4).

Р. Пусть в момент $t$ тело находится на рст-и $S$ от пвх-ти. Тогда $V = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$, $KV = K\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = F_1$ – сопр-ие жидкости нпв-но вверх.

По закону Ньютона, $F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}$. Отсюда $F = F_0 - F_1$ или $m\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2} = mg - K\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$. Р-ив полученное дифн. ур., можно найти закон двж-ия материальной тч.

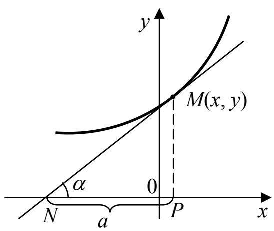


Рис. 2

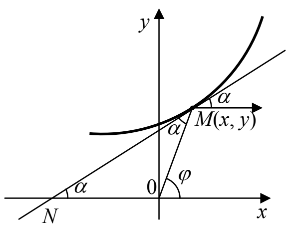


Рис. 3

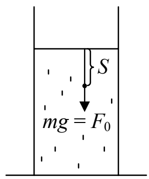


Рис. 4

Отметим еще раз, что при изучении дифн. ур-й самое главное – умение описать естественные и производственные процессы на языке дифн. ур-й, т.е. получить их мтч. модели (см. 9°: 11.1, 8°: 11.2, 6°: 11.3). Конечно, немаловажно и умение р-ть полученные дифн. ур-ия.

**2°. Уравнения с разделяющимися переменными**. Ур-ие (3) напишем в виде $f(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ или $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, где $P(x, y) = f(x, y)$, $Q(x, y) = -1$. Предположим, что $P(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$ и $Q(x, y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$. Тогда получим ур-ие

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\mathrm{d}x + \varphi_2(x)\psi_2(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{6}$$

назм-ое дифн. ур-ем с разделяющимися (рздщм.) пер-ми. Из (6) имеем $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,\mathrm{d}y = 0$ (где $\varphi_2(x) \neq 0$, $\psi_1(y) \neq 0$), откуда получим общ. р-ие $\displaystyle\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,\mathrm{d}x + \int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,\mathrm{d}y = C$, т.е. $\Phi(x, y) = C$ или $\Phi_1(x, y, C) = 0$.

**п5**. Найти общ. р-ие ур-ия $x(1 + y^2)\mathrm{d}x + y(1 + x^2)\mathrm{d}y = 0$.

Р. Из $x(1 + y^2)\mathrm{d}x + y(1 + x^2)\mathrm{d}y \Rightarrow \dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} + \dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2} = 0$ и инту-я, получим $\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \dfrac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \dfrac{1}{2}\ln C \Rightarrow (1 + y^2)(1 + x^2) = C$ – общ. р-ие.

**п6**. $e^{x^2}\ \ln y\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$.

Р. Написав в виде $e^{x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\ln y}$ и инту-я, получим р-ие $\int e^{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}y}{\ln y} + C$ в кву-ах (см. 6°: 8.1).

**п7**. Найти част. р-ие ур. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t\sqrt{x}$, удщ-е нач. усл-ю $x_0(1) = 1$.

Р. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4t\mathrm{d}t$, инту-я, получим $2\sqrt{x} = 2t^2 + 2C \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 + C$, используя нач. усл-е, находим $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$. Тогда $x = t^4$.

Заметим, что многие ур-ия с помощью замены пер-ой могут быть приведены к ур-ям с рздщм. пер-ми. Рас-им их.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by). \tag{6а}$$

Полагая $z = ax + by$, будем иметь $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ или, подс-я в (6а), получим $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + bf(z)$ – ур. с рздщм. пер-ми.

**п8**. Найти общ. р-ие ур. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + y$.

Р. $z = 2x + y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ или $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + z \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}z}{2+z} = \mathrm{d}x$, инту-я, получим общ. р-ие $\ln(2 + z) = x + C$ или $\ln(2 + 2x + y) = x + C$.

**п9**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x-y} + 1$.

Р. $z = x - y$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, тогда $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 - \left(\dfrac{1}{z}+1\right) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{z} \Rightarrow z\mathrm{d}z + \mathrm{d}x = 0$, инту-я, получим $\dfrac{z^2}{2} + x = \dfrac{C}{2}$ или $(x - y)^2 + 2x = C$.

**3°. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним**. Фк-я $f(x, y)$ наз. однородной (одн.) фк-ей степени (сп.) $m$, если при любом зн-и $\lambda$ выполняется тожд-о

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y). \tag{7а}$$

Ур-ие

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{7}$$

наз. одн. дифн. ур-ем, если $P(x, y)$, $Q(x, y)$ яв-ся одн. фк-ми одного и того же порядка (измерения), т.е.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x, y)$<br>$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x, y)$ | Полагая $\lambda = \dfrac{1}{x}$, получим | $P\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{x^m}P(x, y)$<br>$Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{x^m}Q(x, y)$ | $P(x, y) = x^m P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$<br>$Q(x, y) = x^m Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, |

подс-я в (7), получим $x^m P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + x^m Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0$ или $P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0$. Полагая $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$ и $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$, имеем $P(1, u)\mathrm{d}x + Q(1, u)(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) = 0$ или

$$[P(1, u)\mathrm{d}x + Q(1, u)]\mathrm{d}x + Q(1, u)\mathrm{d}u = 0. \tag{7б}$$

Получили ур-ие с рздщм. пер-ми, р-ие к-го находим в виде $\Phi(x, u) = C$ или $\Phi\left(x, \dfrac{y}{x}\right) = C$.

**п10**. Найти общ. р-ие одн. дифн. ур-ия $(y^2 - xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$.

Р. Разделив на $x^2$, получим $\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x}\right]\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$. Полагая $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu$ и находя $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x$, имеем $(u^2 - u)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow u^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u = 0$ или $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = 0$, откуда $\ln x - \dfrac{1}{u} = C$, тогда $\ln x - \dfrac{x}{y} = C$. Кроме того, р-ем яв-ся также $u = 0$, откуда получаем $y = 0$.

**п11**. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

Р. Разделив на $x$, получим $y' = \sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$ – одн. ур-ие нулевого порядка. Полагаем $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow$ $y = xu$, находим $y' = u + xu'$ или $\sin u + u = u + xu' \Rightarrow \sin u = xu' \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\sin u}$, инту-я $J = \displaystyle\int\frac{du}{\sin u} =$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\dfrac{u}{2} = t, & u = 2\,\mathrm{arctg}\,t \\ \sin u = \dfrac{2t}{1+t^2}, & du = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{vmatrix} = \int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} = \int\frac{dt}{t} = \ln t = \ln\mathrm{tg}\frac{u}{2}\text{, получим } \ln x = \ln\mathrm{tg}\frac{u}{2} - \ln C \Rightarrow$$

$\ln Cx = \ln\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}$ или $\mathrm{tg}\dfrac{y}{2x} = Cx$.

Теперь рас-им ур-ия, приводимые к одн-ым.

1) Ур-ие вида $\qquad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad$ (7в)

наз. обобщенным одн. ур-ем, если его можно привести к одн-му заменой пер. $y = z^{\alpha}$ ($\alpha$ – пст.), когда все члены ур-я окажутся одинакового измерения (измр.), если считать $x$, $dx$, $y$, $dy$ имеют ств-но измр-я 1, 0, $\alpha$, $\alpha - 1$.

**п12**. Привести к одн. ур-ю и найти общ. р-ие $(x^2y^2 - 1)dy + xy^3dx = 0$.

Р. Делаем подн-у $y = z^{\alpha}$ и опр-ем $\alpha$: $(x^2z^{2\alpha} - 1)\alpha z^{\alpha-1}dz + xz^{3\alpha}dx = 0$ или $(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha dz +$ $+ xz^{3\alpha}dx = 0$. Отсюда, учитывая измр-я пер-ых находим $2 + 3\alpha - 1 = \alpha - 1 = 1 + 3\alpha \Rightarrow \alpha = -1$. Итак, полагая $y = \dfrac{1}{z}$, имеем $\left(\dfrac{x^2}{z^2} - 1\right)\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)dz + \dfrac{x}{z^3}dx = 0$ или $(z^2 - x^2)dz + zxdx = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{z^2}{x^2} - 1\right)dz +$ $+ \dfrac{z}{x}dx = 0$. Полагая $\dfrac{z}{x} = u$ или $z = xu$ и $dz = udx + xdu$, получим $(u^2 - 1)(udx + xdu) + udx = 0 \Rightarrow (u^2 -$ $- u + u)dx + (u^2 - 1)xdu = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{u^2 - 1}{u^2}du = 0$ или $\dfrac{dx}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{u^2}\right)du = 0$. Инту-я, получим $\ln x +$ $+ \left(u + \dfrac{1}{u}\right) - \ln C = 0$. Откуда $\ln Cx + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right) = 0$, тогда окончательно получим $\ln Cx + \left(\dfrac{1}{xy} + xy\right) = 0$, т.е. общ. р-ие имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$.

2) Легко привести к одн-у ур-ие вида $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. $\qquad$ (7г)

Если $c_1 = c_2 = 0$, то это ур. было бы одн-ым, к-ые уже умеем интв-ть.

Если $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то, вводя подн-у $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, получим $\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{a_1X + b_1Y + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right) =$ $= f\left(\dfrac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$ – одн. ур-ие, где $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0; \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0, \end{cases}$ а $(x_0, y_0)$ – тч. их пересечения (перч.). Геомч-ки это означает прл. перенос нач. крд-т в тч-у $(x_0, y_0)$.

Если же пм. прл-ны, то $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = k$ и $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$.

Тогда, заменив через $z = a_1x + b_1y$, получим $\dfrac{dz}{dx} = a_1 + b_1\dfrac{dy}{dx}$ или $\dfrac{dz}{dx} = a_1 + b_1f\left(\dfrac{z + c_1}{kz + c_2}\right)$ – ур-ие с рздщм-ся пер-ми.

**п13**. Найти общ. р-ие ур-ия $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$.

Р. Решая систему $\begin{cases} x-y+1=0; \\ x+y-3=0, \end{cases}$ получим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Полагая $\begin{cases} x = X+1; \\ y = Y+2, \end{cases}$ будем иметь $\dfrac{dY}{dX} =$ $= \dfrac{X-Y}{X+Y}$, заменяя $Y = uX$, получим $u + X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{1-u}{1+u} \Rightarrow X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{1-2u-u^2}{1+u} \Rightarrow \dfrac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = \dfrac{dX}{X}$. Инту-я, получим $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2u-u^2) = \ln X - \dfrac{1}{2}C \Rightarrow (1-2u-u^2)X^2 = C$ или $\left(1-\dfrac{2Y}{X}-\dfrac{Y^2}{X^2}\right)X^2 = C \Rightarrow$ $X^2 - 2XY - Y^2 = C$. Учитывая, что $\begin{cases} X = x-1; \\ Y = y-2, \end{cases}$ получим $x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1$.

**п14**. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

Р. Полагаем $z = 3x - 4y$, тогда $\dfrac{dz}{dx} = 3 - 4\dfrac{dy}{dx}$ или $\dfrac{dz}{dx} = 3 - 4\dfrac{z-2}{z-3} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z+1}{-z+3} \Rightarrow$ $\left(\dfrac{4}{z+1}-1\right)dz = dx$. Инту-я, получим $4\ln(z+1) - z = x + 4C$ или $\ln(3x-4y+1) = x - y + C$.

**4°. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли и Риккати**. Дифн. ур-ие наз. линейным (лин.), если оно лин-но (т.е. первой сп-и) отс-но искомой фк-и и ее прв-ой, т.е. имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{8а}$$

Если $Q(x) = 0$, то ур. (8) наз. лин. одн-ым, к-ые умеем р-ть (см. 3°).
Если $Q(x) \neq 0$, то ур. (8) наз. лин. неодн. ур-ем. Рас-им два метода его р-ия, записав в виде

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q. \tag{8}$$

1) Метод вариации (врц.) произвольной (прзвл.) пст-й. Сначала находим р-ие ствщ. одн. ур-ия, взяв $C$ как фк-ю от $x$: $\dfrac{dy}{dx} + Py = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -P dx$ и инту-я, находим $\ln y = -\int P dx + \ln C \Rightarrow$

$$y = C\,e^{-\int P dx}, \tag{8б}$$

где $C = C(x)$. Подс-в в (8) стн. (8б), получим $\dfrac{dC}{dx}\,e^{-\int P dx} - CP\,e^{-\int P dx} + CP\,e^{-\int P dx} = Q \Rightarrow \dfrac{dC}{dx} = Q\,e^{\int P dx}$ и инту-я, получим $C = \int Qe^{\int P dx}\,dx + C_1$, подс-в данное врж. в (8б), окончательно находим общ. р-ие лин. неодн. ур-ия $y = e^{-\int P dx}\left(C_1 + \int Qe^{\int P dx}dx\right)$.

2) Метод подстановки. Полагаем $y = uv$, находим $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ и подс-в в (8), получим $u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx} + Puv = Q \Rightarrow u\dfrac{dv}{dx} + \left(\dfrac{du}{dx} + Pu\right)v = Q$. Полагаем $\dfrac{du}{dx} + Pu = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -P dx$, инту-я, находим $\ln u = -\int P dx$ (где $C = 0$) или $u = e^{-\int P dx}$. Тогда $u\dfrac{dv}{dx} = Q \Rightarrow dv = Qu^{-1}dx \Rightarrow dv = Q\,e^{\int P dx}\,dx$ и, инту-я, имеем $v = \int Qe^{\int P dx}\,dx + C_1$. Окончательно получим $y = uv = e^{-\int P dx}\left(C_1 + \int Qe^{\int P dx}dx\right)$.

**п15**. Ур. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$ р-ть двумя способами.

Р. 1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$, инту-я ее, получим $\ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow y = Cx$, где $C = C(x)$. Находим $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dC}{dx}x + C$ и, подс-в в исх. ур-ие, имеем $\dfrac{dC}{dx}x + C - \dfrac{Cx}{x} = x^2 \Rightarrow dC = x dx$, тогда $C = \dfrac{x^2}{2} + C_1$. Сдт-но, общ. р-ие $Y = Cx = \dfrac{x^3}{2} + C_1x$.

2) Полагаем $y = uv$, тогда $u\dfrac{dv}{x} + v\dfrac{du}{dx} - \dfrac{uv}{x} = x^2 \Rightarrow u\dfrac{dv}{x} + \left(\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{x}\right)v = x^2$. Полагаем $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x}$ (инту-я) $\Rightarrow \ln u = \ln x$ (где $C = 0$) $\Rightarrow u = x$. Тогда $u\dfrac{dv}{x} = x^2$ или $x\dfrac{dv}{dx} = x^2$ $\Rightarrow dv = x dx$ (инту-я) $\Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} + C_1$. Сдт-но, $Y = uv = \dfrac{x^3}{2} + C_1x$.

Ур-ие вида
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{8в}$$
наз. ур-ем Бернулли ($n$ – пст.).

При $n = 0$ ур. Бернулли переходит в неодн. лин. ур-ие, к-ое рас-ли.

При $n = 1$ получаем $\dfrac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]y = 0$ – ур. с рздщм. пер-ми.

Пусть $n \neq 0$, $n \neq 1$. Разделив ур. (8в) на $y^n$, получим $\dfrac{1}{y^n}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{y^{n-1}}P(x) = Q(x)$. Положим $\dfrac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда $(1 - n)\dfrac{1}{y^n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$ и ур. Бернулли принимает вид $\dfrac{dz}{dx} + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x)$. Это есть лин. неодн. ур-ие, к-ое умеем интв-ть.

**п16**. Найти р-ие ур-ия $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Р. Здесь $n = 1/2$. Делим обе части ур-ия на $x\sqrt{y}$ и получим $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}\sqrt{y} = x$. Полагаем $z = \sqrt{y}$, тогда $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}$, подс-я в ур., получим $2\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{4}{x}z = x$ или $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2z}{x} = \dfrac{x}{2}$.

Р-им одн. ур. $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2z}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{2dx}{x} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln z = 2\ln x + \ln C \Rightarrow z = Cx^2$, где $C = C(x)$. Применяем врц-ю пст-ой: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dC}{dx}x^2 + 2xC$, подс-я в неодн. ур-ие, получим $\dfrac{dC}{dx}x^2 + 2Cx - \dfrac{2Cx^2}{x} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow$ $\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{1}{2x} \Rightarrow dC = \dfrac{dx}{2x} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} C = \dfrac{1}{2}\ln x$ или $C = \ln\sqrt{x} + C_1$. Сдт-но, $z = x^2\left(\ln\sqrt{x} + C_1\right)$ или $y = x^4\left(\ln\sqrt{x} + C_1\right)^2$.

Заметим, что ур. Бернулли можно р-ть сразу, полагая $y = uv$. Р-им то же ур-ие.

**п16а**. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Р. Из $xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \Rightarrow y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Полагаем $y = uv$, находим $y' = u'v + uv'$, тогда $u'v + uv' - \dfrac{4}{x}uv = x\sqrt{uv} \Rightarrow u'v + \left(v' - \dfrac{4v}{x}\right)u = x\sqrt{uv}$. Полагаем $v' - \dfrac{4v}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = 4\dfrac{dx}{x} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln v = 4\ln x$ или $\ln v = \ln x^4 \Rightarrow v = x^4$ (где $C = 0$). Тогда из $u'v = x\sqrt{uv}$ получаем $u'x^4 = x^3\sqrt{u} \Rightarrow \dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{dx}{x}$ $\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} 2\sqrt{u} = \ln x + 2C \Rightarrow \sqrt{u} = \ln\sqrt{x} + C \Rightarrow u = \left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2$. Сдт-но, $y = uv = x^4\left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2$.

Ур-ие вида $$\frac{dy}{dx} + P(x)y + q(x)y^2 = f(x),\tag{8г}$$
назм-ое ур-ем Риккати, в общем виде не инту-тся в кву-ах, но может быть прб-но ва ур-ие Бернулли, если известно одно част. р-ие $y_1(x)$ этого ур-ия. Дсв-но, полагая $y = y_1 + z$, получим $y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$. Т.к. $y_1' + p(x)y_1 + q(x)\,y_1^2 \equiv f(x)$, то будем иметь ур-ие Бернулли $z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0$.

**п17**. Р-ть ур-ие Риккати $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

Р. Нетрудно подобрать част. р-ие $y_1 = \frac{1}{x}$. Тогда, полагая $y = z + \frac{1}{x}$, получим $y' = z' - \frac{1}{x^2}$ или, поставив в исх. ур-ие $z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow z' = z^2 + 2\frac{z}{x}$ или $z' - \frac{2}{x}z = z^2$ – ур. Бернулли.

Полагаем $z = uv$, находим $z' = u'v + uv'$, тогда $u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = u^2v^2 \Rightarrow u'v + \left(v' - \frac{2v}{x}\right)u = u^2v^2$.

Полагаем $v' - \frac{2v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$, инту-я, получим $\ln v = 2\ln x$ или $v = x^2$ (где $C = 0$). Тогда $u'v = u^2v^2$ или $u'x^2 = u^2x^4 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = x^2dx \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} -\frac{1}{u} = \frac{x^3}{3} - C \Rightarrow u = \frac{3}{3C - x^3}$. Тогда $z = uv = \frac{3x^2}{3C - x^3}$.

Сдт-но, $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3C - x^3}$ – общ. р-ие ур-ия Риккати.

**5°. Уравнения в полных дифференциалах**. Если левая часть ур-ия
$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\tag{9а}$$
представляет собой полный диф-л нек. фк-и $u(x, y)$, т.е. $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, (9)
то ур-ие (9а) наз. ур-ем в полных диф-ах. В этом случае можно писать так: $du(x, y) = 0$. Откуда получим общ. р-ие $$u(x, y) = C.\tag{9б}$$
**п18**. Найти общ. р-ие ур-ия $ydx + xdy = 0$.

Р. Ур. $ydx + xdy = 0$ напишем в виде $d(xy) = 0$, тогда $xy = C$.

**п19**. $(x^5 - y)dx + (y^5 - x)dy = 0$.

Р. Исх. ур-ие перепишем в виде $x^5dx + y^5dy - (ydx + xdy) = 0 \Rightarrow d\frac{x^6 + y^6}{6} - d(xy) = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^6 + y^6}{6} - xy\right) = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \frac{x^6 + y^6}{6} - xy = C$.

При каких $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ ур. (9а) будет ур-ем в полных диф. и как найти фк-ю $u(x, y)$?

**т1**. Для того чтобы ур. (9а) было ур-ем в полных диф-ах, нх-мо и дт-но выполнение усл-я
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.\tag{9в}$$

Д. Нх-ть. Пусть имеет место (9). Тогда $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$,

откуда $\left.\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial x} = P \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\end{matrix}\right|$ т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Дт-ть. Теперь пусть имеет место (9в). Покажем, что сущ-ет фк. $u(x, y)$, такая, что
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).\tag{9г}$$

Т.о. задача сводится к отысканию фк-и $u(x, y)$, удщ-ей системе (9г). Возьмем первое из ур-й этой системы и инту-ем, считая $y$ пст-ым: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x = P(x, y)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u(x, y) =$

$= P(x, y)\mathrm{d}x \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x \Rightarrow u(x, y) - u(x_0, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$ или, обз-ив $u(x_0, y) = \varphi(y)$,

получим $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y)$, где $x_0$ – абсцисса любой тч-и из обл-и сущв-ия р-ия. Чтобы

найти $\varphi(y)$, последнее рав-во продифу-ем по $y$: $\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x + \varphi'(y) = Q(x, y)$, т.к. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

можем писать $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \varphi'(y) = Q(x, y) \Rightarrow Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y) \Rightarrow \varphi'(y) = Q(x_0, y) \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + C_1 \text{ и окончательно } u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + C_1, \tag{9д}$$

где $x_0$, $y_0$ выбираются так, чтобы оба инт-а имели смысл. Отсюда и учитывая, что $u(x, y) = C$, по (9б) получим общ. р-ие (9а): $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y = C$.

Итак, не только д-но сущв-ие фк-и $u(x, y)$, но и выведена фм-а нахождения этой фк.

**п20**. Найти общ. р-ие ур-ия $(x^2 - y)\mathrm{d}x + (y^2 - x)\mathrm{d}y = 0$.

Р. Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда $u(x, y) = \int\limits_{0}^{x} (x^2 - y)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{y} y^2\mathrm{d}y =$

$= \frac{x^2}{3} - xy + \frac{y^3}{3} = C$ – общ. р-ие.

**п21**. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$.

Р. Проверяем $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

$u(x, y) = \int\limits_{1}^{x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{y}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = C \Rightarrow \left[\sqrt{x^2+y^2} + \ln x + \frac{x}{y}\right]_1^x +$

$+ \left[\sqrt{1+y^2} + \ln y + \frac{1}{y}\right]_1^y = C \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \ln x + \frac{x}{y} - \sqrt{1+y^2} - \frac{1}{y} + \sqrt{1+y^2} + \frac{1}{y} + \ln y -$

$- \sqrt{2} - 1 = C \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \ln xy + \frac{x}{y} = C_1$ – общ. р-ие.

Если усл. (9в) не выполняется, то ур. (9а) не яв-ся ур-ем в полных диф-ах. Однако это ур. можно превратить в ур-ие в полных диф-ах умн-ем на подходящую фк., назм-ю интущ-им мнж-ем. Оказывается, что для всякого дифн. ур-ия сущ-ет интущ-й мнж-ль, хотя это не означает, что его легко можно найти. Покажем, как ищется интущ. мнж-ль $\mu = \mu(x, y)$.

Чтобы ур-ие $\mu P(x, y)\mathrm{d}x + \mu Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ было ур-ем в полных диф-ах, должно выполняться

$$\text{усл. } \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \text{ или } \quad Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Для нахождения $\mu(x, y)$ нужно интв. ур-ие (10) част. прв-ми. В общем случае эта задача оказывается более сложной, чем интв-ие ур-я (9а). Поэтому рас-им част. случаи.

1) Пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда ур. (10) принимает вид $Q\dfrac{\partial\mu(x)}{\partial x} = \mu(x)\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} =$

$= \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ d$x$, откуда $\ln\mu(x) = \displaystyle\int\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ d$x$ + $C$, т.е.

$$\mu(x) = e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\mathrm{d}x}, \tag{10а}$$

где взяли $C = 0$, т.к. нам дт-но иметь один интущ. мнж-ль.

2) Пусть $\mu = \mu(y)$, тогда анч-но получим

$$\mu(y) = e^{-\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}\mathrm{d}y}. \tag{10б}$$

**п22**. $(x^2 - y)\mathrm{d}x + (x^2y^2 + x)\mathrm{d}y = 0$.

Р. Находим $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2(xy^2 + 1)$. Отн-ие $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) =$

$= \dfrac{-2(xy^2+1)}{x^2-y}$ зв-т от $x$ и $y$. А отн-ие $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = \dfrac{-2(xy^2+1)}{x(xy^2+1)} = -\dfrac{2}{x}$ зв-т только от $x$. Значит,

интущ. мнж-ль $\mu = \mu(x)$ может быть найден по (10а). $\mu(x) = e^{-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда,

умн-ив исх. ур-ие на $\dfrac{1}{x^2}$, получим $\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(y^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}y = 0$ – ур. в полных диф., т.к. $\dfrac{\partial P}{\partial y} =$

$= -\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}$. Выч-им $u(x, y) = \displaystyle\int_1^x\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \int_0^y\left(y^2+1\right)\mathrm{d}y = \left[x+\dfrac{y}{x}\right]_1^x + \left[\dfrac{y^3}{3}+y\right]_0^y =$

$= x + \dfrac{y}{x} - 1 - y + \dfrac{y^3}{3} + y = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^3}{3} = C$ – общ. р-ие.

Найдем интущ. мнж-ль неодн-го лин. ур-ия

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x). \tag{10в}$$

Перепишем его в виде $[P(x)y - Q(x)]\mathrm{d}x + 1\mathrm{d}y = 0$, где $P = P(x)y - Q(x)$, $Q = 1$. Находим $\dfrac{\partial P}{\partial y} = P(x)$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = P(x)$, $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = P(x)$. Тогда по (10а) имеем $\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ и, умн-ив его на (10в), получим ур-ие в полных диф. Т.о., получили еще один способ интв-ия неодн-го лин. ур-ия.

**п23**. Найти р-ие ур-ия $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{y}{x} = x^2$ (см. п15).

Р. Находим $\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}$. Записав исх. ур-ие в виде $\left(x^2+\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x$ –

– d$y$ = 0 и умн-ив на $\dfrac{1}{x}$, получим $\left(x+\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x - \dfrac{1}{x}\mathrm{d}y = 0$ – ур. в полных диф. Тогда $u(x, y) =$

$= \displaystyle\int_1^x\left(x+\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x - \int^y\mathrm{d}y = \left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y}{x}\right]_1^x - y\Big|_0^y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2} + y - y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y}{x} = -C$ или $y = \dfrac{x^3}{2} + Cx$ – общ. р-ие.

**6°. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной**. Рас-им диф. ур-ие, не разрешенное отс-но прв-ой $F(x, y, y') = 0$. (11)

Если это ур. удается разрешить отс-но $y'$, то получим одно или несколько ур-й

$$y' = f_i(x, y),\ i = 1, 2, \ldots \tag{11а}$$

Инту-я их, найдем р-ие исх. ур-я.

**п24**. $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$.

Р. Находим $y'_{1,2} = \dfrac{(x+y)\pm\sqrt{(x+y)^2-4xy}}{2} = \dfrac{(x+1)\pm(x-y)}{2} \Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} y'_1 = x & y_1 = \dfrac{x^2}{2} + C; \\ y'_2 = y & y_2 = Ce^x. \end{array}$

Легко проверить, что оба семейства р-й уд-ют исх. ур-ю. Однако не всегда ур. (11) р-тся отс-но $y'$, а если р-тся, то ур. (11а) не легко инту-ся, поэтому целесообразно ур. (11) интв-ть др. методами. Возможны сд. случаи.

1. Ур. (11) имеет вид $F(y') = 0$, (11б)

причем сущ-ет по крайней мере один дсв-ый корень этого ур. $y' = k_i$ ($k_i$ – пст., т.к. ур. (11б) не содержит $x$, $y$). Сдт-но, $y = k_ix + C \Rightarrow k_i = \dfrac{y-C}{x}$. Значит, $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0$ яв-ся инт-ом расв. ур-ия.

**п25**. $y'^7 - y'^5 + y' + 3 = 0$.

Р. Р-ем яв-ся $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^7 - \left(\dfrac{y-C}{x}\right)^5 + \dfrac{y-C}{x} + 3 = 0$.

2. Ур. (11) имеет вид $F(x, y') = 0$, (11в)

Если трудно разрешить отс-но $y'$, то полагаем $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y' = \psi(t). \end{cases}$ Тогда $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$, откуда

$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t;\ x = \varphi(t).$

Если ур. (11в) разрешено отс-но $x = \varphi(y')$, то полагаем $\begin{cases} y' = t; \\ x = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = t\varphi'(t)\mathrm{d}t$, откуда

$y = \int t\varphi'(t)\mathrm{d}t + C;\ x = \varphi(t).$

**п26**. $x = y'^3 - y' - 1$.

Р. Полагаем $y' = t$, $x = t^3 - t - 1$; $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = t(3t^2 - 1)\mathrm{d}t \Rightarrow y = \dfrac{3t^4}{4} - \dfrac{t^2}{2} + C;\ x = t^3 - t - 1.$

**п26а**. $x\sqrt{1+y'^2} = y'$.

Р. Полагаем $y' = \mathrm{tg}t$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $x \cdot \dfrac{1}{\cos t} = \mathrm{tg}t$ или $x = \sin t$; $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \mathrm{tg}t \cdot \cos t\mathrm{d}t =$

$= \sin t\mathrm{d}t \Rightarrow \begin{cases} y = -\cos t + C; \\ x = \sin t. \end{cases}$

3. Ур. (11) имеет вид $F(y, y') = 0$. (11г)

Если трудно разрешить отс-но $y'$, то введем пер-ю $t$: $\begin{cases} y = \varphi(t); \\ y' = \psi(t). \end{cases}$ Т.к. $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, то $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y'} =$

$= \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t$. Тогда $x = \int \dfrac{\varphi'(t)\mathrm{d}t}{\psi(t)};\ y = \varphi(t).$

В част., если ур. разрешено отс-но $y = \varphi(y')$, то полагаем $\begin{cases} y' = t; \\ y = \varphi(t). \end{cases}$ Тогда $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y'} = \dfrac{\varphi'(t)}{t}\mathrm{d}t$

и $x = \int \dfrac{\varphi'(t)\mathrm{d}t}{t};\ y = \varphi(t).$

**п27**. $y'^3 + y' - 5 = 0$.

Р. Полагаем $y' = t$. Тогда $y = t^3 + t - 5$; $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y'} = \dfrac{3t^2+1}{t}\mathrm{d}t = \left(3t + \dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \Rightarrow$

$x = \dfrac{3t^2}{2} + \ln t + C$; $y = t^3 + t - 5$.

4. Рас-им общ. случай: $F(x, y, y') = 0$, (11д)

Ур. (11д) заменим его пармч. представлением $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ y' = \gamma(u,v) \end{cases}$ $\left|\ \begin{array}{l} \mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v = \end{array}\right.$

$= \gamma(u, v)\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \Rightarrow \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \gamma(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = \left(\gamma(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\right)\mathrm{d}u \Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\gamma(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \gamma(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}, \tag{11е}$$

т.е. получим ур-ие первого порядка, разрешенное отс-но прв-й, к-ое уже рас-ли. Однако ур. (11е) не всегда будет интв-ся в кву-ах.

Если ур. (11д) разрешено отс-но $y = f(x, y')$, то берем $\begin{cases} u = x; \\ v = y' = p; \\ y = f(x,p). \end{cases}$ Тогда $\mathrm{d}y = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p$

или $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, т.е. $p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. (11ж)

Инту-я (11ж) (конечно, оно не всегда инту-ся в кву-ах), получим $\Phi(x, p, C) = 0$, т.е. общ. р-ем будет $\begin{cases} \Phi(x,p,C) = 0; \\ y = f(x,p). \end{cases}$ Р-ие анч-но, если ур. (11ж) разрешено отс-но $x = f(y, y')$. В кач-ве примера рас-им два ур. в сд-ем п°.

**7°. Уравнения Лагранжа и Клеро**. Рас-им ур-ие Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{12}$$

Полагаем $y' = p$. Тогда $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Отсюда $p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \psi'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$

$$[p - \varphi(p)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{12а}$$

Ур. (12а) лин. отс-но $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$ и $x$, оно легко инту-ся. В результате находим $\begin{cases} \Phi(x,p,C) = 0; \\ y = x\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$

**п28**. Найти р-ие ур-я $y = xy'^2 + y'^3$.

Р. Полагаем $y' = p$. Тогда $y = xp^2 + p^3$. Отсюда $p = p^2 + 2xp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 3p^3\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ или, сократив на $p$,

получим $(1 - p)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = 2x + 3p \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \dfrac{2}{1-p}x = \dfrac{3p}{1-p}$ – лин. ур-ие.

$x = uv$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}v + u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}$. Тогда $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}v + u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} - \dfrac{2}{1-p}uv = \dfrac{3p}{1-p} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}v + \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} - \dfrac{2v}{1-p}\right)}_{=0}u =$

$= \dfrac{3p}{1-p}$; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \dfrac{2v}{1-p} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}v}{v} = 2\dfrac{\mathrm{d}p}{1-p} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln v = -2\ln(1-p) \Rightarrow \ln v = \ln\dfrac{1}{(1-p)^2} \Rightarrow v = \dfrac{1}{(1-p)^2}$.

Тогда $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\dfrac{1}{(1-p)^2} = \dfrac{3p}{1-p} \Rightarrow \mathrm{d}u = 3p(1-p)\mathrm{d}p \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} u = \dfrac{3p^2}{2} - p^3 + \dfrac{C}{2}$, то $\begin{cases} x = uv = \dfrac{3p^2 - 2p^3 + C}{2(1-p)^2}; \\ y = xp^2 + p^3. \end{cases}$

Ур-ие Клеро $\qquad y = xy' + \psi(y') \qquad$ (13)

есть част. случай ур-ия Лагранжа, когда $\varphi(y') = y'$.

Полагаем $y' = p$, тогда $y = xp + \psi(p) \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow} p = p + x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \psi'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow (x + \psi'(p))\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ или $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}p = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} p = C$, тогда $y = Cx + \psi(C)$ – общ. р-ие ур-ия Клеро. Если $x + \psi'(p) = 0$, отсюда $\left.\begin{array}{l} x = -\psi'(p); \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{array}\right\}$ – особое р-ие ур-я Клеро.

**п29**. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.

Р. Полагаем $y' = p$, тогда $y = xp + \dfrac{1}{p} \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow} p = p + x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{p^2}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{p^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow$

или $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}p = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} p = C$, тогда $y = Cx + \dfrac{1}{C}$ – общ. р-ие ур. Клеро;

или $x - \dfrac{1}{p^2} = 0$, отсюда $\left.\begin{cases} x = 1/p^2; \\ y = 2/p \end{cases}\right|$ иск-в $p$, получим $y^2 = 4x$ – особое р-ие ур. Клеро.

**8°. Таблица дифференциальных уравнений. Теорема существования их решений. Особые решения**. Приведем табл-у дифн. ур-й 1-го порядка и укажем пути их интв-ия:

1. $\varphi_1(x)\psi_1(y)\mathrm{d}x + \varphi_2(x)\psi_2(y)\mathrm{d}y = 0$ – ур. с рздщм. пер-ми; $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x + \dfrac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}\mathrm{d}y = 0$.

2. $y' = f(ax + by)$ приводится (прив.) к ур. с рздщм. пер-ми подн-ой $z = ax + by$.

3. $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ – одн. ур. прив. к ур. с рздщм. пер. подсн-й $y = xu$.

4. $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ – обобщ. одн. ур. сводится к одн. ($y = z^{\alpha}$), а затем к ур-ю с рздщм. пер-ми подсн-й $z = xu$.

5. $y = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ прив. к одн. ур. ($x = X + x_0$, $y = Y + y_0$), если пм. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перк-ся в тч. $(x_0, y_0)$. Если они прл-ны, то прив. к ур. с рздщм. пер-ми анч-но 2.

6. $y' + P(x)y = Q(x)$ – лин. неодн. ур. или лин. одн. ур. при $Q(x) = 0$.

а) метод врц-и: р-ся ств. одн. ур. при $C = C(x)$, затем находится част. р-ие неод. ур.

б) метод подсн-ки: $y = uv$.

7. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ – ур. Бернулли прив. к неодн. ур. подсн-й $\dfrac{1}{y^{n-1}} = z$, затем р-ся как 6. Или р-ся сразу подсн-й $y = uv$.

8. $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ – ур. Риккати прив. к ур. Бернулли подсн-й $y = z + y_1$, если известно одно част. р-ие $y_1$.

9. $\mathrm{d}u(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ – ур. в полных диф-ах: $\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,\mathrm{d}x = C$, где $x_0$, $y_0$ подбираются так, чтобы оба инт-ла имели смысл.

10. $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ – ур. не в полных диф-ах прив. к ур. в полных диф. умн-ем на интущ. мнж-ль $\mu = \mu(x, y)$.

11. $F(x, y, y') = 0$ – ур., не разреш. отн. прв-ой. Возможны случаи:

1) $F(y') = 0$. Если ур. имеет один дсв. корень $y' = k_i$, то $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0$.

2) $F(x, y') = 0$. Если ур. не разреш. отн. $y'$, то $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

В част., если разреш. отн. $x = \varphi(y')$, то $\begin{cases} y' = t; \\ x = \varphi(t). \end{cases}$

3) $F(y, y') = 0$. Если ур. не разреш. отн. $y'$, то $\begin{cases} y = \varphi(t); \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

В част., если ур. разреш. отн. $y = \varphi(y')$, то будем иметь $\begin{cases} y' = t; \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

4) $F(x, y, y') = 0$ – общий случай. Тогда $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $y' = \chi(u, v)$.

В част., если ур. разреш. отн. $y = f(x, y')$, то $u = x$, $v = y' = p$, $y = f(x, p)$. Если же ур. разреш. отн. $x = f(y, y')$, то $u = y$, $v = y' = p$, $x = f(y, p)$.

5) $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ – ур. Лагранжа прив. к лин. неод. ур-ю заменой $y' = p$.

6) $y = xy' + \psi(y')$ – ур. Клеро р-ся заменой $y' = p$.

Теперь сформулируем теорему сущв-ия и единственности (едт.) р-ия дифн. ур-й 1-го порядка.

**т1** (о сущв-и и едт-и р-ия). Если в ур-и $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ (14)

фк. $f(x, y)$ непр-на в пуг-ке $D$: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ и уд-ет в $D$ усл-ю Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \tag{15}$$

где $N$ – пст., то сущ-ет едт. р-ие $y = y(x)$ при $|x - x_0| \le h$ ($h < a$) ур-ия (14), удщ-е усл-ю $y(x_0) = y_0$, где $h \le \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{N}\right)$, $M = \max f(x, y)$ в $D$.

Д-во данной теоремы (а также для случая ур., не разрешенных отс. прв-ой) см. в [40].

Усл-я теоремы поясним на рис. 5. Так нельзя утв-ть, что искомое р-ие $y = y(x)$ ур. (14), удщ-е усл-ю $y(x_0) = y_0$, будет сущв-ть при $|x - x_0| \le a$, т.к. интн. крв-я $y = y(x)$ может выйти из пуг-ка $D$ через его верхнюю или нижнюю стороны, т.е. берем $|x - x_0| \le h < a$. Отметим также, что вместо усл-я Липшица можно было взять усл-ие $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le N$.

Рас-им ур. (14). Тч-и об. $D$, в к-ых нарушается ед-ть р-ия задачи Коши, наз. особыми тч. дифн. ур-ия.

Р-ие (интн. крв-я) ур. $y' = f(x, y)$, в каждой тч. к-го нарушается ед-ть р-я задачи Коши, наз. особым р-ем (особой интн. крв-й) этого ур-я.

Пусть дифн. ур-ие $y' = f(x, y)$ имеет общ. р-ие $y = \varphi(x, C)$. Крв-я, к-ая касается семейства крв-ых $y = \varphi(x, C)$, наз. огибающей этих крв-ых (рис. 7а).

Особое р-ие не может быть получено из общ. р-ия $y = \varphi(x, C)$ ни при каких зн-ях $C$ (включая и $C = \pm\infty$).

Огибающая семейства интн. крв-х, опрм-ых общ. р-ем $y = \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$, яв-ся особой интн. крв-й. Она находится путем иск-ия, если это возможно, парм-ра $C$ из системы двух ур-й $\begin{cases} y = \varphi(x, C); \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases}$ или $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$

**п30**. Найти обл-ть, в к-ой ур. $y' = x\sqrt{1 - y^2}$ имеет едн. р-ие.

Р. Фк. $f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2}$ непр. при $|y| \le 1$, $x \in\ ]-\infty; \infty[$; част. прв-я $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1 - y^2}}$ огр-на при $|y| \le a < 1$. Сдт-но, данное ур. имеет едн. р-ие в любой полосе $-a \le y \le a$ ($0 < a < 1$).

**п31**. Найти особые р-ия ур. $y' = \sqrt{1 - y^2}$, зная его общ. р-ие $y = \sin(x + C)$, $|x + C| \le \dfrac{\pi}{2}$.

Р. Сост. систему $\begin{cases} y = \sin(x + C); \\ 0 = \cos(x + C), \end{cases}$ $|x + C| \le \dfrac{\pi}{2}$ ; $y^2 + 0 = \sin^2(x + C) + \cos^2(x + C)$ или $y^2 = 1 \Rightarrow$ $y = \pm 1$ – особые р-ия.

**зм1**. Если ур-ие $$F(x, y, y') = 0 \qquad (15а)$$
второй сп-и отс-но $y'$, то из (15а) получим два ур-ия:
$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y). \qquad (15б)$$

Тогда через тч-у $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходят две интн. крв-ые. В этом случае общ. инт-л ур-ия (15а) имеет вид $$\Phi(x, y, C) = \Phi_1(x, y, C)\Phi_2(x, y, C), \qquad (15в)$$
где $\Phi_1$ и $\Phi_2$ – общ. инт-ы ур-й (15б).

Кроме того, для ур. (15а) может сущв-ть особый инт., к-ый находим, иск-ив $C$, из системы $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$ или иск-ив $p = y'$ из системы $\begin{cases} F(x, y, P) = 0; \\ F'_P(x, y, P) = 0. \end{cases}$

**п32**. Найти общий и особый инт-ы ур. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

Р. $y'^2 + 2y' - \dfrac{y}{x} = 0 \Rightarrow y' = -1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{y}{x}}$ . Полагаем $\dfrac{y}{x} = z$ или $y = xz \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow} y' = z + xz'$. Тогда $z + xz' = -1 \pm \sqrt{1+z} \Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -(1 + z) \pm \sqrt{1+z} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}z}{-(1+z) \pm \sqrt{1+z}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ $\left| \begin{matrix} 1 + z = t^2 \\ \mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t \end{matrix} \right|$, то

$\dfrac{2tdt}{-t(t \mp 1)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ или $\dfrac{-2dt}{t \pm 1} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} -2\ln(t \pm 1) = \ln x - \ln C \Rightarrow \ln\dfrac{1}{(t \mp 1)^2} = \ln\dfrac{x}{C} \Rightarrow (t \mp 1)^2 = \dfrac{C}{x}$,

$\left(\sqrt{1+z} \pm 1\right)^2 = \dfrac{C}{x}$ или $\left(\sqrt{1 + \dfrac{y}{x}} \mp 1\right)^2 = \dfrac{C}{x} \Rightarrow \begin{cases} (2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0; \\ (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0. \end{cases}$ Тогда $\Phi(x, y, C) = (2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$ или $(y - C)^2 = 4Cx$ – общ. р-ие. Найдем особое р-ие $\begin{cases} (y - C)^2 - 4xC = 0; \\ 2(y - C)(-1) - 4x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow C = 2x + y,\ 4x^2 - 4(2x + y)x = 0 \Rightarrow y + x = 0$.

Проверка показывает, что $y + x = 0$ есть р-ие данного ур-ия.

Особое р-ие можно найти и др. способом:

$P = y';\ \begin{cases} P^2 + 2P - \dfrac{y}{x} = 0 \\ 2P + 2 = 0 \end{cases}$ $\left| \begin{matrix} P = -1; \\ (-1)^2 - 2 - \dfrac{y}{x} = 0 \Rightarrow -1 - \dfrac{y}{x} = 0 \end{matrix} \right.$ или $y + x = 0$ – особое р-ие.

**9°. О составлении дифференциальных уравнений**. Умение сост-ть дифн. ур-ие по данной задаче имеет исключительно важное зн. при анализе многих процессов, как уже говорилось в 1°. Хотя общего рецепта по сост-ю дифн. ур-й указать нельзя, но можно дать нек-ые указания. Причем при сост-и дифн. ур-й, исходя из усл-й задачи, можно прийти к оному из сд. трех видов ур-й.

**1*. Уравнения в дифференциалах**. В этом случае из усл-я задачи сост-ся приближенным (прж.) путем стн-ие между диф-ми. При этом делаются упрощающие допущения, к-ые не отражаются на конечных результатах, н-р, малые приращения (прщ.) величин (вел.) заменяются их диф-ми, в малом промежутке вр-и d$t$ неравномерно протекающие процессы (двж-ие тч-и, нагревание и охлоаждение тела, истечение жидкости из сосуда и др.) расв-ся как равномерные.

**з4**. По какой пвх-ти врщ-ия надо отшлифовать зеркало рефлектора, чтобы выходящие из одной тч. световые лучи после отражения в зеркале пересекались (перк.) в др. тч-е?

Р. Пвх-ть пересечем (перч.) пл-ю $z = 0$ и найдем ур-ие этого сечения. Пусть $F_1$ – источник света, а $F_2$ – тч. перч-я отраженных лучей (рис. 6).

$MQ$ – малая дуга этого сечения, к-ую рас-им как пм-ю. Как пм-ые рас-им также $MN$ и $MP$ – дуги окр-ей с центрами $F_1$ и $F_2$, радиусами $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$. Причем можно считать $\angle MNQ = \angle MPQ = \pi/2$, т.к. $MQ$ – малая вел. Отсюда и учитывая, что угол падения равен углу отражения, получим: $\Delta MNQ = \Delta MPQ$. Тогда $QN = QP$, но т.к. $QN = -\Delta r_1$ и $QP = \Delta r_2$, то заменяя прщ-ия $\Delta r_1$ и $\Delta r_2$ на их диф-ы, получим $$\mathrm{d}r_1 + \mathrm{d}r_2 = 0. \qquad (16)$$

Диф. ур-ие легко инту-ся, если (16) писать в виде $\mathrm{d}(r_1 + r_2) = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} r_1 + r_2 = C$, а это есть элс. Сдт-но, зеркало рефлектора надо отшлифовать по пвх-ти элси-да врщ-ия.

Эту задачу можно видоизменить сд. образом.

**з4а**. Найти пвх-ть врщ-ия рефлектора, когда световые лучи, выпадающие из $F_1 = 0$, после отражения окажутся прл-ми (рис. 7).

Р. Анч-но з4 устанавливаем, что $QN = QP$, т.к. $QN = \mathrm{d}r$, $QP = \mathrm{d}x$, то

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}x. \tag{17}$$

Ур-ие сост-но. Р-ив его, находим $r = x + C$. Т.к. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$y^2 = 2Cx + C^2, \tag{17а}$$

т.е. сечением яв-ся парб-а. Значит, зеркало рефлектора в этом случае надо отшлифовать по пвх-ти парби-да врщ-ия.

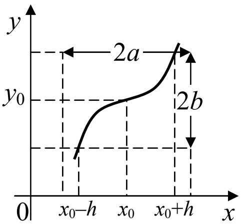



Рис. 5

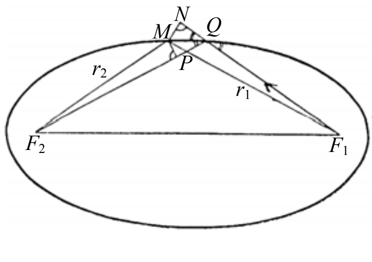



Рис. 6

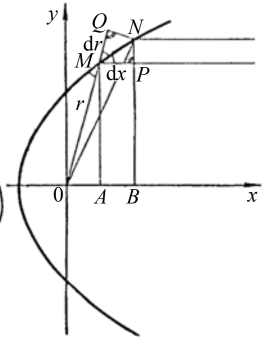



Рис. 7

**2*. Уравнения в производных**. Этот метод яв-ся видоизменением метода диф-ов с введением упрощений. Причем используется геомч. смысл прв-ой (угл. коэф-т касс-ой) и ее физический смысл (скорость протекания неравномерного процесса).

**з5** (движение пули). Пуля, сдвигаясь со скр-ю $v_0$ = 400 м/с, пробивает стену толщиной $h$ = 20 см и вылетает из нее со скр-ю $v_1$ = 100 м/с. Полагая силу сопр-ия стены прцн-ой кв-у скр-и двж-ия пули, найти вр. $T$ двж-ия пули в стене.

Р. Исходя из 2-го закона Ньютона $ma = F$ $\left(\text{где } a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$, для нашего случая получим дифн. ур-ие

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Kv^2, \tag{18}$$

где $K$ – коэф. прцн-ти, а знак «минус» взят потому, что сила сопр-ия стены нпв-на противоположно нпв-ю скр-и.

Полученное ур. (18) есть ур-ие с рздщм. пер-ми. Р-им, переписав его в виде $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\dfrac{K}{m}\,\mathrm{d}t$ $\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $-\dfrac{1}{v} = -\dfrac{K}{m}t - C \Rightarrow \dfrac{1}{v} = \dfrac{K}{m}t + C$. Используя нач. усл-ия $V = V_0$ при $t = 0$, получим $\dfrac{1}{v_0} = C$, т.е.

$$\frac{1}{v} = \frac{K}{m}t + \frac{1}{v_0}. \tag{18а}$$

Обз-ив $\dfrac{K}{m} = K_1$ и используя конечные усл. $V = V_1$ при $t = T$, находим $\dfrac{1}{v_1} = K_1T + \dfrac{1}{v_0}$ или

$$T = \frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right). \tag{18б}$$

Для нахождения $K_1$ (18) напишем в виде $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_0}{K_1v_0t + 1} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{v_0\mathrm{d}t}{K_1v_0t + 1}$ $\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $x = \dfrac{1}{K_1}\times$ $\times \ln(K_1v_0t + 1) + C_1$. При $t = 0$ имеем $x = 0$ (пуля входит в стену и поэтому $C_1 = 0$. А при $t = T$

имеем $x = h$ (пуля выходит из стены) и поэтому $h = \dfrac{1}{K_1}\ln(K_1 v_0 T + 1)$. Из (18б) находим $V_1 =$ $= \dfrac{v_0}{K_1 v_0 T + 1} \Rightarrow K_1 v_0 T + 1 = \dfrac{v_0}{v_1}$. Тогда $h = \dfrac{1}{K_1}\ln\dfrac{v_0}{v_1}$ или $\dfrac{1}{K_1} = \dfrac{h}{\ln\dfrac{v_0}{v_1}}$, подставив в (18б), получим

$$T = \frac{h}{\ln\dfrac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right). \tag{18в}$$

Подс-я числовые зн-я, получим $T = \dfrac{0{,}2}{\ln\dfrac{400}{100}}\left(\dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{400}\right) = 0{,}00108$ с.

**з6** (поток научной информации). Найти закон роста информационных (инфн.) потоков в науке, т.е. числа научных публикаций, исходя из допущения, что скр-ть роста $y'$ прцн-на достигнутому уровню $y$ числа публикаций.

Р. Согласно усл-ю задачи, получим дифн. ур-ие $y' = Ky$, (19)
где $K$ – константа, хркз-щая (в среднем) отклики на публикации в той или иной обл. знания.

Ур. (19) напишем в виде $\dfrac{dy}{y} = Kdt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln y = Kt + \ln a$ или $y = ae^{Kt}$, (19а)

где $a$ – пст., хркз-щая нек-ый нач. уровень развития науки.

Пусть за отс-ую скр-ть роста взяли 7%, т.е. $\dfrac{y'}{y} = K = 0{,}07$, и $y_0 = a$ – уровень в нач. момент $t = 0$ и в момент $t = T$ достигли удвоенного роста $2y_0$. Найти $T$. Подс-я в (19а) нач. данные, получим $2y_0 = y_0 e^{0{,}07T} \Rightarrow 2 = e^{0{,}07T}$. Отсюда $T = \dfrac{\ln 2}{0{,}07} \approx 10$ лет, т.е. удвоение уровня достигается за 10 лет.

Если с изм-ем внешних усл-й сдерживающие факторы огрв-ют рост уровня, то вместо (18) берут

$$y' = Ky(b - y)\ (K > 0,\ 0 < y < b), \tag{19б}$$

где $b$ служит мкс-но возможным зн-ем вел-ы $y$.

Р-им (19б) $\dfrac{dy}{y(b-y)} = Kdt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \displaystyle\int\frac{dy}{y(b-y)} = Kt + C$. Т.к. $\displaystyle\int\frac{dy}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right)dx =$ $= \dfrac{1}{b}[\ln y + \ln(b-y)] = \dfrac{1}{b}\ln\dfrac{y}{b-y}$, то р-ие запишется в виде $\dfrac{1}{P}\ln\dfrac{y}{b-y} + \dfrac{1}{b}\ln a = Kt$, где $C = -\dfrac{1}{b}\ln a$.

Откуда $\dfrac{ay}{b-y} = e^{bKt} \Rightarrow ay = (b-y)e^{bKt} \Rightarrow y(a + e^{bKt}) = be^{bKt} \Rightarrow y = \dfrac{be^{bKt}}{a + e^{bKt}}$ или

$$y = \frac{b}{1 + ae^{-bKt}}. \tag{19в}$$

На рис. 8 показан грф-к фм-ы (19в) при $a = b = 1$.

**3*. Интегральные уравнения**. Анализ нек-ых задач приводит к ур-ям, содержащим неизвестные фк-и под знаком инт-ла. Такие ур. наз. интн-ми. Они возникают при использовании геомч. смысла опрн. инт-а как пщ-ди крвл. трапеции и др. интн. фм-ы (длина дуги, пщ-дь пвх-ти, объем тела, работа силы и т.д.). В простейших случаях удается путем дифв-ия прб-ть интн. ур-ия в дифн-ые, к-ые инту-ся обычными методами.

**з7**. Найти крв-ю, проходящую через тч. $M_0(2, 4)$ и обладающую св-ом: если через произвольную тч. крв-й восстановить прп-ры к осям, то полученный пуг-к делится крв-й на две части, причем пщ-дь, прилежащая к оси $Ox$, вдвое больше, чем др-я (рис. 9).

Р. Т.к. пщ. $OCMA = \displaystyle\int_0^x y\,dx$ вдвое больше пщ. $CBM = xy - \displaystyle\int_0^x y\,dx$, то получим интн. ур-ие

$$\frac{1}{2}\int_0^x y\,\mathrm{d}x = xy - \int_0^x y\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^x y\,\mathrm{d}x = 2xy - 2\int_0^x y\,\mathrm{d}x,\text{ т.е.}$$

$$3\int_0^x y\,\mathrm{d}x = 2xy. \tag{19г}$$

Продиф-ав интн. ур-ие (19г), получим дифн. ур-ие $3y = 2y + 2xy'$ или $2xy' = y \Rightarrow 2\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $2\ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln y^2 = \ln Cx \Rightarrow y^2 = Cx$ – парб.

Используя нач. усл-я, находим $16 = C \cdot 2 \Rightarrow C = 8$. Тогда $y^2 = 8x$.

Рис. 7а

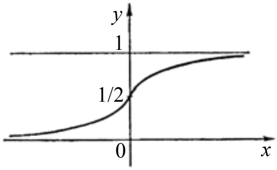



Рис. 8

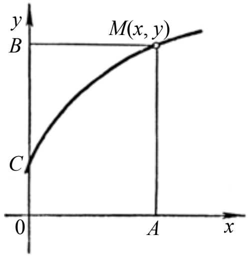



Рис. 9

з**8**. Найти закон прямолинейного двж-я материальной тч. массой $m$, если известно, что работы действующей на тч. силы прцн. вр-и $t$. Начн. путь и начн. скр-ть равны $S_0$ и $V_0$.

Р. Известно, что $A = \int_{S_0}^{S} F(u)\,\mathrm{d}u$, где $F(S)$ – действующая на тч-у сила. По усл. задачи $A = Kt$,

тогда получим интн. ур-ие
$$\int_{S_0}^{S} F(u)\,\mathrm{d}u = Kt. \tag{20}$$

Из (20), диф-уя по $S$, получим дифн. ур-ие $F(S) = K\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S}$ или $F(S) = \frac{K}{v}$, т.к. $v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

С др. стороны, из 2-го закона Ньютона следует, что $F(S) = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, тогда

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{v}. \tag{20а}$$

Р-им ур. (20а), переписав его в виде $mV\mathrm{d}V = K\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \frac{mv^2}{2} = Kt + C_1$.

Из начн. усл-я $V = V_0$ при $t = 0$ находим, что $C_1 = \frac{mv_0^2}{2}$. Тогда из $\frac{mv^2}{2} = Kt + \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 =$
$= \frac{2K}{m}\,t + v_0^2$ или $v = \sqrt{\frac{2K}{m}t + v_0^2}$. Заменяя $V$ через $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$, имеем $\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2K}{m}t + v_0^2}\;\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} S = \frac{m}{3K}\,\times$
$\times\,\left(\frac{2K}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} + C_2 \Rightarrow \frac{m}{3K}\left(\frac{2K}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Из нач. усл-я $S = S_0$ при $t = 0$ находим $C_2 = S_0 -$
$-\,\frac{mv_0^3}{3K}$ и закон двж-я тч-и окончательно примет вид $S = \frac{m}{3K}\left(\frac{2K}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} + S_0 - \frac{mv_0^3}{3K}$.

# ЛЕКЦИЯ 30

## 11.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**1°. Основные понятия**. Дифн. ур-ем $n$-го порядка наз. ур-ие вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

или, разрешенное отс-но старшей прв-ой, оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1а}$$

Общее р-ие зв-т от $n$ парм-ов (пст-ых) и имеет вид

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \tag{1б}$$

Чтобы иск-ть эти пст-ые, задаются $n$ нач. усл-ий:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1в}$$

Задача нахождения р-ия ур. (1а), удщ-го системе нач. усл-й (1в), наз. задачей Коши. Коши впервые д-ал теорему сущв-ия и едт-и р-ия, к-ая формулируется сд. образом.

**т1**. Пусть дано дифн. ур. (1а) и система нач. усл-й (1в). Если фк-ия $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непр. в окрс-ти нач. усл-й и имеет непр. част. прв-ые по арг-ам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, то сущв-ет, и притом едн-ое, р-ие ур-ия, опрн-ое и непр-ое в нек. инр-е, содержащем $x_0$, и удщ-е заданной системе нач. усл-й. Д-во см. в [40]. Заметим, что сущв-ие част. прв-х можно заменить усл-ем Липшица.

**зм1а**. Отметим, что т1 верна и для системы дифн. ур-ий, к к-ой сводится ур. (1а). Дсв-но, если в ур-и (1а) неизвестными фк. считать не только $y$, но и $y' = y_1, y'' = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$, то ур. (1а) заменяется системой $y' = y_1,\ y_1' = y_2, \ldots,\ y_{n-2}' = y_{n-1},\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ (1г)

и если правые части всех ур. системы (1г) непр-ны в равм. обл-и и уд-ют усл-ю Липшица по всем арг., кроме $x$, то в силу т1 сущ-ет едн. р-ие системы (1г), удщ-е усл-ям

$$y(x_0) = y_0, y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

**п1**. Показать, что $y = C_1x + C_2$ есть общ. р-ие дифн. ур-ия $y'' = 0$.

Р. Покажем, что $C_1x + C_2$ уд-ет данному ур. В самом деле, имеем $y' = C_1, y'' = 0$.

Пусть теперь заданы прзвл. нач. усл-я $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. Покажем, что пст-ые $C_1$ и $C_2$ можно подобрать так, что $y = C_1x + C_2$ будет уд-ять этим усл-ям. Имеем $y = C_1x + C_2$, $y' = C_1$. Полагая $x = x_0$, получим систему: $y_0 = C_1x_0 + C_2$, $y_0' = C_1$. Отсюда однозначно опр-ся $C_1 = y_0'$, $C_2 = y_0 - x_0 y_0'$. Т.о., р-ие $y = y_0'(x - x_0) + y_0$ уд-ет поставленным нач. усл-ям. Геомч-ки это означает, что через каждую тч. $M_0(x_0, y_0)$ пл-ти $xOy$ с заданным угл. коэф-ом проходит едн. пм-я.

Задание одного нач. усл-я, н-р, $y(x_0) = y_0$, очевидно, опр-ет пучок пм-х с центром в тч. $M_0(x_0, y_0)$, т.е. одного нач. усл-я недт-но для выделения едн. р-ия.

**2°. Типы уравнений, допускающих понижение порядка**. Отдельные виды дифн. ур-й высших порядков удается проинтв-ть путем понижения порядка ур-ия. Рас-им случаи:

1*. Ур-ие не содержит искомой фк-и и $k - 1$ прв-ых, т.е.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Порядок может быть снижен до $n - k$ заменой $y^{(k)} = p$. Тогда (2) примет вид $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$, р-ив к-ое, находим $p = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$, а $y$ находим из $y^{(k)} = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ с $k$-кратным интв-ем.

**п2**. $y^{\mathrm{V}} - \dfrac{1}{x} y^{\mathrm{IV}} = 0$.

Р. $y^{\mathrm{IV}} = p$. Тогда $p' - \dfrac{1}{x} p = 0 \Rightarrow \dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln p = \ln x + \ln C \Rightarrow p = Cx$, т.е. $y^{\mathrm{IV}} = Cx$, отсюда $y = C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5x + C_6$.

2*. Ур-ие не содержит незв. пер-ую, т.е. $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок можно понизить на ед-у подс-ой $y' = p$, где $p = p(y)$, через к-ую врж-ся все $\dfrac{d^k y}{dx^k}$:

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p \text{ и т.д.}$$

**п3**. $yy'' - y'^2 = 0$.

Р. Полагаем $y' = p$, тогда $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$. Отсюда $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$

$\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $\ln p = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1 y$ или $\frac{dy}{y} = C_1 dx \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln y = C_1 x + \ln C_2$ или $y = C_2 e^{C_1 x}$.

3*. Левая часть ур-я $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ яв-ся прв-ой нек-го дифн. врж-ия $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, т.е. $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, то порядок можно уменьшить на ед-у, получив инт-л: $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$.

**п3а**. $yy'' + y'^2 = 0$.

Р. Данное ур. можно писать $\frac{d}{dx}(yy') = 0$. Тогда $yy' = \frac{C}{2} \Rightarrow y\,dy = \frac{C}{2}dx \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}x + \frac{C_1}{2}$ или $y^2 = Cx + C_1$.

Иногда, чтобы получить дифн. врж-ие порядка $n - 1$, надо предварительно умн-ть ур-ие на нек. мнж-ль $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

**п4**. $yy'' - y'^2 = 0$.

Р. Умн-ив на $\mu = \frac{1}{y^2}$, получим $\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0$. Тогда $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y'}{y}\right) = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = C$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = C dx \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln y = Cx + \ln C_1 \Rightarrow \ln\frac{y}{C_1} = Cx \Rightarrow y = C_1 e^{Cx}$.

4*. Ур-ие
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2a}$$
одн-но отс-но $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Тогда $F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ и порядок может быть понижен на ед-у подс-ой $y = e^{\int z dx}$, где $z = z(x)$. Дсв-но, $y' = e^{\int z dx}\cdot z$, $y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z')$, $y''' = e^{\int z dx}(z^3 + 3zz' + z'')$, …, $y^{(n)} = e^{\int z dx}\Phi(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$. Подс-я их в (2а) и учитывая одн-сть, получим $e^{p\int z dx} f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$ или $f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$, т.е. порядок понизился на ед-у.

**п5**. $yy'' - y'^2 = 6xy^2$.

Р. Полагая $y = e^{\int z dx}$, получим $e^{2\int z dx}(z^2 + z') - e^{2\int z dx} z^2 = 6x\, e^{2\int z dx} \Rightarrow z' = 6x \Rightarrow dz = 6x dx \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ $z = 3x^2 + C_1$, переходя к старым пер-ым, имеем $y = e^{\int(3x^2 + C_1)dx} = e^{x^3 + C_1 x + \ln C}$ или $y = Ce^{x^3 + C_1 x}$.

### 3°. Линейные дифференциальные уравнения. Независимость функций. Вронскиан.

Лин. дифн. ур-ем $n$-го порядка наз. ур-ие вида
$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x). \tag{3a}$$
Если все коэф-ы и $\varphi(x)$ непр-ны в инр-е $a < x < b$, разделив на $a_n(x)$ ($a_n(x) \neq 0$), получим
$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x), \tag{3}$$
где $P_0(x)$, $P_1(x)$, …, $Q(x)$ – заданные непр. на инр-е $]a, b[$ фк-и.

Если $Q(x) = 0$, то ур. (3) наз. лин. одн. ур-ем, иначе – лин. неодн. ур-ем.

Левую часть ур-я (3) обз-им через $L_n(y) = L(y)$. Ее наз-ют лин. дифн. оператором $n$-го порядка. Оператор $L(y)$ обладает сд. св-ми:

1) $L(Cy) = CL(y)$ – однородность (однс.) оператора;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ – аддитивность (аддс.) оператора;

Отметим, что одн. и адд. операторы наз. лин-ми, а св. 1) и 2) можно обобщить:

3) $L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i)$ ($C_i$ – прзвл-ые пст.). (3б)

**п6**. Пусть $L(y) = y'' + y$. Найти фк-и, удщ. данному дифн. ур-ю.

Р. Легко видеть, что $L(\sin x) = (\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$, $L(x^2) = (x^2)'' + x^2 = 2 + x^2$.

Ур-ие (3) можно записать в виде $L(y) = L_n(y) = Q(x)$, $a < x < b$. (3в)

Если $Q(x) = 0$, то $L_n(y) = 0$, $a < x < b$. (3г)

Если фк-и $P_0(x)$, $P_1(x)$, …, $P_{n-1}(x)$, $Q(x)$ непр-ны на инр-е $]a, b[$, то можно д-ть, что для таких фк. дифн. ур-ие (3) имеет едн. опрн-ое на том же инр-е $]a, b[$ р-ие, удщ-е нач. усл-ям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

При этом, если фк-и $P_i(x)$ и $Q(x)$ имеют на $]a, b[$ непр. прв-ые порядка $q$, то указанное р-ие $y(x)$ имеет на $]a, b[$ непр. прв-ые до порядка $n + q$ включительно.

**т2**. Если $y_1$, …, $y_n$ яв-ся р-ми одн. ур-я (3г), то их лин. комбинация $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i$ также яв-ся р-ем ур-я (3г). Это вытекает из рав-ва (3б).

Теперь введем понятие лин. зв-сти и незв-сти фк-й по анг-и с ствщ-им понятием для системы вк-ов (4°:2.1).

Фк-и $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ наз. лин. зв-ми на $]a, b[$, если одна из них яв-ся лин. комбинацией др-х $\forall\, x \in\ ]a, b[$. Др. словами, фк-и $y_1(x),\dots, y_m(x)$ наз. лин. зв-ми на $]a, b[$, если сущ-ют числа $\alpha_1,\dots, \alpha_m$, из к-ых хотя бы одно не равно нулю, такие, что $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x) = 0$, $a < x < b$. (3д)

Если тожд. (3д) выполняется лишь в случае, когда все $\alpha_i = 0$, то фк-и $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ наз. лин. незв-ми на $]a, b[$.

Система из $n$ лин-но незв-ых на инр-е $]a, b[$ р-й $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ одн. дифн. ур-я $n$-го порядка (3г) с непр. на $]a, b[$ коэф-ми $P_i(x)$ наз. фундаментальной (фунд.) системой р-й этого ур.

Чтобы р-ть лин. одн. дифн. ур-ие $n$-го порядка (3г) с непр. коэф-ми $P_i(x)$, надо найти его фунд. систему р-й. Затем, согласно т2, найти сумму $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, (3е)

где $C_i$ – прзвл-ые пст., $y_i(x)$ – част. р-ия ур-я (3г).

Стн-ие (3е) наз. общим р-ем лин. одн. дифн. ур-я (3г).

Отметим, что общ. р-ие неодн. ур-я (3) есть сумма какого–нибудь его част. р-ия $y_0(x)$ и общего р-ия одн. ур-я

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{3ж}$$

Дсв-но, $L_n(y) = L_n(y_0) + \sum_{i=1}^{n} C_i L_n(y_i) = Q(x) + 0 = Q(x)$. С др. стороны, если $y$ есть прзвл. р-ие ур-я (3), то $L_n(y - y_0) = L_n(y) - L_n(y_0) = Q(x) - Q(x) = 0$, и, стд-но, $y - y_0$ есть р-ие одн. ур-я, но тогда сущ-ют такие числа $C_i$, что $y(x) - y_0(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, т.е. для этих чисел выполняется рав-во (3ж).

**т3**. Если фк-и $y_1(x),\dots, y_m(x)$ лин-о зв-мы на $]a, b[$ и имеют прв-ые до $(m-1)$-го порядка, то опрт-ль

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_m(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \ (\forall\, x \in\ ]a, b[). \tag{4}$$

Опр. (4) наз. опрт-ем Вронского или вронскианом и обз. $W(x) = W(y_1, \dots, y_m)$.

Д. Т.к. фк-и $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ лин-о зв-мы на $]a, b[$, то сущ-ют не все равные нулю числа $\alpha_1,\dots, \alpha_m$, при к-ых выполняется тожд. (3д) на $]a, b[$. Диф-руя его $m - 1$ раз, получим систему ур-й

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x) = 0 \\ \alpha_2 y'_1(x) + \dots + \alpha_m y'_m(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(m-1)}(x) + \dots + \alpha_m y_m^{(m-1)}(x) = 0 \end{array}\right\}$$

Эта одн. система по усл-ю имеет нетривиальное р-ие $\alpha_1,\dots, \alpha_m$ (т.е. хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$) при $\forall\, x \in\ ]a, b[$. Последнее возможно, когда опрт-ль (вронскиан) системы тожд-но равен нулю ■

**зм1**. Из т3 следует, что если вронскиан $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной тч. $]a, b[$, то фк-и $y_1, \ldots, y_m$ лин-о незв-мы на $]a, b[$.

**п7**. Д-ть, что система фк-й $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ лин. незв-ма на любом $]a, b[$.

Р. Т.к. $W(1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} \\ . & . & . & . & . \;.\;.\;.\;. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1!2!\ldots(m-1)! \neq 0$, значит, фк-и $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ лин. незв-мы.

**п8**. Фк-и $e^{k_1x}, \ldots, e^{k_mx}$ лин. незв-мы на любом $]a, b[$, если $k_1, \ldots, k_m$ – различные числа.

Р. Дсв-но, $W\left(e^{k_1x}, \ldots, e^{k_mx}\right) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & \ldots & e^{k_mx} \\ k_1e^{k_1x} & \ldots & k_me^{k_mx} \\ . \;.\;.\;. & . & . \;.\;.\;.\;. \\ k_1^{m-1}e^{k_1x} & \ldots & k_m^{m-1}e^{k_mx} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\ldots+k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_m \\ . \;.\;. & . & . \;.\;. \\ k_1^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\ldots+k_m)x} \times$

$\times \prod\limits_{1 \le j < i \le m} \left(k_i - k_j\right) \neq 0$ – опрт-ль Вандермонда [24], к-ый при различных $k_1, \ldots, k_m$ не равен нулю. Сдт-но, фк-и $e^{k_1x}, \ldots, e^{k_mx}$ при различных $k_1, \ldots, k_m$ лин. незв-мы.

**п9**. Фк-и $e^{kx}, x\,e^{kx}, \ldots, x^{m-1}\,e^{kx}$ лин. незв-мы на любом $]a, b[$.

Р. Т.к. $e^{kx} \neq 0$ и $\alpha_1 e^{kx} + \alpha_2 x\, e^{kx} + \ldots + \alpha_m x^{m-1} e^{kx} = e^{kx}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_m x^{m-1})$, то лин. незв-ть указанных фк-й вытекает из п7.

**сл1**. Утв-ие п8 остается верным и при комп-ом $k_i$.

**п10**. п8, п9 можно обобщить, т.е. фк-и
$$\begin{array}{l} e^{k_1x},\ xe^{k_1x}, \ldots,\ x^{m_1}e^{k_1x} \\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x}, \ldots,\ x^{m_2}e^{k_2x} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ e^{k_qx},\ xe^{k_qx}, \ldots,\ x^{m_q}e^{k_qx}, \end{array}$$
где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$ лин. незв-мы на любом инр-е $a < x < b$.

**сл2**. Утв-ие п10 верно и при комп-ом $k_i$.

**т4**. Для того чтобы р-ия $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ лин. дифн. одн. ур-я $L_n(y) = 0$ с непр. коэф-ми были лин. незв-ми на $]a, b[$, нх-мо и дт-но, чтобы $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0\ \forall\ x \in\ ]a, b[$ (д-во см. в [4а]).

**т5**. Если $y_1, \ldots, y_n$ – лин. незв-ые на $]a, b[$ р-ия лин. одн. дифн. ур-я $n$-го порядка $L_n(y) = 0$ с непр. коэф-ми $P_i(x)$, $a < x < b$, то фк-я $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, $a < x < b$, (4а)

где $C_i$ – прзвл-ые пст., яв-ся общим р-ем ур-я $L_n(y) = 0$, т.е. сумма (4а) при любых $C_i$ есть р-ие этого ур-я, и обратно, всякое р-ие этого ур. представимо в виде суммы (4а) при ствщ. зн-ях $C_i$ (д-во см. в [4а]).

**4°. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.**

Ур-ие $$L_n(y) = y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + P_1y' + P_0y = 0,\ -\infty < x < \infty, \tag{5}$$
где $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ – пст. числа, наз. лин. одн. дифн. ур-ем $n$-го порядка с пст. коэф-ми.

Чтобы р-ть ур-ие (5), надо найти какую-либо его фунд. систему (т.е. $n$ част. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$) р-й, образующих лин. незв. систему на всей оси, тогда общее р-ие ур-я (5) будет иметь вид $y = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$.

Част. р-ия ур-я (5) будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k$ – пст. число. Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, $\ldots, y^{(n)} = k^ne^{kx}$, подст-я их в (5), получим $L_n\left(e^{kx}\right) = e^{kx}(k^n + P_{n-1}k^{n-1} + \ldots + P_1k + P_0) = 0$. Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $$R_n(k) = k^n + P_{n-1}k^{n-1} + \ldots + P_1k + P_0 = 0. \tag{5а}$$

Ур-ие (5а) наз. характеристическим (хркч.) для ур-я (5). Ур-ие (5а), как известно, имеет $n$ корней с учетом кратности. Возможны сд. случаи:

1*. Если все корни $k_1, \ldots, k_n$ хркч-го ур-я дсв. и разные, то найдено $n$ лин. незв-ых част. р-й $y_1 = e^{k_1x}, \ldots, y_n = e^{k_nx}$ – фунд. система р-й. Тогда общ. р-ем будет $y = C_1 e^{k_1x} + \ldots + C_n e^{k_nx}$, где $C_i$ – прзвл-ые пст.

**п11**. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Р. Хркч. ур-ие имеет вид: $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тогда $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ – фунд. система р-й, $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ – общ. р-ие.

**п12**. $y''' - y' = 0$.

Р. $k^3 - k = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Тогда $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$ – общ. р-ие.

2*. Если хркч. ур-ие имеет комп. корни, то они могут появляться лишь сопряженными парами $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Тогда комп. р-ия $e^{(\alpha+\beta i)x}$, $e^{(\alpha-\beta i)x}$ в силу фм-ы Эйлера могут быть заменены двумя дсв. р-ми: дсв. и мнимой частями одного из р-й $e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$;

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

т.е. берем два дсв. р-ия: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

**п13**. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Р. $k^2 + 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$. Тогда $e^{-2x}\cos x$, $e^{-2x}\sin x$ – фунд. система р-й, $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ – общ. р-ие.

3*. Если хркч. ур-ие имеет корень $k_i$ кратности $\alpha_i$ ($\alpha_i \le n$), то р-ми исх. ур-я будет не только $e^{k_i x}$, но и $xe^{k_i x}$, $x^2e^{k_i x}$, …, $x^{\alpha_i - 1}e^{k_i x}$ –фунд. система р-й, част. р-ия к-ой лин. незв-мы (см. п9).

Заметим, мы здесь не предполагали, что $k_i$ – дсв. корень. Поэтому все рассуждения остаются в силе, когда кратные корни яв-ся комп-ми. Н-р, если пара комп. корней $\alpha \pm \beta i$ яв-ся двукратной, то ей ств-ет четыре част. р-й: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$.

**п14**. $y'' - 2y' + y = 0$.

Р. Хркч. ур-ие $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0$ имеет кратный корень $k_{1,2} = 1$, тогда част. р-ия: $e^x$, $xe^x$ – фунд. система р-й, $y = e^x(C_1 + C_2x)$ – общ. р-ие.

**п15**. $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + 2y''' = 0$.

Р. Сост-ем хркч. ур-ие $k^5 - 2k^4 + 2k^3 = 0 \Rightarrow k_{1,2,3} = 0$, $k_{4,5} = 1 \pm i$. Тогда $1, x, x^2, e^x\cos x, e^x\sin x$ – фунд. система р-й, $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^x(C_4\cos x + C_5\sin x)$ – общ. р-ие

**п16**. $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0$.

Р. $k^5 + 8k^3 + 16k = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2i$, $k_{4,5} = -2i$. Тогда част. р-ия: $1$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $x\cos 2x$, $x\sin 2x$; общ. р-ие $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + C_4x\cos 2x + C_5x\sin 2x$.

Рас-им одн. ур-ие с пер. коэф-ми, назм. ур-ем Эйлера:

$$x^ny^{(n)} + P_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + P_1xy' + P_0y = 0, \qquad (5б)$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ – пст. числа.

Ур-ие Эйлера подс-ой $x = e^t$ сводится к ур-ю с пст. коэф-ми. В самом деле, имеем $y(x) = y(e^t) = v(t)$. Отсюда $y'(x) = v'(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = v'(t)e^{-t}$, $xy'(t) = v'(t)$; $y''(x) = v''(t)e^{-2t} - v'(t)e^{-2t}$, $x^2y''(x) = v''(t) - v'(t)$; … Подс-я эти зн., получим ур-ие с пст. коэф-ми отс-но фк-и $v(t)$. Част. р-ми этого ур-я, как показано выше, яв-ся фк-и вида $e^{kt} = x^k$ или $t^je^{kt} = x^k\ln^j x$, где $k$ – корень (простой или кратный) ствщ-го хркч. ур-я. Т.о. част. р-ия ур-я Эйлера сразу можно искать в форме $x^k$, $x^k\ln^j x$.

**п17**. $x^2y'' + \dfrac{5}{2}xy' - y = 0$.

Р. Р-ие ищем в виде $y = x^k$; $y' = kx^{k-1}$; $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Подс-я их в исх. ур-ие, получим $k(k-1)\times x^2x^{k-2} + \dfrac{5}{2}kxx^{k-1} - x^k = 0 \Rightarrow x^k\cdot\left[k(k-1) + \dfrac{5}{2}k - 1\right] = 0$. Отсюда, если $x \ne 0$, то $k(k-1) + \dfrac{5}{2}k - 1 = 0$ ①

$\Rightarrow k_1 = \dfrac{1}{2}$, $k_2 = -2$. Тогда $y = C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-2}$.

**п18**. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Р. $y = x^k$; с учетом ① п17 имеем $k(k-1) - k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$, тогда $y = C_1x + C_2x\ln x$.

**п19**. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Р. $y = x^k$; $k(k-1) + k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$, тогда $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$.

Ур-ие вида $(ax+b)^ny^{(n)} + P_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + P_1(ax+b)y' + P_0y = 0$ (5в)

также наз. ур-ем Эйлера и сводится к ур-ю (5б) заменой $ax + b = x_1$. Сдт-но, част. р-ие можно искать в виде $y = (ax+b)^k$.

**зм2**. Р-ие ур-я Эйлера можно найти сразу в виде $y = x^k$, т.к. все равно имеем $e^{kt} = x^k$. Сдт-но, корням $k_i$ кратности $\alpha_i$ ств-ют р-ия (с учетом $kt = k\ln x \Rightarrow t^i = \ln^i x$)

$$x^{k_i},\ x^{k_i}\ln x,\ x^{k_i}\ln^2 x, \ldots,\ x^{k_i}\ln^{2i-1}x \qquad (5г)$$

исх. ур-я (5б).

А комп. корнями $p \pm qt$ кратности $\alpha$ ств-ет р-ия (с учетом $e^{pt} = x^p \Rightarrow t^i = \ln^i x$, $\cos qt = \cos(q\ln x)$)

$$x^p\cos(q\ln x),\ x^p\ln x\cos(q\ln x),\ \ldots,\ x^p\ln^{\alpha-1}x\cos(q\ln x),$$
$$x^p\sin(q\ln x),\ x^p\ln x\sin(q\ln x),\ \ldots,\ x^p\ln^{\alpha-1}x\sin(q\ln x).$$

**5°. Решение неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов. Сводная таблица**. При р-и лин. неодн-ых ур-й с пст. коэф-ми легко удается подбирать част. р-ия и тем самым сводить задачу к интв-ю ств-го одн. ур-я. Рас-им ур-я с различными правыми частями.

1*. Правая часть в виде мчл-на, т.е. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = A_sx^s + \ldots + A_1x + A_0$, (6)
где $\{a_j\}$, $\{A_i\}$ – пст. числа. Иногда и $y^{(n)}$ будем писать с коэф-ом $a_n$: $a_ny^{(n)}$.

Если $a_0 \neq 0$, то сущ-ет част. р-ие ур. (6) вида мчл-а сп-и $S$: $y = B_sx^s + \ldots + B_1x + B_0$. (6а)

Дсв-но, подс-я (6а) в (6) и сравнивая коэф-ы при одинаковых сп-ях $x$ в правой и левой частях, всегда можно найти $\{B_i\}$ (см. п20).

Если же $a_0 = 0$ или в более общем случае $a_0 = a_1 = \ldots = a_{\alpha-1} = 0$, но $a_\alpha \neq 0$, то $k = 0$ яв-ся $\alpha$-кратным корнем хркч-го ур-я (6) вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_\alpha y^{(\alpha)} + a_0y = A_sx^s + \ldots + A_1x + A_0$. (6б)

Полагая $y^{(\alpha)} = z$, приходим к предыдущему случаю, сдт-но, сущ-ет част. р-ие ур-я (6б), для к-го $y^{(\alpha)} = B_sx^s + \ldots + B_1x + B_0$. Тогда $y = x^\alpha(B_sx^s + \ldots + B_1x + B_0)$. (6в)

**п20**. $y'' + y = x^2 + x$.

Р. Част. р-ие ищем в виде $\tilde{y} = B_2x^2 + B_1x + B_0$. Отсюда $\tilde{y}' = 2B_2x + B_1$, $\tilde{y}'' = 2B_2$. Подс-я их в исх. ур-ие, получим $2B_2 + B_2x^2 + B_1x + B_0 = x^2 + x \Rightarrow B_2 = 1$, $B_1 = 1$, $2B_2 + B_0 = 0$ или $B_0 = -2$, т.е. $\tilde{y} = x^2 + x - 2$ – част. р-ие.

Найдем общ. р-ие ств-го одн. ур-я $y'' + y = 0$; хркч. ур-ие $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$, тогда $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. $y = y_0 + \tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 + x - 2$ – общ. р-ие неодн. у-ия.

**п21**. $y'' + y' = x + 1$.

Р. С учетом (6в) имеем $\tilde{y} = x(B_1x + B_0) = B_1x^2 + B_0x$, отсюда $\tilde{y}' = 2B_1x + B_0$, $\tilde{y}'' = 2B_1$.

Подс-им их в исх. ур-ие: $2B_1 + 2B_1x + B_0 = x + 1 \Rightarrow \left.\begin{aligned}2B_1 &= 1\\ 2B_1 + B_0 &= 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}B_1 &= 1/2\\ B_0 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{y} = \dfrac{1}{2}x^2.$

Р-им одн. ур-ие $y'' + y' = 0$, $k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = -1$, тогда $1$, $e^{-x}$ – фунд. система р-й, $y_0 = C_1 + C_2e^{-x}$ – общ. р-ие одн. ур-я, $y = y_0 + \tilde{y} = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2$ – общ. р-ие неодн. ур-я.

2*. Правая часть в виде пзв-ия пкзт. фк-и на мчл-н, т.е.

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = e^{px}(A_sx^s + \ldots + A_1x + A_0). \quad (7)$$

Заменой пер-ой $y = e^{px}z$ ур-ие (7) приводится к виду

$$e^{px}(b_nz^{(n)} + b_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + b_1z' + b_0z) = e^{px}(A_sx^s + \ldots + A_1x + A_0)$$

или
$$b_nz^{(n)} + b_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + b_1z' + b_0z = A_sx^s + \ldots + A_1x + A_0. \quad (7а)$$

Если $b_0 \neq 0$, то ур. (7а) имеет част. р-ие вида $\tilde{z} = b_sz^s + \ldots + b_1z + b_0$. Значит, ур. (7) имеет част. р-ие (если $p$ не яв-ся корнем хркч. ур-я) вида $\tilde{y} = e^{px}(B_sx^s + \ldots + B_1x + B_0)$. (7б)

Если же $p$ яв-ся корнем хркч. ур-я кратности $\alpha$ (этот случай наз. особым или резонансным), то част. р-ие ищем в виде $\tilde{y} = x^\alpha e^{px}(B_sx^s + \ldots + B_1x + B_0)$. (7в)

**п22**. $y'' + 9y = e^{5x}$.

Р. $y'' + 9y = 0$; $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i$; тогда $y_0 = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$; $p = 5$ не яв-ся корнем хркч. ур-я, поэтому част. р-ие ищем в виде $\tilde{y} = Be^{5x}$. Отсюда $\tilde{y}' = 5Be^{5x}$; $\tilde{y}'' = 25Be^{5x}$; подс-в их в исх. ур-ие, имеем $25Be^{5x} + 9Be^{5x} = e^{5x} \Rightarrow 34B = 1$ или $B = \dfrac{1}{34}$. Тогда $y = y_0 + \tilde{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{34}e^{5x}$ – общ. р-ие неодн. ур-я.

**п23**. $y'' + y = e^{3x}(x - 2)$.

Р. $y'' + y = 0$; $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$, тогда $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$; $p = 3$ не яв-ся корнем хркч. ур-я, поэтому част. р-ие неодн. ур-я ищем в виде $\tilde{y} = e^{3x}(B_1x + B_0)$, $y' = (3B_1x + 3B_0 + B_1)e^{3x}$, $y'' = (9B_1x + 6B_0 + 9B_0)e^{3x}$; $(10B_1x + 6B_1 + 10B_0)e^{3x} = e^{3x}(x - 2) \Rightarrow 10B_1x + 6B_1 + 10B_0 = x - 2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}10B_1=1\\ 6B_1+10B_0=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}B_1=1/10\\ B_0=-13/50\end{array} \Rightarrow \tilde{y}=e^{3x}\left(\frac{x}{10}-\frac{13}{50}\right)$$. Тогда $y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^{3x}\left(\frac{x}{10}-\frac{13}{50}\right)$ – общ. р-ие неодн. ур-я.

**п24**. $y'' + y = e^{2x}(x-2)$. Р-ть самим!

**п25**. $y'' - y = e^x(x^2-1)$.

Р. $y'' - y = 0$; $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$, тогда $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Причем $p = k = 1$, тогда $\tilde{y} = xe^x \times$ $\times (B_2x^2 + B_1x + B_0) = e^x(B_2x^3 + B_1x^2 + B_0x)$. Опр-ив $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подс-в в исх. ур-ие, находим $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$, $B_0 = -\frac{1}{2}$. Отсюда получим $y = y_0 + \tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$ – общ. р-ие неодн. ур-я.

**п26**. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$.

Р. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Rightarrow (k+1)^3 = 0 \Rightarrow k_{1,2,3} = -1$, тогда $y_0 = e^{-x}(C_1 +$ $+ C_2x + C_3x^2)$. Част. р-ие надо искать в виде $\tilde{y} = x^3e^{-x}(B_1x + B_0)$, т.к. $p = k = -1$ кратности $\alpha = 3$. Р-ть до конца рекомендуется читателю.

3*. Все рассуждения справедливы и при комп-ом $p$, т.е. когда правая часть имеет вид

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx], \qquad (8)$$

где один из мчл-ов $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ имеет сп-нь $s$, а др. сп-нь не выше $s$.

В этом случае част. р-ие ищем в виде $\tilde{y} = e^{px}\left[\overline{P}_s(x)\cos qx + \overline{Q}_s(x)\sin qx\right]$, (8а)

(где $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ – мчл-ы сп-ни $s$ с неопрн. коэф-ми), если $p + iq$ не яв-ся корнями хркч. ур-ия, и

$$\tilde{y} = x^{\alpha}e^{px}\left[\overline{P}_s(x)\cos qx + \overline{Q}_s(x)\sin qx\right], \qquad (8б)$$

если $p + iq$ яв-ся корнями хркч. ур-я кратности $\alpha$.

**п27**. $y'' + 2y' + y = \cos 2x$.

Р. $y'' + 2y' + y = 0$, $k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -1$, тогда $y_0 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. $\tilde{y} =$ $= A\cos 2x + B\sin 2x$, $\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$, подс-ив их в исх. ур-ие, получим $(4B - 3A)\cos 2x - (3B + 4A)\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \left.\begin{array}{r}4B-3A=1\\ 3B+4A=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=-3/25;\\ B=4/25.\end{array}$ Тогда $y = y_0 + \tilde{y} =$ $= C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x$.

**п28**. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = \sin x$.

Р. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$, $k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \Rightarrow (k^2+1)^2 = 0 \Rightarrow k = \pm i$ кратности $\alpha = 2$, тогда $y_0 = (C_1 +$ $+ C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$. Причем $p + iq = k = \pm i$, $\alpha = 2$, тогда част. р-ие можно искать в виде $\tilde{y} = x^2(A\cos x + B\sin x)$. Из-за громозкости выч-й дальше продолжать не будем.

**п29**. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x)$.

Р. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $k^2 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -1 \pm i$, тогда $y_0 = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$. $\tilde{y} = xe^{-x} \times$ $\times [(A_1x + A_0)\cos x + (B_1x + B_1)\sin x]$. Дорешать самим!

**зм3**. Если правая часть $f(x)$ равна сумме расн. случаев, то $f(x)$ берем в том же виде, но с неопрн. коэф-ми.

**п30**. $y'' + y = x - 2e^{2x}$.

Р. $y'' + y = 0$, $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$, тогда $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$; $\tilde{y} = Ax + Be^{2x}$, отсюда $\tilde{y}' = A +$ $+ 2Be^{2x}$, $\tilde{y}'' = 4Be^{2x}$, тогда $4Be^{2x} + Ax + Be^{2x} = x - 2e^{2x}$ или $Ax + 5Be^{2x} = x - 2e^{2x} \Rightarrow A = 1$, $5B = -2$ или $B = -\frac{2}{5}$, тогда $\tilde{y} = x - \frac{2}{5}e^{2x}$, отсюда $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x - \frac{2}{5}e^{2x}$ – общ. р-ие неодн. ур-я.

**п31**. $y''' + y'' = 2x + e^{-x}$.

Р. $y''' + y'' = 0$, $k^3 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k+1) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0$, $k_3 = -1$, то $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$. Част. р-ие ищем в виде $\tilde{y} = x^2(Ax + B) + Cxe^{-x}$. Дорешать самим!

**зм4**. При нахождении част. р-ия неодн. ур-я с пст. коэф-ми с правой частью вида (8) иногда целесообразно перейти к пкзт. фк-ям, н-р, вместо $y'' - 2y' + y = \cos x$ с помощью фм-ы Эйлера можно получить ур-ие $y'' - 2y' + y = e^{ix}$. (8в)

Тогда част. р-ие можно искать в виде $\tilde{y} = Ae^{ix}$, откуда $\tilde{y}' = iAe^{ix}$, $\tilde{y}'' = -Ae^{ix}$, подс-ив их в (8а), получим $-Ae^{ix} - 2iAe^{ix} + Ae^{ix} = e^{ix} \Rightarrow -2iA = 1$, $A = -\dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2}$. Тогда $y_0 = \dfrac{i}{2}(\cos x + i\sin x)$. Част. р-ие исх. ур-я $\tilde{y} = \mathrm{Re}\,y_0 = -\dfrac{1}{2}\sin x$.

Приведем сводную табл. видов част. р-й для различных видов правых частей.

| № п/п (1) | Правая часть дифн. ур-я (2) | Корни хркч. ур-я (3) | Вид част. р-ия |
|---|---|---|---|
| I | $P_m(x)$ | 1. Число 0 не яв-ся корнем хркч. ур-я | $\tilde{P}_m(x)$ |
| | | 2. Число 0 – корень хркч. ур-я кратности $s$ | $x^s\tilde{P}_m(x)$ |
| II | $P_m(x)e^{\alpha x}$ ($\alpha$ – дсв-ое) | 1. Число $\alpha$ не яв-ся корнем хркч. ур-я | $\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| | | 2. Число $\alpha$ яв-ся корнем хркч. ур-я кратности $s$ | $x^s\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| (1) | (2) | (3) | Вид част. р-ия, где $k = \max(m, n)$ |
| III | $P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$ | 1. Числа $\pm i\beta$ не яв-ся корнем хркч. ур-я | $\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$ |
| | | 2. Числа $\pm i\beta$ яв-ся корнем хркч. ур-я кратности $s$ | $x^s\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k\sin\beta x\right)$ |
| IV | $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ | 1. Числа $\alpha \pm i\beta$ не яв-ся корнем хркч. ур-я | $\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$ |
| | | 2. Числа $\alpha \pm i\beta$ яв-ся корнем хркч. ур-я кратности $s$ | $x^s\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$ |

**зм5**. Способ неопрн-ых коэф-ов не применим, когда правая часть неодн. ур-я имеет дробно-рац. фк-ю или, н-р, tg$x$. Поэтому в сд. пункте рас-им метод вариации (врц.), к-ый применяется для лин. одн. ур-й как с пст., так и с пер. коэф-ми.

**6°. Решение неоднородных уравнений методом вариации**. Рас-им лин. неодн. ур-ие

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \quad (9)$$

Если все коэф. $P_i(x)$ и $f(x)$ непр-ны при $a < x < b$, то ур. (9) (в силу теоремы сущв-ия и едн-ти р-ия) имеет едн. р-ие, удщ-е нач. усл-ям $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Ур-ие (9) кратко можно писать так: $L(y) = f(x)$. (9а)

Наряду с ур-ем (9а) рас-им ствщ-е ему одн. ур-ие $L(y) = 0$. (9б)

Если $\tilde{y}$ – част. р-ие неодн. ур-я (9а), а $y_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i y_i$ – р-ие ств-го одн. ур-я (9б), то $y = y_0 + \tilde{y}$ есть общ. р-ие неодн. ур-я (9а).

Когда подбор част. р-я неодн. ур-я труден, но общ. р-ие $y_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i y_i$ ств-го одн. ур-я найдено, то искомое част. р-ие неодн. ур-я находим методом врц-и, взяв $C_i = C_i(x)$ и находя прв-ые:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i = \sum C_i(x)y_i; \quad (9в)$$

$$\left.\begin{aligned}
&y' = \Sigma C_i(x)\,y_i' + \Sigma\,C_i'(x)y_i,\ C_i(x) \text{ подбираем из усл.} && \Sigma\,C_i'(x)y_i = 0\\
&y'' = \Sigma C_i(x)\,y_i'' + \Sigma\,C_i'(x)\,y_i', && \Sigma\,C_i'(x)\,y_i' = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{n-1} = \Sigma C_i(x)\,y_i^{(n-1)} + \Sigma\,C_i'(x)\,y_i^{(n-2)}, && \Sigma\,C_i'(x)\,y_i^{(n-2)} = 0\\
&y^{n} = \Sigma C_i(x)\,y_i^{(n)} + \Sigma\,C_i'(x)\,y_i^{(n-1)}, && \text{но } \Sigma\,C_i'(x)\,y_i^{(n-1)} \neq 0
\end{aligned}\right\} \quad (9г)$$

В (9г) фк. $C_i(x)$ уже подчинены $n-1$ усл-ям, нх-мо еще, чтобы они уд-ли исх. ур-ю (9). Подс-я (9г) в (9), получим $\sum C_i'(x)y_i^{(n-1)}$ + $\sum C_i(x)y_i^{(n)}$ + $P_{n-1}(x)\sum C_i(x)y_i^{(n-1)}$ + … +$P_1(x)$ $\sum C_i(x)y_i'$ + + $P_0(x)\sum C_i(x)y_i$ = $f(x)$ или

$$\sum C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum C_i(x)\left[y_i^{(n)}+P_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}+...+P_1(x)y_i'+P_0(x)y_i\right]=f(x). \tag{9д}$$

Т.к. $\{y_i\}$ – част. р-ия ств. одн. ур-я, то $y_i^{(n)}$ + $P_{n-1}(x)$ $y_i^{(n-1)}$ + … + $P_1(x)$ $y_i'$ + $P_0(x)y_i = 0$, и ур-е (9д) принимает вид $\sum C_i'(x)y_i^{(n-1)}$ = $f(x)$.

Итак, фк-и $C_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ опр-ся из системы $n$ лин-х ур-й

$$\left.\begin{aligned}&\sum C_i'(x)y_i=0\\&\sum C_i'(x)y_i'=0\\&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\&\sum C_i'(x)y_i^{(n-2)}=0\\&\sum C_i'(x)y_i^{(n-1)}=f(x)\end{aligned}\right\} \tag{9е}$$

с опрт-ем Вронского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix} \neq 0$, т.к. $y_1, y_2, \dots, y_n$ – лин. незв. р-ия ств. одн. ур-я.

Опр-ив из (9е) все $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, кву-ми находим $C_i(x) = \int\varphi_i(x)\mathrm{d}x + \overline{C}_i$, подс-я к-ое в (9в), находим общ. р-ие ур-я (9).

**п32**. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Р. $y'' + y = 0$, $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$, тогда $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. Варьируем $C_1$ и $C_2$: $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$; $C_1(x)$ и $C_2(x)$ опр-ем из системы (9е):

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\\-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}\quad\left|\begin{aligned}&\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\-\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1;\\&\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos x},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\-\sin x & \dfrac{1}{\cos x}\end{vmatrix}=1,\end{aligned}\right.$$

тогда $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \mathrm{d}C_1(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} C_1(x) = \ln\cos x + \overline{C}_1$, $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{1} = 1$ $\Rightarrow \mathrm{d}C_2(x) = \mathrm{d}x \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} C_2(x) = x + \overline{C}_2$. Тогда общ. р-ие исх. ур-я: $y = (\ln\cos x + \overline{C}_1)\cos x + (x + \overline{C}_2)\sin x =$ $= \overline{C}_1\cos x + \overline{C}_2\sin x + \cos x\ln\cos x + x\sin x$.

**зм6**. Метод врц-и применим для лин. неодн. ур-й с пер. коэф-ми, если известно общ. р-ие ств. одн. ур-я, но в общем случае для их нахождения метода не сущ-ет.

**7°. Операторный метод решения неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами**. Для нахождения част. р-й лин. неодн. ур-й с пст. коэф-ми во многих случаях удобен операторный (оперт.) метод. Пусть правая часть ур-я имеет общ. вид, т.е.

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x). \tag{10}$$

Введя обз-ие $\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = D^ky$, ур. (10) можно записать в виде

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y = f(x)$$

или

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = f(x). \tag{10а}$$

Врж-ие $a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0 = F(D)$ наз. оперт. мчл-ом. Тогда ур-ие (10а) кратко можно записать в виде $$F(D)y = f(x). \qquad (10б)$$

Опрт. мчл-н обладает сд. св-ми:

**с1**. $F(D)e^{kx} = e^{kx}F(k)$.

Д. $F(D)e^{kx} = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0)e^{kx} = a_nk^ne^{kx} + a_{n-1}k^{n-1}e^{kx} + \ldots + a_1ke^{kx} + a_0e^{kx} =$ $= e^{kx}(a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0) = e^{kx}F(k)$ ■

**с2**. $F(D^2)\sin ax = \sin ax F(-a^2)$.

Д. Из $(\sin ax)' = a\cos x$, $(\sin ax)'' = -a^2\sin ax$, $(\sin ax)''' = -a^2 \cdot a\cos ax$, $(\sin ax)^{\mathrm{IV}} = \left(-a^2\right)^2 \sin ax$, …, $(\sin ax)^{2n} = \left(-a^2\right)^n \sin ax$ получим:

$F(D^2)\sin ax = (a_nD^{2n} + a_{n-1}D^{2n-2} + \ldots a_1D^2 + a_0)\sin ax = a_n\left(-a^2\right)^n \sin ax + a_{n-1}\left(-a^2\right)^{n-1} \sin ax + \ldots +$ $+ a_1(-a^2)\sin ax + a_0\sin ax = \sin ax[\, a_n\left(-a^2\right)^n + a_{n-1}\left(-a^2\right)^{n-1} + \ldots + a_1(-a^2) + a_n] = \sin ax F(-a^2)$ ■

**с3**. $F(D^2)\cos ax = \cos ax F(-a^2)$ (д-ся анч-но с2).

**с4**. $F(D)e^{kx}v(x) = e^{kx}F(D + k)v(x)$.

Д. Из фм-ы Лейбница (см. 1°: 7.2) $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \dfrac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$ имеем $F(D)e^{kx}v(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p\, D^p(e^{kx}v(x)) = e^{kx}\sum\limits_{p=0}^{n} a_p\, [k^pv(x) + pk^{p-1}Dv + \dfrac{p(p-1)}{2!}k^{p-2}D^2v + \ldots + D^pv] =$ $= e^{kx}\sum\limits_{p=0}^{n} a_p\,(D + k)^pv = e^{kx}F(D + k)v(x)$ ■

Приведем операции (оперц.) над оперт-ми. Рас-им оперт-ы $F_1(D)$ и $F_2(D)$ и опр-им сд. оперц-и над ними.

1*. Сумма: $[F_1(D) + F_2(D)]f(x) = F_1(D)f(x) + F_2(D)f(x)$.

Из этого опр. следует, что $$\sum_{p=0}^{n} a_pD^p + \sum_{p=0}^{n} b_pD^p = \sum_{p=0}^{n}\left(a_p + b_p\right)D^p, \qquad (11)$$
т.е. правило сж-ия оперт. мчл-ов не отличается от правила сж-я обычных мчл.

2*. Произведение: $F_1(D) \cdot F_2(D)f(x) = F_1(D)[F_2(D)f(x)]$, т.е. на фк-ю сначала действует оперт. $F_2(D)$, а затем $F_1(D)$, значит, правило умн-я оперт. мчл-ов не отличается от правила умн-я обычных мчл.

Дсв-но, $$\sum_{p=0}^{n} a_pD^p \sum_{q=0}^{m} b_q = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} a_pb_qD^{p+q}, \qquad (11а)$$
т.к. $\sum\limits_{p=0}^{n} a_pD^p \sum\limits_{p=0}^{m} b_pD^p\, f(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} a_pD^p \left[\sum\limits_{q=0}^{m} b_qf^q(x)\right] = \sum\limits_{p=0}^{n}\sum\limits_{q=0}^{m} a_pb_qf^{p+q}(x)$.

Из (11а) следует комм-сть умн-я оперт-ов $F_1(D)F_2(D) = F_2(D)F_1(D)$.

Из правила диф-я суммы следует справедливость дист. закона.
$$F(D)[F_1(D) + F_2(D)] = F(D)F_1(D) + F(D)F_2(D).$$

3*. Обратный оперт. $\dfrac{1}{F(D)}$ опр-ся как р-ие (частное) ур-я (10б), т.е.
$$F(D)y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{F(D)}f(x). \qquad (11б)$$

Отсюда следует, что $$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}f(x)\right] = f(x) \qquad (11в)$$

и $$\frac{1}{F(D)}[F(D)f(x)] = f(x). \qquad (11г)$$

Пзв-ие оперт-ов $\Phi(D)$ и $\dfrac{1}{F(D)}$ опр-ся рав-ом $\Phi(D)\dfrac{1}{F(D)}f(x) = \Phi(D)\left[\dfrac{1}{F(D)}f(x)\right]$.

Анч-но $$\frac{1}{F(D)}\,\Phi(D)f(x) = \frac{1}{F(D)}\,[\Phi(D)f(x)].$$

Поэтому в фм-ах (11в) и (11г) скобки можно опустить.

Заметим также, что $$\frac{1}{D^p}\,f(x) = \iint\ldots\int f(x)\mathrm{d}x^p, \qquad (12)$$

т.к. $\frac{1}{D^p}\,f(x)$ яв-ся по опр-ю оперт-а $\frac{1}{F(D)}$ р-ем ур-ия $D^p\,y = f(x)$.

Проверим сд. св-ва оперт-а $\frac{1}{F(D)}$:

**с1**. $\frac{1}{F(D)}\,kf(x) = k\frac{1}{F(D)}\,f(x)$, где $k$ – пст. мнж-ль. Т.к. $F(D)k\cdot\frac{1}{F(D)}\,f(x) = kF(D)\cdot\frac{1}{F(D)}\,f(x) = kf(x)$.

**с2**. $\frac{1}{F(D)}\,e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}$, если $F(k) \neq 0$. Т.к. $F(D)\cdot\frac{e^{kx}}{F(k)} = \frac{e^{kx}F(k)}{F(k)} = e^{kx}$.

**с3**. $\frac{1}{F(D^2)}\,\sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}$, если $F(-a^2) \neq 0$. Т.к. $F(D^2)\,\frac{\sin ax}{F(-a^2)} = \frac{\sin ax F(-a^2)}{F(-a^2)} = \sin ax$.

**с4**. $\frac{1}{F(D^2)}\,\cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$, если $F(-a^2) \neq 0$. Т.к. $F(D^2)\,\frac{\cos ax}{F(-a^2)} = \frac{\cos ax F(-a^2)}{F(-a^2)} = \cos ax$.

**с5**. $\frac{1}{F(D)}\,e^{kx}\,v(x) = e^{kx}\,\frac{1}{F(D+k)}\,v(x)$. Т.к. $F(D)\,\frac{e^{kx}v(x)}{F(D+k)} = e^{kx}\,F(D+k)\frac{1}{F(D+k)}\,v(x) = e^{kx}\,v(x)$.

**с6**. $\frac{1}{F(D)}\,[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)}f_1(x) + \frac{1}{F(D)}f_2(x)$. Т.к. $F(D)\left[\frac{1}{F(D)}f_1(x) + \frac{1}{F(D)}f_2(x)\right] =$ $= f_1(x) + f_2(x)$.

**с7**. $\frac{1}{F_1(D)F_2(D)}f(x) = \frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right]$. Т.к. $F_2(D)F_1(D)\cdot\frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right] = F_2(D)\,\times$ $\times\,\frac{1}{F_2(D)}f(x) = f(x)$.

Используя св-ва оперт-ов и их оперц-й, р-им сд. примеры.

**п33**. $y'' + 4y = e^x$.

Р. $(D^2 + 4)y = e^x \Rightarrow y = \frac{1}{D^2+4}\,e^x = \frac{e^x}{5}$, т.к. $\frac{1}{F(D)}\,e^{kx} = \frac{e^{kx}}{D(k)}$, $k = D = 1$.

**п34**. $y^{\mathrm{IV}} + y = 2\cos 3x$.

Р. $(D^4 + 1)y = 2\cos 3x \Rightarrow y = \frac{1}{D^4+1}\,2\cos 3x = \frac{2\cos 3x}{(-9)^2+1} = \frac{1}{41}\cos 3x$.

**п35**. $y'' + 9y = 5\sin x$.

Р. $(D^2 + 9)y = 5\sin x \Rightarrow y = \frac{1}{D^2+9}\,5\sin x = \frac{5\sin x}{(-1)+9} = \frac{5}{8}\sin x$.

**п36**. $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}$.

Р. $(D - 2)^2y = x^2e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{(D-2)^2}\,e^{2x}x^2 = e^{2x}\,\frac{1}{D^2}\,x^2 = e^{2x}\,\frac{x^4}{12}$ (см. (12)).

**п37**. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

Р. $(D - 1)^3y = e^x \Rightarrow y = \frac{1}{(D-1)^3}\,e^x$, здесь $F(k) = 0$, поэтому используем с5: $y = \frac{1}{(D-1)^3}\,e^x\cdot 1 =$ $= e^x\,\frac{1}{D^3}\,1 = e^x\,\frac{x^3}{6}$ (см. п36).

**п38**. $y''' - y = \sin x$.

Р. $(D^3 - 1)y = \sin x \Rightarrow y = \dfrac{1}{D^3-1}\sin x$. Т.к. оперт. $D^3$ нечет. сп-и, то воспользоваться с3 нельзя. Поэтому рас-им ур-ие $(D^3 - 1)y = e^{ix}$ или $(D^3 - 1)y = \cos x + i\sin x$, мнимая часть р-ия к-ого будет р-ем исх. ур-я. $y = \dfrac{1}{D^3-1}e^{ix} = \dfrac{e^{ix}}{i^3-1} = \dfrac{e^{ix}}{i^3+i^2} = \dfrac{-e^{ix}}{i+1} = \dfrac{(i-1)e^{ix}}{2} = \dfrac{(i-1)(\cos x + i\sin x)}{2} =$
$= -\dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \dfrac{i}{2}(\cos x - \sin x)$. О: $y = \dfrac{\cos x - \sin x}{2}$.

**п39**. $y^{\mathrm{IV}} - y = e^x$.

Р. $(D^4 - 1)y = e^x \Rightarrow y = \dfrac{1}{D^4-1}e^x = \dfrac{1}{D-1}\cdot\dfrac{1}{D+1}\cdot\dfrac{1}{D^2+1}e^x = \dfrac{1}{D-1}\dfrac{e^x}{4} = \dfrac{1}{4}e^x\dfrac{1}{D}\cdot 1 = \dfrac{xe^x}{4}$.

**зм7**. Иногда приходится находить действие обратного оперт. на мчл-н, т.е. находить $\dfrac{1}{F(D)}(A_px^p + \ldots + A_1x + A_0) = \dfrac{1}{a_0 + a_1D + \ldots + a_nD^n}(A_px^p + \ldots + A_1x + A_0)$. В этом случае будем формально делить 1 на $F(D)$ (что допустимо, ибо над оперн-ми мчл. можно выполнять все оперц-и, как над обычными мчл.) до получения в частном оперт-а $\Phi_p(D)$ сп-и $p$ (т.к. начиная с $\Phi_{p+1}(D)$ $(A_nx^n + \ldots + A_1x + A_0) = 0$), а затем на мчл-н подействуем оперт-ом $\Phi_p(D)$.

**п40**. $y'' + y = x^2 - x + 2$.

Р. $(D^2 + 1)y = x^2 - x + 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{D^2+1}(x^2 - x + 2) = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) =$
$= x^2 - x + 2 - D^2(x^2 - x + 2) = x^2 - x + 2 - 2 = x^2 - x$. $D^4$ не учитываем и получим: $\dfrac{1}{1+D^2} = 1 - D^2$.

$$\begin{array}{l|l} -\;1 & 1+D^2 \\ \cline{2-2} \;\;\;1+D^2 & 1-D^2 \\ \cline{1-1} \;\;-D^2 & \\ \;\;\;-D^2-D^4 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;\;\;\;\;\;D^4 & \end{array}$$

**п41**. $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$.

Р. $(D^2 + 2D + 2)y = x^2e^{-x} \Rightarrow y = \dfrac{1}{(D+1)^2+1}e^{-x}x^2 = e^{-x}\dfrac{1}{D^2+1}x^2 = e^{-x}(1 - D^2)x^2 = e^{-x}(x^2 - 2)$.

Рас-им неодн. ур-е Эйлера $a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = f(x)$ (13)

или $a_n(ax + b)^ny^{(n)} + a_{n-1}(ax + b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1(ax + b)y' + a_0y = f(x)$. (13а)

Их можно интв-ть путем р-ия ств. одн. ур-й, а для нахождения част. р-ия прб-ть ур-ия Эйлера заменой пер-ых $x = \pm e^t$ (или $ax + b = \pm e^t$) к ур-ю с пст. коэф-ми, для к-ых хорошо разработаны методы нахождения част. р-й.

**п42**. $x^2y'' - xy' + y = x\ln^3x$.

Р. $x^2y'' - xy' + y = 0$; $y = x^k$, тогда $x^2k(k - 1)x^{k-2} - xkx^{k-1} + x^k = 0 \Rightarrow (k^2 - k)x^k - kx^k + x^k = 0 \Rightarrow k^2 - k - k + 1 = 0 \Rightarrow (k - 1)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$, тогда $y_0 = C_1x + C_2x\ln x$ (см. зм2: 4°). Полагая $x = e^t$ (см. 4°), исх. ур-ие приводим к ур-ю с пст. коэф-ми $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y = t^3e^t$ или $(D - 2)^2y = t^3e^t \Rightarrow y =$
$= \dfrac{1}{(D-1)^2}e^tt^3 = e^t\dfrac{1}{D^2}t^3 = \dfrac{e^tt^5}{20}$, $y = \dfrac{x\ln^5x}{20}$, тогда $y = \left(C_1 + C_2\ln x + \dfrac{\ln^5x}{20}\right)x$ – общ. р-ие исх. ур-ия.

**8°. Задачи по составлению дифференциальных уравнений высших порядков**. Рас-им сд. задачи, приводящие к дифн. ур-ям высших порядков.

**з1** (прямолинейное движение точки). Найти закон прямолинейного движения (двж.) материальной точки (тч.) массой $m$ под действием силы $F$, звщ-ей от вр-и, или скр-и, или крд-ы тч-и с нач. усл-ми $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$.

Р. Пусть тело движется по оси $Ox$, тогда по закону Ньютона ($ma = F$) получим
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F. \tag{14}$$

Рас-им три случая: 1) Сила зв-т от вр-и, т.е. $F = F(t)$. Т.к. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, то ур. (14) приводится к виду $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$, откуда, интегрируя (инту.) и учитывая нач. усл-я, получим $v = v_0 +$

$+\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{t_0}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u$ или $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{t_0}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u$, инту-я вторично с учетом нач. усл-й, имеем

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} F(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z. \qquad (14а)$$

2) Сила зв-т от скр-и: $F = F(v)$. Тогда, заменив $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, получим $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v)$ или $m\dfrac{\mathrm{d}v}{F(v)} = \mathrm{d}t$, откуда, инту-я и учитывая нач. усл-я, имеем $m\displaystyle\int_{v_0}^{v}\dfrac{\mathrm{d}v}{F(v)} = t - t_0$. (15)

Пусть удалось интв-ть это ур. и разрешить отс-но $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \varphi(t, t_0, v_0)$, тогда

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t}\varphi(z, t_0, v_0)\mathrm{d}z\ . \qquad (15а)$$

Если из ур. (15) нельзя ор-ть $v$ как фк-ю от $t$, то в исх. дифн. ур-и производим замену $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ и переписываем ур-ие в виде $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v)$, откуда с учетом нач. усл. $v(x_0) = v_0$, получим

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{u\mathrm{d}u}{F(u)}\ . \qquad (15б)$$

Простейшим случаем прямолин. двж-я с силой, звщ-ей от скр-и, яв-ся двж-ие в сопрщ-йся среде, когда сила сопр-ия прцн-на скр-и. Т.к. в этом случае можно считать $F(v) = -\,kv$, то рав-во (15б) примет вид $x = x_0 - \dfrac{m}{k}(v - v_0)$, а фм. (15) прб-ся к виду $\dfrac{m}{k}\ \ln\dfrac{v_0}{v} = t - t_0$ или

$$v = v_0\, e^{-k(t-t_0)/m}\ . \qquad (15в)$$

Рас-им конкретную задачу такого типа.

**п43**. Моторная лодка двж-ся со скр-ю 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен (вык.) и через 20 с скр-ть лодки уменьшилась до 6 км/ч. Выч-ть скр-ть лодки через 2 мин после вык-я мотора и пройденное лодкой рст-ие в течение одной минуты после вык-я мотора.

Р. Из усл-я задачи имеем $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 10$ км/ч, $v|_{t\,=\,20\text{ с}} = 6$ км/ч. Поэтому по фм-е (15в) получим $6 = 10e^{-k/(180\text{ m})}$, откуда $e^{-k/m} = (0{,}6)^{180}$, или $k/m = -\,180\ln 0{,}6 = 180 \cdot 0{,}5108 = 91{,}944$. Сдт-но, $v|_{t=1\text{мин}} = 10 \cdot (0{,}6)^{180/60} = 10(0{,}6)^3 = 2{,}16$ км/ч, а $x|_{e=1\text{мин}} = (10 - 2{,}16)/91{,}944 = 7{,}84/91{,}944 \approx 85{,}3$ м.

Предположим теперь, что $v_2 = 1{,}5$ м, а $v|_{t=4\text{с}} = 1$ м/с. Выч-им, через сколько вр-и скр-ть лодки уменьшится до 0,01 м/с и какой путь пройдет лодка до остановки. Имеем $1 = 1{,}5e^{-4k/m}$, откуда $e^{-k/m} = \left(\dfrac{1}{1{,}5}\right)^{1/4}$, или $\dfrac{k}{m} = \dfrac{1}{4}\ln 1{,}5 = \dfrac{1}{4}\cdot 0{,}4055 = 0{,}1055 = 0{,}1014$. Сдт-но, $t|_{v=0{,}01\text{м/с}} = \dfrac{1}{0{,}1014}\ \times$ $\times\ \ln\dfrac{1{,}5}{0{,}01} = \dfrac{1}{0{,}1014}\ln 150 = \dfrac{5{,}0107}{0{,}1014} \approx 50$ с, а $x|_{v=0} = \dfrac{1{,}5}{0{,}1014} \approx 14{,}8$ м.

3) Сила зв-т от крд-ы тч-и: $F = F(x)$. Тогда в дифн. ур-и $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x)$ произведем подн-у $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, тогда $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x)$, откуда, инту-я и используя нач. усл. ($v(x_0) = v_0$), получим $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(u)\,\mathrm{d}u \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{2}{m}\displaystyle\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u}$ , отсюда, инту-я с учетом нач. усл. ($x(t_0) = x_0$), имеем

$$t = t_0 \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u}}. \quad (16)$$

Врз-в отсбда $x$ как фк-ю от $t$, получим закон двж-я тч-и.

Так, если, н-р, тч. движется прямолинейно под действием силы $F = km/x^3$ при нач. усл. $x(t_0) = x_0$, $v(x_0) = v_0$, то $t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{z} \frac{km}{u^3}\mathrm{d}u}} = x_0 \int_{x_0}^{x} \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{(v_0^2x_0^2 + k)z^2 - kx_0^2}}$

или
$$t = \frac{x_0}{v_0^2x_0^2 + k}\left[\sqrt{(v_0^2x_0^2 + k)x^2 - kx_0^2} - v_0x_0\right].$$

Разрешив это кр. отс-но $x$, получим закон двж-я тч-и $x = \sqrt{(x_0 + v_0t)^2 + \frac{kt^2}{x_0^2}}$.

Если тч. двж-ся под действием силы отталкивания от центра $O$, то $k > 0$; если под действием силы притяжения, то $k < 0$, когда тч. достигает уентра через вр. $T$, опрм-ое из усл-я $x = 0$ при $t = T$. Полагая $k = -k_1^2$, получим $(x_0 + v_0T)^2 - \frac{k_1^2T}{x_0^2} = 0$. Разложим это ур. на мнж-и и приравняем каждый из них к нулю: $x_0 + v_0T - \frac{k_1T}{x_0} = 0$, $x_0 + v_0T + \frac{k_1T}{x_0} = 0$. Второе ур. отбрасываем, т.к. $T$ не может быть отц-ым. Из первого ур. находим $T = \frac{x_0^2}{k_1 - v_0x_0}$. Рас-им конкретный

**п44**. Опр-ть скр-ть, с к-ой метеор ударяется о Землю, предполагая, что он падает прямолинейно с неогр-но большого рст. из состояния покоя и при его двж-и к Земле уск-ие обратно прцн-но кв-у его рст-я от центра Земли.

Р. Обз-им рст-ие метеора от центра Земли через $r$, сост-им дифн. ур-ие $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{r^2}$. Т.к. уск-ие $w = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, где $v$ – скр. двж-ия метеора, то ур-ие прб-ся к виду $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}$, или $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{r^2}$, поскольку $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$.

Общ. инт-л последнего ур. имеет вид $\frac{v^2}{2} = -\frac{k}{r} + C$, где $C$ опр-ся из нач. усл. $v = 0$ при $r = \infty$, т.е. $C = 0$. Итак, $v^2 = -2k/r$.

Скр-ть при падении на Землю получим, подс-я вместо $r$ радиус Земли $R = 6{,}3777 \cdot 10^6$ м, мнж-ль прцн-сти можно врз-ть через уск-ие силы тяжести на пвх-ти Земли $g = 9{,}8$ м/с$^2$ и через $R$. Имеем $-g = k/R^2$, откуда $k = -gR^2$ (знак минус взят потому, что рст-ие отсчитывается от нач. $r = 0$, а уск-ие нпв-но к нач-у). Итак, $v = \sqrt{2gR^2/R} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}377 \cdot 10^6} = 11180$ м/с $\approx 11$ км/с.

**з2** (колебания маятника). Материальная тч. $P$ массой $m$ подвешена на нерастяжимой нити $l$, массой к-ой можно пренебречь. Под действием силы тяжести тч. $P$ двж-ся по окр-ти радиуса $l$, лежащей в вертикальной пл. Найти закон двж-я маятника, если он в нач. момент отклонен от вертикального положения (пж.) на угол $\alpha < \pi/2$ и имеет нач. скр-ть, равную нулю (рис. 1).

Р. Пж-ие маятника опр-им углом $\varphi = \angle AOP$, отсчитываемым от вертикали. На маятник действует сила тяжести $mg$, нпвн-ая вертикально вниз, и сила натяжения нити. Пусть $S$ – путь, пройденный тч-й по дуге $\overset{\frown}{PA}$ окр-ти, $S = l\varphi$. Кас-я сосщ. силы тяжести, равная $mg\sin\varphi$, нпв-на в сторону уб-ия $S$, поэтому закон Ньютона дает дифн. ур-ие

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2} = -\,mg\sin\varphi. \qquad (17)$$

Сократив на $m$ и заменив $S$ на $l\varphi$, приведем его к виду $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$ (17а)

Стн. (17а) есть ур-ие мтч. маятника, к-ое представляет собой ур-ие второго порядка, не содержащее незв. пер. Понижение порядка достигается подн-ой $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$; $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}$, и ур. (17а) приводится к виду $\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$, или $\omega\mathrm{d}\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + C_1$. Т.к. $\omega$ есть угл. скр., то при $t = 0$ вследствие $v = 0$ также и $\omega = 0$. Поэтому $0 = \frac{g}{l}\cos\alpha + C_1$, откуда $C_1 = -\frac{g}{l}\cos\alpha$, так что промежуточный инт-л приводится к виду $\omega^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)$.

При взр-и $t$ угол $\varphi$ уб-ет и прв-я $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ должна быть отц-ой, поэтому при извлечении корня нх-мо взять знак минус: $\omega = -\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}$ . Подс-я вместо $\omega$ врж-ие $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ и разделив пер-ые, получим $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}$ или $\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} t + C_2 =$ $= -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$ . С учетом нач. усл. это р-ие можно переписать в виде опрн. инт-а:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\alpha)}}\,. \qquad (17б)$$

Инт-л в фм-е (17б) не врж-ся в элр. фк-ях и представляет собой один из типов так назм. элч. инт-ов.

Если отк-ия маятника малы, то в ур-и (17а) можно заменить $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (18)$$

Фм. (18) яв-ся ур-ем свободных гармч. клб-й.

**з3** (равновесие нити). Пусть дана тяжелая гибкая одн. нерастяжимая нить, подвешенная двумя концами в тч. $A$ и $B$. Предположим, что крв-я, по к-ой располагается нить, лежит в крд. пл-ти $xOy$, как на рис. 2. Выделим часть нити $O_1M$ между тч-й $O_1$ и прзвл-ой тч. $M(x, y)$. Эта часть нити находится вод действием сд. сил:

1) натяжения $H$, приложенного в тч. $O_1$, нпвн-го по касс-ой в тч. $O_1$ грзт-но и производимого частью $AO_1$ нити;

2) натяжения $T$, приложенного в тч. $M$, нпвн-го по касс-ой в тч. $M$ и производимого частью $MB$ нити;

3) нагрузки $W$ на часть $O_1M$ нити, нпвн-ой вниз.

Найти ур-ие фигуры равновесия нити.

Р. Т.к. нить находится в равновесии, то по законам стс-ки сумма пркц-й всех этих сил на крд. оси должна быть равна нулю. Сдт-но, $T\cos\alpha - H = 0$, $T\sin\alpha - W = 0$, где $\alpha$ – угол между натяжением $T$ и плж. нпв-ем оси $Ox$, а $H$, $T$, $W$ – вел-ы ствщ. сил.

Если в этих ур. перенести вправо ств-но $H$ и $W$ и разделить обе части второго полученного ур. на ствщ. части первого, то приходим к дифн. ур-ю первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{W}{H}\,, \qquad (19)$$

его инт-л есть крв-я, форму к-ой принимает нить в пж-и равновесия.

Грзт. натяжение $H$ – пст. вел. Поэтому если известна нагрузка $W$ как фк-я от $x$: $W = F(x)$, то ур. (19) допускает непосредственное интв., т.е. $y = \dfrac{1}{H}\int F(x)\,\mathrm{d}x + C$, где $C$ опр-ся из нач. усл.

Однако могут встретиться случаи, когда известна не сама фк. $W$, а ее прв-я по $x$. Тогда, диф-уя по $x$ обе части ур. (19), в этом случае приходим к дифн. ур-ю 2-го порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{H}\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\,. \tag{19a}$$

Если $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = f(x)$, где $f(x)$ – известная фк., то р-ие ур. (19а) имеет вид $y = \dfrac{1}{H}\int\left(\int F(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x +$ $+ C_1x + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ опр-ся из нач. усл.

В более общ. случаях, когда правые части ур-й (19) и (19а) зв-т не только от $x$, но и от $y$ и $y'$, применяются разные приемы для нахождения р-ия, т.к. непосредственное интв. в этом случае невозможно.

Заметим, что во всех случаях р-ие будет содержать пст. вел-у $H$. Зная крд-ы концов $A$, $B$ и тч-у $O_1$, можно выч-ть $H$. Приведем конкретный

**п45**. Гибкий одн. нерастяжимый канат закреплен в двух тч. и несет нагрузку, равномерно рсп-ную по грзт. пркц-и каната: $q$ Н/м. Опр-ть форму равновесия каната, пренебрегая его весом (обычно так ставится задача при опр-и формы равновесия цепей или канатов висящих мостов: нагрузка (мост, висящий на цепи или канате) равномерно рсп-на по горизонтальной пркц-и и вел. ее такова, что весом самой цепи или каната можно пренебречь).

Р. В расв. случае $W = qx$, где $x$ – крд-а тч-и $M$ служит одновременно и горизонтальной пркц. части $O_1M$ каната. Поэтому дифн. ур. (19) принимает вид $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{qx}{H}$. Его общ. р-ие $y = \dfrac{qx^2}{2H} + C$ представляет собой семейство парабол. С учетом нач. усл. $y = q/H$ при $x = 0$ находим $C = q/H$. Тогда искомое част. р-ие имеет вид $y = \dfrac{q}{H}\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)$.

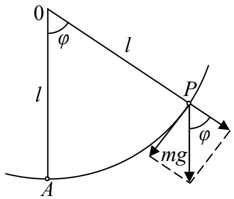


Рис. 1

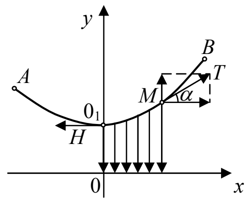


Рис. 2

# ЛЕКЦИЯ 31

## 11.3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**1°. Нормальная система дифференциальных уравнений**. Во многих задачах физики и техники требуется опр-ть сразу нескольких фк-й, связанных между собой несколькими дифн. ур-ми. Свк-ть таких ур. наз. системой дифн. ур-й.

Н-р, пусть по нек-ой крв. $L$ в пр-ве под действием силы $F$ двж-ся материальная тч. массой $m$. Найти закон двж-ия тч-и.

Р. Обз-им радиус-вк. двж-ия тч-и через $r(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$. Тогда скр-ть и уск-ие двж-я тч-и выч-ся:

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},\ a = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}.$$

В силу второго закона Ньютона имеем $ma = F$, пркт-уя к-ую на оси крд-т, получим

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= X\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right); \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= Y\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right); \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= Z\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Дифн. ур-ия (1) представляют собой систему трех ур. второго порядка отс-но трех искомых ур.: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Рас-им также систему первого порядка вида (иногда систему ур. будем записывать в строку)

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, ..., y_n);\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, ..., y_n);\ ...,\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, ..., y_n), \tag{1а}$$

к-ая наз. системой в нормальной (норм.) форме или норм.-ой системой.

Р-ем системы (1а) наз. свк-ть фк-й $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, удщ-х каждому из ур-й этой системы.

Теорему сущв-ия и едн-сти р-ия системы рас-ли в зм1а из 1°:11.2.

Система ур-й второго и более порядка (в част., одного ур-я $n$-го порядка) можно свести к норм. системе, если ввести новые искомые фк-и. Н-р, если в системе (1) полагаем $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w$, то получим норм. систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}X(t, x, y, z, u, v, w); \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}Y(t, x, y, z, u, v, w); \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}Z(t, x, y, z, u, v, w); \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w \end{aligned}\right\}. \tag{1б}$$

**2°. Нахождение решения нормальной системы**. Рас-им сд. методы:

1*. Сведение системы к одному ур. более высокого порядка. В зм1а из 1°:11.2 было показано, что одно дифн. ур-ие $n$-го порядка может быть приведено к норм. системе ур-й.

Возможно и обратное: норм. система $n$ дифн. ур-й первого порядка экв-на одному дифн. ур-ю порядка $n$.

Пусть дана норм. система (1а). Возьмем ее 1-ое ур-ие и продиф-уем обе его части по $x$: $\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}$. Заменив $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_i$, получим $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n$, т.е.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Дифв-ие (2) $\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$ дает

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2а}$$

Продолжая анч-но, получим систему

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n),\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{2б}$$

и еще одно ур-ие

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2в}$$

Предположим, что в расв. обл-ти изм-ия пер-х опрт-ль

$$J = \frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему (2б) можно разрешить (в силу сущв-ия неявной фк-и 8°:9.1) отс-но $y_2, \ldots, y_n$,

т.е. получить

$$y_i = \varphi_i\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right),\ i = \overline{2, n}\ . \tag{2г}$$

Подс-ив систему (2г) в (2в), окончательно получим ур-ие

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right), \tag{2д}$$

экв-ое системе (1а).

Если записать общ. р-ие ур-я (2д) в виде $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n)$, (2е)
то можно найти остальные фк-и $y_2, y_3, \ldots, y_n$, учитывая (2г), т.е. получим р-ие системы в виде

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n),\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)\ . \tag{2ж}$$

**п1**. Найти р-ие нормой системы: $\frac{dx}{dt} = -7x + y$; $\frac{dy}{dt} = -2x - 5y$.

Р. $\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$ или $\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5y$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right) \Rightarrow$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0 \underset{\text{хркч.}}{\Rightarrow} k^2 + 12k + 37 = 0 \Rightarrow k = -6 \pm i$. Тогда $x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \underset{\text{диф.}}{\Rightarrow}$

$\frac{dx}{dt} = -6e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-6t}(-C_1\sin t + C_2\cos t))$. Подс-я в $y = \frac{dx}{dt} + 7x$, получим $y =$
$= e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t - (C_1 - C_2)\sin t]$.

**п2**. Найти р-ие норм. системы $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = x$.

Р. $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ или $\frac{d^2x}{dt^2} = x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \underset{\text{хркч.}}{\Rightarrow} k^2 - 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$. Тогда $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$,
отсюда $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3$. Можно полагать $C_3 = 0$.

2*. Нахождение интегрируемых (интум.) комбинаций. Интв-ие систем лин. ур-й

$$\frac{dy_i}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

иногда осуществляется подбором так назм-ых интум. комбинаций.

Интум. комбинацией наз. дифн. ур-ие, экв-ое (2в), но легко интущ-еся, н-р, явщ-еся ур-ем вида

$$d\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \tag{3а}$$

или ур-ем, сводящимся заменой пер-ых к интум. типу ур-й с одной неизвестной фк.

**п3**. $\frac{dx}{dt} = y;\ \frac{dy}{dt} = x.$ (см. п2).

Р. $\frac{d(x+y)}{dt} = x + y \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(x + y) = t + \ln C_1 \Rightarrow x + y = C_1e^t,\ \frac{d(x-y)}{dt} = -(x - y) \Rightarrow$

$\frac{d(x-y)}{x-y} = -dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(x - y) = -t + \ln C_2 \Rightarrow x - y = C_2e^{-t}$. Тогда $\begin{cases} x + y = C_1e^t; \\ x - y = C_2e^{-t} \end{cases} \left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(C_1e^t + C_2e^{-t}\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(C_1e^t - C_2e^{-t}\right). \end{aligned}\right.$

Р-им эту же систему с помощью замены пер-ой. Складывая оба ур-ия, получим $x' + y' = x + y$. Полагаем $u = x + y$, тогда $u' = u \Rightarrow \frac{du}{u} = dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln u = t + \ln C_1 \Rightarrow u = C_1e^t$, т.е.

$$x + y = C_1e^t \tag{3б}$$

или $x' + y' = C_1e^t$. Заменяя $y' = x$, получим лин ур-ие $x' + x = C_1e^t$. (3в)

Р-им его методом врц-и: $x' + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln x = -t + \ln C \Rightarrow x = Ce^{-t}$. Подс-я $x$ в (3в), получим $C'e^{-t} - Ce^{-t} + Ce^{-t} = C_1e^t \Rightarrow dC = C_1e^{2t}dt \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} C = \frac{1}{2}C_1e^{2t} + C_2$, т.е. $x = \frac{1}{2}C_1e^t + C_2e^{-t}$ и учитывая (3б), получим $y = \frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-t}$.

Одна интум. комбинация дает одно ур. $\Phi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, к-ое наз. первым инт. системы (3).

Если найдено $k$ ($k < n$) интум. комбинаций (незв-ых)

$$\Phi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = 0;\ \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = 0;\ \ldots;\ \Phi_k(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, \tag{3г}$$

то систему (2д) можно свести к $n - k$ ур-ям с $n - k$ неизвестными.

**п4**. Р-ить систему $dx/dt = y - z;\ dy/dt = z - x;\ dz/dt = x - y.$ (4)

Р. Сложив (сж.) все три ур-ия, получим $\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0 \Rightarrow d(x + y + z) = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$

$$x + y + z = C_1. \tag{4а}$$

Теперь, умн-ив ур-ия системы ств-но на $x$, $y$, $z$ и сж-в их, получим $xx' + yy' + zz' = 0$ или $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{4б}$$

Получили два первых инт-а (4а) и (4б). Если бы удалось получить еще один первый инт-л, то система была бы р-на. Здесь это не удается. Поэтому продиф-уем по $t$ третье ур. системы (4): $z'' = x' - y'$ или, используя первых два ур., имеем $z'' = x + y - 2z$ и с учетом (4а) получим $z'' + 3z = C_1$ $\underset{\text{хркч.}}{\Rightarrow} k^2 + 3 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}i$, тогда получим $z_0 = C_2\cos t\sqrt{3} + C_3\sin t\sqrt{3}$ – общ. р-ие ств-го одн. ур-я. Част. р-ие неодн. ур-ия ищем в виде $z = B_0$, подс-ив ее в исх. ур-ие, имеем $3B_0 = C_1 \Rightarrow B_0 = C_1/3$, тогда $\tilde{z} = C_1/3$ – част. р-ие неодн. ур-ия. Отсюда получим общ. р-ие неодн. ур-ия:

$$z = \frac{1}{3}C_1 + C_2\cos t\sqrt{3} + C_3\sin t\sqrt{3}. \tag{4в}$$

Далее, т.к. $\begin{cases} x + y = z'' + 2z, \\ x - y = z', \end{cases}$ то для опр-ия неизвестных фк. $x$ и $y$ имеем систему

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}C_1 - C_2\cos t\sqrt{3} - C_3\sin t\sqrt{3}, \\ x - y = \sqrt{3}C_3\cos t\sqrt{3} - \sqrt{3}C_2\sin t\sqrt{3}, \end{cases}$$

р-ие к-ой дает
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}C_1 - \dfrac{C_2 - \sqrt{3}C_3}{2}\cos t\sqrt{3} - \dfrac{C_3 + \sqrt{3}C_2}{2}\sin t\sqrt{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}C_1 - \dfrac{C_2 + \sqrt{3}C_3}{2}\cos t\sqrt{3} - \dfrac{C_3 - \sqrt{3}C_2}{2}\sin t\sqrt{3}. \end{cases} \tag{4г}$$

Врж-ия (4в) и (4г) образуют р-ие системы (4).

3*. Для выделения интум. комбинаций из системы (3) удобнее ее записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{f_1(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{\mathrm{d}y_2}{f_2(x, y_1, ..., y_n)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}y_n}{f_n(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{\mathrm{d}x}{1} \tag{4д}$$

и использовать сд. св-во равных дробей: если $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \ldots = \dfrac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

имеет место стн-ие
$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{4е}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подбираются так, чтобы числитель в (4е) был полным диф-ом знаменателя или же знаменатель был равен нулю. В стн-и (4д) незв. пер-я и искомые фк. равноправны.

**п4а**. Найти общ. р-ие системы $y' = \dfrac{mz - lx}{ly - nz}$, $z' = \dfrac{nx - my}{ly - nz}$.

Р. Запишем систему в симч. форме: $\dfrac{\mathrm{d}x}{ly - nz} = \dfrac{\mathrm{d}y}{mz - lx} = \dfrac{\mathrm{d}z}{nx - my} = \gamma$ и воспользуемся стн-ем (4е).

Выбираем $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ и $\alpha_3 = l$, тогда имеем $\dfrac{\mathrm{d}(mx + ny + lz)}{0} = \gamma$, т.е. $\mathrm{d}(mx + ny + lz) = 0$, откуда
$$mx + ny + lz = C_1. \tag{4ж}$$

Анч-но выбирая $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ и $\alpha_3 = 2z$, приходим к рав-ву $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$. (4з)

Стн-ия (4ж) и (4з) образуют два первых инт-а системы, неявно опрщ-их общ. р-ие.

**3°. Система линейных уравнений. Линейный оператор. Независимость функций**. Система дифн. ур-й наз. линейной, если она лин-на отс-но искомых фк. и их прв-ых, т.е. имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t),\ i = \overline{1, n} \tag{5}$$

или в вкн. форме
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + F, \tag{5а}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t \\ \ldots \\ \mathrm{d}x_n/\mathrm{d}t \end{pmatrix}$.

Опр-им лин. оператор (оперт.) $L$ рав-ом $L(X) = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} - AX$, тогда ур (5) имеет вид
$$L(X) = F. \tag{5б}$$

Если $F = 0$, то система (5) наз. лин. одн-ой и имеет вид $L(X) = 0$. (5в)

Оперт. $L$ обладает сд. св-ми (см. 3°:11.2):

**с1**. $L(CX) = CL(X)$.

**с2**. $L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2)$.

**сл1**. Следствием с1 и с2 яв-ся $L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(X_i)$ ($\{C_i\}$ – прзвл. пст-ые). (5г)

**т1**. Лин. комбинация $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ р-й $X_1, X_2, \ldots, X_n$ лин. одн. системы $L(X) = 0$ яв-ся р-ем той же системы.

Д. $L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot 0 = 0$ ■

**т2**. Если лин. одн.система (5в) с дсв. коэф-ми $a_{ij}(t)$ имеет комп. р-ие $X = u + iv$, то дсв-я ($u$) и мнимая ($v$) части в отдельности яв-ся р-ми той же системы.

Д. $0 = L(X) = L(u + iv) = L(u) + iL(v) \Rightarrow L(u) = 0$ и $L(v) = 0$ ■

Напомним (см. 4°: 2.1, 3°: 11.2), что вк-ы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \ldots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$ наз. лин. зв-ми на отрезке $a \le t \le b$, если сущ-ют пст-ые $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n = 0$ (5д) хотя бы при одном $\alpha_i \ne 0$.

Если рав-во (5д) справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то вк-ы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наз. лин. незв-ми.

Заметим, что вкн. рав-во (5д) экв-но $n$ рав-ам $\left(\sum_{i=1}^{n} \text{обз - им } \Sigma\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\alpha_i x_{1i}(t) = 0; \\ \Sigma\alpha_i x_{2i}(t) = 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma\alpha_i x_{ni}(t) = 0. \end{array}\right\} \tag{5е}$$

**т3**. Если вк-ы $X_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ лин. зв-мы, т.е. $\exists\ \alpha_i \ne 0$, то (см. 3°: 11.2) опрт-ль Вронского (т.е. вронскиан) системы (5е) $\forall\ t \in [a, b]$ должен быть равен нулю, т.е.

$$W = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} = 0. \tag{5ж}$$

**зм1**. Из т3 вытекает, что если вронскиан $W(x) \ne 0$ хотя бы в одной тч. $]a, b[$, то фк-и или вк-ы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ лин. незв-мы на любом $]a, b[$.

**п5**. Показать, что вк-ы $X_1 = (\cos t, \sin t)$, $X_2 = (-\sin t, \cos t)$ лин. незв-ми.

Р. Находим $W(X_1(t), X_2(t)) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ne 0$, значит, лин. незв-мы.

**п6**. Д-ть, что фк-и $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = X(t)$, $y_3(t) = X^2(t)$, $y_4(t) = X^3(t)$ лин. незв-мы.

Д. $W(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & y_4'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) & y_4''(t) \\ y_1'''(t) & y_2'''(t) & y_3'''(t) & y_4'''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & X & X^2 & X^3 \\ 0 & 1! & 2X & 3X^2 \\ 0 & 0 & 2! & 3 \cdot 2X \\ 0 & 0 & 0 & 3! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1!2!3! = 12 \ne 0.$

Система вк-ов $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ лин. зв-ма (д-ть самим).

**4°. Общее решение однородной и неоднородной системы. Метод вариации**. Без док-ва примем сд-ю

**т4**. Лин. комбинация $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ $n$ лин. незв-ых р-й $X_1, X_2, \ldots, X_n$ лин. одной системы $L(X) = 0$ с непр-ми на отрезке $a \le t \le b$ коэф-ми $a_{ij}(t)$ яв-ся общ. р-ем этой системы на том же отрезке.

**п7**. Найти общ. р-ие системы $\frac{dx}{dt} = y; \frac{dy}{dt} = -x$ или $L(X) = \frac{dX}{dt} - AX = 0$.

Р. Нетрудно проверить, что этой системе уд-ют р-ия: $x_1 = \cos t$, $y_1 = -\sin t$ и $x_2 = \sin t$, $y_2 = \cos t$, к-ые лин-но незв-мы, т.к. $W = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$. Сдт-но, общ. р-ие имеет вид $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t; \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t, \end{cases}$ где $C_1$, $C_2$ – прзвл. пст-ые.

**т5**. Если $\widetilde{X}$ яв-ся част. р-ем неодн. системы $L(X) = F$, а $X^\circ$ – общ. р-ем ств-ой одн. системы $L(X) = 0$, то сумма $X^\circ + \widetilde{X} = X$ яв-ся общ. р-ем неодн-ой системы $L(X) = F$.

Д. $L(X) = L(X^\circ + \widetilde{X}) = L(X^\circ) + L(\widetilde{X}) = 0 + F = F$ ■

Если известно общ. р-ие ств-ей одн. системы $L(X) = 0$, но подобрать част. р-ие неодн. системы $L(X) = F(X)$ не удается, то можно применить метод врц-и пст-ых.

Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i$ – общ. р-ие одн. ур. $L(X) = \frac{dX}{dt} - AX = 0$. Тогда р-ие неодн. системы $\frac{dX}{dt} - AX = F$ ищем в виде $X = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(t) X_i$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t) X_i + \underbrace{\left( \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(t) \frac{dX_i}{dt} - A \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(t) X_i \right)}_{\parallel \atop 0} = F$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(t) X_i = F.$$

Это вкн. ур-ие экв-но системе $n$ ур-й $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(t) X_{ki} = f_k(t)$, $k = \overline{1, n}$. (6)

Система $X_1, X_2, \ldots, X_n$ лин-но незв-ма, сдт-но, опрт-ль Вронского $W \neq 0$, тогда из (6) опр-ся все $C_i'(t)$ : $C_i'(t) = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, отсюда, инту-я, находим неизвестные фк-и $C_i(t) = \int \varphi_i(t)dt + \overline{C}_i$, $i = \overline{1, n}$.

**п8**. Р-ть систему: $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}$.

Р. Общ. р-ие (см. п7) ствщ-ей одн. системы $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ имеет вид $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t; \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$

Варьируем пст-ые $\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t; \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t. \end{cases}$ Откуда составляем систему (6) и р-ив ее, получим

$$\left\{ \begin{aligned} & C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0 \\ & -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t} \end{aligned} \right| \qquad \begin{aligned} & \Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow C_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin t}{\cos t} \\ & \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix} = -\frac{\sin t}{\cos t},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = 1.\ C_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \end{aligned}$$

$$\underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \begin{cases} C_1(t) = \ln(\cos t) + \overline{C}_1; \\ C_2(t) = t + \overline{C}_2 \end{cases} \text{ и окончательно получим } \begin{cases} x = \overline{C}_1 \cos t + \overline{C}_2 \sin t + \cos t \ln(\cos t) + t \sin t; \\ y = -\overline{C}_1 \sin t + \overline{C}_2 \sin t - \sin \ln(\cos t) + t \cos t. \end{cases}$$

**5°. Линейные системы с постоянными коэффициентами**. Лин. системой с пст. коэф-ми наз. система вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t),\ i = \overline{1, n} \tag{7}$$

или в вкн. форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \tag{7a}$$

В более простой форме лин. неодн. система имеет вид $L(X) = F$, (7б)

а одн. система $L(X) = 0$. (7в)

Система (7) яв-ся част. случаем системы (5) при $a_{ij}$ = const, поэтому все выводы 3° имеют место и здесь, в част-ти: общ. р-ие неодн. системы (7б) равно сумме общ. р-ия $X^\circ = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ ствщ-ей одн. системы (7в) и част. р-ия $\widetilde{X}$ неодн. системы (7б), к-е можно найти методом врц-и пст-ых. Т.о. дт-но рас-ть общ. р-ие одн. ур-ия:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \tag{8}$$

где $\{a_{ij}\}$ – пст-ые. Р-ия системы (8) будем искать в виде $x_i = \alpha_i\, e^{kt}$ , $i = \overline{1,\, n}$ , (8а)

где $\{\alpha_i\}$ – пст-ые.

Подс-я (8а) в (8) и сокращая на $e^{kt}$ , получим

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0; \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{array}\right\} \tag{8б}$$

Чтобы система (8б) имела нетривиальное р-ие, нх-мо и дт-но (см. 1°: 1.4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0\ . \tag{8в}$$

Ур-ие (8в) наз. хркч. ур-ем (см. 4°, 5°: 11.2) системы (8).

Р-я ур. (8в) сп-и $n$, находим зн-я $k$, при к-ых система (8б) имеет нетривиальные р-ия $\{\alpha_j\}$.

Если все корни хркч. ур-я $k_i$ ($i = \overline{1,\, n}$ ) различны, то, подс-я их по очереди в систему (8б), опр-ем ствщ. им нетривиальные зн-ия $\alpha_j^i$ ($i, j = \overline{1,\, n}$ ) и, сдт-но, находим $n$ р-й системы (8):

$$x_1^i = \alpha_1^i\ e^{k_i t}\ ,\ x_2^i = \alpha_2^i\ e^{k_i t}\ , \ldots,\ x_n^i = \alpha_n^i\ e^{k_i t}\ , i = \overline{1,\, n}\ , \tag{8г}$$

где верхний индекс указывает номер р-ия, а нижний индекс – номер неизвестной фк. Т.к. система $\alpha_j^i\ e^{k_i t}$ ($i = \overline{1,\, n}$ ) лин. незв-ма, то общ. р-ем одн. системы (8) будет

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} C_i\ \alpha_j^i\ e^{k_i t}\ , j = \overline{1,\, n}\ , \tag{8д}$$

где $C_i$ – прзвл. пст-ые.

Пст-ые $\alpha_j^i$ ($j = \overline{1,\, n}$ ) опр-ся из системы (8б) не однозначно, т.к. опрт-ль системы равен нулю и, сдт-но, по крайней мере одно ур. яв-ся следствием остальных. Сделаем выводы.

В вкн. форме (8)-(8д) имеют вид $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX.$ (9)

Р-ие в виде $$X = \alpha\, e^{kt}\ ,\ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{9а}$$

Тогда вместо (9) имеем $\alpha k\, e^{kt} = A\,\alpha\, e^{kt}$ ,

или $$(A - kE)\alpha = 0, \qquad (9б)$$

где $E$ – едч. м-ца.

Чтобы ур. (9б) имело нетривиальное р-ие, нх-мо и дт-но

$$|A - kE| = 0. \qquad (9в)$$

Находим корни $k_i$ хркч. ур-я (9в). Здесь, как и в 4°: 11.2, возможны случаи:

1*. Все $k_i$ различны. Тогда получаем $n$ лин. незв. р-й

$$X_i = \alpha^i e^{k_i t},\ \alpha^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \cdots \\ \alpha_n^i \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Отсюда общ. р-ие системы (9 имеет вид)

$$X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i\ \alpha^i e^{k_i t}. \qquad (10а)$$

2*. Корень $k_i$ кратности $q_i$ ($q_i \le n$). Тогда р-ми исх. ур-я будут не только $\alpha^i e^{k_i t}$, но и $t\alpha^i e^{k_i t}$, $t^2\alpha^i e^{k_i t}$, …, $t^{q_i-1}\alpha^i e^{k_i t}$. Отсюда получим $q_i$ лин. незв. р-й

$$X_i = \left(1 + t + \ldots + t^{q_i-1}\right)\alpha^i e^{k_i t}, \qquad (10б)$$

откуда общ. р-ие имеет вид

$$X = \sum_i C_i X_i = \sum_i \left(1 + t + \ldots + t^{q_i-1}\right) C_i\, \alpha^i e^{k_i t}. \qquad (10в)$$

3*. Если хркч. ур-ие имеет комп. корни, то они появляются сопряженными парами $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Тогда комп. р-я: $\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t); \\ e^{(\alpha-i\beta)} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{cases}$ можно заменить двумя дсв. р-ми $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$. И общ. р-ие строится анч-но (10а).

4*. Если комп. корни $k_i$ кратности $q_i$, то общ. р-ие получается анч-но (10в).

**п9**. Р-ть систему: $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y$.

Р. Находим хркч. ур-ие $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Тогда р-ие ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^1 e^{5t},\ y_1 = \alpha_2^1 e^{5t}; \\ x_2 &= \alpha_1^2 e^{-t},\ y_2 = \alpha_2^2 e^{-t}. \end{aligned}\right\} \qquad (10г)$$

Подс-я (10г) в исх. систему, получим $-4\alpha_1^1 + 2\alpha_2^1 = 0 \Rightarrow \alpha_2^1 = 2\alpha_1^1$, где $\alpha_1^1$ остается прзвл-ым. Сдт-но, $x_1 = C_1e^{5t}$, $y_1 = 2C_1e^{5t}$, где $C_1 = \alpha_1^1$.

Анч-но находим $4\alpha_2^2 + 4\alpha_1^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2^2 = -\alpha_1^2$. Сдт-но, $x_2 = C_2e^{-t}$, $y_2 = -C_2e^{-t}$, где $C_2 = \alpha_1^2$. Тогда общ. р-ие $x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$; $y = 2C_1e^{5t} - C_2e^{-t}$.

**п10**. Р-ть систему $\dfrac{dx}{dt} = x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = x + 3y$.

Р. $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2$. Р-ие ищем в виде $x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t}$, $y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t}$, подс-я к-ое в исх. ур-ие, получим $\beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t$ или $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_1 t = -\alpha_2 - \beta_2 t$. Откуда $\beta_2 = -\beta_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1$. Полагая $\alpha_1 = C_1$ и $\beta_1 = C_2$, получим $x = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$, $y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t}$.

**п11**. Найти р-ие системы $\dfrac{dx}{dt} = x - 5y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x - y$.

Р. $\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\, 3i$. Р-ие ищем в виде $x_1 = \alpha_1 e^{3it}$, $y_1 = \alpha_2 e^{3it}$. Подс-я в исх. ур-ие, получим $(1 - 3i)\alpha_1 = -\,5\alpha_2 = 0$, к-му уд-ют, н-р, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1 - 3i$. Сдт-но,

$$\begin{cases} x_1 = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)(\cos 3t + i\sin 3t); \\ y_1 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \end{cases}$$

Дсв-я и мнимая части этого р-ия также яв-ся р-ми исх. системы, а их лин. комбинация с прзвл. пст-ми дает общ. р-ие

$$\begin{cases} x = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t; \\ y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \end{cases}$$

**6°. Задачи составления системы уравнений**. Рас-им нек-ые задачи, приводящие к системе дифн. ур-й.

**з1** (разложение вещества). Вещество $A$ разлагается на два вещества $P$ и $Q$. Скр-ть образования каждого из них прцн-на кол-ву неразложившегося вещества $A$. Найти законы изм-ия кол-в $x$ и $y$ веществ $P$ и $Q$ в зв-ти от вр-и $t$, если через час после нач. процесса разложения $x$ и $y$ равны ств-но $a/8$ и $3a/8$, где $a$ – первонач. кол-во вещества $A$.

Р. В момент вр-и $t$ кол-во вещества $A$ равно $a - x - y$, сдт-но, с учетом скр-ти образования веществ получим систему

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y);\ \frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y). \tag{11}$$

Разделив второе ур-ие на первое, имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k_2}{k_1} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} y = \dfrac{k_2}{k_1}x + C$. Т.к. при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, тогда $C = 0$, и поэтому

$$y = \frac{k_2}{k_1}x, \tag{11а}$$

подс-ив $y$ в 1-ое ур-ие системы (11), получим лин. ур-ие

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1 a. \tag{11б}$$

Р-ив (11б), н-р, методом врц-и (см. 4°: 11.1), находим $x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_1\, e^{-(k_1+k_2)t}$. Используя нач. усл-ие ($x = 0$ при $t = 0$), находим $C_1 = -\dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}$, тогда

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right). \tag{11в}$$

Подс-ив (11в) в (11а), получим

$$y = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right). \tag{11г}$$

Для опр-ия $k_1$ и $k_2$ учитываем, что $x = a/8$ и $y = 3a/8$ при $t = 1$ (час)

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) = \frac{1}{8};\ \frac{k_2}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) = \frac{3}{8}. \tag{11д}$$

Сложив ур-я системы (11д), получим $1 - e^{-(k_1+k_2)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e^{-(k_1+k_2)} = 2^{-1} \Rightarrow k_1 + k_2 = \ln 2$. А разделив второе ур-ие на первое, имеем $k_2 = 3k_1$. Т.о., получим $k_1 = \dfrac{1}{4}\ln 2$, $k_2 = \dfrac{3}{4}\ln 2$, и искомое р-ие имеет вид

$$x = \frac{a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right),\ y = \frac{3a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right). \tag{11е}$$

**з2** (размножение бактерий). Бактерии размножаются прцн-о их наличному кол., но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их прцн-о кол-ву бактерий. Скр-ть выработки яда прцн-а наличному кол. бактерий. Показать, что число бактерий $N$ сначала взр-ет до нек-го нб. зн-ия $M$, а затем уб-ет до нуля; в момент вр-и $t$ оно опр-ся фм-ой $N = \dfrac{M}{ch^2(kt/2)}$, где вр. $t$ измр-ся от того момента, когда $N = M$.

Р. Обз-им кол-во яда через $x$. Согласно усл-ю задачи, составим систему

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN - k_1Nx; \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_2N, \tag{12}$$

где $k$, $k_1$, $k_2$ – коэф-ы прцн-ти, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ и $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ – скр-ти размножения выработки яда.

Разделив первое ур-ие на второе, получим $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}x \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} N = \frac{k_1}{k_2}x - \frac{k_1}{2k_2}x^2 + C_1$. Т.к. $x = 0$ при $N = 0$, то $C_1 = 0$, поэтому связь между числом бактерий и кол-ом яда устанавливается фм-ой парб-ы

$$N = \frac{k}{k_2}x - \frac{k_1}{2k_2}x^2. \tag{12а}$$

Находим $N_{\max}$: $N' = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}x = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{k_1}$. Т.к. $N'' = -\frac{k_1}{k_2} < 0$, то в тч-е $x = \frac{k}{k_1}$ имеем max, т.е.

$$N_{\max} = M = \frac{k^2}{k_1k_2} - \frac{k_1}{2k_2}\cdot\frac{k^2}{k_1^2} = \frac{k^2}{2k_1k_2}. \tag{12б}$$

Найдем теперь зв-сть кол-ва бактерий от вр-и $t$. Для этого р-им ур. (12а) отс-но $x$, записав ее в виде $x^2 - \frac{2k}{k_1}x + \frac{k_2}{k_1}N = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{k_1} \pm \sqrt{\frac{k^2}{k_1^2} - \frac{2k_2}{k_1}N} = \frac{k}{k_1} \pm \frac{k}{k_1}\sqrt{1 - \frac{N}{\frac{k^2}{2k_1k_2}}} = \frac{k}{k_1} \pm$ $\pm \frac{k}{k_1}\sqrt{1 - \frac{N}{M}}$. Подс-ив полученное врж. в 1-ое ур-ие системы (12), получим $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN - kN \mp$ $\mp kN\sqrt{1 - \frac{N}{M}} = \mp kN\sqrt{1 - \frac{N}{M}}$ или

$$\frac{\mathrm{d}N}{N\sqrt{1 - \frac{N}{M}}} = \mp k\mathrm{d}t. \tag{12в}$$

Выч-им $J = \int \frac{\mathrm{d}N}{N\sqrt{1 - \frac{N}{M}}} = \begin{vmatrix} 1 - N/M = y^2 \\ N = M(1 - y^2) \\ \mathrm{d}N = -2My\mathrm{d}y \end{vmatrix} = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{1 - y^2} = \ln\frac{1 - y}{1 + y} + C_2$. Т.о. общ. инт-л ур-я (12б) имеет вид $\ln\frac{1 - y}{1 + y} + C_2 = \mp kt$. Используя нач. усл-ие ($N = M$ при $t = 0$, т.е. $y = 0$), находим $C_2 = 0$. Значит, част. инт-л ур-ия (12б) имеет вид $\frac{1 - y}{1 + y} = e^{\mp kt} \Rightarrow y = \frac{1 - e^{\mp kt}}{1 + e^{\mp kt}} = \frac{e^{\pm kt} - e^{\mp kt}}{e^{\pm kt} + e^{\mp kt}}$ или $y = \pm\,\mathrm{th}\frac{kt}{2}$. Переходя к прежним вел-ам $N$ и $M$, получим $\sqrt{1 - \frac{N}{M}} = \pm\,\mathrm{th}\frac{kt}{2} \Rightarrow 1 - \frac{N}{M} = \mathrm{tg}^2\frac{kt}{2}$ $\Rightarrow N = M\left(1 - \mathrm{th}^2\frac{kt}{2}\right)$ или $N = \frac{M}{\mathrm{ch}^2\frac{kt}{2}}$.

## 11.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 11.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### Вопросы для самопроверки

1. Приведите осн. понятия о дифн. ур-ях.
2. Сформулируйте задачи, приводящие к дифн. ур-ям.
3. Что такое ур-ия с разделяющимися (рздщм.) пер. и как они р-ся?
4. Как р-ся одн. ур-ия и приводящиеся к ним?
5. Какими методами р-ся лин. неодн. ур-ия?
6. Что такое ур-ия Бернулли и Риккати и как они р-ся?
7. Что такое ур-ия в полных диф. и как они р-ся?
8. Как р-ся лин. неодн. ур-ие приведением к ур-ю в полных диф.?
9. Как р-ся ур-ия, не разрешенные отс-но прв-ой?
10. Какие виды имеют ур-ия Лагранжа и Клеро и как они р-ся?
11. Приведите табл-у дифн. ур-ий.
12. Сформулируйте теорему сущв-ия и едн-сти р-ия дифн. ур-ий.
13. Что вы знаете о сост-и дифн. ур-й?

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п32 р-ть з1-з20: 1) ур-ия с рздщм. пер-ми и приводящиеся к ним; 2) одн. ур-ия и приводящиеся к ним; 3) лин. ур-ия и ур. Бернулли.

| | | |
|---|---|---|
| 1. 1) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$; | 2) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$; | 3) $y' + 2y = x^2 + 2x$. |
| 2. 1) $(1+y^2)dx + xydy = 0$; | 2) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ ; | 3) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x+1)y = x - 1$. |
| 3. 1) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$; | 2) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$; | 3) $x\ln x \cdot y' - y = x^3(3\ln x - 1)$. |
| 4. 1) $(1+y^2)dx = xdy$; | 2) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$ ; | 3) $(a^2 - x^2)y' + xy = a^2$. |
| 5. 1) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$; | 2) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$; | 3) $2xy' - y = 3x^2$. |
| 6. 1) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$; | 2) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$; | 3) $y' = \dfrac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$ . |
| 7. 1) $e^{-y}(1 + y') = 1$; | 2) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$ ; | 3) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ . |
| 8. 1) $y\ln y dx + xdy = 0$, $y(1) = 1$; | 2) $(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$. Ук.: см. п12 из 3°: 11.1; | 3) $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$ . |
| 9. 1) $y' = a^{x+y}$ $(a > 0, a \neq 1)$; | 2) $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$. Ук.: см. п12; | 3) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$ . |
| 10. 1) $(1 + e^x)yy' = e^y$, $y\vert_{x=0} = 0$; | 2) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$; | 3) $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ . |
| 11. 1) $y' = \sin(x - y)$; | 2) $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$; | 3) $(xy + x^2y^3)y' = 1$. |
| 12. 1) $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$ ; | 2) $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$; | 3) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$. |
| 13. 1) $xy^2(xy' + y) = a^2$; | 2) $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$; | 3) $x\ln x \cdot y' - (1 + \ln x)y + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,(2 + \ln x) = 0$. |
| 14. 1) $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$. Ук.: подст. $xy = t$; | 2) $y^3dy + 3y^2xdx + 2x^3dx = 0$; | 3) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$. |
| 15. 1) $(x + y)^2\, y' = a^2$; | 2) $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + fy^2) = 0$; | 3) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$ . |

16. 1) $(x - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$;  2) $(3y - 7x + 7)\mathrm{d}x -$ $- (3x - 7y - 3)\mathrm{d}y = 0$;  3) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

17. 1) $y - xy' = a(1 + x^2y')$;  2) $\left(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1}\right)\mathrm{d}x +$ $+ 2x\mathrm{d}y = 0$;  3) $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$.

18. 1) $(\ln x + y^3)\mathrm{d}x - 3xy^2\mathrm{d}y = 0$;  2) $4xy^2\mathrm{d}x + (3x^2y - 1)\mathrm{d}y = 0$;  3) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x + 1)^3y^3$.

19. 1) $y' + 1 = \dfrac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}$;  2) $(x + y^3)\mathrm{d}x +$ $+ (3y^5 - 3y^2x)\mathrm{d}y = 0$;  3) $(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0$.

20. 1) $y' = ax + by + c$ ($a$, $b$, $c$ – const);  2) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x +$ $+ x\cos\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y = 0$;  3) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

**Задачи для самостоятельной работы** (см. з1-з8 из 1°, 9°: 11.1).

Предложенные далее задачи можно использовать и в качестве рефератов или студенческих докладов. Кроме того, эти задачи можно включить и в кр. работах, поскольку после каждой р-ной задачи з№ дается не р-ная задача №*.

**з1** (реактивное двж.). Ракета с нач. массой $M_0$ двж-ся прямолинейно под действием отдачи от истечения непр. струи газов, выбрасываемых из ракеты. Скорость (скр.) $u_0$ истечения газов (отс-но ракеты) пст-на по вел-е и нпв-на в сторону, противоположную нач. скр-и ракеты $v_0$. Найти закон двж-я ракеты, пренебрегая силой тяжести и сопр-ем воздуха (задача Циолковского о прямолин. двж-и ракеты в пустоте).

Сначала приведем нх. фм-ы. При двж-и тел с пер. массой (н-р, ракет) второй закон Ньютона не применим, поскольку он распространяется только на тела с пст. массой. В этом случае применяется др. ур-ие, связывающее силу с ускорением (уск.).

Пусть в момент $t$ материальная тч. с массой $m$ имеет (абс-ю) скр-ть $v$. За время $\Delta t$ к ней присоединяются частицы с суммарной массой $\Delta m$, имевшие до присоединения скр-ть $u$. В момент $t + \Delta t$ тч-а и присоединившиеся к ней частицы будут иметь массу $m + \Delta m$ и скр. $v + \Delta v$.

Кол-во двж-ия системы в момент $t$ равно $Q = mv + u\Delta m$, а в момент $t + \Delta t$ оно стало равным $Q + \Delta Q = (m + \Delta m)(v + \Delta v)$. Тогда $\Delta Q = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv - u\Delta m = m\Delta v + (v - u)\Delta m + \Delta m\Delta v$. Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m\Delta v}{\Delta t} = 0$, находим $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (v - u)\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Если равнодействующая внешних сил, приложенных к тч. пер-ой массы, равна $F$, то в силу теоремы о кол-ве двж-ия имеем ур-ие

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (v - u)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = F, \tag{1}$$

назм-ое ур-ем Мещерского.

Заметим, что при $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0$ масса тч-и увеличивается (частицы присоединяются), а при $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0$ – уменьшается (частицы отбрасываются). При $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ масса тч-и пст-на, и из ур-ия Мещерского получаем закон Ньютона.

Ур-ю Мещерского можно придать вид
$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{1а}$$

В част., при $u = 0$ имеем $\dfrac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F$.

Если ввести вк. отс-ой скр-и присоединяемых частиц (отс-но двжщ-ся тч-и пер-ой массы) $u - v = u_0$, то

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u_0. \tag{1б}$$

В част., при $u_0 = 0$ снова приходим к второму закону Ньютона.

Принято наз-ть $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u_0$ реактивной силой, обз-ив ее через $R$, ур. (1б) запишем в виде

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + R. \tag{1в}$$

Заметим, что тч. пер-ой массы может двигаться с уск-ем и при отсутствии внешних сил. Когда $F = 0$, получаем $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R$. Вел. реактивной силы $|R| = \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right||u_0|$ прцн-на изм-ю массы в ед-у вр-и $\left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|$ (секундной массе) и отс-ой скр-и отбрасываемых или присоединенных частиц.

Теперь р-им сформулированную задачу.

Р. По ур-ю Мещерского, в форме (1б), нпв-ив ось $Ox$ в сторону нач. скр-и $v_0$, получим дифн. ур-ие двж-ия ракеты в прkц-и на эту ось: $M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u_0\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. (2)

Здесь $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \mu$ – «секундная масса», расход массы топлива в секунду; при установившемся процессе горения топлива $\mu = \mathrm{const}$, $M$ – пер. масса ракеты.

Из ур. (2) следует $\mathrm{d}v = -u_0\frac{\mathrm{d}M}{M} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} v = -u_0\ln M + C$. Пст. $C$ находим из нач. усл-я $v = v_0$, $M = M_0$ при $t = 0$, тогда $C = u_0\ln M_0 + v_0$, и поэтому $v = u_0\ln\frac{M_0}{M} + v_0$. (2а)

Стн. (2а) наз. фм-й Циолковского. Для нахождения ур. двж-ия $v$ заменим на $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Тогда $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_0 \times \times \ln\frac{M_0}{M} + v_0 \Rightarrow \mathrm{d}x = u_0\ln\frac{M_0}{M}\,\mathrm{d}t + v_0t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$ и полагая $x = 0$ при $t = 0$ получим

$$x = u_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M}\,\mathrm{d}\tau + v_0t. \tag{2б}$$

Если через нек-ое вр. после нач. двж-я, в момент $t = t_k$, скр-ть, масса и путь стали равными ств-но $v = v_k$, $M = M_k$, $x = x_k$, то фм-ы (2а), (2б) примут вид $v_k = u_0\ln\frac{M_0}{M_k} + v_0$, (2в)

$$x_k = u_0\int_0^{t_k} \ln\frac{M_0}{M_k}\,\mathrm{d}\tau + v_0t_k, \tag{2г}$$

откуда заключаем, что конечная скр. не зв-т от закона изм-ия массы, а только от нач. скр-и $v_0$ ракеты, отс. скр-и $u_0$ истечения газов и отн-я $M_0/M$ масс в конечный и нач. моменты, а путь же $x_k$ зв-т от закона изм-ия массы, опрм-го скр-ю сгорания топлива.

Предположим, что масса ракеты изм-ся по лин. закону $M = M_0(1 - \alpha t)$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha > 0$. Тогда $x = u_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M_0(1-\alpha\tau)}\,\mathrm{d}\tau + v_0t$, или $x = -u_0\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)\,\mathrm{d}\tau + v_0t$. Т.к. $\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t]$, то $x = \frac{u_0}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] + v_0t$.

Если же предположить, что масса ракеты изм-ся по пкзт. закону $M = M_0e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda > 0$, то $x = u_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{Me^{-\lambda\tau}}\,\mathrm{d}\tau + v_0t$, или $x = u_0\lambda\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\tau + v_0t$, и сдт-но,

$$x = \frac{u_0\lambda t^2}{2} + v_0t. \tag{2д}$$

Законы механики могут быть использоваы для опр-ия вел-н космических скр-й. Опр-им первую космическую ск-ть $v_1$, т.е. скр-ть, нх-ю для того, чтобы ракета, врщ-сь по круговой орбите вокруг Земли в виде спутника. Для этого центробежная сила должна быть равна силе притяжения Земли, сдт-но, $M_k \dfrac{v_1^2}{r} = M_k g$, где $r$ – радиус орбиты – рст. от центра Земли до движущегося (двжщ.) на орбите спутника, а $g$ – уск-ие силы тяжести. Если вел-у $r$ полагать прж-но равной радиусу $R_З$ Земли, то $v_1 = \sqrt{gr} \approx \sqrt{gR_З} \approx \sqrt{10 \cdot 6400000} = 8$ км/с. Более точно $v_1 = 7{,}93$ км/с.

В случае значительного удаления двжщ-ся по орбите спутника от пвх-ти Земли, т.е. при $r >> R_З$, нх-мо учесть изм-ие уск-я силы тяжести с изм-ем высоты. Из закона тяготения следует, что тело с массой $M$, отстоящее от центра Земли на рст-и $r$, притягивается к Земле с силой $F = \gamma MM_З/r^2$, где $M_З$ – масса Земли. Но т.к. в то же вр-я $F = Mg_r$, где $g_r$ – уск. силы тяжести на рст-и $r$ от центра Земли, то $\gamma MM_З/r^2 = Mg_r$, откуда $g_r = \gamma M_З/r^2$. При $r = R_З$ имеем $g_r = g$; сдт-но, $g = \gamma M_З / R_З^2$, откуда $\gamma = gR_З^2 / M_З$, и поэтому $g_r = gR_З^2 / r^2$. В этом случае рав-во центробежной силы и силы тяжести дает $M_k \dfrac{v_1^2}{r} = M_k \dfrac{gR_З^2}{r^2}$, откуда $v_1 = \sqrt{\dfrac{gR_З^2}{r}}$. Из этой фм. следует, что чем больше $r$, т.е. чем больше удален спутник от Земли, тем меньше первая космическая скр. $v_1$, нх-я для врщ-я спутника на ствщ. орбите. Так, н-р, на высоте 10000 км ($r \approx 16400$ км) имеем $v_1 \approx 5$ км/с, а на высоте 380000 км (примерное рст. от Земли до Луны) $v_1 = 1$ км/с. Т.о., для того чтобы Луна не падала на Землю, дт-на скр. Луны в 1 км/с.

Для того, чтобы ракета могла уйти из обл-ти земного притяжения, она должна обладать большей скр-ю, чем $v_1$. Эта скр. наз. второй космической скр-ю (или скр-ю отрыва от Земли) и обз-ся через $v_2$. Выч-им ее. Для этого потенциальную энергию $E_п = M_k g_r r$ ракеты, находящейся на рст-и от центра Земли, приравняем к кинетической энергии $E_к = M_к v_2^2 / 2$ ракеты, скр-ть к-ой равна $v_2$; тогда получим $M_k \dfrac{v_2^2}{2} = M_k g_r r$, откуда $v_2 = \sqrt{2g_r r} = \sqrt{2\dfrac{gR_З^2}{r}} = v_1\sqrt{2}$.

Т.о., вторая космическая скр. больше первой примерно в 1,4 раза. Поэтому на пвх-ти Земли $v_2 \approx 11{,}2$ км/с, на высоте 1000 км имеем $v_2 \approx 7$ км/с, а для того чтобы Луна вышла за пределы земного притяжения, она должна иметь скр. 1,4 км/с.

Если произвести анч. выч-ия для опр-ия скр-и $v_1$, нх-ой для врщ-ия спутника по круговой орбите вокруг Луны, Марса и Венеры, а также скр-и $v_2$ отрыва от этих небесных тел, то получим:

для Луны $v_1 \approx 1{,}7$ км/с, $v_2 \approx 2{,}4$ км/с;
для Марса $v_1 \approx 3{,}6$ км/с, $v_2 \approx 5{,}1$ км/с;
для Венеры $v_1 \approx 7{,}3$ км/с, $v_2 \approx 10{,}3$ км/с.

1*. Найти такую крв., проходящую через тч-у (0, – 2), чтобы угл. коэф-т кас-ой в любой ее тч. равнялся ординате этой тч., увеличеннной на 3 ед-ы. О.: $y' = 3y$, $y = -2e^{3x}$.

**з2** (задача Циолковского о двж-и ракеты с учетом силы тяжести). Ракета с нач. массой $M_0$ двж-ся вертикально (вртк.) вверх под действием силы отдачи от истечения газов. Масса $M$ ракеты изм-ся в звт-и от вр-и $t$ по закону $M = f(t)$ (закон сгорания топлива). Скр-ть истечения газов пст-я (отс-но ракеты), нпв-на вниз и равна $u_0$. Найти высоту подъема ракеты как фк-ю вр-и $t$, если нач. скр-ть ракеты на пвх-и Земли равна $v_0$. Сопр-ие воздуха и изм-ие уск-ия силы тяжести в звт-и от высоты подъема ракеты не учитывать.

Р. Нпв-им ось $Oy$ вверх. Тогда дифн. ур-ие двж-ия запишется в виде

$$f(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -u_0 f'(t) - gf(t), \qquad (2е)$$

где $f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ – «секундная масса». Разделив пер-ые, получим $\mathrm{d}v = -g\mathrm{d}t - u_0\dfrac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} v = -gt - u_0\ln f(t) + C$. При $t_0 = 0$ масса ракеты $M = f(0) = M_0$, а скр-ть $v = v_0$; поэтому $C = u_0\ln M_0 + v_0$, и сдт-но, $v = -gt + u_0\ln\dfrac{M_0}{f(t)} + v_0$. Т.к. $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, то последнее рав. запишется в виде $\mathrm{d}y = [-gt +$

$+ u_0 \ln \dfrac{M_0}{f(t)} + v_0]\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} y = -\dfrac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \dfrac{M_0}{f(\tau)} \mathrm{d}\tau + v_0 t + C_1$. При $t = 0$ высота подъема $y = 0$, поэтому $C_1 = 0$, сдт-но, $y = -\dfrac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \dfrac{M_0}{f(\tau)} \mathrm{d}\tau + v_0 t$.

В част., при изм-и массы ракеты по лин. закону $M = f(t) = M_0(1 - \alpha t)$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha > 0$, имеем $y = -\dfrac{gt^2}{2} - u_0 \int_0^t \ln(1 - \alpha\tau) \mathrm{d}\tau + v_0 t$, и сдт-но, $y = -\dfrac{gt^2}{2} + \dfrac{u_0}{\alpha} [(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] + v_0 t$.

Если задать числовые зн., н-р, $v_0 = 0$, $u_0 = 2000$ м/с и $\alpha = \dfrac{1}{100} C^{-1}$, то

$$y = -\frac{gt^2}{2} + 2 \cdot 10^5 \left[\left(1 - \frac{t}{100}\right)\ln\left(1 - \frac{t}{100}\right) + \frac{t}{100}\right].$$

В этом случае через 10 с ракета поднимается на высоту 0,54 км, через 30 с – на 5,65 км, через 50 с – на 18,4 км.

При изм-и массы ракеты по пкзт. закону $M = f(t) = M_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda > 0$, имеем анч-но: $y = -\dfrac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \dfrac{M_0}{M_0 e^{-\lambda\tau}} \mathrm{d}\tau + v_0 t = \dfrac{u_0\lambda - g}{2} t^2 + v_0 t$.

Скр-ть $v$ двж-ия ракеты до момента сгорания всего заряда $t = t_k$ есть прв-я $y$ по $t$: $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (u_0\lambda - g)t + v_0$. При $t = t_k$, т.е. в момент сгорания всего запаса топлива, получим

$$v = v_k = (u_0\lambda - g)t_k + v_0,\ y = y_k = \frac{u_0\lambda - g}{2} t_k^2 + v_0 t_k.$$

Выч-им уск-ие $w = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = u_0\lambda - g = \mathrm{const}$. Отсюда заключаем, что ракета двж-ся с пст. уск-ем. При $u_0\lambda - g < 0$ двж-ие равнозамедленное, при $u_0\lambda - g > 0$ – равноуск-ое, при $u_0\lambda - g = 0$ двж. равномерное со скр-ю $v_0$.

В случае, когда $u_0\lambda - g < 0$ скр-ть тч-и обратится в нуль при $t = v_0/(g - u_0\lambda)$, в этот момент ракета достигнет мкс. высоты $y_{\max}$ подъема, равной $y_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2(g - u_0\lambda)}$.

После сгорания всего топлива двж-ие ракеты продолжится по закону $S = -\dfrac{gt^2}{2} + v_k t + y_k$.

Нб. удаление $S_{\max}$ ракеты от высоты $y = y_k$ найдем как max этой фк. в стационарной (стацн.) тч-е $t = v_k/g$; $s_{\max} = \dfrac{v_k^2}{2g} + y_k$. А мкс-ю высоту $y_{\max}$ подъема ракеты от пвх-ти Земли находим по фм-е $y_{\max} = s_{\max} + y_k = \dfrac{v_k^2}{2g} + 2y_k$.

Заменяя $v_k$ и $y_k$ их врж-ми через $u_0$, $\alpha$ и $t_k$, получаем окончательно: $y_{\max} = \dfrac{(u_0\lambda - g)^2 t_k^2}{2g} + (u_0\lambda - g) t_k^2 + 2v_0 t_k = \dfrac{1}{2g} \left(u_0^2\lambda^2 - g^2\right) t_k^2 + 2v_0 t_k$.

2*. Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ см со скр-ю $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из доски, пробив ее, со скр-ю $v_1 = 80$ м/с. Считая, что сила сопр-ия доски двж-ю пули прцн-на кв-у скр-и двж-ия, найти вр-я двж-я пули через доску. О: $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kv^2$, $t = \dfrac{h(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln \dfrac{v_1}{v_0}} = \dfrac{3}{40 \ln 2{,}5}$ сек.

**з3** (радиоактивный распад). Радиоактивным распадом наз. самопроизвольные превращения ядер атомов нек. эл-ов в ядра др. эл-ов, сопровождающиеся альфа-, бета- и гамма-излучением. Радиоактивный распад носит стсч. хрк-р: ядра атомов распадаются не одновр-но все сразу. При этом установлено, что кол-во атомов, распадающихся в ед-у вр-и, составляет опрн-ю, пст-ю для каждого изотопа часть кол-ва его нераспавшихся атомов. Эта часть наз. пст-ой распада и обз-ся буквой $\lambda$.

Р. Число атомов d$N$ (взяли вместо $\Delta N$, т.е. $\mathrm{d}N \approx \Delta N$), распавшихся за вр-я d$t$ ($\mathrm{d}t \approx \Delta t$), равно $\lambda N\mathrm{d}t$, где $N$ – число нераспавшихся атомов в момент вр-и $t$, и мы имеем дифн. ур-ие

$$\mathrm{d}N = -\lambda N\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Знак минус показывает, что число $N$ нераспавшихся атомов с течением вр-и уменьшается.

Из (3) получим $\dfrac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln N = -\lambda t + \ln C$ или $N = Ce^{-\lambda t}$ .

Если известно первонач. число $N_0$ атомов при $t = 0$, то $N_0 = Ce^0$, т.е. $C = N_0$, сдт-но,

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}. \qquad (3а)$$

Вр. $T$, в течение к-го распадается половина кол-ва атомов изотопа, наз. периодом (прд.) полураспада. Прд-ы полураспада для различных изотопов различны. Так, н-р, для радия $T =$ $= 1590$ лет, для урана $T = 4{,}6$ млрд. лет, для радиоактивного кобальта ($Co^{60}$) имеем $T = 5{,}3$ года, для радона $T = 3{,}82$ суток.

Между $T$ и $\lambda$ имеется легко устанавливаемая связь. К моменту вр-и $t = T$ имеем $N = N_0/2$, сдт-но, $N_0/2 = N_0\, e^{-\lambda t}$, откуда $e^{-\lambda t} = 1/2$ и $T = (\ln 2)/\lambda \approx 0{,}693/\lambda$, а $\lambda = (\ln 2)/T \approx 0{,}693/T$. Это позволяет врз-ть $N$ не через $\lambda$, а через $T$, а именно, $N = N_0\, e^{(-t\ln 2)/T}$. Так, н-р, для радия, период полураспада к-го $T = 1590$ лет, $N = N_0\, e^{-(t\ln 2)/1590} = N_0\, e^{0{,}00044t}$ .

Из последней фм. можно опр-ть, какая часть атомов распадается, н-р, за 200 лет (т.е. $t =$ $= 200$), то получим $N = N_0e^{-0{,}088} = 0{,}915N_0$ атомов, и сдт-но, за это вр-я распадается 8,5% наличного числа атомов.

Скр-ть радиоактивного распада изотопа наз. активностью данного изотопа (или его препарата). Активность $a$ равна $a = \left|\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|$, или, исходя из дифн. ур-ия (3) и его р-ия, $a = \lambda N = \lambda N_0\, e^{-\lambda t}$ .

Через период полураспада активность врж-ия по фм-е $a = \dfrac{N\ln 2}{T} = \dfrac{0{,}693N}{T}$. Если $a_0 = \lambda N_0$ – активность препарата в нач. момент, то $a = a_0\, e^{-\lambda t}$ .

Выч-им ср. продолжительность сущв-ия одного атома радиактивного вещества. Число d$N$ атомов, сохранившихся в течение вр. $t$ и распавшихся в последующий промежуток вр-и d$t$, равно $\mathrm{d}N = \lambda N_0\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Эти атомы имеют ср. продолжительность сущв-ия, равную $t$. Чтобы получить ср. продолжительность сущв-ия одного атома, нужно d$N$ умн-ть на $t$, интв-ть по $t$ в пределах от 0 до $\infty$ и разделить на первонач. число атомов $N_0$: $v = \dfrac{\int_0^\infty \lambda N_0 te^{-\lambda t}\mathrm{d}t}{N_0} = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{T}{\ln 2}$ .

Так, н-р, для радона ($T = 3{,}82$ суток) ср. продолжительность сущв-ия атома $v = 5{,}552$ суток.

3*. Корабль замедляет свое двж. под действием силы сопротивления воды, к-ое прцн-но скр-и корабля. Нач. скр-ть корабля 10 м/с, скр-ть его через 5 сек станет 8 м/с. Когда скр-ть уменьшится до 1 м/с? О.: $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$, $t = -\dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ сек.

**з4** (химическая реакция). Если $x$ – кол. вещества $C$, в к-ое переходит каждое из двух веществ $A$ и $B$, то при пст. темп-е и соблюдении нек-ых др. усл-й полагают, что скр-ть реакции $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ прцн-на:

1) в случае перехода вещества $A$ в вещество $C$ – оставшемуся кол-ву вещества $A$, что приводит к дифн. ур-ю $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x)$, где $a$ – нач. кол-во вещества $A$, а $k$ – коэф. прцн-ти, $k > 0$;

2) в случае перехода двух веществ $A$ и $B$ в вещество $C$ – пзв-ю реагирующих масс, что приводит к дифн. ур-ю $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(P-x)$, где $a$ и $b$ – нач. кол-во веществ $A$ и $B$, а $k$ – коэф. прцн-ти, $k > 0$.

Р. Найдем зв-ть $x$ от вр-и $t$. Состн-ые дифн. ур-я имеют нач. усл-ие $x = 0$ при $t = 0$. В первом случае из ур. $\frac{\mathrm{d}x}{x-a} = -k\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(x-a) = -kt - \ln C \Rightarrow x = a + Ce^{-kt}$. Из нач. усл-я находим $0 = a + C$ или $C = -a$, сдт-но, част. р-ие $x = a(1 - e^{-kt})$. При $t \to \infty$ из этого ур. следует, что $x \to a$.

Во втором случае имеем $\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)} = k\mathrm{d}t$; т.к. $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = -\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)$, инту-я, получим $\frac{1}{b-a}\ln\frac{x-a}{x-b} = -kt + \frac{1}{b-a}\ln C \Rightarrow \frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t}$.

Из нач. усл-я $x = 0$ при $t = 0$ находим, что $C = a/b$, т.е. $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}$. (4)

Отсюда получим част. р-ие $x = ab\,\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}$.

Предположим, что $b > a$, т.е. нач. кол-во вещества $A$ больше нач. кол-ва вещества $B$, тогда при $t \to \infty$ из этого р-я следует, что $x \to a$.

Если предположить, что $a > b$, то, переписав (4) в виде $\frac{x-b}{x-a} = \frac{b}{a}e^{-k(a-b)t}$, получим, что $x \to b$ при $t \to \infty$. Этот же результат можно было получить из част. р-я, если переписать его в форме $x = ab\,\frac{e^{-k(a-b)t}-1}{be^{-k(a-b)t}-a}$.

4* По закону Ньютона, скр-ть охлаждения тела в воздухе прцн-на разности между темп-ой $T$ тела и темп-ой воздуха $T_0$. Если темп-а воздуха равна 20°C и тело в течение 20 мин. охлаждается от 100° до 60°, то через сколько вр-и его темп-а понизится до 30°?

О.: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_0)$, $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = 60$ мин.

**з5** (истечение жидкости из сосуда). Круглый цлнч. бак с вертикальной (вртк.) осью, диаметром $D$ и высотой $H$ наполнен водой. Опр-ть вр-я опорожнения бака через круглое отверстие диаметром $a$ в дне бака (рис. 1).

Сначала приведем нх. фм-ы. Предположим, что сосуд, пщ-дь $S$ поперечного сечения к-го есть известная фк. высоты $h$, $S = S(h)$, наполнен жидкостью до уровня $H$. В дне сосуда отверстие пщ-дью $w$, через к-ое жидкость вытекает. Опр-им вр-я $t$, за к-ое уровень жидкости понизится от нач. пж-ия до произвольного $h$, и вр. $T$ полного опорожнения сосуда. Причем скр-ть $v$ изм-ия кол-ва (объема) жидкости в сосуде яв-ся известной фк. $v = v(h)$ от уровня $h$ жидкости в сосуде (напора).

Пусть в момент $t$ высота равна $h$. Кол-во жидкости $\mathrm{d}V$, вытекающее из сосуда за вр. $\mathrm{d}t$ от момента $t$ до $t + \Delta t$, можно подсчитать как объем цлн-ра с пщ-ю основания $w$ и высотой $v(h)$: $\mathrm{d}V = wv(h)\mathrm{d}t$. Этот же объем жидкости можно выч-ть др-им способом. Вследствие утечки воды уровень $h$ жидкости в сосуде снизится на вел-у $\mathrm{d}h$, сдт-но, $\mathrm{d}V = -S(h)\mathrm{d}h$ (знак минус берется вследствие того, что $\mathrm{d}h < 0$). Тогда из двух рав-в получим $wv(h)\mathrm{d}t = -S(h)\mathrm{d}h$. (5)

Из (5) получим $\mathrm{d}t = -\frac{S(h)}{wv(h)}\mathrm{d}h \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} t = -\frac{1}{w}\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)}\mathrm{d}h = \frac{1}{w}\int_h^H \frac{S(h)}{v(h)}\mathrm{d}h$. А вр. $T$ полного опорожнения сосуда при $h = 0$ будет $T = \frac{1}{w}\int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}\mathrm{d}h$.

Если истечения происходит через малое отверстие или через короткий патрубок, то, согласно закону Торичелли, $v = \mu\sqrt{2gh}$, где $g$ – уск. силы тяжести, а $\mu$ – эмпирический коэф. (коэф. расхода). В этом случае полученные фм. запишутся:

$$t = \frac{1}{w\mu\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h,\; T = \frac{1}{w\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}\,\mathrm{d}h. \tag{6}$$

Р. В данном случае $S(h) = \pi D^2/4$, $\omega = \pi a^2/4$. Сдт-но, $T = \dfrac{D^2}{a^2\mu\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^H \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \dfrac{2D^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}$. В част., при $D = 1{,}0$ м, $H = 1{,}5$ м, $a = 0{,}05$ м и принимая коэф. расхода $\mu = 0{,}62$ (для воды), получим: $T = \dfrac{2\cdot 1{,}0^2\cdot\sqrt{1{,}5}}{0{,}05^2\cdot 0{,}62\cdot\sqrt{19{,}62}} = 356$ с = 5 мин 56 с.

5* Найти крв-ю, для к-ой угл. коэф-т кас-ой в какой-либо тч. в $n$ раз больше угл. коэф-та пм-ой, соединяющей ту же тч. с нач. крд-т. О: $y' = n\dfrac{y}{x}$, $y = Cx^n$.

**з6**. Опр-ть вр. опорожнения заполненной керосином железнодорожной цистерны длиной $L$ и диаметром $D$ через короткий сливной патрубок в нижней части цистерны, пщ-дь поперечного сечения к-го $w$ (рис. 2).

Р. Пер. вел-а $S(h)$ пщ-ди зеркала нефтепродукта опр-ся по фм-е $S(h) = 2xL = 2L\sqrt{R^2 - (h-R)^2} =$ $= 2L\sqrt{(D-h)h}$, тогда $T = \dfrac{2L}{w\mu\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^D \frac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \dfrac{4LD\sqrt{D}}{3w\mu\sqrt{2g}}$.

В част., при $L = 12$ м, $D = 2{,}6$ м, $w = 0{,}01$ м$^2$ и коэф-те $\mu = 0{,}6$ (керосин) имеем $T =$ $= \dfrac{4\cdot 12\cdot 2{,}6\sqrt{2{,}6}}{3\cdot 0{,}01\cdot 0{,}6\sqrt{19{,}62}} = 2520$ с = 42 мин.

6* Опр-ть путь $S$, пройденный телом за вр. $t$, если его скр-ть прцн-на проходимому пути и если тело проходит 10 м в 10 сек. и 200 м в 15 сек. О.: $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = kS$, $S = 25\cdot 2^{\frac{t}{5}}$.

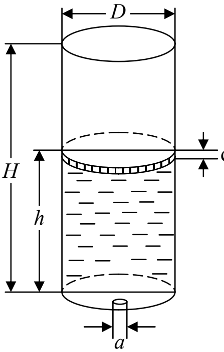


Рис. 1

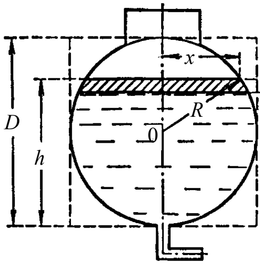


Рис. 2

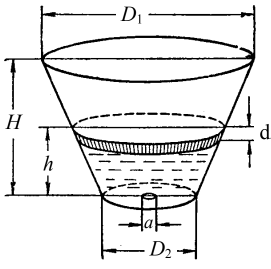


Рис. 3

**з7**. Опр-ть вр. опорожнения заполненного водой конч. резервуара с диаметром $D_1$ верхнего (большого) основания, $D_2$ – нижнего и высотой $H$ через круглое отверстие диаметром $a$ в дне резервуара (рис. 3).

Р. Пщ-дь грзт. сечения конуса $S(h) = \dfrac{\pi}{4}\left[D_2 + (D_1 - D_2)\dfrac{h}{H}\right]^2$, поэтому $T = \dfrac{1}{a^2\mu\sqrt{2g}} \times$

$\times \displaystyle\int_0^H \frac{\left[D_2 + (D_1 - D_2)\frac{h}{H}\right]^2}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \dfrac{2\sqrt{H}}{15a^2\mu\sqrt{2g}}\left(3D_1^2 + 4D_1D_2 + 8D_2^2\right)$. В част., при $D_1 = 0{,}8$ м, $D_2 = 0{,}3$ м,

$H = 1$ м, $a = 0{,}03$ м и $\mu = 0{,}62$ (вода) имеем $T = \dfrac{2\left(3\cdot 0{,}8^2 + 4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 8\cdot 0{,}3^2\right)}{15\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}62\sqrt{19{,}62}} = 194$ с = 3 мин 14 с.

Если пщ-дь отверстия, через к-ое вытекает жидкость, зв-т от вр-и, $w = w(t)$,то дифн. ур-ие (5) после разделения пер-ых имеет вид $w(t)\mathrm{d}t = -\dfrac{S(h)}{v(h)}\,\mathrm{d}h,$ (7)

а его инт-л $\int\limits_0^t w(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_H^h \dfrac{S(h)}{v(h)}\,\mathrm{d}h = \int\limits_h^H \dfrac{S(h)}{v(h)}\,\mathrm{d}h.$ (7a)

7*. Кол-во света, абсорбируемого при прохождении через тонкий слой воды прцн-но толщине слоя и кол-ву света, падающего на его пвх-ть. Если при прохождении через слой толщиной 3 м абсорбируется половина первонач. кол-ва света, то какая часть этого кол. дойдет до глубины 30 м? О.: $\dfrac{1}{1028}$, $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -kx$.

**з8** (охлаждение тела). Пусть в нач. момент тело массой $m$ с пст. теплоемкостью $C$ имеет темп-у $v_0$. Темп-ра окружающей среды пст-на и равна $v_c$ ($v_0 > v_c$). Найти закон охлаждения тела, учитывая, что тепло, отданное телом за вр. d$t$, прцн-но разности темп-р тела и окружающей среды, а также длительности промежутка (закон Ньютона).

Р. За вр-я охлаждения темп-ра тела падает от $v_0$ до $v_c$. Пусть в момент вр. $t$ темп-ра тела равна $v$. За вр-я d$t$ кол-во тепла, отдаваемого телом, по предположению равно $\mathrm{d}Q = -\alpha(v - v_c)\mathrm{d}t$, где $\alpha = \mathrm{const}$ – коэф. прцн-ти. С др. стороны, $Q = mc(v - v_c)$, а значит, $\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}v$. Сравнивая между собой оба врж. для d$Q$, получим диф. ур-ие $mc\mathrm{d}v = -\alpha(v - v_c)\mathrm{d}t,$ (8)

откуда получим $\dfrac{\mathrm{d}v}{v - v_c} = -\dfrac{\alpha}{mc}\mathrm{d}t \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(v - v_c) = -\dfrac{\alpha}{mc}t + \ln C$, или $v - v_c = Ce^{-\alpha t/(mc)}$.

По нач. усл-ю ($v = v_c$ при $t = 0$) опр-им $C = v_0 - v_c$, тогда закон охлаждения тела имеет вид

$$v = v_c + (v_0 - v_c)\,e^{-\alpha t/(mc)}. \qquad (8a)$$

Коэф-т $\alpha$ задается либо непосредственно, либо дпнт. усл-ем, н-р, из $v = v_1$ при $t = t_1$, получим $v_1 - v_c = (v_0 - v_c)\,e^{-\alpha t_1/(mc)}$, откуда $e^{-\alpha/(mc)} = \left(\dfrac{v_1 - v_c}{v_0 - v_c}\right)^{1/t_1}$. Ств-но, $v = v_c + (v_0 - v_c)\left(\dfrac{v_1 - v_c}{v_0 - v_c}\right)^{t/t_1}$.

Приведем числовой расчет. Если темп-ра среды $v_c = 20$°C и тело охлаждается от темп-ы $v_0 = 100$°C до темп-ы $v_1 = 60$°C за вр-я $t_1 = 10$ мин, то $v = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/10}$. Пусть требуется узнать, через сколько вр-и темп-а тела понизится до 25°C. Положив в фм-е $v = 25$, получим $25 = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/10}$, или $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/10} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$, откуда $t = 40$ мин.

8*. Нек-ое кол. нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Через сколько вр-и растворится 99% первонач. кол-ва соли? О.: 32,2 мин.

**з9** (нагревание слитка). Стальной слиток с темп-ой $v_a$ перед прокаткой помещен в печь, темп-а к-ой равномерно повышается в течение часа от $v_a$ до $v_b$. Найти закон нагревания слитка, если при разности темп-р печи и слитка в $T$ градусов он нагревается со скр-ю $kT$ град/мин.

Р. Обз-им темп-у печи в момент вр. $t$ через $\theta$. Тогда темп-а $v$ слитка будет равна разности $v = \theta - T$. Из усл. задачи найдем закон изм-я темп-ы печи $\theta = At + B$, где пст-ые $A$ и $B$ опр-ся из усл-й $\theta|_{t=0} = v_a$, $\theta|_{t=60} = v_b$ и равны, ств-но, $A = (v_b - v_a)/60$ и $B = v_a$. Дифн. ур-ие задачи имеет вид $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kT$. Т.к. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta - T) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(At + B - T) = A - \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$, то это ур-ие прб-ся к виду $A - \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = kT$ или $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + kT - A = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{k}\ln(kT - A) + t = \dfrac{1}{k}\ln C$ или $kT - A = Ce^{-kt}$. Из нач. усл-ия $T|_{t=0} = 0$ находим прзвл-ю пст. $C = -A$, сдт-но, $T = \dfrac{A}{k}(1 - e^{-kt})$. Производя замену $T = \theta - v = At + B - v$, получим $v = At + B - \dfrac{A}{k}(1 - e^{-kt})$, или $v = v_a - \dfrac{v_b - v_a}{60k}(1 - e^{-kt} - kt)$. Найдем темп-у слитка через час, т.е. при $t = 60$ мин:

$$v|_{t=60} = v_a - \frac{v_b - v_a}{60k}(1 - e^{-60k} - 60k) = v_b - \frac{v_b - v_a}{60k}(1 - e^{-60k}).$$

9*. Тело двж-ся прямолинейно с уск., прцн-ым пзв-ю скр-ти двж-ия на вр-я $t$. Установить зв-ть между скр-ю и вр-ем, если при $t = 0$ $v = v_0$. О: $v = v_0\, e^{kt^2/2}$.

**з10** (поглощение света при прохождении через воду). Поглощение светового потока тонким слоем воды прцн-но толщине слоя и потоку, падающему на его пвх-ть. Зная, что при прохождении через слой толщиной 2 м поглощается 1/3 первонач-го светового потока, опр-ть, какой процент его дойдет до глубины 12 м.

Р. Обз-им через $Q$ световой поток, падающий на на пвх-ть на глубине $h$. При прохождении через слой воды толщиной d$h$ поглощенный световой поток d$Q$ равен $\mathrm{d}Q = -kQ\mathrm{d}h$, (9)
где $k$ – коэф. прцн-ти ($k > 0$).

Из (9) имеем $\dfrac{\mathrm{d}Q}{Q} = -k\mathrm{d}h \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln Q = -kh - \ln C \Rightarrow Q = Ce^{-kh}$. Из нач. усл-я $Q = Q_0$ при $h = 0$ находим $C = Q_0$, тогда $Q = Q_0e^{-kh}$. По усл-ю задачи при $h = 2$ имеем $Q = 2Q_0/3$, тогда $\dfrac{2}{3}Q_0 = Q_0(e^{-k})^2$, откуда $e^{-k} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2}$ и

$$Q = Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{h/2}. \tag{10}$$

До глубины $h = 12$ м дойдет световой поток $Q_1$, равный $Q_1 = Q_0\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}0878Q_0$, что сост-ет 8,78% первонач. светового потока $Q_0$.

10*. Материальная тч. массой $m$ двж-ся прямолинейно под действием силы $F$, прямо прцн-ой вр-и от нач. двж-я и обратно прцн-ой скр-ти двж-я $v$. Установить зв-ть между скр-ю $v$ и вр-ем $t$, если при $t = 0$ $v = 0$. Ук.: $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \text{уск.}\right)$. О: $v = \sqrt{\dfrac{k}{m}t}$.

**з11** (ионизация газа). Под действием пст. излучения в газовой среде происходит процесс ионизации, при к-ом за одну секунду образуется $q$ плж-ых и столько же отц. ионов в данном объеме газа. Вследствие того, что плж. и отц. ионы снова соединяются между собой (рекомбинация ионов), кол-во их убывает.

Принимая, что из общего кол-ва $n$ плж. ионов в каждую секунду соединяется часть, прцн-ая кв-у их кол-ва (коэф-т прцн-ти $\alpha$ = const зв-т от природы и состояния газа), найти зв-ть кол-ва ионов $n$ от вр-и $t$.

Р. Дифн. ур-ие процесса ионизации $\mathrm{d}n = q\mathrm{d}t - \alpha n^2\mathrm{d}t$ (11)
получается непосредственно из усл-я задачи. Из (11) получим $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}n}{n^2 - q/a} + \mathrm{d}t = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha q}} \times$ $\times \ln\dfrac{n - \sqrt{q/\alpha}}{n + \sqrt{q/\alpha}} + t = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha q}}\ln C$, откуда $\dfrac{n - \sqrt{q/\alpha}}{n + \sqrt{q/\alpha}} = Ce^{-2\sqrt{\alpha q}t}$, или $n = \sqrt{\dfrac{q}{\alpha}}\,\dfrac{e^{\sqrt{\alpha q}t} + Ce^{-\sqrt{\alpha q}t}}{e^{\sqrt{\alpha q}t} - Ce^{-\sqrt{\alpha q}t}}$.

Т.к. $n = 0$ при $t = 0$, то $C = -1$, и част. р-ие, опрщ-е искомую зв-ть числа ионов от вр-и $t$, принимает вид $n = \sqrt{\dfrac{q}{\alpha}}\,\mathrm{th}\left(t\sqrt{\alpha q}\right)$.

11*. Замедляющее действие трения на диск, врщ-йся в жидкости, прцн-но угл. скр-ти $\omega$. Врз-ть $\omega$ как фк-ю вр-и, если известно, что за 25 сек с нач. двж-я угл. скр-ть снизилась со 100 до 50 об./сек. О: $\omega = 100e^{-0{,}04t/\ln 2}$.

**з12** (вентиляция цеха). В помещении цеха вместимостью 10800 м$^3$ воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, в кол-ве $a$ м$^3$/мин. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент вр. одна и та же (смещение чистого воздуха с загрязненным происходит немедленно), рассчитать, какова должна быть мощность вентиляторов, чтобы по истечении 10 мин содержание углекислоты не превышало 0,06%.

Р. Пусть в момент $t$ в воздухе содержится $x$% (т.е. $0{,}01x$ части) углекислоты. По усл. задачи за вр-я d$t$ вентиляторы доставили $0{,}0004a\mathrm{d}t$ м$^3$ углекислоты, а ушло из помещения $0{,}01xa\mathrm{d}t$ м$^3$ углекислоты. Сдт-но, за вр. d$t$ мин кол-во углекислоты в воздухе уменьшилось на $\mathrm{d}q = (0{,}01 - 0{,}0004)a\mathrm{d}t$ м$^3$. Обз-ив через d$x$ процентное уменьшение содержания углекислоты в воздухе, можно найти d$q$ др. способом: $\mathrm{d}q = -10800 \cdot 0{,}01\mathrm{d}x$ м$^3$ (знак минус берется, потому что $\mathrm{d}x < 0$). Приравнивая d$q$ друг другу, получим $(0{,}01 - 0{,}0004)a\mathrm{d}t = -10800 \cdot 0{,}01\mathrm{d}x$. (12)

Из (12) получим $\dfrac{\mathrm{d}x}{x-0{,}04} = -\dfrac{a\mathrm{d}t}{10800} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln(x - 0{,}04) = -at/10800 - \ln C \Rightarrow$

$$x - 0{,}04 = 0{,}08e^{-at/10800}. \quad (12а)$$

Для опр-ия мощности $a$ вентиляторов положим $x = 0{,}06$, $t = 10$ и получим $0{,}02 = 0{,}08e^{-a/1080}$, откуда $e^{-a/1080} = ¼$ и $a = 1080\ln 4 \approx 1500$ м$^3$/мин.

12*. Найти крв-ые, у к-ых подкас-я равна сумме абсциссы и ординаты тч-и касания.

Ук.: $y' = y/(x + y)$ – угл. коэф. О: $y = Ce^{x/y}$.

**з13** (очищение газа). Для очистки газа от нек-ой газообразной же примеси его пропускают через скруббер (сосуд, содержащий тот или иной поглотитель). Кол-во газообразной примеси, поглощаемое тонким слоем поглотителя при установившемся режиме аппарата, прцн-но концентрации примеси, а также толщине и пщ-ди поперечного сечения слоя. Скруббер имеет форму конуса с радиусом основания $R$ и высотой $H$. Газ поступает через верш. конуса. Найти зв-ть концентрации газообразной примеси в скруббере как фк-ю рст-ия слоя от верш-ы конуса, если концентрация примеси в поступающем газе равна $a$%, а в выходящем $b$%.

Р. Пусть $q$% – концентрация примеси, $h$ – рст. слоя от верш. конуса. Сост-им дифн. ур-ие $\mathrm{d}q = kq\pi r^2\mathrm{d}h$, где $r$ – радиус сечения тонкого слоя конуса, к-ый связан с размерами конуса стн-ем $r = Rh/H$. Тогда $\mathrm{d}q = kq\,\pi\dfrac{R^2}{H^2}h^2\mathrm{d}h \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}q}{q} = \dfrac{k\pi h^2}{H^2}\mathrm{d}h \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln q = k\pi h^3/(3H^2) - \ln C \Rightarrow q =$ $= Ce^{k\pi h^3/\left(3H^2\right)}$. Т.к. $q = a$ при $h = 0$, то $C = a$, и сдт-но, $q = ae^{k\pi R^2h^3/\left(3H^2\right)}$. Остается опр-ть коэф. $k$ из усл. $q = b$ при $h = H$, тогда $b = ae^{k\pi R^2h^3/\left(3H^2\right)}$, откуда лучше опр-ть не $k$, а врж-ие, содержащее $k$: $ae^{k\pi R^2/\left(3H^2\right)} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/H^3}$. Окончательно получим $q = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{h^3/H^3}$. (13)

13*. Р-ть з13 для скруббера, имеющего форму шара радиуса $R$ (рис. 2). Ук.: $\mathrm{d}q = kq\pi r^2\mathrm{d}h$, $r = R^2 - (h - R)^2$. О: $k\pi = \dfrac{3}{4R^3}\ln\dfrac{b}{a}$, $\ln\dfrac{q}{C} - \ln\dfrac{a}{C} = \ln\dfrac{q}{a} = k\,\pi\left[R^2h - \dfrac{(h-R)^3}{3} - \dfrac{R^3}{3}\right] = k\,\pi\left(Rh^2 - \dfrac{h^3}{3}\right)$.

Подс-я в последнее стн. врж-ие $k\pi$, получим $\ln\dfrac{q}{a} = \dfrac{h^2(3R-h)}{4R^3}$.

**з14** (переходный процесс в элкч. цепи). В цепи с индуктивностью (инд.) происходит переходный (перх.) процесс. Инд-ть $L$ и активное (акт.) сопротивление (спр.) $R$ пст-ны. Напряжение (нпж.) $u$ задано как фк-я от вр-и $t$: $u = f(t)$. Нач. ток равен $i_0$. Найти зв-ть тока $i$ от вр-и $t$. В част., рас-ть случай, когда $u = u_0 = \mathrm{const}$.

Р. Т.к. ток $i$ цепи изм-ся со вр-ем, то вследствие наличия инд-ти $L$ возникает э.д.с. (элкдвжщ. сила) самоинд-и $e_L = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. По закону Кирхгофа падение нпж-ия в цепи $Ri$ равно сумме э.д.с. $u - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, т.е. $u - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$ или $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = u$. (13а)

Лин. дифн. ур-ие (13а) с учетом $u = f(t)$ перепишем в виде $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{f(t)}{L}$. Част. р-ем этого ур-ия по нач. усл-ю $i = i_0$ при $t = 0$ в силу 4°: 11.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} y = e^{-\int P\mathrm{d}x}\left(C_1 + \int Qe^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right). \quad (14)$$

яв-ся $$i = e^{-Rt/L}\left[i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t f(\tau)e^{R\tau/L}\mathrm{d}\tau\right]. \qquad (14а)$$

При $f(t) = u_0 = \mathrm{const}$ получаем $i = e^{-Rt/L}\left[i_0 + \frac{u_0}{L}\int_0^t e^{R\tau/L}\mathrm{d}\tau\right]$ (14б)

или, т.к. $\int_0^t e^{R\tau/L}\mathrm{d}\tau = \frac{L}{R}(e^{Rt/L} - 1)$, $\quad i = \frac{u_0}{R} + \left(i_0 - \frac{u_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$. (14в)

При взр-и $t$ мнж. $e^{-Rt/L}$ уб-ет и через нек. промежуток вр-и процесс будет установившимся, причем ток при этом опр-ся по закону Ома $i = \frac{u_0}{R}$. Если положить $i_0 = 0$, то получим фм-у для тока при замыкании (змк.) цепи: $\quad i = \frac{u_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. (14г)

Из рав-ва (14г) видно, что ток после включения батареи нарастает до зн-я $u_0/R$, опрм-го законом Ома, т.к. можно считать, что ток $\frac{u_0}{R}e^{-Rt/L}$, назм-ый экстратоком змк-ия, очень быстро уб-ет и практически скоро становится неощутимым.

Если положить $u_0 = 0$, то получим фм-у затухающего тока при размыкании (рзмк.) цепи:
$$i = i_0e^{-Rt/L}. \qquad (14д)$$

Этот ток, проходящий в цепи, когда в ней снято нпж., под действием одной лишь элкдвжщ. силы самоинд-и, наз. экстратоком рзмк-ия. С взр-ем $t$ он стремится к нулю. А пст. вел-у $L/R$ наз-ют пст-ой вр-ни цепи.

Расн. вопросы очень важны в тех случаях, когда змк-ие и рзмк-ие быстро следуют одно за др., н-р, при телеграфировании.

Особый интерес представляет случай, когда нпж-ие источника тока изм-ся по синусоидальному закону $u = E\sin\omega t$ (н-р, случай подключения $RL$-цепи к сети пер. тока). В этом случае, согласно фм-е (14), получим $\quad i = e^{-Rt/L}\left(i_0 + \frac{E}{L}\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right)$. (14е)

Легко проверить, что $\int e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau = e^{Rt/L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega\tau - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega\tau\right)$. Поэтому $\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau = e^{Rt/L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right) + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$, откуда получим зв-ть тока от вр-и: $\quad i = \left(i + \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-Rt/L} + \frac{RE}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t$. (14ж)

Мнж. $e^{-Rt/L} \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому первое слг. фм-ы (14ж) через короткий промежуток вр-и практически не влияет на опр-ие вел-ы $i$. Сумма оставшихся двух слг. представляет собой синусоидальную вел. с той же частотой $\omega$, что и нпж-ие $u$, но с др. амплитудой и др. фазой и не зв-т от нач. тока $i_0$. Этот ток наз. установившимся.

14*. Сост-ть ур-ие крв-й, проходящей через тч-у $A(a, a)$ и обладающей сд. св-ом: если в любой тч. $M(x, y)$ крв-й с ординатой $PM$ провести кас-ю до перч-ия с осью $Oy$ в тч. $T$, то пщ-дь трапеции $OTMP$ есть вел. пст-я, равная $a^2$ (рис. 4). Ук: $S = \frac{OT + PM}{2}\cdot OP$ – пщ. трапеции, $OT = y - xy'$, $(2y - xy')x = 2a^2$ – дифн. ур-ие. О: $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$.

**з15** (скольжение веревки). Веревка лежит на столе (рис. 5), причем один из ее концов перекинут через гладкий блок на высоте $a$ над столом. В нач. момент кусок веревки длиной $2a$ висит свободно по др. сторону блока. Найти скр-ть $v$ двж-ия этого конца в зв-ти от пути $s$, если спр-ие трения при двж-и принято равным кв-у скр-ти, а нач. скр-ть равна нулю.

Р. Если выбрать блок в кач-е тч-и отсчета пути и нпв-ть ось $Os$ вниз, то второй закон Ньютона $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$ в нашем случае приводит к диф. ур-ю $(s + a)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (s - a)g - v^2$, где $g$ – уск-е силы тяжести. Т.к. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$, то ур. имеет вид

$$(s + a)\, v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + v^2 = (s - a)g. \tag{15}$$

Это ур-ие Бернулли ($n = -1$). Подс-ой $v^2 = z$ и ств-но $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ получим $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} + \dfrac{2}{s+a}z = \dfrac{2g(s-a)}{s+a}$.

Общее р-ие по (14) имеет вид $z = e^{-2\ln(s+a)}\left[2g\displaystyle\int\frac{s-a}{s+a}e^{2\ln(s+a)}\mathrm{d}s + C\right]$. Но $e^{-2\ln(s+a)} = \dfrac{1}{(s+a)^2}$, $e^{2\ln(s+a)} = (s + a)^2$, $\displaystyle\int\frac{s-a}{s+a}e^{2\ln(s+a)}\mathrm{d}s = \int\left(s^2 - a^2\right)\mathrm{d}s = \frac{s^3}{3} - a^2s$, и поэтому $z = v^2 = \dfrac{1}{(s+a)^2}\left[2g\left(\dfrac{s^3}{3} - a^2s\right) + C\right]$.

Из нач. усл-я $v = 0$ при $s = 2a$ находим, что $C = -4ga^3/3$, и част. инт-л имеет вид $v^2 = \dfrac{2g}{3(s+a)^2} \times (s^3 - 3a^2s - 2a^3)$. Врж-ие в скобках можно разложить на мнж-ли: $s^3 - 3a^2s - 2a^3 = s^3 - 2as^2 + 2as^2 - 4a^2s + a^2s - 2a^3 = s^2(s - 2a) + 2as(s - 2a) + a^2(s - 2a) = (s - 2a)(s + a)^2$. И, т.о., получили искомую зв-ть $v$ от $s$:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3}(s-2a)}\,. \tag{15a}$$

Д-ем, что двж. равномерно уск-ое. Для этого обе части рав-ва (15а) возведем в кв-т и диф-уем по $t$. Будем иметь $2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2g}{3}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, но $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$, а $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$, поэтому $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{g}{3} = \mathrm{const}$, и требуемое д-но.

15*. Пщ-дь туг-ка, образованного радиус-вк-ом $OM$ любой тч. $M(x, y)$ крв-й, кас-ой $MP$ в этой тч. и осью $Ox$, равна 2. Крв-я проходит через тч-у $A(2, -2)$. Найти ее ур-ие (рис. 6). Ук: $s = \dfrac{1}{2}OP \cdot MN$, $OP = x - \dfrac{y}{y'}$, $\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)y = 4$. О: $3y^2 + 2xy - 4 = 0$.

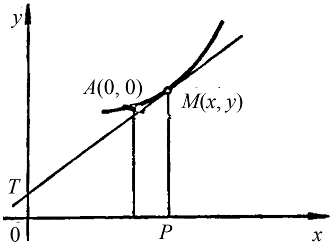


Рис. 4

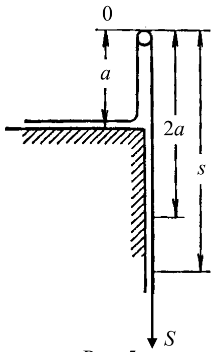


Рис. 5

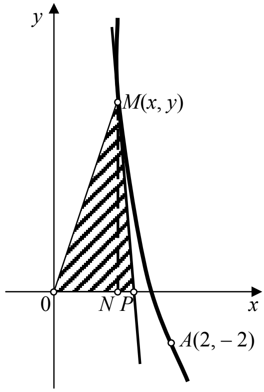


Рис. 6

16*. Найти крв-ю, проходящую через тч. $(-1, -2)$, если поднормаль ее в каждой тч. равна 2. О: $y^2 = 4(x + 2)$.

17*. За какое вр. тело, нагретое до 100°, охладится до 25° в комнате с темп-ой 20°, если до 60° оно охлаждается за 10 мин? (По закону Ньютона скр-ть охлаждения прцн. разности темп-р). О: за 40 мин. Ук.: Пусть через $t$ с темп-а будет $T$, тогда $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - 20) \Rightarrow \ln(T - 20) = -kT + C$, при $t = 0$, $T = 100°$, точка $C = \ln 80°$; $kt = \ln \dfrac{80°}{T - 20°}$, подс-ив сюда $T_1 = 25°$, $T_2 = 60°$, разделив почленно и иск-ив $k$, находим $t$.

18*. Опр-ть и построить крв-ю, проходящую через тч. $P(-a, a)$, если отрезок $AB$ любой кас-ой к ней, заключенной между осями крд-т, делится тч-й касания $M$ пополам. О: $xy = -a^2$. Ук.: $Y - y = y'(X - x)$ – ур. кас-ой. При $Y = 0$ получим $X_A = x - \dfrac{y}{y'}$. По усл-ю $X_A = 2x$, $x = -\dfrac{y}{y'}$.

Ортогональными (орт.) траекториями (трк.) семейства линий $F(x, y, a) = 0$ наз. линии, перкщ-ие линии данного семейства под прямым углом. Продифв-ав ур. $F(x, y, a) = 0$ по $x$ и иск-ив $a$ из полученного и данного ур-я, получим дифн. ур-ие линий данного семейства $y' = f(x, y)$. Тогда дифн. ур-ем орт. трк-й будет $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.

19*. Найти орт. трк-и семейства парб. $ay = x^2$. О: $x^2 = 2y^2 + C^2$.

20*. Найти орт. трк-и семейства гпрб-л $xy = C$. О: $x^2 - y^2 = C$.

21*. Найти орт. трк-и семейства полукубич. парб-л $ay^2 = x^3$. О: $2x^2 + 3y^2 = 3a^2$.

## 11.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое дифн. ур-я высших порядков, их общ. р-ия и задача Коши?
2. Приведите типы ур-й, допускающих понижение порядка.
3. Что такое лин. дифн. ур-ие, его оператор и св-ва?
4. Как опр-ся зв-ть и незв-ть фк-й? Приведите примеры.
5. Одн. ур-я с пст. коэф-ми и их хркч. ур-я. Приведите примеры.
6. Ур-ие Эйлера, какие виды их вы знаете и как они р-ся?
7. Приведите р-ия неодн. ур-й с пст. коэф-ми методом неопрн. коэф-ов.
8. Как р-ся неодн. ур-я методом вариации?
9. Приведите операторный метод р-ия неодн. ур-й с пст. коэф-ми и примеры.
10. Какие вы знаете задачи по сост-ю дифн. ур-й высших порядков?

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п19 р-ть задачи 1-20.

1. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.
4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
5. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' + 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.
6. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0$.
7. а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.
8. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.
9. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.
10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 5y' = 0$.
11. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.
12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y' = 0$.
13. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$.
14. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
15. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' + 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$.
16. а) $y'' + 16y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.
17. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
18. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$.
19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.
20. а) $y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 5y = 0$.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п31 в задачах 21-40 найти: а) част. р-ие одн. дифн. ур-я второго порядка с пст. коэф-ми, удщ-е заданным нач. усл-ям; б) общ. р-ие лин. неодн. дифн. ур-я второго порядка с пст. коэф-ми.

21. а) $y'' - 7y' + 10y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$; б) $y'' - 2y' = 3x^2 + 1$.

22. а) $y'' + 2y' + 10y = 0;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$.

23. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' + 8y' = (x - 1)e^{2x}$.

24. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$; б) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$.

25. а) $y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 1$; б) $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{-x}$.

26. а) $y'' - 7y' + 12y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$; б) $y'' + y' - 2y = (x + 2)e^{-2x}$.

27. а) $y'' + 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$; б) $y'' + 2y' - 8y = (3x + 1)e^{2x}$.

28. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; б) $y'' + 7y' = 2x^2 + x$.

29. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - y' = 8x^2e^x$.

30. а) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' + 3y' - 10y = 2x^2e^x$.

31. а) $y'' + 16y = 0$; $y(\pi) = -1$; $y'(\pi) = 0$; б) $y'' + 2y' = x^2 - 3x + 1$.

32. а) $y'' + 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$; б) $y'' - 5y' - 24y = (2x + 3)e^x$.

33. а) $y'' - 6y' = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$; б) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$.

34. а) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$; б) $y'' + 2y' - 3y = -2e^{3x}$.

35. а) $y'' - 8y' + 15y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -2$; б) $y'' + 8y' = (x^2 + 1)e^{-x}$.

36. а) $y'' - 4y' + 17y = 0;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $y'' + 4y' + 3y = -xe^{-x}$.

37. а) $y'' - 2y' + y = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 2$; б) $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{-x}$.

38. а) $y'' + y = 0$; $y(\pi) = -1$; $y'(\pi) = -4$; б) $y'' + y' - 6y = 2(x - 1)e^{2x}$.

39. а) $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - 4y' = 2x^2 - 3x + 1$.

40. а) $y'' + 8y' + 16y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{3x}$.

**Задачи для самостоятельной работы** (см. з1-з3, п43-п45 из 8°: 11.2).

**з1** (падение тела с большой высоты, см. з1 из 8°: 11.2 случай 2). Пусть тело массой $m$ падает с большой высоты и двигается как материальная тч., а сопр-ие воздуха прцн-но кв-у скр-ти с нач. усл-ми: $x = 0$, $v = v_0$ при $t = 0$. Найти законы изм-ия $t$ и $v$.

Р. На падающее тело действуют две силы (сила тяжести и сопр-ие воздуха), т.е. $F = mg - kv^2$ или $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2 \Rightarrow dt = m\dfrac{dv}{mg - kv^2} \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} t = \displaystyle\int_{v_0}^{v} \dfrac{du}{mg - ku^2}$.

Т.к. тело будет падать только при $F > 0$, то $mg - kv^2 > 0$, или $v < \sqrt{mg/k}$. Обз-им $\sqrt{mg/k} = v_{кр}$ (крч. скр-ть). Тогда $t = \dfrac{m}{2kv_{кр}}\left(\ln\dfrac{v_{кр} + v}{v_{кр} - v} - \ln\dfrac{v_{кр} + v_0}{v_{кр} - v_0}\right)$, или $t = \dfrac{m}{kv_{кр}}\left(\operatorname{Arth}\dfrac{v}{v_{кр}} - \operatorname{Arth}\dfrac{v_0}{v_{кр}}\right)$.

Заметив, что $\dfrac{m}{k} = \dfrac{v_{кр}^2}{g}$, а значит, $\dfrac{kv_{кр}}{m} = \dfrac{g}{v_{кр}}$, прб-ем последнее рав. т.о.: $\operatorname{Arth}\dfrac{v}{v_{кр}} = \operatorname{Arth}\dfrac{v_0}{v_{кр}} + \dfrac{gt}{v_{кр}}$. Взяв гпрбч. тангенсы от обеих частей рав-ва, получим

$$v = v_{кр}\frac{\dfrac{v_0}{v_{кр}} + \operatorname{th}\dfrac{gt}{v_{кр}}}{1 + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\operatorname{th}\dfrac{gt}{v_{кр}}}, \text{ или } v = v_0 + v_{кр}\frac{\left(1 - \dfrac{v_0^2}{v_{кр}^2}\right)\operatorname{th}\dfrac{gt}{v_{кр}}}{1 + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\operatorname{th}\dfrac{gt}{v_{кр}}}. \tag{16}$$

В част-и, при $v = 0$ имеем

$$v = v_{кр}\operatorname{th}\frac{gt}{v_{кр}}, \tag{16а}$$

а при $v_0 = v_{кр}$ получим $v(t) = v_0 = v_{кр}$, т.е. падение тела происходит с пст. скр-ю.

При падении тел конечных размеров сопр-ие воздуха зв-т от вел-ы, формы и веса тела, а также плотности воздуха. Эта зв-сть учитывается коэф-ом $k_1 = k/m$, к-ый опр-ся эмпирической (эмп.) фм.:

$$k_1 = \alpha\frac{Sd}{P}, \tag{16б}$$

где $d$ – вес 1 м$^3$ воздуха (в Н; в среднем $d = 12$ Н/м$^3$), что ств-ет весу 1 м$^3$ воздуха при давлении 760 мм и темп-ре 15°С; $S$ – пщ. пркц-и тела на пл-ть, прп-ую к нпв-ю двж-я (в м$^2$); $P$ – вес тела (в Н), а $\alpha$ – безразмерный коэф. сопр-ия, звщ-й от формы тела и опрм-й опытным путем, н-р, для грзт-но падающей кв. пластинки $\alpha = 0{,}631$, для полусферы с отверстием вниз (парашюта) $\alpha = 0{,}664$ и т.д.

Фм. (16б) вместе с фм-ой (15в) из 8°:11.2 позволяет р-ть, н-р, задачу об опр-и скр-ти, к-ую будет иметь через 2 с после нач-а падения находящаяся до того в покое грзт-я кв. пластинка со стороной 1 м и весом 19,6 Н.

В данном случае $k_1 = \dfrac{0{,}631\cdot 12\cdot 1}{19{,}6} = 0{,}386$, $v_{\text{кр}} = 5{,}038$, $\dfrac{g}{v_{\text{кр}}} = 1{,}947$. Подс-я их, а также зн-ие $t = 2$ с в фм-у (15в), находим $v|_{t=2} = 5{,}038\,\mathrm{th}\,3{,}894 = 5{,}038\cdot 0{,}999 = 5{,}033$ м/с.

Этот результат практически не отличается от крч. скр-ти $v_{\text{кр}} = v|_{t=\infty} = 5{,}038$ м/с, т.е. предельная скр. практически достигается уже в конце второй секунды после нач-а падения.

Для нахождения крд-ы $x$ проинту-ем дифн. ур-ие

$$\mathrm{d}x = v_{\text{кр}}\frac{\dfrac{v_0}{v_{\text{кр}}} + \mathrm{th}\dfrac{gt}{v_{\text{кр}}}}{1 + \dfrac{v_0}{v_{\text{кр}}}\mathrm{th}\dfrac{gt}{v_{\text{кр}}}}\,\mathrm{d}t \Rightarrow x = v_{\text{кр}}\int_0^t \frac{\dfrac{v_0}{v_{\text{кр}}} + \mathrm{th}\dfrac{gz}{v_{\text{кр}}}}{1 + \dfrac{v_0}{v_{\text{кр}}}\mathrm{th}\dfrac{gz}{v_{\text{кр}}}}\,\mathrm{d}z + C. \tag{16в}$$

Инт-л в правой части выч-им подн-ой $\mathrm{th}(gz/v_{\text{кр}}) = u$, или $z = (v_{\text{кр}}/g)\mathrm{Arth}u$, заменив одновременно $v_0/v_{\text{кр}}$ через $\alpha$; тогда инт-л (вместе с мнж-ем $v_{\text{кр}}$) примет вид $I = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\displaystyle\int_0^{u_0}\frac{\alpha + u}{(1+\alpha u)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u$, где $u_0 = \mathrm{th}(gt/v_{\text{кр}})$.

Разл-ие дроби на элр. суммы дает $\dfrac{\alpha + u}{(1+\alpha u)(1-u^2)} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha u} - \dfrac{1}{2(1+u)} + \dfrac{1}{2(1-u)}$, вследствие чего $I = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\left[\ln(1+\alpha u) - \dfrac{\ln(1+u)}{2} - \dfrac{\ln(1-u)}{2}\right]_0^{u_0} = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\dfrac{1+\alpha u}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^{u_0} = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\dfrac{1+\dfrac{v_0}{v_{\text{кр}}}\mathrm{th}\dfrac{gt}{v_{\text{кр}}}}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\dfrac{gt}{v_{кр}}}} =$

$= \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{gt}{v_{кр}} + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\mathrm{sh}\dfrac{gt}{v_{кр}}\right)$. Итак, $x = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{gt}{v_{кр}} + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\mathrm{sh}\dfrac{gt}{v_{кр}}\right) + C$. Для опр-я $C$ положим

$x = x_0$ при $t = 0$. Тогда $C = x_0$, значит, $x = x_0 + \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{gt}{v_{кр}} + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\mathrm{sh}\dfrac{gt}{v_{кр}}\right)$. (16г)

Если предположить, что $x_0 = 0$, то $x = \dfrac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{gt}{v_{кр}} + \dfrac{v_0}{v_{кр}}\mathrm{sh}\dfrac{gt}{v_{кр}}\right)$. В част., если положить еще и $v_0 = 0$, то

$$x = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\mathrm{ch}\frac{gt}{v_{кр}}. \tag{16д}$$

Фм. (16д) может быть использована, н-р, при р-и такой задачи.

**п1**. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Опр-ть, сколько вр-и он падал до раскрытия парашюта, полагая, что крт. скр-ть падения человека в воздухе норм. плотности равна 50 м/с, и пренебрегая изм-ем плотности воздуха с высотой.

Р. Здесь $x = 1{,}5$ км – 0,5 км = 1 км = 1000 м. Сдт-но, по фм. (16д) $1000 = \dfrac{50^2}{g}\ln\mathrm{ch}\dfrac{gT}{50}$, откуда, полагая $g \approx 10$ м/с$^2$, получаем $\ln\mathrm{ch}(T/5) = 4$, или $T = 5\mathrm{Arth}e^4$. Из табл. пкзт-х и гпрбг-х фк. находим, что $e^4 = 54{,}598$, а $\mathrm{Arth}54{,}598 = 4{,}693$. Сдт-но, $T = 5\cdot 4{,}693 = 23{,}465$ с $\approx 23$ с.

**з2** (изгиб балки). Пусть дана грзт. расположенная балка с цлнч. пвх-ю (центром тяжести на оси сим-и), имеющую вртк. пл-ть сим-и, прп-ю к оси балки. И пусть действующие на балку силы расположены в пл-ти сим-и и нпв-ны вртк-но (рис. 7). Под действием этих сил балка будет изгибаться, причем в балке возникнут внутренние силы упругости. Найти дифн. ур-ие изогнутой балки.

Р. Для сохранения равновесия следует в сечении $ab$ (рис. 7) приложить усилия отброшенной части балки на оставшуюся, т.е. систему, равносильную системе сил, приложенных к отброшенной части балки. Согласно рис. 7 это будут:

равнодействующая $$Q = P_1 - P_2 - P_3 \tag{17}$$
и момент $$M = P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3. \tag{17а}$$

Врж-ия (17) и (17а) показывают, что для левой части балки плж. нпв-ем силы считается нпв-ие снизу вверх, а плж. нпв-е момента ств-ет врщ-ю левой части балки по нпв-ю двж-ия часовой стрелки.

Силу $Q$ наз. перерезывающей силой в сечении $ab$, $M$ – изгибающим моментом в том же сечении.

Поставим задачу отыскать форму изогнутой оси балки. Для этого нпв-им ось $Ox$ грзт-но вправо по оси балки, ось $Oy$ – вртк-но вверх, $A$ – нач. крд-т. Тогда грф. фк-и $y = y(x)$ и есть форма изогнутой оси балки. Осн. стн-ем, известным из курса сопр. материалов и позволяющим отыскать эту фк., яв-ся ур-ие
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}, \tag{17б}$$
где $\rho$ – радиус кривизны изогнутой оси в данной тч., $M(x)$ – антч. врж-ие изгибающего момента в ствщ. сечении, $E$ – модуль упругости (модуль Юнга), звщ-й от физических св. материала, $I$ – момент инерции поперечного сечения отс-но оси, совпадающей с осью балки. Используя фм-у для кривизны (см. 8°: 7.3), получим
$$\frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M(x)}{EI}. \tag{17в}$$

В ур. (17в) $y'$ как тангенс угла кас-ой к изогнутой оси балки с плж. нпв-ем оси абсцисс есть вел. настолько малая по сравнению с ед-ей, что ее кв-ом в знаменателе можно пренебречь, тогда
$$y'' = \pm \frac{M(x)}{EI}, \tag{17г}$$
к-ое принято наз-ть дифн. ур-ем изогнутой оси балки. Это ур. непосредственно инту-ся. Врж-ие изгибающего момента зв-т от условий работы балки.

Рас-им конкретный пример.

**п2** (изгиб консольной балки). Дана балка длиной $l$ м, левый конец к-ой наглухо заделан, а правый свободен. Опр-ть форму изогнутой оси и мкс. прогиб на правом конце, если балка находится под действием равномерно рспн. нагрузки интенсивностью $q$ Н/м и к правому приложена сила $P$ Н.

Р. Т.к. можно воспользоваться ур-ем (17г), то дело сводится к нахождению изгибающего момента $M(x)$, а затем двукратно интв-ть. Выберем оси крд-т, как показано на рис. 8, и рас-им сечение $ab$ на рст-и $x$ от левого конца. Изгибающий момент, возникающий в этом сечении от силы $P$, приложенной в правом конце, равен $M_1(x) = -P(l - x)$, (18)
ибо сила $P$ врщ-ет правую часть балки по нпв-ю двж-я часовой стрелки.

Остается подсчитать изгибающий момент от равномерно рспн. нагрузки, приложенной справа. Для этого рас-им на рст-и $t$ от нач. крд-т эл. d$t$, на к-ый действует сила $q$d$t$. Как и в (18), получим
$$\mathrm{d}M_2(x) = -q(t - x)\mathrm{d}t. \tag{18а}$$

Инту-я (18а), будем иметь $$M_2(x) = -q\int_x^l (t - x)\,\mathrm{d}t = -q\left.\frac{(t - x)^2}{2}\right|_{t=x}^{t=l} = -q\,\frac{(l - x)^2}{2}. \tag{18б}$$

Теперь для нахождения изгибающего момента от обоих видов нагрузки остается сж-ть врж-ия (18), (18б) и в силу (17г) получить $$y'' = -\frac{1}{EI}\left[P(l - x) + q\frac{(l - x)^2}{2}\right]. \tag{18в}$$

Т.к. $F$ и $l$ пст-ны, то двукр. интв-ие дает $$y' = -\frac{1}{EI}\left[P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}q\left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right] + C_1,$$
$$y = -\frac{1}{EI}\left[P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\right] + C_1 x + C_2.$$

Из нач. усл-й $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$ (ибо левый конец неподвижен и грзт.) получаем $C_1 = C_2 = 0$ и, т.о., форма изогнутой оси описывается ур-ем
$$y = -\frac{1}{EI}\left[P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\right]. \tag{18г}$$

Мкс-ый прогиб на правом конце равен $y|_{x=l} = -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{3}Pl^3 + \dfrac{1}{8}ql^4\right)$. (18д)

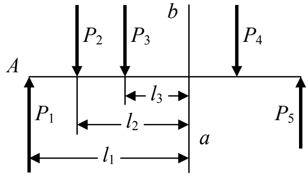


Рис. 7

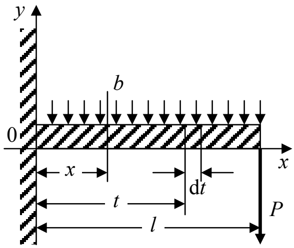


Рис. 8

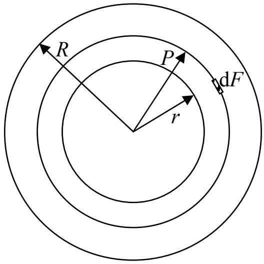


Рис. 9

**з3** (теплопередача через трубу). Пусть имеется толстая цлнч. труба с внутренним радиусом $r$ и наружным $R$. Опр-ть теплопередачу через трубу изнутри наружу, предполагая, что установился стацн. тепловой режим, при к-ом кол-во тепла, проходящее через какую-либо данную пщ., пст-но.

Р. Кол-во тепла, проходящее через беск. малую пщ. за вр. $\mathrm{d}t$, прцн-но пщ-ди $\mathrm{d}F$ пщ-ки, длительности промежутка и скр-ти падения темп-ы в этом нпв-и, т.е. $\mathrm{d}q = -\lambda \mathrm{d}F\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}t$. Знак минус указывает, что поток тепла двж-ся в сторону падения темп-ры; $\lambda$ – коэф. теплопроводности, зв-т от вещества расв-го тела.

Выделим внутри трубы цлнч. пвх-ть радиуса $\rho$ (рис. 3), $r < \rho < R$. Тогда для эл-та $\mathrm{d}F$ этой пвх.

$$\mathrm{d}q = -\lambda \mathrm{d}F\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Т.к. кол-во тепла не зв-т ни от эл-та $\mathrm{d}F$, ни от промежутка вр-и $\mathrm{d}t$, то инт-ав врж-ие (19), получим для всей пвх. цлн-ра за ед-у вр. полное кол. тепла $Q = -\lambda F\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$. Если длина трубы равна $l$, то $F = 2\pi\rho l$, так что

$$Q = -2\pi\lambda l\rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}. \tag{19а}$$

По предположению, процесс стацн., т.е. тепло не может накапливаться ни в какой части трубы, тогда $Q$ не зв-т от $\rho$, т.е. $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\rho} = 0$.

Продифв-ав рав. (19а) по $\rho$ и сократив на пст. мнж-ль, получим искомое дифн. ур.

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho} = 0. \tag{19б}$$

Вывели дифн. ур-ие, не содержащее явно искомой фк. Однако из самого процесса вывода видно, что левая часть ур-я яв-ся точной прв., т.е. $\mathrm{d}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\right) = 0$, тогда $\rho\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho} = C_1$. Второе интв. дает общ. р-ие в виде

$$\theta = C_1\ln\rho + C_2. \tag{19в}$$

Остается опр-ть пст-ые $C_1$ и $C_2$. Мы не можем здесь использовать нач. усл-я. Наиболее естественными будут граничные усл. Проще всего задать темп-ру на внутренней и наружной пвх.:

$$\theta|_{\rho=r} = \theta_0;\ \theta|_{\rho=R} = \theta_1. \tag{19г}$$

Подс-я зн-ия (19г) в общ. р-ие (19в), получим систему ур-й для нахождения пст-ых: $\left.\begin{aligned}\theta_0 &= C_1\ln r + C_2,\\ \theta_1 &= C_1\ln R + C_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 - \theta_0 = C_1(\ln R - \ln r)$, откуда $C_1 = \dfrac{\theta_1 - \theta_0}{\ln R - \ln r}$. Подс-я $C_1$ в одно из ур-й системы, получим $C_2 = \dfrac{\theta_0\ln R - \theta_1\ln r}{\ln R - \ln r}$.

Мы можем теперь подс-ть найденные врж. $C_1$ и $C_2$ в врж. (19в) и тогда получим фк-ю, описывающую изм-ие темп-ры тч-к трубы в зв-сти от их рст-ия от оси. Врж-ие (19а) позволяет подсчитать кол. тепла, протекающее через трубу.

**з4** (гармонические колебания). Груз весом $P$ подвешен на вртк. пружине, длина к-ой в естественном состоянии равна $l$. Груз слегка оттянут книзу и затем отпущен. Найти закон двж-я груза, пренебрегая массой пружины и сопр-ем воздуха.

Р. Направим ось $Ox$ вниз по вртк-ой пм., проходящей через тч-у подвеса груза. Нач. крд-т $O$ выберем в пж-и равновесия груза (рис. 10). Пусть $\lambda$ – удлинение пружины в данный момент, а $\lambda_{ст}$ – стсч. удлинение, т.е. рст-ие от конца нерастянутой пружины до пж-ия равновесия. Тогда $\lambda = \lambda_{ст} + x$, или $\lambda - \lambda_{ст} = x$.

Дифн. ур-ие двж-я получаем из второго закона Ньютона $F = ma$, где $m = P/g$ – масса груза, $a$ – уск. двж-ия и $F$ – равнодействующая приложенных к грузу сил, т.е. сумма силы натяжения пружины и силы тяжести.

Позакону Гука сила натяжения пружины прцн-на ее удлинению $c\lambda$, где $c$ – коэф. жесткости пружины. Поэтому дифн. ур-ие двж-ия имеет вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -c\lambda + P$. Т.к. в пж-и равновесия сила натяжения пружины уравновешивается весом, то $P = c\lambda_{ст}$. Подс-ив в дифн. ур-ие врж-ие $P$ и заменив $\lambda - \lambda_{ст}$ через $x$, получим ур-ие вида $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -cx$, или, обз-ив $c/m$ через $k^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \qquad (20)$$

Ур. (20) опр-ет свободные клб. груза. Оно наз. ур-ем гармонического осциллятора. Его хркч. ур-ие $r^2 + k^2 = 0$ имеет мнимые корни $r = \pm ik$, тогда общ. р-ем будет $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$. Для выяснения физического смысла р-ия введем новые прзвл. пст., записав р-ие в виде

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin kt\right) = A(\sin\alpha\cos kt + \cos\alpha\sin kt) \Rightarrow$$

$$x = A\sin(kt + \alpha). \qquad (20a)$$

Т.о., груз совершает гармонические клб. около пж-ия равновесия. Здесь наз-ют $A$ – амплитудой, $kt + \alpha$ – фазой, $\alpha$ (при $t = 0$) – нач. фазой, $k = \sqrt{c/m}$ – частотой клб-ия. Период (прд.) клб-ия $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{c/m}$ и частота $k$ зв-ят только от жесткости пружины и от массы системы. Т.к. $c = P/\lambda_{ст} = mg/\lambda_{ст}$, то еще $T = 2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$ .

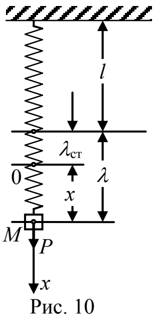


Рис. 10

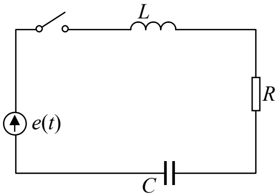


Рис. 11

Скр-ть двж-я груза получаем дифв-ем р-ия (20а) по $t$: $v = \dfrac{dx}{dt} = Ak\cos(kt + \alpha)$.

Для опр-ия амплитуды и нач. фазы нх-мо задать нач. усл-я: $x = x_0$, $v = v_0$ при $t = 0$. Тогда $x_0 = A\sin\alpha$, $v_0 = Ak\cos\alpha$, откуда $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{k^2}}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{kx_0}{v_0}$. При $v_0 = 0$ амплитуда $A = x_0$, нач. фаза $\alpha = \pi/2$, тогда $x = x_0\sin\left(kt + \dfrac{\pi}{2}\right)$, или $x = x_0\cos kt$.

Если заданы числовые зн., н-р: $P = 2H$, $l = 40$ см, $\lambda_{ст} = 4$ см, причем груз оттянут на вел-у $x_0 = 2$ см и отпущен без нач. скр-ти ($v_0 = 0$), то согласно (20а) имеем $x = A\sin(kt + \alpha)$, где $k = \sqrt{cg/P}$ находим из стн-ия $P = c\lambda_{ст}$, откуда $c = 1/2$, а значит, $k = \sqrt{g}/2$, $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2} = 2$ и $\alpha = \operatorname{arctg}(kx_0/v_0) = \pi/2$. Тогда $x = 2\cos\dfrac{t}{2}\sqrt{g}$ . Прд. клб-я груза $T = 2\pi/k = 4\pi/\sqrt{g} \approx 0{,}4$ с. Нб. удлинение $\lambda_{max} = \lambda_{ст} + A = 6$ см, а нб. сила натяжения пружины $F_{max} = c\lambda_{max} = 3$ Н.

**з5** (колебания в электрической цепи $LRC$). К источнику с э.д.с., равной $e(t)$, подключается контур, состоящий из посл-но соединенных катушки инд-ти $L$, омического сопр-ия $R$ и емкости (емк.) $C$. Найти ток $i$ в цепи как фк-ю вр-и $t$, если в нач. момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю (рис. 11).

Р. По закону Кирхгофа элкдвж. (э.д.с.) сила в цепи равна сумме падений напряжения на инд-ти, сопр-и и емк-и: $e(t) = u_L + u_R + u_C$, связанных с током $i$ стн-ми $u_L = L\dfrac{di}{dt}$, $u_R = Ri$, $u_C = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$. Т.о., получаем $e(t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$. Это ур. есть интегрально-дифн. ур-ие, к-ое относится к одному из наиболее сложных типов ур-й, но в данном случае путем дифв-я можно перейти к обычному дифн. ур-ю. Дсв-но, диф-уя по $t$, получим лин. дифн. ур-ие второго порядка с пст. коэф-ми

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt}. \qquad (21)$$

Рас-им два случая. 1) $e(t) = E = \text{const}$, тогда $\dfrac{de}{dt} = 0$ и ур. (21) переходит в одн. ур-ие

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0, \qquad (21а)$$

хркч. ур-ие к-го $r^2 + \dfrac{R}{L}r + \dfrac{1}{LC} = 0$ имеет корни $r_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{R^2C-4L}{4L^2C}}$.

Если $R^2C - 4L \geq 0$, то оба корня хркч. ур-я дст-ые и общ. р-ие есть фк-я непрдч., ств-но апрд-им будет и ток. Никаких элкч. клб-й в цепи не произойдет, так же, как и при $R^2C - 4L = 0$. Если же $R^2C - 4L < 0$, то общ. р-ие $i = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t)$, где положено $\delta = R/2L$, $\omega_1^2 = 1/(LC) - R^2/(4L^2)$, опр-ет элкч. клб-ия.

Заметим, что $L\dfrac{di}{dt}\Big|_{t=0} = E$, откуда $\dfrac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \dfrac{E}{L}$, и, т.о., нач. усл-я запишутся в виде $i|_{t=0} = 0$, $\dfrac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \dfrac{E}{L}$. Далее, диф-уя $i$ по $t$, имеем $\dfrac{di}{dt} = e^{-\delta t}[-\delta(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + \omega_1(-C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t)]$. Подставив $t = 0$ в врж-я $i$ и $\dfrac{di}{dt}$, получим $0 = C_1$, $\dfrac{E}{L} = -\delta C_1 + \omega_1 C_2$, откуда $C_1 = 0$, $C_2 = E/(L\omega_1)$, и р-ие принимает вид

$$i = \frac{E}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t. \qquad (21б)$$

2) $e(t) = E\sin\omega t$, тогда $\dfrac{de}{dt} = E\omega\cos\omega t$, откуда получим лин. неодн.ур-ие

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E\omega\cos\omega t, \qquad (21в)$$

Ствщ. одн. ур-е для (21в) мы уже получили в виде (21б), поэтому остается отыскать част. р-ие неодн. ур-я. Его будем искать в форме $i = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Для нахождения неопрн. коэф-ов выч-им:
$$\begin{array}{r|l} 1/C & \bar{i} = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ R & \bar{i}' = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t, \\ L & \bar{i}'' = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \end{array}$$
и приходим к системе алгч. ур-й отс-но $A$ и $B$:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E\omega, \\ -\omega RA + \left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{E\omega\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)}{\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2},\ B = \frac{E\omega^2R}{\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2}.$$

При этих зн-ях

коэф-ов искомое част. р-ие принимает вид

$$\bar{i} = \frac{E\omega}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2}\left[\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\cos\omega t + \omega R\sin\omega t\right].$$

Общ. р-ие неодн. ур-я получаем как сумму общ. р-ия ствщ. одн. ур-я и част. р-ия неодн-го, т.е. $i = I + \bar{i} = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + \dfrac{E}{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right]$.

Обз-им: $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = X$; $\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2} = \sqrt{X^2 + R^2} = Z$; тогда получим

$$i = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) - \frac{E}{Z^2}(X\cos\omega t - R\sin\omega t).$$

Найдем $C_1$ и $C_2$ из нач. усл-й: $i|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$ (последнее усл. получаем из ур-ия $L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E\sin\omega t$ при $t = 0$). С этой целью выпишем прв-ю $\dfrac{di}{dt} = -\delta e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + e^{-\delta t}(-C_1\omega_1\sin\omega_1 t + C_2\omega_1\cos\omega_1 t) + \dfrac{E}{Z^2}(X\omega\sin\omega t + R\omega\cos\omega t)$ и подс-им зн. $t = 0$ в врж-ия $i$ и $\dfrac{di}{dt}$, тогда получим $0 = C_1 - \dfrac{EX}{Z^2}$, откуда $C_1 = \dfrac{EX}{Z^2}$; $0 = -\delta C_1 + \omega_1 C_2 + \dfrac{ER\omega}{Z^2}$, откуда $C_2 = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\delta C_1 - \dfrac{ER\omega}{Z^2}\right) = -\dfrac{E}{Z^2\omega_1}(R\omega - X\delta)$. Врж-ие в скобках прб-уем и обз-им так: $R\omega - X\delta = R\omega - \dfrac{R}{2L}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = R\omega - \dfrac{R\omega}{2} + \dfrac{\delta}{C\omega} = \dfrac{R\omega}{2} + \dfrac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega + \dfrac{1}{C\omega}\right) = \delta X'$.

Итак, $i = \dfrac{E}{Z^2\omega}e^{-\delta t}(X_1\omega_1\cos\omega_1 t + X'\delta\sin\omega_1 t) - \dfrac{E}{Z^2}(X\cos\omega t - R\sin\omega t)$.

Положим $X\omega_1\Big/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \sin\gamma_1$, $X'\delta\Big/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \cos\gamma_1$ или, т.к.

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = \frac{Z^2}{LC}, \tag{21г}$$

то $X\sqrt{LC}\,\omega_1\big/Z = \sin\gamma_1$, $X'\sqrt{LC}\,\delta\big/Z = \cos\gamma_1$. Стн. (21г) получается сд. образом. Имеем $L\omega = X + \dfrac{1}{C\omega}$, $L\omega = X' - \dfrac{1}{C\omega}$, откуда $X' = X + \dfrac{2}{C\omega}$ и $X'^2 = X^2 + \dfrac{4}{C\omega}\left(X + \dfrac{1}{C\omega}\right)$. Сдт-но, $X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = X^2\left(\dfrac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[X^2 + \dfrac{4}{C\omega}\left(X + \dfrac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 = \dfrac{X^2}{LC} + \dfrac{4}{C\omega}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega} + \dfrac{1}{C\omega}\right)\delta^2 = \dfrac{X^2}{LC} + \dfrac{4LR^2}{C\cdot 4L^2} = \dfrac{1}{LC}(X^2 + R^2) = \dfrac{Z^2}{LC}$.

Анч-но положим $X\Big/\sqrt{X^2 + R^2} = \sin\gamma$, $R\Big/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$, или $X/Z = \sin\gamma$, $R/Z = \cos\gamma$. В результате получим $i = -\dfrac{Ee^{-\delta t}}{Z\sqrt{LC}\,\omega_1}\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \dfrac{E}{Z}\sin(\omega t - \gamma)$, где $\operatorname{tg}\gamma_1 = (X\omega)/(X'\delta)$, $\operatorname{tg}\gamma = X/R$.

Заметим, если $\omega = \omega_1$, то част. р-ие следует искать в виде $\bar{i} = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$. Наличие мнж-ля $t$ показывает, что амплитуда клб-ия неогр-но взр-ет; случай $\omega = \omega_1$ опр-ет резонанс.

**п3** (*LC*-цепь). Рас-им элкч. цепь *LC* с э.д.с., равной $E\cos(\omega t+\psi)$, причем $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$ . Найти ток *i* в цепи как фк-ю вр-и *t*, если нач. усл-ия: $i|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dfrac{E}{L}\cos\psi$ (последнее усл. следует из ур. $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = E\cos(\omega t+\psi)$ при $t=0$).

Р. Здесь дифн. ур-ие принимает вид (см. и (21)) $L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{C}i = -E\omega\sin(\omega t+\psi)$. (22)

Общ. р-ие ств. одн. ур-я: $I = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Найдем част. р-ие

$$\begin{array}{c|l} \dfrac{1}{C} & \bar{i} = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}\bar{i}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t, \\ L & \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{i}}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t, \end{array}$$

$A\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)\cos\omega t + B\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)\sin\omega t = -E\omega\sin\psi\cos\omega t - E\omega\cos\psi\sin\omega t$. Сдт-но,

$$AL\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = -E\omega\sin\psi,\ \text{откуда}\ A = -\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)},$$

$$BL\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = -E\omega\cos\psi,\ \text{откуда}\ B = -\frac{E\omega\cos\psi}{L\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)},$$

и поэтому $\bar{i} = \dfrac{E\omega}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}(\sin\psi\cos\omega t + \cos\psi\sin\omega t)$, или $\bar{i} = \dfrac{E\omega}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\sin(\omega t+\psi)$. Итак, общ. р-ие:

$$i = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{E\omega}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\sin(\omega t+\psi). \qquad (22a)$$

Для нахождения част. р-ия, удщ-го нач. усл-ям, выпишем прв-ю $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -C_1\omega_0\sin\omega_0 t +$ $+ C_2\omega_0\cos\omega_0 t + \dfrac{E\omega}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\cos(\omega t+\psi)$ и подс-им в врж-ия *i* и $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ зн-я при $t=0$, тогда

$$0 = C_1 + \frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)},\ \text{откуда}\ C_1 = -\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)},$$

$$\frac{E}{L}\cos\psi = C_2\omega_0 + \frac{E\omega^2\cos\psi}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)},\ \text{откуда}\ C_2 = -\frac{\omega_0 E\cos\psi}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)},$$

$$\text{и, сдт-но,}\ i = -\frac{E}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}[\omega\sin\psi\cos\omega t + \omega_0\cos\psi\sin\omega t - \omega\sin(\omega t+\psi)],$$

$$\text{или}\ i = \frac{E}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}[\omega\sin(\omega t+\psi) - \omega\sin\psi\cos\omega t - \omega_0\cos\psi\sin\omega t].$$

Произвольные пст. опр-ся из нач. усл-й, как и в предыдущем случае.

Если $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, то част. р-ие следует искать в виде $\bar{i} = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$; тогда

$\dfrac{d\bar{i}}{dt} = t(-A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + A\cos\omega t + B\sin\omega t$, отсюда получим $\dfrac{d^2\bar{i}}{d^2t} = t(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t) +$ $+ (-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t)$.

Т.к. $L\omega^2 - \dfrac{1}{C} = 0$, то, подс-я в ур-ие врж-ия $\bar{i}$ и $\dfrac{d^2\bar{i}}{d^2t}$, получим тожд-во $L(-2A\omega\sin\omega t +$ $+ 2B\omega\cos\omega t) = E\omega\cos\omega t$, откуда следует, что $A = 0$, $B = E/(2L)$, и потому $\bar{i} = \dfrac{E}{2L} t\sin\omega t$.

Общ. р-ие ур-я в этом случае ($R = 0$) имеет вид $i = I + \bar{i} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{E}{2L} t\sin\omega t$. Опр-им $C_1$ и $C_2$ из нач. усл-й $i|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Для этого выпишем

$$\frac{di}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{E\omega t}{2L}\cos\omega t + \frac{E\omega t}{2L}\sin\omega t$$

и, подс-ив зн. $t = 0$ в врж-ия $i$ и $\dfrac{di}{dt}$, получим $C_1 = C_2 = 0$, т.е. что $i = \bar{i}$. Окончательно имеем (случай резонанса) $i = \dfrac{E}{2L} t\sin\omega t$, где $\omega = 1\big/\sqrt{LC}$ .

**п4** (LR-цепь). Рас-им LR-цепь с э.д.с., равной $E\sin(\omega t + \psi)$. Найти ток $i$ в цепи как фк-ю вр-и $t$.

Р. В этом случае получается ур-ие первого порядка (с нач. усл-ем $i|_{t=0} = 0$)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin(\omega t + \psi). \tag{23}$$

Из хркч. ур-ия $Lr + R = 0$ опр-ем $r = -R/L$ и получаем общ. р-ие ствщ-го одн. ур-я $I = C_1e^{-Rt/L}$. Част. р-ие неодн. ур-ия будем искать методом неопрн. коэф-ов:

$$\begin{array}{c|l} R & i = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ L & \dfrac{di}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t, \end{array}$$

$$(RA + L\omega B)\cos\omega t + (-L\omega A + RB)\sin\omega t = E\sin\psi\cos\omega t + E\cos\psi\sin\omega t;$$

$$\begin{array}{l|l|l} RA + L\omega B = E\sin\psi & R & L\omega \\ -L\omega A + RB = E\cos\psi & -L\omega & R \end{array}$$

$$(R^2 + L^2\omega^2)A = E(R\sin\psi - L\omega\cos\psi),\ A = \frac{E\left(R\sin\psi - L\omega\cos\psi\right)}{Z^2},$$

$$(R^2 + L^2\omega^2)B = E(L\omega\sin\psi + R\cos\psi),\ B = \frac{E\left(L\omega\sin\psi + R\cos\psi\right)}{Z^2}, \text{ где } Z^2 = R^2 + L^2\omega^2;$$

$$\bar{i} = \frac{E}{Z^2}[(R\sin\psi - L\omega\cos\psi)\cos\omega t + (L\omega\sin\psi + R\cos\psi)\sin\omega t] = \frac{E}{Z^2}[L\omega(\sin\omega t\sin\psi - \cos\omega t\cos\psi) +$$

$$+ R(\sin\omega t\cos\psi + \cos\omega t\sin\psi)] = \frac{E}{Z^2}[-L\omega\cos(\omega t + \psi) + R\sin(\omega t + \psi)].$$

Если положить $R/Z = \cos\gamma$, $L\omega/Z = \sin\gamma$, то $\bar{i} = \dfrac{E}{Z}\sin(\omega t + \psi - \gamma)$.

Итак, $i = C_1e^{-Rt/L} + \dfrac{E}{Z}\sin(\omega t + \psi - \gamma)$. Для опр-ия $C_1$ используем нач. усл-ие $i|_{t=0} = 0$: $0 = C_1 +$ $+ \dfrac{E}{Z}\sin(\psi - \gamma)$, откуда $C_1 = \dfrac{E}{Z}\sin(\gamma - \psi)$. Окончательно имеем

$$i = \frac{E}{Z}[\sin(\gamma - \psi)e^{-Rt/L} + \sin(\omega t + \psi - \gamma)], \text{ где } \mathrm{tg}\gamma = L\omega/R. \tag{23а}$$

## 11.3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Что наз. системой дифн. ур-й? Что наз. р-ем такой системы?
2. Какая система дифн. ур-й наз. норм-ой?
3. Описать приемы сведения прзвл. системы дифн. ур-й к норм-ой.
4. Описать приемы сведения норм. системы к одному ур. высшего порядка.
5. Какой вид имеет общ. р-ие норм. системы дифн. ур-й. Сформулировать теорему сущв-ия р-ия такой системы.
6. Сформулировать св-ва р-й лин. системы дифн. ур-й.
7. Описать метод р-ия системы лин. ур-й с пст. коэф-ми с помощью хркч. ур-ия. Рас-еть случай простых корней (дсв-ых и комп-ых).
8. Указать вид р-ия в случае кратных корней хркч. ур-ия.
9. Описать мч. форму записи системы лин. дифн. ур-й. Сформулировать опр-ие лин. незв-ой системы вкн. фк-й и указать структуру общ. р-ия системы.
10. Привести задачи составления системы ур-й.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п11 р-ть з1-з20.

1. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3-2y\\ \frac{dy}{dt}&=2x-2t\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\\ y&=1+C_1\sin 2t-C_2\cos 2t\end{aligned}\right\}$.

2. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-2y\\ \frac{dy}{dt}&=x+3y\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=(C_1-C_2)e^{2t}\cos t-(C_1+C_2)e^{2t}\sin t\\ y&=(C_1\sin t+C_2\cos t)e^{2t}\end{aligned}\right\}$.

3. $\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+3x+y=0\\ &\frac{dy}{dt}-x+y=0\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=e^{-2t}(1-2t)\\ y&=e^{-2t}(1+2t)\end{aligned}\right\}$.

4. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x-\frac{1}{2}y-3t^2-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\\ \frac{dy}{dt}&=2y-2t-1\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=t^2+t+C_1e^{2t}+C_2e^{3t}\\ y&=t+1+2C_1e^{2t}\end{aligned}\right\}$.

5. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-7x+y\\ \frac{dy}{dt}&=-5y-2x\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\\ y&=e^{-6t}[(C_1+C_2)\cos t-(C_1-C_2)\sin t]\end{aligned}\right\}$.

6. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=2x-9y\\ \frac{dy}{dt}&=x+8y\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=(C_1-3C_1t-3C_2)e^{5t}\\ y&=(C_1t+C_2)e^{5t}\end{aligned}\right\}$.

7. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y+z\\ \frac{dy}{dt}&=z+x\\ \frac{dz}{dt}&=x+y\end{aligned}\right\}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}\\ y&=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}\\ z&=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}\end{aligned}\right\}$.

8. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y+z\\ \frac{dy}{dt}&=3x+z\\ \frac{dz}{dt}&=3x+y\end{aligned}\right\}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}\\ y&=\frac{3}{2}C_1e^{3t}-C_2e^{-2t}+C_3e^{-t}\\ z&=\frac{3}{2}C_1e^{3t}-C_2e^{-2t}-C_3e^{-t}\end{aligned}\right\}.$$

9. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=8y\\ \frac{dy}{dt}&=-2z\\ \frac{dz}{dt}&=2x+8y-2z\end{aligned}\right\}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=C_1e^{-2t}+C_2\sin 4t+C_3\cos 4t\\ y&=-\frac{1}{4}C_1e^{-2t}+\frac{1}{2}C_2\cos 4t-\frac{1}{2}C_3\sin 4t\\ z&=-\frac{1}{4}C_1e^{-2t}+C_2\sin 4t+C_3\cos 4t\end{aligned}\right\}.$$

10. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=2x+y-2z-t+2\\ \frac{dy}{dt}&=1-x\\ \frac{dz}{dt}&=x+y-z-t+1\end{aligned}\right\}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=C_1e^{t}+C_2\sin t+C_3\cos t\\ y&=t-C_1e^{t}+C_2\cos t-C_3\sin t\\ z&=1+C_2\sin t+C_3\cos t\end{aligned}\right\}.$$

11. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+y+z+e^{t}\\ \frac{dy}{dt}&=x-y+z+e^{3t}\\ \frac{dz}{dt}&=x+y+z+4\end{aligned}\right\}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x+y-z&=C_1e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{4}e^{3t}-4\\ x+y+2z&=C_2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{4}e^{3t}+8\\ x-y&=C_3e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{4}e^{3t}\end{aligned}\right\}.$$

12. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x\cos t\\ \frac{dy}{dt}&=\left(e^{t}+e^{-t}\right)y\end{aligned}\right\}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=C_1e^{\sin t}\\ y&=C_2e^{\operatorname{sh} t}\end{aligned}\right\}.$$

13. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=e^{t}-y-5x\\ \frac{dy}{dt}&=e^{2t}+x-3y\end{aligned}\right\},\ x(0)=\frac{119}{900},\ y(0)=\frac{211}{900}.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=\frac{4}{25}e^{t}-\frac{1}{36}e^{2t}\\ y&=\frac{1}{25}e^{t}+\frac{7}{36}e^{2t}\end{aligned}\right\}.$$

14. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x+8y\\ \frac{dy}{dt}&=-3y-x\end{aligned}\right\},\ x(0)=6,\ y(0)=-2.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=2\left(2e^{t}+e^{-t}\right)\\ y&=-e^{t}-e^{-t}\end{aligned}\right\}.$$

15. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y\\ \frac{dy}{dt}&=-x\end{aligned}\right\},\ x(0)=y(0)=1.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=\cos t+\sin t\\ y&=\cos t-\sin t\end{aligned}\right\}.$$

16. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-4(x+y)\\ \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}&=-4y\end{aligned}\right\},\ x(0)=1,\ y(0)=0.\ \text{O:}\ \left.\begin{aligned}x&=(1-2t)e^{-2t}\\ y&=te^{-2t}\end{aligned}\right\}.$$

17. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=4x-5y\\ \frac{dy}{dt}&=x\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0$, $y(0)=1$. О: $\left.\begin{aligned}x&=-5e^{2t}\sin t\\ y&=e^{2t}(\cos t-2\sin t)\end{aligned}\right\}$.

18. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+y+t\\ \frac{dy}{dt}&=x-2y+2t\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-\frac{7}{9}$, $y(0)=-\frac{5}{9}$. О: $\left.\begin{aligned}x&=-\frac{4}{3}t-\frac{7}{9}\\ y&=\frac{1}{3}t-\frac{5}{9}\end{aligned}\right\}$.

19. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+5y\\ \frac{dy}{dt}&=-3y-x\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-2$, $y(0)=1$. О: $\left.\begin{aligned}x&=(\sin t-2\cos t)e^{-t}\\ y&=e^{-t}\cos t\end{aligned}\right\}$.

20. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}&=17x+8y\\ 13\frac{dx}{dt}&=53x+2y\end{aligned}\right\}$, $x(0)=2$, $y(0)=-1$. О: $\left.\begin{aligned}x&=e^{5t}+e^{3t}\\ y&=6e^{5t}-7e^{3t}\end{aligned}\right\}$.

**Задачи и примеры для самостоятельной работы** (см. з1, з2 из 6°, п1-п11 из 1°-5°).

**з1** (подключение цепи к источнику с пст. электродвижущей силой). Индуктивность (инд.) $L$, емкость (емк.) $C$ и сопротивление (сопр.) $R$ соединены как на рис. 12. Цепь подключается к источнику с пст-ой э.д.с., равной $E$, причем до включения (вкл.) ток и заряд в цепи отсутствовали. Найти ток $i$, протекающий в катушке самоиндукции, как фк-ю от вр-и $t$.

Р. Обз-ив через $i_1$ и $i_2$ токи в правом контуре, сост-м систему ур-й задачи по закону Кирхгофа:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)d\tau=E,\ Ri_1-\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)d\tau=0, \tag{24}$$

где $i-i_1=i_2$. Иск-ив из этой системы $i_1$ и сж-ив ствщ-ие части ур-й (24), имеем

$$L\frac{di}{dt}+Ri_1=E. \tag{24а}$$

Если продифв-ть по $t$ обе части первого из ур-й (24), то получим $L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i-\frac{1}{C}i_1=0$, откуда $i_1=CL\frac{d^2i}{dt^2}+i$. При подн-ке $i_1$ в ур. (24а) получаем $L\frac{di}{dt}+CLR\frac{d^2i}{dt^2}+Ri=E$, или ур-ие

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{di}{dt}+\frac{1}{CL}i=\frac{E}{CLR}, \tag{24б}$$

в к-ом ток $i_1$ отсутствует. Р-им ур. (24б). Хркч. ур-ие его имеет вид $k^2+\frac{1}{CR}k+\frac{1}{CL}=0\Rightarrow k_{1,2}=$ $=-\frac{1}{2CR}\pm\sqrt{\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{CL}}$ или $k_{1,2}=-\alpha\pm\beta$, где $\alpha=\frac{1}{CR}$, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{CL}}$.

Если $\alpha^2>\frac{1}{CL}$, то общ. р-ие ств-го одн. ур-я равно $i^\circ=e^{-\alpha t}(C_1\mathrm{ch}\beta t+C_2\mathrm{sh}\beta t)$. Част. р-ие неодн. ур-я (24б) будем искать в виде $\bar{i}=A$. Тогда $\bar{i}'=\bar{i}''=0$ и $A/(CL)=E/(CLR)$, откуда $A=E/R$. Сдт-но, $\bar{i}=E/R$, а общ. р-ие ур. (24б) имеет вид $i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}(C_1\mathrm{ch}\beta t+C_2\mathrm{sh}\beta t)$, (24в)

Опр-им $C_1$ и $C_2$ из нач. усл-й. Т.к. $i=0$ при $t=0$, то из (24в) получим $\frac{E}{R}+C_1=0$, откуда

$C_1 = -\dfrac{E}{R}$,и поэтому $i = \dfrac{E}{R} + e^{-\alpha t}\left(C_2 \operatorname{sh}\beta t - \dfrac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right)$. Выч-им $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Имеем: $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} =$

$= e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(C_2 \operatorname{sh}\beta t - \dfrac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right) + \beta\left(C_2 \operatorname{ch}\beta t - \dfrac{E}{R}\operatorname{sh}\beta t\right)\right]$. Положив здесь $t = 0$, получим $\left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} =$

$= \dfrac{\alpha E}{R} + \beta C_2$. Теперь можно опр-ть и $C_2$. Учитывая, что при $t = 0$ не только $i = 0$, но и $i_1 = 0$, получим из ур. (24а), что $\dfrac{L\alpha E}{R} + L\beta C_2 = E$, откуда $C_2 = \dfrac{E}{L\beta}\left(1 - \dfrac{L\alpha}{R}\right) = \dfrac{E}{R\beta}\left(\dfrac{R}{L} - \alpha\right)$.

Част. р-ие $i$ при $\alpha^2 > \dfrac{1}{CL}$ запишется так: $i = \dfrac{E}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t + \left(\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{R}{L\beta}\right)\operatorname{sh}\beta t\right]\right\}$.

Если же $\alpha^2 < \dfrac{1}{CL}$, то $\beta$ – мнимое число и, полагая $\beta = j\omega_1$ $\left(j = \sqrt{-1}\right)$, $\omega_1 = \sqrt{1/(CL) - \alpha^2}$, получим част. р-ие $i$ в виде $i = \dfrac{E}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_1 t + \left(\alpha/\omega_1 - R/L\omega_1\right)\sin\omega_1 t\right]\right\}$.

1*. Найти р-ие $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y,\quad x(\pi) = -1,\ y(\pi) = 0$. О: $\left.\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= -\sin t.\end{aligned}\right\}$

**з2** (подключение цепи из двух индуктивно связанных контуров). К источнику с пст. элкдвжщ. силой $E$ подключается цепь, состоящая из двух инд-но связанных контуров, изб-ных на рис. 13. Найти токи $i_1$ и $i_2$ в обоих контурах в зв-сти от вр. $t$, если подключение производится при нулевых нач. усл-х, причем $L_1L_2 \neq M^2$.

Р. Согласно закону Кирхгофа сост-ем систему дифн. ур-й задачи:

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = E,\ L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{25}$$

Здесь $M$ – коэф-т взаимной инд-сти контуров, остальные обз. – как в предыдущей задаче.

Из системы ур-й (25) иск-им $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$. Для этого умн-м обе части 1-го ур. на $L_2$, а 2-го – на $M$ и сж-м, тогда получим $(L_1L_2 - M^2)\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2R_1i_1 - MR_2i_2 = L_2E$, или

$$(1 - k^2)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 2\alpha_1 i_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}i_2 = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}, \tag{25а}$$

что получилось в результате деления обеих частей предыдущего ур. на $L_1L_2$ и замены $M^2/(L_1L_2) = k^2$, $R_1/L_1 = 2\alpha_1$, $R_2/L_2 = 2\alpha_2$. Продиф-уем обе части ур. (25а), найдем врж. $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ и подс-им его в первое ур. (25)

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{R_1\left(1 - k^2\right)}{4M\alpha_1\alpha_2}\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_1}{4M\alpha_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

или

$$\frac{R\left(1 - k^2\right)}{4\alpha_1\alpha_2}\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{R_1}{2\alpha_2} + \frac{R_1}{2\alpha_1}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = E.$$

Разделив обе части полученного ур. на коэф-т при $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2}$, имеем

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}{1 - k^2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2}i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1\left(1 - k^2\right)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + 2\sigma\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2}i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1\left(1 - k^2\right)}, \tag{25б}$$

где положено $(\alpha_1+\alpha_2)/(1-k^2)=\sigma$. Из (25б) получим хркч. ур-ие $r^2+2\sigma r+\dfrac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}=0\Rightarrow r_{1,2}=$

$=-\sigma\pm\beta$, где $\beta=\sqrt{\sigma^2-\dfrac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}}$ (причем $\beta$ – дсв. число, т.к. $\sigma^2-\dfrac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}>0$), тогда общ. р-ие $z$

ств-го одн. дифн. ур-я равно $z=e^{-\sigma t}(C_1\mathrm{ch}\beta t+C_2\mathrm{sh}\beta t)$. Част. р-ие неодн. ур-я будем искать в

виде $\bar{i}_1=A$, т.к. $\dfrac{\mathrm{d}\bar{i}_1}{\mathrm{d}t}=0$ и $\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{i}_1}{\mathrm{d}t^2}=0$, то дифн. ур-ие (25б) приводим к алгч. ур-ю отс-но $A$:

$\dfrac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}A=\dfrac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}$, откуда $A=E/R_1$, а сдт-но, общ. р-ие ур-ия (25б) имеет вид

$$i_1=\frac{E}{R_1}+e^{-\sigma t}(C_1\mathrm{ch}\beta t+C_2\mathrm{sh}\beta t). \qquad (25в)$$

Для опр-ия произвольных пст. используем нач. усл-я: $i_1=0$ и $i_2=0$ при $t=0$. Подн-ка первого из них в р-ие (25в) сразу дает $C_1=-E/R_1$. Поэтому р-ие (25в) запишется так:

$$i_1=\frac{E}{R_1}+e^{-\sigma t}\left(C_2\,\mathrm{sh}\,\beta t-\frac{E}{R_1}\mathrm{ch}\,\beta t\right). \qquad (25г)$$

Возьмем прв-ю $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=e^{-\sigma t}\left[-\sigma\left(C_2\,\mathrm{sh}\,\beta t-\dfrac{E}{R_1}\mathrm{ch}\,\beta t\right)+\beta\left(C_2\,\mathrm{ch}\,\beta t-\dfrac{E}{R}\mathrm{sh}\,\beta t\right)\right]$ и выч-им ее зн-я

при $t=0$: $\left.\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\sigma\dfrac{E}{R_1}+C_2\beta$. Подс-ив найденное зн. прв-ой и зн-ия $i_1=i_2=0$ из нач. усл-й в

ур. (25а), получим ур-ие для опр-ия $C_2$: $(1-k^2)\left(\dfrac{\sigma E}{R_1}+C_2\beta\right)=\dfrac{2\alpha_1 E}{R_1}$. Учитывая, что $\sigma=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{(1-k^2)}$,

прб-ем последнее ур. к виду $\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{R_1}+C_2\beta(1-k^2)=\dfrac{2\alpha_1 E}{R_1}$, откуда $C_2=\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{\beta(1-k^2)R_1}$. Тогда

част. р-ие запишется так: $$i_1=\frac{E}{R_1}\left\{1+e^{-\sigma t}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta(1-k^2)}\mathrm{sh}\,\beta t-\mathrm{ch}\,\beta t\right]\right\}. \qquad (25д)$$

Част. р-ие $i_2$ можно опр-ть из стн. (25а), заменив в нем $i_1$ и $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ полученным выше врж-ем $i_1$ как фк-и от $t$ (см. фм-у 25д) и прв-ой этой фк. по $t$. Это сделать самим!

2*. Р-ть систему $\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=e^{-t}-y\\ 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\sin t-2y\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-2$, $y(0)=1$. О: $\left.\begin{aligned}x&=-(2t+\sin t+\cos t+e^{-t}),\\ y&=\cos t-2e^{-t}+2.\end{aligned}\right\}$

**з3** (трансформатор в цепи пер-го тока с нагрузкой). Найти токи в двух контурах трансформатора (трсф.), вкл-го в цепь пер. тока с нагрузкой.

Р. Трсф-р состоит из двух инд-но связанных контуров, имеющих инд-сть и внутреннее спрт., и от рис. 13 отличается только тем, что во втором контуре имеется еще нагрузка (внешнее спрт.) $R$ (рис. 14). Кроме того, источник тока предполагается не с пст. элкдвжщ. силой $E$, а $U(t)=u\cos(\omega t+\varphi_0)$, где $u$ – амплитуда, $\omega$ – частота и $\varphi_0$ – нач. фаза напряжения источника.

По закону Кирхгофа, система дифн. ур-й задачи в нашем случае примет вид, анч-ый (25):

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+R_1 i_1+M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=U(t),\ L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+(R_2+R)i_2+M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0, \qquad (26)$$

где $U(t)$ – элкдвжщ. сила источника. Примем за нач. фазу $\varphi_0$ равной нулю и запишем напряжение в виде $U(t)=u\cos\omega t$. Систему (26) запишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_1L_2}{D}i_1+\frac{M(R_2+R)}{D}i_2+\frac{L_2U}{D},\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\frac{R_1M}{D}i_1-\frac{L_1(R_2+R)}{D}i_2-\frac{MU}{D}, \qquad (26а)$$

где $D = L_1L_2 - M^2$ – опрт. системы.

Система (26а) яв-ся неодн-ой и для ее р-ия нх-мо р-ть сначала ствщ. одн. систему

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1L_2}{D}i_1 + \frac{M\overline{R}}{D}i_2,\ \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1M}{D}i_1 - \frac{L_1\overline{R}}{D}i_2, \tag{26б}$$

в к-ой ввели обз-ие $(R_2 + R) = \overline{R}$. Хркч. ур-ие системы имеет вид (опустили $D$):

$\begin{vmatrix} -R_1L_2 - r & M\overline{R} \\ R_1M & -L_1\overline{R} - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 + \left(R_1L_2 + \overline{R}L_1\right)r + R_1\overline{R}D = 0$, откуда находим

$$r_{1,2} = -\frac{R_1L_2 + \overline{R}L_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1L_2 + \overline{R}L_1}{2}\right)^2 - R_1\overline{R}D}\ . \tag{26в}$$

Из (26в) видно, что при $D > 0$ хркч. ур-ие имеет либо два отц. дсв. корня, либо два комп. корня с отц. дсв. частями. В этом случае общ. р-ие одн. системы (26б), опрщ-е экстраток $i_1$ замыкания, при взр-и $t$ быстро убывает, незв-мо от того, имеет ли экстраток хрк-р клб-й [комп. корни (26в)] или апрдч. хрк-р (дсв. корни). При изучении установившегося процесса этой частью р-ия можно пренебречь, поэтому в общ. виде не будем его выписывать.

Особый интерес представляет част. случай расм. схемы, назм-ый идеальным трсф-ом. Последний хркз-ся малыми внутренними сопр. $R_1$, $R_2$ и почти равными нулю по сравнению с внешней нагрузкой $R$, и прз-но равным нулю зн-ем $D$, откуда вытекает прж. рав-во $M \approx \sqrt{L_1L_2}$ . Тогда можно считать $\overline{R} \approx R$ и из стн. (26в) вытекает, что $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx -RL_1$, так что общ. р-ие одной системы (26б) для случая идеального трсф. имеет вид $I_1 = C_1^{(1)} + C_2^{(1)}e^{-RL_1t}$, $I_2 = C_1^{(2)} + C_2^{(2)}e^{-RL_1t}$. Вторые слг. при взр-и $t$ быстро уб-ют; установившийся процесс хркз-ся первыми слг. вместе с част. р-ем неодн. системы (26а).

Т.к. $U(t) = u\cos\omega t$, то будем искать эти част. р-ия в виде

$$\bar{i}_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t,\ \bar{i}_2 = P\cos\omega t + Q\sin\omega t. \tag{26г}$$

Подс-я (26г) в (26а), находим:

$$D(-A\omega\sin\omega t + Q\omega\cos\omega t) = -R_1L_2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + M\overline{R}\,(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + L_2u\cos\omega t,$$

$$D(-P\omega\sin\omega t + Q\omega\cos\omega t) = R_1M(A\cos\omega t + B\sin\omega t) - L_1\overline{R}\,(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) - Mu\cos\omega t.$$

Приравнивая коэф-ы при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в левых и правых частях выписанных ур., получим систему

$$\left.\begin{aligned} BD\omega &= -AR_1L_2 + PM\overline{R} + L_2u, \\ -AD\omega &= -BR_1L_2 + QM\overline{R}, \\ QD\omega &= AR_1M + PL_1\overline{R} - Mu, \\ -PD\omega &= BR_1M + QL_1\overline{R} \end{aligned}\right\}$$

четырех лин. ур-й с четырьмя неизвестными $A$, $B$, $P$, $Q$. Р-ие этой системы дает врж-ие для част. р-ия (26г).

Не останавливаясь на этом общем случае, возвратимся снова к част. случаю идеального трсф. Для него ($R_1 \approx R_2 \approx 0$, $\overline{R} \approx R$, $D \approx 0$, $M \approx \sqrt{L_1L_2}$ ) получаем ур-ия $PR\sqrt{L_1L_2} + L_2u = 0$, $QR\sqrt{L_1L_2} = 0$, откуда $Q = 0$ и $P = -\sqrt{L_2/L_1}\ u/R$.

Полученная вел. $P$ опр-ет амплитуду тока в цепи нагрузки. Заметим, что амплитуда падения напряжения на нагрузке будет тогда равна $u_2 = \sqrt{L_2/L_1}\ u$, где $u$ есть амплитуда напряжения источника. Т.о., вел. $\sqrt{L_2/L_1}$ опр-ет отн-ие напряжений в цепи нагрузки и цепи источника. Ее наз. коэф-ом трансформации.

3*. Р-ть систему $\left.\begin{aligned} 2\frac{dx}{dt} &= 6x - y + 6t^2 - t + 3, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y - 2t - 1, \end{aligned}\right\}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 3$. О: $\left.\begin{aligned} x &= e^{2t} + e^{3t} + t^2 + t, \\ y &= 2e^{2t} + t + 1. \end{aligned}\right\}$.

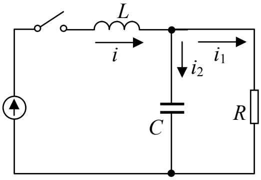


Рис. 12

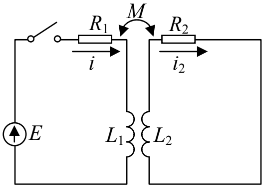


Рис. 13

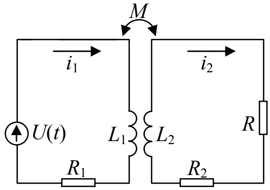


Рис. 14

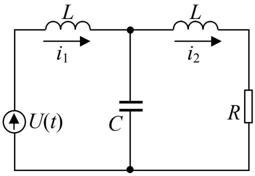


Рис. 15

**з4** (фильтр низких частот). На рис. 15 приведена элкч. схема: равные инд-сти $L$, емк. $C$ и сопр-ие нагрузки $R$ подключены к источнику напряжения, изменяющегося по закону $U(t) = u\cos\omega t$. Выяснить хрк-р клб-й падения напряжения на нагрузке, огрв-ясь установившимся процессом.

Р. Обз-ив токи в левом и правом контурах ств-но через $i_1$ и $i_2$, найдем, что ток через емк. равен $i_2 - i$. По закону Кирхгофа, получаем систему дифн. ур-й отс-но $i_1$, $i_2$:

$$L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U(t),\ L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1)d\tau = 0. \tag{27}$$

Продифв-ав второе ур. (27) по $t$, получим $L\dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + R\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0$, откуда $i_1 = LC\dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2$. Врж-ие для $i_1$ можно вновь дифв-ть по $t$ и подс-ть в первое ур. (27), тогда получим

$$L^2C\frac{d^3 i_2}{dt^3} + LRC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U(t). \tag{27а}$$

Хркч. ур-ие для одн-го, ствщ-го (27а), имеет вид $L^2Cr^3 + LRCr^2 + 2Lr + R = 0$, все коэф-ы к-го плж-ны. Отсюда видно, что такое ур. не может иметь плж. дсв. корня, т.к. при $r > 0$ все слг. левой части плж-ны и не могут в сумме дать нуль. Более того, можно д-ть, что и у комп. корней такого ур. дсв-ые части отц.

Т.о., все слг-ые общ. р-ия одн. ур-ия, ствщ-го (27а), содержат экспоненты с отц. пкзт-ем и поэтому быстро уб-ют при взр-и $t$. Установившийся процесс, к-ый нас интересует, опр-ся поэтому исключительно част. р-ем неодн. ур-я (27а), к-ое (из-за $U = u\cos\omega t$) будем искать в виде $\bar{i}_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Диф-уя это врж-ие и подс-я $i_2$ и прв-ю в (27а), приходим к системе ур-й

$$\left.\begin{aligned} A\left(-2L\omega + L^2C\omega^3\right) + B\left(R - LRC\omega^2\right) = 0,\\ A\left(R - LRC\omega^2\right) + B\left(2L\omega - L^2C\omega^3\right) = u \end{aligned}\right\}$$

или, если воспользоваться обз-ми $-2L\omega + L^2C\omega^3 = \alpha$, $R - LRC\omega^2 = \beta$, к системе $\left.\begin{aligned}\alpha A + \beta B = 0,\\ \beta A - \alpha B = a\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \beta u/(\alpha^2 + \beta^2)$, $B = -\alpha u/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Амплитуда р-ия $\bar{i}_2$ врз-ся тогда стн-ем $|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = |u|/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ или, с учетом зн-ий $\alpha$, $\beta$:

$$|v| = \frac{|u|}{\sqrt{L^2\omega^2\left(LC\omega^2 - 2\right)^2 + R^2\left(1 - LC\omega^2\right)^2}}. \tag{27б}$$

Падение напряжения на нагрузке можно получить теперь из (27б) умн-ем обеих частей рав-ва на $R$, т.к. $U_2 = Ri_2$.

Рас-им влияние частоты клб-й $\omega$ на отн-ие амплитуд напряжения на нагрузке к входному напряжению. При малых частотах $\omega$ вел-ны порядка $\omega^2$ и выше можно пренебречь. Тогда в знаменателе (27б) останутся лишь члены, не содержащие $\omega$, так что подкоренное врж. будет равно $R^2$. Сдт-но, $|v| \approx |u|/R$ и требуемое отн-ие $|v|\cdot R/|u| \approx 1$.

Это показывает, что клб-ия малой частоты проходят через длинную схему, практически не изменяя амплитуды. Наоборот, для больших частот $\omega$ главным членом подкоренного врж. (27б) будет член со старшей сп. $\omega$. Поэтому для таких частот $|v| \approx |u|/\left(L^2C\omega^3\right)$, откуда отн-ие $\dfrac{|v|R}{|u|} \approx$

$\approx \dfrac{R}{L^2C\omega^3} \approx 0$, т.е. клб-ия высокой частоты практически не проходят через длинную схему; она пропускает низкие частоты и почти не пропускает высоких. Именно поэтому такую схему и наз-ют низкочастотным фильтром.

4*. Найти р-ие системы $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}$. О: $x = \sqrt{\dfrac{2t + C_2}{C_1}}, \; y = \sqrt{C_1(2t + C_2)}$.

**з5**. Путем сведения к ур-ю третьего порядка р-ть систему
$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{6}x_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{5}{3}e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}e^t. \end{aligned}\right\}$$

Р. Диф-уем по $t$ первое ур. системы:
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{6}\frac{dx_1}{dt} + \frac{7}{6}\frac{dx_2}{dt} - \frac{5}{6}\frac{dx_3}{dt} + \frac{5}{3}e^t.$$

Заменив в этом ур-и $\dfrac{dx_2}{dt}$ и $\dfrac{dx_3}{dt}$ их врж-ми из 2-го и 3-го ур-й системы, будем иметь
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6\frac{dx_1}{dt} - 31x_1 - x_2 + 11x_3 + 50e^t. \tag{28}$$

Полученное ур. вновь диф-уем по $t$: $\dfrac{d^3x_1}{dt^3} = 6\dfrac{d^2x_1}{dt^2} - 31\dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_2}{dt} + 11\dfrac{dx_3}{dt} + 50e^t$.

Снова заменив $\dfrac{dx_2}{dt}$ и $\dfrac{dx_3}{dt}$ их врж-ми, найдем
$$216\frac{d^3x_1}{dt^3} = 36\frac{d^2x_1}{dt^2} - 186\frac{dx_1}{dt} + 25x_1 - 41x_2 + 19x_3 + 322e^t. \tag{28а}$$

Теперь из 1-го ур. исх. системы и ур.(28) врж-ем $x_2$ и $x_3$ через $t$, $x_1$, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$:
$$x_2 = \frac{5}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dt} + 25x_1 - 5e^t; \; x_3 = \frac{7}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dt} + 3x_1 - 5e^t. \tag{28б}$$

Подс-я эти зн-я в ур. (28а), имеем $\dfrac{d^3x_1}{dt^3} + \dfrac{dx_1}{dt} = 2e^t$.

Получили ур-ие 3-го порядка с пст. коэф-ми и специальной правой частью. Его общ. р-ие имеет вид $x_1 = C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t + e^t$.

Подс-я найденное врж. фк-и $x_1$ и ее прв-ых $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$ в (28б), найдем две др. искомые фк.:
$$x_2 = 2C_1 + \frac{1}{2}(C_3 - C_2)\cos t - \frac{1}{2}(C_3 + C_2)\sin t;$$
$$x_3 = 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos t + \frac{1}{2}(C_2 - C^3)\sin t + e^t.$$

5*. Найти р-ие $\dfrac{dt}{my - nx} = \dfrac{dx}{nt - ly} = \dfrac{dy}{lx - mt}$. О: $\left.\begin{aligned} li + mx + ny &= C_1, \\ t^2 + x^2 + y^2 &= C_2. \end{aligned}\right\}$ Ук: см. п4а из 2°: 11.3 и з11 (далее).

**з6**. Найти част. р-ие системы $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y$, при $x(0) = 2, y(0) = 0$.

Р. Диф-уем по $t$ 1-е ур. системы: $\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}$. Заменяем $\frac{dy}{dt}$ его врж-ем из 2-го ур. системы: $\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 16x + 20y$. Из 1-го ур-я системы находим $y$ и подс-ем в последнее ур.: $\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 9x = 0$. Это лин. одн. ур-ие с пст. коэф-ми. Его общ. р-ем будет $x(t) = C_1e^t + C_2e^{9t}$.

Подс-я теперь $x(t)$ и $\frac{dx}{dt} = C_1e^t + 9C_2e^{9t}$ в 1-е ур. системы, имеем $y(t) = -C_1e^t + C_2e^{9t}$. Уд-я нач. усл-ям, получаем $2 = C_1 + C_2$, $0 = -C_1 + C_2$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Тогда част. р-ие исх. системы имеет вид $x(t) = e^t + e^{9t}$, $y(t) = -e^t + e^{9t}$.

6*. Найти р-ие $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}$. О: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ p^2 + q^2 = C_2^2, \\ xp + yq = C_3. \end{array}\right\}$ Ук: см. 5*.

**з7**. Р-ть систему $\frac{dx}{dt} = x^2 + y$, $\frac{dy}{dt} = xy + y^2$.

Р. Сж-в почленно ур-я системы, найдем $\frac{d(x+y)}{dt} = (x+y)^2$ или $\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = dt \underset{\text{инт}}{\Rightarrow}$

$$-\frac{1}{x+y} = t + C_1. \tag{29}$$

Разделив почленно ур-я системы, получим ур-ие $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$. Положим $x = uy$, тогда $\frac{d(uy)}{dy} = \frac{u(uy^2 + y^2)}{uy^2 + y^2} \Rightarrow y\frac{du}{dy} + u = u \Rightarrow y\frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow du = 0\ (y \neq 0) \underset{\text{инт}}{\Rightarrow} u = C_2$, т.е.

$$x = C_2y. \tag{29а}$$

Р-ив систему ур-й (29), (29а), находим $x = -\frac{C_2}{(t + C_1)(C_2 + 1)}$; $y = -\frac{1}{(t + C_1)(C_2 + 1)}$.

7*. Найти р-ие $\frac{t\,dt}{y^2 - 2xy - x^2} = \frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{x-y}$. О: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + t^2 = C_1, \\ x^2 + 2xy - y^2 = C_2. \end{array}\right\}$

**з8**. Р-ть систему $\frac{dx}{dt} = 3x - y - z$, $\frac{dy}{dt} = -x + 5y - z$, $\frac{dz}{dt} = x - y + 3z$.

Р. Это одн. система с пст. коэф-ми. Сост-м хркч. ур. $\begin{vmatrix} 3-k & -1 & -1 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ или $k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0$. Методом подбора находим $l = 2$ и, разделив левую часть ур-я на $k - 2$, получим ур. $k^2 - 9k + 18 = 0 \Rightarrow k_2 = 3$, $k_3 = 6$. Собственный (собс.) вк., ствщ-й корню $k_1 = 2$, найдем из системы

$$\left.\begin{array}{r} (3-2)\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + (5-3)\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + (3-2)\alpha_3 = 0. \end{array}\right\}$$

Р-в ее, найдем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, т.е. корню $k_1 = 2$ ств-ет собс. вк-р (1, 0, – 1). Анч-но устанавливаем, что корням $k_2 = 3$ и $k_3 = 6$ ств-ют собс. вк-ы (1, 1, 1) и (1, – 2, 1).

Т.о. получили сд-ю фунд. систему р-й (ств-но для $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ и $k_3 = 6$):

$$x_1 = e^{2t},\quad y_1 = 0,\quad z_1 = -e^{2t};$$
$$x_2 = e^{3t},\quad y_2 = e^{3t},\quad z_2 = e^{3t};$$
$$x_3 = e^{6t},\quad y_3 = -2e^{6t},\quad z_1 = e^{6t}.$$

Общ. р-ие системы $x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$; $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$; $z = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3$ или $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$; $y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}$; $z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$.

8*. Найти р-ие $\left.\begin{aligned} t\mathrm{d}t &= (t-2x)\mathrm{d}t, \\ t\mathrm{d}y &= (tx+ty+2x-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}\right\}$ О: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}t + C_2\frac{1}{t^2}, \\ y &= C_1e^t - \frac{t}{3} - \frac{C_2}{t^2}. \end{aligned}\right\}$

**з9**. Р-ть систему $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 4x_1 - 3x_2$, $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 3x_1 + 4x_2$.

Р. Хркч. ур-ие $\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0$ или $(4-k)^2 = -9$, откуда $k_1 = 4 + 3i$, $k_2 = 4 - 3i$. Для $k_1$ собс. вк-р опр-ся из системы $\left.\begin{aligned} -3i\alpha_1 - 3\alpha_2 &= 0, \\ 3\alpha_1 - 3i\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} i\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 - i\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -i$, т.е. $(1, -i)$ – собс. вк.

Анч-но для $k_2 = 4 - 3i$ получим собс. вк-р $(1, i)$. Фунд. система р-й (ств-но для $k_1 = 4 + 3i$, $k_2 = 4 - 3i$): $\begin{matrix} x_{11} = e^{(4+3i)t}, & x_{21} = -ie^{(4+3i)t}, \\ x_{12} = e^{(4-3i)t}, & x_{22} = ie^{(4-3i)t}. \end{matrix}$ Общ. р-ие системы $\begin{aligned} x_1 &= C_1e^{(4+3i)t} + C_2e^{(4-3i)t}; \\ x_2 &= -iC_1e^{(4+3i)t} + iC_2e^{(4-3i)t}. \end{aligned}$

Получим р-ие в дсв. форме:

$$\left.\begin{aligned} e^{(4+3i)t} &= e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t), \\ -ie^{(4+3i)t} &= e^{4t}(-i\cos 3t + \sin 3t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_{11} = e^{4t}\cos 3t,\ x_{21} = e^{4t}\sin 3t - \text{дсв. часть}, \\ &x_{12} = e^{4t}\sin 3t,\ x_{22} = -e^{4t}\cos 3t - \text{мним. часть}. \end{aligned}$$

Отсюда общ. р-ие системы в дсв. форме имеет вид $\begin{aligned} x_1 &= e^{4t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t); \\ x_2 &= e^{4t}(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t). \end{aligned}$

9*. Найти р-ие $\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2 - x^2 - y^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{2tx} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2ty}$. О: $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= C_1x - t^2, \\ y &= C_2x. \end{aligned}\right\}$

**з10**. Найти общ. р-ие системы $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -5x + 2y + e^t$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 6y + e^{-2t}$.

Р. Это неодн. лин. система с пст. коэф-ми. Общ. р-ие ствщ-ей одн. системы найдем так. Из хркч. ур-я $\begin{vmatrix} -5-k & 2 \\ 1 & -6-k \end{vmatrix} = 0$ или $k^2 + 11k + 28 = 0 \Rightarrow k_1 = -7$, $k_2 = -4$, тогда собс. вк-р для $k_1 = -7$ находим из $\begin{vmatrix} (-5+7)\alpha_1 & 2\alpha_2 \\ \alpha_1 & (-6+7)\alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\alpha_1 & 2\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $(1, -1)$ – собс. вк. Анч-но для $k_2 = -4$ $(2, 1)$ – собс. вк.

Итак, общ. р-ие ствщ-ей одн. системы $x = C_1e^{-7t} + 2C_2e^{-4t}$; $y = -C_1e^{-7t} + C_2e^{-4t}$.

Част. р-ие неодн. системы будем искать в виде $\tilde{x} = Ae^t + Be^{-2t}$, $\tilde{y} = Ce^t + De^{-2t}$. Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} = Ae^t - 2Be^{-2t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} = Ce^t - 2De^{-2t} \end{cases} \left| \begin{matrix} \text{Подс-я их} \\ \text{в исх. ур-ие,} \\ \text{имеем} \end{matrix} \right| \begin{matrix} Ae^t - 2Be^{-2t} = -5Ae^t - 5Be^{-2t} + 2Ce^t + 2De^{-2t} + e^t \\ Ce^t - 2De^{-2t} = Ae^t + Be^{-2t} - 6Ce^t - 6De^{-2t} + e^{-2t} \end{matrix} \right| \Rightarrow$$

$\left.\begin{aligned} A &= -5A + 2C + 1 \\ -2B &= -5B + 2D \\ C &= A - 6C \\ -2D &= B - 6D + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 7/40$, $B = 1/5$, $C = 1/40$, $D = 3/10$. Тогда част. р-ие неодн. системы имеет вид $\tilde{x} = \dfrac{7}{40}e^t + \dfrac{1}{5}e^{-2t}$; $\tilde{y} = \dfrac{1}{40}e^t + \dfrac{3}{10}e^{-2t}$, а общ. р-ие неодн. системы будет таким:

$$x = C_1e^{-7t} + 2C_2e^{-4t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t};\ y = -C_1e^{-7t} + C_2e^{-4t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{3}{10}e^{-2t}.$$

10*. Найти р-ие $\dfrac{dt}{xt} = \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{txy - 2t^2}$. О: $\left.\begin{array}{c} x = C_1 t, \\ \ln\left|y - \dfrac{2t}{x}\right| = t + C_2. \end{array}\right\}$

**з11**. Найти р-ие $\dfrac{dt}{xy} = \dfrac{dx}{ty} = \dfrac{dy}{tx}$.

Р. $\dfrac{dt}{xy} = \dfrac{dx}{ty} \Rightarrow \dfrac{2t dt}{2txy} = \dfrac{2x dx}{2xty} \Rightarrow d(t^2 - x^2) = 0 \underset{\text{инт}}{\Rightarrow} t^2 - y^2 = C_1$. Анч-но $\dfrac{dx}{ty} = \dfrac{dy}{tx} \Rightarrow \dfrac{2x dx}{2xty} =$
$= \dfrac{2y dy}{2ytx} \Rightarrow d(x^2 - y^2) = 0 \underset{\text{инт}}{\Rightarrow} x^2 - y^2 = C_2$. Итак, получили общ. р-ие $t^2 - y^2 = C_1$, $x^2 - y^2 = C_2$.

11*. Путем нахождения интум. комбинаций найти общ. р-ие $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^2}{x}, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2}{y}$.

О: $x = \sqrt{C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}}$, $y = \sqrt{C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}}$. Ук. Представьте систему в виде $\left.\begin{array}{c} x dx = y^2 dt, \\ y dy = x^2 dt, \end{array}\right\}$, а затем почленно сложите и вычтите.

# 12. ТЕОРИЯ РЯДОВ. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

> Умный тот учитель, который слушает внимательно ученика, подбадривает и одобряет его действия, советует, как делать дальше, а не тот, который сразу начинает объяснять, не слушая ученика. Такая же ситуация возникает, например, между начальником и подчиненным, между мужем и женой, между детьми и т.д. Отсюда следует главный совет: не возражай и не оправдывайся, а слушай до конца и делай выводы.
>
> NN

## ЛЕКЦИЯ 32

## 12.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**1°. Основные понятия числового ряда с положительными членами**. Дадим сд-ие

**о1**. Числ. рядом наз. врж-ие $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ , (1.1)

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – беск. числовая посл-ть, причем $a_n$ наз. общ. членом ряда.

Для сост-ия ряда дт-но знать закон образования общ. члена. Н-р, при

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{1.2}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n^2} : \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2} + \ldots \tag{1.3}$$

$$a_n = (-1)^{n+1}: 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots \tag{1.4}$$

**о2**. Сумма (сум.) первых $n$ членов ряда (1.1) наз. $n$-й частичной (частч.) сум. ряда и обз-ся

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i . \tag{1.5}$$

**о3**. Ряд (1.1) наз. сходящимся (схм.), если предел частч-й сум. при $n \to \infty$ есть конечное число (к.ч.), назм-ое сум-й ряда, т.е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ . (1.6)

Если $S_n$ не имеет предела при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (1.1) наз. расходящимся (рсхм.) и не имеет сум-ы.

**п1** (геомч. прогрессия). Ряд вида $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, (1.7)
где $|q| < 1$, наз. беск-но убщ-ей геомч. прогрессией. Иссл-ть усл. сх-ти ряда.

Р. Находим $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$. При $n \to \infty$ $q^n \to 0$, т.к. $|q| < 1$. Поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$ – к.ч., т.е. ряд (1.7) сходится (сх.).

Покажем, что при др. зн-ях $q$ ряд (1.7) расходится (рсх.). Так, если $q = 1$, то ряд (1.7) имеет вид: $a + a + \ldots + a_n + \ldots$ и $S_n = an \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, ряд рсх.

Если $q = -1$, то получим $a - a + a - a + \ldots$ Тогда $S_{2n} = 0$, а $S_{2n-1} = a$, т.е. предел частч-х сумм к опрн. пределу не стремится, значит, ряд (1.7) рсх.

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$, т.е. ряд (1.7) рсх.

**п2** (ряд Стирлинга). Ряд вида $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} + \ldots$ (1.8)

наз. рядом Стирлинга. Д-ть, что ряд Стирлинга сх. при любом плж. $a$.

Д. Ряд (1.8) напишем в виде $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \ldots + \frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} + \ldots$ Отсюда $S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}$. Тогда $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}\right) = \frac{1}{a}$ – к.ч. ■

Заметим, что при $a = 1$ ряд Стирлинга превращается в ряд (1.2) и $S = 1$, значит, $1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ (удачный пример для пргв-ия).

**2°. Основные свойства числового ряда**. Для числового ряда с плж. членами верны сд-ие

**с1**. Если к членам ряда прибавить или из состава его членов отбросить конечное число членов, то сх-ть или рсх-ть ряда не нарушится.

**с2**. На сх-ть ряда не влияет умн-ие его членов на одно и то же число.

**с3**. Сумма и разность сх-хся рядов сх-ся.

Для д-ва рас-им сх-еся ряды $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (2.1)

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (2.2)

с сум-ми ств-но $S_1$ и $S_2$. Д-ем

**с1**. Если к ряду (2.1) добавим $k$ членов $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = A_k$ – к.ч., то получим $A_k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A_k + S_1 = \overline{S_1}$ – к.ч., т.е. сх-ть ряда не нарушается. Если же ряд (2.1) рсх-ся, т.е. $S_1 = \infty$, то и $A_k + S_1 = \infty$, значит, рсх-ть ряда не нарушается.

Если же из ряда (2.1) отбросить первые $k$ членов $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A_k$ – к.ч., то получим $-A_k + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + \ldots = S_1 - A_k$ – к.ч., т.е. сх-ть ряда не нарушается. Если же $S_1 = \infty$, то $S_1 - A_k = \infty$, т.е. рсх-ть ряда также не нарушается.

**с2**. Умн-ив ряд (2.1) на пст. число $c$, получим $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) = cS_1$ – к.ч., т.е. сх-ть ряда не нарушается.

**с3**. Складывая и вычитая ряды (2.1) и (2.2), получим:

$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots = S_1 + S_2$ – к.ч., т.е. сум. сх.

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots = S_1 - S_2$ – к.ч., т.е. разность сх.

**3°. Гармонический ряд. Необходимый признак сходимости ряда**. Ряд вида (арифч. прогрессия с разностью $d = 1$) $1 + 2 + \ldots + n + \ldots$ (3.1)

рсх., т.к. $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2} = \infty$.

Покажем, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$ (3.2)

назм-ый гармоническим (гармч.) рядом, также рсх.

Д. Воспользуемся вторым замечательным (змч.) пределом

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$1 > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

при $n = 1$: $1 > \ln 2 - \ln 1$

$n = 2$: $\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$

$n = 3$: $\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$n = n$: $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

или $S_n > \ln(n+1)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, значит, гармч. ряд (3.2) рсх.

**т1** (нх. признак сх-ти). Пусть числовой ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (3.3)
сх., а $S$ его сум-а. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д. Из усл-я теоремы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Но $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ ■

Этот признак яв-ся лишь нх-ым, но не дт-ым, н-р, для гармч. ряда (3.2): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, но ряд рсх. А если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд рсх., н-р, для ряда (3.1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, т.е. ряд рсх.

Итак, получили выводы: 1*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд рсх. и вопрос решен. 2*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сх. или рсх., тогда вопрос р-ся дт. признаками.

**п3**. Д-ть рсх-ть ряда $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{n}{n+1} + \ldots$

Д. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 \neq 0$, то ряд рсх. в силу 1*.

**4°. Достаточные признаки** (сравнения, Даламбера, Коши и интн-ый) **сходимости ряда**. Пусть даны числовые ряды с плж. членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (4.1)

$$\begin{array}{ccccccc} \wedge\!| & & \wedge\!| & & & & \wedge\!| \\ b_1 & + & b_2 & + & \ldots & + & b_n + \ldots \end{array} \tag{4.2}$$

**т2** (признак сравнения). Если члены ряда (4.1), начиная с первого, численно не превышают ствщ-их по номеру членов ряда (4.2), то из сх-ти ряда (4.2) следует сх-ть ряда (4.1), а из рсх-ти ряда (4.1) следует рсх-ть ряда (4.2).

Д. Обз-им через $S'_n$ частч-ю сум. ряда (4.1), $S''_n$ – ряда (4.2). По усл-ю теоремы $a_i \leq b_i \ \forall\ i$ или $S'_n \leq S''_n$. Пусть ряд (4.2) сх., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = S_2$, причем $S''_n < S_2$, т.к. ряды с плж. членами. Тогда $S'_n < S_2$. Поскольку ряд (4.1) огр-ен и взр-ет, то он имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S_1 \leq S_2$, т.е. ряд сх.

Пусть теперь (4.1) рсх., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \infty$. Тогда в силу $S'_n \leq S''_n$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = \infty$, т.е. ряд (4.2) рсх.

**зм1**. Теорема верна и в тех случаях, когда ее усл-ие выполняется не с первых членов, а лишь начиная с нек-го номера. Это вытекает из 2° в силу с1.

**п4**. Признаком сравнения иссл-ть ряд $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ на рсх-ть.

$$\begin{array}{ccc} \geq & \geq & \geq \end{array}$$

Р. Сравниваем с членами гармч. ряда $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ Гармч. ряд рсх., значит, в силу т2, расв. ряд рсх.

**т3** (признак Даламбера). Если для ряда (4.1) с плж. членами сущ-ет предел отн-ия последующего члена к предыдущему при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{4.3}$$

то: 1) ряд сх., если $q < 1$, 2) рсх., если $q > 1$; 3) сх. или рсх., если $q = 1$.

Д. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Тогда, начиная с нек. номера $n = k$, имеет место рав-во: $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \dfrac{a_{k+1}}{a_k} - q < \varepsilon \Rightarrow q - \varepsilon < \dfrac{a_{k+1}}{a_k} < q + \varepsilon$. При $q < 1$ можно выбрать $\varepsilon$ настолько малым, чтобы $q + \varepsilon = t < 1$. Тогда $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < t$, $\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < t$, $\dfrac{a_{k+3}}{a_{k+2}} < t$, … $\Rightarrow$

$$a_{k+1} < ta_k,\ a_{k+2} < ta_{k+1},\ a_{k+3} < ta_{k+2},\ \ldots \Rightarrow a_{k+1} < ta_k,\ a_{k+2} < t^2a_k,\ a_{k+3} < t^3a_k,\ \ldots$$

Рас-им два ряда
$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots \tag{4.4}$$
$$a_k + ta_k + t^2a_k + t^3a_k + \ldots \tag{4.5}$$

Ряд (4.5) сх., как геомч. прогрессия и в силу с2. Тогда ряд (4.4) сх. в силу т2 (признак сравнения). Но ряд (4.4) получен из ряда (4.1) отбрасыванием первых $k - 1$ членов, значит, ряд (4.1) сх. в силу с1.

Пусть $q > 1$. Д-ем, что ряд (4.1) рсх. Дсв-но, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Тогда, начиная с нек. номера $n > N$, имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, т.е. не выполняется даже нх. признак сх-сти ряда. Значит, ряд (4.1) рсх. ■

Используя признак Даламбера, иссл-ть на сх-сть ряды:

**п5**. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{5}{3^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{3^n} + \dfrac{2n+1}{3^{n+1}} + \ldots$

Р. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)\cdot 3}{3^{n+1}(2n-1)} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{3} < 1$, ряд сх.

**п6**. $\dfrac{2}{1} + \dfrac{4}{16} + \dfrac{8}{81} + \ldots + \dfrac{2^n}{n^4} + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^4} + \ldots$

Р. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^4} \cdot \dfrac{n^4}{2^n} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4} = 2 > 1$, ряд рсх.

**п7**. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots$

Р. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$, о сх. ряда не знаем.

**т4** (признак Коши). Если для ряда (4.1) с плж. членами сущ-ет предел
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{4.6}$$
то: 1) ряд сх., если $q < 1$, 2) рсх., если $q > 1$; 3) сх. или рсх., если $q = 1$.

Д. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Тогда, начиная с нек. номера $n = k$, имеем $\left|\sqrt[k]{a_k} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon <$ $< \sqrt[k]{a_k} - q < \varepsilon \Rightarrow q - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < q + \varepsilon$. При $q < 1$ $\varepsilon$ можно выбрать так, чтобы $q + \varepsilon = t < 1$. Тогда $\sqrt[k]{a_k} < t$ или $a_k < t^k$ $\forall\ k > N$. Рас-им два ряда
$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots \tag{4.7}$$
$$t^k + t^{k+1} + t^{k+2} + \ldots \tag{4.8}$$

Ряд (4.8) сх., как убщ-ая геомч. прогрессия. Тогда по т2 (признак сравнения) сх. ряд (4.7), к-ый получен из ряда (4.1) отбрасыванием первых $k - 1$ членов. Значит, ряд (4.1) сх.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Тогда для $n > N$ имеем $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a_n > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 0$, т.е. не выполняется нх. признак сх-ти, значит, ряд (4.1) рсх.

**п8**. Используя признак Коши, иссл-ть сх-ть ряда:
$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Р. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} < 1$, ряд сх.

**т5** (интн-ый признак). Пусть члены ряда (4.1) не взр-ют, т.е. $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ldots \ge a_n \ge \ldots$ и пусть $f(x)$ – такая непр. невзрщ. фк-я, что $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, …, $f(n) = a_n$. Тогда: 1) если несбт. инт-л $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ сх., то ряд (4.1) также сх.; 2) если несбт. инт. рсх., то и ряд рсх.

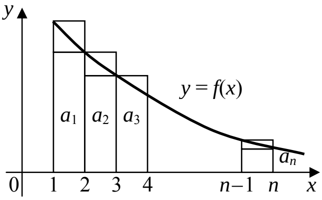


Рис. 1

Д. Начертим грф-к фк-и $y = f(x)$, отметим на оси $Ox$ целые плж. числа (рис. 1).

Находим пщ-и всех $(n - 1)$ пуг-ов с недостатком:

$$1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + \ldots + 1 \cdot a_n = S_n - a_1 < \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

Находим пщ-и $(n - 1)$ пуг-ов с избытком:

$$1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_{n-1} = S_n - a_n > \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) получаем ств-но $S_n < a_1 + \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ и $S_n > \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x < S_n < a_1 + \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Пусть теперь несбт. инт-л сх., т.е. $\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = A$ – к.ч. Тогда $a_1 + A$ – к.ч., откуда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ – к.ч., значит, ряд (4.1) сх.

Пусть теперь несбт. инт. рсх., т.е. $\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, значит, ряд (4.1) рсх.

**зм2**. Из стн. (4.11) видно, что сх-ть или рсх-ть несбт. инт-а следует из сх-ти или рсх-ти ряда (4.1).

С помощью интн. признака иссл-ть сх-ть рядов:

**п9**. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$

Р. $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - 0 = \infty$, несбт. инт. рсх., тогда и ряд рсх.

**п10**. $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} + \ldots$

Р. $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 + 1 = 1$, ряд сх.

**5°. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда**. Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{5.1}$$

содержащий как плж., так и отц. члены, наз. знакопеременным (знакопер.) рядом, н-р,

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n} - \ldots \tag{5.2}$$

Сост-м ряд из абс. вел-н членов ряда (5.1) и получим

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{5.3}$$

Ряд (5.3) яв-ся обык. числовым рядом с плж. членами. Если ряд (5.3) сх., то ряд (5.1) наз. абс-но схм-ся. Если ряд (5.1) сх., а (5.3) рсх., то ряд (5.1) наз. усл-но (неабс-но) схм-ся.

Без д-ва приведем дт. признак сх-ти знакопер. ряда:

**т6**. Если ряд (5.3) сх-ся, то и знакопер. ряд (5.1) также сх-ся.

**п11**. Иссл-ть на сх. ряд (5.2): $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$

Р. Ряд из абс. вел-н его членов $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ сх., т.к. несбт. инт-л $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^\infty=$ $=0+1=1$ сх., значит, ряд (5.1) сх., причем абс-но.

**6°. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница**. Част. случаем знакопер. ряда яв-ся знакочередующийся (знакочер.) ряд, у к-го за каждым плж. членом следует отц-ый и за каждым отц. членом следует плж-ый, т.е. имеет вид $u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$ (6.1)

Для знакочер. ряда имеет место сд. дт. признак сх-ти.

**т7** (признак Лейбница). Если в знакочер. ряде (6.1) абс. вел-ы членов уб-ют ($u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots$) и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сх. и его сум. не превосходит вел-у первого члена.

Д. Рас-им частч-ые сум. $S_{2m}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2n-1}-u_{2m}$. Сгруппируем члены попарно: $S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m})$. Т.к. по абс. вел-е все члены уб-ют, то все разности в скобках плж-ны, сдт-но, посл-ть $S_{2m}>0$ и взр-ет при $n\to\infty$.

Теперь сгруппируем члены так: $S_{2m}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\ldots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}]$.

Сум. в кв. скобке плж-на, поэтому $\forall\ m$ имеем $S_{2m}<u_1$. Итак, посл-ть $S_{2m}$ взр-ет и огр-на, значит, имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$, причем $S\le u_1$. Д-ем это для нечет. числа членов. $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$;

$\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m+1}=\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}+\lim\limits_{m\to\infty}u_{2m+1}=S+0=S$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\le u_1$ ■

**п12**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\frac{1}{1\cdot2^2}-\frac{1}{2\cdot3^2}+\frac{1}{3\cdot4^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2}+\ldots$

Р. $\frac{1}{1\cdot2^2}>\frac{1}{2\cdot3^2}>\ldots>\frac{1}{n(n+1)^2}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=0$, ряд сх., причем абс-но.

**п13**. Иссл-ть на сх-ть и абс-ю сх-ть ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$

Р. Данный знакочер. ряд сх. по признаку Лейбница, т.к. $1>\frac{1}{2}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, сост-ый из абс. вел-н членов данного ряда, рсх-ся (гармч-й ряд), значит, расв. ряд сх. условно.

**7°. Остаток ряда**. Остатком $R$ ряда (6.1) наз. врж-ие вида

$$R=S-S_n=(-1)^n u_{n+1}+(-1)^{n+1}u_{n+2}+\ldots \tag{7.1}$$

Отсюда $(-1)^nR_n=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\ldots$ Ряд в правой части уд-ет усл-ям т7. Поэтому $0\le(-1)^nR_n\le u_{n+1}$, т.е.

$$|R_n|\le u_{n+1}. \tag{7.2}$$

**п14**. Иссл-ть на сх-ть и абс. сх-ть ряд $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\ldots+(-1)^{n+2}\frac{1}{(2n)^3}+\ldots$ Найти прж-но (с точностью до 0,01) сум. этого ряда.

Р. $1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{4^3}>\ldots>\frac{1}{(2n)^3}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0$, значит, ряд сх. абс-но. Для данного ряда модуль 4-го члена $\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}<0{,}01$, поэтому с точностью до 0,01:

$$S=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=0{,}89.$$

# ЛЕКЦИЯ 33

## 12.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**1°. Основные понятия**. Ряд вида $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (1.1)
наз. функциональным (фнц.) рядом, членами к-го яв-ся фк-и от $x$. Давая $x$ опрн. числ. зн-я, получим различные числ. ряды, к-ые могут оказаться схм-ся или рсхм-ся.

**о1**. Свк-ть тех зн-й $x$, при к-ых фнц. ряд сх., наз. обл-ю сх-ти этого ряда. Обл-ю сх-ти будет инр-л $]a, b[$.

Если $\forall\, x \in\, ]a, b[$ ряд (1.1) сх., то он имеет сум. $S(x)$ в этом инр-е, и пишут:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,\ x \in\, ]a, b[. \tag{1.2}$$

В этом случае говорят также, что фк. $S(x)$ в инр-е $]a, b[$ разлагается (разл.) в ряд.

**п1**. Фнц. ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ сх. в инр-е $]-1, 1[$, т.е. при $|x| < 1$, т.к. есть геомч. прогрессия (см. п1 из 1°: 12.1), сум. к-ой равна $\dfrac{1}{1-x}$ при $n \to \infty$. Значит, $S(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$

Рас-им сум-ы $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$, где $S_n(x)$ наз. частичной (частч.) сум., $r_n(x)$ – остатком ряда (1.1). Если ряд сх. и $S(x)$ его сум., то $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.

Для всех зн-й $x$ в обл-и сх-ти ряда имеет место стн. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$, т.е. $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

**о2**. Фнц. ряд (1.1) наз. мажорируемым (или правильно схм-ся) в нек. обл-и $]a, b[$ изм-я $x$, если сущ-ет сх-йся ряд с плж. членами $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,$ (1.3)
такой, что $\forall\, x \in\, ]a, b[$ выполняются стн-ия $|u_1(x)| \le \alpha_1$, $|u_2(x)| \le \alpha_2, \ldots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \ldots$ (1.4)

**п2**. Д-ть, что ряд $\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ есть мажорируемый ряд на всей оси $Ox$, т.е. в обл. $]-\infty; \infty[$.

Д. Т.к. $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а ряд $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} + \ldots$ сх. в силу $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^\infty =$ $= 0 + 1 = 1$, то расв. ряд яв-ся мажорируемым.

Из о2 следует, что ряд, мажорируемый в нек. обл-и, абс-но сх. во всех тч. этой обл. Кроме того, мажорируемый ряд обладает сд. св-ом.

**т1**. Пусть фнц-ый ряд (1.1) с сум-й $S(x)$ и частч. сум-й $S_n(x)$ мажорируем на сегм. $[a, b]$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$, такое, что $\forall\, n > N$ выполняется нерав-во $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon\ \forall\, x \in [a, b]$. (1.5)

Д. Обз. через $\sigma$ сумму ряда (1.3), $\sigma_n$ – частч. его сум., $\varepsilon_n$ – остаток. Тогда $\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$. Т.к. этот ряд сх., то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, сдт-но, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Теперь представим сум-у фнц. ряда (1.1) в виде $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$. Из усл-я (1.4) следует, что $|u_{n+1}(x)| \le \alpha_{n+1}$, $|u_{n+2}(x)| \le \alpha_{n+2}$, тогда $|r_n(x)| < \varepsilon_n\ \forall\, x \in [a, b]$, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\forall\, n > N$ можно взять $\varepsilon_n = \varepsilon$ и получим $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon\ \forall\, x \in [a, b]$ ■

**зм1**. Не всякий фнц. ряд, сх-йся на отрезке $[a, b]$, обладает св-ом (1.5). Но сущ-ют и немажорируемые ряды, к-ые обладают этим св-ом.

**2°. Равномерная сходимость и непрерывность функционального ряда**. Дадим сд-е

**о3**. Фнц. ряд (1.1), обладающий св-ом (1.5), наз. равномерно схм-ся рядом на сегм-е $[a, b]$.

Из т1 следует, что мажорируемый ряд яв-ся равномерно схм-ся рядом.

Теперь рас-им непр-сть сум-ы ряда. Пусть имеется ряд из непр. фк-й $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

Сум. конечного числа непр. фк-й непр-на (см. 9°: 6.3). Но для беск-го числа слг-ых это св-во не сохраняется. Фнц. ряд с непр. членами может иметь сум. $S(x)$ непр-ю или разрывную.

**п3**. Д-ть, что ряд с непр. членами $\left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) + \ldots$ сх. к сум. $S(x)$, к-ая яв-ся разрывной фк-ей (рис. 1).

Д. Находим $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$. Отсюда если $x > 0$, то $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x$;

если $x < 0$, то $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) =$

$= -1 - x$;

если $x = 0$, то $S(x) = 0$, поэтому $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$.

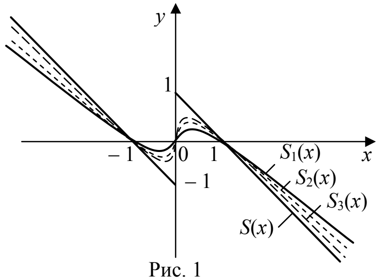



Рис. 1

Для мажорируемых фк-й справедлива сд-я

**т2**. Сум. ряда непр. фк-й, мажорируемого на сегм. $[a, b]$, есть фк-я, непр-ая на этом сегм.

Д. Пусть имеется мажорируемый на сегм. $[a, b]$ ряд непр. фк-й

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2.2}$$

Представим его сум. в виде $\qquad S(x) = S_n(x) + r_n(x)$. $\qquad$ (2.3)

Возьмем тч-и $x$, $x + \Delta x \in [a, b]$ и введем обз-ия $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, $\Delta S_n = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$. Тогда вместо (2.3) получим $\Delta S = S(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x) = \Delta S_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$. Т.к. ряд (2.2) сх. $\forall\ x, x + \Delta x \in [a, b]$ и мажорируем, сдт-но, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x + \Delta x) = S(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x + \Delta x) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta S_n = \lim\limits_{n\to\infty} [S_n(x + \Delta x) - S_n(x)] = S(x) - S(x) = 0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta S = 0\ \forall\ x \in [a, b]$, т.е. фк. $S(x)$ непр-на на сегм. $[a, b]$ ■

**зм2**. Из т2 следует, что если сум. ряда $S(x)$ разрывна в какой-то тч. сегм-а $[a, b]$, то ряд не мажорируем на этом сегм., н-р, не мажорируем ряд в п3, т.к. его сум. $S(x)$ разрывна в тч. $x = 0$.

Обратное утв. неверно: сущ-ют ряды, не мажорируемые на сегм-е, и, однако, сх-еся на этом сегм. к непр. фк-и $S(x)$. В част-ти, всякий равномерно сх-йся ряд на сегм. $[a, b]$ (даже если он не мажорируем) имеет в кач-ве сум-ы непр. фк-ю.

**3°. Интегрирование и дифференцирование рядов**. Сформулируем

**т3**. Пусть ряд непр. фк-й $\qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, $\qquad$ (3.1)

мажорируем на сегм-е $[a, b]$, имеет сум. $S(x)$. Тогда инт-л от $S(x)$ в пределах $[\alpha, x] \subset [a, b]$ равен сум-е таких же инт. от членов ряда, т.е.

$$\int_\alpha^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^x u_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x u_2(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,\mathrm{d}t + \ldots \tag{3.2}$$

Д. Т.к. $S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x)$, то

$$\int_\alpha^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^x u_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x u_2(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x r_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Т.к. ряд (3.1) мажорируем, то $\forall\ x \in [a, b]$ $|r_n(x)| < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\left|\int_\alpha^x r_n(t)\mathrm{d}t\right| \le \pm \int_\alpha^x |r_n(t)|\,\mathrm{d}t < \pm \int_\alpha^x \varepsilon_n\ \mathrm{d}t = \pm\,\varepsilon_n(x - \alpha) \le \pm\,\varepsilon_n(b - \alpha)$$

(здесь при $\alpha < x$ берется знак «+», а при $x < \alpha$ – знак «–»).

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^x r_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ и из $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^x S(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_\alpha^x u_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x u_2(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\mathrm{d}t\right] + \lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^x r_n(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_\alpha^x S(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_\alpha^x u_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x u_2(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\mathrm{d}t\right]$, откуда получим (3.2) ■

**зм3**. Если ряд не мажорируем, то почленное интв. ряда не всегда возможно, т.е. инт. $\int_\alpha^x S(t)\,\mathrm{d}t$ не всегда равен сум-е инт-ов $\int_\alpha^x u_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x u_2(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_\alpha^x u_n(t)\,\mathrm{d}t + \ldots$

**т4**. Если ряд $$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (3.3)$$
сост-ный из фк-й, имеющих непр. прв-ые на сегм. $[a, b]$, сх-йся на этом сегм. к сум. $S(x)$ и ряд
$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \qquad (3.4)$$
сост-ный из прв-ых его членов, мажорируем на этом сегм., то сум. ряда прв-ых равна прв-ой сум-ы первоначального ряда, т.е. $S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$

Д. Обз-им через $F(x)$ сум. ряда (3.4): $F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$ и д-ем, что $F(x) = S'(x)$.

Т.к. ряд (3.4) мажорируем, то в силу т3 имеем $\int\limits_\alpha^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^x u_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_\alpha^x u_2'(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int\limits_\alpha^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t + \ldots$

или $$\int\limits_\alpha^x F(t)\,\mathrm{d}t = [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots + [u_n(x) - u_n(\alpha)] = S(x) - S(\alpha).$$
Диф-уя обе части по $x$, получим $F(x) = S'(x)$ ■

**зм4**. Требование мажорируемости ряда прв-ых сущ-но и его невыполнение может привести к невозможности почленного дифв. ряда.

**п4**. Ряд $\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \ldots$ сх. к непр. фк-и $S(x)$, т.к. он мажорируем, ибо ряд $$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$
сх. Однако ряд, сост-ый из прв-ых его членов
$$\cos x + 2^2\cos 2^4 x + 3^2\cos 3^4 x + \ldots + n^2\cos n^4 x + \ldots$$
не мажорируемый, ибо при $x = 0$ получим рсх-йся ряд $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + \ldots$, т.е. почленно дифв-ть нельзя, если ряд из прв-ых не мажорируем.

**4°. Степенные ряды**. Дадим сд-е

**о4**. Степенным (спн.) рядом наз. фнц. ряд вида
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (4.1)$$
где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – пст. числа, назм. коэф-ми ряда.

Обл-ю сх-ти спн. ряда яв-ся нек-ый инр., устанавливаемый сд-й

**т5** (Абеля). Если спн. ряд сх. при нек. зн-и $x_0 \neq 0$, то он абс-но сх. $\forall\, x$, удщ-го усл-ю $|x| < |x_0|$; если же спн. ряд рсх. при нек. зн-и $x_0'$, то он рсх. $\forall\, x$, удщ-го усл-ю $|x_0'| < |x|$ (д-во см. в [28]).

Из т5 следует, что обл-ю сх-ти спн. ряда яв-ся инр-л с центром в нач. крд., т.е. сущ-ет такое число $R$, назм-ое радиусом сх-ти спн. ряда, что в инр-е $]-R, R[$ ряд сх-ся, а вне инр-а рсх. На концах инр-а (т.е. $x = -R$, $x = R$) сх-ть ряда уточняется индивидуально для каждого ряда.

Причем инр-л сх-ти после уточнения наз-ем обл-ю сх-ти ряда.

Чтобы найти инр-л сх-ти спн. ряда (4.1), используем признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow |x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Тогда в кач-ве радиуса сх-ти ряда можно взять
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (4.2)$$

Анч-но для нахождения $R$ можно использовать и признак Коши, тогда
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (4.3)$$

Радиусом сх-ти может быть любое число: $R = 0$, $R = \infty$, $R$ – к.ч.

**п5**. а) Иссл-ть ряд $1 + x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots$

Р. Находим $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, т.е. ряд сх. лишь в тч-е $x_0 = 0$.

б) Иссл-ть ряд $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

Р. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, т.е. ряд сх. в инр-е $]-\infty, \infty[$.

в) Иссл-ть ряд $1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{n} + \ldots$

Р. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, т.е. инр-л сх-ти $]-1, 1[$. Иссл-ем ряд при $x = -1$: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} + \ldots$ – сх. по признаку Лейбница, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. При $x = 1$ получим $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ – гармонич. ряд рсх. Итак, обл-ю сх-ти яв-ся $[-1, 1[$.

Рас-им св-ва спн. ряда. Все понятия (непр-сть, дифм-сть и т.д.) фнц. ряда переносятся и на част. случай – спн. ряд.

**т6**. Спн. ряд (4.1) мажорируем на любом сегм. $[-\rho, \rho]$, целиком лежащем внутри инр-а сх-ти (т.е. $-R < -\rho < \rho < R$).

Д. Т.к. $\rho < R$, то числ. ряд $|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots$ (4.4)
сх. Но при $|x| < \rho$ члены ряда (4.1) по абс. вел-е не больше ствщ-их членов ряда (4.4). Сдт-но, ряд (4.1) мажорируем на сегм. $[-\rho, \rho]$ ■

**сл1**. На всяком сегм., целиком лежащем внутри инр-а сх-ти, сум. спн. ряд есть непр. фк-я (см. т2 из 2°).

**сл2**. Если пределы интв-ия $\alpha$, $\beta$ лежат внутри инр-а сх-ти спн. ряда, то инт-л от сум. ряда равен сум-е инт-ов от членов ряда.

**т7**. Если спн. ряд $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ (4.5)
имеет инр-л сх-ти $]-R, R[$, то ряд $\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$, (4.6)
полученный почленным дифв-ем ряда (4.5) имеет тот же инр-л сх-ти; при этом $\varphi(x) = S'(x)$, если $|x| < R$ (д-во см. в [28]).

**зм5**. Ряд (4.6) снова можно дифв-ть и продолжать так сколь угодно раз. Причем каждый раз инр-л сх-ти будет $]-R, R[$.

Рас-им спн. ряд, расположенный по сп-ям двучлена $x - a$:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (4.7)$$

Полагая $x - a = X$, получим ряд $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots$, (4.8)
для к-го, как уже знаем, инр-ом сх-ти яв-ся $-R < X < R$. Тогда инр-ом сх-ти для ряда (4.7) будет $-R < x - a < R$ или $a - R < x < a + R$. (4.9)

**п6**. Найти обл. сх-ти ряда $(x-2) + (x-2)^2 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$

Р. Положив $x - 2 = X$, получим $X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots$, к-ый сх. при $-1 < X < 1$. Тогда данный ряд сх. при $-1 < x - 2 < 1$, т.е. $x \in ]1, 3[$ – инр. сх-ти. Уточним сх-ть при $x = 1$: $-1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$, ряд рсх. (см. (1.4) и п1 из 1°: 12.1). При $x = 3$ получим: $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ рсх., т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 \cdot n = \infty$. Итак, $]1, 3[$ – обл. сх-ти.

**5°. Ряды Тейлора и Маклорена**. В 1°: 7.2 и 3°: 9.2 мы уже их приводили без вывода остаточного члена, что сделаем в этом пункте.

Пусть фк. $f(x)$ имеет прв-ые до $(n + 1)$ порядка и в инр. $]a - R, a + R[$ яв-ся сум-й спн. ряда вида $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + \ldots$ (5.1)

В этом случае говорят, что фк. $f(x)$ разлагается (разл.) в ряд в окрс-ти тч-и $a$ или по сп-ям $(x - a)$. Найти коэф-ы $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Для этого стн. (5.1) диф-уем до $(n + 1)$ порядка.

$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x-a)^n + \ldots$

$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n+1)na_{n+1}(x-a)^{n-1} + \ldots$

$f'''(x) = + 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + (n+1)n(n-1)a_{n+1}(x-a)^{n-2} + \ldots$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f^{(n)}(x) = + n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1a_n + (n+1)n(n-1)\ldots 2a_{n+1}(x-a) + \ldots$

Отсюда, полагая $x = a$, получим

$$
\begin{array}{ll}
f(a) = a_0 & a_0 = f(a) \\
f'(a) = 1!a_1 & a_1 = \dfrac{1}{1!} f'(a) \\
f''(a) = 2!a_2 & a_2 = \dfrac{1}{2!} f''(a) \\
f'''(a) = 3!a_3 & a_3 = \dfrac{1}{3!} f'''(a) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(a) = n!a_n & a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(a) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Подс-я коэф-ы в (5.1), получим

$$
\begin{gathered}
f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \\
\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \ldots
\end{gathered} \tag{5.2}
$$

Ряд (5.2) наз. рядом Тейлора для фк-и $f(x)$. При $a = 0$ получим ряд Маклорена:

$$
f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ldots \tag{5.3}
$$

Не всякая фк. разл-ма в ряд Тейлора, н-р, фк-ия

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}
$$

в тч. $x = 0$ имеет прв-ю всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому ряд Маклорена для этой фк. запишется в виде: $\quad 0 + \dfrac{0}{1!}x + \dfrac{0}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{0}{n!}x^n + \ldots$

Его сум. $S(x)$ тожд-но равна нулю, сдт-но, не совпадает с данной фк., т.е. она не разл-ма в ряд Тейлора.

Выясним, при каких усл. фк. $f(x)$ разл-ма в ряд Тейлора.

Запишем частч. сум. ряда Тейлора:

$$
S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{5.4}
$$

Эта частч. сум. наз. многочленом (мчл.) Тейлора сп-и $n$.

Разность между фк-ей $f(x)$ и мчл-ом Тейлора наз. остаточным членом ряда Тейлора и обз-ся через

$$
R_n(x) = f(x) - S_n(x). \tag{5.5}
$$

**т8**. Для того, чтобы беск-но дифм-я в тч-е $x = a$ фк. $f(x)$ яв-ась сум-й состн-го для нее ряда Тейлора, нх-мо и дт-но, чтобы остаточ. член $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Д. нх-ти. Пусть $f(x)$ есть сум. ряда Тейлора, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f(x)$. Тогда из (5.5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Дт-сть. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда из (5.5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, значит, $f(x)$ есть сум. ряда ■

Теперь выясним вид остаточного члена $R_n(x)$. Для этого (5.5) перепишем так:

$$
f(x) = S_n(x) + R_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{5.6}
$$

Остаточный член будем писать в виде $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q$, $\qquad (5.7)$

где вел. $Q = Q(x)$ подлежит опр-ю. Тогда (5.6) перепишется в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q. \qquad (5.8)$$

При фксн-ых $x$ и $a$ фк. $Q(x)$ принимает опрн. зн-ие, к-ое обз-ли $Q$. Рас-им вспомогательную фк. от $t \in \,]a, x[$.

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

Причем, полагая $t = x$, получим $F(x) = 0$ и при $t = a$, учитывая (5.8), имеем $F(a) = 0$. Находим прв-ю от $F(t)$ по $t$, полагая $x$ фксн.

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{2f''(t)}{2!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)}{(n+1)!}(x-t)^n Q.$$

Откуда получим $$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!}Q.$$

Т.о., фк. $F(t)$ на сегм. $[a, x]$ диф-ма и на концах обращается в нуль, тогда по теореме Ролля $\exists\, c = t \in \,]a, x[$, что $F'(c) = 0$, т.е. $F'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dfrac{(x-c)^n}{n!}Q = 0 \Rightarrow Q = f^{(n+1)}(c)$, подс-ив ее в (5.7),

получим $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\; c \in \,]a, x[. \qquad (5.9)$$

Врж-ие (5.9) наз. остаточным членом ряда Тейлора **в форме Лагранжа**.

В част., при $a = 0$ получим врж-ие остаточного члена для ряда Маклорена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\; c \in \,]0, x[. \qquad (5.10)$$

Подс-ив (5.9) в (5.6), получим окончательно

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\; c \in \,]a, x[. \qquad (5.11)$$

Фм. (5.11) наз. фм-ой Тейлора. А ее част. случай при $a = 0$ наз. фм-ой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\; c \in \,]0, x[. \qquad (5.12)$$

**6°. Примеры разложения функций в ряды и их приложения**. При разл-и фк-и в ряды Тейлора или Маклорена можно использовать различные методы, основанные на св-вах спн. рядов, к-ые приведем в данном пункте.

1*. Пкзт. фк-и $e^x$, $e^{-x}$, sh$x$, ch$x$.

**п7**. $f(x) = e^x$. Находим $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n+1)}(x) = e^x$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(c) = e^c$. Тогда по (5.12) получим

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\; c \in \,]0, x[. \qquad (6.1)$$

Но фм-у (6.1) надо обосновать, т.е. показать, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Дсв-но, $|R_n(x)| = \left|\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $c < |x|$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (см. п5б). Сдт-но $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = e^{|x|}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{|x|}\cdot 0 = 0$, т.е. стн. (6.1) имеет место.

Если в разл-и (6.1) заменить $x$ на $(-x)$, то получим $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (6.2)$

Используя (6.1) и (6.2), получим разл-ие гпрбч. фк-й

$$\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{6.3}$$

$$\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{6.4}$$

Используя (6.1), при $x = 1$ прж-но можно найти зн-ие $e$, полагая $R_n(1) = e^c\,\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3\,\dfrac{1}{(n+1)!}$,

н-р, с точностью 0,00001, т.е. $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, к-ое выполнится при $n = 8$, тогда

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828. \tag{6.5}$$

Оценить ошибку $R_n(1)$ можно и пользуясь всем рядом для $e^x$:

$$R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n} \tag{6.5a}$$

$\left(\text{в три раза более точно, чем } \dfrac{3}{(n+1)!}\right)$.

2*. Тригч. фк-и $\sin x$, $\cos x$ и фм-а Эйлера.

**п8**. Фк-ю $f(x) = \sin x$ разл-ть в ряд Маклорена.

| Р. $f(x) = \sin x$ | $f(0) = 0$ |
|---|---|
| $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ | $f'(0) = 1$ |
| $f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ | $f''(0) = 0$ |
| $f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ | $f'''(0) = -1$ |
| $f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ | $f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . |
| $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ | $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ |
| $f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ | $f^{(2n)}(0) = 0$ |

Проверим $|R_n(x)| = \dfrac{\left|f^{(2n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\,|x|^{2n+1} = \dfrac{\left|\sin\left(c + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|}{(2n+1)!}\,|x|^{2n+1} < \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{\text{п7}}{\Rightarrow} R_n(x) \to 0$

при $n \to \infty$, значит, фк-ю $\sin x$ можно разл-ть в ряд Маклорена.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{6.6}$$

Из (6.6) с учетом $(\sin x)' = \cos x$ получим разл-ие

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (6.7)$$

На рис. 2 показаны грф-и фк-и $\sin x$ и первых трех частч. сумм ряда (6.6). Этим рядом пользуются для выч-ия зн-й $\sin x$ при различных зн. $x$. Н-р, выч-им $\sin 10°$ с точностью до $10^{-5}$. Т.к. $10° = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$, то получим $\sin 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots$ Находим $R_3 < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0{,}2)^5 < 4 \cdot 10^{-6}$, тогда, в силу признака Лейбница, можно взять два члена $\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}173647$.

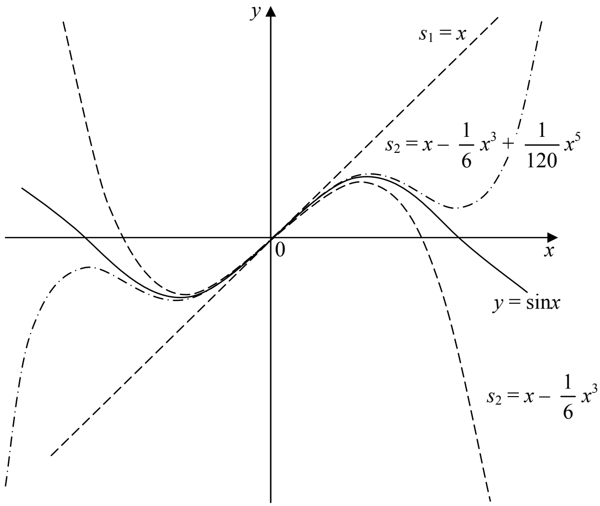



Рис. 2

В 4°: 6.1 и 4°: 11.2 была опр-на фк-я $e^{x+iy}$ рав-ом $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. При $x = 0$ получаем фм-у Эйлера: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Если в разл-и (6.1) заменить $x$ на $iy$, то получим $e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots$ или (с учетом $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ и т.д.) $e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots \Rightarrow$

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right). \qquad (6.8)$$

В скобках фм-ы (6.8) стоят спн. ряды $\cos y$ и $\sin y$ фм-л (6.7) и (6.6), сдт-но,

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \qquad (6.9)$$

Т.о., снова пришли к фм-е Эйлера.

3*. Биномиальный ряд. Сд. фк-ю разл-ть в ряд Маклорена.

**п9**. $f(x) = (1 + x)^m$ ($m$ – дсв. число).

| | |
|---|---|
| $f(x) = (1+x)^m$ | $f(0) = 1$ |
| $f'(x) = m(1 + x)^{m-1}$ | $f'(0) = m$ |
| $f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}$ | $f''(0) = m(m - 1)$ |
| $f'''(x) = m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}$ | $f'''(0) = m(m - 1)(m - 2)$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . |
| $f^{(n)}(x) = m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - n + 1)(1 + x)^{m-3}$ | $f^{(n)}(0) = m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - n + 1)$. |

Отсюда $$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (6.10)$$

Ряд (6.10) наз. биномиальным (бнмн.) рядом. Если $m$ – нтр. число, то получаем бином (бнм.) Ньютона (см. 5°: 6.1).

Ряд (6.10) сх. при $|x| < 1$, т.к. $R_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m!(m-n-1)!(n+1)!}{n!(m-n)!m!} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = 1$, т.е. $]-1, 1[$ – инр. сх-ти ряда.

Используя разл-ие (6.10), найти бмнн. ряды при различных $m$:

**п9а**. $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!} +$

$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$

$$\sqrt{1+x} = \frac{x}{2\cdot 1!} - \frac{1\cdot x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3x^3}{2^3\cdot 3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)x^n}{2^n\cdot n!} + \ldots \qquad (6.11)$$

**п9б**. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $m = -\frac{1}{2}$. Анч-но (6.7) получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1\cdot x}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5x^3}{2^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^n}{2^n\cdot n!} + \ldots \qquad (6.12)$$

**п9в**. $f(x) = (1+x)^5$, $m = 5$. Применяя (6.6), получим после упрощений

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \qquad (6.13)$$

**п9г**. Разл-ть фк-ю $\frac{1}{1+x}$. Эта фк. яв-ся сум-й геомч. прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и со знаменателем $q = -x$. Поэтому $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots \qquad (6.14)$$

Разл. (6.14) имеет место при $|x| < 1$. Если фк-ю записать в виде $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, то ряд (6.10) яв-ся бнмн-ым и его можно было бы разл-ть по (6.10) при $m = -1$.

**п9д**. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Полагаем $-x^2 = t$ и, используя (6.12), получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1\cdot x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3x^4}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^6}{2^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{2n}}{2^n\cdot n!} + \ldots \qquad (6.15)$$

На основании теоремы об интв-и спн. рядов из (6.15) получим при $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (6.16)$$

Этот ряд сх. в инр-е $]-1, 1[$. Можно д-ть, что ряд сх. и для $x = \pm 1$, тогда получим

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots \qquad (6.17)$$

**п9е**. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Полагаем $x^2 = t$ и, используя (6.14), получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \tag{6.18}$$

Отсюда $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \ (|x| < 1). \tag{6.19}$$

4*. Лгрч. фк-и $\ln x$, $\ln(1 + x)$.

**п10**. Фк-ю $f(x) = \ln x$ разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $x - 1$.

Р.

| | |
|---|---|
| $f(x) = \ln x$ | $f(0) = 0$ |
| $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ | $f'(1) = 1$ |
| $f''(x) = -1\cdot x^{-2}$ | $f''(1 = -1$ |
| $f'''(x) = 1\cdot 2\cdot x^{-3}$ | $f'''(1) = 2!$ |
| $f^{IV}(x) = -1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}$ | $f^{IV}(1) = -3!$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . |
| $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ | $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ |

Отсюда по (5.11) имеем

$$\ln x = 0 + \frac{1(x-1)}{1!} - \frac{1!(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} - \frac{3!(x-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\ln x = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots \tag{6.20}$$

Фм. (6.20) имеет место при $0 < x \le 2$. Дсв-но, по признаку Даламбера получим $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}\cdot n}{(n+1)(x-1)^n}\right| = |x-1| \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x-1| < 1$. Отсюда $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$. При $x = 0$: $-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$ рсх. При $x = 2$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сх., т.к. по признаку Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Итак, при $x \in\ ]0, 2]$ ряд (6.20) сх.

**п10а**. $f(x) = \ln(1 + x)$. По (6.14) известно разл-ие $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots$

Тогда $$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{6.21}$$

Если в этой фм. заменить $x$ на $(-x)$, то получим ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \ (|x| < 1). \tag{6.22}$$

Используя фм-ы (6.21) и (6.22), можно вывести фм-у для выч-я нтр. лгр-ов. Находим $\ln(1 + x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right]$. Положим $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, тогда $x = \frac{1}{2n+1}$. При любом $n > 0$ имеем $0 < x < 1$, поэтому $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right]$,

откуда получим $$\ln(n+1) - \ln n = 2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right]. \tag{6.23}$$

При $n = 1$ из (6.23) получаем $\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right]$.

Для оценки ошибки $R_p(1)$ используем фм-у (6.5а) и находим:

$$R_p = 2\left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)3^{2p+5}} + ...\right] < 2\left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+3}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+5}} + ...\right] = \frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + ...\right] = \frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2p+1)3^{2p+1}}. \qquad (6.24)$$

Если мы хотим теперь подсчитать ln2, н-р, с точностью до 0,000000001, то надо выбрать $p$ так, чтобы $R_p$ < 0,000000001. Отсюда следует, что дт-но взять $p$ = 8. Итак, с точностью до 0,000000001 имеем $\ln 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right] =$ = 0,693147180. Итак, ln2 = 0,693147180. Здесь эти девять знаков верные.

Полагая в фм-е (6.23) $n$ = 2, получаем: $\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + ...\right]$ = 1,098612288 и т.д.

Т.о., можно получить нтр. лгр-мы любых целых чисел.

Чтобы получить десятич. лгр-мы чисел, нужно пользоваться стн-ем $\lg N = M\ln N$, где $M$ = = 0,434294. Тогда, н-р, получим: lg2 = 0,434294 · 0,693147 = 0,30103.

**зм6**. Для оценки ошибки $R_n$ для спн. ряда с плж. членами удобно использовать анч. фм-ы (6.5а) и (6.24), а с отц. членами – признак сх-сти Лейбница.

Дадим разл-ие в ряд еще нескольких фк., используя метод подн-ки.

**п11**. $f(x) = e^{-x^2}$. Полагаем $-x^2 = t$, тогда по (6.1) $e^{-x^2} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$ получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots \qquad (6.25)$$

**п11а**. $f(x) = e^{x^2}$. Полагая $x^2 = t$, по (6.1) получим

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \qquad (6.26)$$

**7°. Интегрирование функций и дифференциальных уравнений**. В 6°: 8.1 было указано, что сущ-ют инт-ы, к-ые не врж-ся в конечном виде через элр. фк-и. Такие инт. иногда бывает удобно выч-ть с помощью рядов.

**п12**. Найти инт. $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Р. С учетом (6.6) и деля $\sin x$ на $x$, получим $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$. Тогда

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots \qquad (7.1)$$

Этот ряд не сх-ся ни к какой элр. фк-и и яв-ся интн-им заданием новой фк. с помощью беск. числа операций. Фк-я (7.1) часто встречается при изучении нек. разделов теор. физики. С помощью приведенного ряда сост-ны ее подробные таблицы.

**п12а**. Найти инт. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, назм-ый фк-ей Лапласа, к-ая играет важную роль при изучении теории вер-ей. Выч-ть ее в конечном виде нельзя, т.к. она не врж-ся в элр. фк-ях.

Р. Полагая $-\frac{x^2}{2} = t$ в п11, получим $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3!} + \ldots$ Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\cdot 2!5} - \frac{x^7}{2^3\cdot 3!7} + ...\right) \ (-\infty < x < \infty). \qquad (7.2)$$

Выч-ть зн-ия фк-и очень удобно, т.к. ряд быстро сх. С помощью ряда (7.2) сост-ны ее подробные табл.

**п12б**. Выч-ть инт. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$.

Р. Первообразная фк. очень сложна: $\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\frac{x^2 + x\sqrt{2}+1}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} +$ $+ C$. А разл-в подынт. фк-ю в ряд по (6.18): $\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots$, сразу получим $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} - \ldots$ Если огр-мся двумя первыми членами ряда (при этом ошибка не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} \approx 0{,}0002$), то $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0{,}4938$.

Рас-им теперь применение спн. рядов к р-ию дифн. кр-й. Пусть, н-р, требуется найти р-ие дифн. ур-я 2-го порядка: $y'' = F(x, y, y')$, удщ-е нач. усл-ям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Допустим, что р-ие $y = f(x)$ сущ-ет и представимо в виде ряда Тейлора

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

Нам нужно найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, … Для этого используем исх. ур-ие и нач. усл-ия. Особенно удобно р-ть с помощью рядов лин. дифн. ур-ия. Поясним метод на примерах.

**п13**. Найти р-ие ур-я $y'' - xy = 0$ при нач. усл-ях $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Р. Т.к. $x_0 = 0$, то р-ие ищем в виде $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ Коэф-ы $a_0$ и $a_1$ находим из нач. усл-й: $a_0 = y(0) = 0$, $a_1 = y'(0) = 1$. Дважды диф-уем ряд: $y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots +$ $+ n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$ Подс-я их в исх. ур-ие, получим $2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots =$ $= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_{n-3}x^{n-2} + \ldots$ Сравнивая коэф-ы при одинаковых сп., находим $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $4 \cdot 3a_4 = 1, \ldots, n(n-1)a_n = a_{n-3}$. Поэтому $a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $a_8 = 0$, $a_9 = 0$, $a_{10} =$ $= \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$, и вообще, $a_{3m-1} = a_{3m} = 0$, $a_{3m+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \ldots 3m(3m+1)}$. Значит, $y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 +$ $+ \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \ldots 3m(3m+1)}x^{3m+1} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

Заметим, что порядок ур-ия не влияет на метод р-ия его при помощи рядов.

**п13а**. Найти р-ие $y' = xy^2 + 1$ при $y(1) = 0$.

Р. Это ур-ие нелин., и поэтому подн-ка вместо $y$ его разл-ия в ряд $y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$ $+ \ldots$ привела бы к сложным ур-я для опр-я коэф-ов. Поэтому поступим так: продиф-уем ур-ие несколько раз подряд, полагаем $x = 1$, $y(1) = 0$ и находим

| | | |
|---|---|---|
| $y' = xy^2 + 1$, | $y'(1) = 1$ | т.к. $a_0 = y(1) = 0$ |
| $y'' = y^2 + 2xyy'$, | $y''(1) = 0$ | $a_1 = y'(1) = 1$ |
| $y''' = 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$, | $y'''(1) = 2$ | $a_2 = \frac{1}{2!}y''(1) = 0$ |
| $y^{IV} = 6y'^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'''$. | $y^{IV}(1) = 6$ | $a_3 = \frac{1}{3!}y'''(1) = \frac{1}{3}$ |
| | | $a_4 = \frac{1}{4!}y^{IV}(1) = \frac{1}{4}, \ldots,$ |

то получим р-ие $y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$

**8°. Степенные ряды в комплексной области. Формулы Эйлера**. Большинство вопросов теории рядов почти без всяких изм. переносится на ряды, членами к-ых яв-ся комп. числа. Предварительно введем сд-е

**о5**. Комп. число $Z$ наз. пределом посл-ти комп. чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ если для любого плж. числа $\varepsilon$ можно указать такое число $N$, что при всех $n > N$ будут справедливы нерав-ва $|z_n - Z| < \varepsilon$.

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $Z = a + ib$, то $|z_n - Z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$ . Отсюда следует, что сущв-ие предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = Z$ равносильно сущв-ию двух пределов посл-ей дсв. чисел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Данное опр. позволяет без всяких изм. перенести на ряды с комп. членами опр-ие сх-сти ряда.

**о6**. Ряд с комп. членами $\quad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n + \ldots \; (\omega_n = u_n + iv_n)$ (8.1)

наз. схм-ся, если сущ-ет предел посл-ти частч. сумм этого ряда.

Сх-ть ряда (8.1) равносильна сх-ти двух рядов с дсв. членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ и } v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{8.2}$$

Если сх-ся ряд, состн-ый из модулей членов ряда (8.1)

$$|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_n| + \ldots,$$

то сх-ся и сам ряд; в этом случае он наз. абс-но схм-ся. Это следует из очевидный нерав-в $|u_n| \le |\omega_n|$ и $|v_n| \le |\omega_n|$.

Пусть теперь $z = x + iy$ – пер. комп. вел-а. Т.к. спн. фк-и комп. пер-го $\omega = z^n$ ($n$ – целое плж. число) известны (см. 4°: 6.1), то получим спн. ряд комп. пер-ой $z$:

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots, \tag{8.3}$$

где коэф-ми ряда $a_0, a_1, \ldots, a_n$ могут быть любые комп. числа; справедлива т5 (Абеля), согласно к-ой, из сх-ти ряда (8.3) в тч-е $z_0$ следует его абс. сх-ть при всех $z$, по модулю меньших $z_0$: $|z| < |z_0|$. Из теоремы Абеля вытекает сущв-ие числа $R$, такого, что при всех $z$, удщ-их нерав-ву $|z| < R$, спн. ряд абс-но сх-ся. Если $|z| < R$, то тч-а комп. пл-ти $z$ лежит в круге с центром в нач. крд. и радиусом $R$, назм. радиусом сх-ти ряда, а круг $|z| < R$ – кругом сх-ти. Радиусом сх-ти может быть любое число: $R = 0$, $R = \infty$, $R$ – конечное число (к.ч.).

Сумма спн. ряда яв-ся в круге его сх-ти нек. фк-ей комп. пер-го; такие фк. наз. аналитическими (антч.). Приведем примеры антч. фк-й.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{8.4}$$

Если $y = 0$ в $z = x + iy$, то ряд (8.4) превращается в фм-у (6.1):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{8.5}$$

Если $x = 0$, то, полагая $z = iy$ и учитывая, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, получим

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right) = \cos y + i\sin y. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Заменяя $y$ на $-y$, получим $e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$ и фм-ы:

$$\left.\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y; \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

назм. фм-ми Эйлера, к-ые позволяют врж-ть копм. числа через пкзт. фк-и.

Из (8.7) легко получить фм-ы $\sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$, $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$. (8.8)

Из фм-л (8.4)-(8.6) получим

$$e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{8.9}$$

**п14**. Найти разл-ие фк-и $e^{3+i\frac{\pi}{2}}$.

Р. $e^{3+i\frac{\pi}{2}} = e^3\, e^{i\frac{\pi}{2}} = e^3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = ie^3$.

**зм7**. В комп. обл-ти фк. $e^z$ яв-ся фк-ей прдч. с прд-ом $T = 2\pi i$. Дсв-но, $e^{z+2\pi i} = e^ze^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z \cdot 1 = e^z$.

**зм8**. Изложенные в этом параграфе результаты можно обобщать и на разл-ие фк-й от двух и более пер-ых. Их мы уже рас-ли в 3°: 9.2.

# ЛЕКЦИЯ 34

## 12.3. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

**1°. Основные понятия**. Многие процессы в природе и технике обладают св-ом повторяться через опрн. промежутки вр-и, т.е. яв-ся прдч-ми, н-р, двж-ия шатуна и поршня в двигателях, распространение электромагнитных клб. и т.д. Прдч. процессы мтч-ки описываются прдч. фк-ми. Простейшими из них яв-ся тригч. фк-и с прд-ом $2\pi$: $\sin x = \sin(x \pm 2\pi)$, $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$.

Фк-и $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ также яв-ся прдч-ми, но прд. их $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Дсв-но, $\sin\left[\omega\left(x + \dfrac{2\pi}{\omega}\right)\right] =$

$= \sin(\omega x \pm 2\pi) = \sin\omega x$.

Сумма двух прдч. фк-й $a\cos\omega_1 x + b\sin\omega_2 x$, в общем случае, уже не яв-ся прдч. Но можно д-ть, что если $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ – число рац., то эта сумма есть прдч. фк-я.

Более сложные прдч. процессы описываются суммами конечного или беск. числа слг-ых вида $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$.

Тригч. рядом наз. фнц. ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right), \tag{1.1}$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ наз. коэф-ми тригч. ряда. Т.к. члены ряда (1.1) имеют общ. прд. $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сх., также яв-ся прдч. с прд. $2\pi$.

Пусть прдч. фк-я $f(x)$ с прд-ом $2\pi$ разл-тся в тригч. ряд, сх-йся к этой фк. на сгм. $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right), \tag{1.2}$$

где коэф. $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$пока неопрн-ые, и их надо найти.

Пусть ряд (1.2) мажорируем и абс-но сх-ся, т.е. сх. плж. ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \tag{1.3}$$

Тогда ряд (1.2) можно почленно интв-ть на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

Т.к. $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{1.4}$$

то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$, тогда $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Для выч-ия остальных коэф. ряда предварительно рас-им рав-ва при целых $n$ и $k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx = 0\ (n \ne k), \tag{1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin kx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = \pi\ (n = k). \tag{1.7}$$

Для д-ва (1.6), (1,7) используем фм-ы

$$\left.\begin{aligned}
&\cos nx\cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x], \text{ в част., } \cos^2 kx = \frac{1}{2}(1+\cos 2kx);\\
&\cos nx\sin kx = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x - \sin(n-k)x], \text{ в част., } \sin kx\cos kx = \frac{1}{2}\sin 2kx;\\
&\sin nx\sin kx = \frac{1}{2}[-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x], \text{ в част., } \sin^2 kx = \frac{1}{2}(1-\cos 2kx);
\end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Из (1.8) с учетом (1.4) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+k)x\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-k)x\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}(0+0) = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi + \pi - 0 + 0) = \pi.$$

Остальные рав-ва д-ся анч-но.

Для нахождения $a_k$ стн. (1.2) умн-им на $\cos kx$: $f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx +$

$+ b_n\sin nx\cos kx) \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,\mathrm{d}x)$

$\underset{(1.6),(1.7)}{\Rightarrow} \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\pi \Rightarrow$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x. \qquad (1.9)$$

Для нахождения $b_k$ стн. (1.2) умн-им на $\sin kx$: $f(x) = \frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\sin kx + b_n\sin nx\cos kx) \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow}$

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,\mathrm{d}x) \underset{(1.6),(1.7)}{\Rightarrow} \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x =$

$= b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,\mathrm{d}x = b_k\pi \Rightarrow \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x. \qquad (1.10)$

Коэф-ы, опрн-ые по фм-ам (1.5), (1.9), (1.10), наз. коэф-ми Фурье фк-и $f(x)$, а тригч. ряд (1.2) наз. рядом Фурье фк-и $f(x)$.

**2°. Достаточные условия разложимости функций в ряд Фурье**. Возможность разл-я фк-и $f(x)$ в ряд Фурье (т.е. сх-ть ряда Фурье к фк-и $f(x)$) дается теоремой Дирихле. Сначала дадим сд-ие

**о1**. Фк. $y = f(x)$ наз. кусочно-монотонной на сгм-е $[a, b]$, если этот сгм. можно разделить на конечное число (к.ч.) подсгм-ов, внутри каждого из к-ых фк-я либо только взр-ет, либо только уб-ет.

**о2**. Фк. $y = f(x)$ наз. удщ-ей усл-ям Дирихле на сгм-е $[a, b]$, если:

1) фк-я непр-на на сгм. $[a, b]$ или же имеет на нем к.ч. тч-к разрыва 1-го рода;

2) фк-я кусочно-монотонна на сгм-е $[a, b]$.

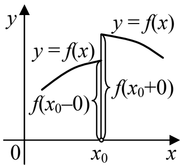



Рис. 1а

**т1** (Дирихле). Если прдч. фк-я $f(x)$ с прд-ом $2\pi$ уд-ет на любом сгм. усл-ям Дирихле, то ряд Фурье, ствщ-й этой фк., сх-ся во всех тч. числовой оси. Причем в каждой тч. непр-сти сумма ряда $S(x)$ совпадает с фк-ей $f(x)$, а в каждой тч. разрыва $x_0$ сумма $S(x)$ равна ср. арифч-му предельных зн-й фк-и при $x \to x_0$ слева и справа, т.е.

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0}f(x) + \lim_{x\to x_0+0}f(x)\right] = \frac{1}{2}[f(x_0-0) + f(x_0+0)] \text{ (рис. 1а).} \qquad (2.1)$$

Теорему примем без д-ва.

**зм1**. Из т1 следует, что класс фк-й, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье широко применяются в различных разделах мт-и, особенно в мтч. физике, механике, прж. выч-ях и т.д.

**зм2**. Если прдч. фк-я $f(x)$ с прд-ом $2\pi$ разл-ма в ряд Фурье, то его коэф-ы можно найти в любом сгм-е длиной $2\pi$: $[-\pi, \pi]$, $[a-\pi, a+\pi]$, $[\lambda; \lambda+2\pi]$.

**п1**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = x$ с прд-ом $2\pi$ на сгм. $]-\pi, \pi]$.

Р. Эта фк. кусочно монотонная и огр-ная (рис. 1). Сдт-но, она допускает разл-е в ряд Фурье. Находим по (1.5), (1.9), (1.10) коэф-ы:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right) = 0,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = 0,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi k}(-\pi\cos k\pi -$$

$-\pi\sin k\pi) = (-1)^{k+1}\cdot\dfrac{2}{k}$. Тогда по (2.1)

$$f(x) = x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right). \tag{2.2}$$

Рав-во (2.2) имеет место во всех тч., кроме тч. разрыва. В каждой тч. разрыва сумма ряда равна ср. арифч-му ее пределов слева и справа, т.е. нулю. На рис. 2 показан грф. фк-и $f(x)$ и частч. суммы. Из грф-а видно, что $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

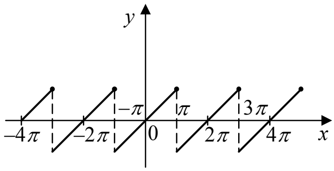



Рис. 1

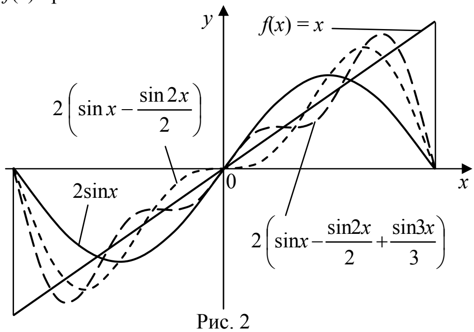



Рис. 2

**сл1**. Из разл-я (2.2), полагая $x = \pi/2$, получим интересное стн.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\sin 3\cdot\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin 4\cdot\frac{\pi}{2}}{4} + \frac{\sin 5\cdot\frac{\pi}{2}}{5} - \ldots\right), \text{ или}$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right), \text{ или } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

**п2**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = x$ (рис. 3) с прд-ом $2\pi$ на сгм. $]0, 2\pi]$.

Р. Эта фк. на отрезке $[-\pi, \pi]$ задается двумя фм. $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi < x \le 0; \\ x, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$ а на отрезке $[0, 2\pi]$ – одной фм. $f(x) = x$. Поэтому ее можно разл-ть на сгм. $[0, 2\pi]$, приняв $\lambda = 0$. Находим $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\times$

$$\times\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \left.\frac{\cos kx}{k^2}\right|_0^{2\pi} = 0,\ b_k =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \left.\frac{\sin kx}{k^2}\right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}.$$ Тогда $f(x) = x = \pi - 2\sin x - \dfrac{2}{2}\sin 2x -$

$-\dfrac{2}{3}\sin 3x-\dfrac{2}{4}\sin 4x-\dots$ в тч-х непр-сти, а в тч-х разрыва (рис. 3) имеем $f(x)=\dfrac{2\pi+0}{2}=\pi$.

**п3**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю с прд-ом $2\pi$, заданную в промежутке $-\pi\le x\le\pi$ фм-ой $f(x)=|x|$ (рис. 4).

Р. $f(x)=|x|=\begin{cases}-x,\ -\pi\le x\le 0,\\ x,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$ Тогда имеем $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x\right]=\dfrac{1}{\pi}\times$

$$\times\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right)=\pi,\ a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}x\cos kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\cos kx\mathrm{d}x\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,\mathrm{d}x+\left.\frac{x\sin kx}{k}\right|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi k}\left[-\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k^2}(-1+\cos k\pi+\cos k\pi-1)=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0,\ k-\text{чет.},\\ -4/\pi k^2,\ k-\text{нечет.}\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}x\sin kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x\right]=\left|\begin{matrix}\text{в 1-ом инт.}\\ \text{заменяем}\\ x\text{ на }-x\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x\right]=0.$$

Тогда $f(x)=|x|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\dots+\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\dots\right]$.

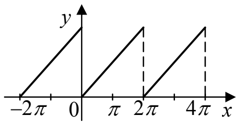


Рис. 3

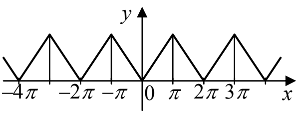


Рис. 4

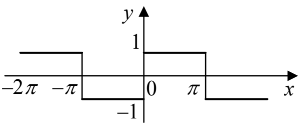


Рис. 5

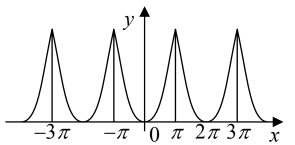


Рис. 7

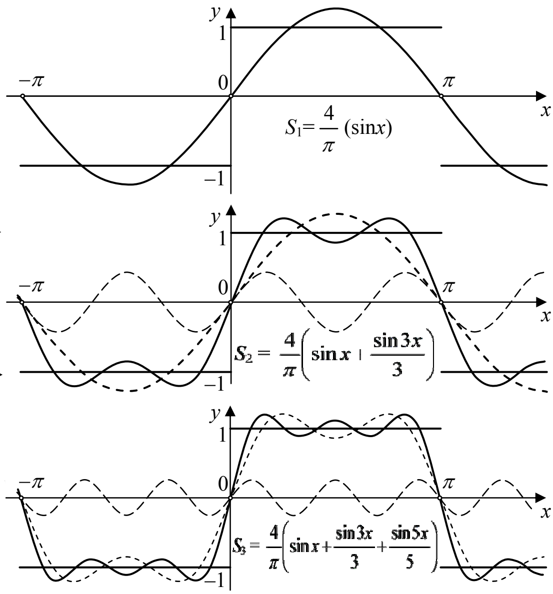


Рис. 6

**п4**. Разл-ть в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases}-1,\ -\pi<x<0,\\ 1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Р. Эта фк. кусочно монотонна и огр-на (рис. 5) на сгм. $]-\pi,\pi]$. Найдем $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[-\int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\right] = 0;\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x\right] = \dfrac{1}{\pi}\times$

$\times\left[-\dfrac{\sin kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \dfrac{\sin kx}{k}\Bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0;\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\left[-\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \dfrac{\cos kx}{k}\Bigg|_{0}^{\pi}\right] =$

$= \dfrac{1}{\pi k}(1-\cos k\pi) = \begin{cases}0,\ k-\text{чет.},\\ 4/\pi k,\ k-\text{нечет.}\end{cases}$ Тогда $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots + \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} + \ldots\right].$

На рис. 6 наглядно показано, как частч. суммы $S_n$ ряда с увеличением $n$ всё точнее и точнее представляют фк-ю $f(x)$.

**3°. Ряд Фурье для четных и нечетных функций**. Приведем св-ва чет., нечет. фк-й:

**c1**. Если фк-я чет., т.е. $f(x) = f(-x)$ (рис. 8), то в силу симч-ти фигур имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3},\ \text{т.е.}\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

**c2**. Если фк-я нечет., т.е. $f(x) = -f(-x)$ (рис. 9), то в силу симч-ти фигур и отц. фк-и получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^3\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\pi}^{0}x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}x^3\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi}x^3\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\pi}x^3\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\text{т.е.}\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\pi}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.2}$$

**c3**. Если в ряде Фурье разл-тся чет. фк-я, то пзв-ие (чет-й на чет-й) $f(x)\cos kx$ есть чет. фк., а пзв-ие (чет. на нечет.) $f(x)\sin kx$ – нечет-я. Поэтому

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x,\ a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x = 0. \tag{3.3}$$

Тогда ряд Фурье для чет. фк-и имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,. \tag{3.4}$$

**c4**. Если в ряде Фурье разл-ся нечет. фк-я, то пзв-ие (нечет. на чет.) $f(x)\cos kx$ есть нечет. фк., а пзв-ие (нечет. на нечет.) $f(x)\sin kx$ – чет. Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x = 0,\ b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Тогда ряд Фурье для нечет. фк-и запишется так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,. \tag{3.6}$$

Заметим, что указанные св. упрощают выч-ие коэф-ов Фурье.

**п5**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = |x|$ с прд. $2\pi$ в сгм. $x \in [-\pi, \pi]$ (см. п3).

Р. Эта фк. чет. (рис. 4), тогда по (3.3) находим $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{\pi} = \pi,\ a_k = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\cos kx\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{2}{\pi}\left[\underbrace{x\dfrac{\sin kx}{k}\Bigg|_{0}^{\pi}}_{=\,0} - \dfrac{1}{k}\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right] = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\cos kx}{k^2}\Bigg|_{0}^{\pi} = \dfrac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases}0,\ k-\text{чет.},\\ -4/\pi k^2,\ k-\text{нечет.}\end{cases}$ Отсюда

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right]$$

**п6**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} -1, -\pi < x < 0, \\ 1,\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$ (см. п4).

Р. Эта фк. нечет. (рис. 5), тогда по 3.5 находим $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1\cdot \sin kx\,dx = -\dfrac{2}{\pi}\left.\dfrac{\cos kx}{k}\right|_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi k}$ (1 –

$-\cos\pi k) = \begin{cases} 0,\ k - \text{чет.,} \\ 4/\pi k,\ k - \text{нечет.} \end{cases}$ Тогда $f(x) = |x| = \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots\right]$.

**п7**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = x^2$ с прд. $2\pi$ на сгм. $x \in [-\pi, \pi]$ (рис. 7).

Р. Фк-я чет., поэтому по (3.3) находим $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \dfrac{2}{3}\pi^2$. $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\times$

$$\times\Bigg[\underbrace{\left.\frac{x^2\sin kx}{k}\right|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx\Bigg] = -\frac{4}{\pi k}\left[-\left.\frac{x\cos kx}{k}\right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos kx\,dx = \frac{4}{\pi k^2}\,[\pi\cos k\pi] = \begin{cases} 4/k^2,\ k - \text{чет.,} \\ -4/k^2,\ k - \text{нечет.} \end{cases}\right.$$

Отсюда получаем $f(x) = x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left[\dfrac{\cos x}{1} - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right]$.

**4°. Ряд Фурье для функции с любым периодом и для непериодической функции**. Пусть требуется разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x)$ с прд. $2l \ne 2\pi$ в промежутке $[-l, l]$, т.е. $f(x + 2l) = f(x)$.

Вводим новую пер. $x = \dfrac{l}{\pi}t$. Тогда фк. $f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$ будет прдч-й с прд. $2\pi$. Дсв-но, $f\left(\dfrac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) =$

$= f\left(\dfrac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$. Значит, фк-ю $f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$ можно разл-ть в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$.

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt + b_k\sin kt\right), \tag{4.1}$$

где $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)dt$, $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt$, $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt$.

Возвратимся теперь к старой пер. $x$: $x = \dfrac{l}{\pi}t$, $t = \dfrac{\pi}{l}x$, $dt = \dfrac{\pi}{l}dx$, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$. Тогда из (4.1) получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{4.2}$$

где $a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$, $a_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{k\pi}{l}x\,dx$, $b_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{k\pi}{l}x\,dx$.

Ясно, что все утв-ия для фк-и с прд-ом $2\pi$ имеют место и для фк-й с прд. $2l$.

**п8**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = x - 1$ с прд. $2l = 2$ в сгм. $-1 < x \le 1$.

Р. Находим $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{2} - 1 - \dfrac{1}{2} + (-1) = -2$.

$$a_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos k\pi x\,dx = \int_{-1}^{1}x\cos k\pi x\,dx - \int_{-1}^{1}\cos k\pi x\,dx = \left.\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{1}{k\pi}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right|_{-1}^{1} = 0;$$

$$b_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin k\pi x\,dx = \int_{-1}^{1}x\sin k\pi x\,dx - \int_{-1}^{1}\sin k\pi x\,dx = -\left.\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\right|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\cos k\pi x\,dx + \left.\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{k\pi}\times$$

$\times[\cos k\pi + \cos k\pi]$ + $\left.\dfrac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\right|_{-1}^{1}$ = – $\dfrac{2\cos k\pi x}{k\pi}$ = – $\dfrac{2(-1)}{k\pi}$. Тогда имеем

$$f(x) = x - 1 = -1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$

Теперь рас-им ряд Фурье для непрд. фк-и. Пусть $f(x)$ – непрдч. фк-я, заданная на всей числ. оси. Рас-им вспомогательную фк. $\bar f(x)$ с прд. $2l$, причем $\bar f(x) = f(x)$ в промежутке $-l < x \le l$ (рис. 10). Если для фк-и $\bar f(x)$ выполняется усл-я т1 Дирихле, то ее можно разл-ть в ряд Фурье.

Иногда приходится иметь дело с фк-ми $f(x)$, заданными только в промежутке $-l < x \le l$ (рис. 11). В этом случае фк-ю $f(x)$ нх-мо продолжить на промежуток $-l < x \le 0$ произвольным образом, а чаще всего фк-ю продолжают чет. образом, т.е. $f(-x) = f(x)$ или нечет. образом, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

**п9**. Разл-ть в ряд по синусам фк-ю $f(x) = 1$, заданную в промежутке $0 < x \le 1$.

Р. Для разл-я фк-и в ряд по синусам надо ее продолжить на промежуток $-1 < x \le 0$ нечет. образом, а затем разл-ть в ряд Фурье прдч-ки на всю числ. ось. $a_0 = a_k = 0$, $b_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\,\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$ =

$$= 2\int_0^1 1\cdot\sin k\pi x\,dx = -2\left.\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right|_0^1 = -\frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases}0, & k - \text{чет.},\\ 4/\pi k, & k - \text{нечет.}\end{cases}$$ Отсюда получим

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right].$$

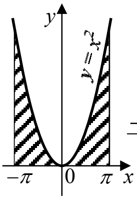


Рис. 8

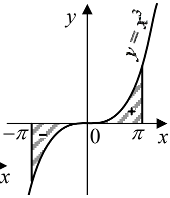


Рис. 9

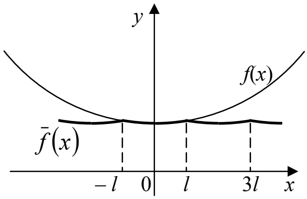


Рис. 10

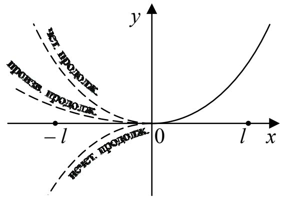


Рис. 11

**5°. Ряд Фурье в комплексной форме**. Рас-им два случая:

1*. Пусть фк. $f(x)$ с прд. $2\pi$ разл-на в ряд Фурье $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_k\sin nx\right)$, (5.1)

где $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Используя фм-ы (8.8): 12.2, имеем $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$, $\sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$, подс-в эти врж. в (5.1), получим $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) = \dfrac{a_0}{2}$ + $+ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right)$. Отсюда, обз-ив $\dfrac{a_0}{2} = c_0$, $\dfrac{a_n - ib_n}{2} = c_n$, $\dfrac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$, будем иметь

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) \tag{5.2}$$

или кратко

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{5.3}$$

где $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos nx - i\sin nx)\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; e^{-inx}\,\mathrm{d}x$. Анч-но получим $c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; e^{inx}\,\mathrm{d}x$, к-ые можно объединить:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; e^{-inx}\,\mathrm{d}x \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5.4}$$

где $c_{-n}, \ldots, c_0, \ldots, c_n$ наз. комп. коэф-ми Фурье для фк-и $f(x)$.

2*. Пусть фк. $f(x)$ с прд. $2l$ разл-ся в ряд Фурье в промежутке $[-l, l]$. С учетом (4.2) вместо (5.1), (5.3), (5.4) получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_k\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{5.5}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}, \tag{5.6}$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{5.7}$$

**п10**. Разл-ть в ряд Фурье в комп. форме фк-ю $f(x) = e^x$ в промежутке $-\pi < x \le \pi$.

Р. $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\; e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right) =$

$= \frac{\cos n\pi}{2\pi(1-in)}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}(e^{\pi} - e^{-\pi})$. Тогда $f(x) = e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}$.

**6°. Интеграл Фурье и его комплексная форма**. Пусть фк. $f(x)$ опр-на на беск. инр-е $]-\infty, \infty[$ и абс-но инту-ма на нем, т.е. сущ-ет инт-л

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x = Q \tag{6.1}$$

и пусть $f(x)$ разл-ся в ряд Фурье в любом промежутке $-l < x \le l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{6.2}$$

где $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t$, $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\cos\frac{k\pi}{l}t\mathrm{d}t$, $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\sin\frac{k\pi}{l}t\mathrm{d}t$, подс-ив их в (6.2), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\mathrm{d}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x + \left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}t\mathrm{d}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\right] =$$

$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x + \sin\frac{k\pi}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x\right]\mathrm{d}t$ или

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\,\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,\mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

Найдем предел стн. (6.3) при $l \to \infty$, предварительно введя обз-ия: $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{l}$, …, $\alpha_k = \frac{k\pi}{l}$, … и $\Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l}$. Подс-ив их в (6.3), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\mathrm{d}t\right)\Delta\alpha_k. \tag{6.4}$$

При $l \to \infty$ первый член (6.4) стремится к нулю. Дсв-но, $\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t =$

$= \frac{1}{2l}Q \to 0$ при $l \to \infty$. Тогда при $l \to \infty$ стн. (6.4) принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{6.5}$$

Врж-ие (6.5) наз. инт-ом Фурье для фк-и $f(x)$. Причем (6.5) имеет место для тч-к непр-ти фк-и $f(x)$. В тч-е разрыва выполняется рав-во

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{6.6}$$

Учитывая, что $\cos\alpha(t-x) = \cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x$, (6.5) можно писать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t\right)\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t\right)\sin\alpha x\mathrm{d}\alpha. \tag{6.7}$$

Каждый из инт-ов (6.7) по $t$ сущ-ет, т.к. абс. инту-ма в $]-\infty, \infty[$, сдт-но, абс. инту-мы и фк. $f(t)\cos\alpha t, f(t)\sin\alpha t$.

Рас-им частные случаи фм-ы (6.7).

1) Если фк-я $f(x)$ – чет., то $f(t)\cos\alpha t$ – чет., а $f(t)\sin\alpha t$ – нечет. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t$,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t = 0$, и (6.7) принимает вид $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t\right)\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha.$ (6.8)

2) Если фк-я $f(x)$ – нечет., то $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t\right)\sin\alpha x\mathrm{d}\alpha.$ (6.9)

Если фк. $f(x)$ опр-на только в инр. $]0, \infty[$, то ее можно представить при $x > 0$ фм-й (6.8), до-опр-ив в инр. $]-\infty, 0[$ чет. образом или по (6.9) – нечет. образом.

Введем обз-ия: $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t$, $B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t$, тогда фм-у (6.7) можно

писать в виде $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right]\mathrm{d}\alpha.$ (6.10)

В фм-е (6.8) положим $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t,$ (6.11)

тогда (6.8) примет вид $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha,$ (6.12)

Фк. $F(\alpha)$ наз. косинус-преобразованием (прб.) Фурье для фк-и $f(x)$. Если в (6.11) считать $F(\alpha)$ заданной, а $f(t)$ – искомой фк., то оно яв-ся интн-ым ур-ем для фк-и $f(t)$. Фм. (6.12) дает р-ие этого ур.

Анч-но для (6.9) можно записать $\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,\mathrm{d}t.$ (6.13)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha t \, \mathrm{d}t. \qquad (6.14)$$

Фк. $\Phi(\alpha)$ наз. синус-прб-ем Фурье.

**п11**. Разл-ть в инт-л Фурье фк-ю $f(x) = e^{-\beta x}$ ($\beta > 0, x \geq 0$).

Р. По фм-ам (6.11) и (6.13) опр-ем косинус-прб. и синус-прб. Фурье:

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}, \; \Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin \alpha t \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

По фм-ам (6.12) и (6.14) находим взаимные стн.

$$e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} \, \mathrm{d}\alpha \; (x \geq 0).$$

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} \, \mathrm{d}\alpha \; (x \geq 0).$$

Теперь рас-им инт-л Фурье в комп. форме. В инт-ле (6.5) в скобках стоит чет. фк-я от $\alpha$, значит, эта фм. опр-на и при отц. зн-ях $\alpha$, тогда ее можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t - x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha. \qquad (6.15)$$

Если в скобках возьмем нечет. фк-ю от $\alpha$, то $\int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha = 0$. Отсюда очевидно, что $\lim_{\mu \to \infty} \int_{-\mu}^{\mu} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha$. Умн-ив это врж. на $-\frac{i}{2\pi}$ и сж-ив с (6.15), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \alpha (t - x) - i \sin \alpha (t - x)] \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\alpha. \qquad (6.16)$$

Фм. (6.16) наз. инт-ом Фурье в комп. форме для фк-и $f(x)$.

Перепишем фм-у (6.16) так: $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} \mathrm{d}t \right) e^{i\alpha t} \, \mathrm{d}\alpha. \qquad (6.17)$$

Положив $$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} \mathrm{d}t, \qquad (6.18)$$

вместо (6.17) получим $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{i\alpha t} \mathrm{d}\alpha. \qquad (6.19)$$

Фк. $F^*(\alpha)$ наз. прб-ем Фурье для фк-и $f(x)$. А фк. $f(x)$ наз. обратным прб. Фурье для фк-и $F^*(\alpha)$.

**п12**. Найти прб-ие Фурье фк-и $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, \; x \geq 0, \\ 0, \; x < 0 \; (a > 0). \end{cases}$

Р. Используя (6.18), находим

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\alpha t} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-t(a+i\alpha)}}{a + i\alpha} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\alpha}.$$

**7°. Ряд Фурье по ортогональной системе функций**. Дадим сд-е

**о1**. Беск. система фк-й $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, опрн-ые и непр-ые на отрезке $[a, b]$, наз. ортогональной (орт.) системой, если $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x$ при $n \neq m$; $k_n = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ при $n = m$.

Если каждую фк. $\varphi_n(x)$ умн-ть на $\frac{1}{\sqrt{k_n}}$, то новые фк. $\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}\varphi_1(x)$, $\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\varphi_2(x)$, …, $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x)$, … также будут орт. системой. Причем $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_n}\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$, т.е.

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq m, \\ 1 \text{ при } n = m. \end{cases} \tag{7.1}$$

Система $\{\psi_n(x)\}$ наз. орт-ой норв. системой. Приведем примеры.

**п13**. Системы фк-й

1) 1, $\sin x$, $\cos x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$, … на сгм. $[-\pi, \pi]$ орт-я (см. (1.6), (1.7) из 1°);

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, …, $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ … есть ортонорв. система;

3) $\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$, … на сгм. $[0, \pi]$ есть орт. система.

Теперь рас-им ряд Фурье по ортонорв. фк-ям $\{\psi_n(x)\}$, т.е.

$$f(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i(x). \tag{7.2}$$

Требуется найти коэф-ы $\{c_n\}$ разл-ия.

Для этого умн-им посл-но рав-во (7.2) на фк-и $\psi_1(x)$, …, $\psi_n(x)$, … и с учетом (7.1) получим

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} c_k \int_a^b \psi_k(x)\psi_m(x) = c_n. \tag{7.3}$$

**о2**. Орт. система фк-й $\{\psi_n(x)\}$ наз. полной, если для любой фк. $f(x)$ с инту-ым кв. (т.е. $\int_a^b f^2(x)\,)\mathrm{d}x < \infty$ выполнялось нерав-во

$$\lim \int_a^b \left[f(x) - \sum c_i\psi_i(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0, \tag{7.4}$$

т.е. ср. квч. отклонение (отк.) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если выполняется (7.4), то говорят, что ряд Фурье (7.2) сх. к фк. $f(x)$ в ср-ем.

Отметим, что тригч. системы в п1 полны на ствщ. отрезках.

## ЛЕКЦИЯ 35

# 12.4. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**1°. Основные понятия. Температура тела. Постановка задачи**. Пусть фк. $u$ описывает нек-ый физический процесс. Всякий процесс протекает в пр-ве, тч-и к-го можно хркз-ть дек. пуг-ми крд. $(x, y, z)$ и во вр-и $t$. Поэтому в общем случае фк. $u$ яв-ся фк-ей 4-х пер-х: $u = u(x, y, z, t)$. Диф-уя фк-ю $u$, получим част. прв-ые $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т.д. В данном процессе эти прв., пер-ые и фк-я связаны известными стн., и т.о. приходим к дифн. ур-ю с част. прв-ми. Для физических прлж. особый интерес представляют дифн. ур-ия с част. прв-ми второго порядка. К числу их относятся ур-ия газовой динамики, гидродинамики, ур-ия электро- и радиотехники, теории теплопроводности (теппр.), упругости и т.д. Поэтому дифн. ур-ия с част. прв-ми второго порядка получили наз-ие ур-ий мтч. физики.

Н-р, рас-им физическое тело $V$. Темп-у его в тч. $(x, y, z)$ в момент вр. $t$ обз-им через $u = u(x, y, z, t)$. Покажем, что фк $u$ уд-ет дифн. ур-ю

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad ((x, y, z) \in V) \tag{1.1}$$

или, если обз-им $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ур-ю

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \tag{1.1a}$$

к-ое наз. ур-ем теппр-ти. Оно яв-ся примером лин. дифн. ур-ия в част. прв-ых второго порядка.

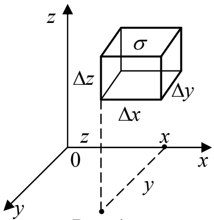


Рис. 1

Рас-им элр. кубик $\sigma$ в теле $V$ (рис. 1). Кол-во тепла, приходящее через левую грань $\sigma$ справа налево за промежуток вр-и $(t, t + \Delta t)$, равно с точностью до беск. малых высшего порядка $\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t$, где $\alpha$ – коэф-т теппр-ти тела, к-ый считается пст-ым в любой его тч. Указанное кол. тепла, очевидно, прцн-но числу $\alpha$, пщ-и $\Delta y \Delta z$ расв-мой грани, прщ-ю вр-и $\Delta t$ и скр-и изм-ия темп-ры в нпв-и оси $x$, равной част. прв-ой $\frac{\partial u}{\partial x}$ в тч. $(x, y, z, t)$.

Кол. тепла, проходящее через правую грань $\sigma$ справа налево, очевидно, равно $\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x), y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t$. Тогда кол-во тепла, вошедшее в куб $\sigma$ через левую и правую его грани за указанный промежуток вр-и, равно $\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t \approx \approx \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t$.

Общ. кол-во тепла, вошедшее в $\sigma$ за вр. $(t, t + \Delta t)$, очевидно, равно сумме кол-в тепла, вошедших за это время через все грани $\sigma$:

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \tag{1.2}$$

Но это число (кол-во тепла) равно также

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \tag{1.3}$$

где $\beta$ – удельная теплоемкость тела, к-ую можно считать пст-ой во всех его тч-х.

Приравнивая вел-ы (1.2), (1.3), после сокращений получим дифн. ур-ие (1.1), где $a^2 = \frac{\alpha}{\beta}$.

Итак, показали, что темп. тела $V$ есть фк $u = u(x, y, z, t)$, удщ-я ур-ю (1.1), где $a^2$ – плж. константа, физический смысл к-ой был выяснен выше. Здесь мы огр-ись тем случаем, когда во всех тч-х тело имеет пст. удельную теплоемкость и пст. коэф-т теппр-ти.

Дифн. ур-ие (1.1) имеет беск. мн-во р-й. Чтобы найти среди них опрн. р-ие, надо наложить на фк-ю *u* дпнт. усл-я. Обычно это так назм-ые нач. и граничные усл-я. Нач. и граничные усл. задачи наз. краевыми усл. Поэтому задачи с этими усл. наз-ют краевыми задачами.

Ур-ия мтч. физики получают из реальных физических процессов (оригиналов) с помощью замены его нек-ым идеальным процессом – моделью (мд.), причем так, что мд. значительно проще оригинала, но в то же время сохраняет его осн. черты (т.е. происходит идеализация процесса на основе перехода от оригинала к мд-и).

Мтч. моделирование (мдв.) (ММв) используется [34] во всех разделах науки. Причем первым это было принято в физике. Теоретическая физика – это и есть применение мтч. мд-й (ММ) в физике.

ММв любых процессов (в том числе физических) состоит из сд. этапов:

1. Постановка задачи. Технолог (специалист данного процесса или системы, т.е. оригинала) сформулирует общ. задачу словесно с указанием желаемой цели или желаемого результата и дальнейшее изучение объекта (оригинала) поручит мт-ку.

2. Разработка ММ. Вводятся нх. парм-ы и пер-ые, дается мтч. описание задачи и формулируется ММ изучаемого объекта. Если изучаемый объект простой или упрощается с помощью нек-ых прб-й, то можно использовать и известные (разработанные) ММ.

3. Выбор или разработка метода решения (МР). Если ММ дт-но простая, то она р-тся при помощи выбора подходящего метода из свк-ти известных. Если же ММ сложная и не сущ-ет подходящего метода р-ия, то разрабатывается новый метод, т.е. алгоритм-модель, и р-тся ММ до получения числового результата.

4. Проверка адекватности ММ и оригинала. Если ММ адекватна оригиналу, то переходим к 5-му этапу. Если нет, то корректируем задачу, уточняем ММ переходим ко 2 этапу.

5. Печатание результатов счета и останов ЭВМ. Выдаем технологу результаты счета и рекомендации по изучаемому объекту.

Заметим , что в зв-ти от сложности исслм-х систем вышеприведенные осн. этапы ММв могут расширяться, уточняться, добавляться новыми этапами и группироваться в части (см. [34]).

**2°. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка**. Пусть фк. *u* зв-т от двух пер-ых *x*, *y* (или *x*, *t*). Введем обз-ия $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$. Тогда ур-ие имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{2.1}$$

где $F$ – заданная фк. своих арг-ов.

Ур. (2.1) наз. лин-ым отс-но старших прв-ых, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{2.2}$$

Част. случаем ур-я (2.2) яв-ся лин. ур-ие $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$, (2.3)
где $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $b_1$, $b_2$, $c$, $f$ – заданные фк-и от $x$, $y$. В дальнейшем предполагается, что коэф-ы $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ имеют непр. прв-ые до второго порядка включительно.

Если $f(x, y) \equiv 0$, то ур. (2.3) наз. лин. одн-ым, в противном случае – лин. неодн-ым.

Если все коэф-ы $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $b_1$, $b_2$ и $c$ – пст-ые, то ур-ие (2,3) наз. лин. ур-ем с пст. коэф-ми, мнж-ль 2 у коэф-а $a_{12}$ записывается лишь для удобства.

Классификация (клсф.) ур-й (2.2) [или (2.3)] проводится в ств-и со знаком дискриминанта (дск.) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Если в нек-ой обл. $G_1 \subset G$ сохраняет знак дск-т $a_{12}(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)$, то ур-ие (2.2) в обл. $G_1$ наз. ур-ем:

гпрбч-го (процессы колебаний) типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

парбч-го (теории теплопроводности, диффузии) типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,

элч-го (стац. физч. процессы: задача Дирихле, ур-я Лапласа) типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Если ур-ие расв-ся во всей обл. $G$, то три указанных типа не дают исчерпывающей инф-и, т.к. врж-ие $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ может не сохранять знака во всей обл. Тогда должна сущв-ть крв-я $l$, вдоль к-ой $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, эта крв. наз. линией парбч. вырождения. При этом здесь возможны два случая.

1*. Во всех тч., кроме $l$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ сохраняет знак, тогда ур. (2.2) наз. ур-ем гпрбч-го или элч. типа с линией вырождения $l$.

2*. Дск. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ меняет знак в обл. $G$, тогда ур. (2.2) наз. ур-ем смешанного типа.

**п1**. Опр-ть типы ур-й: 1) $u_{xy} + x^2u_{yy} = 0$; 2) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$; 3) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Р. 1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0 \cdot x^2 = \frac{1}{4} > 0$ (гпрбч-й); 2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (xy)^2 - y^2x^2 = 0$ (парбч-й); 3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \cdot 1 = 0 = -\frac{3}{4} < 0$ (элч-й).

**п2**. Найти линию парбч. вырождения в обл-и гиперболичности (гпрбчн). и эллиптичности (элчн.) для сл-х ур-й: 1) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + \sin x u_y = 0$; 2) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$; 3) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$.

Р. 1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 + x^2y^2 > 0$ (гпрбч. тип); $x = 0$, $y = 0$ – линии парбч. вырождения; 2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - y$ (смешанный тип); $y = 0$ – обл. парбч. вырождения, $y < 0$ – обл. гпрбчн-сти, $y > 0$ – обл. элчн-сти; 3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-xy)^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = x^2y^2 + 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2 = 1 - x^2 + y^2$ (смешанный тип), $x^2 - y^2 = 1$ – линия парбч. вырождения; $1 - x^2 - y^2 > 0$ – обл. гпрбчн-сти, $1 - x^2 - y^2 < 0$ – обл. элчн-сти.

Ур. (2.3) в каждой из обл-ей, где сохраняется знак дск-а $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, может быть приведено к каноническому (канч.) виду путем замены пер-х $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. При этом ур. (2.3) остается лин-ым и будет иметь вид $\overline{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12} u_{\xi\eta} + \overline{a}_{22} u_{\eta\eta} + \overline{b}_1 u_\xi + \overline{b}_2 u_\eta + \overline{c}\, u = \overline{f}\ (\xi, \eta)$, (2.4)
где коэф-ы при прв-ых находятся по фм-ам:

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
\overline{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\overline{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,\\
\overline{b}_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y,\\
\overline{b}_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Возникает вопрос: нельзя ли выбрать новые пер. $\xi$ и $\eta$ так, чтобы в прб. ур-и нек-ые коэф. при вторых прв-х были равны нулю? Оказывается, эта задача связана с р-ем такого обыкновенного дифн. ур-ия: $a_{11}\mathrm{d}y^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\mathrm{d}x^2 = 0$, (2.6)
к-ое наз. характеристическим (хркч.) ур-ем для исх. дифн. ур-я с част. прв-ми, а его инт-ы – характеристиками (хркс.).

Если $\varphi(x, y) = C_1$ – общ. инт-л хркч. ур-я, то, положив $\xi = \varphi(x, y)$, обратим в нуль коэф-т при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = C_2$ яв-ся др. общ. инт-ом хркч. ур-я ($\varphi$ и $\psi$ незв-мы), то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, обратим в нуль также коэф-т при $u_{\eta\eta}$.

Хркч. ур-ие можно записать и так: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$. (2.7)

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то инт-ы хркч-го ур. (2.7) $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ дсв-ны и различны. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, приведем ур-ие с част. прв-ми к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{2.8}$$

Стн. (2.8) наз канч. видом ур-я гпрбч. типа. Если теперь положить $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$, то ур-ие имеет вид $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$. (2.9)

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то хркч. ур-ие (2.7) имеет лишь один инт-л $\varphi(x, y) = C$. Пусть $\eta(x, y)$ – любая фк., лин. не звщ-я от $\varphi(x, y)$. Тогда, полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, приведем ур-ие с част. прв-ми к виду $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$. (2.10)

Это ур-ие парбч. типа.

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то хркч. ур. (2.7) имеет комп. (сопряженные) общ. инт-ы $\varphi(x, y) = C_1$ и $\varphi^*(x, y) = C_2$. Полагая $\alpha = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2}$, $\beta = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2i}$, ур-ие с част. прв-ми приводим к виду

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{2.11}$$

Это ур-ие элч. типа.

Если коэф-ы лин. ур-я (2.3) пст-ны, то хркч. ур-ие (2.7) имеет р-ия:

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_3,\ y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{12}}x + C_4. \tag{2.12}$$

Итак, получили сд. канч. виды ур-й с част. прв-ми:

При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ или $\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu = f \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu = f \end{array}\right\}$ (гпрбч. тип). (2.13)

При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ $u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta = f$ (парбч. тип). (2.14)

При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu = f$ (элч. тип). (2.15)

Напомним, что здесь первые прв. старым пер. врж-ся через прв-ые по новым пер. по фм-ам

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta\eta_x,\ u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta\eta_y. \tag{2.16}$$

А вторые прв. можно найти из $u_x$, $u_y$ с учетом $u_{xx} = (u_x)_x$, $u_{xy} = (u_x)_y = (u_y)_x = u_{yx}$, $u_{yy} = (u_y)_y$; здесь при выч-и прв-х $(u_\xi)_x$, $(u_\eta)_x$, $(u_\xi)_y$, $(u_\eta)_y$ надо опять применить правило дифн-ия сложной фк. (2.16).

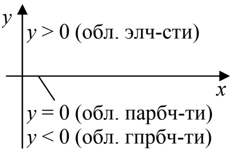


Рис. 2

Если вместо фк-и $u$ ввести новую фк. $v$, положив $u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta}$, где $\lambda$ и $\mu$ – пст-ые, то при ствщ. выборе зн-й $\lambda$ и $\mu$ получим сд. канч. формы для ур-й с пст. коэф-ми:

$\left.\begin{array}{l} v_{\xi\eta} + \gamma v = f_1 \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = f_1 \end{array}\right\}$ (гпрбч. тип),

$v_{\xi\xi} + bv_\eta = f_1$ (парбч. тип), $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v = f_1$ – (элч. тип).

**п3**. Найти обл-и гпрбчн-сти, элчн-сти и прбчн-сти ур-ия $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

Р. Находим $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot y = -y$. При $y < 0$ получим $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гпрбч. тип). При $y = 0$ получим $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (прбч-й тип). При $y > 0$ имеем $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (элч. тип) (рис. 2).

**п4**. Привести к канч. виду ур-ие $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0$.

Р. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1^2 - 1 \cdot 1 = 0$, т.е. задано ур. прбч-го типа. Хркч. ур. (2.7) имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = 1$ $\underset{\text{инт}}{\Rightarrow}$ $x - y = C$. Положим $\xi = x - y$. В кач-ве др. пер-ой возьмем, н-р, $\eta = x + y$ (очевидно, $\xi$ и $\eta$ не зв-мы). При этом $\xi_x = 1$, $\xi_y = -1$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = 1$. Тогда по (2.16) находим:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi + u_\eta,\\
&u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\eta - u_\xi,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi},\\
&u_{yy} = u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y - u_{\xi\xi}\xi_y - u_{\xi\eta}\eta_y = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Подс-им $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$ в заданное ур. После простейших прб. получим $u_{\eta\eta} + u = 0$ – канч. ур. прбч. типа.

**п5**. Привести к канч. виду ур-ие $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$.

Р. Находим $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1 < 0$ (т.е. ур. элч. типа), $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} =$ $= 1 \pm i$, $\dfrac{dy}{dx} = 1 + i$, $y = (1 + i)x + C_1$, $(y - x) - ix = C_1$, $\dfrac{dy}{dx} = 1 - i$, $y = (1 - i)x + C_2$, $(y - x) + ix = C_2$.

Введем новые пер. $\xi = (y - x) - ix$ и $\eta = (y - x) + ix$. Положим $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2} = y - x$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{-2i} =$ $= x$, при этом $\alpha_x = -1$, $\alpha_y = 1$, $\beta_x = 1$, $\beta_y = 0$. Тогда по (2.16) находим:

$u_x = u_\alpha\alpha_x + u_\beta\beta_x = -u_\alpha + u_\beta$,
$u_y = u_\alpha\alpha_y + u_\beta\beta_y = u_\alpha$,
$u_{xx} = -u_{\alpha\alpha}\alpha_x - u_{\alpha\beta}\beta_x + u_{\beta\alpha}\alpha_x + u_{\beta\beta}\beta_x = u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$,
$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y + u_{\alpha\beta}\beta_y = u_{\alpha\alpha}$,
$u_{xy} = -u_{\alpha\alpha}\alpha_y - u_{\alpha\beta}\beta_y + u_{\beta\alpha}\alpha_y + u_{\beta\beta}\beta_y = u_{\alpha\beta} - u_{\alpha\alpha}$.
Подставим $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$ в заданное ур. $u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} + 2u_{\alpha\beta} - 2u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0$.

**3°. Особенности решения уравнений с частными производными. Уравнения колебаний струны. Электрические колебания в проводах**. Задача интв-ия ур-я с част. прв-ми состоит в том, чтобы найти все р-ия данного ур. Ясно, что изученные ранее обыкновенные (обык.) дифн. ур-я – это простейший случай дифн. ур-й с част. прв-ми, когда число арг-ов неизвестной фк. равно ед-це. Вместе с тем, известно, что обык. дифн. ур-ие имеет беск. мн-во р-й, т.к. его общ. р-ие содержит произвольные (прзвл). пст. Естественно предположить, что и ур-ие с част. прв-ми имеет беск. мн-во р-й. Оказывается, что в р-ие ур-я с част. прв-ми входят даже прзвл. фк-и тех же арг-ов, от к-ых зв-т неизвестная фк. Покажем это на сд-их примерах.

**п6**. Р-ть ур-ие с част. прв-ми первого порядка $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2xy = 0$ ($z = z(x, y)$).

Р. Исх. ур-ие запишем в виде $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2xy$ и будем расв-ть $y$ как парм-р, тогда данное ур. становится обык. дифн. ур-ем для фк-и $z$ арг-та $x$. Его р-ие имеет вид $z = x^2y + C$.

Если теперь вместо прзвл-ой пст. $C$ взять прзвл. фк-ю $\varphi(y)$, то получим общ. р-ие данного дифн. ур-я с част. прв-ми $z = x^2y + \varphi(y)$.

При этом какой бы ни была прзвл. фк-я $\varphi(y)$, фк. $z = x^2y + \varphi(y)$ уд-ет данному дифн. ур-ю. Дсв-но, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y + \varphi(y)) = 2xy + \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(y) = 2xy$, т.к. $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(y) = 0$.

Из п6 видно, что общ. р-ие ур-я с част. прв-ми первого порядка всегда содержит прзвл. фк-ю.

**п7**. Р-ть ур-ие $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Р. Запишем это ур. так: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ не зв-т от $x$, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \Theta(y)$, где $\Theta(y)$ – любая фк. от $y$. Инту-я ее, получим $z = \int \Theta(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – прзвл. фк-я (она играет роль прзвл. пст-ой). Итак, $z = \varphi(x) + \psi(y)$, где $\varphi(x)$, $\psi(y) = \int \Theta(y)\,\mathrm{d}y$ – прзвл. фк-и.

В расн-ом п7 оказалось, что р-ие ур-я с част. прв-ми второго порядка зв-т от двух прзвл. фк-й (конечно, дифм-ых).

Напомним, что с помощью прзвл. пст-ых, входящих в общ. р-ие обык. дифн. ур-я, можно найти его част. р-ие, удщ-е нач. усл-ям (р-ть задачу Коши для этого ур-я). Наличие прзвл. фк-й в р-и ур-я с част. прв-ми также используется для того, чтобы найти част. р-ие этого ур-я, удщ-е краевым усл-ям: нач-ым и граничным. Н-р, для струны, концы к-ой закреплены неподвижно (при $x = 0$ и $x = l$) и форма к-ой в нач. момент вр-и ($t = 0$) задается фк-ей $\varphi(x)$, нач. усл-ми будут рав-ва:

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{3.1}$$

где $u_t(x, 0)$ – скр. в каждой тч. струны при $t = 0$, заданная фк-ей $\psi(x)$, а граничными усл. яв-ся рав.:

$$u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0. \tag{3.2}$$

Теперь рас-им ур-я колебаний (клб.) струны. В мтч. физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент вр-и, нпв-ны по кас-ой к ее профилю. Пусть струна длины $l$ в нач. момент нпв-на по отрезку оси $Ox$ от 0 до $l$. Предположим, что концы струны закреплены в тч-х $x = 0$ и $x = l$. Если струну отклонить (отк.) от ее первонач. пж-ия, а потом предоставить самой себе или, не отк-я струны, придать в нач. момент ее точкам нек-ую скр-ть, или отк-ть струну и придать ее тч-м нек-ую скр., то тч-и струны будут совершать двж-я – говорят, что струна начнет клб-ся. Задача заключается в опр-и формы струны в любой момент вр. и опр-и закона двж-я каждой тч. струны в звт-и от вр.

Будем расв-ть малые отк-я тч-к струны от нач. пж-ия. В силу этого можно предполагать, что двж-ие тч-к струны происходит прп-но оси $Ox$ и в одной пл-ти. При этом предположении процесс клб-я струны описывается одной фк. $u(x, t)$, к-ая дает вел-у перемещения тч-и струны с абсциссой $x$ в момент $t$ (рис. 3).

Т.к. мы расв-ем малые отк-я струны в пл-ти $(x, u)$, то будем предполагать, что длина эл-а струны $\overset{\frown}{M_1M_2} = x_2 - x_1$. Также будем предполагать, что натяжение $T$ во всех тч. струны одинаковое, и выводим ур-ие клб-й струны.

Рас-им эл-т струны $MM'$ (рис. 4). На концах этого эл-та по кас-ым к струне действуют силы $T$. Пусть кас-ые образуют с осью $Ox$ углы $\varphi$ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда пркц-я на ось $Ou$ сил, действующих на эл-т $MM'$, будет равна $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Т.к. угол $\varphi$ мал, то можно положить $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, и будем иметь (используя теорему Лагранжа): $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx T\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T\operatorname{tg}\varphi =$
$= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = T\frac{\partial^2 u(x+\Theta\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,\ 0 < \Theta < 1.$

Чтобы получить ур-ие двж-я, нужно внешние силы, приложенные к эл-у, приравнять силе инерции. Пусть $\rho$ – лин. плотность струны. Тогда масса эл-та струны будет $\rho\Delta x$. Уск-ие эл-та равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Сдт-но, по принципу Даламбера будем иметь $\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Сокращая на $\Delta x$ и обз-ая $\frac{T}{\rho} = a^2$, получим ур-ие двж-я
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.3}$$
Это и есть волновое ур-ие, к-ое наз-ют также ур-ем клб-й струны. Для полного опр-ия двж-я струны одного ур-я (3.3) недт-но. Искомая фк. $u(x, t)$ должна уд-ять еще нач-ым (3.1) и граничным усл-ям (3.2). В част-ти, в (3.1) может быть $\varphi(x) \equiv 0$ или $\psi(x) \equiv 0$. Если же $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, то струна будет находиться в покое, сдт-но, $u(x, t) \equiv 0$.

К ур-ю (3.3.) приводит и задача об электрических (элкч.) клб-ях в проводах. Покажем это. Элкч. ток в проводе хркз-ся вел-ой $i(x, t)$ и напряжением $v(x, t)$, к-ые зв-ят от крд-ы $x$ тч-и провода и от вр-и $t$. Расв-я эл-т провода $\Delta x$, можно написать, что падение напряжения на эл-е $\Delta x$ равно $v(x, t) - v(x + \Delta x) = -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Это падение напряжения складывается из омического, равного $iR\Delta x$, и индуктивного, равного $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$. Итак,
$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x, \tag{3.4}$$
где $R$ и $L$ – сопр-ие и коэф-т инд-сти, рассчитанные на ед-у длины провода. Знак минус взят потому, что ток течет в нпв-и, обратном взр-ю $v$. Сокращая на $\Delta x$, получим
$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{3.5}$$

Далее, разность токов, выходящего из эл. $\Delta x$ и входящего в него за время $\Delta t$, будет
$$[i(x, t) - i(x + \Delta x, t)]\Delta t \approx -\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x\Delta t.$$
Она расходуется на зарядку эл-та, равную $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$, и на утечку через боковую пвх. провода вследствие несовершенства изоляции, равную $Av\Delta x\Delta t$ (здесь $A$ – коэф-т утечки). Приравнивая эти врж-ия и сокращая на $\Delta x\Delta t$, получим
$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0. \tag{3.6}$$
Ур-ия (3.5) и (3.6) принято называть телеграфными ур-ми.

Из системы ур-й (3.5) и (3.6) можно получить ур-ие, содержащее только искомую фк-ю $i(x, t)$, и ур-ие, содержащее только искомую фк. $v(x, t)$. Продиф-уем члены ур-я (3.6) по $x$, а члены ур-я (3.5) продиф-уем по $t$ и умн-им их на $C$. Производя вычитание, получим:
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0,$$ где $R$, $L$, $C$ – акт-ое (омч.), инд., емк. сопр-ие.

Подс-я в последнее ур. врж-ие $\frac{\partial v}{\partial x}$ из ур-я (3.5), получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\left(-iR + L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

или
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi. \qquad (3.7)$$

Анч-но получим ур-ие для опр-ия $v(x, t)$: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv.$ (3.8)

Если можно пренебрегать утечкой через изоляцию ($A = 0$) и сопр-ем ($R = 0$), то ур-ия (3.7) и (3.8) переходят в волновые ур-ия: $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, (3.9)

где $a^2 = \frac{1}{CL}$. Исходя из физических усл-й, формируются нач. и граничные усл-я задачи.

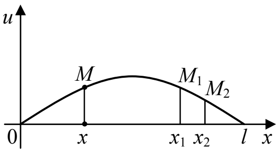


Рис. 3

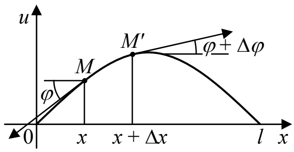


Рис. 4

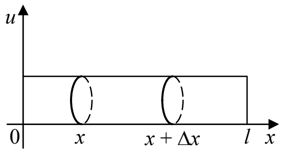


Рис. 5

**4°. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье**. Метод Фурье (или метод разделения пер-ых) яв-ся типичным для р-ия многих задач мтч. физики. Сформулируем

**з1**. Пусть требуется найти р-ие ур-ия $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, (4.1)

удщ-е краевым усл-ям: $u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0.$ (4.2)

$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x).$ (4.3)

Р. Част. р-ие ур-я (4.1), удщ-е граничным усл-ям (4.2), будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \qquad (4.4)$$

Подс-я в ур. (4.1), получим $X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$. В левой части этого рав. стоит фк-я, к-ая не зв-т от $x$, справа – фк., не звщ-я от $t$. Тогда рав-во можно приравнять пст. числу $-\lambda$ ($\lambda > 0$), т.е. $\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$. Из этих рав-в получаем два ур-я $X'' + \lambda X = 0,$ (4.5)

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \qquad (4.6)$$

Общ. р-ия этих ур-й будут (см. 4°: 11.2): $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x,$ (4.7)

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t, \qquad (4.8)$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ – прзвл. пст-ые.

Подс-я врж-ия $X(x)$ и $T(t)$ в рав-во (4.4), получим:

$$u(x, t) = (A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x)(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t).$$

Подберем теперь пст-ые $A$ и $B$ так, чтобы уд-ись усл-я (4.2) Т.к. $T(t) \neq 0$ (в противном случае будет $u(x, t) \equiv 0$, что противоречит поставленному усл-ю), то фк. $X(x)$ должна уд-ять усл-ям (4.2), т.е. $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Подс-я зн-я $x = 0$ и $x = l$ в рав-во (4.7), на основании (4.2) получаем

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,\ 0 = A\cos\sqrt{\lambda}\,l + B\sin\sqrt{\lambda}\,l.$$

Из первого ур. находим $A = 0$. Из второго получаем $B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. $B \neq 0$, иначе было бы $X \equiv 0$ и $u \equiv 0$, что противоречит усл-ю. Сдт-но, должно быть $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (4.9)$$

(здесь не берем зн-ие $n = 0$, тогда было бы $X \equiv 0$ и $u \equiv 0$). Итак, получили

$$X = B\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (4.10)$$

Найденные зн. $\lambda$ наз. собственными (сбт.) зн-ми для данной краевой задачи. Ствщ-ие им фк-и наз. сбт-ми фк.

**зм1**. Если бы мы взяли вместо $-\lambda$ врж-ие $+\lambda = k^2$, то ур.(4.5) приняло бы вид $X'' - k^2X = 0$. Общ. р-ие этого ур.: $X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$. Отличное от нуля р-ие в такой форме не может уд-ять граничным усл. (4.2).

Зная $\sqrt{\lambda}$ и пользуясь рав-ом (4.8), можем написать:

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\sin\frac{an\pi}{l}t \ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (4.11)$$

Для каждого зн. $n$, сдт-но, для каждого $\lambda$ врж-ия (4.10) и (4.11) подс-ем в рав-во (4.4) и получим р-ие ур-ия (4.1), удщ-е граничным усл. (4.2), в виде

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right). \qquad (4.12)$$

В (4.12) для каждого зн. $n$ мы можем брать свои пст-ые $C$, $D$ и поэтому пишем $C_n$, $D_n$ (пст. $B$ включена в $C_n$ и $D_n$). Т.к. ур-ие (4.1) лин. и одн., то сумма р-й также яв-ся р-ем, тогда фк., представленная рядом $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ или

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad (4.13)$$

также будет р-ем дифн. ур-я (4.1), к-ое будет уд-ять граничным усл-м (4.2).

Р-ие (4.13) должно еще уд-ять нач. усл-ям (4.3). Этого можно добиться путем подбора $C_n$ и $D_n$.

Подс-я в рав-во (4.13) $t = 0$, получим $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}t. \qquad (4.14)$$

Если фк. $\varphi(x)$ такова, что в инр-е $(0, l)$ ее можно разл-ть в ряд Фурье (см. 4°: 12.3), то усл. (4.14) будет выполняться, если положить $$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x. \qquad (4.15)$$

Далее, диф-уем члены рав-ва (4.13) по $t$ и подс-ем $t = 0$. Из усл-я (4.3) получаем рав-во $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$ и опр-ем коэф-ы Фурье этого ряда $D_n\frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$ или

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x. \qquad (4.16)$$

Итак, ряд (4.13), где коэф-ы $C_n$ и $D_n$ опр-ны по фм-ам (4.15) и (4.16), если он допускает двукратное почленное дифв-ие, представляет фк-ю $u(x, t)$, к-ая яв-ся р-ем ур. (4.1) и уд-ет граничным и нач. усл-ям (4.2) и (4.3).

Обз-им $C_n$ и $D_n$ через $a_k$ и $b_k$ и фм-ы (4.13), (4.15), (4,16) перепишем в привычном виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} \cdot b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (4.17)$$

где $$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x;\ b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \qquad (4.18)$$

Если ввести обз-ия: $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\sin\varphi_k = a_k/A_k$, $\cos\varphi_k = b_k/A_k$, то р-ие (4.17) можно записать в виде $$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\left(\frac{k\pi at}{l}+\varphi_k\right)\right). \qquad (4.17а)$$

Каждый член ряда (4.17а) представляет собой так назм. стоячую волну, при к-ой тч-и струны совершают гармонические клбт. двж-ия с амплитудой $A_k\sin(k\pi x/l)$, фазой $\varphi_k$ и частотой $\omega_k = k\pi a/l$.

В случае, когда расв-ся вынужденные клб. одн-ой струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $f(x, t)$, эта задача приводится к р-ю ур-я

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (4.18а)$$

при граничных усл-ях $\quad u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0 \qquad (4.19)$

и нач. усл-ях $\quad u(x, 0) = \varphi(x),\ u'_t(x, 0) = \psi(x). \qquad (4.20)$

Р-ие задачи (4.18)-(4.20) врж-ся в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (4.21)$$

где коэф-ы $a_k$, $b_k$ опр-ся по фм-ам (4.18), а $T_k(t)=\dfrac{2}{ak\pi}\displaystyle\int_0^l\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \qquad (4.22)$

**п8**. Струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = 2$, имеет в нач. момент вр. форму парб-ы $u = 2x - x^2$. Опр-ть форму струны для любого момента вр. $t$, если нач. скр-ти тч-к струны отсутствует.

Р. Имеем $l = 2$, $\varphi(x) = 2x - x^2$, $\psi(x) = 0$. Найдем по фм-ам (4.18) $a_k$ и $b_k$ для фм-ы (4.17), опрщ-го р-ие (4.1) ур-я клб-й струны:

$$a_k=\frac{2}{2}\int_0^2\left(2x-x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=2x-x^2,\ \mathrm{d}u=(2-2x)\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}v=\sin\dfrac{k\pi x}{2}\mathrm{d}x,\ v=-\dfrac{2}{k\pi}\cos\dfrac{k\pi x}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2}{k\pi}(2x-x^2)\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2+$$

$$+\frac{4}{k\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=1-x,\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}v=\cos\dfrac{k\pi x}{2}\mathrm{d}x,\ v=\dfrac{2}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{8}{k^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{8}{k^2\pi^2}\times$$

$$\times\int_0^2\sin\frac{k\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{16}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2=\frac{16}{k^3\pi^3}(1-(-1)^k);\ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^2 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=0.$$ Подс-ив зн-ия $a_k$ и $b_k$ в ряд (4.17), получим $u(x,t)=\dfrac{16}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cos\frac{k\pi at}{2}\sin\frac{k\pi x}{2}$. Но при $k = 2n$ имеем $1 - (-1)^k = 0$, а при $k = 2n + 1$ $1 - (-1)^k = 2$, поэтому окончательно находим $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\times$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

**п9**. Для $0 \le x \le l$ и $t \ge 0$ р-ть ур-ие $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{a^2}{l^2}\sin\dfrac{\pi at}{l}$ при нулевых нач. и гранич. усл-ях $u(x, 0) = u'_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Р. Здесь имеем задачу (4.18)-(4.20), для к-ой $f(x,t)=\dfrac{a^2}{l^2}\sin\dfrac{\pi at}{l}$; $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. По фм-ам (4.18) и (4.22) находим коэф-ы $a_k$, $b_k$ и $T_k(t)$ ряда (4.21):

$$a_k=\frac{a}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=0;\ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l 0\cdot\sin l\,\mathrm{d}x=0;\ T_k(t)=\frac{2}{k\pi a}\int_0^t\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^l\frac{a^2}{l^2}\times$$

$\times \sin\frac{\pi a\tau}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2a}{k\pi l^2}\left(\frac{-l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l \int_0^t \sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{\pi a\tau}{l}\,d\tau = \frac{a\left(1-(-1)^k\right)}{k^2\pi^2 l}\int_0^t\left(\cos\left(\frac{k\pi at}{l}-\right.\right.$

$\left.\left.-\frac{\pi a(k+1)}{l}\tau\right)-\cos\left(\frac{k\pi at}{l}-\frac{\pi a(k-1)}{l}\tau\right)\right)d\tau = \frac{a\left(1-(-1)^k\right)}{k^2\pi^2 l}\left(\frac{-l}{\pi a(k+1)}\sin\left(\frac{k\pi at}{l}-\frac{\pi a(k+1)}{l}\tau\right)+\right.$

$\left.+\frac{l}{\pi a(k-1)}\sin\left(\frac{k\pi at}{l}-\frac{\pi a(k-1)}{l}\tau\right)\right)\Bigg|_0^t = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^3}\left(\frac{1}{k+1}\left(\sin\frac{\pi at}{l}+\sin\frac{k\pi at}{l}\right)+\frac{1}{k-1}\left(\sin\frac{\pi at}{l}-\right.\right.$

$\left.\left.-\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\right) = \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k^2\pi^3}\left(\frac{1}{k+1}\sin\frac{\pi a(k+1)t}{2l}\cos\frac{\pi a(1-k)t}{2l}-\frac{1}{k-1}\cos\frac{\pi a(k+1)t}{2l}\sin\frac{\pi a(k-1)t}{2l}\right)$

$\left(\text{при } k=1 \text{ имеем } T_1(t)=\frac{2}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\right)\right)$. Подс-ив зн-ия $a_k$, $b_k$ и $T_k(t)$ в ряд (4.21), получим искомое р-ие: $u(x,\,t) = \frac{2}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}\times$

$\times\left((2n+1)\sin\frac{\pi at}{l}-\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

**5°. Решение задачи Коши для уравнения колебаний струны методом Даламбера (методом характеристик)**. Задача Коши для ур-я свободных клб-й беск. струны ставится так:

**з2**. Найти р-ие $u(x, t)$ ($|x| < \infty$, $t > 0$) ур-ия $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ (5.1)

(где $a^2 = T/\rho$; $T$ – натяжение в тч-х струны; $\rho$ – лин. плотность струны; $u(x, t)$ – отк-ие тч-и $x$ струны в момент вр-и $t$), удщ-е нач. усл-ям $u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$. (5.2)

Одним из широко используемых способов р-ия задачи Коши яв-ся метод Даламбера, суть к-го состоит в сд-ем. Сначала док-ся, что общ. р-ем ур-ия (5.1) будет фк-я $u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$, где $f_1$, $f_2$ – прзвл-ые дважды дифм. фк-и. Они опр-ся по заданным нач. усл-ям (5.2). Искомое р-ие

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds. \qquad (5.3)$$

При каждом фксн. зн-и $t$ грф-к фк-и $u = u(x, t)$ на пл-ти $xOy$ врж-ет форму струны в момент вр. $t$.

**п10**. Найти р-ие $u(x, t)$ ур-я $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$ при нач. усл-ях $u(x, 0) = \cos 2x$, $u'_t(x, 0) = \sin x$.

Здесь имеем $\varphi(x) = \cos 2x$ и $\psi(x) = \sin x$, тогда по фм-е (5.3) получим: $u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos 2(x + at) +$ $+ \cos 2(x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin s\,ds = \cos 2x\cos 2at + \frac{1}{a}\sin x\sin at$.

**п11**. Найти форму струны, опрм-ой ур-ем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент вр-и $t = \pi/3$, если в нач. момент вр. $t = 0$ струна занимала пж-ие $\varphi(x) = \cos x$, а скр-ть тч-к струны $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 2$.

Р. Т.к. $a = 1$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = 2$, то по фм-е (5.3) найдем $u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x + t) + \cos(x - t)) +$

$+\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} 2\ \mathrm{d}s = \cos x\cos t + 2t$. Если $t = \pi/3$, то $u(x, \pi/3) = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{2\pi}{3}$ – искомая форма струны.

**6°. Уравнение теплопроводности в стержне и ее решение методом Фурье**. Рас-им одн. стержень длины $l$. Будем предполагать, что боковая пвх. теплонепроницаема и во всех тч. поперечного сечения стержня темп-ра одинакова. Изучим распространение тепла в стержне.

Расположим ось $Ox$ так, что один конец стержня совпадает с тч. $x = 0$, а другой – с тч. $x = l$ (рис. 5). Пусть $u(x, t)$ – темп-ра в сечении с абсциссой $x$ в момент $t$. Опытным путем установлено, что скр-ть распространения тепла (т.е. кол-во тепла), протекающего через сечение с абсциссой $x$ за ед-у вр-и, опр-ся фм-ой
$$q = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S, \tag{6.1}$$
где $S$ – пщ-дь сечения расв. стержня, $k$ – коэф-т теппр-ти.

Рас-им эл-т стержня, заключенный между сечениями с абсциссами $x$ и $x + \Delta x$. Кол-во тепла, прошедшего через сечение с абсциссой $x$ за время $\Delta t$, равно
$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t, \tag{6.2}$$
анч-но для сечения с абсциссой $x + \Delta x$:
$$\Delta Q_2 = -k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t, \tag{6.3}$$

Приток тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в эл-т стержня за время $\Delta t$ будет равняться:
$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t\right] \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t, \tag{6.4}$$
где применили теорему Лагранжа. Этот приток тепла за время $\Delta t$ был затрачен на повышение темп-ры эл-та стержня на вел-у $\Delta u$: $\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\Delta u$ или
$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \tag{6.5}$$
где $c$ – теплоемкость вещества стержня, $\rho$ – плотность вещества стержня ($\rho\Delta xS$ – масса эл-та стержня).

Приравнивая врж-ия (6.4) и (6.5), получим $kc\rho\Delta xS\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta t = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta xS\Delta t$ или $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{k}{c\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Обз-ив $k/c\rho = a^2$, окончательно получим:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ или } u_t = a^2u_{xx}\ (0 < x < l,\ t > 0). \tag{6.6}$$
Это и есть ур-ие теппр-ти (ур. распространения тепла) в одн. стержне.

Чтобы р-ие ур-я (6.6) было вполне опр-но, фк. $u(x, t)$ должна уд-ть краевым усл. (краевые усл. могут быть различные): 1*. Концы стержня поддерживаются при заданной темп.: нач. усл-ие
$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{6.7}$$
граничные усл.
$$u(0, t) = \psi_1(t), \tag{6.8}$$
$$u(l, t) = \psi_2(t). \tag{6.9}$$

2*. На концы стержня подается извне заданный тепловой поток: рас-им ур. (6.6) для граничных эл. $(0, \Delta x)$ и $(l - \Delta x, l)$. Обз-им через $q_1(t)$ кол-во тепла, поступающего в ед-у вр-и через сечение $x = 0$. Тогда ур-ие теплового баланса для эл. $(0, \Delta x)$ запишется в виде $q_1(t) + k(\Delta x)u_x(\Delta x, t)S\Delta t = c\rho Su_t\Delta t\Delta x$. Сократив на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x$, $\Delta t \to 0$, получим
$$u_x(0, t) = -\frac{q_1(t)}{k(0)S}. \tag{6.10}$$

Анч-но получаем
$$u_x(l, t) = \frac{q_2(t)}{k(l)S}, \tag{6.11}$$
где $q_2(t)$ – поток тепла через сечение $x = l$.

2*а. Концы стержня теплоизолированы (тепизл.): $q_1(t) = q_2(t) = 0$, сдт-но,
$$u_x(0, t) = 0,\ u_x(l, t) = 0. \tag{6.12}$$

3*. На концах стержня происходит теплообмен со средой, темп-ра к-ой задана: его можно расв-ть как частный случай случая 2* при $q_1(t) = \alpha_1[\omega_1(t) - u(0, t)]S$, $q_2(t) = \alpha_2[\omega_2(t) - u(l, t)]S$, где $\alpha_1$, $\alpha_2$ – коэф-ты теплообмена, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – коэф-ы темп-ры среды концов стержня. Тогда из (6.10), (6.11) получим:
$$u_x(0, t) = h_1[u(0, t) - \omega_1(t)], \tag{6.13}$$

$$u_x(l, t) = -h_2[u(l, t) - \omega_2(t)],\qquad (6.14)$$

где $h_1 = \dfrac{\alpha_1}{k(0)}$, $h_2 = \dfrac{\alpha_2}{k(l)}$.

Итак, формулируем постановку задачи. В обл-и $0 \le x \le l$, $0 \le t \le \infty$ найти непр. фк-ю $u(x, t)$ так, чтобы она уд-ла ур-ю (6.6), нач. усл-ям (6.7) и граничным усл. одного из типов (6.8), (6.9); (6.10), (6.11); (6.12) или (6.13), (6.14).

**з3**. Пусть требуется найти р-ие ур-ия (парбч. типа) $u_t = a^2u_{xx}$ $(0 < x < l,\ t > 0)$ (6.15)

при нач. усл-ях $u(x, 0) = \varphi(x)$, (6.16)

граничных усл. $u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0$. (6.17)

Р. Ищем част. р-ия ур. (6.15), удщ-ие гранич. усл-ям (6.17) в виде [см. (4.4)]:

$$u(x, t) = X(x)T(t).\qquad (6.18)$$

Подн-ка в (6.15) и разложение пер-ых (метод Фурье) дают $\dfrac{T'}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow$

$$T' + a^2\lambda T = 0,\qquad (6.19)$$

$$X'' + \lambda X = 0.\qquad (6.20)$$

Из гранич. усл-й (6.17) имеем $X(0) = 0,\ X(l) = 0.$ (6.21)

Р-ие задачи (6.20), (6.21) мы знаем [см. (4.9), (4.10)]: $\lambda = n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$

А р-ие ур. (6.19) при $\lambda = \lambda_n$ есть $T_n(t) = C_n\, e^{-\left(\frac{na\pi}{l}\right)^2 t}$, где $C_n$ – прзвл. пст.

По фм-е (6.18) получим част. р-ия: $u_n(x, t) = C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. (6.22)

Общ. р-ие ищем в виде ряда $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\ e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. (6.23)

Подн-ка (6.23) в (6.16) дает усл-ие $u(x, 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

Последнее будет уд-но, если $C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,dx.$ (6.24)

Итак, р-ие дается рядом (6.23), где $C_n$ заданы стн-ем (6.24).

**п12**. Найти р-ие ур-я теппр-ти $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных усл. $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ и нач-ом усл. $u(x, 0) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x < \dfrac{l}{2}, \\ l - x, \text{ если } \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

Р. Р-ие опр-тся фм-ой $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\ e^{-\frac{a^2\pi^2n^2t}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, где $C_n = \dfrac{2}{l}\left[\displaystyle\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{l/2}^{l}(l - x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$. Выч-им $\displaystyle\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$, $\displaystyle\int_{l/2}^{l}(l - x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$. Складывая вычн-ые инт., найдем $C_n = \dfrac{4l}{\pi^2}\ \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$. Т.к. $\sin\pi n = 0$, то и $C_{2n} = 0$. Далее имеем: $C_{2n+1} = \dfrac{4l}{\pi^2}\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$. Р-ие задачи запишется так:

$$u(x,\,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\,e^{-\frac{a^2\pi^2(2n-1)^2}{l^2}t}\,\sin\frac{\pi(2n-1)}{l}\,x.$$

**7°. Уравнение распространения тепла в пространстве и его решение в случае шара**. Рас-им процесс распространения тепла в тмр-ом пр. Пусть $u(x, y, z, t)$ – темп-ра в тч. с крд-ми $(x, y, z)$ в момент $t$. Опытным путем установлено, что скр-ть прохождения тепла через пщ-ку $\Delta S$, т.е. кол-во тепла, проходящего за ед-у вр-и, опр-ся фм-ой (анч-ой фм-е (6.1))

$$\Delta Q = -\,k\,\frac{\partial u}{\partial n}\,\Delta S, \tag{7.1}$$

где $k$ – коэф-т теппр-ти расв. среды (одн. и изотропной), $n$ – едч. вк-р, нпвн-ый по норм-и к пщ-ке $\Delta S$ в нпв-и двж-ия тепла. На основании 5°: 9.1 можем писать $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + {}$ $+ \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – нпвщ. косинусы вк-а $n$, или $\frac{\partial u}{\partial n} = n\,\mathrm{grad}\,u$ (где $\mathrm{grad}\,u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + {}$ $+ \frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$, $n = \cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$). Подс-я врж-ие $\frac{\partial u}{\partial n}$ в фм-у (7.1), получаем $\Delta Q =$ $= -\,kn\,\mathrm{grad}\,u\Delta S$. Кол-во тепла, протекающего за вр. $\Delta t$ через пщ-ку $\Delta S$, равно $\Delta Q\Delta t = -\,kn\,\mathrm{grad}\,u\Delta t\Delta S$.

В расв. среде выделим малый объем $V$, огрн-ый пвх-ю $S$. Кол-во тепла, протекающего через пвх-ть $S$, будет равно

$$\Delta Q = -\,\Delta t\iint\limits_S kn\,\mathrm{grad}\,u\;\mathrm{d}S. \tag{7.2}$$

Фм. (7.2) дает кол-во тепла, поступающего в объем $V$ (или уходящего из объема $V$) за вр. $\Delta t$. Кол-во тепла, поступающего в объем $V$, идет на повышение темп-ы тела.

Рас-им элр. объем $\Delta v$. Пусть за вр. $\Delta t$ его темп. поднялась на $\Delta u$. Тогда кол-во тепла, затраченное на это повышение темп-ры эл-та $\Delta v$ будет равно $c\Delta v\rho\Delta u \approx c\Delta v\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t$, где $c$ – теплоемкость вещества, $\rho$ – плотность. Общ. кол-во тепла, затраченное на повышение темп-ры в объеме $V$ за вр. $\Delta t$, равно $\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}v$. Но это есть тепло, поступившее в объем $V$ за вр. $\Delta t$, к-ое опр-но фм-ой (7.2). Т.о. имеет место рав-во $-\,\Delta t\iint\limits_S kn\,\mathrm{grad}\,u\;\mathrm{d}S = \Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}v$. Сокращая на $\Delta t$, получим:

$$-\iint\limits_S kn\,\mathrm{grad}\,u\;\mathrm{d}S = \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}v. \tag{7.3}$$

Пвх-ный инт. в левой части этого рав. прб-ем по фм-е Остроградского (см. 6°: 10.3), полагая $F = k\,\mathrm{grad}\,u$: $\iint\limits_S\big(k\,\mathrm{grad}\,u\big)n\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \mathrm{div}\big(k\,\mathrm{grad}\,u\big)\,\mathrm{d}v$. Заменяя двн-й инт. в левой части рав-ва (7.3) трн. инт-ом, получим $-\iiint\limits_V \mathrm{div}\big(k\,\mathrm{grad}\,u\big)\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}v$ или

$$\iiint\limits_V\left[\mathrm{div}\big(k\,\mathrm{grad}\,u\big) + c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]\mathrm{d}v = 0. \tag{7.4}$$

Применяя теорему о ср-ем к трн. инт-у (см. 5°: 10.1), получим:

$$\left[\mathrm{div}\big(k\,\mathrm{grad}\,u\big) + c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\,y=y_1,\,z=z_1} = 0, \tag{7.5}$$

где тч. $P(x_1, y_1, z_1)$ – нек-я тч. объема $V$.

Т.к. мы можем выделить прзвл. объем $V$ в тмр. пр-ве, где происходит распространение тепла, и т.к. предполагаем, что подынт. фк-я в рав-ве (7.4) непр-на, то рав-во (7.5) будет выполняться в каждой тч. пр-ва, т.е. $$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u). \qquad (7.6)$$

Но $k\operatorname{grad}u = k\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ и $\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ (см. 6°: 10.3). Подс-я в ур. (7.6), получим

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \qquad (7.7)$$

Если $k$ – пст-ое, то $\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) = k\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, и ур. (7.6) тогда дает:

$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ или, полагая $-\frac{k}{c\rho} = a^2$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ или } u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \qquad (7.8)$$

Кратко ур. (7.8) записывают так: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Ур. (7.8) есть ур-ие теппр-ти в пр-ве, к-му уд-ет фк. $u = u(x, y, z, t)$ (см. 1°). Чтобы найти едн. р-ие ур-я (7.8), нужно задать краевые усл-я:

нач. усл-ие $$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \qquad (7.9)$$
гранич. усл-ие $$u(M, t) = \psi(M, t) \qquad (7.10)$$
(возможны и др. гранич. усл-ия).

Если искомая фк. $u(x, y, z, t)$ не зв-т от $z$, то получаем ур-ие $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (7.11)$$
распространения тепла на пл-ти. Если расв-ся распространение тепла в плоской обл-и $D$ с границей $C$, то краевые усл-я анч-но (7.9) и (7.10) формулируются так:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ u(M, t) = \psi(M, t),$$
где $\varphi$ и $\psi$ – заданные фк-и, $M$ – тч. границы $C$.

Если фк. $u$ не зв-т от $z$ и $y$, то получим ур-ие $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ распространения тепла в стержне (см. 6°).

Ур. (7.8) р-им для одн. шара, сформулировав задачу в сд. виде.

**з4**. Дан одн. шар радиуса $R$ с центром в нач. крд-т. Известно, что начн. темп-ра любой тч-и шара зв-т только от рст-ия $r$ этой тч-и от центра шара. Пвх-ть шара поддерживается при нулевой темп-ре. Найти темп-у любой тч. внутри сферы в момент вр-и $t > 0$.

Р. На основе сим-и заключаем, что темп-ра шара для любого момента вр-и $t > 0$ будет фк-ей $r$, т.е. $$u = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = u(r) \qquad (7.12)$$
для теппр-ти в пр-ве $$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \qquad (7.13)$$

Из (7.12) получим $u_x = u_r r_x = u_r \cdot \frac{x}{r}$, $u_{xx} = u_{rr} \cdot \frac{x^2}{r^2} + u_r \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3}$.

Находим анч-но $u_{yy}$ и $u_{zz}$, перепишем ур. (7.13) в виде $u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$. (7.14)

Вводя фк-ю $\sigma(r, t) = ru(r, t)$, получим из (7.14) $\sigma_t = a^2\sigma_{rr}$, $0 < r < R$. (7.15)

Гранич. усл-ия для $\sigma(r, t)$ имеет вид $\sigma(0, t) = 0$, $\sigma(R, t) = Ru(R, t) = 0$. (7.16)

Нач. усл-ия $$\sigma(r, 0) = ru(r, 0) = r\varphi(r), \qquad (7.17)$$
где $\varphi(r)$ – начн. темп-ра шара. Р-ие задачи (7.15)-(7.17) получено в з3: $\sigma(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t} \times$

$\times \sin\dfrac{n\pi r}{R}$, где $C_n = \dfrac{2}{R}\displaystyle\int_0^R r\varphi(r)\sin\dfrac{n\pi r}{R}\,\mathrm{d}r$. Искомая темп-ра $u(r,t) = \dfrac{\sigma(r,t)}{r}$.

**8°. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле и ее решение для круга**. Рас-им ур. (7.8), когда $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t = 0$. Распределение (рсп.) тепла в теле наз. стационарным (стацн., если темп-ра $u$ зв-т от пж-ия тч-и $(x, y, z)$, но не зв-т от вр-и $t$, т.е. $u = u(x, y, z)$, к-ая уд-ет ур-ю

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ или } \Delta u = 0 \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{8.1}$$

Фк. $u(x, y, z)$ наз. гармонической (гармч.) в обл. $\Omega$, если она имеет непр. част. прв-ые второго порядка на $\Omega$ и уд-ет на $\Omega$ ур-ю (8.1).

Ур. (8.1) наз. ур-ем Лапласа, где $\Delta u$ – лапласиан, врж-ие к-го в дек., цлнч. и сфч. крд-ах ств-но имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{8.1а}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{8.1б}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{8.1в}$$

Ур-ие Лапласа часто встречаются в приложениях. Этому ур. уд-ет стацн. рсп-ие темп-ры в теле при $u_t = 0$, как мы уже видели. Ур-ю Лапласа уд-ет потенциал стацн-го элкч. поля в обл-и, где отсутствуют заряды, и потенциал поля тяготения в обл-и, где отсутствуют массы и т.д.

Ур-ие Лапласа имеет беск. мн-во р-й. Конкретное р-ие опр-ся заданием краевых усл-й. Для ур-ия Лапласа ставится сд. краевая задача.

**з5**. Найти фк-ю $u = u(x, y, z)$, гармч-ю внутри обл-и, огрн-ой замкнутой пвх-ю $\Gamma$, и удщ-ю граничн. усл-ю $H\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = u|_{\Gamma} - \tilde{u}$, где $H$ и $\tilde{u}$ – фк-и, заданные на границе $\Gamma$. В случае задачи о стацн. рсп-и темп-ры $H = -\dfrac{k}{h}$, $\tilde{u}$ – темп-ра окружающей среды на границе тела, $k$ – коэф-т теппр-ти.

Важный част. случай краевой задачи получается при $H = 0$, ствщ-й случаю $h = \infty$, т.е. зн-ю темп-ры тела на границе $\Gamma$: $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$. Эта краевая задача наз. задачей Дирихле.

Задачи Дирихле в пр-ве ставятся так.

**з6**. Найти фк-ю $u = u(x, y, z)$, удщ-ю ур-ю Лапласа внутри обл-и, огрн-ой замкнутой пвх-ю $\Gamma$, и принимающую на границе $\Gamma$ заданные зн-ия: $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$. (8.2)

Если фк. $u$ зв-т только от двух пер. (дек-х или полярных крд-т тч-и), то ур-ие Лапласа ств-но имеет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$.

Задача Дирихле на пл-ти состоит в сд-ем.

**з7**. Найти фк-ю $u = u(x, y)$, удщ-ю ур-ю Лапласа внутри обл-и, огрн-ой замкнутой крв. $\Gamma$, и принимающую на границе $\Gamma$ заданные зн-ия $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$: $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$.

Эта задача имеет едн. р-ие. К ней приводят физич. задачи двух типов: 1) при рас-и стацн-го рсп-ия тепла на тонкой одн. пластинке, прл-ой пл-ти $Oxy$, нижняя и верхняя пвх-ти к-ой тепизл-ны. Край пластинки поддерживается при опр. темп-ре $\tilde{u}$; 2) при стацн. рсп-и темп-ры в беск. одн. цлн-ре, у к-го образующие прл-ны оси $Oz$, нпвщ-я $\Gamma$ лежит в пл-ти $Oxy$. Темп-ра $u$ остается пст-ой на любой пм., проходящей внутри цлн-ра прл-но оси $Oz$, поэтому $u = u(x, y)$. Боковая пвх. цлн-ра поддерживается при опр. темп-ре $\tilde{u}$.

Сформулируем и р-им задачу Дирихле для круга.

**з8**. Найти фк-ю, гармч-ю внутри круга и принимающую на его границе заданные зн-ия.

Р. Введем полярные крд. $r$ и $\varphi$, полюс поместим в центре данного круга, радиус к-го обз-им через $R$. Дтр-ый оператор Лапласа врж-ем в полярных крд.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{8.3}$$

Найдем фк-ю $u = u(r, \varphi)$, удщ-ю ур-ю (8.3) при $r < R$ и принимающую на границе $\Gamma$ круга радиуса $R$ заданные зн-ия $u = f(\varphi)$: $\quad u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi)$. (8.4)

Р-ие ур-я (8.3) ищем методом Фурье в виде пзв-ия двух фк., т.е.

$$u(r, \varphi) = U(r)\Phi(\varphi). \tag{8.5}$$

Подс-я эту фк. в ур-ие (8.3), получим $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\Phi+\frac{U}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=0$ или $\frac{r}{U}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)=$ $=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}$. Поскольку фк. (8.5) – р-ие ур. (8.3) для данной обл-и ($0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$), тогда обе части последнего рав. равна пст. $\lambda$, т.е. $\frac{r}{U}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda \Rightarrow$

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}+\frac{r}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=\lambda; \tag{8.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\Phi=0. \tag{8.7}$$

Ур. (8.7) имеет р-ие $\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$, где $A$, $B$ – прзвл. пст-ые. Причем $\Phi(\varphi +$ $+ 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. фк. $\Phi(\varphi)$ – прдч-я с прд-ом $2\pi$. Последнее возможно, когда $\sqrt{\lambda} = n$, $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Итак, ур. (8.7) имеет р-ия $\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Ур. (8.6) при $\lambda = n^2$ принимает вид $r^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}-n^2U=0$. Р-ие этого ур. находим с помощью подн-ки $U = r^\alpha$. Поскольку $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=\alpha r^{\alpha-1}$, $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}=\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$, то имеем

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+r\alpha r^{\alpha-1}-n^2r^\alpha=0,\ \alpha^2-n^2=0,\ \alpha=\pm n.$$

В случае $\alpha = -n$ получаем фк-ю $U(r) = r^{-n}$, к-ая обращается в беск. при $r = 0$, поэтому р-ем задачи Дирихле быть не может (ищется р-ие непр. и конечное в круге радиуса $R$).

При $\alpha = n$ получаем $U_n(r) = r^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Подс-я врж-я для $\Phi_n(\varphi)$ и $U_n(r)$ в фм-у (8.5), находим част. р-ия $u_n(r, \varphi) = (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)r^n$ ур-я (8.3). Р-ем этого ур-я яв-ся также фк. $u(r, \varphi) =$ $=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)r^n$. Введя обз-ия $A_0=\frac{a_0}{2}$, $A_n = a_n$, $B_n = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), запишем это р-ие так:

$$u(r, \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)r^n. \tag{8.8}$$

Коэф-ы $a_n$, $b_n$ опр-им из усл-я (8.4): $f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)R^n$, т.е. $f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nR^n\cos n\varphi+b_nR^n\sin n\varphi\right)$. Это рав-во есть разл-ие фк-и $f(\varphi)$ в ряд Фурье. Как известно, $R^na_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$, $R^nb_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$, откуда получим

$$a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\quad b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t. \tag{8.9}$$

Подс-я врж-ия (8.9) в фм-у (8.8), получим искомое р-ие задачи Дирихле для круга:

$$u(r,\,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right]f(t)\mathrm{d}t. \tag{8.10}$$

Выч-им сумму в кв. скобке. По фм-е Эйлера находим $2\cos n(t-\varphi) = e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}$, тогда $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n 2\cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}\right] = 1 +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right]^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right]^n$.

Комп. члены каждого ряда образуют геомч. прогрессии, знаменатель к-ых по модулю меньше ед-цы. Дсв-но, $\left|\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right| = \left|\frac{r}{R}\right|\left|e^{i(t-\varphi)}\right| < 1$, $\left|\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right| = \left|\frac{r}{R}\right|\left|e^{-i(t-\varphi)}\right| < 1$. Тогда, с учетом $S = \frac{a}{1-q}$, получим $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right]^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right]^n = 1 + \dfrac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}} + \dfrac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}} =$
$= \dfrac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}$. Итак,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \tag{8.11}$$

Подс-я врж-ие (8.11) в фм-у (8.10), находим

$$u(r,\,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}f(t)\mathrm{d}t. \tag{8.12}$$

Фк. (8.12) дает р-ие задачи Дирихле для круга. Инт. (8.12) наз. инт-ом Пуассона.

**п13**. На окр-ти круга $x^2 + y^2 \le R^2$ темп-ра рсп-на по закону: $u\big|_{x^2+y^2=R^2} = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y$. Найти рсп-ие темп-ры внутри круга, предполагая, что оно стацн. (задача Дирихле).

Р. Гранич. усл-ие напишем в виде: $u(R,\,\varphi) = R^2\cos^2\varphi - R^2\sin^2\varphi + \frac{1}{2}R\sin\varphi$.

Ур-ие Лапласа на окр-ти радиуса $R$ имеет разл-ие в ряд Фурье вида:

$$u(R,\,\varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}R^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right), \tag{8.13}$$

то внутри круга имеем $u(r,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}r^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)$. При этом

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\; A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi,\; B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

Из гранич. усл-я получим: $u(R,\,\varphi) = R^2\cos2\varphi + \frac{1}{2}R\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(R^nA_n\cos n\varphi + R^nB_n\sin n\varphi\right)$.

Откуда, сравнивая коэф-ы при $\cos2\varphi$ и $\sin\varphi$, получим $R^2 = R^2A_2$, $\frac{1}{2}R = R\cdot B_1$. Сдт-но, $A_2 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$. Остальные коэф. равны нулю. Подс-я найденные коэф. в (8.13), получим р-ие задачи:

$u(r,\,\varphi) = r^2\cos2\varphi + \frac{1}{2}r\sin\varphi = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{1}{2}r\sin\varphi = x^2 - y^2 + \frac{1}{2y}$, т.е. $u(x,\,y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y$.

## 12.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### 12.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**Вопросы для самопроверки**

1. Что наз. числовым рядом и его общ. членом?
2. Что наз. сум-й ряда? Дать опр-ие схщ-ся и рсхщ-ся рядов. Привести примеры.
3. В чем состоит нх-ый признак сх-ти ряда? Привести примеры.
4. Сформулируйте признак сравнения и приведите примеры.
5. В чем состоит суть признака Даламбера? Д-ть его.
6. Сформулируйте и док-те признак Коши. Приведите пример.
7. Сформулируйте и док-те интн. признак. Д-те сх-ть ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, $p > 1$.
9. Какой ряд наз. знакопер-ым? Что такое абс-я и усл-я сх-ти ряда?
10. Какой ряд наз. знакочер-мся? В чем заключается признак Лейбница? Д-ть его.
11. Привести общий дт. признак сх-ти ряда с произвольными членами.
12. Что наз. остатком ряда? Привести примеры.

### 12.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**Вопросы для самопроверки**

1. Какой ряд наз. фнц-ым? Что наз. обл-ю сх-ти фнц. ряда?
2. Какой фнц. ряд наз. правильно схм-ся, т.е. мажорируемым рядом?
3. Сформулировать и объяснить св-ва правильно сх-хся рядов.
4. Что такое равномерная сх-ть и непр-сть фнц. ряда?
5. Как вы понимаете интв-ие и дифв-ие рядов? Приведите примеры.
6. Какой ряд наз. спн-ым?
7. Сформулируйте теорему Абеля. Опр-те радиус и инр-л сх-ти спн. ряда.
8. Привести примеры спн. рядов, для к-ых $R = 0$, $R = \infty$ и $R$ – к.ч.
9. Приведите ряды Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.
10. Приведите примеры разл-ия фк-й в ряды и их приложения.
11. В чем состоит суть интв-я фк-й и дифн. ур-й с помощью рядов?
12. Приведите спн. ряды в комп. обл-ти.

**Задачи для самостоятельной работы** (их можно использовать и для кр. работ).

**з1**. Найти сумму ряда $\dfrac{2}{1\cdot 3} + \dfrac{2}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$

Р. Из $a_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$ получим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right) = \left(1-\dfrac{1}{3}\right) +$

$+ \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right) + \left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n+1}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) = 1$, т.е. $S = 1$.

1*. Найти сумму ряда $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n} + \ldots$ О: 3. Ук.: взять разность $S_n - S_n/2$.

**з2**. Проверить, выполняется ли нх. признак сх-ти ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Р. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = \ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\right] = \ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, ряд рсх.

2*. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. О: 1. Ук: использовать фм-у $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

**з3**. Проверить, выполняется ли нх. признак сх-и ряда: $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots$

Р. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{n} = 0$. Нх. признак выполняется, значит, ряд сх. или рсх., т.е. иссл-ть ряд дольше с помощью дт. признаков.

3*. Напишите первые пять членов ряда: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n\pi-2\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

О: а) $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{32}+\frac{24}{625}+\ldots$ б) $-3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\ldots$

**з4**. Применив подходящий дт. признак, установить, сх. или рсх. ряд: $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots$

Р. $u_n = \frac{2n-1}{n^2} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\forall\ n > N$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ рсх-ся (гармч. ряд), значит, согласно признаку сравнения, рсх-ся и исслм-й ряд.

4*. Написать фм-у для общего члена ряда $1+\frac{7}{9}+\frac{11}{27}+\frac{15}{81}+\ldots$ и найти частч. суммы $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$. О: $u_n = \frac{4n-1}{3^n}$ $\left(1,\ 1\frac{7}{9},\ 2\frac{5}{27},\ 2\frac{30}{81},\ 2\frac{109}{243}\right)$.

**з5**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}{3n-\sqrt[3]{n}}$.

Р. Применим предельный признак сравнения, взяв обобщенный гармч. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ (где $\lambda>0$), к-ый сх-ся при $\lambda>1$ и рсх-ся при $\lambda\le 1$. Найдем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}{3n-\sqrt[3]{n}}\Big/\frac{1}{n^{\lambda}}\right)=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lambda}\left(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}\right)}{3n-\sqrt[3]{n}} = \left|\begin{array}{l}\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}\approx\sqrt{n}\\ 3n-\sqrt[3]{n}\approx 3n\\ \text{при } n\to\infty\end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lambda}\sqrt{n}}{3n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}n^{\lambda-1/2} = \frac{1}{3}$$, когда $\lambda = 1/2$. Обобщенный гармч. ряд при $\lambda<1$ рсх-ся, сдт-но, и данный ряд рсх-ся.

5*. По признаку сравнения иссл-ть ряд $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\ldots+\ln\frac{n+2}{n+1}+\ldots$ О: рсх. Ук.: $\ln\frac{n+2}{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$.

**з6**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\sum_{n=2}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$.

Р. Анч-но з5 получим $\lim_{n\to\infty}\left(n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\Big/\frac{1}{n^{\lambda}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{tg}^5\left(\pi/\sqrt{n^3}\right)}{1/n^{\lambda+3}}\right) = \left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\right)^5=\frac{\pi^5}{n^{\frac{15}{2}}}\\ \text{при } n\to\infty\end{array}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi^5/n^{15/2}}{1/n^{\lambda+3}} = \pi^5 \lim\limits_{n\to\infty} n^{\lambda-9/2} = \pi^5$, когда $\lambda = 9/2$. Исслм-ый ряд сх-ся, поскольку сх. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$ .

6*. По признаку сравнения иссл-ть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-\sin(\pi n/4)}{9n-2}$ . О: рсх-ся.

**з7**. Иссл-ть на сх-ть ряд $1 + \dfrac{2}{1\cdot 2} + \dfrac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{n^{n-1}}{n!} + \ldots$

Р. Применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left( \dfrac{(n+1)^{(n+1)-1}}{(n+1)!} \Big/ \dfrac{n^{n-1}}{n!} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^n n!}{(n+1)!\, n^{n-1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)^n n!}{n^n (n+1)!\, n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e > 1$. Ряд рсх.

7*. По признаку сравнения иссл-ть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$. О: сх-ся.

**з8**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\mathrm{arctg}1 + 4\mathrm{arctg}^2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 9\mathrm{arctg}^3 \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + n^2\mathrm{arctg}^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

Р. Применим признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \mathrm{arctg}^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n}\, \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} \times$

$\times \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x^{2/x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}\ln x} = e^0 = 1$

(по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 2 \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$). Т.о., $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$, сдт-но, ряд сх-ся.

8*. По признаку Даламбера или Коши иссл-ть ряд $\pi \arcsin \dfrac{1}{3} + \pi^2 \arcsin \dfrac{1}{9} + \ldots + \pi^n \arcsin \dfrac{1}{3^n} + \ldots$ О: рсх.

**з9**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$ .

Р. Применим интн. признак. Рас-им фк-ю $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)\ln^2(x+1)}$, иссл-ем на сх-ть несбт. инт-л $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x+3)\ln^2(x+1)}$ . Его нельзя выч-ть непосредственно. Применим к нему признак сравнения: $\dfrac{1}{(2x+3)\ln^2(x+1)} < \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ $\forall\, x \in [1; +\infty)$. Тогда имеем

$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \dfrac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = -\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^b = -\lim\limits_{b\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(b+1)} - \dfrac{1}{\ln 2}\right) = \dfrac{1}{\ln 2}$, т.е. несбт. инт-л сх-ся, значит, данный ряд также сх.

9*. По признаку Даламбера или Коши иссл-ть ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^n}{(2n-1)!}$ . О: сх-ся.

**з10**. По интн. признаку иссл-ть ряд $e^{-1} + e^{-\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{3}} + \ldots + e^{-\sqrt{n}} + \ldots$

Р. Выч-им несбт. инт-л $\int\limits_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x = 1,\ t = 1;\ x = \infty,\ t = \infty \end{vmatrix} = 2\int\limits_1^{\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t,\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = dt,\ \mathrm{d}v = -e^{-t} \end{vmatrix} =$

$= 2\left[-\dfrac{t}{e^t}\Big|_1^{\infty} + \int\limits_1^{\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\right] = 2\left[-\dfrac{t}{e^t}\Big|_1^{\infty} - \dfrac{1}{e^t}\Big|_1^{\infty}\right] = 2\left[-0+\dfrac{1}{e}-0+\dfrac{1}{e}\right] = \dfrac{4}{e}$, т.е. сх., тогда и ряд сх.

10*. Иссл-ть на сх-ть ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{2^{k^2-3}}{(\ln k)^{2k}}$. О: рсх-ся.

**з11**. Иссл-ть на сх-ть и абс. сх-ть ряд $-3+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}-\dfrac{3}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\left((-1)^n-2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)+\ldots$

Р. Рас-им ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right| = 3+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{5^2}+\ldots$ (1)

и иссл-ем этот ряд, применив признак сравнения. Поскольку $\dfrac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right| \le \dfrac{3}{n^2}$ $\forall\, n\in\boldsymbol{N}$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2}$ сх-ся, то и ряд (1) сх-ся. Значит, данный знакопер. ряд сх-ся, причем абс-но.

11*. Выяснить вид (сх. абс-но, усл-но, рсх.) сх-ти ряда $1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^3+\left(\dfrac{4}{7}\right)^4+\ldots+$ $+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots$ О: сх-ся абс-но.

**з12**. Иссл-ть на сх-ть и абс-ю сх-ть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{3n^2+n}$.

Р. Имеем знакочер-йся ряд. Признак Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2+n} = \dfrac{1}{3}$ не выполняется (это ств-ет невыполнению нх. признака), сдт-но, данный ряд рсх.

12*. Выяснить вид сх-ти ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{n\pi}{3}$. О: рсх-ся.

**з13**. Иссл-ть на сх-ть и абс-ю сх-ть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Р. Признак Лейбница выполняется: $\operatorname{tg}1 > \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} > \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} > \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$. Значит, ряд сх-ся, причем его сумма $0 < S \le \operatorname{tg}1 \approx 1{,}56$. Теперь сост-им ряд из модулей его членов:

$$\operatorname{tg}1+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+\ldots \qquad (2)$$

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \dfrac{1}{n^{2/3}}$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\left(1/\sqrt[3]{n^2}\right)}{1/n^{2/3}} = 1$, т.е. ряд (2) рсх-ся (поскольку рсх. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{2/3}$ ). Тогда данный ряд сх-ся усл-но.

13*. Выяснить вид сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k-\ln k}$. О: сх-ся усл-но.

**з14**. С точностью до 0,001 выч-ть сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n^n}$.

Р. Для удобства ряд запишем в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2/n)^n$. Усл-я признака Лейбница ряда выполняются: $\frac{2}{1} > \left(\frac{2}{2}\right)^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^3 > \left(\frac{2}{4}\right)^4 > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n = 0$. Сдт-но, данный ряд сх-ся и его сумма $-2 \le S < 0$ (учтено, что первый член яв-ся отц-ым). Абс. ошибка, допускаемая при замене суммы знакочерч-ся ряда его $n$-й частч. суммой, $\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}$. Если $u_{n+1} < 0{,}001$, то и $|r_n| < 0{,}001$. Поэтому находим $u_6 = \left(\frac{2}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \approx 0{,}0014$; $u_7 = \left(\frac{2}{7}\right)^7 \approx 0{,}00016 < 0{,}001$. Значит, дт-но огр-ся выч-ем частч. суммы $S_6$, т.е. $S \approx S_6 = -2 + 1 - 0{,}2963 + 0{,}0625 - 0{,}0102 + 0{,}0014 =$
$= -1{,}2426 \approx -1{,}243$.

14*. Выч-ть с точностью до $10^{-3}$ сумму ряда: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}$. О: а) $-0{,}393$; б) $0{,}104$.

**з15**. Найти обл. сх-ти фцн. ряда: $8x^3\mathrm{arctg}\,x + 64x^6\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \ldots + 8^n x^{3n}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n} + \ldots$

Р. По признаку Даламбера имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{8^{n+1}x^{3(n+1)}\mathrm{arctg}\frac{x}{n+1}}{8^n x^{3n}\mathrm{arctg}\frac{x}{n}}\right| =$

$$= \left|\begin{array}{l}\mathrm{arctg}\frac{x}{n+1} \Leftrightarrow \frac{x}{n+1}\\ \mathrm{arctg}\frac{x}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{n}\\ \text{при } n \to \infty\end{array}\right| = 8|x^3|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x/(n+1)}{x/n}\right| = 8|x^3|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 8|x^3|,$$

то данный фнц. ряд сх-ся, и причем абс-но, когда $8|x^3| < 1 \Leftrightarrow -1/2 < x < 1/2$. Тч-и $x = -1/2$ и $x = 1/2$ иссл-м отдельно. При $x =$
$= -1/2$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}8^n\left(-\frac{1}{2}\right)^{3n}\mathrm{arctg}\frac{-1/2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\mathrm{arctg}\frac{1}{2n}$, к-ый сх. по признаку Лейбница. При $x = 1/2$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\frac{1}{2n}$, к-ый рсх-ся, т.к. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ рсх-ся. Т.о., обл-ю сх-и яв-ся $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

15*. Найти обл. сх-ти фнц. ряда $(3 - x^2) + (3 - x^2)^2 + (3 - x^2)^3 + \ldots + (3 - x^2)^n + \ldots$

О: $\left]-2, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, 2\right[$.

**з16**. Найти обл. сх-ти фнц. ряда $e^{-x} + e^{-4x} + \ldots + e^{-n^2x} + \ldots$

Р. При любом фксн. $x$ имеем числ. ряд с плж. членами. Находим $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2x}} =$

$= \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases}0 \text{ при } x > 0;\\ +\infty \text{ при } x < 0.\end{cases}$ Отсюда следует, что ряд сх-ся в инр-е $]0, \infty[$. При $x = 0$ получаем рсхщ-йся ряд $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$

16*. Найти обл. сх-и фнц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$. О: $]-\infty, -2[ \cup ]-8/5, \infty[$.

**з17**. Найти обл. сх-и фнц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^3}$ .

Р. При любом фксн. $x \in R$ данный ряд становится знакорм-ся числ. рядом, к-ый уд-ет признаку Лейбница, т.е. сх-ся на всем мн-ве $R$, причем ряд сх. абс-но, ибо сх. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^3}$ , состн-ый из модулей его членов, т.к. $\frac{1}{x^2+n^3} \le \frac{1}{n^3}$ $\forall\, x \in R$ и $\forall\, n \in N$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сх-ся. Итак, обл-ю сх-ти ряда яв-ся $x \in\, ]-\infty, \infty[$.

17*. Найти обл. сх-и фнц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ . О: $[0, \infty[$.

**з18**. Найти обл. сх-и фнц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$ .

Р. Все члены ряда есть фк-и, опрн-ые на мн-ве $R$. Согласно признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$ = $= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+x}{n}\right|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+x}{n}\right| = 1$, т.е. признак Коши не решает вопроса о сх-и ряда (не решает этого вопроса и признак Даламбера). Проверим выполнимость нх-го признака для числ. ряда, получаемого из данного фнц. ряда при фксн-ом $x$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x = e^x \ne 0\ \forall\, x \in R\backslash\{0\}$; при $x = 0$ $u_n(0) = 1$. Отсюда следует, что данный фнц. ряд рсх-ся на всем мн-ве $R$.

18*. Найти обл. сх-ти спн. ряда: $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots$ О: $[-1, 1]$.

**з19**. Найти обл. сх-и спн. ряда $\frac{x-5}{3} - \frac{(x-5)^2}{2\cdot 3^2} + \frac{(x-5)^3}{3\cdot 3^3} - \ldots + (n-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^3} + \ldots$

Р. Находим радиус сх-ти $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 3\cdot 1 = 3$, тогда $-3 < x-5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$, т.е. $x \in\, ]2, 8[$ – инр. сх-ти. При $x = 2$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}$ = $= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-1)^n\frac{3^n}{n\cdot 3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, к-ый рсх-ся. При $x = 8$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}$ = $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, к-ый сх-ся по признаку Лейбница, отсюда $x \in\, ]2, 8]$ – обл. сх-ти.

19*. Найти обл. сх-ти спн. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$. О: $]-2, 4[$.

**з20**. Найти обл. сх-и спн. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}x^n$ .

Р. Используя признак Коши, находим радиус сх-ти (см. (4.3): 12.2): $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$ =

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \infty$, $x \in \,]-\infty, \infty[$ – инр. сх-и.

20*. Найти обл. сх-и спн. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3(n+1)}}{(2n+1)8^{n+1}}$. О: $[-2, 2[$.

**з21**. Найти обл. сх-и спн. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n-1}}{(4n-3)^2}x^{2n-1}$.

Р. Поступим в ств-и с общим подходом, применяемым для нахождения обл. сх-ти фнц. ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(4n-3)^2}{2^{n-1}(4n+1)^2}\left|\dfrac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}\right| = 2x^2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n-3)^2}{(4n+1)^2} = 2x^2$, отсюда следует, что данный стп. ряд сх-ся (и притом абс-но), если $2x^2 < 1 \Leftrightarrow -1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, где $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – радиус сх-и, а $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ – инр. сх-и. При $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n-1}\left(-1/\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{(4n-3)^2} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-1}}{(4n-3)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(4n-3)^2}$, к-ый сх. по признаку Лейбница. При $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имеем также сх-йся ряд $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(4n-3)^2}$, т.е. $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ – обл. сх-и (причем ряд сх-ся во всех тч. этого отрезка абс-но).

21*. Найти обл. сх-и спн. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{(n!)^2}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^n$. О: $x = -\dfrac{1}{3}$.

**з22**. Применив почленное дифв. и интв., найти сумму ряда $1\cdot2 + 2\cdot3x + 3\cdot4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots$

Р. Здесь мы используем фм-у суммы беск. убщ. геом. прогрессии: $S = a/(1-q)$. Найдем $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$, тогда $x \in \,]-1, 1[$ – инр. сх-и. Инт-уя при $|x| < 1$, получим $\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^{n-1}\right)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)\int\limits_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\,t^n\Big|_0^x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n$. Полученный ряд имеет тот же инр. сх-и $]-1, 1[$. К нему также можно применить почленное интв.: $\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\right)\mathrm{d}t =$

$= \sum\limits_{n=1}^{x}(n+1)\int\limits_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$. Получили беск. уб-ю геомч. прогрессию, у к-ой $a = x^2$ и $q = x$, поэтому его сумма равна $x^2/(1-x)$, т.е. $x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} + \ldots = x^2/(1-x)$.

Теперь, два раза диф-уя это рав-во в инр-е $]-1, 1[$, получим $2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots = (2x - x^2)/(1-x)^2$. Поступив анч-но и с этим рав-ом, получим окончательный результат: $1\cdot2 + 2\times3x + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots = 2/(1-x)^3\ \forall x \in \,]-1, 1[$, т.е. сумма исх. ряда $S(x) = 2/(1-x)^3\ \forall x \in \,]-1, 1[$.

22*. Применив почленное дифв. и интв., найти сумму ряда $\dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{x^3}{3a^2} + \ldots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n} + \ldots$ $(a > 0)$. О: $a\ln\dfrac{a}{a-x} - x$.

**зм1**. При разл-и многих фк-й в спн. ряды более эффективны, чем применение общего врж-ия ряда Тейлора, различные частные приемы, связанные с использованием основных (табличных) разл-й:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \ \forall\, x \in \,]-\infty, +\infty[; \tag{3}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \ \forall\, x \in \,]-\infty, +\infty[; \tag{4}$$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \ \forall\, x \in \,]-\infty, +\infty[; \tag{5}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \ \forall\, x \in \,]-1, 1[ \text{ (беск. убщ. геомч. прогрессия при } q = x); \tag{6}$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \ \forall\, x \in \,]-1, 1[; \tag{7}$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \ \forall\, x \in \,]-1, 1]; \tag{8}$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \forall\, x \in [-1, 1]. \tag{9}$$

**з23**. Разл-ть в ряд по сп-ям $x$ фк-ю $\sin\frac{2x^4}{3}$.

Р. Заменяя в (4) $x$ на $\frac{2x^4}{3}$, получаем $\sin\frac{2x^4}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{2x^4}{3}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{8n-4}}{3^{2n-1}(2n-1)!} =$

$$= \frac{2x^4}{3} - \frac{2^3x^{12}}{3^3\cdot 3!} + \frac{2^5x^{20}}{3^5\cdot 5!} - \ldots \ \forall\, x \in \,]-\infty, +\infty[.$$

23*. Разл-ть в ряд по сп-ям $x$ фк-ю $a^{-x^4}$ ($a > 0$). О: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n a}{n!}x^{4n} \ \ \forall\, x \in \,]-\infty, +\infty[.$

Ук: $a^{-x^4} = e^{-x^4\ln a}$.

**з24**. Разл-ть в ряд по сп-ям $x$ фк-ю $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$.

Р. По (7) при $m = -1/3$, заменяя $x$ на $3x^2$, сначала разл-м фк-ю $\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = 1\cdot(1 + 3x^2)^{-1/3} =$

$$= 1 - \frac{1}{3}3x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{2!}(3x^2)^2 - \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)}{3!}(3x^2)^3 + \ldots = 1 - x^2 + \frac{1\cdot 4}{2!}x^4 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3!}x^6 + \ldots =$$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{n!}x^{2n}$ при $|3x^2| \le 1 \Leftrightarrow -1/\sqrt{3} \le x \le 1/\sqrt{3}$. Тогда $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = x^2 +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{n!}x^{2n+2} \ \ \forall\, x \in [-1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3}].$$

24*. Разл-ть в ряд по сп-ям $x$ фк-ю $x^3\mathrm{arctg}\, x^2$. О: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n+1}}{2n-1}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$.

**з25**. Выч-ть $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 0,0001.

Р. При выч-и корня $k$ сп-и ($k \in N$) из числа $A > 0$ представляет это число в виде $A = a^k + b$ так, чтобы $|b/a^k| < 1$, и записывают: $\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{a^k + b} = a\sqrt[k]{1 + b/a^k} = a(1 + \beta)^{1/k}$.

Далее применяют разложение (7), полагая $m = 1/k$, $x = \beta$, для расв. случая $\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81+9} =$ $= \sqrt[4]{3^4(1+9/81)} = 3(1 + 1/9)^{1/4}$ при $m = 1/4$, $x = 1/9$ и, умн-я на 3, после прб-й получим $\sqrt[4]{90} = 3 \times$ $\times \left(1 + \frac{1}{4\cdot 9} - \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 4^2\cdot 9^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{3!\cdot 4^3\cdot 9^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4!\cdot 4^4\cdot 9^4} + \ldots\right) \approx 3 + 0{,}0833 - 0{,}00347 + 0{,}00023 = 3{,}08009 \approx 3{,}0801.$

Здесь вычн-я частч. сумма $S_4$ обеспечивает заданную точность, т.к. $u_5 = u_4 \frac{11}{4\cdot 4\cdot 9} \approx 0{,}00023 \times$ $\times \frac{11}{144} < 0{,}0001$.

25*. Выч-ть $1/\sqrt[4]{e}$ с точностью до $10^{-4}$. О: 0,7788.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п14: 12.1, п1-п14: 12.2 и з1-з25 р-ть з1-з20: 1) иссл-ть на сх-ть признаком Даламбера ряд с плж. членами; 2) иссл-ть на сх-ть признаком Лейбница знакочер-йся ряд; 3) найти радиус сх-ти спн. ряда и опр-ть обл-ть сх-ти; 4) выч-ть опрн. инт-л с точностью до 0,001 путем разл-ия подынт. фк-и в ряд и почленного интв. этого ряда.

1\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

2\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{3}} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

4\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$; 4) $\int_0^{1} x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$.

5\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

6\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

7\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

8\. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1+n)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{5}}x^3e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n7^{n+1}}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{\sin(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n7^n}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+2)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+2)^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+5}$; 4) $\int_0^{1}\sqrt{x}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

15. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}}x^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$; 4) $\int_0^{\frac{1}{2}}x\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^n}x^n$; 4) $\int_0^{\frac{1}{4}}xe^{-\frac{1}{2}x^3}\,\mathrm{d}x$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+5}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{8^n}x^n$; 4) $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n7^{n+1}}$; 4) $\int_0^{1}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

## 12.3. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

### Вопросы для самопроверки

1. Как опр-ся тригч. ряд и усл-ие его инту-сти?
2. Как выч-ся коэф-ы ряда Фурье?
3. Как вы понимаете дт. усл-ия разл-сти фк-й в ряд Фурье?
4. Сформулируйте теорему Дирихле и приведите фм-у опр-ия суммы в тч-х разрыва.
5. Приведите конкретные примеры разл-ия в ряд Фурье.

6. Как опр-ся коэф-ы Фурье для чет. и нечет. фк-й?
8. Приведите ряд Фурье для фк-и с любым прд. и для непрдч. фк-и.
9. Приведите инт-л Фурье и его комп. форму.
10. Как опр-ся ряд Фурье по орт. системе фк-й?

**Задачи для самостоятельной работы**. Приведем нх. фм-ы для р-ия задач.

Если фк. $f(x)$ с прд-ом $T = 2l$ (в част., $T = 2\pi$) кусочно-монотонна и непр-на или имеет лишь к.ч. тч-к разрыва первого рода на отрезке $[-l, l]$ (усл-я Дирихле), то во всех тч. непр-сти она разл-ма в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

В каждой тч. $x_0$ разрыва ряд Фурье сх. к числу $S(x) = [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]/2$.

Если $f(x)$ – чет. фк-я, то (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ \text{где}\ a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1а}$$

Если $f(x)$ – нечет. фк-я, то (1) имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ \text{где}\ b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\ (n = 1, 2, \ldots). \tag{1б}$$

Разл-ие фк-и $f(x)$ в ряд Фурье в комп. форме имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}},\ \text{где}\ c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Зная комп. ряд Фурье фк-и $f(x)$, можно записать ее в дсв. ряд Фурье, учитывая, что

$$\frac{a_0}{2} = c_0;\ a_n = \mathrm{Re}2c_n;\ b_n = -\mathrm{Im}2c_n, \tag{4}$$

разл-ие можно прб-ть к виду

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_1 x + \psi_n), \tag{5}$$

где $A_0 = \frac{a_0}{2}$; $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\cos(n\omega_1 x + \psi_n)$ – $n$-я гармоника; $\omega_1 = 2\pi/T = \pi/l$ – частота первой гармоники; $\psi_n = -\operatorname{arctg}(b_n/a_n)$. Здесь вел. $A_n$ наз. амплитудой $n$-й гармоники, а $\psi_n$ – ее фазой. Свк-ть пст-ой сосщ. $A_0$ и амплитуд посл. гармоник наз. амплитудно-частотным спектром прдч. фк-и $f(x)$, а свк-ть фаз посл. гармоник – ее фазочастотным спектором.

Если используется комп. форма ряда Фурье, то $A_n = 2|c_n|$, $\psi_n = \arg c_n$.

**з1**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} 0\ \forall\ x \in [-\pi/2;\ 0[; \\ \sin 2x\ \forall\ x \in [0;\ \pi/2] \end{cases}$ с прд. $T = \pi$.

Р. Данная фк. уд-ет усл-ям Дирихле (и далее для всех задач эти усл. будут выполняться, поэтому их выполнимость в дальнейшем не оговариваем). Ее грф-к см. на рис. 1. Т.к. $T = \pi$, то, полагая в фм-х (2) $l = \pi/2$, находим коэф-ы Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{0} 0\cdot\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi/2}\sin 2x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2}\,(-\cos 2x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sin 2x\cos 2nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 2(n-1)x}{2(n-1)} - \frac{\cos 2(n+1)x}{2(n+1)}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$= -\dfrac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi(n^2-1)} \text{ при } n=2k; \\ \quad 0 \qquad \text{при } n=2k+1\ (k=1, 2, ...) \end{cases}$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin 2x \sin 2nx\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\sin 2(n-1)x}{2(n-1)} - \dfrac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 0\ (n \neq 1).$

Коэф-ы $a_1$, $b_1$ нельзя найти из общих врж-й для $a_n$ и $b_n$, поэтому находим их отдельно:

$a_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin 2x \cos 2x\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin 4x\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4\pi}\ \cos 4x\Big|_0^{\pi/2} = 0;$

$b_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\left(x - \dfrac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{2}.$

Подс-я коэф-ы и полупрд. $l = \pi/2$ в (1), получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4kx}{4k^2-1}\quad \forall\, x \in\ ]-\infty; +\infty[.$$

**зм2**. Иногда $]-\infty; +\infty[$ обз. через $(-\infty; +\infty)$, а $[-\pi, \pi/2[\ \Leftrightarrow [-\pi, \pi/2)$.

1*. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} -1\ \forall\ x \in [-\pi, \pi/2[, \\ 0\ \forall\ x \in [\pi/2, \pi[ \end{cases}$ $(T = 2\pi)$.

О: $f(x) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{\pi}[(-\cos x + \sin x) - \sin 2x + \dfrac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x) + \ldots]$, за исключением тч-к $x_k = -\pi + 2k\pi$ и $x_m = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi$ $(k, m \in Z)$, в к-ых $S(x) = -0{,}5$.

**з2**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} x+1\ \forall\ x \in [-1, 0); \\ \ 0\ \ \forall\ x \in [0, 3) \end{cases}$ с прд-ом $T = 4$ (рис. 2).

Р. Т.к. длина отрезка $[-1, 3]$ равна прд-у, то коэф-ы находим по этому отрезку:

$a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x + \int_0^3 0\cdot \mathrm{d}x\right) = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} = \dfrac{1}{4};$

$a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)\cos\dfrac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(n\pi/2)^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2} + \dfrac{x+1}{n\pi/2}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$
$= \dfrac{2}{(n\pi)^2}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right);$

$b_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)\sin\dfrac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(n\pi/2)^2}\sin\dfrac{n\pi x}{2} - \dfrac{x+1}{n\pi/2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$
$= \dfrac{1}{n\pi}\left(\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} - 1\right)$. Отсюда получим: $f(x) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{n^2\pi}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{2} + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n\pi}\ \times\right.\right.$
$\left.\left.\times\ \sin\dfrac{n\pi}{2} - 1\right)\sin\dfrac{n\pi x}{2}\right)$. Это рав-во имеет место в тч-х непр-сти фк-и $f(x)$. В тч-х ее разрыва $x_m = 4m$ $(m \in Z)$ ряд Фурье сх-ся к полусумме $S(x) = [f(x_m - 0) + f(x_m + 0)]/2 = (0 + 1)/2 = 1/2$.

2*. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} -x\ \forall\ x \in [-3, 0[, \\ 0\ \forall\ x \in [0, 3[ \end{cases}$ $(T = 6)$.

О: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{3}+\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{3}\right)$, кроме тч-к $x_m = 3 + 6m$, $S(x) = 3/2$.

**з3**. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x)=\begin{cases} x & \forall\, x\in[0,\,\pi/2[,\\ \pi/2 & \forall\, x\in[\pi/2,\,\pi]\end{cases}$ а) по косинусам; б) по синусам.

Р. а) продолжим фк-ю $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ чет. образом, затем прдч-ки продолжим ее с прд-ом $2\pi$ на всю ось $Ox$ (рис. 3). Для полученной фк-и имеем: $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$);

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}x\mathrm{d}x+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{4}\pi;\ a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}x\cos nx\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{x\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right).$$ Отсюда получим:

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx\ \forall\ x\in[0;\,\pi];$$

б) грф-к фк-и $f(x)$ с ее нечет. продолжением на отрезок $[-\pi, 0]$ и последующим прдч. продолжением на всю ось $Ox$ приведен на рис. 3а. Находим $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$); $b_n=\dfrac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x\right.+$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\left(\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

Т.к. прдч. фк-я $f(x)$ с прд-ом $2\pi$ непр-на в тч. $x = 0$ и разрывна при $x = \pi$, то $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi n^2}\right.\times$

$\times\left.\sin\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin nx\ \forall\ x\in[0;\,\pi)$. В тч. $x = \pi$ сумма ряда Фурье равна нулю.

3*. Разл-ть в ряд Фурье фк-ю $f(x) = x^2 - x\ \forall\ x\in[-1, 1[$ ($T = 2$).

О: $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2\cos n\pi x}{n^2\pi}+\dfrac{\sin n\pi x}{n}\right)$, кроме тч-к $x_k = 2k - 1$ ($k\in Z$), $S(x) = 1$.

**з4**. Разл-ть в ряд Фурье в комп. форме фк-ю $f(x)$ с прд-ом $T = \pi/4$, заданную в промежутке $[0, \pi/2[$ фм-ой $f(x) = e^x$ (рис. 4).

Р. В ств-и с фм-ми (3) находим $c_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}e^xe^{-i4nx}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}e^{(1-i4n)x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi(1-i4n)}e^{(1-i4n)x}\Bigg|_0^{\pi/2}=$

$=\dfrac{2}{\pi(1-i4n)}\left(e^{\pi/2}e^{-i2n\pi}-1\right)=\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi/2}-1\right)\dfrac{1+i4n}{1+16n^2}$, т.к. $e^{-i2n\pi}=\cos 2n\pi - i\sin 2n\pi = 1$. Сдт-но, согласно фм-е (3) имеем $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi/2}-1\right)\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1+i4n}{1+16n^2}\,e^{-i4nx}$ во всех тч. непр-ти данной фк. В тч-х разрыва $x_k=(k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) сумма ряда Фурье равна $\left(1+e^{\pi/2}\right)/2$.

Воспользовавшись фм-ми (4), можно перейти к разл-ю данной фк. в дсв. ряд Фурье: $f(x)=$

$$=\frac{2}{\pi}\left(e^{\pi/2}-1\right)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+16n^2}(\cos 4nx-4n\sin 4nx)\right).$$

4*. Разл-ть в ряд Фурье в комп. форме фк-ю $f(x) = \begin{cases} 4 \ \forall\ x \in [0, 3[, \\ 2 \ \forall\ x \in [3, 5]. \end{cases}$ О: $f(x) = \dfrac{16}{5} + \dfrac{i}{\pi} \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \times$

$\times \left( e^{-i\frac{6n\pi}{5}} - 1 \right) e^{i\frac{n\pi x}{5}}$, кроме тч-к $x = 0$, $x = 3$ и $x = 5$, в к-ых сумма ряда равна 3.

**з5**. Найти амплитудно-частотный спектр [см. (5)] прдч. фк-и $f(t)$ с прд-ом $T$ (рис. 5).

Р. По грф-у опр-ем, что фк. $f(x)$ чет., поэтому дт-но записать ее антч. врж-ие на полупрд-е: $f(t) = 0\begin{cases} E \ \forall\ t \in [0, \tau/2], \\ 2 \ \forall\ t \in (\tau/2, T/2]. \end{cases}$ Найдем коэф-ы Фурье: здесь $b_n = 0$; $a_0 = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{4}{T} \left( \int_0^{\tau/2} E\,\mathrm{d}t + \right.$

$\left. + \displaystyle\int_{\tau/2}^{T/2} 0 \cdot \mathrm{d}t \right) = \dfrac{4}{T}\, Et\Big|_0^{\tau/2} = \dfrac{2E\tau}{T}$ ($\tau$ – длительность, $E$ – амплитуда импульсов);

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t \mathrm{d}t = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} E \cos n\omega_1 t \mathrm{d}t = \frac{4E}{T} \left. \frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1} \right|_0^{\tau/2} = \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1 \tau/2}.$$ Тогда

$A_0 = \dfrac{E\tau}{T}$, $A_n = \sqrt{a_n^2} = |a_n| = \dfrac{2E\tau}{T} \left| \dfrac{\sin(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1 \tau/2} \right|$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Выясним, при каких частотах амплитуды равны нулю (ствщ. гармоники в разл-и в ряд Фурье фк-и $f(t)$ будут отсутствовать): $A_n = 0$, если $\sin \dfrac{n\omega_1 \tau}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{n\omega_1 \tau}{2} = k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$), т.е. когда $n\omega_1 = 2\pi/\tau$, $n\omega_1 = 4\pi/\tau$, $n\omega_1 = 6\pi/\tau$, … Номера таких амплитуд – $T/\tau$, $2T/\tau$, $3T/\tau$, … Сдт-но, число спектральных линий, расположенных на каждом из инр-ов $(0; 2\pi/\tau)$, $(2\pi/\tau, 4\pi/\tau)$ и т.д., равно $T/\tau - 1$. Амплитудно-частотный спектр, ствщ-й отн-ю $T/\tau = 4$, показан на рис. 6, где непр. линией изб-ен грф. фк-и $g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2E\tau}{T} \left| \dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right| \ \forall \omega \in \left]0, +\infty\right[; \\ \dfrac{2E\tau}{T} \text{ при } \omega = 0, \end{cases}$ к-ый наз-ют огибающей спектральных линий.

5*. Найти амплитудно-частотный спектр прдч. фк-и $f(t)$ с прд-ом $T$, грф-к к-ой приведен на рис. 7. О: $A_0 = E/2$, $A_n = E/(n\pi)$.

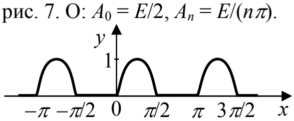


Рис. 1

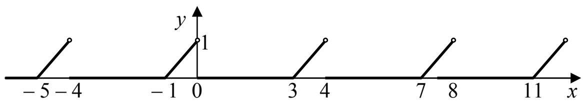


Рис. 2

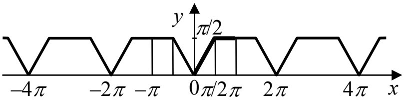


Рис. 3

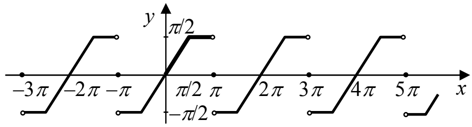


Рис. 3а

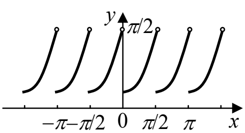


Рис. 4

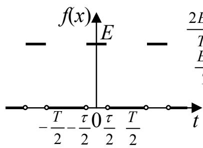


Рис. 5

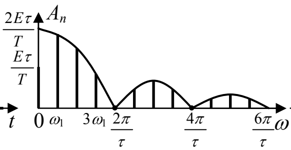


Рис. 6

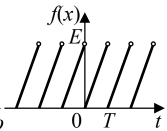


Рис. 7

Теперь рас-им инт-л Фурье и приведем нх. фм-ы для р-ия задач. Если фк. $f(x)$ уд-ет усл-ям Дирихле на любом отрезке $[a,\ b]$ и абс. инту-ема на всем мн-е $R$ (т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сх-ся), то во всех тч. непр-сти она представима инт-ом Фурье: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t.$ (6а)

Фм-у (6а) можно прб-ть к виду, сходному с рядом Фурье:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}\omega, \tag{6}$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t,\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Если фк-я $f(x)$ чет., то $B(\omega) = 0$, если нечет., то $A(\omega) = 0$.

Фм. (6) представляет собой разл-ие непрдч. фк-и $f(x)$ в сумму гармч-х сосщ. с непр-но меняющейся от 0 до $\infty$ частотой $\omega$.

Для чет. фк-и $f(x)$ имеют место ств-но прямое и обратное косинус-прб-ия Фурье:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t; \tag{8}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega. \tag{9}$$

Если фк-я $f(x)$ нечет., то имеют место ств-но прямое и обратное синус-прб. Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t; \tag{10}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega. \tag{11}$$

Здесь используем еще и представление фк-и $f(x)$ инт-ом Фурье в комп. форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega; \tag{12}$$

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Фк. $F(i\omega)$ наз. прямым прб. Фурье фк-и $f(x)$, а фк-я $f(x)$, опрм-я фм-ой (12), – обратным прб. Фурье.

Фк-ю $F(i\omega)$ наз-ют спектральной плотностью (или спектральной хркс.) непрдч. фк-и $f(x)$, а фк-ю $|F(i\omega)|$ – амплитудно-частотным спектром (или амплитудно-частотной хркс.) фк-и $f(x)$.

Связь между фк-ми $A(\omega)$, $B(\omega)$ и $F(i\omega)$ опр-ся фм-ой $F(i\omega) = \pi(A(\omega) - iB(\omega))$. (13а)

**з6**. Представить инт-ом Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} 3\ \forall\ x\in[0,1], \\ 0\ \forall\ x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty). \end{cases}$

Р. Очевидно, что фк-я уд-ет усл-ям представимости инт-ом Фурье (и далее расв. фк-и уд-ют этим усл.). Согласно фм-ам (7) имеем $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t = \frac{3}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\cos\,\omega t\mathrm{d}t = \frac{3\sin\omega}{\pi\omega}$;

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t = \frac{3}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\sin\,\omega t\mathrm{d}t = \frac{3}{\pi}\,\frac{1-\cos\omega}{\omega}.$$

Отсюда по (6) получим

$$f(x) = \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\big(\sin\omega\cos\omega x + (1-\cos\omega)\sin\omega x\big)\,\mathrm{d}\omega = \frac{6}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega(1-2x)}{2}\,\mathrm{d}\omega. \qquad (14)$$

В тч-х разрыва $x = 0$ и $x = 1$ инт-л сх-ся к числу 3/2.

6*. Представить инт-ом Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} x \ \forall x \in [0;\, 2); \\ 0 \ \forall x \in (2;\, +\infty). \end{cases}$ Ук: доопр-ите фк-ю на $(-\infty, 0)$ чет. или нечет. образом.

**з7**. Используя результат з6, выч-ть $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$

Р. Полагая в ф-ме (14) $x = 1/2$, получим $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\,\mathrm{d}\omega \left(\cos\frac{\omega(1-2x)}{2}\bigg|_{x=1/2} = 1\right)$.

Но, согласно усл-ю з6, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$, поэтому $3 = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\,\mathrm{d}\omega$, откуда $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$.

7*. Фк-ю $f(x) = \begin{cases} 1 - x/a \ \forall x \in [0;\, a]; \\ 0 \ \forall x \in (-\infty;\, 0) \cup (a;\, +\infty) \end{cases}$ представить инт-ом Фурье.

О: $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{a\omega^2}(1-\cos a\omega)\cos\omega x + \frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)\sin\omega x\right)\mathrm{d}\omega.$

**з8**. Представить инт-ом Фурье фк-ю $f(x) = \begin{cases} \cos(x/2) \ \forall x \in [-\pi;\, \pi]; \\ 0 \ \forall x \in (-\infty;\, -\pi) \cup (\pi;\, +\infty). \end{cases}$

Р. Фк-я чет. (рис. 8), поэтому $B(\omega) = 0$. Из фм-л (7) следует, что $A(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\cos\omega t\,\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2}\ \left(\omega \ne \dfrac{1}{2}\right)$. Если $\omega = \dfrac{1}{2}$, то $A\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 1.$

Тогда $A(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2} \ \forall\omega \ne \dfrac{1}{2}; \\ 1 \text{ при } \omega = 1/2. \end{cases}$ Т.к. фк. $\dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2}$ в тч. $\omega = \dfrac{1}{2}$ имеет устранимый разрыв (что не влияет на зн-ие инт-ла (6)), искомое преставление фк-и $f(x)$ инт-ом Фурье можно записать в виде $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega.$

8*. Записать инт-л Фурье в комп-ой, а затем в дсв. форме для фк-и $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$.

О: $\dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ia\omega}}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$

**з9**. Найти $F_c(x)$ и $F_s(x)$ фк-и $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\, x \ge 0)$.

Р. По фм-ам (8) и (10) находим:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2};\quad F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

По фм-ам обратных прб-й (9) и (11) имеем:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = e^{-ax}\ (x\ge 0);\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = e^{-ax}\ (x>0).$$

Отсюда получаем инт-ы Лапласа:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x}\ (x\ge 0);\quad \int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+1}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x}\ (x>0).$$

9*. Найти $F_c(x)$ и $F_s(x)$ фк-и $f(x) = e^{-\beta x}$ $(\beta > 0, x \ge 0)$ и по фм-ам обратных прб. опр-ть взаимные стн.

**з10**. Найти спектральную плотность фк-и $f(x) = \begin{cases}\alpha x e^{-\alpha x}\ \forall x\in[0;+\infty)\ (\alpha>0);\\ 0\ \forall x\in(-\infty;0).\end{cases}$

Р. Грф-к фк-и изб-жен на рис. 9. Из фм-ы (13) следует, что $F(i\omega) = \int_0^{\infty}\alpha t e^{-(\alpha+i\omega)t}\,\mathrm{d}t =$

$= \alpha\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{b} t e^{-(\alpha+i\omega)t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\alpha}{(\alpha+i\omega)^2} - \left(\dfrac{1}{\alpha+i\omega}+\dfrac{1}{(\alpha+i\omega)^2}\right)\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b}{e^{(\alpha+i\omega)b}}$. Находим $\lim\limits_{b\to+\infty}\left|e^{(\alpha+i\omega)b}\right| =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left|e^{\alpha b}\right|\left|e^{i\omega b}\right| = \lim\limits_{b\to+\infty} e^{\alpha b}$, т.к. $\left|e^{i\omega b}\right| = 1$. Поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b}{e^{(\alpha+i\omega)b}} = 0$, и тогда $F(i\omega) = \dfrac{\alpha}{(\alpha+i\omega)^2}$,

$|F(i\omega)| = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$. Грф-к $|F(i\omega)|$ приведен на рис. 10.

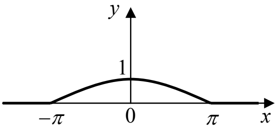


Рис. 8

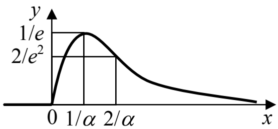


Рис. 9

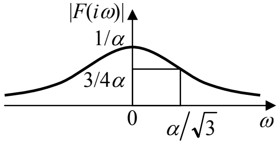


Рис. 10

10*. Найти спектральную плотность косинусоидального импульса (и построить его грф-к)

$f(x) = \begin{cases}0\ \forall x\in(-\infty;-\tau/2)\cup(\tau/2;+\infty);\\ h\cos(\pi x/\tau)\ \forall x\in(-\tau/2;\tau/2).\end{cases}$ О: $F(i\omega) = \begin{cases}\dfrac{2\pi h}{\tau}\dfrac{\cos(\omega\tau/2)}{(\pi/\tau)^2-\omega^2}\ \text{при}\ \omega\ne\pm\dfrac{\pi}{\tau};\\ \dfrac{h\tau}{2}\qquad\qquad \text{при}\ \omega=\pm\dfrac{\pi}{\tau}.\end{cases}$

**з11**. Разложить в ряд Фурье на инр. $(-\pi, \pi)$ фк-ю $f(x) = \begin{cases}x\ \text{при}\ \pi < x \le 0;\\ 2x\ \text{при}\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

О: $\dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right) + \left(\dfrac{\sin x}{1}-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$.

**з12**. Пользуясь разл-м в ряд Фурье фк-и $f(x) = x^2$, выч-ть сумму ряда $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+$ $+\ldots$ О: $\dfrac{\pi^2}{12}$.

**з13**. Разл-ть в ряд Фурье на инр. $(-\pi, \pi)$ фк-ю $f(x) = \dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}$. О: $\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2} - \dfrac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$

**з14**. Рзл-ть в ряд Фурье на инр. $(-\pi, \pi)$ фк-ю $f(x) = \begin{cases}-\dfrac{\pi+x}{2}\ \text{при}\ -\pi\le x<0;\\ \dfrac{\pi-x}{2}\ \text{при}\ 0\le x<\pi.\end{cases}$

О: $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$

**з15**. Разл-ть в ряд Фурье на инр. $(-\pi;\ \pi)$ фк-ю $f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -\pi < x \le 0; \\ 0 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$

О: $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$.

**з16**. Разл-ть в ряд Фурье на инр. $(-\pi;\ \pi)$ фк-ю $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -\pi < x \le 0; \\ -2 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$

О: $-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

**з17**. Разл-ть фк-ю $f(x) = x^2$ на инр. $(0;\ \pi)$ в ряд только синусов.

О: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin nx$.

**з18**. Разл-ть фк-ю $y = \cos 2x$ на инр. $(0;\ \pi)$ в ряд только синусов.

О: $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1} + \frac{3\sin 3x}{2^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \ldots\right]$.

**з19**. Разл-ть фк-ю $y = \sin x$ на инр. $(0;\ \pi)$ в ряд только косинусов.

О: $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \ldots\right]$.

**з20**. Разл-ть фк-ю $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 2 - x \text{ при } 1 < x < 2 \end{cases}$ на инр. (0, 2): а) в ряд только синусов; б) в ряд только косинусов. О: а) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

## 12.4. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### Вопросы для самопроверки

1. Как выводятся ур-я мтч. физики?
2. Приведите ур-ие теплопроводности (теппр.) и фк-ю, удщ-ю этому ур.
3. Что такое мтч. модель (мд.)? Из каких этапов состоит мтч. моделирование (мдв.)?
4. Изложите клсф-ю ур-й мтч. физики и как они приводятся к канч. виду.
5. В чем состоят особенности р-ия ур-й с част. прв-ми?
6. Выведите ур-ия клб-й струны и элкч. клб-ий в проводах.
7. Как р-тся ур-ия клб-й струны методом Фурье?
8. Приведите р-ие задачи Коши для ур-я клб-й струны методом Даламбера.
9. Выведите ур-ие теппр-сти в стержне и р-те ее методом Фурье.
10. Как выводится ур-ие распространения тепла в пр-ве и как оно р-тся в случае шара?
11. Приведите ур-ие Лапласа. Как р-тся задача Дирихле для круга?

**Задачи для самостоятельной работы** (см. з1-з8, п1-п13 из 12.4)

По образцу п1-п5 из 2°: 12.4 привести з1-з8 к канч. виду в каждой из обл., где сохраняется тип ур-ия.

**з1**. Привести к канч. виду ур-ие $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

Р. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 + x^2y^2 > 0$, т.е. ур-ие гпрб. типа. Хркч. ур. $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} =$

$= \dfrac{0 \pm \sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\dfrac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0 \\ x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \mathrm{d}y/y + \mathrm{d}x/x = 0 \\ \mathrm{d}y/y - \mathrm{d}x/x = 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \ln y + \ln x = \ln C_1 \\ \ln y - \ln x = \ln C_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} xy = C_1 \\ y/x = C_2. \end{matrix} \right.$

Введем новые пер. $\xi = xy$, $\eta = y/x$. Используя (2.16): 12.4, с учетом $\xi_x = y$, $\xi_y = x$, $\eta_x = -y/x^2$, $\eta_y = 1/x$, находим: $u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi y - u_\eta \cdot y/x^2$, анч-но $u_y = u_\xi x + u_\eta \cdot \dfrac{1}{x}$;

$$u_{xx} = (u_\xi y)_x - \left(u_\eta \cdot \frac{y}{x^2}\right)_x = \ldots = u_{\xi\xi}y^2 - 2u_{\xi\eta}\cdot\frac{y^2}{x^2} + u_{\eta\eta}\cdot\frac{y^4}{x^4} + 2u_\eta\cdot\frac{y}{x^3};$$

$u_{yy} = (u_\xi x)_y + \left(u_\eta \dfrac{1}{x}\right)_y = \ldots = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$. Подс-в их в исх. ур-ие, получим

$$x^2\left(u_{\xi\xi}y^2 - 2u_{\xi\eta}\cdot\frac{y^2}{x^2} + u_{\eta\eta}\cdot\frac{y^2}{x^4} + 2u_\eta\cdot\frac{y}{x^3}\right) - y^2\left(x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}\right) = 0 \Rightarrow -4u_{\xi\eta}y^2 + 2u_\eta\cdot\frac{y}{x} = 0$$

$\Rightarrow u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2}u_\eta\cdot\dfrac{1}{xy} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2\xi}\cdot u_\eta = 0$, т.е. ур-ие приведено к канч. виду.

1*. Найти канч. вид ур-я $x^2z_{xx} + 2xy\cdot z_{xy} + y^2z_{yy} = 0$. О: $z_{\eta\eta} = 0$, $\xi = y/x$, $\eta = y$.

**з2**. Привести к канч. виду ур-ие $\sin^2 x z_{xx} - 2y\sin x z_{xy} + y^2z_{yy} = 0$.

Р. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2\sin^2 x - y^2\sin^2 x = 0$, т.е. данное ур. – парбч. типа. Хркч. ур-ие имеет вид $\sin^2 x(\mathrm{d}y)^2 + 2y\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y^2(\mathrm{d}x)^2 = 0$ или $(\sin x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = 0 \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \ln y + \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \ln C$

$\Rightarrow y\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = C$. Произведем замену пер-х: $\xi = y\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $\eta = y$ – прзвл. фк-я. Тогда получим

$$z_x = z_\xi\xi_x + z_\eta\eta_x = \frac{1}{2}z_\xi\sec^2\frac{x}{2};\ z_y = z_\xi\xi_y + z_\eta\eta_y = z_\xi\operatorname{tg}\frac{x}{2} + z_\eta;$$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x)y\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{4}z_{\xi\xi}y^2\sec^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2}yz_\xi\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$z_{yy} = (z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y = z_{\xi\xi}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2z_{\xi\eta}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + z_{\eta\eta};$$

$$z_{xy} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y)y\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}z_\xi\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + z_{\xi\eta})y\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}z_\xi\sec^2\frac{x}{2}.$$

Подс-я их в исх. ур-ие, получим:

$\dfrac{1}{4}z_{\xi\xi}y^2\sec^4\dfrac{x}{2}\sin^2 x + \dfrac{1}{2}z_\xi y\sec^2\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\sin^2 x - (z_{\xi\xi}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + z_{\xi\eta})y\sec^2\dfrac{x}{2}\sin x - z_\xi y\sec^2\dfrac{x}{2}\sin x +$
$+ y^2(z_{\xi\xi}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + 2z_{\xi\eta}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + z_{\eta\eta}) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}z_\xi y\sec^2\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\sin^2 x + y^2z_{\eta\eta} - z_\xi y\sec^2\dfrac{x}{2}\sin x = 0$ или $yz_{\eta\eta} = $
$= z_\xi\sin x$. Т.к. $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\xi}{\eta}$, то $\sin x = \dfrac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}$. Окончательно получим:

$z_{\eta\eta} = \dfrac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}z_\xi$ – канч. вид исх-го ур-ия.

2*. Привести к канч. виду ур. $z_{xx} - 4z_{xy} - 3z_{yy} - 2z_x + 6z_y = 0$. О: $z_{\xi\eta} - z_\xi = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = 3x + y$.

**з3**. Привести к канч. виду ур-ие $z_{xx} - 2z_{xy} + 2z_{yy} = 0$.

Р. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 1\cdot 2 = -1 < 0$, т.е. это ур-ие элч. типа. Хркч. ур-ие имеет вид $(\mathrm{d}y)^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2(\mathrm{d}x)^2 = 0$ или $y'^2 + 2y' + 2 = 0$. Отсюда $y' = -1 \pm i \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -1 + i \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -1 - i \end{cases} \Bigg| \underset{\text{инт.}}{\Rightarrow} \begin{matrix} y + x - ix = C_1 \\ y + x + ix = C_2 \end{matrix}\Bigg|$

заменой пер-ых $\begin{matrix} \xi = y + x \\ \eta = x \end{matrix}$ имеем $\left(\text{учитывая } \begin{matrix} \xi_x = 1, \xi_y = 1 \\ \eta_x = 1, \eta_y = 0 \end{matrix}\right)$:

$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = z_\xi + z_\eta$; $z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi$; $z_{xx} = (z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x) + (z_{\eta\xi}\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x) = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}$; $z_{xy} = z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x = z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta}$; $z_{yy} = z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y = z_{\xi\xi}$. Подс-я их в исх. ур., получим:

$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} - 2z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + 2z_{\xi\xi} = 0$, т.е. $z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$.

3*. Найти канч. вид ур-ия $\dfrac{1}{x^2}z_{xx} + \dfrac{1}{y^2}z_{yy} = 0$. О: $z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\xi}z_\xi + \dfrac{1}{\eta}z_\eta\right) = 0$, $\xi = y^2$, $\eta = x^2$.

**з4**. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$. О: $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2}u_\xi = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$.

**з5**. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$. О: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0$; $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, оси крд-т – линии парбч-сти.

**з6**. $x^2u_{xx} + 2xy\cdot u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$. О: $u_{\eta\eta} = 0$; $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$.

**з7**. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$. О: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{2\xi}u_\xi + \dfrac{1}{2\eta}u_\eta = 0$; $\xi = y^2$, $\eta = x^2$.

**з8**. $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0$, где $\alpha$ – пст-я. О: ур-ие элч-но при $y > 0$, гпрбч-но при $y < 0$, парбч-но при $y = 0$. При $y > 0$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{2\alpha - 1}{\eta}u_\eta = 0$; $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$, при $y < 0$ $u_{\xi\eta} - \dfrac{\alpha - \frac{1}{2}}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0$; $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$.

Найти р-ия ур-й (з9-з11) в част. прв-ых второго порядка:

**з9**. Найти общ. р-ие дифн. ур-я в част. прв-ых: $\dfrac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} = 0$.

Р. Перепишем ур-ие в виде $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$. Отсюда видно, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ не зв-т от $x$, т.к. част. прв-я от нее по $x$ равна нулю. Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$, где $C_1(y)$ – прзвл. пст-я от $y$. В ур-и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$ част. прв-я берется по $x$, а $y$ считается пст-ой. Взяв инт-л от левой и правой частей, получим р-ие поставленной задачи: $u(x; y) = \int C_1(y)\,\mathrm{d}x = xC_1(y) + C_2(y)$, где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – прзвл. фк-и от $y$. Если найденную фк. $u(x, y)$ два раза дивф-ть по $x$, то получим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, и, сдт-но, найденная фк. яв-ся р-ем данного ур-я: $(u(x, y))_{xx} = (xC_1(y) + C_2(y)) = (C_1(y))_x = 0$.

9*. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. О: $u(x, y) = C_1(y) + C_2(y)$.

**з10**. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y$.

Р. Переписав ур-ие в виде $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 - y$ и инту-я левую и правую часть по $y$ (считая $x$ пст-ым), получим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \int\left(x^2 - y\right)\mathrm{d}y = x^2y - \dfrac{y^2}{2} + C_1(x)$. Инту-я теперь по $x$ (считая $y$ пст-ым), получим: $u(x, y) = \int\left(x^2y - \dfrac{y^2}{2} + C_1(x)\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3y}{3} - \dfrac{y^2x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$, где $C_1^*(x) = \int C_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Т.о., общ. р-ем исх. ур-я яв-ся фк-я $u(x, y) = \dfrac{x^3y}{3} - \dfrac{y^2x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$, где $C_1^*(x)$, $C_2(y)$ – прзвл. фк-и и $C_1^*(x)$ диф-ма.

Проверка: $(u(x,y))_{xy} = \left(\dfrac{x^3y}{3} - \dfrac{y^2x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)\right) = \left(x^2y - \dfrac{y^2}{2} + \left(C_1^*(x)\right)_x\right)_y = x^2 - y.$

10*. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$. О: $u(x,y) = \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{xy^2}{2} + C_1(y) + C_2(y)$.

**з11**. Р-ть дифн. ур-ие в част. прв-ых $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Р. Переписав ур-ие в виде $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u\right) = 0$ и инту-я по $x$, получим $\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = C_1(y)$. В этом ур. $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ можно расв-ть как обычную прв. по $y$, а $x$ при этом считать парм-ом. Тогда ур-ие перепишется в виде $\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = C_1(y)$. Получили лин. неодн. ур-ие первого порядка и р-ая его, получим $u(x,y) = e^{\int 2\mathrm{d}y}\left(C_2(x) + \int C_1(y)e^{-\int 2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y)$.

Т.о., $u(x,y) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y)$, где $C_2(x)$, $C_1^*(y)$ – прзвл. пст-ые. Проверку сделать самим!

11*. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + y$. О: $u(x,y) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{yx^2}{2} + xC_1(y) + C_2(y)$.

**з12**. Струна длины $l$ закреплена на концах. В нач. момент вр-и она оттянута в тч. $x = l/2$ на рст-и $l/10$, а затем отпущена без толчка. Методом Фурье опр-ть отк-ие $u(x, t)$ тч-к струны в любой момент вр.

Р. В поставленной задаче имеем дело со свободным клб. струны, закрепленной на обоих концах. Ее р-ие сводится к р-ию сд-ей мтч. задачи.

Найти р-ие ур-ия $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (здесь $a^2 = T/\rho$, где $T$ – натяжение струны, а $\rho$ – плотность струны), удщ-е сд. краевым усл.

Нач. усл-я: а) $u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} \text{ при } 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ -\dfrac{1}{5}(x - l) \text{ при } \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$ (рис. 11); б) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) = 0$

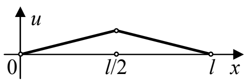


Рис. 11

(струна была отпущена без толчка, значит, нач. скр-ть была равна нулю).

Гранич. усл-я: $u(0; t) = 0$, $u(l; t) = 0$. Физически они означают, что в тч-х $x = 0$ и $x = l$ струна закреплена (рис. 11).

Согласно общ. теории 4°, р-ие задачи дается рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi ant}{l} + b_n\sin\frac{\pi ant}{l}\right)\sin\frac{\pi ant}{l}, \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{d}x,\quad b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

В расв. задаче $\varphi(x) = 0$. Значит, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$). Выч-я $a_n$, получим:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\cdot\frac{1}{5}\left[\int_0^{l/2} x\sin\frac{\pi nx}{l}\mathrm{d}x + \int_{l/2}^{l}(l - x)\sin\frac{\pi nx}{l}\mathrm{d}x\right] = \frac{4}{5l}\cdot\frac{l^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

($n = 1, 2, \ldots$). Заметим, что при чет. $n$ имеем $a_n = 0$, т.к. $\sin\dfrac{\pi n}{2} = \sin\dfrac{2nk}{2} = 0$. При нечет. $n = 2k - 1$

имеем: $\sin\frac{\pi n}{2}$ = $\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$ = $(-1)^{k-1}$ ($k$ = 1, 2, …). Окончательно для коэф-ов $a_n$ получим фм-у: $a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{4l}{5\pi^2(2n-1)^2}$; $a_{2n} = 0$ ($n$ = 1, 2, …).

Р-ие поставленной задачи записывается в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi a n}{l} t \sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{4l}{5\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi a n}{l} t \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

12*. Струна длины $l$, закрепленная на концах, изогнута так, что она приняла форму синусоиды $u = 2\sin\frac{\pi x}{l}$, и отпущена без нач. скр-и. Найти закон клб-я струны. О: $u(x, t) = 2\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$.

**з13**. Методом Даламбера найти р-ие ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при нач. усл-ях $u(x; 0) = \varphi(x) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$.

Р. Приведя ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ к канч. виду, получим ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, где $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Тогда общ. р-ие исх. ур-я имеет вид $u = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,\mathrm{d}z$. Для нашего случая $a = 1$, а $\psi(x) = 0$, тогда $u = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$, где $\varphi(x) = x^2$. Т.о., $u = \frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}$, или $u = x^2 + t^2$.

13*. Найти р-ие ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = x$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -x$. О: $u = x(1-t)$.

**з14**. Найти р-ие ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$.

Р. Здесь $a = 2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x$. Отсюда $u = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\left. z^2\right|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8}[(x+2t)^2-(x-2t)^2]$, т.е. $u = xt$.

14*. Найти р-ие ур. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x$. О: $u = (\cos x \sin at)/a$.

**з15**. Найти форму струны, опрм-ой ур-ем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $t = \frac{\pi}{2a}$, если $u|_{t=0} = \sin x$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1$.

Р. Имеем $u = \frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\mathrm{d}z$, т.е. $u = \sin x\cos at + \frac{1}{2a}\left. z\right|_{x-at}^{x+at}$, или $u = \sin x\times$ $\times\cos at + t$. Если $t = \pi/(2a)$, то $u = \pi/(2a)$, т.е. струна прл. оси абсцисс.

15*. Найти форму струны, опрм-ой ур-ем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \pi$, если $u|_{t=0} = \sin x$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x$. О: $u = -\sin x$.

**з17**. Методом Фурье найти р-ие ур-ия теппр-ти $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в стержне длины $l$ при гранич. усл. $u(0; t) = A$, $u(l, t) = B$ ($A$, $B$ – пст.) и нач. усл-и $u(x; 0) = f(x)$.

Р. Эта задача сводится к задаче, в к-ой гранич. усл-я имеют вид $v(0, t) = v(l, t) = 0$. Для ее р-ия введем новую фк. $v(x, t)$, связанную с искомой фк. $u(x, y)$ рав-ом $v(x, t) = u(x, t) - \frac{B-A}{l}x - A$. Фк. $v(x, t)$ уд-ет усл-ю $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ $\left(\text{так как } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ а } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ и нулевым гранич. усл.: $v(0, t) = u(0, t) - A = 0$, $v(l, t) = u(l, t) - \frac{B-A}{l}l - A = 0$. Нач. усл-ие теперь имеет вид $v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{B-A}{l}x - A = f(x) - \frac{B-A}{l}x - A = g(x)$.

Т.о., задача свелась к нахождению р-ия ур. $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, удщ-го гранич. усл-ям $v(0, t) = v(l, t) = 0$ и нач. усл-ю $v(x, 0) = f(x) - \frac{B-A}{l}x - A$, т.е. к задаче, к-ую умеем р-ть (см. п12 из 5°: 12.4).

17*. Дан тонкий одн. стержень длины $l$, на концах к-го поддерживается пст. темп-ра, равная нулю. Нач. темп-ра стержня опр-ся ур-ем $u(x, 0) = 3\sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l}$. Методом Фурье р-ть задачу при $t > 0$. О: $u(x, t) = 3l^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l} - 2l^{-\frac{9\pi^2 a^2 t}{l}}\sin\frac{3\pi x}{l}$.

**з18**. Один конец стержня $x = 0$ тепизл-н, а другой $x = l$ поддерживается при темп-ре $u(l, t) = 0$. В нач. момент вр-и $t = 0$ темп-ра всех точек стержня равна $u_0$. Найти рсп-ие темп-ры при $t > 0$.

Р. Задача сводится к опр-ю р-ия ур-я $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удщ-го нач. усл-ю $u(x, 0) = u_0$ и гранич. усл. $u_x(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ (усл. тепизл-сти конца $x = 0$ мтч-ки означает, что $u'_x\big|_{x=0} = u'_x(0, t) = 0$). Применяя метод Фурье, найдем, что ур-ие $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеет р-ие вида $u(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x)$. Из гранич. усл-й получим: $u'_x\big|_{x=0} = e^{-a^2\lambda^2 t}(-\lambda C_1\sin\lambda x + \lambda C_2\cos\lambda x)|_{x=0} = e^{-a^2\lambda^2 t}\lambda C_2 = 0$, $u|_{x=0} = e^{-a^2\lambda^2 t}(C_1\cos\lambda l + C_2\sin\lambda l) = 0$. Из первого ур. следует, что $C_2 = 0$. Т.к. $C_1 \neq 0$ (иначе имели бы нулевое р-ие), то из второго ур-я следует, что $\cos\lambda l = 0$. Отсюда $\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и получим беск. мн-во р-й $u_n(x, t) = C_n e^{-\frac{\pi^2 a^2(2n-1)^2 t}{4l^2}}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, удщ-их граничн. усл-ям. Р-ие задачи будем искать в виде ряда $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2(2n-1)^2 t}{4l^2}}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}$. Из нач. усл-я получим $u(x, 0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}$. Эта фм. позволяет опр-ть коэф-ы $C_n$. Для этого разл-им в ряд Фурье чет-ю фк., имеющую прд. $4l$ и равную $u_0$ при $-l < x < l$ и $-u_0$ при $l < x < 3l$. Находим: $C_n = \frac{u_0}{2l}\int_0^l\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\,dx - \frac{u_0}{2l}\int_l^{2l}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\,dx = (-1)^{n-1}\frac{4u_0}{\pi(2n-1)}$. Окончательное р-ие задачи имеет вид $u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}e^{-\frac{\pi^2 a^2(2n-1)^2 t}{4l^2}}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}$.

18*. Концы стержня длиной $l = 100$ см поддерживаются при темп-ре, равной нулю. Опр-ть темп-ру $u(x, t)$ в тч-х стержня для любого момента вр. $t$, если известно нач. усл-ие для темп-ры:

$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}x, \text{ если } 0\le x\le 2{,}5,\\ \dfrac{100}{15}-\dfrac{x}{15}, \text{ если } 25\le x\le 100.\end{cases}$ О: $u(x,t)=\dfrac{160}{3\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{4}\; l^{-\frac{a^2n^2t}{l^2}}\;\sin\dfrac{\pi nx}{l}$.

**з19**. Показать, что фк. $u(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy$, где $a$, $b$ – прзвл. пст-ые, есть гармч. фк-я.

Р. Находим $u_{xx}$, $u_{yy}$ и проверяем, уд-тся ли ур-ие Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Имеем: $u_x = 2ax$, $u_{xx} = 2a$, $u_y = -2ay$, $u_{yy} = -2a$. Значит, $u_{xx} + u_{yy} = 2a - 2a = 0$. Сдт-но, фк. $u(x, y)$ гарм-я.

19*. Яв-ся ли фк. $u=\ln\dfrac{1}{r}\left(\text{где } r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$ гармч. фк-ей? О: $u(x,t)=\dfrac{3}{4}+y-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2$.

**з20**. Д-ть, что фк-и $(x + iy)^n$ и $(x - iy)^n$ яв-ся гармч-ми.

Р. Имеем: $\dfrac{\partial^2(x\pm iy)^n}{\partial x^2}=n(n-1)(x\pm iy)^{n-2}\;\dfrac{\partial^2(x\pm iy)^n}{\partial y^2}=n(n-1)(\pm i)^2(x\pm iy)^{n-2}=-n(n-1)(x\pm iy)^{n-2}$.

Поэтому $\dfrac{\partial^2(x\pm iy)^n}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(x\pm iy)^n}{\partial y^2}=0$, $(x \pm iy)^n$ – одн. гармч-ие мчл. $n$-й сп-и.

Отметим, что если $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $(x \pm iy)^n = r^n(\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi)$.

20*. Яв-ся ли фк. $u = A(x^3 - 3xy^2) + B(3x^2 - y^3)$ ($A$ и $B$ – прзвл. пст-ые) гармч. фк-ей? О: а) да; б) нет, если $B \ne 0$.

**з21**. Найти зн-ие гармч. фк-и $u(x, y)$ в центре круга $x^2 + y^2 \le R^2$, если на его границе $u\big|_{x^2+y^2=R^2}=xy+x-1$.

Р. Т.к. зн-ие гармч. фк-и в центре круга равно ср. арифч-у ее зн-й на границе круга, то $u(0, 0) =$ $=\dfrac{1}{2\pi R}\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=R^2}u(x,y)\,\mathrm{d}s$. Переходя к полярным крд. $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, получим $u\big|_{x^2+y^2=R^2}=$ $=f(\varphi)$, $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$, и, сдт-но, $u(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. В нашем примере $f(\varphi) = R\cos\varphi \cdot R\sin\varphi +$ $+ R\cos\varphi - 1$. Поэтому окончательно получим: $u(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi-1\right)\mathrm{d}\varphi=$ $=\dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{R^2}{4}\cos2\varphi+R\sin\varphi-\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-1$.

21*. Найти зн-я гармч. фк-и $u(x, y)$ в центре круга $x^2 + y^2 \le R$, если на границе она принимает зн-ие $u(x,y)=\dfrac{y^2}{R^2}$. О: $u(0,0)=\dfrac{1}{2}$.

**з22** (Дирихле). Найти стацн. рсп-ие темп-ры на одн. тонкой круглой пластинке радиуса $R$, верхняя половина к-ой поддерживается при темп-ре 1°, а нижняя – 0°.

Р. Если $-\pi < \tau < 0$, то $f(\tau) = 0$, а если $0 < \tau < \pi$, то $f(\tau) = 1$. Рсп-ие темп-ры врж-ся инт-ом: $u(r,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\theta)+r^2}\,\mathrm{d}\tau$. Пусть тч. $(r, \theta)$ расположена в верхнем полукруге, т.е. $0 < \theta < \pi$, тогда $\tau - \theta$ изм-ся от $-\theta$ до $\pi - \theta$, и этот инр. длины $\pi$ не содержит тч-к $\pm\pi$. Поэтому введем подн-ку $\operatorname{tg}\dfrac{\tau-\theta}{2}=t$, откуда $\cos(\tau-\theta)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}\tau=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Тогда получим $u(r, \theta) =$ $=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\operatorname{tg}(\theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\theta/2)}\dfrac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{R+r}{R-r}\cdot t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}(\theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\theta/2)}=\dfrac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)\right]=$

$= \dfrac{1}{\pi}$ arctg$\dfrac{\dfrac{R+r}{R-r}\left(\text{ctg}\dfrac{\theta}{2}+\text{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{R+r}{R-r}\right)^2} = -\dfrac{1}{\pi}$ arctg$\dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}$, или tg($u\pi$) = $-\dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}$. Т.к. правая часть отц-на, то $u$ при $0 < \theta < \pi$ уд-ет нерав-ам $1/2 < u < 1$. Для этого случая получаем р-ие tg($\pi - u\pi$) = $= \dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}$, или $u = 1 - \dfrac{1}{\pi}$ arctg$\dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$.

Если же тч. расположена в нижнем полукруге, т.е. $\pi < \theta < 2\pi$, то инр-л $(-\theta, \pi-\theta)$ изм-ия $\tau-\theta$ содержит тч-у $-\pi$, но не содержит 0, и мы можем сделать подн-ку ctg$\dfrac{\tau-\theta}{2} = t$, откуда $\cos(\tau-\theta) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $\mathrm{d}\tau = -\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Тогда для этих зн-й $\theta$ имеем $u(r, \theta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\text{ctg}(\theta/2)}^{\text{tg}(\theta/2)} \dfrac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r)^2t^2}\,\mathrm{d}t =$ $= -\dfrac{1}{\pi}\left[\text{arctg}\left(\dfrac{R-r}{R+r}\text{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)+\text{arctg}\left(\dfrac{R-r}{R+r}\text{ctg}\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$. Производя анч. прб., найдем $u = -\dfrac{1}{\pi}$ arctg$\dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}$ $(\pi < \theta < 2\pi)$. Т.к. правая часть теперь плж-на ($\sin\theta < 0$), то $0 < u < 1/2$.

22*. Найти р-ие ур-ия Лапласа для внутерннней части кольца $1 \le r \le 2$, удщ-е granич. усл-ям $u|_{r=1} = 0$, $u|_{r=2} = y$. О: $u(r, \theta) = (8/3)\text{sh}(\ln r)\cdot\sin\theta$. Ук: ввести полярные крд.

**Задания для кр. работы № 1**: по образцу п1-п7 и з1-з11 из СР р-ть задачи 1-20.

В задачах 1-7 опр-ть тип ур-1 и привести их к канч. виду.

1. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$. О: парбч-й; $\xi = \sqrt{y}-\sqrt{x}$, $\eta = x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$.

2. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. О: парбч-й; $\xi = x^2+y^2$, $\eta = x$ при $\xi \ne \eta^2$, т.е. при $y \ne 0$, получаем ур $u''_{\eta\eta} + \dfrac{2\xi}{\xi-\eta^2}u'_{\xi} = 0$. При $y = 0$ имеем ур. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. О: в обл-и $D = \{(x, y)|\, x \ne 0, y \ne 0\}$ гпрбч-й, $u''_{\xi\eta} - \dfrac{\xi+2\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u'_{\xi} - \dfrac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u'_{\eta} = 0$. При $x = 0$ или $y = 0$ – парбч-й.

4. $xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. О: В обл-и $D = \{(x, y)|\, x \ne 0, y \ne 0\}$ элч-й, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. При $x = 0$ или $y = 0$ – парбч-й.

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \text{ctg}x\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. О: гпрбч-й, $u''_{\xi\eta} = 0$.

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. О: в обл-и $D = \{(x, y)|\, x \ne 0\}$ гпрбч-й, $u''_{\xi\eta} - \dfrac{1}{6(\xi-\eta)}\left(u'_{\xi} - u'_{\eta}\right) = 0$. При $x = 0$ – парбч-й.

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. О: в обл-и $D = \{(x, y)|\, x \ne 0\}$ элч-й, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\eta}u'_{\eta} = 0$. При $x = 0$ – парбч-й.

В задачах 8-20 найти общ. р-ие дифн. ур-й с част. прв-ми.

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}$. О: $u(x, y) = l^{x+y} + yC_1(x) + C_2(x)$.

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. О: $u(x, y) = C_1(x) + \dfrac{1}{x}C_2(y)$.

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y\dfrac{\partial u}{\partial x}$. О: $u(x, y) = C_1(x)ly^2 + C_2(y)$.

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 5\dfrac{\partial u}{\partial y}$. О: $u(x, y) = C_1(x) + C_2(y)l^{5x}$.

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$. О: $u(x, y) = x^2 + C_1(y)\cdot x + C_2(y)$.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x$. О: $u(x, y) = x^2y + C_1(y) + C_2(x)$.

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$. О: $u(x, y) = C_1(x)l^y + C_2(x)$.

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$. О: $u(x, y) = \dfrac{xy^2}{2} + \dfrac{y^3}{6} + yC_1(x) + C_2(x)$.

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$. О: $u(x, y) = x^3 + xC_1(y) + C_2(y)$.

17. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$. О: $z = xy + \varphi(x) + \psi(y)$.

18. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$. О: $z = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x)$.

19. Найти общ. инт-л ур-я $X\dfrac{\partial z}{\partial x} + Y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, где $X$, $Y$, $Z$ – фк-и $x$, $y$, $z$.

Р. Предварительно р-им систему обык. дифн. ур-й $\dfrac{\mathrm{d}x}{X} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{Z}$. Пусть из $\dfrac{\mathrm{d}x}{X} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Y}$ получим р-ие $\omega_1(x, y, z) = C_1$, а из $\dfrac{\mathrm{d}x}{X} = \dfrac{\mathrm{d}z}{Z}$ – р-ие $\omega_2(x, y, z) = C_2$. Тогда общ. инт-л исх. ур-я имеет вид $\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)] = 0$, где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ – прзвл. непр-но дифм. фк-я.

19*. Найти общ. инт-л ур-я $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$. О: $\Phi(y/x, z/x) = 0$, или $z/x = \psi(y/x)$.

20. Найти общ. инт-л ур-я $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Р. Запишем систему ур-й $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2xy} = \dfrac{\mathrm{d}z}{0}$. Воспользовавшись св-ом прц-и, представим ур-ие $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2xy}$ в виде $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2+y^2+2xy} = \dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{x^2+y^2-2xy} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2} = \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2} \Rightarrow$ $-\dfrac{1}{x+y} = -\dfrac{1}{x-y} + C$, $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = C$ или $\dfrac{y}{x^2-y^2} = C_1$. Второе ур. $\mathrm{d}z = 0$. Отсюда $z = C_2$.

Общ. р-ие имеет вид $\Phi\left(\dfrac{y}{x^2-y^2}, z\right) = 0$ или $z = \psi\left(\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

20*. Найти общ. инт-л ур-я $\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin y + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin y = \sin z$. О: $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$.

**Задания для кр. работы № 2**: по образцу п1-п13 из 12.4 и з1-з22 из СР р-ть задачи 1-20.

1. Струна с закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ оттянута в тч. $x = \frac{1}{3}l$ на малое рст. $h$ от пж-я равновесия и затем отпущена без сообщения ее тч-м нач. скр-ти. Найти отк-ие $u(x, t)$ тч-к струны. О: $u(x, t) = \frac{9h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi na}{l} t \cdot \sin\frac{\pi nx}{l}$.

2. Имеется струна с закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$. Найти смещение $u(x, t)$ тч-к струны при нач. усл-ях: $u(x, 0) = 2\sin\frac{5\pi x}{l}$. $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 3\sin\frac{4\pi x}{l}$.

О: $u(x, t) = \frac{3l}{4\pi a} \sin\frac{4\pi at}{l} \sin\frac{4\pi x}{l} + 2\cos\frac{5\pi at}{l} \sin\frac{5\pi x}{l}$.

3. Методом Фурье найти р-ие $u(x, t)$ ур-я $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удщ-ие гранич. усл-ям $u(0, t) = u(l, t) = 0$ и нач. усл-м $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 1$. О: $u(x, t) = \frac{2l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin\frac{2n-1}{l}\pi at \times \sin\frac{(2n-1)\pi}{l} x$.

4. Методом Фурье найти р-ие $u(x, t)$ ур-я $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удщ-е гранич. усл-ям $u(0, t) = 0$, $u(3, t) = 0$ и нач. усл-м $u(x, 0) = \sin\frac{4\pi x}{3}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. О: $u(x, t) = \cos\frac{8\pi l}{3} \sin\frac{4\pi x}{3}$.

5. По струне длины $l$, закрепленной на концах и находившейся в состоянии покоя, ударили молоточком. В результате удара тч-и струны, расположенные на отрезке $[c - h, c + h]$ получили нач. скр-ть $v_0$. Найти закон клб-й струны. О: $u(x, t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi nc}{l} \sin\frac{\pi nh}{l} \sin\frac{\pi nx}{l} \sin\frac{\pi nat}{l}$.

6. Методом Фурье (см. п8, п9 из 4°: 12.4) найти р-ие $u(x, t)$ ($0 \le x \le l$, $t \ge 0$, $u(x, t) \ne 0$) ур-я $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = x$, $u_t(x, 0) = 0$. О: $u(x, t) = \frac{2l}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos\frac{n\pi at}{l} \times \sin\frac{n\pi x}{l}$.

7. С усл-ми з6 р-ть ур-ие $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = x^4 - 2x^3 + x$, $u_t(x, 0) = 0$. О: $u(x, t) = \frac{96}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \cos(2n + 1)\pi at \sin(2n + 1)\pi x$.

8. С усл-ми з6 р-ть ур-ие $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x(x - l)$ при $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. О: $u(x, t) = -\frac{16l^4}{\pi^5 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \sin^2\frac{(2n-1)\pi at}{2l} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.

9. Методом Даламбера (см. 5°: 12.4, з13-з15 из СР) найти р-ие $u(x, t)$ ($-\infty < x < \infty$, $t > 0$) задачи Коши: $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = x$. О: $u(x, t) = xt$.

10. С усл-ми з9 р-ть ур-ие $u_{tt} = u_{xx}$ при $u(x, 0) = \sin x$, $u'_t(x, 0) = \cos x$. О: $u(x, t) = \sin(x + t)$.

11. С усл-ми з9 р-ть ур-ие $u_{tt} = u_{xx}$ при $u(x, 0) = x(1 + x^2)^{-1}$, $u_t(x, 0) = \sin x$.

О: $u(x, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \sin x \sin t\right)$.

12. Найти р-ие ур-я теппр-ти $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удщ-е усл-м: $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l^2}$.

О: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\ e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}\ \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

13. Концы стержня длиной $l$ поддерживаются при темп-ре, равной нулю. Нач. темп-ра опр-ся фм-ой $u(x, 0) = 5\sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l}$. Найти темп-у стержня для любого момента вр-и.

О: $u(x, t) = 5\, l^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\ \sin\frac{\pi x}{l} - 2\, l^{-\frac{9\pi^2 a^2 t}{l^2}}\ \sin\frac{3\pi x}{l}$.

14. Найти рсп-ие темп-ры в стержне длиной $l$, если на концах его поддерживается темп-ра, равная нулю, а нач. темп-ра равна ед-е вдоль всего стержня.

О: $u(x, t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\ l^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}\ \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

15. Найти р-ие $u(x, y)$ ур-я $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удщ-е granич. усл-м $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ и нач. усл-ю $u(x, 0) = 3\sin 2x$. О: $u(x, y) = 3l^{-4y} \cdot \sin 2x$.

16. Конец стержня $x = 0$ имеет темп-у $u(0, t) = 0$, а на конце $x = l$ $u(l, t) = 100°$. Выч-ть рсп-ие темп-ры $u(x, t)$ в тч-х стержня для любого момента вр-и $t$, если известно рсп-ие ее в нач. момент $u(x, 0) = \begin{cases} \frac{200}{l}x, \text{ если } 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ 100, \text{ если } \frac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$ Ук: задачу целесообразно свести к задаче с нулевыми granич. усл-ми (см. з17 из СР). О: $u(x, t) = \frac{100x}{l} + \frac{400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} l^{-\frac{a^2 n^2 t}{l^2}}\ \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.

17. Найти зн-я гармч. фк-и $u(x, y)$ в центре круга $x^2 + y^2 \le R^2$, если на границе круга принимает зн-ие $u(x, y) = R + x$ (см. з21 из СР). О: $u(0, 0) = R$.

18. С усл-ми з18 р-ть задачу с границей $u(R, \varphi) = 2R\varphi(2\pi - \varphi)$. О: $\frac{4}{3}\pi^2 R$.

19. Р-ть задачу Дирихле для круга радиуса $R$ с центром в нач. крд-т, если задано granич. усл-ие $u|_{r=R} = \frac{3x}{R}$. О: $u(r, \varphi) = \frac{3}{R}r\cos\varphi = \frac{3x}{R}$.

20. С усл-ми з19 р-ть задачу с границей $u|_{r=R} = 3 - 5y$. О: $u = 3 - 5y = 3 - 5r\sin\varphi$.

# 13. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

Чем больше мы познаем неизменные законы природы, тем все более невероятными для нас становятся чудеса.

Ч. Дарвин

## ЛЕКЦИЯ 36

## 13.1 ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ, КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

**1°. Основные сведения. Операции над комплексными числами**. До сих пор основы теории фк-й комп. пер-го были изложены по мере нх-сти. Так в 4°: 6.1 описано мн-во комп. чисел и мчл-ы, в 4°: 11.2 – одн. дифн. ур-ия с пст. коэф-ми (случай комп. р-й), в 8°: 12.2 – спн. ряды в комп. обл-и, в 5°: 12.3 – ряд Фурье в комп. обл-и, в 6°: 12.3 – инт. Фурье и его комп. форма. В данной главе эти понятия расширим и изложим новые сведения о теории комп. пер-ой, делая упор на их практическое применение.

Для удобства читателя сначала перечислим нх-мые в дальнейшем сведения, изложенные в вышеуказанных параграфах.

Напомним, что комп-ми наз. числа вида $z = x + iy$ (или $z = x + yi$), где $x$ и $y$ – дсв. числа, а $i = \sqrt{-1}$. При этом $x$ наз. дсв. частью, $y$ – мнимой частью комп. числа $z$ и обз. $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. Комп. числа можно представить в алгч., тригч., пкзт. формах, т.е.

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \tag{1.1}$$

где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \mathrm{Arg}z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$. Вел-а угла $\varphi = \mathrm{Arg}z$ опр-ся неоднозначно, а с точностью слг-го $2\pi k$. Фкс-уя один период (прд.) в пределах $-\pi < \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$), выделяя главную ветвь арг-та и обз-ив $\arg z$, получим $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, где $k = 1, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Комп. число $z = x + iy$ геомч-ки изб-ся на пл-ти $xOy$ тч-й с абсциссой $x$ и ординатой $y$. В таком случае пл-ть $xOy$ наз. комп. пл-ю и обз-ся $z$. Ось абсцисс в пл-и $z$ наз. дсв. осью, а ось ординат – мнимой осью. Можно также сопоставить числу $z$ вк-р, нпв-ый из нач. крд-т $O$ в тч-у $z$ (см. 4°: 6.1).

Комп. числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ наз. сопряженными (спрж.). Легко проверить, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Над комп. числами опр-тся сд-ие операции:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.2}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{1.3}$$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{1.5}$$

Обобщая фм-ы (1.4) и (1.5), получим:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \text{ (фм-а Муавра)}, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[r\left(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $k = \overline{0, n-1}$. Геомч. интерпретацию (инпц.) этих оперц. см. в 4°: 6.1.

**п1**. При каких дсв. зн-ях $x$ и $y$ выполняется рав-во $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$.

Р. $2x - ix + 2iy - y = 4 - 5i \Rightarrow (2x - y) + i(-x + 2y) = 4 - 5y \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \left| \begin{matrix} x = 1, \\ y = -2 \end{matrix} \right.$.

**п2**. Выч-ть $(1+i)\left(\sqrt{5}-2i\right)$.

Р. $(1+i)\left(\sqrt{5}-2i\right) = \sqrt{5} + i\sqrt{5} - 2i + 2 = \left(\sqrt{5}+2\right) + i\left(\sqrt{5}-2\right)$.

**п3**. Найти Re$z$ и Im$z$ ур-я $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$ .

Р. Находим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}+2i+3i-\sqrt{3}}{4+3} = \frac{\sqrt{3}}{7} + i\,\frac{5}{7} \Rightarrow \text{Re}z = \frac{\sqrt{3}}{7},\ \text{Im}z = \frac{5}{7}.$$

**п4**. Какие комп. числа сопряжены со своим кубом?

Р. Т.к. $z_3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$, а по усл-ю задачи $z^3 = \bar{z} = x - iy$, то $x^3 - 3xy^2 = x$, $3x^2y - y^3 = -y \Rightarrow (x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$. Тогда своим кубам сопряжены сд. комп. числа: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$.

**п5**. Представить в тригч. форме числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 2i$ и $z_4 = -5$.

Р. Опр-им модули чисел по фм-е $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ : $|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 5$. Для нахождения арг-ов построим тч-и $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $z_4$ на комп. пл-и (рис. 1) и находим $\arg z_1 = \varphi_1 = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \text{arctg}\,\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$, $\arg z_2 = \varphi_2 = \text{arctg}\,\dfrac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$, $\arg z_3 = \arg 2i = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg z_4 = \arg(-5) = \pi$. Тогда $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$, $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$,

$z_3 = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right]$, $z_4 = 5[\cos\pi + i\sin\pi]$.

**п6**. Выч-ть $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$ .

Р. В п5 нашли $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$ и с учетом (1.6) получим $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5 =$

$$= 2^5\left[\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right] = 32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 32\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = 16\sqrt{3} - 16i.$$

**п7**. Найти $\sqrt[3]{1+i}$ .

Р. Из п5 имеем $z = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$, отсюда и с учетом (1.7) получим для $k = 0, 1, 2$

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right]$ три различных корня: $z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right]$,

$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{9\pi}{12} + i\sin\dfrac{9\pi}{12}\right]$, $z_3 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\sin\dfrac{17\pi}{12}\right]$.

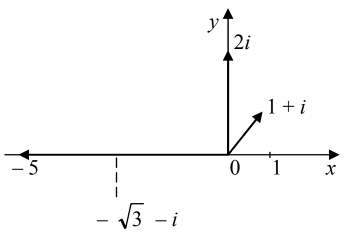


Рис. 1

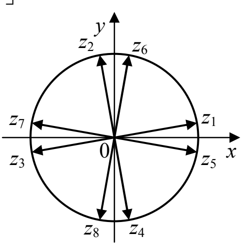


Рис. 2

**п8**. Найти корни ур-я $z^8 - 2\sqrt{3}\,z^4 + 4 = 0$ и построить их на комп. пл-ти (рис. 2).

Р. Обз-им $z^4 = t$, тогда получим кв. ур-ие $t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 4 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3} \pm i$, сд-но, $z = \sqrt[4]{\sqrt{3} \pm i}$. Числа $\sqrt{3} + i$ и $\sqrt{3} - i$ – сопряженные, поэтому модули их одинаковы и равны 2, а арг-ы отличаются знаком: $\arg\left(\sqrt{3}+i\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\frac{\pi}{6}$. По (1.7) находим $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right]$, $k = \overline{0, 3}$ ; $z_{5,6,7,8} = \sqrt[4]{\sqrt{3}-i} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right]$, $k = \overline{0, 3}$.

Т.к. $|z_k| = \sqrt[4]{2}$ ($k = \overline{1, 8}$), то все корни лежат на окр-ти с центром в нач. крд-т. Арг-ты этих чисел $\pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$. Значит, арг-т числа $z_2$ отличается от арг-та числа $z_1$ на $\frac{\pi}{2}$, арг-т $z_3$ отличается от арг-та $z_1$ на $\pi$, арг. $z_4$ – на $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому, построив на пл-и вк-р $z_1$, получим тч-и $z_2$, $z_3$, $z_4$, если повернем вк-р $z_1$ на углы $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ ств-но. Т.о., тч-и $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ лежат в вершинах кв-а, вписанного в окр-ть радиуса $\sqrt[4]{2}$, одна из верш. к-го – тч. $z_1$. Таким же образом строятся тч-и $z_6$, $z_7$, $z_8$: строим тч-у $z_5$ и вписываем в окр-ть кв-т с верш. $z_5$, $z_6$, $z_7$, $z_8$ (рис. 2).

**2°. Области. Понятие функции**. Комп. пер-я $z$ считается заданной, если известно мн. $D_z$ комп. чисел, к-ые она принимает. Чаще всего мн. $D_z$ задается антч-ки (н-р, $|z - (-2 + i3)| < 5$, где $\mathrm{Re}z = 2$, $\mathrm{Im}z = -3$) или геомч-ки.

Если на пл-и $xOy$ линия задана пармч. ур-ми $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_1 \le t \le t_2$), то ур-ие

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \tag{2.1}$$

наз. ур-ем линии в комп. форме. При этом если $z(t_1) < z(t_2)$, то $z(t_1)$ есть нач., $z(t_2)$ – конец крв-й. Если нач. и конец совпадают, то крв. наз. замкнутой.

Тч., ствщ-я только одному зн. парм-а, наз. простой тч., а ствщ-я двум и более зн-ям парм-а, наз. кратной тч. Крв., состоящая только из простых тч., наз. простой (жордановой) крв-й.

Обл-ю на комп. пл-и $Z$ наз. мн. $D_z$, обладающее сд. св-ми: 1) вместе с каждой тч. из $D_z$ этому мн. принадлежит и дт-но малый круг с центром в этой тч. (открытость); 2) любые две тч. из мн. $D_z$ можно соединить линией, состоящей из тч-к этого мн-ва (связанность).

Внутренность круга с радиусом $\delta$ с центром в тч. $z_0$ наз. $\delta$-окрестностью (окрс.) тч-и $z_0$, т.е.

$$\delta(z_0) = \{z\colon \rho(z, z_0) < \delta \text{ или } |z - z_0| < \delta\}. \tag{2.2}$$

Тч. $z$ наз. граничной тч. обл-и $D_z$, если в любой окрс-и тч-и $z$ есть тч-и, и принадлежащие, и не принадлежащие $D_z$. Свк-ть всех граничных тч. обл-и $D_z$ наз. ее границей. Обл. $D_z$ с присоединенной к ней границей наз. замкнутой обл. и обз-ют $\overline{D}_z$. Если граница обл-и состоит из $n$ замкнутых линий, не перкщ-хся друг с другом, обл. наз. $n$-связной.

Обл. $D_z$ наз. односвязной, если любая простая замкнутая крв., целиком принадлежащая $D_z$, может быть стянута в тч-у с помощью непр. деформации без выведения из обл. $D_z$ (рис. 3). Отсюда следует, что если обл-ть многосвязная, то ее граница не может состоять из одной простой замкнутой крв. (рис. 4).

В дальнейшем рас-им и те случаи, когла граница обл-и есть одна или несколько кусочно-гладких крв., к-ые могут вырождаться в тч-и. Поэтому введем два термина: «разрез» обл-и и «выколотая» тч.

Рас-им мн $D_z$ комп-х чисел $z = x + iy$ и мн. $D_w$ комп. чисел $w = u + iv$. Дадим сд.

**о1**. Фк-ей $w$ комп. пер-ой $z$ наз. правило или закон, по к-му для каждого $z \in D_z$ ств-ет опр. зн-ие $w \in D_w$ (рис. 5) и обз-ся $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, (2.3)
где $u(x, y) = \mathrm{Re}f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im}f(z)$, $(x, y) \in D_z$ – обл. опр-я, $D_w$ – обл. зн-й фк-и $f(z)$.

Если каждому $z$ отвечает одно зн. $w$, фк-я наз. однозначной, в противном случае – многозначной.

Если мн-ва $D_z$ и $D_w$ изб-ть на комп. пл-ях $Z(xOy)$ и $W(uOv)$ ств-но, то фк. $w = f(z)$ задает отб-ие мн-ва

$O_z$ тч-к на пл-и $W$ (обл-и опр-я $f(z)$) на мн. $D_w$ тч-к на пл-и (обл. зн-й $f(z)$). При этом когда при отб-и $w = f(z)$ мн. $M \subset D_z$ переходит в мн. $N \subset D_w$, мн. $N$ наз-ют образом мн-ва $M$, а $M$ – прообразом мн-ва $N$.

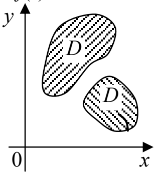


Рис. 3

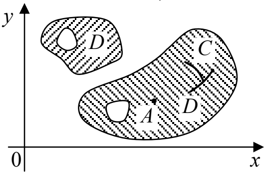


Рис. 4

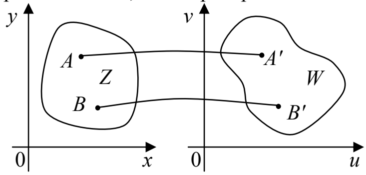


Рис. 5

**п9**. Написать ур-я линий в комп. форме: а) $x = 2 + 3\cos t$, $y = -1 + 3\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$; б) $2x^2 + 3y^2 = 12$.

Р. а) ур-я $x = 2 + 3\cos t$, $y = -1 + 3\sin t$ – пармч. ур-я окр-ти радиусом 3 с центром в тч-е (2, – 1). Отсюда, согласно ур-ю (2.3), имеем $z = z(t) = 2 + 3\cos t + i(-1 + 3\sin t) = 2 - i + 3(\cos t + i\sin t) = 2 - i + 3e^{it}$. Итак, искомое ур. $z = 2 - i + 3e^{it}$.

б) элс. $2x^2 + 3y^2 = 12$ или $(x^2/6 + y^2/4 = 1)$ имеет центр в тч. (0, 0) и полуоси, равные $\sqrt{6}$ и 2. Пармч. ур-ем такого элс. будут $x = \sqrt{6}\cos t$, $y = 2\sin t$. Сдт-но, $z = \sqrt{6}\cos t + i2\sin t$ – искомое ур.

**п10**. Какие линии на пл-и $xOy$ представлены ур-ми: а) $z = 5e^{it} + 2e^{-it}$; б) $z = 2t - 1 + i(1 + 2t - 4t^2)$?

Р. а) т.к. $e^{\pm it} = \cos t \pm i\sin t$, то $z = 5e^{it} + 2e^{-it} = 7\cos t + i3\sin t$. Тогда по фм-е (2.3) имеем $x = 7\cos t$, $y = 3\sin t$ – пармч. ур-я данной линии. Иск-ив парм. $t$, получим элс. $x^2/49 + y^2/9 = 1$;

б) из данного ур. следует, что $x = 2t - 1$, $y = 1 + 2t - 4t^2$ – пармч. ур-я линии. Иск-им парм. $t$: $t = (x + 1)/2$, $y = 1 + 2(x + 1)/2 - 4(x + 1)^2/4 = 1 - x - x^2$. Итак, получили парб-у $y = 1 - x - x^2$.

**п11**. Опр-ть и построить на комп. пл-и $Z$ линии, заданные ур-ми: а) $|z + 4 - i2| = 3$; б) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-2}{z+i} = 2$; в) $\arg(z - 1) = 2$.

Р. а) пользуясь опр-ем модуля и тем, что $z = x + iy$, получим $|z + 4 - i2| = |x + iy + 4 - i2| = |(x + 4) + i(y - 2)| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = 3$ или $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ – ур. окр-ти радиуса 3 с центром в тч. (– 4, 2) (рис. 6а);

б) т.к. $z = x + iy$, то $\dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{(x-2)+iy}{x+i(y+1)} = \dfrac{((x-2)+iy)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))} = \dfrac{(x^2-2x+y^2+y)+i(2-x+2y)}{x^2+(y+1)^2}$,

значит, $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{x^2-2x+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} = 2$. Отсюда имеем $x^2 - 2x + y^2 + y = 2(x^2 + (y + 1)^2) \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1{,}5)^2 = 5/4$. Сдт-но, ур-ие $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-2}{z+i} = 2$ опр-ет окр-ть радиуса $\sqrt{5}/2$ с центром в тч. $z_0 = -1 - i \cdot 1{,}5$ (рис. 6б);

в) ур-ие $\arg(z - 1) = \pi/4$ опр-ет луч, выходящий из тч. $z_0 = 1$ с углом $\pi/4$ (рис. 6в), т.к. ур-ие $\arg(z - 1) = \arg((x - 1) + iy) = \pi/4$ равносильно ур-ю $\dfrac{y}{x-1} = \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4}$ или $y = x - 1$.

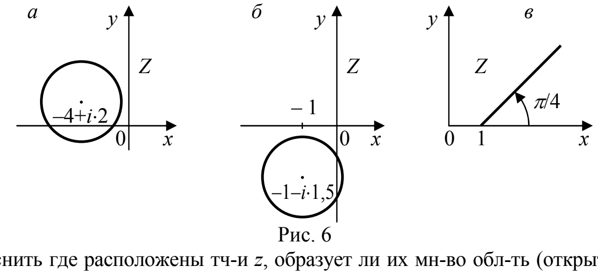


Рис. 6

**п12**. Выяснить где расположены тч-и $z$, образует ли их мн-во обл-ть (открытую или замкнутую, огрн-ю или неогрн-ю, односвязную или многосвязную), если $z$ уд-ет усл-ям: а) $|z + 2 - i| \le 3$; б) $|\arg z - \pi/4| \le \pi/6$; в) $|z^2 - 2z - 8| + 1 < |z + 2| + |z - 4|$.

Р. а) т.к. $|z + 2 - i| = |z - (-2 + i)|$ – рст. между тч-ми $z$ и $z_0 = -2 + i$, то нерав-во $|z + 2 - i| \le 3$

опр-ет мн-во тч-к круга радиуса 3 с центром в тч. $z_0 = -2 + i$. Это мн. яв-ся обл-ю, т.к. оно обладает св-ми открытости и связности. Обл-ть огр-на и замкнута, т.к. включает свою границу $|z + 2 - i| = 3$, и односвязна, т.к. граница состоит из одной окр-ти $|z + 2 - i| = 3$ (рис. 7а);

б) нерав-у $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{6}$ или $-\frac{\pi}{6} < \arg z - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6}$ уд-ют тч-и $z$, лежащие внутри угла $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\right)$, с верш-ой в нач. крд-т и бист-ой, образующей с плж. нпв-ем дсв. оси угол $\pi/4$ (рис. 7б). Эти тч. $z$ образуют мн., к-ое яв-ся открытой и неогранич. обл-ю.

в) заметив, что $z^2 - 2z - 8 = (z + 2)(z - 4)$ и модуль прз-я равен пзв-ю модулей, для данного нерав. будем иметь: $|(z + 2)(z - 4)| + 1 - |z + 2| - |z - 4| < 0$, $|x + 2||z - 4| - |z + 2| - (|z - 4| - 1) < 0$, $(|z + 2| - 1)(|z - 4| - 1) < 0$.

Последнее нерав. возможно лишь в том случае, когда оба мнж. левой части имеют разные знаки, т.е. в двух случаях: 1) $|z + 2| - 1 > 0$, $|z - 4| - 1 < 0$; 2) $|z + 2| - 1 < 0$, $|z - 4| - 1 > 0$.

В первом случае мн-во тч-к $z$ заполняет круг с границей $|z - 4| = 1$, а во втором случае $|z + 2| = 1$. В целом мн. тч-к, опрм-ое данным мн., заполняет два указанных круга (рис. 7в) и не яв-ся обл-ю, т.к. не выполнено усл-ие связности.

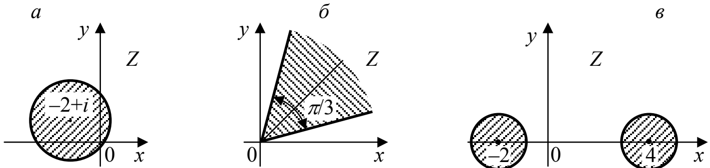


Рис. 7

**п13**. При отб-и $w = 1/z$ найти: а) образы линий $x = 1$, $y = x - 2$, $x^2 + y^2 = cx$, где $c$ – пст-я, $c \neq 0$ (рис. 8а); б) прообразы линий $u = c$, $v = c_2$, где $c_1$, $c_2$ – пст-ые (рис. 9а).

Р. а) представим фк-ю $w = 1/z$ в виде (2.3); $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$. Отсюда $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Когда тч. $z$ пробегает линию $x = 1$ (пм-ю, прл. мнимой оси) на пл-и $Z(xOy)$, то ствщ-я тч. $w$ пробегает на пл-и $W(uO_1v)$ линию $u = \frac{1}{1+y^2}$, $v = \frac{-y}{1+y^2}$ $(-\infty < x < \infty)$. Иск-ив парм. $y$, получим $u^2 + v^2 - u = 0$ или $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$. Сдт-но, для линии $x = 1$ на пл-и $Z$ яв-ся окр-ть $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ на пл-и $W$ при отб-и $w = 1/z$ (рис. 8б).

Анч-но, когда тч. $z$ пробегает линию $y = x - 2$ на пл. $Z$, ствщ-я тч. $w$ пробегает на пл-и $W$ линию $u = \frac{x}{x^2+(x-2)^2}$, $v = \frac{2-x}{x^2+(x-2)^2}$ $(-\infty < x < \infty)$. Иск-ив парм. $x$, получим $\frac{v}{u} = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow x = \frac{2u}{u+v}$. Тогда $u = \dfrac{\frac{2u}{u+v}}{\left(\frac{2u}{u+v}\right)^2 + \left(\frac{2u}{u+v} - 2\right)^2} \Rightarrow 2u^2 + 2v^2 - u - v = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$. Итак, на пл. $Z$ образом яв-ся окр-ть $\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$ (рис. 8б).

Рас-им теперь окр-ть $x^2 + y^2 = cx$ на пл. $Z$. На пл. $W$ ствщ-я линия (образ) опр-ся ур-ми: $u = \left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_{x^2+y^2=cx} = \frac{x}{cx} = \frac{1}{c}$, $v = \frac{-y}{cx}$.

Рав-во $u = 1/c$ означает, что тч-и образов данных окр-ей на пл. $Z$ располагаются на пм-х, прл-х мнимой оси $O_1v$ пл-ти $W$, неогрн-но пржщ-хся к указанной оси с увеличением радиусов отбм. окр-ей (рис. 8б).

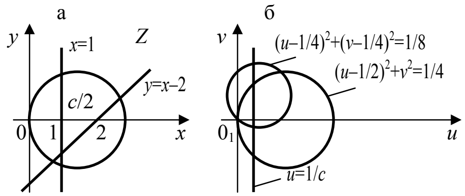


Рис. 8

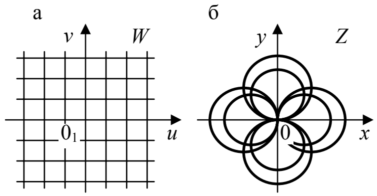


Рис. 9

б) когда тч. $w$ пробегает линию $c_1$ (пр-ю, прл. оси $O_1v$ пл-и $W$) на пл-и $W$ (рис. 9а), ствщ-я тч. $z$ пробегает на пл. $Z$ линию (прообраз) $c_1 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ или $x^2 + y^2 - \dfrac{x}{c_1} = 0$ при $c_1 \neq 0$, откуда видно, что расв. ур-е опр-ет на пл. $Z$ семейство окр-ей, каждая из к-ых имеет центр на дсв. оси и касается мнимой оси. При $c_1 = 0$ получим на пл. $Z$ прообраз $x = 0$. Сдт-но, прообразами семейства пм-х линий $u = c_1$ ($c_1 \neq 0$) на пл. $W$ при отб-и $w = 1/2$ яв-ся семейство окр-ей $x^2 + y^2 - x/c_1 = 0$ на пл. $Z$ (рис. 9б).

**3°. Элементарные функции комплексного переменного.**

1. Тригч. и гпрбч. фк-и опр-ся ств-но по сд. фм-ам:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}; \tag{3.1}$$

$$\mathrm{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \mathrm{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z},\ \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z}. \tag{3.2}$$

Грф-и гпрбч. фк-й и их связь с тригч. фк-ми см. в 9°: 7.1. Каждая тригч. фм-а имеет аналог в теории гпрбч. фк-й (см. табл. 1).

Таблица 1

| | |
|---|---|
| 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, | 1*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, |
| 2) $\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$, | 2*) $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$, |
| 3) $\sin(x + y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$, | 3*) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x$, |
| 4) $\cos(-x) = \cos x$, | 4*) $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$, |
| 5) $\sin(-x) = -\sin x$, | 5*) $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$, |
| 6) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, | 6*) $\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$, |
| 7) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, | 7*) $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$, |
| 8) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, | 8*) $\mathrm{ch}0 = 1$, $\mathrm{sh}0 = 0$, |
| 9) $e^{xi} = \cos x + i\sin x$, | 9*) $e^{x} = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x$, |
| 10) $\cos x = \dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, | 10*) $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, |
| 11) $\sin x = \dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$, | 11*) $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, |
| 12) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, | 12*) $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$, $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$, |
| 13) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$, | 13*) $\mathrm{ch}\,x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$ |
| 14) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ | 14*) $\mathrm{sh}\,x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ |

Проверка любой фм. из правого сл. не представляет трудностей. Н-р, д-ем фм-у 3*): $\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2} = \dfrac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{sh}(x+y)$.

Интереснее, однако, не заниматься проверкой фм-л правого сл., а предложить средство их нахождения. Мы уже говорили, что врж. $e^z$ имеет смысл не только для дсв-х, но и для любых комп. $Z$, анч-но и для врж-й из (3.1):

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{3.3}$$

Можно д-ть, что все фм-ы триг-и, связывающие $\sin x$ и $\cos x$, остаются верными при подн-ке вместо $x$ любого комп. числа. С др. стороны, подн. $z = xi$ в фм-ы (3.3) дает (с учетом $i^2 = -1$)

$\cos(xi) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$, $\sin(xi) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = \dfrac{(e^{-x}-e^{x})i}{2i^2} = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}i$, откуда

$$\cos(xi) = \mathrm{ch}x,\ \sin(xi) = i\sin x. \qquad (3.4)$$

Фм. (3.4) и дают ключ к построению фм-л правого сл. табл. 1.

**п13а**. Н-р, возьмем тригч. фм-у 2) $\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ и заменим $x$ и $y$ на $xi$ и $yi$: $\cos[(x + y)i] = \cos(xi)\cos(yi) - \sin(xi)\sin(yi)$, откуда вытекает фм-а 2*):

$$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y - (i\mathrm{sh}x)(i\mathrm{sh}y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y.$$

**п13б**. На основе фм-ы (3.4) можно получить связь гпрбч. фк-и с гпрб-ой. Рав-ва $x = \cos t$, $y = \sin t$ – пармч. ур-я окр-ти $\cos^2 t + \sin^2 t = x^2 + y^2 = 1$. Отсюда по фм-е (3.4) имеем $(\cos it)^2 + (\sin it)^2 = (\mathrm{ch}t)^2 + (i\mathrm{sh}t)^2 = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = x^2 - y^2 = 1$, где $x = \mathrm{ch}t$, $y = \mathrm{sh}t$ (см. рис. 9, 10 из 9°: 7.1).

2. Пкзт. фк-я $\quad e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. (3.5)

3. Лгрч. фк-я $\quad \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$ ($k$ – любое целое число); (3.6)

главное зн. лгр-ма: $\quad \ln z = \ln|z| + i\arg z$. (3.7)

4. Обобщенные пкзт-я и спн-я фк-и:

$a^z = e^{z\ln a}$, $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ ($z$, $\alpha$ и $a$ – любые комп. числа, $a \neq 0$). (3.8)

Пкзт. форма комп. числа $z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). (3.9)

**п14а**. Выч-ть зн-ие пкзт. фк-и $e^{3+\frac{\pi i}{2}}$.

Р. $e^{3+\frac{\pi i}{2}} = e^3\left[\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right] = e^3[0 + i] = ie^3 \approx 20{,}09i$.

**п14б**. Представить число $\sqrt{3} - i$ в пкзт. форме.

Р. По фм-е (1.1) находим $\left|\sqrt{3} - i\right| = 2$, $\arg\left(\sqrt{3} - i\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ тогда $\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)} = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$.

**п14в**. Выч-ть зн-ие лгр-ма Ln(– 1).

Р. По (3.6) находим $\ln(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2\pi k) = \pi i + 2\pi k i = (2k + 1)\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

**п14г**. Выч-ть $\sin(5 - i)$.

Р. По опр-ю $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, сдт-но, $\sin(5 - i) = \dfrac{1}{2i}[e^{i(5-i)} - e^{-i(5-i)}] = \dfrac{1}{2i}[e^{1+5i} - e^{-1-5i}] =$

$= -\dfrac{i}{2}[e(\cos 5 + i\sin 5) - e^{-1}(\cos 5 - i\sin 5)] = \sin 5\,\mathrm{ch}1 - i\cos 5\,\mathrm{sh}1$.

**п14д**. Выч-ть $i^{\,i}$.

Р. По фм-е (3.8) $a = i$ и $z = i$, тогда $i^{\,i} = e^{i\ln i} = e^{i[\ln|i| + i\arg i + i2\pi k]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

**п14е**. Найти корни ур-я $\cos z = 2$ и построить их на комп. пл-ти.

Р. По (3.3) имеем $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$ или $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$. Пролгр-ем $iz = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i\arg\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i2\pi k = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Опр-ем $z = \dfrac{1}{i}\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2\pi k = 2\pi k - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$ и получим две серии корней $z_1^{(k)} = 2\pi k - i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, $z_2^{(k)} = 2\pi k - i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$,

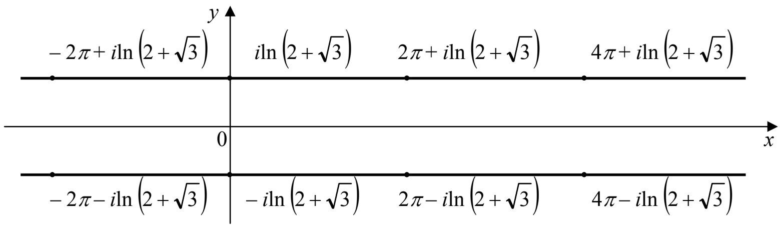



Рис. 10

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Т.к. $\ln\left(2-\sqrt{3}\right) = \ln\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, то эти числа будут располагаться на двух пм., прл-ых оси $Ox$ и отстоящих от нее (рис. 10) на рст-и $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

**4°. Предел и непрерывность функции**. Дадим сд. опр-ия:

**о2**. Комп. число $c = a + ib$ наз. пределом фк-и $w = f(z)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(z_0)$ такая, что нерав-во

$$|f(z) - c| < \varepsilon \tag{4.1}$$

выполнится $\forall\ z$, удщ-их

$$z \in \delta(z_0) \text{ (или } |z - z_0| < \delta). \tag{4.2}$$

Если фк. $f(z)$ имеет предел $c$, то пишут так: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$. (4.3)

Стн-ия (4.3) и (4.1), (4.2) экв-ны.

Справедливы (при $z \to z_0$ или $z \to \infty$) стн-ия: $\lim[f_1(z) \pm f_2(z)] = \lim f_1(z) \pm \lim f_2(z)$. (4.4)

$$\lim[f_1(z)f_2(z)] = \lim f_1(z)\lim f_2(z). \tag{4.5}$$

$$\lim\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim f_1(z)}{\lim f_2(z)}\ (\lim f_2(z) \neq 0). \tag{4.6}$$

**о3**. Фк. $w = f(z)$ наз. непр-ой в тч. $z_0$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. (4.7)

**о4**. Фк. $w = f(z)$ наз. непр-ой в обл-и $D_z$, если она непр-на в каждой тч. этой обл-и.

Если фк-и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непр-ны в тч. $z_0$, то непр-ны в этой тч. и фк-и:

$$f_1(z) \pm f_2(z), f_1(z)f_2(z), \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\ (f_2(z) \neq 0). \tag{4.8}$$

Непр. фк-и комп. пер-ой обладают сд. св-ми, к-ые сформулируем в виде

**т1**. Фк. $w = f(z)$, непр-я в замкнутой обл. $\overline{D}_z$: 1) огр-на по модулю, 2) достигает нм. и нб. зн-ий по модулю, 3) равномерно непр-на в обл. $\overline{D}_z$.

Д-ся анч-но д-ву таких же теорем для фк-й дсв. пер-ой (см. 9°: 6.3).

**п15**. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{n+1} + i\dfrac{3n^2-2n+1}{1+n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{z\to 2-3i}\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{|z|^2}$; в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{z^2+2z+5}{z+1-2i}$.

Р. Находим: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{n+1} + i\dfrac{3n^2-2n+1}{1+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n+1} + i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2-3/n)}{n(1+1/n)} +$
$+\ i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3-2/n+1/n^2\right)}{n^2\left(1/n^2+1\right)} = 2 + 3i$; б) $\lim\limits_{z\to 2-3i}\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2} = \left|\begin{matrix}\mathrm{Re}(z^2) = x^2-y^2, \\ |z| = \sqrt{x^2+y^2}\end{matrix}\right| = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -\dfrac{5}{13}$;

в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{z^2+2z+5}{z+1-2i} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i} = 4i$.

**п16**. Иссл-ть на непр-сть фк-и: а) $w = z^2\mathrm{Re}\,\overline{z} - i\mathrm{Im}(z^2)$; б) $w = \dfrac{z^2-3z+1}{|z-2i|-3}$.

Р. а) запишем фк-ю $w$ в виде (2.3): $w = (x + iy)\mathrm{Re}(x - iy) - i\mathrm{Im}(x + iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2)x - i\mathrm{Im}(x^2 + 2ixy - y^2) = x(x^2 - y^2) + 2ix^2y - 2ixy = x(x^2 - y^2) + i \cdot 2xy(x - 1)$. Отсюда следует, что $u(x, y) = x(x^2 - y^2)$, $v(x, y) = 2xy(x - 1)$. Фк-и $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непр-ны на пл-ти $xOy$, значит, данная фк. $w$ также непр-на на всей комп. пл-ти $Z$;

б) фк. $w = \dfrac{z^2-3z+1}{|z-2i|-3}$ непр-на на всей комп. обл-ти $Z$, за иск-ем тч-к окр-ти $|z - 2i| = 3$, в к-ых знмт-ль $|z - 2i| - 3$ обращается в нуль.

**5°. Понятие производной и условие Коши-Римана**. Дадим сд-е

**о5**. Если однозначная фк. $w = f(x)$ опр-на в нек. окрс-ти тч-и $z$ и сущ-ет предел отн-ия прщ-ия фк-и $\Delta w$ к прщ-ю арг-та $\Delta z$ при $\Delta z \to 0$, то этот предел наз. производной (прв.) фк-и $f(z)$ в тч. $z$ и обз-ся:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (5.1)$$

В этом случае фк. $f(z)$ наз. дифм-ой в тч-е $z$.

Усл-ия дифм-сти фк-и $w = f(x)$ в терминах дсв. фк-й $u(x, y)$ и $v(x, y)$ врж-ет сд-ая

**т2**. Для того чтобы фк. $w = f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ была диф-ма в тч. $z = x + iy$, нх. и дт., чтобы фк-и $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были диф-мы в этой тч. и уд-ли в ней усл-ям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (5.2)$$

Д. Нх-сть. Пусть $f(x)$ диф-ма в тч. $z$, т.е. сущ-ет $f'(x) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$. Поскольку предел не зв-т от пути, по к-му $\Delta z \to 0$, то можно (сначала) предположить $\Delta z = \Delta x$, а $\Delta y = 0$. Тогда имеем $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x, y)+iv(x+\Delta x, y)]-[u(xy)+iv(xy)-v(xy)]}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x, y)-u(xy)]+i[v(x+\Delta x, y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ ①

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y$, $\Delta x = 0$. В этом случае $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} =$

$= \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x, y+\Delta y)+iv(x, y+\Delta y)-[u(xy)+iv(xy)]}{i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x, y+\Delta y)-u(xy)]+i[v(x, y+\Delta y-u(xy)]}{i\Delta y} =$

$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ ②

Сравнивая ① и ②, получим (5.2).

Дт-сть. Пусть имеет место усл. Коши-Римана (5.2). Т.к. фк-и $u(x, y)$, $v(x, y)$ диф-мы, то $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1|\Delta z|$, $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2|\Delta z|$, где $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ и $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ при $|\Delta z| \to 0$.

Т.к. $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1|\Delta z| + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2|\Delta z|\right)}{\Delta x + i\Delta y} =$

$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{(\alpha_1+\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + i\left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z} =$

$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ существует ■

С учетом усл-й (5.2) прв-ю фк-и $f(z)$ можно представить в сд. равносильных фм.:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (5.3)$$

**п17**. Д-ть, что фк. $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ – антч-ая, и найти ее прв-ю.

Р. По (3.5) $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$, т.е. условие Коши-Римана выполняется: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, значит, фк-ия антч.; $f'(z) = (e^z)' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$.

Фк. $w = f(z)$, дифм-я в каждой тч. нек. обл-и $D_z$, наз. антч. в этой обл. Если фк. $f(z)$ диф-ма не только в данной тч. $z$, но и в нек. ее окрс-ти, то фк-я наз. антч. (или регулярной) в тч. $z$.

Если для фк-и $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в обл-и $D_z$ фк-и $u(x, y)$, $v(x, y)$ непр-ны, то выполнение усл-й (5.2) дт-но для того, чтобы данная фк. была антч. в этой обл., причем в любой тч. $z \in D_z$, прв-я антч. фк-и может быть найдена по правилам дифв-ия фк-и дсв. пер-ой.

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – антч. фк-я в обл-и $D_z$. Тогда фк-и $u(x, y)$, $v(x, y)$ яв-ся гармоническими (гармч.) фк-ми, т.к. каждая из них уд-ет ур-ю Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$. Поскольку они еще и связаны между собой усл-ми Коши-Римана, то их наз-ют сопряженными гармч. фк-ми.

Если взять в кач-ве $u(x, y)$ и $v(x, y)$ две прзвл. гармч. фк-и, то фк. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, вообще говоря, не будет антч-ой.

Когда для фк-и $f(z)$, антч-ой в обл-и $D_z$, известна одна из гармч. фк-й $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то $f(z)$ можно восстановить с точностью до пст. слг-го. Так, если известна фк. $v(x, y)$ и она яв-ся гармч., то

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} \mathrm{d}x - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y + C, \tag{5.4}$$

если же известна гармч. фк-я $u(x, y)$, то $v(x, y) = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} \mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y + C,$ (5.5)

где $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_z$ – прзвл-я тч. Т.о., искомая антч. фк. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Заменив здесь $x$ и $y$ по фм-ам

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}\,;\; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,, \tag{5.6}$$

получим фк-ю пер-ой $z$.

**п18**. Иссл-ть на дифм-сть и антч-сть фк-ю $w$, найти ее пзв-ю, если она сущ-ет: а) $w = (z - 1)\mathrm{Re}(z + 1)$; б) $w = e^{i\cdot 2z+1}$.

Р. а) т.к. $z = x + iy$, то $w = (z - 1)\mathrm{Re}(z + 1) = ((x - 1) + iy)\mathrm{Re}(x + 1 + iy) = ((x - 1) + iy)(x + 1) = (x^2 - 1) + iy(x + 1) \Rightarrow u(x, y) = x^2 - 1$, $v(x, y) = y(x + 1)$.

Найдем част. прв-ые фк-й $u$ и $v$: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = y$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = x + 1$. Эти част. прв-ые – фк-и, непр-ые на пл-и $xOy$. Проверим выполнение усл-й Коши-Римана (5.2). Сравнивая зн-ия $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, видим, что они равны в тч-е (1, 0), сдт-но, фк. $w = (z - 1)\mathrm{Re}(z + 1)$ диф-ма только в тч-е $z = 1$ и нигде не яв-ся антч-ой, т.к. не сущ-ет окрс-ти тч-и $z = 1$, в к-ой фк-я была бы дифм-ой. Найдем по фм-е (5.3) прв-ю фк-и в тч-е $z = 1$:

$$f'(z)|_{z=1} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = (2x + iy)\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = 2;$$

б) опр-им дсв. и мнимую части фк-и $w = e^{i\cdot 2z+1}$: $w = e^{i\cdot 2z+1} = e^{i\cdot 2(x+iy)+1} = e^{1-2y}e^{i\cdot 2x} = e^{1-2y}(\cos 2x + i\sin 2x) \Rightarrow u(x, y) = e^{1-2y}\cos 2x$; $v(x, y) = e^{1-2y}\sin 2x$. Найдем част. прв-ые этих фк-й, к-ые непр-ны на всей пл-ти $xOy$: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2e^{1-2y}\sin 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2e^{1-2y}\cos 2x$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^{1-2y}\cos 2x$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2e^{1-2y}\sin 2x$.

Усл-ия (5.2) выполняются при всех зн. $x$ и $y$, сдт-но, фк. $w = e^{i\cdot 2z+1}$ яв-ся дифм-ой и антч-ой на всей комп. пл-и $Z$, а значит, $f'(z) = (e^{i\cdot 2z+1})' = 2ie^{i\cdot 2z+1}$.

**п19**. Восстановить, если это возможно, антч. фк-ю $f(z)$ по заданной дсв. или мним. части: а) $v = x^2 - y^2 - 1$; б) $u = x^2e^{x/y}$.

Р. а) задачу можно р-ть лишь в том случае, если фк. $v = x^2 - y^2 - 1$ гармч-я на всей пл-ти. Проверим это: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y$; $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2$. Сдт-но, фк-я $v$ яв-ся гармч. на всей пл., т.к. уд-ет ур-ю Лапласа: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Фк-ю $u(x, y)$ найдем по фм-е (5.4), в к-ой положим

$x_0 = 0, y_0 = 0$: $$u(x, y) = \int_0^x (-2y)\Big|_{y=0}\, dx - \int_0^y 2x\, dy + C = -2xy + C.$$

Т.о. искомая фк. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -2xy + C + i(x^2 - y^2 - 1)$. Чтобы получить фк-ю пер-ой $z$, нх-мо заменить $x$ и $y$ по фм-ам (5.6): $f(z) = -2\dfrac{z+\bar{z}}{2}\dfrac{z-\bar{z}}{2i} + C + i\left(\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - 1\right) =$

$= i\dfrac{1}{2}\left(z^2 - \bar{z}^2\right) + C + i\dfrac{1}{4}\left(\left(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) + \left(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) - 4\right) = C + i(z^2 - 1)$. Итак, $f(z) = C + i(z^2 - 1)$;

б) проверим, яв-ся ли фк. $u = x^2e^{x/y}$ гармч-ой: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x/y} + \dfrac{x^2}{y}e^{x/y} = \left(2x + \dfrac{x^2}{y}\right)e^{x/y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$= \left(2 + \dfrac{4x}{y} + \dfrac{x^2}{y^2}\right)e^{x/y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x^3}{y^2}e^{x/y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\dfrac{2x^3}{y^3} + \dfrac{x^4}{y^4}\right)e^{x/y}$. Т.к. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$, то данная фк. $u$ негармч., сдт-но, в данном случае невозможно восстановить антч. фк-ю $f(z)$, т.к. фм-а (5.5) неприменима.

**6°. Конформные отображения**. Пусть $w = f(z)$ – антч. фк-я в обл. $D_z$ на комп. пл-ти $Z$. Проведем через тч. $z_0 \in D_z$ прзвл. гладкую крв. $\gamma_1 \subset D_z$. Фк. $w = f(z)$ прб-ет тч-у $z_0$ в тч-у $w_0 = f(z_0) \in D_w$ на комп. пл-и $W$. При этом крв-я $\gamma_1$ прб-ся в крв-ю $\Gamma_1 \subset D_w$ и проходящую через тч-у $w_0$. Предположим, что $f'(z) \neq 0$. Тогда $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha} = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где $\alpha = \arg f'(z)$, $k = |f'(z)| \neq 0$.

Т.к. при делении чисел арг-ы вычитаются, то на основании опр-ия $\alpha$ имеем: $\alpha = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z} =$ $= \lim\limits_{\Delta z \to 0}(\arg\Delta w - \arg\Delta z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\Delta w - \lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\Delta z = \Phi_1 - \varphi_1$, где $\Phi_1$ и $\varphi_1$ – углы, к-ые образуют кас-ые к крв-ым $\Gamma_1$ и $\gamma_1$ ств-но в тч-х $w_0$ и $z_0$.

Для другой пары крв-ых $\Gamma_2$ и $\gamma_2$ в тех же тч. $w_0$ и $z_0$ имеем $\Phi_2 - \varphi_2 = \alpha$. Сдт-но, $\alpha = \Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2$, и этот угол зв-т только от фк-и $w = f(z)$ и тч-и $z_0$ (ств. $w_0$).

Откуда $\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \theta$, т.е. если крв-ые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ образуют в тч. $z_0$ на пл. $Z$ угол $\theta$, то такой же угол $\theta$ образуют в тч. $w_0$ крв-ые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ – отб-ия крв. $\gamma_1$ и $\gamma_2$ на пл. $W$ (рис. 11).

Для модуля прв-ой, очевидно, $k = \lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0\\(z \to z_0)}}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0\\(w \to w_0)}}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$, т.е. $k$ – это предел отн-ия длин вк-ов $\Delta w$ и $\Delta z$ при перемещении тч-к $w$ и $z$ ств-но по крв-ым $\Gamma$ и $\gamma$ в тч-и $w_0$ и $z_0$. Этот предел зв-т только от фк-и $f(z)$ и тч-и $z_0$ (ств. $w_0$). Причем $k = |f'(z_0)| = \text{const}$ наз. коэф-ом растяжения. Если $k > 1$, то при переходе от $z_0$ к $w_0$ происходит растяжение длин, если $k < 1$, то сжатие. Дадим сд-е

**об**. Отб-ие $w = f(z)$, сохраняющее углы между крв-ми и постоянство растяжений, наз. конформным отб-ем (или конформным прб-ем).

Если при этом сохраняется и нпв-ие отсчета углов, это отб. наз. конформным отб-ем первого рода; если нпв-ие отсчета углов изм-ся на противоположное, – конформным отб-ем второго рода.

Заметим, что всякое отб., осуществляемое антч. фк-ей $w = f(z)$, конформно во всех тч-х, где $f'(z) \neq 0$.

**зм1**. При конформном отб. тч-и пл-ти $Z$ переходят в тч-и пл-и $W$, линии переходят в линии, замкнутые линии – в замкнутые линии. Однако обл-ть на пл-и $Z$ не всегда прб-ся в обл-ть на пл. $W$. Это возможно, когда фк. $w = f(z)$ однолистна (т.е. однозначная) в обл. $D_z$. Если фк. $w = f(z)$ не однолистна, то отб-ие не будет взаимно однозначным, а сдт-но, не может быть конформным (напомним, что антч. фк-я всегда однозначна). Н-р, фк-я $w = z^4$ в обл. $D_z$ – кольце $1 \le |z| \le 2$, $0 \le \arg z \le \pi$, антч-на, и в этой обл. $w' = 4z^3 \neq 0$. Однако заданная фк. отображает обл. $D_z$ на обл. $1 \le |w| \le 16$, $0 \le \arg w \le 4\pi$, представляющую собой дважды покрытое кольцо $1 \le |w| \le 16$ на пл. $W$, поэтому фк. $w = z^4$ не однолистна, т.е. не яв-ся конформной.

Одновременно та же фк-я $w = z^4$ отб-ет обл-ть $1 \le |z| \le 2$, $0 \le \arg z \le \pi/4$ на обл-ть $1 \le |w| \le 16$, $0 \le \arg w \le \pi$ конформно (рис. 12).

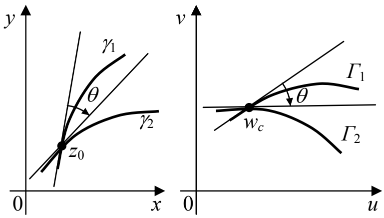



Рис. 11

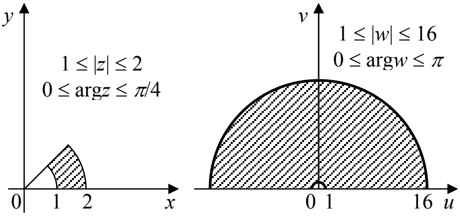



Рис. 12

**п20а**. Выяснить конформность лин. фк-и $w = az + b$, где $a$, $b$ – пст. комп. числа, $a \neq 0$.

Р. Эта фк. сущ-ет при всех $z$, и она однозначна. Обратная фк. $z = \dfrac{w-b}{a}$ сущ-ет при всех $w$, и она также однозначна. Сдт-но, фк. $w = az + b$ однолистна во всех тч. пл-и $Z$, она устанавливает биективное ств. между тч-ми пл-и $Z$ и тч-ми пл-и $W$.

Обз-им $\arg a = \alpha$, $\arg z = \varphi$ и рас-им сначала случай, когда $b = 0$, тогда $w = |a||z|\, e^{i(\alpha+\varphi)}$. Отсюда делаем вывод, что это прб. состоит в подобном растяжении в $|a|$ раз и в повороте пл-ти вокруг тч-и $z = 0$ на угол $\alpha = \arg a$.

При $b \neq 0$ к этому прб. добавится еще сдвиг тч-к пл-и на $|b|$ в нпв-и вк-ра $b$, избщ-го комп. число $b$.

Т.о., лин. фк-я $w = az + b$ прб-ует комп. пл. $Z$ в комп. пл. $W$ путем подобного растяжения, поворота и сдвига; и, т.к. фк. $w = az + b$ однолистна, а $w' = a \neq 0$, то это прб. конформно.

**п20б**. Иссл-ть прб-ие сп. фк-и $w = z^n$, $n > 1$ – целое.

Р. Фк. $w = z^n$ однолистна в секторе $\psi_0 < \arg z < \psi_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, ее прв-я $w' = nz^{n-1}$ во всех тч. (кроме $z = \infty$) сущ-ет и при $z \neq 0$ отлична от нуля. Сдт-но, при $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ отб-ие конформно.

Т.к. при $z = |z|\, e^{i\varphi}$ будет $z^n = |z|^n\, e^{in\varphi}$, то с помощью фк-и $w = z^n$ весь указанный сектор перейдет в $n\psi_0 < \arg w < n\psi_0 + 2\pi$, т.е. во всю пл., разрезанную по лучу $\arg w = n\psi_0$ (рис. 13).

**п20в**. Иссл-ть прб-ие пкзт. фк-и $w = e^z$.

Р. Нетрудно проверить, что при $y_0 \le \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ эта фк. однолистна, а т.к. $w' = e^z \neq 0$ и сущ-ет при всех $z$, то отб-ие в указанной полосе конформно.

При этом если $y_0 < y_1 < y_0 + 2\pi$, то полупрямая (полупм.) $y = y_1 = \text{const}$ $(x < 0)$ прб-ся фк-ей в едч. отрезок $OA$ ($|OA| = 1$) на луче $\arg w = y_1$ (рис. 14); полупм. $y = y_1 = \text{const}$ $(x \ge 0)$ – в остальную часть луча $\arg w = y_1$. Сдт-но, полоса $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ на пл-и $Z$ прб-ся в пл. $W$, разрезанную по лучу $\arg w = y_0$.

**п20г**. Иссл-ть прб-ие лгрч. фк-и $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Р. Эта фк. есть обратная к фк-и $w = e^z$, поэтому здесь надо рас-еть отб-ие полосы $v_0 \le v \le v_0 + 2\pi$ пл-и $W$ при усл-и $v_0 = -\pi$ на всю пл. $Z$ с разрезом по лучу $\arg z_0 = v_0 = -\pi$ (рис. 15), когда тч. $z$ пробегает по нижнему краю $l_1$ разреза от $x = -\infty$ до $x = 0$, то в пл-и $W$ ствщ-я тч. описывает линию $l_1'$ $(v = -\pi)$ от $u = \infty$ до $u = -\infty$, т.е. всю нижнюю границу полосы $-\pi \le v \le \pi$. Когда тч. $z$ пробегает по верхнему краю $l_2$ разреза от $x = 0$ до $x = -\infty$, то в пл-и $W$ ствщ-я тч. описывает линию $l_2'$ $(v = -\pi + 2\pi = \pi)$ от $u = -\infty$ до $u = \infty$, т.е. всю верхнюю границу той же полосы. Обход обл-ей $D_z$ и $D_w$ одинаковы, поэтому здесь конформное отб. первого рода.

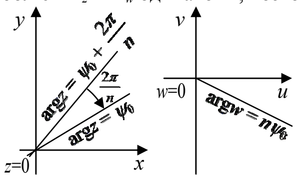



Рис. 13

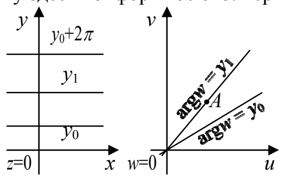



Рис. 14

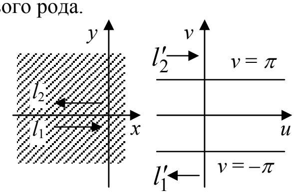



Рис. 15

# ЛЕКЦИЯ 37

## 13.2. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**1°. Понятие интеграла**. Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – непр. фк-я комп. пер-ой $z$, опрн-я в обл. $D$ и $L$ – гладкая крв. (рис. 1), лежащая в $D$, заданная ур-ем

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \text{ т.е. ур-ми } \left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\} \ (\alpha \le t \le \beta). \tag{1}$$

Нпв-ие на $L$ ств-ет изм-ю парм-а $t$ от $\alpha$ до $\beta$ ($A = z(\alpha)$ – нач., $B = z(\beta)$ – конец крв.).

Инт-л от фк-и $f(z)$ вдоль крв-й $L$ (см. 1°-3°: 10.3) опр-ся сд. образом:

$$\begin{gathered}\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_L (u + iv)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int\limits_L (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int\limits_L (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \\ = \int\limits_\alpha^\beta \left[u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t + i\int\limits_\alpha^\beta \left[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t.\end{gathered} \tag{2}$$

Если учесть, что $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, $u(x(t), y(t)) = u(z(t))$, то из (2) получим

$$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Если фк. $w = f(x)$ антч-я в односвязной обл-и $D_z$ и $L$ – прзвл. не замкнутая линия с нач. в тч. $z_1$ и концом в тч. $z_2$ ($z_1, z_2, L \in D_z$), то имеет место фм-а Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1), \tag{3a}$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$ ($F'(z) = f(z)$).

Т.о., из (2) видно, что инт-л от фк-и комп. пер-го есть сумма двух крвл. инт-ов II рода (см. 2°: 10.3), и его выч-ие сводится к выч-ю опрн. инт-ов.

Инт. (2) сущ-ет для любой непр. фк-и $f(z)$, тогда $u(x, y)$, $v(x, y)$ также непр-ны при любой гладкой крв-й $L$ (т.е. когда $x'(t)$, $y'(t)$ непр-ны).

**2°. Свойства интеграла**. На основании св-в крвл. инт-а имеем:

с1. Если крв. $L$ кусочно-гладкая и состоит из гладких орнтв. кусков $L_1, \ldots, L_n$, то

$$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \int\limits_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

с2. Знак инт-а меняется на обратный от перемены нпв-я $L$, т.е.

$$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{L^-} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

с3. Пст. мнж-ль можно выносить за знак инт-а: $\int\limits_L Af(z)\,\mathrm{d}z = A\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z.$ (6)

с4. Инт-л от суммы фк-й равен сумме инт-ов от этих фк-й

$$\int\limits_L [f_1(z) + f_2(z) - f_3(z)]\,\mathrm{d}z = \int\limits_L f_1(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_L f_2(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_L f_3(z)\,\mathrm{d}z. \tag{7}$$

с5. Если $|f(z)| \le M$ при $z \in L$, то $\left|\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le Ml,$ (8)

где $l$ – длина крв. $L$. Д-ся на основании св-ва опрн. инт-ла:

$$\left|\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_\alpha^\beta |f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t \le \int\limits_\alpha^\beta M\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ \mathrm{d}t = Ml.$$

**п1**. Д-ть, что $\displaystyle\int\limits_L \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i \left(\text{или} \oint\limits_L \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i\right),$ (9)

где $L$ – окр-ть с центром в тч. $z_0$, орнтв-я против часовой стрелки.

Р. Ур-ие $L$ можно записать в виде $z = z_0 + \rho e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, где $\rho$ – радиус окр-ти. Поэтому $\int\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}}{\rho e^{it}}\, dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

**п2**. Д-ть, что при целом $n \ne -1$ $\quad \int\limits_L (z - z_0)^n\, dz = 0, \qquad (10)$

где $L$ – окр-ть, как в п1.

Р. $\int\limits_L (z - z_0)^n\, dz = \int\limits_0^{2\pi} \rho^n e^{int} \rho i e^{it}\, dt = i\rho^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt = i\rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$ $(n + 1 \ne 0)$, т.к. $e^{i2(n+1)} = 1$ для любых целых $n$.

**3°. Основные теоремы**. Сформулируем и док-ем сд-ие

**т1** (Коши). Если фк. $f(z)$ антч-я на односвязной обл-и $D$, то инт-л от $f(z)$ по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру $L \subset D$ равен нулю:

$$\int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_L (u dx - v dy) + i\int\limits_L (v dx + u dy) = 0. \qquad (11)$$

Д. Т.к. $f(z) = u + iv$ – антч-я на $D$ фк-ия, то фк-и $u(x, y)$, $v(x, y)$ непр-но диф-мы, и выполняются усл. Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (12)$$

в силу к-ых врж-ия $u dx - v dy$ и $v dx + u dy$ есть полные диф-ы нек. фк-й. Поэтому крвл. инт-лы (см. 10.3) по замкнутому контуру $L$ от этих врж. равны нулю, т.е. имеет место (11) ■

**п3**. $\int\limits_L z^n\, dz = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $\int\limits_L e^z\, dz = 0$, $\int\limits_L a^z\, dz = 0$ $(a > 0)$, $\int\limits_L \sin z\, dz = 0$, $\int\limits_L \cos z\, dz = 0$, $\int\limits_L \operatorname{sh} z\, dz = 0$, $\int\limits_L \operatorname{ch} z\, dz = 0$ ($L$ – замкнутый контур), т.к. подынт. фк-и антч-ие, ибо они имеют непр. пзв-ые на пл. $Z$.

**сл1**. Если имеет место (11), то инт-л от фк-и $f(z)$ не зв-т от пути интв-ия. Анч-ое утв. см. в т2:

**т2**. Пусть обл-ть $D$ комп. пл-и $Z$ огр-на сложным (многосвязным) плж-но орнтв-ным кусочно-гладким контуром $L$, т.е. при обходе по $L$ тч-и $D$ остаются слева. Тогда для фк-и $f(z)$, антч-ой на $\overline{D}$, имеет место рав-во $\quad \int\limits_L f(z)\, dz = 0. \qquad (13)$

Д. На рис. 2 изб. двусвязная обл. $D$ с кусочно-гладким контуром $L = L_1 + L_2$, орнтв-ным плж-но. Соединим контуры $L_1$ и $L_2$ гладким куском $\gamma$, орнт-уя противоположными способами $\gamma_+$, $\gamma_-$. В результате получим новую обл-ть $D'$ односвязную (рис. 3), огрн-ю орнтв-ным контуром $L_2 + \gamma_+ + L_1 + \gamma_-$. По т1 имеем $\int\limits_{L_1+\gamma_++L_1+\gamma_-} f(z)\, dz = 0$. Но $\int\limits_{\gamma_-+\gamma_+} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma_+} f(z)\, dz = 0$. Поэтому $\int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_{L_1} f(z)\, dz + \int\limits_{L_2} f(z)\, dz = 0$. Причем каждый из инт-ов $\int\limits_{L_1}$, $\int\limits_{L_2}$ может не равняться нулю ■

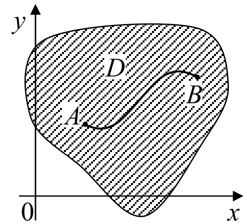


Рис. 1

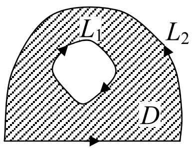


Рис. 2

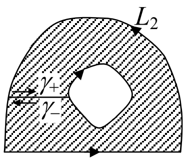


Рис. 3

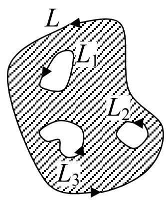


Рис. 4

**т3**. Пусть обл. $D$ огр-на внешним контуром $L$, орнтв-ым против часовой стрелки, и внутренними контурами $L_1, L_2, \ldots, L_N$, также орнтв-ыми против часовой стрелки (как на рис. 4, где $N = 3$), и пусть на $\overline{D}$ задана антч. фк-я $f(z)$. Тогда имеет место рав-во

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{N}\int_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{14}$$

Д. Вместо $L_k$ рас-им $L_k^-$, орнтв-ный по часовой стрелке, тогда по т2 имеем $\int_L f(z)\,\mathrm{d}z +$ $+\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, откуда следует (14), т.к. $\int_{L_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z$ ■

Отметим, что если в т3 $N = 1$ (рис. 5), то $\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$ (15)

**зм1**. Из (15), т.е. т3 при $N = 1$, следует, что рав-ва (9) и (10) остаются верными, если в них окр-ть $L$ с центром в тч. $z_0$ заменить любым замкнутым кусочно-гладким контуром $L'$, содержащим внутри тч-у $z_0$, и орнтв-ым против часовой стрелки: $\int_{L'}\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i,$ (16)

$$\int_{L'} (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = 0\ (n \neq -1). \tag{17}$$

Ф-мы (16) и (17) яв-ся осн-ми, т.к. выч-ие крвл. инт-ов от антч. фк-й сводится к этим фм.

**зм1а**. Инт-ы от антч-их элр. фк-й комп. пер-ой (см. 3°: 13.1) выч-ся с помощью тех же фм-л, что и инт-ы от фк-й дсв. пер-ой.

**4°. Формула Коши**. Пусть фк. $f(z)$ антч-я в односвязной замкнутой обл. $\overline{D}$ с кусочно-гладкой границей $L$. Тогда имеет место фм-ла Коши: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - z_0}$, (18)

где $z_0$ – любая тч. внутри контура $L$ и интв-ие совершается в плж. нпв-и (рис. 6).

Т.о., антч. фк-ю дт-но опр-ть на контуре $L$, а по фм. (1) можно автч-ки получить ее зн-ия в др. тч-х $D$.

Д. Рас-им фк-ю $\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, (19)

к-ая антч. во всех тч. $\overline{D}$, кроме $z = z_0$. Опишем около тч-и окр-ть $\gamma \subset D$ (рис. 6), тогда по т3 получим

$$\int_L \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z, \tag{20}$$

а зн-ие инт-ла $\int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z - z_0| = \rho} \varphi(z)\,\mathrm{d}z$ от $\rho$ не зв-т.

Кроме того, из (19) следует, что $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z) = f'(z_0)$. Если доопр-ть фк-ю $\varphi(z)$ в тч. $z_0$, полагая $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, то она становится непр-ой в $\overline{D}$, сдт-но, ее модуль огр-ен: $|\varphi(z)|' \leq M\ \forall\ z \in \overline{D}$. Тогда по (8) имеем $\left|\int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot 2\pi\rho$. Т.к. число $\rho$ можно взять сколь угодно малым, а инт. $\int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z$ от $\rho$ не зв-т, то $\int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Поэтому из (20) и (16) имеем сд. цепочку рав-в: $0 = \int_L \varphi(z)\,\mathrm{d}z =$ $= \int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - z_0} - f(z_0)\int_L \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - z_0} - f'(z_0)\cdot 2\pi i$. Откуда сд-ет (18) ■

**зм2**. Фм-а Коши имеет место и для многосвязной обл-ти. Для этого дт-но многосвязную обл. свести к односвязной, как это делали при д-ве т2.

**п4**. Выч-ть инт $\int_L \frac{\sin z}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z$, где $L$ – орнтв. плж-но (т.е. против часовой стрелки) контур, содержащий тч-и $z = \pm\, i$ (рис. 7) и такой, что тч. $z = -\, i$ находится вне него.

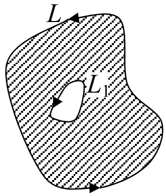


Рис. 5

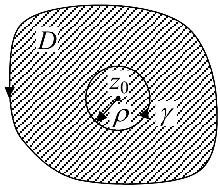


Рис. 6

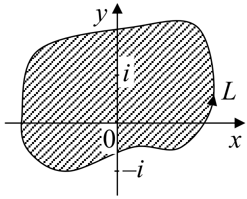


Рис. 7

Р. Фк. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$ антч-на в замкнутой обл. с границей $L$, поэтому, используя фм-у Коши, получим $\int\limits_L \dfrac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int \dfrac{f(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(i) = 2\pi i\,\dfrac{\sin i}{2i} = \pi i\,\mathrm{sh}1$.

**5°. Интеграл Коши**. Врж-ие $$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}, \tag{21}$$

где $f(z)$ – антч. фк-яв замкнутой обл-и $\overline{D}$, огрн-ой плж-но орнтв-ым контуром $L$, наз. интегралом Коши. В этом случае инт. обз-ют и так: $\oint\limits_L$.

Если $z_0 \in \overline{D}$, то $J = f(z_0)$ (см. (18)). Если $z_0 \notin \overline{D}$, то $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ – антч. фк-я в $\overline{D}$, сдт-но, по т1 (Коши) $J = 0$.

Пусть теперь $L$ – любая кусочно-гладкая орнтв. крв., не обязательно замкнутая, и $\varphi(z)$ – непр. фк-я, опрн-ая вдоль $L$. Врж-ие $$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} \tag{22}$$

наз. инт-ом типа Коши. Оно представляет собой фк-ю $F(z_0)$, опрн-ю вне $L$ ($z_0 \notin L$).

**т4**. Инт. (22) типа Коши есть антч. фк-я $F(z_0)$ для всех $z_0 \in L$. А прв-я порядка $n$ от $F(z_0)$ выч-ся по фм-е $$F^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Д. Пусть $\sigma$ – прзвл. круг, не имеющий общих тч. с крв. $L$. Фк-я двух комп. пер-х $z_0$ и $z$ $\Phi(z_0, z) = \dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ непр-на на мн-ве $\sigma \times L$ ($z_0 \in \sigma$, $z \in L$) и имеет на нем част. прв-ю $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_0} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^2}$, причем $z - z_0 \neq 0$, т.к. $\sigma \cap L = 0$. Это показывает, что дифв-ие $F(z_0)$ по $z_0$ законно произвести под знаком инт-ла (22): $F'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_L \dfrac{\varphi(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^2}$. При этом прв. $F'(z_0)$ непр-на вне $L$. Итак, (23) док-на для $n = 1$. Для $n \geq 2$ рассуждения ведутся по индукции ■

**сл2**. Если фк-я $w = f(z)$ антч-я в обл. $D$, т.е. имеет первую непр. прв-ю на $D$, то она имеет прв-ю всех порядков: $$F^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Фм-у (24) напишем в виде $$\oint\limits_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\zeta) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

где $\zeta$ – тч-а внутри линии $C$, нпв-ие обхода к-ой плж-ое.

**зм3**. Из фм-ы Коши (18) следует утв-ие: если $L$ есть окр-ть $|z - z_0| < R$, то, заменив $z - z_0 = \mathrm{Re}^{i\varphi}$, получим $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi. \tag{26}$$

Фм. (26) врж-ет теорему о ср-ем для антч. фк-й.

**зм4**. Змч. св-ом антч. фк-и яв-ся принцип мкс-ма ее модуля: модуль фк-и $f(z)$, антч-ой в обл-и $D$ и непр-ой в $\overline{D}$, не может достигать своего нб. зн-ия ни в какой тч-е обл-и $D$, кроме случая, когда $f(z) \equiv \text{const}$.

При указанных усл. еще и $f(z) \neq 0$, тогда модуль фк-и $f(z)$ не может достигать в обл. $D$ и своего нм. зн-ия.

Для антч. фк-й справедливы и сд-ие

**т5** (Лиувилля). Если фк. $f(z)$ антч-на во всей пл-ти и огр-на по модулю, то она пст-на.

**т6** (Морера). Если фк. $f(z)$ непр-на в односвязной обл. $D$, инт-л от этой фк-и, взятый по любому замкнутому контуру $C$, целиком лежащему в обл. $D$, равен нулю $\left(\oint\limits_C f(z)\mathrm{d}z = 0\right)$, то фк. $f(z)$ антч-на в этой обл.

**п5**. Выч-ть инт. $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Re}z\mathrm{d}z$, где $C$ – отрезок пм-ой, соединяющей тч-и $z_1 = -2 - i$ и $z_2 = 1 + i \cdot 2$ (рис. 8).

Р. Найдем дсв-ю и мнимую части подынт. фк-и: $\bar{z}\,\mathrm{Re}z = (x - iy)x = x^2 - ixy \Rightarrow u(x, y) = x^2$; $v(x, y) = -xy$. Запишем ур-ие пм-й, проходящей через тч-и $z_1$ и $z_2$, т.е. $(-2, -1)$ и $(1, 2)$: $\dfrac{x+2}{1+2} = \dfrac{y+1}{2+1}$ $\Rightarrow y = x + 1$ – ур. $C$, где $-2 \le x \le 1$.

Используя фм-у (2) и полученное ур. линии $C$, будем иметь

$$\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int\limits_C x^2\,\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + i\int\limits_C x^2\,\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = x+1 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_{-2}^{1}\left(2x^2 + x\right)\mathrm{d}x - i\int\limits_{-2}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2} + i \cdot \frac{3}{2}.$$

Данную задачу можно р-ть иначе, т.к. ур-ие линии интв-я есть $y = x + 1$, то $z = x + iy = x + i(x + 1)$, $\bar{z} = x - i(x + 1)$, $\mathrm{Re}z = x$, $\mathrm{d}z = (1 + i)\mathrm{d}x$. Сдт-но, полагая $t = x$, по ф-ме (3) получим $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Re}z\mathrm{d}z =$

$$= \int\limits_{-2}^{1}\left(x - i(x+1)\right)x(1+i)\mathrm{d}x = (1+i)\int\limits_{-2}^{1}\left((1-i)x^2 - ix\right)\mathrm{d}x = (1+i)\left((1-i)\frac{x^3}{3} - i\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} + i \cdot \frac{3}{2}.$$

Заметим, что при р-и данной задачи фм-у (3а) применять нельзя, т.к. $w = \bar{z}\,\mathrm{Re}z$ – неантч. фк-я.

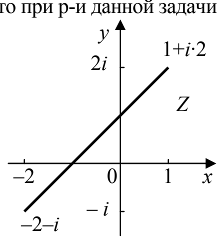


Рис. 8

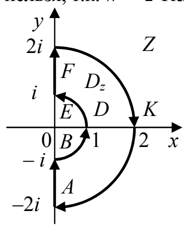


Рис. 9

**п6**. Выч-ть $\oint\limits_C \dfrac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z$, где $C$ – граница обл-и $D = \{z | 1 < |z| < 2, \mathrm{Re}z > 0\}$, нпв-ие обхода $C$ отц-ое.

Р. Избз-им на пл-и $Z$ линию интв-я $C$ (рис. 9). Т.к. $C = AB \cup BDE \cup EF \cup FKA$, то

$$\oint\limits_C \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{AB}\frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{BDE}\frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{EF}\frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{FKA}\frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z.$$

На линии $AB$ $y$ меняется от $-2$ до $-1$, а $x = 0$, сдт-но, $z = x + iy = 0 + iy = iy$, $\bar{z} = -iy$, $\mathrm{d}z = i\mathrm{d}y$. Тогда $\int\limits_{AB}\dfrac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{-2}^{1}\dfrac{-iy}{iy}\,i\mathrm{d}y = -i\int\limits_{-2}^{1}\mathrm{d}y = -i$.

На линии $BDE$ (правой половине окр-и $|z| = 1$), ур-ие к-ой в комп. форме имеет вид $z = \cos t + i\sin t$ или, что то же, $z = e^{it}$, парм-р $t$ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а $\bar{z} = e^{-it}$, $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t$. Тогда по (3)

$$\int\limits_{BDE}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{-it}}{e^{it}}\,ie^{it}\mathrm{d}t = i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-it}\,\mathrm{d}t = -\,e^{-it}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\,(\cos t - i\sin t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i.$$

На линии $EF$ $\int\limits_{EF}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z$ выч-ся анч-но $\int\limits_{AB}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z$, т.е. $\int\limits_{EF}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z = -\,i\int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}y = -\,i.$

На линии $FKA$ (правой половине окр-и $|z| = 2$), ур-ие к-ой в комп. форме есть $z = 2e^{it}$, парм-р $t$ меняется от $\pi/2$ до $-\pi/2$, а $\bar z = 2e^{-it}$, $\mathrm{d}z = 2ie^{it}\mathrm{d}t$. Поэтому $\int\limits_{FKA}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{2e^{-it}}{2e^{it}}\,2ie^{it}\mathrm{d}t =$

$$= 2i\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}e^{-it}\,\mathrm{d}t = -\,2e^{-it}\Big|_{\pi/2}^{-\pi/2} = -\,4i.\ \text{Итак,}\ \oint\limits_{C}\frac{\bar z}{z}\mathrm{d}z = -\,i + 2i - i - 4i = -\,4i.$$

**п7**. Выч-ть $\int\limits_{C}\left(iz^2 - 2ze^{z^2}\right)\mathrm{d}z$, где $C$ – прзвл. линия, соединяющая тч-и $z_1 = e^{-i\pi/4}$ и $z_2 = i$.

Р. Подынт-ная фк. $iz^2 - 2ze^{z^2}$ – антч-я на всей пл-и $Z$, тогда инт. можно писать в виде $\int\limits_{C}\left(iz^2 - 2ze^{z^2}\right)\mathrm{d}z = \int\limits_{e^{-i\pi/4}}^{i}\left(iz^2 - 2ze^{z^2}\right)\mathrm{d}z$, т.к. он не зв-т от линии интв-я $C$, соединяющей тч-и $z_1 = e^{-i\pi/4}$ и $z_2 = i$. Сдт-но, по фм-е (3а) получим $\int\limits_{e^{-i\pi/4}}^{i}\left(iz^2 - 2ze^{z^2}\right)\mathrm{d}z = \left(i\frac{z^3}{3} - e^{z^2}\right)\Bigg|_{e^{-i\pi/4}}^{i} = \left(i\frac{i^3}{3} - e^{i^2}\right) -$

$$-\left(i\frac{1}{3}e^{-i\cdot 3\pi/4} - e^{e^{-i\pi/2}}\right) = \frac{1}{3} - e^{-1} - \frac{i}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) + e^{\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - e^{-1} -$$

$$-\frac{i}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\cos 1 - i\sin 1) = \frac{1}{3} - e^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \cos 1 + i\left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \sin 1\right).$$

**п8**. Выч-ть $\oint\limits_{C}\frac{2z - e^z}{z^2(z-3)}\mathrm{d}z$, где $C$ – окр-ть $|z + 1| = 2$.

Р. Подынт. фк-ю представим в виде $\frac{2z - e^z}{z^2(z-3)} = \frac{(2z - e^z)/(z-3)}{z^2}$. Фк. $f(z) = \frac{2z - e^z}{z-3}$ антч-я в круге $|z + 1| \le 2$, тч. $\zeta = 0$ принадлежит указанному кругу. Поэтому по фм-е (25) при $n = 1$ получим $\oint\limits_{C}\frac{2z - e^z}{z^2(z-3)}\mathrm{d}z = \oint\limits_{C}\frac{(2z - e^z)/(z-3)}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{2z - e^z}{z-3}\right)'\Bigg|_{z=0} = 2\pi i\,\frac{(2 - e^z)(z-3) - (2z - e^z)}{(z-3)^2}\Bigg|_{z=0} =$

$$= -\,i\cdot\frac{4\pi}{9}.$$

# ЛЕКЦИЯ 38

## 13.3 РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**1°. Числовые и функциональные ряды**. Осн. понятия рядов мы рас-ли в 12.1-12.3 (в част-и, 8°: 12.2; 5°, 6°: 12.3), а теперь систематизируем и обобщим их.

Если $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k \in N)$ – комп. числа, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$ (1)

есть числовой ряд с комп. членами ($a_k$ – члены ряда),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\sum_{k=1}^{n} \beta_k \text{ – частч. сумма,} \tag{1а}$$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \text{ – остаток ряда.} \tag{1б}$$

Если сущ-ет предел посл-ти частч. сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k + i\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$, (1в)

то ряд (1) наз. сходящимся (схм.), а $S$ – суммой ряда. Если частч. сумма не имеет предела, то ряд наз. расходящимся (рсхм.).

Из (1в) следует, что ряд (1) сходится (сх.) ттогда, когда сх. каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

Этот факт позволяет проводить иссл-ие рядов с комп. членами на основе сх-ти рядов с дсв. членами, т.е. изложенное в 12.1-12.3 автч-ки переносится сюда. Н-р, если ряд (1) сх., то остаток $r_n \to 0$ или $|r_n| < \varepsilon$ при $n > N$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0\right)$.

Если (1) сх., то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k + i\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$ (нх. усл. сх-ти). Можно использовать и дт. признаки сх-ти рядов: сравнения, Даламбера, Коши и интн. признака (4°: 12.1).

Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сх-ть ряда.

Если сх. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ с дсв. плж. членами, то сх. и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. При этом последний наз. абс. схм-ся рядом. Вслучае абс. сх-и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k)$ абс-но сх. и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

Ряд вида $\qquad w_1(z) + w_2(z) + \ldots + w_n(z) + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z)$, (2)

членами к-го яв-ся фк-и от комп пер-ой $z$, наз. функциональным (фнц.) рядом. Тч. $z_0$ наз. тч-ой сх-ти ряда (2), если сх. числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z_0)$.

Фнц. ряд наз. схм-ся в обл-и $D$, если сх. в каждой тч. этой обл. Свк-сть всех тч-к сх-ти наз. обл-ю сх-и фнц. ряда. В общем случае обл-ть сх-и $D$ может оказаться многосвязной, она может быть и замкнутой.

Если $\forall\, z \in D$ ряд (2) сх., то он имеет сумму $f(z)$ в $D$ и пишут $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z)$. (2а)

В этом случае $\forall\, z \in D$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N$, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} w_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k(z) \right| = |r_n(z)| < \varepsilon \text{ при } n > N, \tag{2б}$$

где $f_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(z)$ – частч. сумма, $r_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} w_k(z)$ – остаток ряда.

В общем случае $N$ зв-т от выбора $\varepsilon$ и $z$, т.е. $N = N(\varepsilon, z)$. Если $N$ зв-т только от $\varepsilon$ и одинаково $\forall\ z \in D$, т.е. $N = N(\varepsilon)$, то ряд наз. равномерно схм-ся к фк-и $f(z)$ в обл. $D$, и записывают $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z) \rightrightarrows f(z)$.

Приведем (анч-но т1 из 1°: 12.2) дт-ый признак сх-и ряда (2).

Признак Вейерштрасса. Ряд (2) равномерно сх. в обл. $D$, если $|w_k(z)| \le \alpha_k$, $k \in N$, $\forall\ z \in D$, причем все $\alpha_k > 0$, и числовой ряд (мажорируемый) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сх-ся.

Отметим (анч-но 2°: 12.2) св-ва равномерно сх. рядов.

**с1**. Сумма равномерно сходящегося (схг.) в обл. $D$ ряда, состоящего из непр. фк-й, есть фк-я, непр-я в обл. $D$.

**с2**. Если в обл. $D$ $w_k(z)$ ($k \in N$) непр-ны и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z) \rightrightarrows f(z)$, то

$$\int_L \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)\right) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L w_k(z)\,\mathrm{d}z = \int_L f(z)\,\mathrm{d}z \ (L \subset D). \tag{2в}$$

**с3** (теорема Вейерштрасса). Если $w_k(z)$, $k \in N$, антч-ны в обл. $D$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z) \rightrightarrows f(z)$ в обл. $\overline{D'} \subset D$, то $f(z)$ антч-на в обл. $D$, причем

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(n)}(z) \rightrightarrows f(z) \tag{2г}$$

в обл-и $\overline{D'} \subset D$.

Фнц. ряд вида
$$c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3}$$
наз. степенным (спн.) рядом ($z$ – комп. пер-я; $c_n$, $a$ – комп. числа ($c_n$ – коэф. ряда, $a \ne \infty$ – центр ряда)). Для спн. ряда справедлива

**т1** (Абеля). Если спн. ряд сх. в тч. $z_1$, то он сх. во всех тч-х $z$, удщ-х усл-ю $|z - a| < |z_1 - a|$; если спн. ряд рсх. в тч. $z_2$, то он рсх. во всех тч-х, удщ-их нерав-у $|z - a| > |z_2 - a|$.

**сл1**. Для спн. ряда (3) всегда сущ-ет такое дсв. число $R > 0$, что внутри круга $|z - a| < R$ ряд сх., а вне этого круга – рсх. В круге $\rho < R$ ряд (3) сх. равномерно. Обл. $|z - a| < R$ наз. кругом сх-и, а $R$ – радиусом сх-и спн. ряда. При опр-и радиуса сх-и ряда (3) могут применяться признаки сх-и Даламбера и Коши:
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|;\ R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{3а}$$

Обл-ю сх-и спн. ряда по отц. сп-ям $z - a$
$$\frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-a)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \tag{3б}$$
яв-ся внешность круга радиусом $r$ с центром в тч. $a$, т.е. обл-ть $|z - a| > r$. Дсв. число $r$ для ряда (3б) может быть опр-но по коэф-ам $b_n$ с помощью фм-л: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|$; $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$.

Если ряд (3) сх. в круге $|z - a| < R$, а ряд (3б) сх. в обл-и $|z - a| > r$, то при $0 \le r < R < \infty$ обл-ю сх-ти ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3в}$$
яв-ся кольцо $r < |z - a| < R$; при $r > R$ ряд (3в) всюду рсх-ся.

**сл2**. Внутри круга (кольца) сх-ти спн. ряд сх. к антч. фк-и.

**сл3**. Спн. ряд внутри круга сх-ти (подобно всякому равномерно схм. ряду) можно почленно интв-ть и почленно дифв-ть любое число раз. При этом радиус сх-ти каждого вновь полученного ряда равен радиусу сх-и исх. ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.

**сл4**. Коэф-ы $\{c_k\}$ спн. ряда выч-ся через зн-я суммы ряда и ее прв-ых, опрн-ых в центре круга сх-ти по фм-мам: $$c_0 = f(a),\ c_k = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (k = 1, 2, \ldots). \qquad (3г)$$

**п1**. Иссл-ть на сх-ть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$.

Р. Модуль общ. члена $\frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$ равен $|w_n| = \left|\frac{\cos n + i\sin n}{n^2}\right| = \sqrt{\frac{\cos^2 n + \sin^2 n}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$.

Ряд из модулей членов исх. ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сх-ся, сдт-но, расм. ряд сх. абс-но.

**п2**. Иссл-ть на сх-ть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$.

Р. Извлекая корень $n$-й сп-и из модуля общ. члена данного ряда, получим $\sqrt[n]{|w_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}\right|} =$

$= \sqrt[n]{\left|\frac{2-i}{3}\right|^{n^2}} = \left|\frac{2-i}{3}\right|^{n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n} \to 0 < 1$ при $n \to \infty$, тогда по признаку Коши ряд сх. абс.

**п3**. Найти круг и радиус сх-ти ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Р. Находим $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$ при $n \to \infty$. Тогда по признаку Даламбера спн. ряд сх. во всех тч. комп. пл-и. Роль круга сх-и выполняет вся пл-ть, радиус сх-ти $R = \infty$.

**2°. Ряд Тейлора. Нули функции**. Выше говорилось, что спн. ряд внутри своего круга сх-ти опр-ет антч. фк-ю – сумму этого ряда.

Справедливо и обратное утв: фк. $f(z)$, антч-я внутри круга $|z - a| < R$, может быть представлена в этом круге сх-ти спн. рядом, назм-ым рядом Тейлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-a)^n, \qquad (4)$$

где $$c_0 = f(a),\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}}, \qquad (4а)$$

$L$ – прзвл. замкнутый контур внутри круга сх-ти $|z - a| < R$ (рис. 1).

Говорят, что фк. $f(x)$ голоморфна в тч. $a$, если она в нек-ой окрс. этой тч. разлг-ся в спн. ряд отс-но $z - a$. Св-во голоморфности фк-и в тч. $a$ экв-но ее антч-сти в этой тч. Фк., голоморфная в каждой тч. обл. $D$, наз. голоморфной в этой обл.

Если $c_0 = f(a) = 0$, то тч. $a$ наз. нулем этой фк., а разл-ие $f(z)$ в окрс-ти точки $a$ в спн. ряд имеет вид $f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_k(z-a)^k + \ldots$

Если $c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$, а $c_k \neq 0$, то тч. $a$ наз. нулем $k$-го порядка фк-и $f(z)$. В этом случае разл-ие $f(z)$ в окрс-ти тч. $z$ имеет вид $f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots$ Здесь имеет место сд-я

**т2**. Пусть фк. $f(z)$ антч-на в обл. $D$ и обращается в нуль в различных тч. $z_1, z_2, \ldots, z_n$, принадлежащих этой обл. Тогда, если сущ-ет $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ и $a \in D$, то $f(z) \equiv 0$ в обл. $D$.

**сл5**. Из т2 следует, что всякая не равная тожд-но нулю антч. фк-я $f(z)$ в обл. $D$ имеет в любой замкнутой подобл-и $\overline{D'} \subset D$ лишь конечное число (к.ч.) нулей; беск. число нулей антч. фк-я может иметь только в открытой (незамкнутой) обл. или неогрн. обл-ти.

**о1**. Фк. $f(z)$, антч-я во всей комп. пл-ти ($z \neq \infty$), наз. целой фк.

Из т2 и сл5 можно заключить, что целая фк. в любой огрн. обл-и имеет лишь к.ч. нулей. Эти нули можно пронумеровать (н-р, в порядке взр-я их модулей).

На полной комп. пл-и целая фк. может иметь не более чем счетное мн. нулей, и предельной тч. этого мн. яв-ся беск. удаленная тч.

**т3** (едн-сти). Если в обл. $D$ сущ-ет такая посл. различных тч. $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, сх-яся к тч. $a \in D$, что зн-ия двух антч. в обл. $D$ фк-й $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают во всех тч. указанной посл., то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в обл. $D$ (заметим, что т3 следует из т2, т.к. $\Phi(z) \equiv 0$, если положить $\Phi(z) = f(z) - \varphi(z)$).

Из т3 вытекает ряд важных пж. (следствий):

1) во всякой обл. $D$ может сущв-ть лишь едн. антч. фк-я, принимающая заданные зн. в посл. тч-к $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, принадлежащих $D$, и сх-йся к тч. $a \in D$;

2) если две антч. в обл. $D$ фк-и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на нек-ой крв. $L \subset D$, то они совпадают во всей обл. $D$;

3) если фк. $f_1(z)$ антч-на в обл. $D_1$, а фк. $f_2(z)$ антч-на в обл. $D_2$, причем $D_1$ и $D_2$ имеют общую подобл. $D'$, в к-ой $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают, то сущ-ет едн. антч. фк-я $F(z)$, такая, что $F(z) = \begin{cases} f_1(z), \ z \in D_1; \\ f_2(z), \ z \in D_2. \end{cases}$

В этом случае фк. $F(z)$ наз. антч. продолжением фк-й $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на обл. $D_1 + D_2$. При этом фк-ю $f_2(z)$ наз-ют антч. продолжением фк-и $f_1(z)$ на обл. $D_2$, а фк-ю $f_1(z)$ – антч. продолжением фк-и $f_2(z)$ на обл. $D_1$.

Теорема т3 едн-сти опр-ия антч. фк-и и ее следствия позволяют распространять на комп. пл-ть известные элр. фк-и дсв. пер-ой. Так, если в сгм-е $[a, b]$ дсв. оси $Ox$ задана непр. фк. $f(x)$, то в обл. $D$ комп. пл-ти, содержащей отрезок $[a, b]$, может сущв-ть едн. антч. фк-я $f(z)$, к-ая принимает данные зн. $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Фк. $f(z)$ наз. антч. продолжением фк-и $f(x)$ в комп. обл. $D$.

Для дсв. пер-ой $x \in ]-\infty; \infty[$ известны фк-и: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, где $0! = 1$.

Нетрудно установить, что антч. спн. ряды комп. арг-та

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

сх-ся на всей комп. пл-ти, сдт-но, их суммы – целые фк-и от $z$. Эти фк-и яв-ся антч. продолжениями на всю комп. пл-ть фк-й дсв. пер-ой $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ ств-но. Для этих продолжений сохранены те же обз-ия: $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

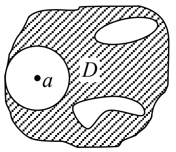


Рис. 1

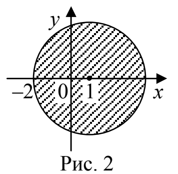


Рис. 2

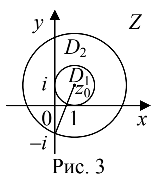


Рис. 3

Теоремы едн-сти опр-ия антч. фк-й справедливы и для стн-ий между фк-ми. Поэтому стн-ия $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ и т.д. справедливы и для комп. обл-ти: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\sin z \cos z$, $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ и т.д.

Более того, антч. продолжения в комп. пл-ть справедливы и для дифн. стн-й между фк-ми. Так, если $f(x)$ – р-ие дифн. ур-я $F(x, y, y') = 0$ и имеет антч. продолжение $f(z)$ в обл. $D$, то $f(z)$ будет р-ем дифн. ур-я $F(z, w, w') = 0$ в обл. $D$, к-ое яв-ся антч. продолжением $F(x, y, y') = 0$ в обл. $D$, где $w = w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (см. (2.3) из 2°: 13.1).

**п4**. Разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $z$ фк-и $e^z$ и $\sin z$.

Р. Фк-и $e^z$ и $\sin z$ регулярны (т.е. антч-ны) во всей комп. пл-ти, поэтому их ряды Тейлора сх-ся к ним при всех $z$. Коэф-ы ряда для $e^z$ равны $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$, т.к. $(e^z)^{(n)} = e^z$, тогда получим $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^n = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots$ Фк. $\sin z$ по опр-ю (см. (3.1): 13.1) равна $\sin z = \dfrac{1}{2i}e^{iz} - \dfrac{1}{2i}e^{-iz}$.

Ряды для фк-й $e^{iz}$ и $e^{-iz}$ легко получить из ряда $e^z$: $e^{iz} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(iz)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{n!}z^n$; $e^{-iz} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-iz)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{n!}z^n$; сдт-но, $\sin z = \dfrac{1}{2i}\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{n!}z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{n!}z^n\right\} = \dfrac{1}{2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left[1-(-1)^n\right]i^n}{n!}z^n$. Заметим, что при $n = 2m$ (чет.) мнж-ль $1 - (-1)^n = 0$, а при $n = 2m + 1$ (нечет.) имеем $\dfrac{\left[1-(-1)^n\right]i^n}{n!} = \dfrac{2\cdot(i^2)^m i}{(2m+1)!} = \dfrac{2i(-1)^m}{(2m+1)!}$. Т.о., получим $\sin z = \dfrac{1}{2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left[1-(-1)^n\right]i^n}{n!}z^n = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}$. В силу едн-сти разл-ия это ряд Тейлора фк-и $\sin z$.

**п5**. Разл-ть в круге $|z| < 3$ фк-ю $\dfrac{1}{(z-3)^2}$ по сп-ям $z$.

Р. Фк. $\dfrac{1}{z-3}$ в круге $|z| < 3$ разлг-ся в ряд $\dfrac{1}{z-3} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}$. Продиф-уем обе части этого рав.: $-\dfrac{1}{(z-3)^2} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nz^{n-1}}{3^{n+1}}$; $\dfrac{1}{(z-3)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}z^{n-1}$. Полученный ряд и будет рядом Тейлора данной фк-и в круге $|z| < 3$.

**3°. Ряд Лорана**. Всякая фк. $f(z)$ антч-я внутри кольца с центром в тч. $a$, разлг-ся внутри этого кольца в ряд, назм-ый рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n} = f_1(z) + f_2(z), \tag{5}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); $C$ – любой замкнутый контур, расположенный внутри кольца $r < |z - a| < R$ (см. также (3)-(3в)). Части ряда (5) наз. ств-но правильной (сх. в обл. $|z - a| < R$) и главной (сх. в обл. $r < |z - a|$).

Обл-ю сх-и ряда Лорана яв-ся общая часть сх-ти его правильной и главной части, для к-ых находим ств-но их радиусы сх-и по признаку Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|;\ R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}; \tag{5а}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{-(n+1)}}{c_{-n}}\right|;\ r = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}. \tag{5б}$$

Внутри кольца $r < |z - a| < R$ ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ сх. к нек-ой антч. фк-и $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

При $r > R$ ряд Лорана нигде не сх-ся. Верна сд.

**т4**. Фк. $f(z)$, антч-я в круговом кольце $r < |z - a| < R$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана.

**п6**. Разл-ть в ряд по сп-ям $z$ фк-и $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ и $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$.

Р. Фк-и $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ и $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$ нерегулярны в тч. $z = 0$, поэтому их разл-ия в ряд по сп-ям $z$ будут содержать как плж., так и отц. сп-ни, т.е. они разлг-ся в ряды Лорана. Т.к. $e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n$; $\sin w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1}$ (см. п4), то, полагая $w = \frac{1}{z}$, находим $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$; анч-но, при $w = \frac{1}{z^2}$ : $\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2(2n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}$. Умн-ая ряд $e^{\frac{1}{z}}$ на $z^2$, получим $z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{z^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \ldots$ Этот ряд сх-ся в кольце $0 < |z| < \infty$.

Ряд для $\sin\frac{1}{z^2}$ умн-м на $(1 + z^3)$ и раскроем скобки: $(1 + z^3)\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1+z^3}{z^{4n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n-1}} = z + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^6} + \frac{1}{120}\frac{1}{z^7} - \ldots$ Этот ряд сх. в обл. $0 < |z| < \infty$.

**п7**. Разл-ть фк-ю $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ в ряд в окрс-ти тч-к $z = 0$, $z = -2$ (рис. 2).

Р. Разл-м данную фк. на сумму элр. дробей:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{9}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2}. \tag{5в}$$

В окрс-ти тч. $z = 0$, т.е. в круге $|z| < 1$, фк. $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ и каждое слг.: $\frac{1}{9}\frac{1}{z+2}$, $-\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2}$ регулярны. Разл-им элр. дроби $\frac{1}{z+2}$, $\frac{1}{z-1}$ в ряды Тейлора: $\frac{1}{9}\frac{1}{z+2} = \frac{1}{18}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$, $-\frac{1}{9}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Ряд для фк-и $\frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2}$ найдем почленным дифв. ряда фк-и $-\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}$ : $\left(-\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{9}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$; $\frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\times$ $\times\, nz^{n-1} \underset{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{3}(m+1)Z^m$. Т.о., в круге $|z| < 1$ имеем $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{9}\times$ $\times\sum_{n=0}^{\infty}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{18\cdot 2^n} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(n+1)\right]z^n = \frac{17}{36} + \frac{27}{36}z + \ldots$

В окрс-ти тч-и $z = 1$ фк-я $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ нерегулярна, она регулярна в кольце $0 < |z-1| < 3$ (рис. 2). Разл-им ее в ряд по сп-ям $(z - 1)$. В правой части фм-ы (5в) нужно разл-ть только слг-ое $\frac{1}{z+2}$. Эта фк. регулярна в круге $|z - 1| < 3$, поэтому она разлг-ся в ряд по плж. сп-ям $z - 1$:

$\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{z-1+3}=\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}=\dfrac{1}{3}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{3^n}$, сдт-но, $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{(z-1)^2}-\dfrac{1}{9}\ \dfrac{1}{z-1}+$

$+\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$. Это и есть ряд Лорена фк-и $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ в кольце $0<|z-1|<3$.

**4°. Правильные и особые точки аналитической функции**. При изучении фк-й дсв. пер-ой мы встречались с различным поведением фк-й в той или иной тч.: с непр-ю, конечным разрывом, устранимым разрывом, беск. разрывом. Подобные тч. встречаются и для антч. фк-й комп. пер-ой. Рас-им такие тч.

Тч. $z=a$ наз. правильной тч. фк-и $f(z)$, если сущ-ет спн. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, к-ый сх. к фк-и $f(z)$ в круге сколь угодно малого радиуса с центром в тч. $a$, т.е. если сущ-ет круг $|z-a|<R$ ($R=\varepsilon$), в к-ом фк $f(z)$ антч-на.

Тч-и, не яв-еся правильными, наз особыми тч. фк-и $f(z)$.

Если фк. $f(z)$ антч-на в обл. $D$,то все внутренние тч. этой обл. – правильные тч. фк-и $f(z)$. Среди тч-к границы $\Gamma$ обл-и $D$ могут быть как правильные, так и особые тч. фк-и $f(z)$. Если все тч. обл-и $D$ и ее границы $\Gamma$ – правильные тч., то фк. $f(z)$ антч-на в замкнутой обл. $\overline{D}$. В этом случае фк-ю $f(z)$ можно антч-ки продолжить на нек-ую обл. $D'$, содержащую обл. $\overline{D}$. Антч. продолжение через участок границы, целиком состоящий из особых тч., невозможно.

**т5**. Если спн. ряд в нек. круге сх-ся к фк-и $f(z)$, то на границе круга сх-ти есть хотя бы одна особая тч. этой антч. фк-и $f(z)$.

Из этой теоремы следует, что радиус круга сх-ти спн. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ равен рст-ю тч-и $a$ до ближайшей особой тч. фк-и $f(z)$ – суммы этого ряда.

Тч. $z=a\neq\infty$, в к-ой фк. $f(z)$ не яв-ся антч-ой, а в ее окрс-ти анч-я, наз. изолированной особой тч. фк-и $f(z)$. Такая тч. наз. устранимой, если сущ-ет $\lim\limits_{z\to a}f(z)\neq\infty$, полюсом, если сущ-ет $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, и существенно особой, если $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ не сущ-ет.

Хрк-р изолированной особой тч. $z=a\neq\infty$ фк-и $f(z)$ может быть установлен по виду ряда Лорана этой фк. для кольца – $r<|r-a|<R$ сд. образом. Тч. $z=a$ будет устранимой, полюсом и существенно особой, если в этом ряде главная часть ств-но отсутствует, содержит к.ч. членов или беск. их число. При этом если главная часть ряда Лорана имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ ($c_{-m}\neq0$), число $m$ наз. порядком полюса $z=a$ (если $m=1$, полюс наз. простым). В этом случае фк. $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, где $\varphi(z)$ – фк., антч-я в тч. $z=a$, и $\varphi(a)\neq0$.

Тч. $z=a$ наз. нулем или корнем кратности $m$ (или порядка $m$) фк-и $\varphi(z)$ (антч-ой в тч. $a$), если $\varphi(a)=\varphi'(a)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(a)=0$, но $\varphi^{(m)}(a)\neq0$. Если для антч. фк-и число $\varphi(z)$ число $z=a$ есть нуль порядка $m$, то для фк-и $f(z)=1/\varphi(z)$ это число яв-ся полюсом порядка $m$.

**зм1**. Если $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – мчл-ы, не имеющие общ. нулей, то нули мчл-а $Q(z)$, и только они яв-ся полюсами фк-и $f(z)$, причем порядок этих полюсов совпадает с кратностью ствщ. нулей мчл-а $Q(z)$.

Если $f(z)$ – однозначная антч. фк. в обл-и $|z|>R$, то тч. $z=\infty$ наз. беск удаленной особой тч. фк-и $f(z)$. Ее тип опр-ся так же, как и для тч-и $z=a\neq\infty$: она яв-ся устранимой, если сущ-ет $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)\neq\infty$, полюсом, если сущ-ет $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$, и существенно особой, если $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ не сущ-ет.

Ряд Лорана для фк-и $f(z)$ в окрс-ти беск-но удаленной тч-и наз ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (R < |z| < \infty). \tag{6}$$

Главной частью этого ряда наз. часть, состоящая из членов с плж. сп-ями, а правильно – часть, содержащая нулевую и отц. сп-и $z$.

Отметим, что теоремы о поведении однозначной антч. фк-и вблизи ее изолированных особых тч. носят обратимый хрк.

Дадим второе опр. целой фк.: фк. $f(x)$ наз. целой (или голоморфной), если она не имеет особых тч. в конечной обл.

Если фк $f(z)$ не имеет др. особых тч., кроме полюсов, то она наз. дробной (или мероморфной). Мероморфными фк. яв-ся, н-р, все целые фк., дробно-рац-ые и тригч-ие.

**п8**. Найти нули и указать их кратность для фк-и $(z + 1)^2(z^2 - z - 2)^3$.

Р. Т.к. $z^2 - z - 2 = (z + 1)(z - 2)$, то $(z + 1)^2(z^2 - z - 2)^3 = (z + 1)^2(z + 1)^3(z - 2)^3 = (z + 1)^5(z - 2)^3 = 0$ при $z_1 = -1$ и $z_2 = 2$. Т.о., тч. $z_1 = -1$ яв-ся нулем пятой кратности, а тч. $z_2 = 2$ – нулем третьей кратности.

**п9**. Опр-ть изолированные особые тч., указать их тип (хрк-р), в случае полюса – его порядок, для фк-и $f(z) = \dfrac{3z+2}{(z-1)^3(3z^2+2z-1)^2}$.

Р. Чслт-ль и знмт-ль данной фк. яв-ся антч. фк-ми на всей пл. $Z$, причем знмт-ль $(z - 1)^3(3z^2 + 2z - 1)^2 = 9(z - 1)^3(z + 1)^2(z - 1/3)^2 = 0$ при $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1/3$. Чслт-ль в этих тч. отличим от нуля. Сдт-но, тч-и $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1/3$ – изолированные тч. данной фк. Т.к. $z_1 = 1$ яв-ся нулем знмт-ля кратности, равной трем, то для исх. фк-и – это полюс третьего порядка. Анч-но $z_2 = -1$, $z_3 = 1/3$ – полюсы второго порядка для данной фк.

**5°. Типовые примеры**. Р-им примеры с целью закрепления материала данной лк.

**п10**. Найти обл-ть сх-ти сд. спн. рядов:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}(z-1)^n$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n}(z-3+i)^n + \frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n}\right)$.

Р. а) коэф-т общ. члена исх. ряда есть $c_n = \dfrac{5^n(1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$. Тогда $c_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}(1-i)^{n+1}}{\sqrt{(3n+1)2^{n+1}}}$. Найдем радиус сх-и ряда по (3а) или (5а) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n|1-i|^n\sqrt{(3n+1)2^{n+1}}}{\sqrt{(3n-2)2^n}\cdot 5^{n+1}|1-i|^{n+1}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\sqrt{3n+1}\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sqrt{3n-2}\cdot 5\cdot 2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/2}\sqrt{3n+1}}{\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3n-2}} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n}\sqrt{1+1/(3n)}}{\sqrt{3n}\sqrt{1-2/(3n)}} = \frac{1}{5}.$$

Итак, обл-ю сх-и ряда яв-ся внутренность круга $|z - 1| < 1/5$ с центром в тч. $z = 1$;

б) перепишем данный ряд в сд. виде: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n}(z-3+i)^n + \frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n}\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2i}{4-3i}\right)^n(z-3+i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(1+i)^n\frac{1}{(z-3+i)^n}.$$

Найдем обл-ть сх-и ряда по плж. сп-ям $z - 3 + i$. Т.к. для этого ряда $c_n = \left(\dfrac{1+2i}{4-3i}\right)^n$, то по второй фм. (3а) получим $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{4-3i}{1+2i}\right|^n} = \left|\dfrac{4-3i}{1+2i}\right| = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Сдт-но, $|z - 3 + i| < \sqrt{5}$ – обл. сх-и ряда.

Теперь найдем обл. сх-и ряда по отц. сп-ям $z - 3 + i$. Для этого ряда имеем $c_n = n(1 + i)^n$ и $c_{n+1} = (n + 1)(1 + i)^{n+1}$, поэтому по первой фм. (5б) находим $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)|1+i|^{n+1}}{n|1+i|^n} =$ $= |1 + i|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \sqrt{2}$. Значит, обл. сх-и есть $|z - 3 + i| > \sqrt{2}$. Т.о. весь данный ряд будет сх-ся в кольце $\sqrt{2} < |z - 3 + i| < \sqrt{5}$.

**п11**. Разл-ть сд. фк-и в ряд Тейлора по сп-ям $z$ и указать обл. сх-и полученого ряда:
а) $f(z) = z^2/(2 - 3z)$; б) $f(z) = \cos^2 z$.

Р. а) фк. $f(z) = z^2/(2 - 3z)$ яв-ся антч-ой в окрс-и тч-и $z = 0$, поэтому ее можно разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $z$. Прб-уем данную фк.: $f(z) = \dfrac{1}{2}z^2\dfrac{1}{1-3z/2}$.

Используя фм-у для беск. убщ-ей геомч. прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ ($|q| < 1$), находим $f(z) =$ $= \dfrac{1}{2}z^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3z}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^{n+1}}z^{n+2}$. Этот ряд сх. при $|3z/2| < 1$, т.е. при $|z| < 2/3$. Т.о., радиус сх-и $R = 2/3$. Последний результат можно получить иначе. Т.к. особая тч. для данной фк. есть $z = 2/3$, а фк-ю разл-ли в ряд в окрс-ти тч-и $z = 0$, то рст-ие между этими тч. и врж-ет радиус сх-ти полученного ряда;

б) данную фк. прб-уем к виду $f(z) = \cos^2 z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2z$. Используя представление $\cos t =$ $= 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$, получим $f(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{(2z)^2}{2!} + \dfrac{(2z)^4}{4!} + \ldots +\right.$ $\left.+ (-1)^{n-1}\dfrac{(2z)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$. Обл. сх-и ряда – вся комп. пл-ть $Z$.

**п12**. Разл-ть сд. фк-и в ряд Тейлора по сп-ям $z - 2$ и указать обл. сх-и полученного ряда:
а) $f(z) = z^5 - 3z^3 + 2z - 1$; б) $f(z) = e^{2z-1}$.

Р. а) по фм-е (4) имеем $f(z) = f(2) + \dfrac{f'(2)}{1!}(z - 2) + \dfrac{f''(2)}{2!}(z - 2)^2 + \ldots + \dfrac{f^{V}(2)}{5!}(z - 2)^5$. Находим прв-ые фк-и и выч-ем их зн-я в тч. $z = 2$:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^5 - 3z^3 + 2z - 1 &&\Rightarrow f(2) = 11;\\
f'(z) &= 5z^4 - 9z^2 + 2 &&\Rightarrow f'(2) = 46;\\
f''(z) &= 20z^3 - 18z &&\Rightarrow f''(2) = 124;\\
f'''(z) &= 60z^2 - 18 &&\Rightarrow f'''(2) = 222;\\
f^{IV}(z) &= 120z &&\Rightarrow f^{IV}(2) = 240;\\
f^{V}(z) &= 120 &&\Rightarrow f^{V}(2) = 120.
\end{aligned}
$$

Тогда $f(z) = z^5 - 3z^3 + 2z - 1 = 11 + 46(z - 2) + 62(z - 2)^2 + 37(z - 2)^3 + 10 \times (z - 2)^4 + (z - 2)^5$;

б) т.к. фк-ю можно представить в виде $f(z) = e^{2z-1} = e^{2(z-2+2)-1} = e^3e^{2(z-2)}$, то из $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ ($|t| < \infty$), получим $f(z) = e^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2(z-2))^n}{n!} = e^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}(z - 2)^n$ ($|z - 2| < \infty$). Обл. сх-и ряда – вся комп. пл-ть $Z$.

**п13**. Рас-реть различные разл-ия в ряд Лорана фк-и $f(z) = 2z/(z^2+1)$ по сп. $z - (1 + i)$.

Р. Для данной фк. $z_1 = -i$ и $z_2 = i$ – особые тч. ($z^2 + 1 = 0$ при $z = \pm i$), вследствие чего имеются три обл. с центром в тч. $z_0 = 1 + i$ (рис. 3), в к-ых фк. $f(z)$ антч-на: $D_1 = \{z \mid |z - (1 + i)| < 1\}$; $D_2 = \{z \mid 1 < |z - (1 + i)| < \sqrt{5}\}$; $D_3 = \{z \mid \sqrt{5} < |z - (1 + i)| < \infty\}$. Граница каждой из обл. содержит по одной особой тч. данной фк. Разл-им эту фк. на простейшие дроби: $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+1} = \dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}$.

Т.к. фк-ю нх-мо представить в виде ряда по сп-ям $z-(1+i)$, прб-уем последнее рав-во так:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+1}=\frac{1}{1+2i+\left(z-(1+i)\right)}+\frac{1}{1+\left(z-(1+i)\right)}. \tag{7}$$

Найдем разл-ия данной фк. в обл-ях $D_1$, $D_2$, $D_3$. Т.к. в обл. $D_1$ выполняется усл. $|z-(1+i)|<1$, то, расв-я каждое слг. в рав-ве (7) как сумму беск. убщ-ей прогрессии, получим $f(z)=\frac{1}{1+2i}\times$

$$\times\frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+2i}}+\frac{1}{1+\left(z-(1+i)\right)}=\frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-(1+i))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1+2i)^{n+1}}+1\right)(z-(1+i))^n.$$

В обл. $D_2$ имеем $1<|z-(1+i)|<\sqrt{5}$. Тогда с учетом (7) получим $f(z)=\frac{1}{1+2i}\frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+2i}}+$

$$+\frac{1}{z-(1+i)}\frac{1}{1+\frac{1}{z-(1+i)}}=\frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right)^n+\frac{1}{z-(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-(1+i)}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-(1+i))^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(z-(1+i)\right)^{n+1}}.$$

В обл. $D_3$ имеем $\sqrt{5}<|z-(1+i)|<\infty$, поэтому $f(z)=\frac{1}{z-(1+i)}\frac{1}{1+\frac{1+2i}{z-(1+i)}}+\frac{1}{z-(1+i)}\times$

$$\times\frac{1}{1+\frac{1}{z-(1+i)}}=\frac{1}{z-(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+2i}{z-(1+i)}\right)^n+\frac{1}{z-(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(z-(1+i)\right)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1+(1+2i)^n\right)}{\left(z-(1+i)\right)^{n+1}}.$$

**зм2**. Данный пример иллюстрирут тот факт, что разл-ие фк-и в ряд Лорана имеет, вообще говоря, разный вид для различных обл.

**п14**. Разл-ть фк-ю $f(z)=\frac{z-4}{z^2-8z+65}$ в ряд Лорана в окрс-ти беск. удаленной тч. $z=\infty$ и указать обл-ть сх-ти ряда.

Р. Разл-им фк-ю $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{z-4}{z^2-8z+65}=\frac{z-4}{\left(z-(4-7i)\right)\left(z-(4+7i)\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-(4-7i)}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-(4+7i)}. \tag{8}$$

Эта фк. теряет антч-сть в тч-х $z_1=4-7i$, $z_2=4+7i$, сд-но, окрс-ю беск. удаленной тч., в к-ой фк-я $f(z)$ яв-ся антч-ой, будет внешность круга, радиус к-го равен $\sqrt{65}$ $\left(|4\pm7i|=\sqrt{65}\right)$, с центром в нач. крд., т.е. обл. $|z|>\sqrt{65}$.

Разл-ив в ряд Лорана по сп-ям $z$ в кольце $\sqrt{65}<|z|<\infty$ каждое слг. рав-ва (8), получим

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{4-7i}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{4+7i}{z}}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4-7i}{z}\right)^n+\frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+7i}{z}\right)^n=\frac{1}{2}\times$$

$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4-7i)^n+(4+7i)^n}{z^{n+1}}$. Этот ряд сх-ся в обл-ти $\sqrt{65}<|z|<\infty$, на границе к-ой находятся три особые тч. (тч. $z_1=4-7i$, $z_2=4+7i$ на окр-ти $|z|=\sqrt{65}$ и тч. $z=\infty$).

**п15**. Найти нули и указать их кратность для фк-и $(z^3 + i)^2$.

Р. Р-им ур. $z^3 + i = 0$: $z_k = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}$ $\left(k = \overline{0,\ 2}\right)$. $z_0 = \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = i$ $(k = 0)$; $z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $(k = 1)$; $z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $(k = 2)$. Исх. фк-ю запишем в виде $(z^3 + i)^2 = (z - z_0)^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2 = (z - i)^2\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2$. Эта фк. имеет нули второй кратности в тч-х $i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

**п16**. Опр-ть изолированные особые тч., указать их тип (хрк-р), в случае полюса – его порядок для фк-и $f(z) = \frac{2\sin z - 3\sin^2 z}{z\left(z^2 + 4\right)^2}$.

Р. Фк-и $2\sin z - 3\sin^2 z$ и $z(z^2 + 4)^2$ антч-ие на всей пл-и $Z$, а их отн-ие $\frac{2\sin z - 3\sin^2 z}{z\left(z^2 + 4\right)^2}$ антч-но на всей пл., кроме тч-к $z_1 = 0$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$, в к-ых знмт-ль обращается в нуль. Указанные тч. яв-ся изолированными особыми тч. При $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$ чслт-ль данной фк. отличен от нуля, значит, тч-и $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$ – полюсы второго порядка исх. фк-и (эти тч. – нули второй кратности для знмт-ля). Для знмт-ля тч. $z_1 = 0$ – простой нуль, для чслт-ля – тоже простой нуль, т.к. $(2\sin z - 3\sin^2 z)|_{z=0}$, а $(2\sin z - 3\sin^2 z)'|_{z=0} = (2\cos z - 3\sin 2z)|_{z=0} = 2 \neq 0$. Сдт-но, тч. $z = 0$ для дроби будет устранимой особой тч. Это можно было установить и по др-му: опр-ив предел фк-и $f(z)$ при $z \to 0$. Дсв-но, $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{2\sin z - 3\sin^2 z}{z\left(z^2 + 4\right)^2} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{2\cos z - 3\sin 2z}{\left(z^2 + 4\right)^2 + 4z^2\left(z^2 + 4\right)} = \frac{1}{8}$, где использовали правило Лопиталя. Т.к. сущ-ет конечный $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, то тч. $z_1 = 0$ яв-ся устранимой особой тч. для данной фк.

**п17**. Иссл-ть хрк-р беск. удаленной тч. для сд. фк-й:

а) $f(z) = \frac{2z^2 - z + 3}{z^3 - z^2 - 2z}$; б) $f(z) = 2z^3 - z + \sin\frac{1}{z}$.

Р. а) перепишем исх. фк-ю так: $f(z) = \frac{2z^2 - z + 3}{z^3 - z^2 - 2z} = \frac{2z^2 - z + 3}{z(z + 1)(z - 2)}$. Изолированные особые тч. этой фк. – $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2$. Значит, обл-ть $|z| > 2$ яв-ся окрс-ю беск. удаленной тч. $z = \infty$, где нет особых тч.

Разл-им в обл-и $|z| > 2$ фк-ю в ряд Лорана по сп-ям $z$; для этого произведем деление чслт-ля на знмт-ль и получим $f(z) = \frac{2z^2 - z + 3}{z^3 - z^2 - 2z} = \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \ldots$ Очевидно, что $z = \infty$ яв-ся устранимой особой тч. (в полученном разл. отсутствуют плж. сп-и).

$$\begin{array}{r|l} 2z^2 - z + 3 & z^2 - z^2 - 2z \\ \underline{-\,2z^2 - 2z - 4} & 2/z + 1/z^2 + 8/z^3 + \ldots \\ z + 7 & \\ \underline{-\,z - 1 - 2/z} & \\ 8 + 2/z\ldots & \end{array}$$

К этому выводу можно прийти и иначе, выч-ив предел $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{2z^2 - z + 3}{z^3 - z^2 - 2z} = 0$. Поскольку этот предел конечен, фк. $f(z)$ антч-на в беск-ти, т.е. имеет в тч. $z = \infty$ устранимую особенность;

б) обл-ть $0 < |z| < \infty$ яв-ся окрс-ю тч-и $z = \infty$ для $f(z)$. Разл-им в этой обл. данную фк. в ряд Лорана по сп-ям $z$: $f(z) = 2z^3 - z + \sin\frac{1}{z} = 2z^3 - z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n + 1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} + \ldots$ Т.о., тч. $z = \infty$ яв-ся полюсом третьего порядка.

# ЛЕКЦИЯ 39

## 13.4. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**1°. Понятие вычета**. Рас-им ряд Лорана внутри кольца $r < |z-a| < R$ с центром в тч-е $a$:

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), $C$ – любой замкнутый контур, расположенный внутри кольца и окружающий тч-у $a$.

Ряд Лорана для антч. фк-и $f(z)$ в окрс-ти беск. удаленной тч. имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (R < |z| < \infty). \tag{1a}$$

**о1**. Вычетом антч. фк-и $f(z)$ в изолированной особой тч. $z = a$ наз. коэф-т $C_{-1}$ при $1/(z-a)$ в разл-и $f(z)$ в ряд Лорана (1) в окрс-и тч. $z = a$ и обз-ся Выч$[f(z), a] = \operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z) = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z$. (2)

Из о1 следует, что в правильной тч. и в устранимой особой тч. вычет равен нулю.

Вычетом фк-и $f(z)$ в беск. удаленной тч. наз. коэф-т $c_{-1}$ при $1/z$ в ряде Лорана (1а), взятый с обратным знаком (его уточним далее в о2): $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$. (3)

Если особая тч. – полюс, то при выч-и вычета возможны два случая:

1) Если $a$ – полюс первого порядка, то ряд Лорана имеет вид

$$f(x) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

откуда $(z-a)f(x) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \ldots$ и поэтому

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{4}$$

Этому результату можно придать и др. форму. Для этого полагаем $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(z)$ имеет в тч. $z = a$ нуль первого порядка: $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Т.к. для фк-и $\psi(z)$ ряд Тейлора имеет вид

$$\psi(z) = \psi(a) + \frac{\psi'(a)}{1!}(z-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{\psi'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \ldots,$$

то $\psi(z) = (z-a)\left[\psi'(a) + \dfrac{\psi''(a)}{2!}(z-a) + \dfrac{\psi'''(a)}{3!}(z-a)^2 + \ldots\right]$. Тогда из $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)\psi'(a)}$ или $(z-a)f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi'(a)}$ получим $c_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi'(a)}$. (4a)

Если $a$ – полюс порядка $m$, то ряд Лорана имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n = \dfrac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dfrac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$, откуда $(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \ldots$

Диф-уя обе части рав-ва $m-1$ раз по $z$, получим $\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!c_{-1} + m(m-1)\ldots 2c_0(z-a) + (m+1)m\ldots 3c_1(z-a)^2 + \ldots$ Поэтому

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \tag{5}$$

**п1**. Найти вычеты $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-z-2}$ в ее особых тч.

Р. Особые тч. $f(z)$ – это полюсы первого порядка $a_0 = 2$ и $a_1 = -1$. $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = z^2 + 1$, $\psi(z) = z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1)$, $\psi'(z) = 2z - 1$. Тогда по (4а) $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \dfrac{\varphi(2)}{\psi'(2)} = \dfrac{5}{3}$, $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \dfrac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)} =$ $= \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.

**п2**. Найти вычеты фк-и $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+2)^3}$ в ее особых тч.

Р. Особыми тч. яв-ся: $a_0 = -2$ – полюс третьего порядка, $a_1 = 1$ – полюс второго порядка. Тогда по (5) имеем $\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to-2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)^2}\right) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to-2}\dfrac{(z^2-6z+1)e^z}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{6e^2}$. $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) =$ $= \lim\limits_{z\to1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{e^z}{(z+2)^3}\right) = \lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)e^z}{(z+2)^4} = 0.$

**зм1**. Приведенные фм. (4)-(5) непригодны для нахождения вычета в беск. удаленной тч. Непригодны они и для случая, когда $z = a$ – сущ-но особая тч. фк-и $f(z)$. В таких случаях для нахождения вычета используется разл-ие фк-и в ряд Лорана.

**2°. Некоторые теоремы о вычетах**. Сформулируем и док-ем сд-ие

**т1** (основная). Если фк. $f(z)$ яв-ся антч-ой в замкнутой обл-и $\overline{D_z}$, огрн-ой контуром $C$, за иск-ем конечного числа (к.ч.) изолированных особых тч. $z_k \in D_z$ ($k = \overline{1,n}$), то

$$\oint\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{6}$$

где $C = \Gamma^+$ – граница обл-и $D_z$, проходимая в плж. нпв-и.

Д. Окружим каждую изолированную тч. $z_k$ фк-и $f(z)$ дт-но малым замкнутым контуром $\gamma_k$ ($k = \overline{1,n}$), целиком лежащим в обл. $D$ и не содержащим др. особых тч-к фк-и $f(z)$ (рис. 1).

Внутри образовавшейся многосвязной обл., огрн-ой контуром $\Gamma^+$ и всеми контурами $\gamma_k$ ($k = \overline{1,n}$) фк. $f(z)$ антч-на. Поэтому по т2: 13.2 имеем $\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,\mathrm{d}z =$ $= -\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$ ■

**о2**. Вычетом антч-ой фк-и $f(z)$ в беск. удаленной изолированной особой тч. наз. коэф-т ряда Лорана в окрс-и этой тч. при $z^{-1}$, взятый с обратным знаком, т.е.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\int\limits_{\gamma^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{7}$$

где $\gamma$ – окр-ть с центром в нач. крд-т и дт-но большого радиуса $R$, а интв-ие по часовой стрелке, т.е. беск. удаленная тч. остается слева.

**т2**. Если фк $f(z)$ имеет в пл-и $Z$ к.ч. особых тч., то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в беск. удаленной тч., равна нулю: $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. (8)

Д. Пусть $C$ – замкнутый контур, внутри к-го находится $n - 1$ изолированных тч. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ фк-и $f(z)$. Тогда по т1 имеем $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$. Но по о2 $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) =$ $= -\operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)$ ($z_n = \infty$). Сдт-но, $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$ ■

При выч-и инт-а по замкнутому контуру можно использовать т2.

**п3**. Выч-ть $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi}$ $(|a| < 1)$.

Р. Пусть $e^{i\varphi} = z$, тогда $dz = i\,e^{i\varphi}\,d\varphi = iz d\varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$. Если $\varphi \in [0, 2\pi]$, то $|e^{i\varphi}| = |z| = 1$. Т.к. по фм-е Эйлера $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, то $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} =$

$$= \frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}.$$

Особыми тч. подынт. фк-и $f(x) = \frac{1}{az^2+2z+a}$ яв-ся полюсы первого порядка $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$.

Т.к. здесь $z_1 z_2 = 1$, то лишь полюс $z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ лежит внутри круга $|z| < 1$, поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi} = 2\pi i \cdot \frac{2}{i} \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 4\,\pi \lim_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) = 4\,\pi \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{a(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{a(z_1-z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

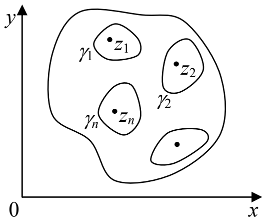


Рис. 1

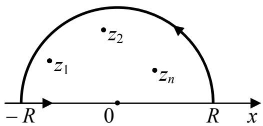


Рис. 2

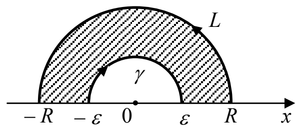


Рис. 3

**3°. Вычисление интегралов при помощи вычетов**. Приведем полезные в дальнейшем

**т3**. Пусть фк. $f(z)$ антч-на в верхней полупл., включая дсв. ось, за иск-ем к.ч. особых тч. $z_1$, $z_2$, …, $z_n$, лежащих в верхней полупл., и, кроме того, $|f(z)| \le \frac{M}{|z|^m}$ при $|z| \ge R$, где $m \ge 2$ и $R$ – дт-но большое число. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{9}$$

Д. Опишем полуокр-ть $L$ радиуса $R$ с центром в тч. $O$ таким образом, чтобы все особые тч. фк-и $f(z)$ попали внутрь $L$ (рис. 2). Тогда в силу т2 имеем

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{9a}$$

Т.к. $|f(z)| \le \frac{M}{|z|^m}$ при $|z| \ge R$, то $\left|\int\limits_L f(z)\,dz\right| \le \frac{M}{|z|^m}\pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \to 0$ при $R \to \infty$ $(m - 1 \ge 1)$.

Переходя к пределу в (9a) при $R \to \infty$, получим (9) ■

**п4**. Выч-ть инт-л $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Р. Фк. $f(z) = \frac{1}{1+x^4}$ антч-на в верхней полупл., за иск-ем тч-к $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, в к-ых она имеет простые полюсы. Кроме того, $|f(x)| \le \frac{1}{|z|^4}$ $(m = 4 > 2)$. По (4a) выч-им: $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \dfrac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = \dfrac{1}{4z^3} = \dfrac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{1}{-4e^{-i\frac{\pi}{4}}} = -\dfrac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \dfrac{\varphi(z_2)}{\psi'(z_2)} = \dfrac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{1}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Тогда по фм-е (9) получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi i}{4}\left(-\, e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \pi\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i} = \pi\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

**т4**. Пусть фк $f(z)$ антч-на в верхней полупл., включая дсв. ось, за иск-ем к.ч. особых тч. $z_1$, $z_2$, …, $z_n$, лежащих в верхней полупл., и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ отс-но $\arg z = \varphi$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iz}. \qquad (10)$$

Д. Как и при д-ве т3, имеем $\int\limits_{-R}^{R} f(x)\, e^{ix}\mathrm{d}x + \int\limits_{L} f(x)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$, (10а)

т.к. фк. $f(z)e^{ix}$ имеет те же особенности, что и $f(z)$. Покажем, что $\int\limits_{L} f(x)\, e^{iz}\mathrm{d}z \to 0$. $\left|\int\limits_{L} f(z)\, e^{iz}\mathrm{d}z\right| =$

$= \left|\int\limits_{0}^{\pi} f\left(Re^{i\varphi}\right) e^{-R\sin\varphi} iRe^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \le \int\limits_{0}^{\pi} \left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| e^{-R\sin\varphi} R\mathrm{d}\varphi$.

В силу усл-я теоремы, $|f(Re^{i\varphi})| \le \varepsilon$ при $R > N$ для всех $\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Поэтому $\left(\sin\varphi > \dfrac{2\varphi}{\pi} \text{ при } 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем $\left|\int\limits_{L} f(z)\, e^{iz}\mathrm{d}z\right| \le \varepsilon\int\limits_{0}^{\pi} Re^{-R\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\varepsilon\int\limits_{0}^{\pi/2} Re^{-\frac{2R\varphi}{\pi}}\mathrm{d}\varphi = \left|\dfrac{2R}{\pi}\varphi = t\right| =$

$= \varepsilon\pi\int\limits_{0}^{R} e^{-t}\mathrm{d}t = \pi\varepsilon(1 - e^{-R}) < \pi\varepsilon$ $(R > N)$. Переходя к пределу в (10а) при $R \to \infty$, получим (10) ■

**п5**. Выч-ть $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Р. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Эта фк. имеет простой полюс в тч. $z = 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ равномерно отс-но $\arg z = \varphi$. Построим контур интв-ия (рис. 3). В заштрихованной части фк. $\dfrac{e^{iz}}{z}$ антч-я при любом $R$ и любом $\varepsilon$, поэтому по теореме Коши имеем $\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\right)\dfrac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{L}\dfrac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma}\dfrac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0.$ (10в)

Как и ранее, легко показать, что $\lim\int\limits_{L} z^{-1}e^{iz}\,\mathrm{d}z = 0$. Далее $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma} e^{iz}\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \lim\int\limits_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\cdot\dfrac{i\varepsilon e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$

$= i\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = i\int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{d}\varphi = \pi i$. Т.о., (10б) в пределе при $R \to \infty$ принимает вид

$\pi i = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\right)\dfrac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} 2i\int\limits_{\varepsilon}^{R}\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2xi}\mathrm{d}x = 2i\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, т.е. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$. Т.к. фк. $\dfrac{\sin x}{x}$ чет., то $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi$.

Если под знаком инт-а есть сомножитель $\sin x$ или $\cos x$, то, заменяя их через $e^{ix}$, получим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix}\,\mathrm{d}x$. Затем, выделяя дсв. и мнимую части, найдем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x$.

**п6**. Выч-ть инт-л $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ ($\alpha$, $a > 0$).

Р. Рас-им фк-ю $e^{i\alpha z}/\left(a^2+z^2\right)$. Она антч. в верхней полупл., кроме тч-и $z = ai$. Фк. $f(z) = \frac{1}{a^2+z^2} \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно отс-но $\arg z = \varphi$. Поэтому по т4 имеем $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\alpha x}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{e^{i\alpha z}}{a^2+z^2} = 2\pi i \frac{e^{i\alpha a i}}{2ai} = \frac{\pi}{a}\, e^{-\alpha a}$. Выделяя дсв. часть, получим $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\, e^{-\alpha a}$, $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\, e^{-\alpha a}$.

**п7**. Выч-ть инт-л $I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Р. $I = \int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\,e^{-2} = \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-2})$. Итак, $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-2})$.

**п8**. Выч-ть инт-л $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Р. $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-2}) = \frac{\pi}{4}\,(1+e^{-2})$.

**зм2**. С помощью вычетов в ряде случаев могут быть выч-ны опрн. и несбтн. инт-ы от рац. и дробно-рац. фк-й. Рас-им нек-ые из таких случаев.

1. Если $R(\sin t, \cos t)$ – рац. фк-я от $\sin t$, $\cos t$, непр-я при $0 \le t \le 2\pi$ (или $\beta \le t \le \beta + 2\pi$), то, сделав подн-у $e^{it} = z$, можно получить, что

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\mathrm{d}z. \tag{11}$$

Зн-ие инт-а в правой части врж-ия равно сумме вычетов подынт. фк-и отс-но полюсов, лежащих внутри окрс-ти $|z| = 1$, умн-ной на $2\pi i$.

2. Если $f(z)$ – дробно-рац. фк-я, антч-я на дсв. оси и в верхней полупл. ($\operatorname{Im} z > 0$), за иск-ем к.ч. особых тч. $z_1, \ldots, z_n$, лежащих в верхней полупл. (т.е. $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1, n}$), и если $zf(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{12}$$

3. Если $f(z)$ – дробно-рац. фк-я, антч-я на дсв. оси и в верхней полупл., за иск-ем к.ч. особых тч. $z_1, \ldots, z_n$, лежащих в верхней полупл., и если $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то для любого $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right); \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right). \tag{14}$$

**4°. Типовые примеры**. Продолжим р-ие примеров.

**п9**. Выч-ть вычеты в излн. особых тч. сд. фк-й: а) $\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2}$; б) $z\,\mathrm{ctg}\,2z$; в) $z^3\sin^2\dfrac{1}{z}$.

Р. а) Особыми тч. фк-и $\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2}$ яв-ся простой полюс $z_1 = 1$ и полюс второго порядка $z_2 = 0$. Для тч. $z_1 = 1$ по (4) находим $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2} = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2} = \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z^2+3z-1}{z^2} = 4.$

По фм-е (5) при $m = 2$ для тч. $z_2 = 0$ имеем $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2} = \dfrac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-0)^2\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2}\right) =$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-0)^2\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)z^2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{(4z+3)(z-1)-(2z^2+3z-1)1}{(z-1)^2} = -2.$$

б) Для фк. $z\,\mathrm{ctg}\,2z = \dfrac{z\cos 2z}{\sin 2z}$ особыми тч. яв-ся тч-и $z_k = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тч. $z_0 = 0$ – устранимая особая тч. для фк-и $\dfrac{z\cos 2z}{\sin 2z}$, т.к. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\cos 2z}{\sin 2z} = \lim\limits_{z\to 0}\cos 2z\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin 2z} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sin 2z} = \dfrac{1}{2}$ (к.ч.). Поэтому $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z\,\mathrm{ctg}\,2z = 0$. Тч-и $z_k = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ для данной фк-и яв-ся простыми полюсами, т.к. $z\cos 2z \neq 0$ при $z = z_k$, а $\sin 2z = 0$, $(\sin 2z)' \neq 0$ при $z = z_k$. Сдт-но, по (4а) получим $\operatorname*{Res}\limits_{z=k\pi/2} z\,\mathrm{ctg}\,2z = \left.\dfrac{z\cos 2z}{(\sin 2z)'}\right|_{z=k\pi/2} = \left.\dfrac{z\cos 2z}{2\cos 2z}\right|_{z=k\pi/2} = \dfrac{k\pi}{4}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

в) Данная фк. имеет особую тч. $z = 0$. Разл-им фк-ю в окрс-и тч. $z = 0$ в ряд Лорана: $z^3\sin^2\dfrac{1}{z} = z^3 \times$

$$\times\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{z}\right) = \frac{1}{2}z^3\left(1-\left(1-\frac{1}{2!}\frac{2^2}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{2^4}{z^4}-\frac{1}{6!}\frac{2^6}{z^6}+\ldots\right)\right) = \frac{z^3}{2}\left(\frac{1}{2!}\frac{2^2}{z^2}-\frac{1}{4!}\frac{2^4}{z^4}+\frac{1}{6!}\frac{2^6}{z^6}-\ldots\right) = z-\frac{1}{3}\times$$

$\times\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{45}\dfrac{1}{z^3}-\ldots$ Очевидно, что $z = 0$ – сущ-но особая тч. для данной фк. и $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} z^3\sin^2\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{3}$.

**п10**. Выч-ть вычеты отс-но беск. удаленной тч. фк-й: а) $f(z) = \dfrac{4z^5-3z^4+2z-1}{z^3+4}$; б) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^2+9}$.

Р. а) Особые тч. данной фк. – корни ур. $z^3 + 4 = 0$. Т.к. они лежат на окр-ти $|z| = \sqrt[3]{4}$, то окрс-ю тч-и $z = \infty$, где данная фк. антч-на, яв-ся обл-ть $|z| > \sqrt[3]{4}$. В этой обл. разл-им фк-ю в ряд Лорана по сп-ям $z$, разделив чслт-ль на знмт-ль: $f(z) = \dfrac{4z^5-3z^4+2z-1}{z^3+4} = 4z^2 - 3z - 16\dfrac{1}{z} + 14\dfrac{1}{z^2} + \ldots$ Из этого разл-я видим, что тч. $z = \infty$ яв. полюсом второго порядка, тогда по (3) имеем $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 16$.

б) Тч-и $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$ яв-ся простыми полюсами данной фк., тогда по (4а) получим: $\operatorname*{Res}\limits_{z=-3i} f(z) =$

$$= \left.\frac{\sin 2z}{(z^2+9)'}\right|_{z=-3i} = \left.\frac{\sin 2z}{2z}\right|_{z=-3i} = \frac{\sin(-6i)}{-6i} = \frac{-i\,\mathrm{sh}\,6}{-6i} = \frac{\mathrm{sh}\,6}{6};\ \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \left.\frac{\sin 2z}{2z}\right|_{z=3i} = \frac{\sin 6i}{6i} = \frac{i\,\mathrm{sh}\,6}{6i} =$$

$= \dfrac{\mathrm{sh}\,6}{6}$. Согласно фм-е (8) имеем $\operatorname*{Res}\limits_{z=-3i} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=3i} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0 \Rightarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{\mathrm{sh}\,6}{3}$.

**п11**. Выч-ть инт-л $I = \oint\limits_C \frac{(2z-1)\mathrm{d}z}{(z-1)^2(4z^2-4z+37)}$, где $C$ – окр-ть $|z-3i| = 1$.

Р. Найдем особые тч. подынт. фк-и $f(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^2(4z^2-4z+37)}$, приравняв знмт-ль к нулю: $(z-2)^2(4z^2-4z+37) = 0$. Р-ив ур-е, находим $z_1 = 1$, $z_2 = 0{,}5 - 3i$, $z_3 = 0{,}5 + 3i$. В этих тч. члст-ль данной фк. отличен от нуля. Сдт-но, полученные тч. – полюсы фк-и $f(z)$. Причем $z_1 = 1$ – полюс второго порядка, а $z_2 = 0{,}5 - 3i$, $z_3 = 0{,}5 + 3i$ – простые полюсы для фк. $f(z)$.

Проверим, какие особые тч. (полюсы) лежат в обл-и $D_z$, огрн-ой контуром $|z-3i| = 1$. Для этого $z_1, z_2, z_3$ подс-им в ур-ие $|z-3i| = 1$. Если подн-ка дает ист. нерав-во $|z_k - 3i| < 1$ ($k = \overline{1, 3}$), то тч. $z_k \in D_z$, если же нерав. ложное (т.е. $|z_k - 3i| > 1$), то $z_k \notin D_z$. В нашем случае имеем: $|z_1 - 3i| =$ $= |1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10} > 1 \Rightarrow z_1 = 1 \notin D_z$; $|z_2 - 3i| = |0{,}5 - 3i - 3i| = |0{,}5 - 6i| = \sqrt{0{,}25+36} > 1$ $\Rightarrow z_2 = 0{,}5 - 3i \notin D_z$; $|z_3 - 3i| = |0{,}5 + 3i - 3i| = |0{,}5| = 0{,}5 < 1 \Rightarrow z_3 = 0{,}5 + 3i \in D_z$.

Итак, внутри контура $|z-3i| = 1$ лежит лишь точка $z_3 = 0{,}5 + 3i$ – простой полюс (этот результат можно получить и геомч-ки, если на пл-ти $Z$ избз-ть контур $|z-3i| = 1$ и нанести на $Z$ особые тч-и $z_1, z_2, z_3$). Найдем по фм-е (4) вычет фк-и $f(z)$ в тч-е $z_3 = 0{,}5 + 3i$:

$$\operatorname*{Res}_{z=0,5+3i} f(z) = \lim_{z\to 0,5+3i}\left((z-0{,}5-3i)\frac{2z-1}{(z-1)^2 4(z-0{,}5+3i)(z-0{,}5-3i)}\right) = \lim_{z\to 0,5+3i}\frac{2z-1}{4(z-1)^2(z-0{,}5+3i)} =$$

$$= \frac{2(0{,}5+3i)-1}{4(0{,}5+3i-1)^2(0{,}5+3i-0{,}5+3i)} = \frac{-(35-12i)}{1369}.$$

Тогда по фм-е (6) находим инт-л $I = 2\pi i\left(-\frac{1}{1369}(35-12i)\right) = \frac{-2\pi}{1369}(12+35i)$.

**п12**. Выч-ть инт-ы: а) $I = \oint\limits_{|z|=3}\frac{3z^6-5z^5-2z^4-3z^2+2}{(z+1)(z^4+4)}\,\mathrm{d}z$; б) $I = \oint\limits_{|z-i|=1} ze^{\frac{1}{z-i}}\,\mathrm{d}z$.

Р. а) Особыми тч. подынт. фк-и яв-ся корни ур. $z^4 + 4$ (тч-и лежат на окр-ти $|z| = \sqrt[4]{z}$ ) и $z = -1$. Эти тч., а их всего пять, яв-ся излн. особыми тч., и все они расположены внутри контура $|z| \le 3$. Сдт-но, если обз-ть эти тч. через $z_k$ ($k = \overline{1, 5}$), по фм-е (6) получим $I = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k}\frac{3z^6-5z^5-2z^4-3z^2+2}{(z+1)(z^4+4)}$.

На основании фм-ы (8) последнее рав-во можно записать так:

$I = 2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\frac{3z^6-5z^5-2z^4-3z^2+2}{(z+1)(z^4+4)}$. Учитывая, что в обл. $|z| > \sqrt[4]{z}$ фк. $f(z) = \frac{3z^6-5z^5-2z^4-3z^2+2}{(z+1)(z^4+4)}$ представима рядом Лорана по сп-ям $z$ в виде $f(z) = \frac{3z^6-5z^5-2z^4-3z^2+2}{z^5+z^4+4z+4} = 3z - 8 + \frac{6}{z} - \frac{6}{z^2} - \ldots$ (здесь использовано деление члст-ля на знмт-ль), по (3) имеем $-c_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -6$.

Т.о., искомый инт-л $I = -2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 12\pi i$.

б) Подынтн. фк-я $f(z) = ze^{\frac{1}{z-i}}$ имеет особую тч. $z = i$, к-ая содержится внутри контура $|z - i| = 1$, тогда по фм-е (6): $I = \oint\limits_{|z-i|=1} ze^{\frac{1}{z-i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)$.

Разл-им фк-ю $f(z)$ в окрс-и тч-и $z = i$ в ряд Лорана: $f(z) = ze^{\frac{1}{z-i}} = (z-i+i)\,ze^{\frac{1}{z-i}} = (z-i)\,e^{\frac{1}{z-i}} +$ $+ ie^{\frac{1}{z-i}} = (z-i)\left(1+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2!(z-i)^2}+\ldots\right) + i\left(1+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2!(z-i)^2}+\ldots\right) = (z-i) + (1+i) + \left(\frac{1}{2}+i\right)\times$ $\times\frac{1}{z-i} + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}i\right)\frac{1}{(z-i)^2} + \ldots$ Из этого разл-я видно, что $z = i$ яв-ся сущ-но особой тч. и $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z) =$ $= 1/2 + i$. Сдт-но, $I = 2\pi i(1/2 + i) = \pi(-2 + i)$.

**п13**. Выч-ть опрн. инт-л $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Р. Если положить $z = e^{it}$, то по (11) $I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz}\,\frac{(z^2+1)/(2z)}{\left(5-4(z^2+1)/(2z)\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}\,\mathrm{d}z$.
Р-ив ур. $2z^2 - 5z + 2 = 0$, найдем особые тч. подынт. фк-и: $z_1 = 0{,}5$, $z_2 = 2$. Эти тч-и яв-ся полюсами второго порядка для подынт. фк-и. Из них только $z_1$ находится внутри окр-и $|z| = 1$. Сдт-но, по (5), $\operatorname*{Res}\limits_{z=0,5} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2} = \lim\limits_{z\to 0,5} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-0{,}5)^2 \frac{z^2+1}{4(z-0{,}5)^2(z-2)^2}\right) = \frac{1}{4}\lim\limits_{z\to 0,5}\left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2}\right)' =$
$= \frac{1}{4}\lim\limits_{z\to 0,5} \frac{2z(z-2)^2 - 2(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{8}{27}$. Т.о. $I = \frac{1}{2i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}$.

**п14**. Вычислить несбт. инт-ы: а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 5x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$.

Р. а) Введем фк-ю $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$, к-ая на дсв. оси, т.е. при $z = x$, совпадает с подынт. фк-ей $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$. Введенная фк. есть рац. дробь, знмт. к-ой не имеет дсв. корней. Т.к. выполняется усл-е $zf(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то инт-л может быть выч-ен по фм-е (12).

Найдем особые тч. фк-и $f(z)$: $(z^2 + 1)^2(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow z_1 = i$; $z_2 = -i$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -2i$. Эти особые тч. яв-ся полюсами для фк-и $f(x)$, причем тч-и $z_1$ и $z_2$ – полюсы второго порядка, а тч-и $z_3$ и $z_4$ – простые полюсы. Нам нужны только те полюсы, у к-ых мнимая часть плж. Это $z_1 = i$ (полюс второго порядка) и $z_3 = 2i$ (простой полюс).

Найдем вычеты фк-и $f(z)$ в тч-х $z_1$ и $z_3$: $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z) = \lim\limits_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right) =$
$= \lim\limits_{z\to i}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)' = \lim\limits_{z\to i} \frac{2z(z+i)^2(z^2+4) - z^2\left(2(z+i)(z^2+4) + (z+i)^2 2z\right)}{(z+i)^4(z^2+4)^2} = \frac{5}{36i}$; $\operatorname*{Res}\limits_{z=2i} f(z) = \lim\limits_{z\to 2i} (z -$
$- 2i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)} = \lim\limits_{z\to 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+2i)} = -\frac{1}{9i}$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi i\left(\frac{5}{36i} - \frac{1}{9i}\right) = \frac{\pi}{18}$.

б) Фк-я $f(z) = \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}$ – дробно-рац., антч-я на дсв. оси и в верхней полупл., за иск-ем особой тч-и $z_2 = 1 - i$ (корни ур. $z^2 - 2z + 2 = 0$ есть $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 - i$), а тч. $z_1 = 1 + i$ – полюс второго порядка. Т.к. для фк-и $f(z)$ выполняется усл-ие $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то данные инт. могут быть выч. по фм-ам (13) и (14).

Найдем вычет. фк-и $F(z) = f(z)e^{i\cdot 5z}$ в тч-е $z_1$: $\operatorname*{Res}\limits_{z=1+i} F(z) = \lim\limits_{z\to 1+i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-1-i)^2 \frac{e^{i\cdot 5z}}{(z^2-2z+2)^2}\right) =$
$= \lim\limits_{z\to 1+i}\left(\frac{e^{i\cdot 5z}}{(z^2-2z+2)^2}\right)' = \lim\limits_{z\to 1+i} \frac{5ie^{i\cdot 5z}(z-1+i)^2 - 2e^{i\cdot 5z}(z-1+i)}{(z-1+i)^4} = \frac{5ie^{i\cdot 5(1+i)}(2i)^2 - 4ie^{i\cdot 5(1+i)}}{(2i)^4} = \frac{-24ie^{i\cdot 5(1+i)}}{16} =$
$= -\frac{3}{2}ie^{-5}e^{i\cdot 5} = -\frac{3}{2}ie^{-5}(\cos 5 + i\sin 5) = \frac{3}{2}e^{-5}(\sin 5 - i\cos 5)$. Итак, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2} =$
$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=1+i} F(z)\right) = 3\pi e^{-5}\cos 5$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 5x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2} = \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=1+i} F(z)\right) = 3\pi e^{-5}\sin 5$.

## 13.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 13.1. ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### Вопросы для самопроверки

1. В каких формах можно представить комп. числа и как изб-ть их на пл. $xOy$?
2. Какие операции введены над комп. числами? Приведите их геом. инпц-ю.
3. Напишите фм-у Муавра и приведите ствщ. примеры.
4. Что такое обл-ть комп. числа (ее св-ва), граница и замкнутая обл., односвязная и $n$-связная обл-ти?
5. Как задается ур-ие линии в комп. форме?
6. Что такое $\delta$-окрс-ть тч-и $z_0$?
7. Как опр-ся фк-я в комп. обл-и? Приведите примеры.
8. Как опр-ся тригч. и гпрбч. фк-и? Приведите аналог их фм-л.
9. Как хркз-ся др. элр. фк-и: пкзт., лгрч., обобщенные пкзт-я и спн-я фк-и?
10. Дайте опр-ия предела и непр-сти фк-й. Приведите ствщ. примеры.
11. В чем состоит антч-сть (регулярность) фк-и $\omega = f(z)$ в нек-ой обл-и $D_z$?
12. Сформулируйте опр-ие прв-ой и усл-ие Коши-Римана.
13. Как вы понимаете дифм-сть фк-и в тч-е?
14. Что такое конформные отб.? Приведите примеры.

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу решенных п1-п20 из 13.1 р-ть з1-з25.

1. Найти дсв. зн-ия $x$ и $y$ из ур. $(1 + i)x^2 + (2 + i)x - (1 - i)y = 7(1 + i)$. О: (2, 1), $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{7}{5}\right)$.

2. Найти Rez и Imz, если $z = \dfrac{2}{1+i} - \dfrac{1-i}{1+i}\,\dfrac{2-2i}{1-2i}$. О: $\dfrac{4}{5}$ и $-\dfrac{7}{5}$.

3. Выполнить сд. действия: а) $(1 + i)(1 - 3i)$, б) $\dfrac{2}{-i} + i(1 + i)$, в) $\dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$. О: а) $4 - 2i$, б) $-1 + 3i$, в) 0.

4. Показать, что $\omega^3 = 1$, если $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найти $(a + b\omega)(a + b\omega^2)$. О: $a^2 - ab + b^2$.

5. Найти комп. числа, спрж-ые со своим кв-м. О: $z_1 = 0$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Представить в тригч. форме сд. числа: $3i$, $1 + \sqrt{3}i$, $-7$, $\sqrt{3} - i$, $2 - 2i$. О: $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $7(\cos\pi + i\sin\pi)$, $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. Выч-ть сп-и по фм-е Муавра: $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$, $\left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)^8$, $(-2 + 2i)^6$. О: $8i$, 1296, $512i$.

8. Найти все корни и построить их на комп. пл-ти: $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{27i}$, $\sqrt[3]{-2+2i}$, $\sqrt[6]{-8}$.

О: $\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}k + i\sin\dfrac{2\pi}{3}k\right)$, $k = \overline{0,\,2}$; $\sqrt{3}\left(\cos\pi\dfrac{4k+1}{6} + i\sin\pi\dfrac{4k+1}{6}\right)$, $k = \overline{0,\,2}$;

$\sqrt[10]{8}\left(\cos\pi\dfrac{8k+3}{20} + i\sin\pi\dfrac{8k+3}{20}\right)$, $k = \overline{0,\,4}$; $\sqrt{2}\left(\cos\pi\dfrac{2k+1}{6} + i\sin\pi\dfrac{2k+1}{6}\right)$, $k = \overline{0,\,5}$.

9. Р-ть ур-ия: а) $z^2 + i = 0$, б) $z^4 - 16 = 0$, в) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$. О: а) $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $z_1 = 2, z_2 = 2i, z_3 = -2, z_4 = -2i$; в) $z_{1\text{-}6} = \sqrt{2}e^{\left(\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k\right)}$ $(k = 0, 1, 2)$.

10. Врз-ть $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. О: $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$ и $\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$.

11. Написать ур-я линий в комп. форме: а) $3x + y = 1$; б) $(x-1)y = 2$; в) $2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 6$.

О: а) $z = t + i(1-3t)$; б) $z = t + i2/(t-1)$; в) $z = 1 + \sqrt{3}\cos t + i\left(\sqrt{2}\sin t - 2\right)$.

12. Какие линии на пл. $xOy$ представлены ур-ми: а) $z = 3 - t^2 + it$; б) $z = 2t - 4 + i(3 - 4t^2)$; в) $z = i + 3e^{it}$. О: а) $x = 3 - y^2$; б) $y = 3 - (x+4)^2$; в) $x^2 + (y-1)^2 = 9$.

13. Опр-ть и построить на комп. пл-и $Z$ линии, заданные ур-ми: а) $\mathrm{Re}(2z+3) - \mathrm{Im}(5-4z) = 1$; б) $|z-1| = |z-2i|$; в) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. О: а) $x + 2y + 1 = 0$; б) $2x - 4y + 3 = 0$; в) $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

14. Выяснить, где расположены тч. $z$, образует ли их мн-во обл-ть (открытую или замкнутую, огрн-ю или неогрн-ю, односвязную или многосвязную), если $z$ уд-ет усл-ям: а) $1 < |z + 2 - 3i| < 2$; б) $|z+1| \geq 2|z|$; в) $|z| + \mathrm{Re}z \leq 1$; г) $\mathrm{Re}((z-2)/(z+i)) > \mathrm{Im}((z-2)/(z+i))$.

О: а) кольцо $1 < (x+2)^2 + (y-3)^2 < 4$ – обл. открытая, огрн-я, двусвязная; б) круг $(x - 1/3)^2 + y^2 \leq 4/9$ – обл. замкнутая, огрн-я, односвязная; в) парб. $y^2 = 1 - 2x$ и ее внутренность – обл. замкнутая, неогрн-я, односвязная; г) внешность круга $(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2$ – обл. открытая, неогрн-я, односвязная.

15. При отб-и $\omega = x^2$ найти: а) образы линий $x = 2$, $y = -2$; б) прообразы линий $u = 1$, $v = 4$.

О: а) $v^2 = 16(4-u)$, $v^2 = 16(4+u)$; б) $x^2 - y^2 = 1$, $xy = 2$.

16. При отб-и $\omega = z/(z-i)$ найти образы линий: а) $x = a$ $(a \neq 0)$; б) $y = b$ $(b \neq 0)$; в) $y = x$; г) $y = x + 1$; д) $|z| = 1$. О: а) $av^2 + a(u-1)^2 - v = 0$; б) $(b-1)v^2 + (b-1)(u-1)^2 = u - 1$; в) $u^2 + v^2 - u - v = 0$; г) $u = 1 + v$; д) $u = 0{,}5$.

17. Выч-ть зн-я пкзт. фк-й $e^{-\frac{\pi i}{6}}$, $e^{-1+2i}$, $e^{2i}$, $e^{2+i}$, $e^{2-3i}$, $e^{-3-4i}$. О: $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $\frac{\cos 2 + i\sin 2}{e}$; $\cos 2 + i\sin 2$, $e^2[\cos 1 + i\sin 1]$, $e^2[\cos 3 - i\sin 3]$, $\frac{\cos 4 - i\sin 4}{e^3}$.

18. Представить в пкзт. форме комп. числа: $1 + i$, $2i$, $-5$, $-1 + i$, $\sqrt{3} + i$, $7$.

О: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $5e^{i\pi}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $7e^{i0}$.

19. Выч-ть зн-ие фк-и: $\cos(2-i)$, $\sin 2i$. О: $\cos 2\,\mathrm{ch}1 + i\sin 2\,\mathrm{sh}1$, $i\,\mathrm{sh}2$.

20. Выч-ть зн-ие фк-и: $\mathrm{th}\left(\ln 3 - \frac{\pi i}{4}\right)$; $\ln(2-3i)$. О: $\frac{40}{41} - i\frac{9}{41}$, $\frac{1}{2}\ln 13 - i\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi ki$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

21. Выч-ть зн-ие фк-и $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. О: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

22. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+2} - i\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3i}{8n-7i}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{2i}{n}$; г) $\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i}$; д) $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z^2+4}{z+i}$; е) $\lim\limits_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^2-2iz-5}$; ж) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}$. О: а) $2 - i$; б) $1/2$; в) $2i$; г) $6i$; д) $\infty$; е) $0{,}5i$; ж) $1/2$.

23. Иссл-ть на непр-сть фк-и: а) $\omega = z\mathrm{Re}z - 2z^2$; б) $\omega = \frac{2z-1}{z^2-6z+10}$; в) $\omega = \frac{2-3z}{1-|z|}$.

О: а) непр-на всюду на $Z$; б) непр-на при любом $z \neq 3 \pm i$; в) непр-на всюду на $Z$, за иск-ем тч-к окр-ти $|z| = 1$.

24. Иссл-ть фк-и на дифм-сть и антч-сть, найти их прв-ые, если они сущ-ют: а) $\omega = z\bar{z} - z\mathrm{Im}z$; б) $\omega = x^2 - 2iy$; в) $\omega = 2z^2 - 3iz$. О: а) диф-ма в тч. $z = 0$, не антч-на ни в одной тч., $f'(0) = 0$; б) диф-ма во всех тч-х $z$, для к-ых $\mathrm{Re}z = -1$, не антч-на ни в одной тч., $f'(z) = -2$; в) диф-ма и

антч-на всюду на пл. $Z$, $f'(z) = 4z - 3i$.

25. Восстановить, если это возможно, антч. фк-и $f(z)$ по заданной дсв. или мнимой части: а) $u = -y(4x+1)$; б) $v = y - e^{2i}\sin 2y$. О: а) $f(z) = iz(2z+1) + C$; б) $f(z) = z - e^{2z} + C$.

## 13.2. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Как опр-ся и выч-ся инт-л от фк-и комп. пер-ой?
2. Какими св. обладает инт-л?
3. Сформулируйте осн. теоремы и док-те их.
4. Приведите фм-у Коши и объясните, как она выводится.
5. В чем заключается суть инт-а Коши?
6. По какой фм-е выч-ся прв-я $n$-го порядка инт-а типа Коши и выведите ее.

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу п1-п8 р-ть з1-з12.

1. Выч-ть $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{d}z$, где $C$ – отрезок пм-й, соединяющий тч-и $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$. О: $2i/3$.

2. Выч-ть $\int\limits_C \left(2z + 3\bar{z}\right)\mathrm{d}z$, $C$ – верх. полуокр-ть $|z - 2| = 3$ от $z_1 = 5$ до $z_2 = -1$. О: $-60 + 27\pi i$.

3. Выч-ть $\int\limits_C (z-1)\cos z\,\mathrm{d}z$, $C$ – прзвл. линия, соединяющая тч-и $z_1 = -\pi/2$ и $z_2 = \pi/2$. О: $-2$.

4. Выч-ть $\int\limits_C \left(2 - 3z + z^2\right)\mathrm{d}z$, $C$ – дуга парб-ы $x = y^2$ от тч. $z_1 = 0$ до $z_2 = 4 + 2i$. О: $14(-1+2i)/3$.

5. Выч-ть $\int\limits_C \sin z/\left(z^2+4\right)\mathrm{d}z$, $C$ – окр-ть $x^2 + y^2 + 6y = 0$. О: $0{,}5i\pi\,\mathrm{sh}2$.

6. Выч-ть $\int\limits_L z^3\,\mathrm{d}z$, где $L$ – дуга парб-ы $x = y^2$ с концами в тч-х $A = 0$, $B = 1 + i$.

Р. $f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$. С учетом зм1а и (2) получим $\int\limits_L z^3\,\mathrm{d}z = \int\limits_L \left(x^3 - 3xy^2\right)\mathrm{d}x - (3x^2y - y^3)\mathrm{d}y + i\int\limits_L \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{d}x + (x^3 - 3xy^2)\mathrm{d}y$. Для выч-ия полученного крвл. инт-а перейдем к пармч. виду крв-й, положив $y = t$, $x = t^2$, при этом $0 \le t \le 1$, тогда $\int\limits_L z^3\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \left(2t^7 - 9t^5 + t^3\right)\mathrm{d}t + i\int\limits_0^1 \left(7t^6 - 5t^4\right)\mathrm{d}t = -1 + i\cdot 0 = -1$.

6*. Выч-ть $\int\limits_L z\bar{z}\,\mathrm{d}z$, где $L$ – дуга окр-и $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$. О: $-2$.

7. Выч-ть $\int\limits_L \left(z + 2\bar{z}\right)\mathrm{d}z$ по дуге окр-ти $|z| = 2$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$.

Р. Введем на дуге окр-и пармч. ур-я, положив $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, где $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Преобразуем подынт. врж-ие $\left(z + 2\bar{z}\right)\mathrm{d}z = (3x - iy)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = 3x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + i(-y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y) = [-12\cos\varphi \times$ $\times \sin\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi]\mathrm{d}\varphi + i[4\sin^2\varphi + 12\cos^2\varphi]\mathrm{d}\varphi = -8\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + i[4\sin^2\varphi + 12\cos^2\varphi]\mathrm{d}\varphi$. Выч-им инт-л $\int\limits_L \left(z + 2\bar{z}\right)\mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} -8\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[4\sin^2\varphi + 12\cos^2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi = 8\pi i$.

7*. Выч-ть $\int\limits_L (z+5)\cos z dz$ по прзвл. линии, соединяющей тч-и 0 и $2i$. Ук: использовать (3а).

О: $(5 + 2i)\sin 2i + \cos 2i - 1 = (-2 + 5i)\mathrm{sh}2 + \mathrm{ch}2 - 1$.

8. Выч-ть $\int\limits_L \left(2-3z+z^2\right)dz$, где $L$ – прзвл. контур, соединяющий тч. $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ и $2e^{\frac{\pi}{3}i}$. О: $-2\sqrt{3}i$ .

9. Выч-ть $\int\limits_L \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz$ по сд. контурам: $L_1$ – окр-ть $|z| = 1$, $L_2$ – окр., $|z - 2| = 1$, $L_3$ – окр., $|z - 2i| = 1$.

Р. Внутри контура $L_1$: $|z| = 1$ фк. $\frac{\cos z}{(z-2)^2}$ регулярна, тч. $z_0 = 0$ лежит в этом круге. По фм-е Коши (18) находим $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-2)^2}\frac{dz}{z} = 2\pi i\left[\frac{\cos z}{(z-2)^2}\right]_{z=0} = 2\pi i\,\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$.

В круге $L_2$: $|z - 2| \le 1$ фк. $\frac{\cos z}{z}$ регулярна, тч. $z_1 = 2$ лежит в центре круга. Тогда по (25) имеем

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z}\frac{dz}{(z-2)^2} = 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z}\right)'_{z=2} = 2\pi i\left(\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right)_{z=2} = -2\pi i\frac{2\sin 2+\cos 2}{4} = -\frac{2\sin 2+\cos 2}{2}\pi i .$$

В круге $L_3$: $|z - 2i| \le 1$ фк. $\frac{\cos z}{z(z-2)^2}$ регулярна, поэтому т1 (Коши) дает $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = 0$.

9*. Выч-ть $\int\limits_L \frac{\mathrm{sh}\, z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$ по контуру $L$ – окр-ть $|z - 1| = \frac{1}{3}$. О: $\frac{2\pi\,\mathrm{sh}\,\pi}{25}$ .

10. Выч-ть $\int\limits_L \frac{\mathrm{sh}\, z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$ по $L$ – окр. $|z + 2i| = \frac{1}{3}$. О: $\frac{(2i-1)\pi^2}{160}$ .

11. Выч-ть $\int\limits_L \frac{\mathrm{sh}\, z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$ по $L$ – окр. $|z - 2i| = \frac{1}{4}$. О: $\frac{\pi^2(1+2i)}{160}$ .

12. Выч-ть $\int\limits_L \frac{\mathrm{sh}\, z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$ по $L$ – окр. $|z + 2| = 1$. О: 0.

## 13.3. РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### Вопросы для самопроверки

1. Что наз. числ. рядом в комп. обл-и и его частч. суммой? Дайте опр-ие схч-ся и рсхч-ся рядов. Приведите примеры.
2. Какой ряд наз. фнц-ым в комп. обл-ти. Дайте опр-ия односвязной, многосвязной и замкнутой обл-ей. Что такое частч. сумма и остаток фнц. ряда?
3. Что наз. спн. рядом в комп. обл-и? Сформулируйте теорему Абеля. Как опр-ся радиус сх-и спн. ряда?
4. Какой ряд наз. рядом Тейлора и как выч-ся его коэф-ы? Сформулируйте теорему едн-сти; какие следствия из нее вытекают?
5. Что наз. рядом Лорана, какие его части наз. правильной и главной, как опр-ся их радиусы сх-и?
6. Что такое правильные и особые тч. антч. фк-и? Приведите примеры.
7. Какая тч. наз. изолированной (излн.) особой тч.? Когда тч. $z = a$ будет устранимой, полюсом и сущ-но особой?

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу п1-п17 р-ть задачи 1-20.

1. Найти обл. сх-и сд. спн. рядов: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(z-2i)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z-1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{z-1}\right)^n\right)$.
О: а) $1 < |z-2i| < 5$; б) $3 < |z-1| < 4$.

2. Разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $z$ сд. фк-и и указать обл. сх-и полученного ряда: а) $1/(4z-1)$; б) $\frac{z}{4+3z^2}$; в) $(1+z)e^{z^2}$. О: а) $-\sum_{n=0}^{\infty}4^n z^n$, $|z| < \frac{1}{4}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$, $|z| < \frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}+z^{2n+1}}{n!}$, $|z| < \infty$.

3. Разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $z+1$ сд. фк-и и указать обл. сх-и полученного ряда: а) $z^4 - 10z^2 + 2z - 1$; б) $1/(4z+3)$; в) $e^z$. О: а) $-12 + 18(z+1) - 4(z+1)^2 - 4(z+1)^3 + (z+1)^4$, $|z| < \infty$; б) $-\sum_{n=0}^{\infty}4^n(z+1)^n$, $|z+1| < \frac{1}{4}$; в) $e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+1)^n$, $|z+1| < \infty$.

4. Разл-ть сд. фк-и в ряд Лорана в заданном кольце: а) $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$, $2 < |z| < 3$; б) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z-8}$, $2 < |z| < 4$. О: а) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}z^n\right)$.

5. Разл-ть приведенные ниже фк-и в ряд Лорана в окрс-и тч-и $z = z_0$ и указать обл. сх-ти полученного ряда: а) $f(z) = \frac{1}{2z-3z^2}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \cos\frac{3z+4}{z+1}$, $z_0 = -1$. О: а) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}\frac{1}{z^{n+2}}$, $|z| > \frac{2}{3}$; б) $\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}} - \sin 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n-1}}$, $0 < |z+1| < \infty$.

6. Рас-ть различные разл-ия в ряд Лорана по сп-ям $z - z_0$ для сд-х фк-й и тч-к $z_0$: а) $\frac{3z+1}{z^2+5z+6}$, $z_0 = 1$; б) $\frac{2z-3}{z^2-6z+13}$, $z_0 = 1-i$. О: а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{4^n}-\frac{5}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$, $|z-1| < 3$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{4^n}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+1}}$, $3 < |z-1| < 4$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(8\cdot 4^n-5\cdot 3^n)}{(z-1)^{n+1}}$, $4 < |z-1| < \infty$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(1+3i/4)}{(-2+i)^{n+1}} - \frac{1-3i/4}{(2+3i)^{n+1}}\right)(z-1+i)^n$, $|z-1+i| < \sqrt{5}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2+i)^n(1+3i/4)}{(z-1+i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-3i/4}{(2+3i)^{n+1}}(z-1+i)^n$, $\sqrt{5} < |z-1+i| < \sqrt{13}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3i/4)(-2+i)^n+(1-3i/4)(2+3i)^n}{(z-1+i)^{n+1}}$, $\sqrt{13} < |z-1+i| < \infty$.

7. Разл-ть в ряд Лорана в окрс-ти беск. удаленной тч. сд. фк-и: а) $\frac{4z-3}{3z^2-5z+2}$; б) $\frac{z+6}{z^3+2z^2+2z}$. О: а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+1}z^{n+1}}$, $|z| > 1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left((1+5i)(1+i)^n+(1-5i)(1-i)^n\right)2^{-1}z^{-n-2}$, $|z| > \sqrt{2}$.

8. Найти нули и указать их кратность для сд. фк-й: а) $(2z-1)^2(z^2-4i)^2$; б) $\cos z - 1/2$; в) $z^3 \times (1-\cos 3z)$. О: а) $z = 0{,}5$, $z = -\sqrt{2}(1+i)$, $z = \sqrt{2}(1+i)$ – нули второй кратности; б) $z = \pm\pi/3 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) – простые нули; в) $z = 0$ – нуль пятой кратности, $z = 2k\pi/3$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) – нули второй кратности.

9. Опр-ть излн. особые тч., указать их тип, в случае полюса – его порядок для сд. фк-й:

а) $\dfrac{4z^2-1}{\left(2z^2-3z-2\right)^3}$; б) $\dfrac{\sin 5z}{z-\pi}$; в) $\dfrac{1+\cos \pi z}{\left(3z^2+z-2\right)^2}$; г) $\dfrac{1}{z}e^{\frac{z+1}{z}}$. О: а) $z = -0{,}5$ – полюс второго порядка, $z = 2$ – полюс третьего порядка; б) $z = \pi$ – устранимая особая тч.; в) $z = -1$ – устранимая особая тч., $z = 2/3$ – полюс второго порядка; г) $z = 0$ – сущ-но особая тч.

10. Иссл-ть хрк-р беск. удаленной тч. для сд. фк.: а) $\dfrac{2z^2+5z-4}{z^3+2z^2+2z}$; б) $\dfrac{\sin z}{z}$; в) $\dfrac{z^5+3z^2+2}{z^3+5}$. О: а) $z = \infty$ – устранимая особая тч.; б) $z = \infty$ – сущ-но особая тч.; в) $z = \infty$ – полюс второго порядка.

11. Разл-ть в ряд по сп-ям $z$ фк-и $\cos 3z$, $\sin(2z-1)$. О: $\cos 3z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(2z-1) = \cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$. Ук.: применить фм-у $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

12. Разл-ть в ряд Тейлора по сп-ям $z + 2$ фк-ю $e^{2z-1}$. О: $e^{-5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n (z+2)^n}{n!}$.

13. Разл-ть фк-ю $\cos(z - i)$ по сп-ям $(z - i)$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (z-i)^{2n}}{(2n)!}$.

14. Разл-ть фк-ю $(z + 1)\sin 2z$ по сп-ям $(z + 1)$. О: $\cos 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}(z+1)^{2n+2}}{(2n+1)!} - \sin 2 \times \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}(z+1)^{2n+1}}{(2n)!}$.

15. Разл-ть фк-ю $z^4 - 3z^2 + 5z$ по сп-ям $z - 2$. О: $(z-2)^4 + 8(z-2)^3 + 21(z-2)^2 + 25(z-2) + 14$.

16. Разл-ть фк-ю $e^{\frac{1}{z^3}}$ в ряд Лорана в окрс-ти тч.$z = 0$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^{3n}}$.

17. Разл-ть фк-ю $\sin\dfrac{1}{z-1}$ в ряд Лорана в окрс-ти тч.$z = 1$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}\dfrac{1}{(z-1)^{2n+1}}$.

18. Разл-ть фк-ю $\cos\dfrac{1}{(z-i)^2}$ в ряд Лорана в окрс-ти тч. $z = i$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}\dfrac{1}{(z-i)^{4n}}$.

19. Разл-ть фк-ю $(z + i)\sin\dfrac{1}{z+i}$ в ряд Лорана в окрс-ти тч. $z = -i$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\dfrac{1}{(z+i)^{2n}}$.

20. Разл-ть фк-ю $\dfrac{1}{z+1}$ в ряд в окрс-ти тч-к $z = 0$ и $z = -1$. О: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $|z| < 1$; $\dfrac{1}{z+1}$, $|z + 1| < 1$.

## 13.4. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

### Вопросы для самопроверки

1. Что наз. вычетом и как выч-ся вычеты для различных случаев?
2. Сформулируйте и док-те осн. теорему о вычетах.
3. Как опр-ся вычет в беск. удаленной излн-ой тч.?
4. В чем состоит осн. идея выч-ия инт-ов с помощью вычетов.
5. Приведите примеры выч-ия опр. и несбт. инт-ов.

6. Как выч-ся инт-ы рац. фк-й от sin$t$, cos$t$?
7. Как выч-ся инт-ы от дробно-рац. фк-й?

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу п1-п14 р-ть задачи 1-20.
Найти вычеты в излн. особых тч. сд. фк-й:

1. $\frac{z+1}{\left(z^2+4\right)^2}$. О: $\pm i/32$. 2. $\frac{1}{\sin z}$. О: $(-1)^k$. 3. $\frac{\cos z}{z^3-\pi z^2/2}$. О: $-4/\pi^2$. 4. $\cos\frac{z}{z-1}$. О: $-\sin 1$.

Найти вычеты отс-но беск. удаленной тч. сд. фк-й:

5. $\frac{z^4+3z^3-2z}{z^3+2z+2}$. О: 2. 6. $\frac{\sin z}{z^2(z+1)}$. О: $\sin 1-1$. 7. $z^2\cos\frac{1}{z-1}$. О: 1.

Выч-ть с помощью вычетов сд. инт-ы:

8. $\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\left(z^2-1\right)dz}{(z+1)^3(z-2)}$. О: $2\pi i/9$. 9. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1-\cos 2z}{z^3}$ dz. О: $4\pi i$. 10. $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{dz}{\left(25z^2+1\right)^4}$. О: $\pi/16$.

11. $\oint\limits_{|z|=1}\sin\frac{2}{z}\cdot e^{-1/z}$ dz. О: $4\pi i$. 12. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^6+5z^3}{z^4+16}$ dz. О: $10\pi i$.

Выч-ть с помощью вычетов сд. опрн. инт-ы:

13. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sin t-\cos t}$. О: $2\pi/\sqrt{7}$. 14. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t\,dt}{4+\sin t+2\cos t}$. О: $2\left(11-4\sqrt{11}\right)/55$.

Выч-ть сд-ие несбт. инт-ы:

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$. О: $\pi/3$. 16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+6x+13\right)^3}$. О: $3\pi/256$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2-x+1}$. О: $\sin\frac{1}{2}\ e^{-\sqrt{3}/2}\ 2\pi/\sqrt{3}$. 18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x\,dx}{\left(x^2-2x+10\right)^2}$. О: $5\pi e^{-9}\cos 3/27$.

19. Выч-ть $\int\limits_L\frac{z\,dz}{z^4+1}$, где $L$ – эллипс $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$. О: 0.

20. Выч-ть $\int\limits_L(z-1)^2\sin\frac{1}{z-1}$ dz, где $L$ – окружность $|z-1|=1$. О: $-\frac{\pi i}{3}$.

# 14. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

> Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству.
>
> Р. Курант

## ЛЕКЦИЯ 40

## 14.1 ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**1°. Введение. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение**. Операционное (символическое) исчисление (исч.) применяется в различных обл. науки и техники. Особенно большую роль играет при иссл-и переходных процессов в лин. физических системах электротехники, автоматики, механики и др. отраслей знаний.

Мтч. аппарат операционного (оперцн.) исч-ия позволяет р-ть задачи, описываемые системами лин. дифн. ур-й (обык-ых и с част. прв-ми), разностными и дифференциально-разностными ур., лин. дифн. ур-ми с пер. коэф-ми и нек-ми типами интн. ур-й. Такая большая универсальность метода объясняется его эффективностью – возможностью получить р-ие наиболее простыми и экономными путями и средствами.

Строгое мтч. обоснование и развитие оперцн. исч-ие получило на базе общей теории функциональных (интн-ых) преобразований (прб.) и, в част-и, прб-й Фурье и Лапласа.

Популяризации операцн. исч-ия в сильной мере способствовал английский инженер-электрик О. Хевисайд (1850-1925), к-ый успешно использовал оперцн. исч-ие в электротехн. расчетах.

Для иллюстрации метода Хевисайда приведем р-ие простого дифн. ур-я $x' - x = 1$ при нач. усл. $x(0) = 0$. Заменяя дифв-ие умн-ем на $p$ (где $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ($t$ – незв. пер-я)) – символ. Н-р, $n$-я прв. фк-и $x = x(t)$ представляется как результат действий на $x$ символа $p^n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$, лев. часть лин. дифн. ур-ия с пст. коэф-ми $L(x) = a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_n$ – как результат действия на $x$ символа $L(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$, операция (оперц.) интв-я $\int\limits_0^t x(t)\,\mathrm{d}t$ расв-ся как применение символа $\dfrac{1}{p}$, так что $\dfrac{1}{p}\cdot 1 = \int\limits_0^t \mathrm{d}t = t$, $\dfrac{1}{p^2}\cdot 1 = \dfrac{t^2}{2!}$, …, $\dfrac{1}{p^n}\cdot 1 = \dfrac{t^n}{n!}$ и т.д.), получим вместо дифн-го ур-е $px - x = 1$, откуда $x = \dfrac{1}{p-1}$, и после формальных прб. получим: $x = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \dfrac{1}{p}\left(1 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \ldots + \dfrac{1}{p^n} + \ldots\right)$. Учитывая сказанное ранее отс-но $\dfrac{1}{p}$ и $\dfrac{1}{p^n}$, находим окончательно:

$x = \int\limits_0^t \left(1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \ldots + \dfrac{t^n}{n!} + \ldots\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^t e^t\,\mathrm{d}t = e^t - 1$. Проверкой убеждаемся в правильности р-ия: $x = e^t - 1$, $x' = e^t$; $e^t - (e^t - 1) = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$.

Преобразованием (прб.) Лапласа фк-и $f(t)$ ($t$ – дсв. пер-я) наз. фк-я комп. пер-ой $p = s + iw$, опрм-ая стн-ем

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Если инт. (1) сх-ся, то фк. $F(p)$ наз. изображением (изб.) фк-и $f(t)$, а $f(t)$ – оригиналом (ориг.) для $F(p)$. Изб. Лапласа иногда наз. $L$-изб-ем. Ств-ие изб. $F(p)$ и ориг. $f(t)$ обз-ют: $F(p)$ = $= L\{f(t)\}$, $F(p) = L[f(t), p]$, $F(p) \doteqdot f(t)$, $F(p) \dashrightarrow f(t)$.

Инт. (1) сх. в том случае, когда фк. $f(t)$ уд-ет сд. усл-ям:

1) для всех $t > 0$ фк. $f(t)$ непр-на или имеет тч-и разрыва первого рода, причем на каждом конечном инр. оси $Ot$ таких тч. имеется лишь конечное число (к.ч.);

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) $f(t)$ возрастает (взр.) не быстрее показательной (пкзт.) фк., т.е. сущ. такие пст. $M > 0$, $s_0 \geq 0$ ($p > s_0$), что для всех $t$ $\qquad |f(t)| \leq Me^{s_0 t}$. (1а)

Число $s_0$ наз. показателем роста фк-и $f(t)$. Класс ориг-ов наз-ем классом $D$, так что $f(t) \in D$.

Покажем, что инт-л Лапласа (изб.) $F(p)$ сх. равномерно, если ориг. $f(x)$ уд-ет усл-ям 1)-3).

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-pt}\,\mathrm{d}t \leq M\int_0^\infty e^{s_0 t}e^{-pt}\,\mathrm{d}t = M\int_0^\infty e^{(s_0-p)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s_0-p}e^{(s_0-p)t}\Big|_0^\infty = \frac{M}{p-s_0}. \tag{1б}$$

Заметим, что метод Хевисайда заключается в переходе от фк. $f(t)$ к фк.

$$F^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \tag{1в}$$

т.е. изб-ие по Хевисайду отличается от изб-я по Лапласу мнж-ем $p$, а это вносит усложнения в выч-ях, поэтому далее рас-им только прб-ие Лапласа.

Процесс нахождения изб-ия для заданного ориг. и обратно, нахождение ориг-а по известному изб. наз. оперцн. исч-ем.

**п1**. Установить, яв-ся ли ориг-ми сд. фк-и: а) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 4 \text{ при } t > 0; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \operatorname{tg} t \text{ при } t > 0. \end{cases}$

Р. а) Данная фк. яв-ся ориг-ом, т.к. непр-на $\forall\ t > 0$ и яв-ся фк-ей огрн. роста, т.е. прдставлена в виде $4 = 4e^{0\cdot t}$ при $t > 0$. Отсюда $s_0 = 4 \leq M$ – любое дсв. число (см. (1а)).

б) Фк. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \operatorname{tg} t \text{ при } t > 0 \end{cases}$ не яв-ся ориг-ом, т.к. в тч-ах $t = \pi/2 + k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), к-ые принадлежат промежутку $]0, \infty[$, она имеет разрывы второго рода.

Пусть дана нек-ая фк. $F(p)$. Сущ-ет ли фк. $f(t)$, для к-ой $F(p)$ яв-ся изб-ем. Если сущ-ет, то ед-на ли такая фк? На оба вопроса при опрн. предположениях отс-но $F(p)$ и $f(t)$ дается плж. ответ.

**т1** (ед-сти). Если две непр. фк-и $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же $L$-изб. $F(p)$, то эти фк. тожд-но равны, т.е. $\varphi(t) = \psi(t)$.

Если два изб. $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и ствщ. ориг-ы во всех тч., за иск-ем, быть может, тч-к разрыва, т.е. $F(p) \doteqdot \varphi(t)$ и $\Phi(p) \doteqdot \psi(t)$ и при этом $F(p) = \Phi(p)$, то $\varphi(t)$ $= \psi(t)$ во всех тч. непр-сти.

**сл1**. Для непр. фк-и $f(t)$, тожд-но не равной нулю, изб-ие не может быть прдч. фк-ей. В самом деле, если $\forall\ p$ $F(p) = F(p + w)$, где $w \neq 0$, то $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(p+w)t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt}e^{-wt} f(t)\mathrm{d}t$. По т1 $f(t) = e^{-wt}f(t)$, т.е. $e^{-wt} \equiv 1$ ($w \neq 0$), чего быть не может.

**т2** (антч-сти). Всякое изб. $F(p)$ при $\operatorname{Re}p > s_0$ яв-ся антч. фк-ей, т.е. может быть разл-но в спн. ряд и, сдт-но, неогрн. число раз инту-мо и дифу-мо в обл. сх-и ряда.

Д. $|F'(p)| = \left|\int_0^\infty te^{-st-iwt}f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty te^{-st}|f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-st}tMe^{s_0 t}\mathrm{d}t = M\int_0^\infty t^{-(s-s_0)t}\,\mathrm{d}t < \infty$, т.к. $s > s_0$. Законность дифв-ия по $p$ под знаком инт-ла следует из (1б) и того факта, что $tf(t)e^{-pt}$ кусочно-непр. фк-я.

**2°. Изображение функций $\sigma_0(t)$, sin$t$, cos$t$**. Найдем изб. фк-и $\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (иногда $\sigma_0(t)$ обз-ют $1(t)$ или просто 1, полагая $t \geq 0$). $L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$. Итак, $1 \leftarrow\!\!\doteq \frac{1}{p}$, или, точнее, $\sigma_0(t) \leftarrow\!\!\!\!\div \;\frac{1}{p}$ $(p > 0)$ ①. Пусть $f(t) = \sin t$, тогда интв-ем по частям получим

$$L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\sin t\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-pt}(-p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2+1}.\ \text{Итак, } \sin t \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{1}{p^2+1} \ ②$$

$$\text{Анч-но, } L\{\cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\cos t\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\infty} = \frac{p}{p^2+1}.\ \text{Итак, } \cos t \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{p}{p^2+1} \ ③$$

**3°. Свойства изображений**. Используя св-ва изб-й и фм-ы ①-③, можно получить изб-ия др. фк-й (ориг-ов). Приведем эти св-ва.

**с1** (подобия). Рас-им изб-ие фк-и $f(at)$, где $a > 0$: $L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at)\mathrm{d}t$. Полагая $z = at$ (сдт-но, $\mathrm{d}z = a\mathrm{d}t$), получим: $L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\mathrm{d}z$ или $L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$. Т.о., если $F(p) \div\!\!\!\!\rightarrow f(t)$, то

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \div\!\!\!\!\rightarrow f(at). \tag{2}$$

**3а°. Изображения функций sin*at*, cos*at***. Из фм-л ② и ③ на основании (2) непосредственно получим: $\sin at \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$ или $\sin at \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{p}{p^2+a^2}$ ④ $\cos at\ t \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{1}{a}\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$ или $\cos at \leftarrow\!\!\!\!\div\; \frac{p}{p^2+a^2}$ ⑤

**с2** (лин-сти). Если $f(t) = C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$ и при этом $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$, то $f(t) \doteqdot F(p) = C_1F_1(p) + C_2F_2(p)$.

Д. По опр-ю изб-я имеем $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}(C_1f_1(t)+C_2f_2(t))e^{-pt}\,\mathrm{d}t = C_1\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t + C_2\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = C_1F_1(p) + C_2F_2(p)$.

**п2**. Найти изб-ие фк-и $f(t) = 3\sigma_0(t) + 2\cos 3t$.

Р. В силу ①, ⑤ и с2 имеем $L\{f(t)\} = 3L\{\sigma_0(t)\} + 2L\{\cos 3t\} = \frac{3}{p} + 2\frac{p}{p^2+9}$.

**п3**. Найти ориг-л изб-я $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2+16}$.

Р. Представим изб-ие $F(p)$ в виде $F(p) = 2\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{4}{p^2+4^2}$. Имеем $\frac{1}{p} \doteqdot \sigma_0(t)$, $\frac{4}{p^2+4^2} = \sin 4t$. Сдт-но, ориг-л (по т1) $f(t) = 2\sigma_0(t) + \frac{1}{2}\sin 4t$.

**с3** (смещение). Если $F(p)$ есть изб-ие фк-и $f(t)$, то $F(p+\alpha)$ есть изб-ие фк-и $e^{-\alpha t}f(t)$, т.е.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если } F(p) \div\!\!\!\!\rightarrow f(t),\\ \text{то } F(p+\alpha) \div\!\!\!\!\rightarrow e^{-\alpha t}f(t),\end{array}\right\} \tag{3}$$

где $\mathrm{Re}(p+\alpha) > s_0$.

Д. Найдем изб. фк-и $e^{-\alpha t} f(t)$: $L\{ e^{-\alpha t} f(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-pt-\alpha t} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t)\mathrm{d}t$. Т.о., $L\{ e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha)$.

Д-ное с3 позволяет значительно расширить класс изб-й, для к-ых легко находятся нач. фк-и (ориг-ы).

**3б°. Изображения функций $e^{-\alpha t}$ , sh*at*, ch*at*, $e^{-\alpha t}$ sin*at*, $e^{-\alpha t}$ cos*at*.**

Из фм-ы 1 на основании (3) получим $\dfrac{1}{p+\alpha} \;\dot{\to}\; e^{-\alpha t}$ 6. Анч-но, $\dfrac{1}{p-\alpha} \;\dot{\to}\; e^{\alpha t}$ 6а. Вычитая из членов стн-я 6а ствщ. члены стн-я 6 и деля результаты вычитания на два, получаем $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha} - \dfrac{1}{p+\alpha}\right) \;\dot{\to}\; \dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)$, или (заменяя $\alpha$ на $a$), $\dfrac{a}{p^2-a^2} \;\dot{\to}\;$ sh$at$ 7. Анч-но, путем сж-ия 6 и 6а, имеем: $\dfrac{p}{p^2-a^2} \;\dot{\to}\;$ ch$at$ 8.

Из фм. 4 на основании фм-л (3) следует: $\dfrac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \;\dot{\to}\; e^{-\alpha t}$ sin$at$ 9.

Из фм. 5 на основании фм. (3) получим: $\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \;\dot{\to}\; e^{-\alpha t}$ cos$at$ 10.

**п4**. Найти нач. фк-ю, изб-ие к-ой задается фм-ой $F(p) = \dfrac{7}{p^2+10p+41}$.

Р. Приводим $F(p)$ к виду 9: $\dfrac{7}{p^2+10p+41} = \dfrac{7}{(p+5)^2+16} = \dfrac{7}{4}\,\dfrac{4}{(p+5)^2+4^2}$. Итак, $F(p) \;\dot{\to}\; \dfrac{7}{4}\, e^{-5t}$ sin$4t$.

**п5**. Найти нач. фк-ю, изб-ие к-ой задается фм-ой $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2+2p+10}$.

Р. Из $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2+2p+10} = \dfrac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \dfrac{2}{(p+1)^2+3^2} = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{(p+1)^2+3^2}$, на основании фм-л 9 и 10 находим нач. фк.: $F(p) \;\dot{\to}\; e^{-t}$ cos$3t$ + $\dfrac{2}{3}\, e^{-t}$ sin$3t$.

**4°. Основные теоремы. Интеграл Дюамеля**. Отыскание изб-й большинства фк-й непосредственно с помощью инт-а Лапласа весьма громоздко. Приведенные ниже теоремы облегчают эту задачу. Они часто позволяют р-ть и обратную задачу – отыскания ориг-ов по изб-ям. В результате этого мтч. аппарат оперцн. исч-я становится на практике очень удобным и эфв-ым средством р-ия многих задач.

**т3** (дифв-ие изб-ия). Если $F(p) \;\dot{\to}\; f(t)$, то

$$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} F(p) \;\dot{\to}\; t^n f(t). \tag{4}$$

Д. Если Re$p > s_0$, то инт-л $\int\limits_0^\infty t^n f(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ сущ-ет при любом $n$ = 1, 2, … Далее, очевидно, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty (-t)^n e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} F(p) \;\dot{\to}\; t^n f(t)$.

**п6**. Т.к. $\dfrac{1}{p} \;\dot{\to}\; 1$, то в силу (4) получим $(-1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{1}{p}\right) \;\dot{\to}\; t$ или $\dfrac{1}{p^2} \;\dot{\to}\; t$. Анч-но,

$\frac{2}{p^3} \risingdotseq t^2$. При любом $n$ получаем $\frac{n!}{p^{n+1}} \risingdotseq t^n$ (11).

**п7**. Найти изб-ия фк-й $t\sin at$, $t\cos at$, $te^{-\alpha t}$ .

Р. Из фм-ы (4) $\frac{a}{p^2+a^2} = \sin at \overset{(4)}{\Rightarrow} -\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)' \risingdotseq t\sin at$ (12). Анч-но, из (5) на основании (4) имеем $-\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)' \risingdotseq t\cos at$ или $\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2} \risingdotseq t\cos at$ (13). Из (6) в силу (4) получаем $-\left(\frac{1}{p+\alpha}\right)' \risingdotseq te^{-\alpha t}$ или $\frac{1}{(p+\alpha)^2} \risingdotseq te^{-\alpha t}$ (14).

**т4** (дифв-ие ориг-а). Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $pF(p) - f(0) \risingdotseq f'(t)$. (5)

Д. На основании опр-я изб-ия можем записать: $L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\mathrm{d}t$. (5а)

Будем предполагать, что все пзв-ые $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$, к-ые нам встретятся, уд-ют усл-ю (1а) и, сдт-но, инт. (5а) и анч. инт-ы для последующих прв-х сущ-ют. Выч-я по частям инт-л, стоящий в правой части рав-ва (5а), найдем: $L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\mathrm{d}t = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$.

Но по усл-ю (1а) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$, $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t = F(p)$. Поэтому $L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p)$ ■

Рас-им изб-ие прв-ых любого порядка. Подс-я в фм-у (5) вместо $F(p)$ врж-ие $pF(p) - f(0)$, а вместо $f(t)$ – врж. $f'(t)$, получим $p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \risingdotseq\, \risingdotseq f''(t)$ или, раскрывая скобки,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \risingdotseq f''(t). \quad (6)$$

Изб-ие для прв-ой $n$-го порядка будет

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \risingdotseq f^{(n)}(t). \quad (7)$$

**зм1**. Фм-ы (5)-(7) упрощаются, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Тогда имеем: $F(p) \risingdotseq f(t)$, $pF(p) \risingdotseq f'(t), \ldots, p^nF(p) \risingdotseq f^{(n)}(t)$ (14a).

**п8**. Найти изб-ие фк-и $f(t) = \cos^2 t$.

Р. Пусть $F(p) \to \cos^2 t = f(t)$. Тогда $pF(p) - f(0) \risingdotseq f'(t)$, но $f(0) = \cos^2 0 = 1$, $f'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t \fallingdotseq -\frac{2}{p^2+4}$. Сдт-но, $pF(p) - 1 = -\frac{2}{p^2+4}$, откуда $F(p) = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{2}{p^2+4}\right] = \frac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$.

Этот же результат получим, если воспользуемся рав-ом $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$, $L\{\cos^2 t\} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4} = \frac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$ (15).

**т5** (интв-ие ориг-а). Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \div \frac{F(p)}{p}$ (16).

Д. Изменяя (изм.) порядок инв-я, имеем $\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = \int_0^\infty\int_0^t e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau)\left.\frac{-e^{-pt}}{p}\right|_\tau^\infty \mathrm{d}\tau =$
$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{p} L[f(\tau); p] = \frac{F(p)}{p}$.

**т6** (интв-ие изб-я). Если инт. $\int\limits_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$ сх., то он яв изб-ем фк-и $\dfrac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$.

Д. Изм-я порядок интв-я, получаем $\int\limits_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q = \int\limits_p^\infty\left(\int\limits_0^\infty e^{-qt} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}q = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_p^\infty e^{-qt}\mathrm{d}q\right) f(t)\mathrm{d}t =$

$= \int\limits_0^\infty\left(-\dfrac{e^{-qt}}{t}\Bigg|_{q=p}^{\infty}\right) f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \dfrac{f(t)}{t} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = L\left[\dfrac{f(t)}{t};\ p\right]$, т.е. имеем $\dfrac{f(t)}{t} = \int\limits_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$ 17.

Если ориг-л $f(x)$ имеет прд. $T$, т.е. уд-ет усл-ю $f(t + T) = f(t)$, то его изб-ие

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int\limits_0^T f(t) e^{-qt}\mathrm{d}t\ . \tag{7a}$$

**зм2**. Мы применяем здесь и ниже изм-ие порядка интв-я. Эта оперц. законна, если полученный после изм-ия кратный инт. абс-но сх-ся. Кроме того, считаем, что путь интв-ия лежит целиком в полупл-и $\mathrm{Re}p > s_0$.

**сл2**. $\int\limits_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty F(q)$, если сх. ствщ. несбт. инт-ы.

**п9**. Найти изб-ие фк-и $\int\limits_0^t \sin 2\tau\ \mathrm{d}\tau$.

Р. Имеем $\sin 2\tau \div \dfrac{2}{p^2+4}$. Тогда по т5 $\int\limits_0^t \sin 2\tau\ \mathrm{d}\tau = \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

**п10**. Найти изб-ие фк-и $\dfrac{\sin t}{t}$.

Р. Т.к. $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, то по т6 $\dfrac{\sin t}{t} \div \int\limits_p^\infty \dfrac{\mathrm{d}q}{q^2+1} = \mathrm{arctg}\, q\Big|_p^\infty = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} p$.

**п11**. Найти инт. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Р. Используя п10 и сл2, получаем $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}q}{q^2+1} = \mathrm{arctg}\, q\Big|_0^\infty = \dfrac{\pi}{2}$.

**т7** (запаздывание ориг-а). Если $f(t) \div F(p)$ и $\alpha > 0$, то $f(t - \alpha) \div e^{-\alpha p} F(p)$.

Д. Т.к. $f(t) = 0$ при $t < 0$ ($f(t) \in D$), то $f(\tau - \alpha) = 0$ при $t < \alpha$ и $f(t - \alpha) \in D$. Поэтому, производя замену пер-ой интв-ия по фм. $z = t - \alpha$, получим $f(t - \alpha) \div \int\limits_0^\infty f(t-\alpha)\ e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\infty f(t-\alpha)\ e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$

$= \left|\begin{matrix} z = t-\alpha,\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \\ \begin{cases} \alpha < t < \infty, \\ 0 < z < \infty \end{cases} \end{matrix}\right| = \int\limits_0^\infty f(z) e^{-p(z+\alpha)}\mathrm{d}z = e^{-p\alpha} \int\limits_0^\infty f(z) e^{-pz}\mathrm{d}z = e^{-p\alpha} F(p)$. Итак, $f(t - \alpha) \div e^{-\alpha p} F(p)$ 18.

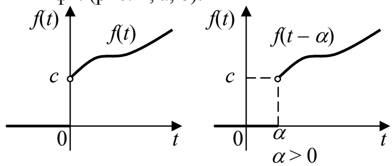
Геомч. смысл запаздывания показан на рис. 1, а, б.

**п12**. Найти изб-ие фк-и $f(t) = t - 1$.

Р. Зная, что $t \div \dfrac{1}{p^2}$, $1 \div \dfrac{1}{p}$, и используя св-во лин-сти, находим $t - 1 \div \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p}$.

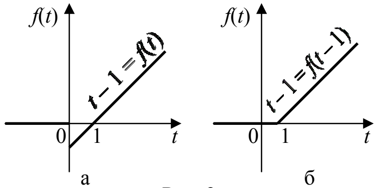
При поиске изб-я фк-и $t - 1$ возможен и др. подход. Если считать, что задана фк. $f_1(t) = t$, то $t - 1$ предстает как $f_1(t - 1)$, т.е. $f_1(t - 1) = t - 1$. Тогда изб-ие разности можно получить с помощью т7 запаздывания. Имеем $f_1(t) = t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ , $t - 1 = f_1(t-1) \risingdotseq e^{-p}\dfrac{1}{p^2}$ .

Получилось два различных результата, что, на первый взгляд, противоречит теореме ед-сти. Однако здесь никакого противоречия нет, ибо в расн. случаях были найдены изб-я различных фк. (рис. 2, а, б).




а б

Рис. 1




а б

Рис. 2

**т8** (упреждения). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\alpha > 0$, то $f(t+\alpha) \risingdotseq e^{p\alpha}\left(F(p) - \int\limits_0^{\alpha} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)$.

Д. Учитывая, что $f(t)|_{t<0} \equiv 0$, и применяя замену пер-ой интв-ия, получаем $f(t+\alpha) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} f(t+\alpha) \times$

$$\times\, e^{-pt}\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} z = t+\alpha,\ t = z-\alpha,\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}z, \\ \begin{cases} 0 < t < \infty, \\ \alpha < z < \infty \end{cases} \end{matrix}\right| = \int\limits_{\alpha}^{\infty} f(z)e^{-p(z-\alpha)}\mathrm{d}z = e^{p\alpha}\left(\int\limits_0^{\infty} f(z)e^{-pz}\mathrm{d}z - \int\limits_0^{\alpha} f(z)e^{-pz}\mathrm{d}z\right) = e^{p\alpha}\ \times$$

$\times \left(F(p) - \int\limits_0^{\alpha} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)$ ■ Итак, $f(t+\alpha) \risingdotseq e^{p\alpha}\left(F(p) - \int\limits_0^{\alpha} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)$ 19. Геомч. смысл т8 на рис. 3, а, б.

**Сверткой** ориг-ов $f(t)$ и $\varphi(t)$ наз-ют фк-ю, обзм-ю $f(t)*\varphi(t)$ и опрм-ю рав-ом

$$f(t)*\varphi(t) = \int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ . \qquad (8)$$

Свертка обладает осн. св-ми оперц-и умн-ия. В част., имеет место комм. св-во:

$$f(t)*\varphi(t) = \varphi(t)*f(t) \Rightarrow \int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^{t} \varphi(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ .$$

**т9** (умн-ия (о свертке)). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то пзв-ие $F(p)\Phi(p)$ яв-ся изб-ем свертки ориг-ов $f(t)$ и $\varphi(t)$:

$$F(p)\Phi(p) \risingdotseq f(t)*\varphi(t) = \int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ . \qquad (9)$$

Д. Найдем изб-ие фк-и $\int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ , исходя из опр-ия изб-ия: $L\left\{\int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\} =$

$= \int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\left(\int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\right)\mathrm{d}t$ . Инт. справа есть двукратный инт., к-ый берется по обл-и, огрн-ой пм-ми

$\tau = 0$, $\tau = t$ (рис. 4). Изм-им порядок интв-ия в этом инт., тогда получим $L\left\{\int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\} =$

$= \int\limits_0^{\infty}\left[f(\tau)\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-pt}\varphi(t-\tau)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$ . Производя замену пер-го $t - \tau = z$ во внутреннем инр., получим:

$\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-pt}\varphi(t-\tau)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\infty} e^{-p(z+\tau)}\varphi(z)\mathrm{d}z = e^{-p\tau}\int\limits_0^{\infty} e^{-pz}\varphi(z)\mathrm{d}z = e^{-pz}\Phi(p)$. Сдт-но, $L\left\{\int\limits_0^{t} f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\} =$

$= \int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\Phi(p)\mathrm{d}\tau = \Phi(p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau = \Phi(p)F(p)$. Итак, $F(p)\Phi(p) \doteqdot f(t)*\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ ■

Иногда т9 наз-ют теоремой Бореля.

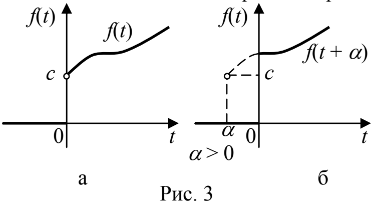


Рис. 3

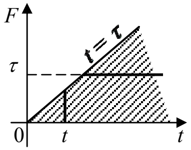


Рис. 4

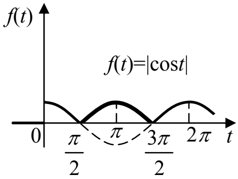


Рис. 5

**Интеграл Дюамеля**. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$ и фк. $\varphi'(t)$ – ориг-л, то

$$pF(p)\Phi(p) \doteqdot \varphi(0)f(t) + \int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,, \tag{10}$$

где $\varphi(0) = \lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$. Если $f'(t)$ – ориг-л, фм-у (10) можно записать так:

$$pF(p)\Phi(p) \doteqdot f(0)\varphi(t) + \int\limits_0^t \varphi(\tau)f'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{10a}$$

Инт-ы (10) и (10а) наз-ют инт-ми Дюамеля, или инт-ми наложения. Д-во см. в [39].

**п13**. Применяя теорему умн-я, найти ориг-л, если $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

Р. Имеем $\dfrac{p}{(p^2+1)^2} = \dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$, $\dfrac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t$, $\dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$. Поэтому, считая $F_1(p) = \dfrac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t = f_1(t)$, $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t = f_2(t)$, находим $F_1(p)\cdot F_2(p) = f_1(t)*f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\times f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$, т.е. $\dfrac{p}{(p^2+1)^2} = \dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \int\limits_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t(\sin(t-\tau-\tau)+\sin t)\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}t\sin t$.

**п14**. Найти ориг-л $g(t)$ изб-ия $G(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$, используя инт. Дюамеля.

Р. Т.к. $G(p) = p\dfrac{p}{p^2+4}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$, $\dfrac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, $\dfrac{1}{p^2+4} \doteqdot \dfrac{1}{2}\sin 2t$ и $pF(p)\cdot\Phi(p) \doteqdot \int\limits_0^t f_t'(t-\tau)\cdot\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau + f(0)\cdot\varphi(t)$, где $F(p) \doteqdot f(t)$, $\Phi(p) \doteqdot \varphi(t)$, то, считая $\cos 2t = \varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$, $\sin 2t = f(t) \doteqdot F(p)$, найдем $G(p) = pF(p)\cdot\Phi(p) \doteqdot \dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^t 2\cos(2t-2\tau)\cos 2\tau\,\mathrm{d}\tau\right] = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t[\cos(2t-2\tau-2\tau)+\cos(2t-2\tau+2\tau)]\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{4}\sin 2t + \dfrac{1}{2}t\cos 2t$.

**5°. Разложение изображения. Изображение периодических функций**. Приведем сд-ие

**т10** (первая теорема разл-ия). Если фк. $F(p)$ представляет собой спн. ряд по отц. сп-ям $p$ с ненулевым радиусом сх-ти, т.е.

$$F(p) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{p^{n+1}}\,, \tag{11}$$

то ориг-ом такой фк. яв-ся спн. ряд по плж. сп-ям $t$ – ряд

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{t^n}{n!}\,, \tag{11a}$$

схщ-йся при всех $t > 0$: $$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} \div \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}. \qquad (11б)$$

Теорему примем без д-ва.

**т11** (вторая теорема разл-ия). Если $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ – рац. правильная несокр. дробь, знмт-ль $Q(p)$ к-ой имеет лишь простые корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то $$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \div \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha} k^t, \qquad (12)$$

где $A_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$, $Q'(p) = \dfrac{\mathrm{d}Q(p)}{\mathrm{d}p}$. Д-во см. в [39].

**п15**. Найти ориг-л $f(t)$ фк-и $F(p) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$.

Р. Разл-им $F(p) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) = -\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2p^2} - \dots - \dfrac{1}{np^n} - \dots = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{np^n}$. Этот ряд сх. при $p > 1$ (можно проверить признаком Даламбера). По т10, $F(p) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{np^n} \div -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n!} = \dfrac{1-e^t}{t}$.

**п16**. Найти ориг-л $f(t)$ фк-и $F(p) = \dfrac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$.

Р. $F(p)$ – правильная рац. несокр. дробь, причем $P(p) = p - 1$, $Q(p) = (p + 1)(p^2 + 4) = p^3 + p^2 + 4p + 4$. Корни знмт-ля простые: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2i$, $\alpha_3 = -2i$; поэтому можно применить т11. Очевидно, $Q'(p) = 3p^2 + 2p + 4$. Все дальнейшие действия удобно свести в табл. 1.

Таблица 1

| | $\alpha_1 = -1$ | $\alpha_2 = 2i$ | $\alpha_3 = -2i$ |
|---|---|---|---|
| $P(\alpha_k) = p - 1\big\|_{p=\alpha_k}$ | $-2$ | $-1 + 2i$ | $-1 - 2i$ |
| $Q'(\alpha_k) = 3p^2 + 2p + 4\big\|_{p=\alpha_k}$ | 5 | $-8 + 4i$ | $-8 - 4i$ |
| $A_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ | $-\dfrac{2}{5}$ | $\dfrac{1-2i}{8-4i} = \dfrac{4-3i}{20}$ | $\dfrac{1-2i}{8+4i} = \dfrac{4+3i}{20}$ |

Тогда $f(t) = -\dfrac{2}{5}e^{-t} + \dfrac{4-3i}{20}e^{2it} + \dfrac{4+3i}{20}e^{-2it} = -\dfrac{2}{5}e^{-t} + \dfrac{2}{5}\cos 2t + \dfrac{3}{10}\sin 2t.$

Теперь рас-им изб-ие прдч. фк-й. Пусть $f(t)$ – прдч. фк-я с прд-ом $T$, т.е. $f(t - T) = f(t)$, тогда она может быть представлена в виде схг-ся ряда $$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT), \qquad (13)$$

где $$f_0(t) = \begin{cases} f(t) \text{ при } 0 < t < T, \\ 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases} \qquad (13а)$$

Если $f(t) \in D$ и $f_0(t) \div F_0(p)$, то на основании т7 (запаздывания) получаем $f_0(t - T) \div e^{-pT}F_0(p)$, $f_0(t - 2T) \div e^{-2pT}F_0(p)$, …, $f_0(t - kT) \div e^{-kpT}F_0(p)$, … Поэтому при дт-но больших $p$ ($\mathrm{Re}\,p > s_0$) имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_0(t-kT) \div \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-kpT}F_0(p) = F_0(p)\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} = F_0(p)\dfrac{1}{1-e^{-pT}}$. Итак, $f(t) \div \dfrac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ 20, где $F_0(p)$ – изб-е фк-и на первом (нач.) прд.

**п17**. Найти изб-ие фк-и $f(t) = |\cos t|$, $0 < t < \infty$ (рис. 5).

Р. Здесь $f_0(t) = \begin{cases} |\cos t| \text{ при } 0 < t < T, \\ 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ и } t > \pi. \end{cases}$ При этом $f(t) = f(t - \pi k)$, $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_0(t - \pi k)$. Имеем $f_0(t) \div F_0(p) = \int\limits_0^{\pi} |\cos t| e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{p^2+1}\left(2e^{-p\frac{\pi}{2}} + p\left(1 - e^{-p\pi}\right)\right)$. Поэтому $f(t) = |\cos t| \div$

$$\div \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}} = \frac{2e^{-p\frac{\pi}{2}} + p(1-e^{-p\pi})}{(p^2+1)(1-e^{-p\pi})}\,.$$

**6°. Сводка формул операционных соотношений**. В табл. 2 приведена сводка оперцн. стн-й (под порядковыми номерами указаны номера фм. в тексте).

Таблица 2

| № п/п | Ориг-л | Изб-е |
|---|---|---|
| 1<br>1: 2° | $1$ | $\frac{1}{p}$ |
| 2<br>2, 4: 3а° | $\sin\alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$ |
| 3<br>3, 5 | $\cos\alpha t$ | $\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ |
| 4<br>18 | $\cos\alpha(t-t_0)$ | $\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$ |
| 5<br>6, 6а: 3б° | $e^{-\alpha t} \quad (e^{\alpha t})$ | $\frac{1}{p+\alpha} \quad \left(\frac{1}{p-\alpha}\right)$ |
| 6<br>7 | $\operatorname{sh}\alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ |
| 7<br>8 | $\operatorname{ch}\alpha t$ | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ |
| 8<br>9 | $e^{-\alpha t}\sin\beta t$ | $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$ |
| 9<br>10 | $e^{-\alpha t}\cos\beta t$ | $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$ |
| 10<br>11 | $t^n$ | $\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 11<br>(4) | $t^n f(t)$ | $(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(p)}{\mathrm{d}p^n}$ |
| 12<br>14 | $t\,e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$ |
| 13<br>12 | $t\sin\alpha t$ | $\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$ |
| 14<br>13 | $t\cos\alpha t$ | $\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$ |
| 15<br>5-7, 14а | $f^{(n)}(t), f(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ | $p^n F(p)$ |
| 16<br>16 | $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ | $\frac{1}{p}F(p)$ |
| 17<br>17 | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$ |

| | | |
|---|---|---|
| 18<br>18, 19 | $f(t-t_0)$ | $e^{-pt_0}\,F(p)$ |
| 19<br>18 | $\sigma_0(t-h)$ | $e^{-ph}\,\dfrac{1}{p}$ |
| 20<br>(9) | $f_1 * f_2$ | $L[f_1; p] * L[f_2; p]$ |
| 21<br>10, 10a | $f(t)g(0) + \int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ | $pL[f; p] * L[g; p]$ |
| 22<br>11б | $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\dfrac{t^k}{k!}\ \ (t>0)$ | $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k}{p^k}$ |

**7°. Связь интеграла Лапласа с интегралом Фурье. Формула обращения. Нахождение оригиналов для изображений с помощью вычетов**. Если фк. $f(t)$ уд-ет требованиям, предъявляемым к ориг-у (это значит, что она и абс-но инту-ма при всех $t \in \,]-\infty; \infty[$) и, кроме того, имеет лишь к.ч. эксм-ов в каждом промежутке, то для нее можно записать инт-л Фурье, причем имеют место фм-ы:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\,,\ C(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\,. \qquad (14)$$

Учитывая, что в инт-е Лапласа парм. $p = s + i\omega$ ($\mathrm{Re}p = s$) и для сх-ти инт-а выбирается $s > s_0$, а $f(t)|_{t<0} \equiv 0$, можно записать

$$F(p) = F(s + i\omega) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\,. \qquad (15)$$

Сравнивая инт-л Лапласа (15) с прб-ем Фурье (14), устанавливают, что изб. $F(s + i\omega) = F(p)$ есть прямое прб. Фурье для фк-и $\varphi(t) = f(t)e^{-st}$ ($F(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$ ). Этот факт используют для отыскания по известному изб. фк-и $\varphi(t)$, а затем и ориг-ла $f(t)$. Очевидно, $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}e^{-\sigma t} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}t.$

Заменяя пер-ю интв-ия $\omega$ на пер-ю $p$ по фм-е $p = s + i\omega$ ($s$ фкс-но), получаем $i\omega = p - s$, $\omega = \dfrac{1}{i}(p - s)$, $\mathrm{d}\omega = \dfrac{\mathrm{d}p}{i}$. Пределы интв-ия записываем в виде $s - i\infty$ и $s + i\infty$ (или $s - i\omega$ и $s + i\omega$), учитывая, что пер-я $p$ проходит все комп. зн-ия с дсв. частью $s$ и всеми возможными мнимой частями. И получаем фм-у

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p\,. \qquad (16)$$

Интв-ие ведется вдоль пм-й $s = \mathrm{const}$, прл-ой мнимой оси. Фм. (16) опр-ет обратное прб. Лапласа и наз. фм-ой обращения Римана-Меллина.

Вышеприведенные результаты сформулируем в виде сд-их

**т12** (обращения). Если фк $F(p)$, антч-я в полупл-и $\mathrm{Re}p > s_0$, стремится к нулю, когда $|p| \to \infty$ по любому пути в указанной полупл-и, и абс-но инту-ма вдоль всякой пм. $\mathrm{Re}p = s > s_0$, то $F(p)$ яв-ся изб-ем фк-и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p\,. \qquad (17)$$

Фм. (17) «обращает» фм-у (1), т.е. врж-ет фк-ю $f(t)$ через ее изб-ие $F(p)$, поэтому (17) часто наз-ют фм-ой обращения прб-ия Лапласа.

Если при выч-и инт-а (17) использовать вычеты, можно д-ть, что имеет место приведенная ниже

**т13**. Если изб-ие $F(p)$ – рац. фк-я, врж-ная отн-ем двух мчл-ов, т.е. $F(p) = A(p)/B(p)$, причем сп-нь мчл-на $B(p)$ выше сп-и мчл-на $A(p)$ и $F(p)$ имеет полюсы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ порядков $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то ствщ. ориг-л

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{\mathrm{d}^{m_k-1}}{\mathrm{d}p^{m_k-1}}\left((p-p_k)^{m_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right). \qquad (18)$$

В случае же, когда все полюсы простые, т.е. $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, имеем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \ . \quad (19)$$

**зм3**. Если коэф-ы мчл-ов $A(p)$ и $B(p)$ дсв-ны, причем знмт-ль $B(p)$ имеет комп. корни, то каждой паре комплексно-сопряженных (комп-спрж.) корней $p = \alpha \pm i\beta$ ств-ют слг-ые $\operatorname*{Res}_{p=\alpha+i\beta}\left(F(p)e^{pt}\right)$ и $\operatorname*{Res}_{p=\alpha-i\beta}\left(F(p)e^{pt}\right)$, яв-еся также спрж. вел-ми, а потому их сумма равна удвоенной дсв. части каждой из них, т.е.

$$\operatorname*{Res}_{p=\alpha+i\beta}\left(F(p)e^{pt}\right) + \operatorname*{Res}_{p=\alpha-i\beta}\left(F(p)e^{pt}\right) = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=\alpha+i\beta}\left(F(p)e^{pt}\right)\right). \quad (20)$$

На практике вместо фм-л (18), (19) часто используют разл-ие $F(p) = A(p)/B(p)$ на сумму простейших дробей, как это делается при интв-и рац. фк-й. Ориг-л в этом случае находится как сумма ориг-ов для полученных слг-х (простейших дробей).

**зм4**. Если изб. $F(p)$ может быть представлено рядом Лорана

$$F(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^{n+1}} + \ldots, \quad (21)$$

сх-мся при $|p| > r > 0$, то при всех $t > 0$ $f(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}t + \frac{c_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{c_n}{n!}t^n + \ldots$

Разл-ие (21) часто можно получить как разл-ие фк-и $F(p)$ в ряд Лорана в окрс. тч-и $p = \infty$.

Результаты, врж-ные в зм 2 и в фм-ах (18), (19), иногда наз-ют ств-но первой и второй теоремами разл-ия.

**п18**. Найти ориг-ы по изб-ям с помощью вычетов: а) $F(p) = \frac{7-2p}{(p+2)(p-1)^2}$; б) $F(p) = \frac{p^2+2}{p^4+4}$.

Р. а) Здесь нули знмт-ля и их кратности таковы: $p_1 = -2$, $m_1 = 1$; $p_2 = 1$, $m_2 = 2$. Поэтому по фм-е (18) ориг-л $f(t) = \lim\limits_{p\to-2}\left((p+2)\frac{(7-2p)e^{pt}}{(p+2)(p-1)^2}\right) + \frac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{p\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left((p-1)^2\frac{(7-2p)e^{pt}}{(p+2)(p-1)^2}\right) =$

$= \lim\limits_{p\to-2}\frac{(7-2p)e^{pt}}{(p-1)^2} + \lim\limits_{p\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}((7-2p)e^{pt}(p+2)^{-1}) = \frac{11}{9}e^{-2t} + \lim\limits_{p\to1}(-2e^{pt}(p+2)^{-1} + (7-2p)te^{pt}(p+$

$+2)^{-1} - (7-2p) \times \times e^{pt}(p+2)^{-2}) = \frac{11}{9}e^{-2t} + \left(\frac{-2e^t}{3} + \frac{5te^t}{3} - \frac{5e^t}{9}\right) = \frac{11}{9}e^{-2t} + \left(\frac{5}{3}t - \frac{11}{9}\right)e^t.$

б) Разл-им знмт. на мнж-ли: $p^4 + 4 = p^4 + 4p^2 + 4 - 4p^2 = (p^2+2)^2 - 4p^2 = (p^2+2p+2)(p^2-2p+2)$. Сдт-но, знмт-ль данной дроби $B(p) = p^4 + 4$ имеет простые нули $p_{1,2} = -1 \pm i$, $p_{3,4} = 1 \pm i$. Т.к. в этом случае члст-ль $A(p) = p^2 + 2$ и $B'(p) = 4p^3$, то по фм-е (19) $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{4}\left(\frac{p^2+2}{4p^3}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=p_k} =$

$= \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{p} + \frac{2p}{p^4}\right)e^{pt}\Bigg|_{p=p_k} = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{p_k} + \frac{2p_k}{p_k^4}\right)e^{p_k t} = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{2}p_k\right)e^{p_k t}$. (Здесь учитывали, что $p_k$ – корни ур-я $p^4 + 4 = 0$, значит, $p_k^4 = -4$). Положим $k = 1$. Тогда с учетом того, что $p_1 = -1 + i$, имеем $\operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}p_1\right)e^{p_1 t}\right) = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{-1+i} - \frac{1}{2}(-1+i)\right)e^{(-1+i)t}\right) = -e^{-t}\operatorname{Re}(ie^{it}) = -e^{-t}\operatorname{Re}(i(\cos t + i\sin t)) =$

$= e^{-t}\sin t$. Используя фм-у (20) для нашего случая ($p_1 = -1 + i$, $p_2 = -1 - i$), получим

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}p_1\right)e^{p_1 t} + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}p_2\right)e^{p_2 t} = 2\operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}p_1\right)e^{p_1 t}\right) = 2e^{-t}\sin t.$$

Анч-но можно показать, что $\left(\frac{1}{p_3} - \frac{1}{2}p_3\right)e^{p_3 t} + \left(\frac{1}{p_4} - \frac{1}{2}p_4\right)e^{p_4 t} = 2e^{t}\sin t$. (Здесь $p_3 = 1 + i$, $p_4 = 1 - i$. Тогда $f(t) = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{2}p_k\right)e^{p_k t} = \frac{1}{4}(2e^{-t}\sin t + 2e^{t}\sin t) = \operatorname{ch}t\sin t.$

## ЛЕКЦИЯ 41

## 14.2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**1°. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем**. В большинстве случаев применение оперцн. исч-ия к р-ю конкретных задач и примеров укладывается в сд. общ. схему.

Пусть требуется найти нек-ый результат $\varphi(t)$, для получения к-го (без использования оперцн. метода) надо над заданной фк. $f(t)$ выполнить оперц-ю $A$.

Применяя оперцн. исч-ие, сначала переходят от ориг-а $f(t)$ к его изб-ю $F(p)$. Затем над $F(p)$ выполняют оперц-ю $B$, ствщ-ю оперц-и $A$ (н-р, изб-ие делят на $p$ вместо интв-ия фк-и $f(t)$, а дифв-ие заменяется умн-ем на $p$), и получают промежуточный результат – изб-ие $\Phi(p)$, а затем от $\Phi(p)$ переходят к искомому ориг. $\varphi(t)$.

Применение оперцн. метода можно сравнить с выч-ем фк-й $\left(\text{н-р, } f(t)=\dfrac{(t-1)^3\sqrt[5]{t}}{(t+1)^2}\right)$ с помощью логарифмирования (лгр.), когда: 1) от чисел переходят к лгр-ам; 2) над лгр-ми производят действия, ствщ-ие действиям над числами, причем умн-ю ств-ет сж-ие, делению – вычитание, возведению в сп-нь – умн-ие; 3) от найденного лгр. снова возвращаются к числу.

Рас-им реализацию общ. схемы на конкретных задачах.

Пусть дано лин. дифн. ур-ие $n$-го порядка с пст. коэф-ми

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \qquad (1)$$

с нач. усл-ми: $$x(0) = x_0;\ x'(0) = x_1;\ \ldots;\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \qquad (2)$$

Будем считать, что фк. $f(t)$ и р-ие $x(t)$ вместе с его прв-ми до $n$-го порядка яв-ся ориг-ми и $X(p) \risingdotseq x(t)$, $F(p) \risingdotseq f(t)$.

По св-ам дифв-я и линс-ти ориг-а вместо дифн. ур-я (1) с нач. усл-ми (2) получаем операторное (изображающее) ур-е

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)X(p) = F(p) + b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \ldots + b_0,$$

где $b_k = a_{k+1}x_0 + \ldots + a_n x_{n-k-1}$, или $A(p)X(p) = F(p) + B(p)$,

где $A(p)$, $B(p)$ – известные мчл. Р-ая это ур., находим операторное (опертн.) р-ие

$$X(p) = \frac{F(p)+B(p)}{A(p)}. \qquad (3)$$

Если теперь по изб-ю (р-ию) (3) найдем ориг-л, это и будет искомое част. р-ие $x(t)$.

**зм1**. Указанным методом можно найти и общ. р-ие дифн. ур-ия (1), для этого следует нач. усл-я (2) задавать в сд. виде: $x(0) = c_1$; $x'(0) = c_2$; …; $x^{(n-1)}(0) = c_n$.

В этом случае, когда нач. усл-я нулевые, т.е. $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, фм. (3) запишется в виде $$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}. \qquad (3а)$$

При р-и дифн. ур-я иногда удобно применять фм-у Дюамеля (см. (10): 14.1).

Рас-им (1) при нулевых нач. усл-ях: $x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$. Допустим, что известно р-ие $x_1(t)$ ур-я (1) при правой части $f(t) = 1$ и нулевых нач. усл-ях. Т.к. $f(t) = 1 \risingdotseq F(p) = 1/p$, фм. (3а) имеет вид $$X_1(p) = \frac{1}{pA(p)}, \qquad (3б)$$

где $X_1(p)$ – изб-ие р-ия $x_1(t)$.

Из рав-в (3а) и (3б) находим $X(p) = pF(p)X_1(p)$. Согласно фм-е Дюамеля имеем $pF(p)X_1(p) \risingdotseq f(t)x_1(0) + \int\limits_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Учитывая, что $x_1(0) = 0$, получаем $X(p) = pF(p)X_1(p) \div \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ .

Отсюда р-ие ур. (1) при нулевых нач. усл-ях будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ , \tag{3в}$$

где $x_1(t)$ – р-ие ур. (1) при $f(t) = 1$ и нулевых нач. усл.

**п1**. Найти р-ие дифн. ур-я $4x'' + 12x' + 9x = 144e^{-3t/2}$ при $x(0) = 1$, $x'(0) = 0{,}5$.

Р. Пусть искомое р-ие $x(t)$ есть ориг-л и $X(p)$ – его изб-ие. Тогда по св-у дифв-я ориг-а имеем: $x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$; $x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 0{,}5 \Rightarrow 4x'' + 12x' + 9x \div (4p^2 + 12p + 9)X(p) - 4p - 14$.

Т.к $144e^{-3t/2} \div \dfrac{144}{p+3/2}$, операторное (опертн.) ур-ие имеет вид $(4p^2 + 12p + 9)X(p) - 4p - 14 = \dfrac{144}{p+3/2}$. Из полученного ур. находим $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{4p^2+12p+9}\left(\frac{144}{p+3/2}+4p+14\right) = \frac{144}{4(p+3/2)^3} + \frac{4p+14}{4(p+3/2)^2} =$$

$$= \frac{36}{(p+3/2)^3} + \frac{p+3/2-3/2+7/2}{(p+3/2)^2} = \frac{36}{(p+3/2)^3} + \frac{1}{p+3/2} + \frac{2}{(p+3/2)^2}.$$ Но

$\dfrac{1}{p^3} \div \dfrac{t^2}{2}$, $\dfrac{1}{p} \div 1$, $\dfrac{1}{p^2} \div t$, поэтому: $\dfrac{1}{(p+3/2)^3} \div \dfrac{t^2}{2}e^{-3t/2}$, $\dfrac{1}{p+3/2} \div e^{-3t/2}$,

$\dfrac{1}{(p+3/2)^2} \div te^{-3t/2}$. Сдт-но, искомое р-ие $x(t) = 36\dfrac{t^2}{2}e^{-3t/2} + e^{-3t/2} + 2te^{-3t/2} = e^{-3t/2} \times (18t^2 + 2t + 1)$. Легко проверить, что найденная фк. уд-ет ур-ю и нач. усл-ям.

**п2**. Найти с помощью фм-ы Дюамеля р-ие задачи Коши: $x'' + 4x = \sin^2 t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$.

Р. Составим вспомогательное ур. $x_1'' + 4x = 0$ и найдем его р-ие при $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 0$.

Пусть $x_1(t) \div X_1(p)$. Тогда $x_1'(t) = pX_1(p)$, $x_1''(t) \div p^2X_1(p)$, а т.к. $1 \div 1/p$, то опертн. ур. имеет вид $(p^2 + 4)X_1(p) = \dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p) = \dfrac{1}{p(p^2+4)}$. Но $\dfrac{1}{p^2+4} \div \dfrac{1}{2}\sin 2t$, поэтому $X_1(p) \div x_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$. Найдем теперь р-ие $x(t)$ по фм. (3в): $x(t) = \displaystyle\int_0^t \sin^2\tau\cdot\frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\int_0^t (1-\cos 2\tau)\sin 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \sin 2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{8}\int_0^t \left(\sin 2t + \sin(2t-4\tau)\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{8}(1 - \cos 2t - t\sin 2t).$$

**п3**. Найти р-ие системы дифн. ур-й $\left.\begin{aligned} x' - 2x - 4y &= \cos t; \\ y' + x + 2y &= \sin t, \end{aligned}\right\}$ удщ-е нач. усл-ям $x(0) = -1$, $y(0) = 2$.

Р. Пусть искомые фк. $x(t)$, $y(t)$ яв-ся ориг-ми и $X(p)$, $Y(p)$ – их изб-ия. Тогда $x'(t) \doteqdot pX(p) + 1$, $y'(t) \doteqdot pY(p) - 2$, а т.к. $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, система опертн. ур-й имеет вид $\left.\begin{aligned} (p-2)X(p) - 4Y(p) &= \frac{p - p^2 - 1}{p^2+1}; \\ X(p) + (p+2)Y(p) &= \frac{2p^2+3}{p^2+1}. \end{aligned}\right\}$ Найдем $X(p)$ и $Y(p)$ по правилу Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -4 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = p^2$. $\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{p-p^2-1}{p^2+1} & -4 \\ \dfrac{2p^2+3}{p^2+1} & p+2 \end{vmatrix} = \dfrac{10 + p + 7p^2 - p^3}{p^2+1}$;

$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{p-p^2-1}{p^2+1} \\ 1 & \dfrac{2p^2+3}{p^2+1} \end{vmatrix} = \dfrac{2p^3 - 5p^2 + 4p - 7}{p^2+1}$, тогда $X(p) = \dfrac{\Delta_X}{\Delta} =$

$= \dfrac{10 + p + 7p^2 - p^3}{p^2(p^2+1)}$; $Y(p) = \dfrac{\Delta_Y}{\Delta} = \dfrac{2p^3 - 5p^2 + 4p - 7}{p^2(p^2+1)}$.

Найдем ствщ. ориг-ы для $X(p)$ и $Y(p)$. Т.к. $\dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$; $\dfrac{1}{p(p^2+1)} \doteqdot$

$\doteqdot \displaystyle\int_0^t \sin t \, dt = 1 - \cos t$; $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)} \doteqdot \displaystyle\int_0^t (1 - \cos t) dt = t - \sin t$, то $\dfrac{10 + p + 7p^2 - p^3}{p^2(p^2+1)} =$

$= \dfrac{10}{p^2(p^2+1)} + \dfrac{1}{p(p^2+1)} + \dfrac{7}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+1} \doteqdot x(t) = 10(t - \sin t) + 1 - \cos t + 7\sin t -$

$- \cos t \Rightarrow x(t) = 1 + 10t - 3\sin t - 2\cos t$; $\dfrac{2p^3 - 5p^2 + 4p - 7}{p^2(p^2+1)} = \dfrac{2p}{p^2+1} - \dfrac{5}{p^2+1} +$

$+ \dfrac{4}{p(p^2+1)} - \dfrac{7}{p^2(p^2+1)} \doteqdot y(t) = 2\cos t - 5\sin t + 4(1 - \cos t) - 7(t - \sin t) \Rightarrow y(t) =$
$= 4 - 7t + 2\sin t - 2\cos t$.

**2°. Решение интегральных уравнений и уравнений в частных производных**. Оперцн. метод можно применить при р-и многих интн. ур-й типа свертки, т.е. ур-й вида $\displaystyle\int_0^t y(\tau) K(t - \tau) d\tau = f(t)$; (4a)

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(\tau)K(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,, \qquad (4)$$

а также интегро-дифн. ур-й (в к-ых искомая фк. $y(t)$ входит как под знак инт-а, так и под знак прв-ой).

Рас-им р-ие ур-я (4). Предположим, что фк-и $f(t)$ и $K(u)$ – ориг-ы. В этом случае р-ие $y(t)$ также будет ориг-ом. Сдт., к обеим частям ур-я (4) можно применить прб-ие Лапласа. Полагая $y(t) \doteqdot Y(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$, $K(u) \doteqdot \widetilde{K}(p)$ и используя теорему о свертке (см. т9: 14.1), согласно к-й, $\int_0^t y(\tau)K(t-\tau)\mathrm{d}\tau \doteqdot Y(p)\,\widetilde{K}(p)$, получаем $Y(p) = F(p) + Y(p)\,\widetilde{K}(p)$, откуда $Y(p) = \dfrac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}$.

Ориг-л $y(t)$ для $Y(p)$ будет р-ем интн. ур-я (4).

Оперцн. метод используется и при р-и ур-й в част. прв-ых. Для простоты огр-мся случаем, когда искомая фк. $u$ зв-т от двух пер. $x$ и $t$ и ур. в част. прв-х имеет вид
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$
где $a > 0$; $b$, $c$, $a_1$, $b_1$ – пст. вел-ы или непр. фк-и от одной пер. $x$, заданные на отрезке $[0; t]$.

Поставим сд. задачу: найти р-ие $u(x, t)$ ур-я (5) для $0 \le x \le l$ и $t > 0$, удщ-е нач. усл-ям
$$u(x, 0) = \varphi(x);\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \qquad (6)$$
и краевым (граничным) усл. $u(0, t) = f(t)$; $\alpha\dfrac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t)$, (7)

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – пст-ые.

Предположим, что $u$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, расв-мые как фк-и пер-ой $t$ (для любого $0 \le x \le l$), яв-ся ориг-ми, и обз-им через $U(x, p)$ изб-ие фк-и $u(x, t)$. Согласно нашим предположениям, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}^2 x}$ (дифв-ие $U$ по $x$ обз-ем d, а не $\partial$, ибо всюду в дальнейшем $p$ будет расв-ся лишь как парм-р). По св-у дифв-ия ориг-ла получаем также: $\dfrac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x, 0)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2U - pu(x, 0) - \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ или, с учетом (6), $\dfrac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - \varphi(x)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2U - p\varphi(x) - \psi(x)$.

Предположим еще, что $f(t)$ яв-ся ориг-ом и $F(p) \doteqdot f(t)$, тогда усл-я (7) дают: $U|_{x=0} = F(p)$; $\left.\left(\alpha\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + \beta\big(pU - \varphi(x)\big)\right)\right|_{x=l} = \gamma U|_{x=l}$.

Т.о., оперцн. метод приводит р-ие поставленной выше задачи для ур-я

(5) с част. прв-ми к р-ию обык. дифн. ур-я $a\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + AU + B = 0,$ (8)

(где $A = c + a_1p^2 + b_1p$; $B = -a_1p\varphi(x) - a_1\psi(x) - b_1\varphi(x)$; $p$ – комп-ый парм.) при сд. гранич. усл-ях: $U|_{x=0} = F(p)$; $\left.\left(\alpha\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + (\beta p - \gamma)U - \beta\varphi(x)\right)\right|_{x=l} = 0.$ (9)

Если известно, что поставленная задача имеет едн. р-ие, удщ-е вместе со своими прв. первых двух порядков, наложенными на ориг-лы (см. 1°: 14.1), и если ур. (8) имеет едн. р-ие $U(x, p)$, удщ-е усл-ю (9), то ориг-л $u(x, t)$ для $U(x, p)$ будет р-ем поставленной задачи.

**п4**. Р-ть интн. ур-ие $\int\limits_0^t (1 + t - \tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}e^{-t}\sin t.$

Р. Левая часть ур-я яв-ся сверткой фк-й $y(t)$ и $1 + t$, сдт-но, если $y(t) \div Y(p)$, то $\int\limits_0^t (1 + t - \tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = y(t) * (1 + t) \div Y(p)\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2}\right)$. Т.к. $\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin t \div \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(p+1)^2+1} =$ $= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p^2+2p+2}$, то данное ур. в изб-ях запишется в виде $Y(p)\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2}\right) =$ $= \dfrac{1}{2(p^2+2p+2)}$. Отсюда $Y(p) = \dfrac{p^2}{2(p+1)(p^2+2p+2)}$. Разл-я последнее изб. на простейшие дроби, получаем $Y(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{2}{p^2+2p+2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+1} -$ $- \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$, тогда искомое р-ие $y(t) = e^{-t}\left(\dfrac{1}{2} - \sin t\right)$.

**п5**. Найти част. р-ие интегро-дифн. ур-ия $y''(t) - 4\int\limits_0^t (y'(\tau) + y(\tau))e^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = 0,$ удщ-е нач. усл-ям $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

Р. Пусть $y(t) \div Y(p)$. Тогда имеем: $y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p)$; $y''(t) \div p^2Y(p) - 6$; $\int\limits_0^t (y'(\tau) + y(\tau))e^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = (y'(t) + y(t)) \cdot e^{-t} \div (pY(p) + Y(p))\dfrac{1}{p+1}$. Запишем опертн. ур-ие для данного ур-ия: $p^2Y(p) - 6 - \dfrac{4}{p+1}(pY(p) + Y(p)) = 0$. Отсюда находим $Y(p) = \dfrac{6}{p^2-4} \div 3\operatorname{sh}2t$. Сдт-но, искомым р-ем будет $y(t) = 3\operatorname{sh}2t$.

**п6**. Найти р-ие ур-я в част. прв-ых $(x + t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = x + u$ $(0 < x < \infty;\ 0 < t < \infty)$, удщ-е нач. усл-ю $u(x, 0) = x^3 - x$.

Р. Пусть искомое р-ие $u(x, t)$ яв-ся ориг-ом и $u(x, t) \div U(x, p)$. Тогда по св-у дифв-ия ориг-а $\frac{\partial u}{\partial t} \div pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p) - x^3 + x$. Используя св-во дифн-ия изб-я, имеем $t\frac{\partial u}{\partial t} \div (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(pU(x, p) - x^3 + x) = -U(x, p) - p \times$ $\times \frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}p}$. Т.к. $x\frac{\partial u}{\partial t} \div xpU(x, p) - x^4 + x^2$ и $x \div \frac{x}{p}$, опертн. ур-ие для данного ур. имеет вид $xpU(x, p) - x^4 + x^2 - U(x, p) - p\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}p} = \frac{x}{p} + U(x, p)$ или

$$\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}p} + \left(\frac{2}{p} - x\right)U(x, p) = \frac{x^2 - x^4}{p} - \frac{x}{p^2}. \tag{10}$$

Р-им ствщ. одн. ур-ие $\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}p} + \left(\frac{2}{p} - x\right)U(x,p) = 0$: $\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{U(x,p)} = \left(x - \frac{2}{p}\right)\mathrm{d}p$ $\Rightarrow \ln U(x, p) = xp - 2\ln p + \ln C \Rightarrow U(x, p) = C\frac{1}{p^2}e^{xp}$.

Ищем р-ие неодн. ур-я (10) в виде $U(x, p) = C(p)\frac{e^{xp}}{p^2}$, где $C(p)$ – неизвестная фк. Подс-я в ур-ие $U(x, p) = C(p)\frac{e^{xp}}{p^2}$; $\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}p} = C'(p)\frac{e^{xp}}{p^2} + xC(p) \times$ $\times \frac{e^{xp}}{p^2} - 2C(p)\frac{e^{xp}}{p^3}$, придем к ур-ю $C'(p)\frac{e^{xp}}{p^2} = \frac{x^2 - x^4}{p} - \frac{x}{p^2}$ или $C'(p) = (x^2 -$ $- x^4)pe^{-xp} - xe^{-xp}$, откуда $C(p) = (x^2 - x^4)\int pe^{-xp}\mathrm{d}p - x\int e^{-xp}\mathrm{d}p = e^{-xp}(px^3 - px + x^2) + C$.

Т.о., получим общ. р-ие ур-я (10): $U(x, p) = C(p)\frac{e^{xp}}{p^2} = x^3\frac{1}{p} - x\frac{1}{p} +$ $+ x^2\frac{1}{p^2} + C\frac{e^{xp}}{p^2}$.

Фк. $U(x, p)$ будет изб-ем для $u(x, t)$ только при $C = 0$, т.к. при $x > 0$ фк. $e^{xp}/p^2$ неогр-но взр-ет при $p \to \infty$. Сдт-но, $U(x, p) = x^3\frac{1}{p} - x\frac{1}{p} + x^2\frac{1}{p^2}$, тогда искомое р-ие $u(x, t) = x^3 - x + tx^2$.

**п7**. К левому концу $x = 0$ элкч. одн. линии длиной $l$ без потерь приложена элкдвжщ. сила $E_0\sin\omega t$. Найти вел-у напряжения $u(x, t)$ по истечении вр-и $t$ от нач. момента, если на другом конце линия накоротко замкнута и в момент вкл-ия элкдвжщ. силы напряжение и сила тока в линии равны нулю.

Р. Искомая фк. $u(x, t)$, как известно из элктехн-ки, должна уд-ять ур-ю $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\left(a^2 = \frac{1}{LC}\right)$, нач. усл-ям $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ и краевым усл. $u(0, t) = E_0\sin\omega t$, $u(l, t) = 0$.

Предположим (физически это совершенно очевидно), что $u(x, t)$ как фк-я пер-ой $t$ (и для любого $0 \le x \le l$) яв-ся ориг-ом $u(x, t) \div U(x, p)$. Тогда по св-у дифв-ия ориг-а $\dfrac{\partial u}{\partial t} \div pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2U(x, p) - pu(x, 0) - \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = p^2U(x, p)$.

Т.к. $\dfrac{\partial u}{\partial x} \div \dfrac{\mathrm{d}U(x, p)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \dfrac{\mathrm{d}^2U(x, p)}{\mathrm{d}x^2}$, опертн. ур-ие запишется так:

$$a^2 \frac{\mathrm{d}^2U(x, p)}{\mathrm{d}x^2} - p^2U(x, p) = 0. \tag{11}$$

Краевые усл-я в изб-ях примут вид: $U(0, p) = \dfrac{E_0\omega}{p^2 + \omega^2}$; $U(l, p) = 0$. (12)

Р-им обык. дифн. ур-ие (11) при усл-ях (12). Общ. р-ие (11) берем в виде $U(x, p) = C_1\mathrm{ch}\dfrac{px}{a} + C_2\mathrm{sh}\dfrac{px}{a}$. Используя усл. (12), опр-ем $C_1$, $C_2$: $C_1 = \dfrac{E_0\omega}{p^2 + \omega^2}$, $C_2 = \dfrac{-E_0\omega\,\mathrm{ch}(lp/a)}{(p^2 + \omega^2)\mathrm{sh}(lp/a)}$. Сдт-но, $U(x, p) = \dfrac{E_0\omega}{p^2 + \omega^2}\,\mathrm{ch}\dfrac{px}{a} - \dfrac{E_0\omega\,\mathrm{ch}(lp/a)}{(p^2 + \omega^2)\mathrm{sh}(lp/a)} \times \mathrm{sh}\dfrac{px}{a} = E_0\omega\dfrac{\mathrm{sh}(p(l-x)/a)}{(p^2 + \omega^2)\mathrm{sh}(lp/a)}$.

Найдем ориг-л $u(x, t)$ для полученной фк. $U(x, p)$, к-ая имеет простые полюсы в тч-х $\pm i\omega$, $\pm iak\pi/l$ ($k = 1, 2, \ldots$) ($p = 0$ – устранимая особая тч. для $U(x, p)$). Используя фм-ы (19) и (20) из 7°: 14.1, находим:

$$u(x, t) = E_0\omega\left(2\,\mathrm{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(U(x, p)e^{pt}\right)\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=iak\pi/l}\left(U(x, p)e^{pt}\right)\right)\right) = E_0\omega\left(2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(p(l-x)/a)/\mathrm{sh}(lp/a)}{(p^2+\omega^2)'}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=i\omega} +\right.$$

$$\left.+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(p(l-x)/a)/(p^2+\omega^2)}{(\mathrm{sh}(lp/a))'}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=\frac{iak\pi}{l}}\right) = E_0\omega\left(\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(i\omega(l-x)/a)e^{i\omega t}}{i\omega\,\mathrm{sh}(i\omega l/a)}\right) +\right.$$

$$\left.+ \frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{sh}(ik\pi(l-x)/l)e^{iak\pi t/l}}{(\omega^2 - a^2k^2\pi^2/l^2)\mathrm{ch}(ik\pi)}\right)\right) = E_0\omega\left(\mathrm{Re}\left(\frac{i\sin(\omega(l-x)/a)(\cos\omega t + i\sin\omega t)}{i^2\omega\sin(\omega l/a)}\right) +\right.$$

$$\left.+ \frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{i\sin(k\pi(l-x)/l)(\cos(ak\pi t/l) + i\sin(ak\pi t/l))}{(\omega^2 - a^2k^2\pi^2/l^2)\cos k\pi}\right)\right) = E_0\left(\frac{\sin(\omega(l-x)/a)\sin\omega t}{\sin(\omega l/a)} +\right.$$

$$\left.+ 2a\omega l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x/l)\sin(ak\pi t/l)}{l^2\omega^2 - a^2k^2\pi^2}\right).$$

**3°. Применение операционного исчисления при расчете электрических цепей**. Оперцн. метод широко используется при расчетах процессов, протекающих в элкч. цепях. Пусть $i(t)$, $u(t)$ – ств-но ток и напряжение в цепи. Применение опертн. метода основано на справедливости закона Кирхгофа для опертн-ых, т.е. изб-й тока $I(p) \risingdotseq i(t)$ и напряжения $U(p) \risingdotseq u(t)$. На основании закона Ома для осн. эл-ов элкч. цепи могут быть записаны сд. стн-ия:

| | | их изб-я |
|---|---|---|
| для сопр-ия $R$ | $u_R(t) = Ri(t)$ | $U_R(p) = RI(p)$, |
| для инд-сти $L$ | $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ | $U_L(p) = pLI(p) - Li(0)$, |
| для емк-и $C$ | $u_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_C(0)$ | $U_C(p) = \dfrac{1}{pC}I(p) + \dfrac{1}{p}u_C(0)$. |

Используя закон Ома в оперт. форме для прзвл. участка цепи, можем записать

$$U(p) = Z(p)I(p), \tag{13}$$

где $Z(p)$ – опертн. сопр-ие указанного участка цепи. Для участков с сопр-ем $R$, инд-ю $L$ или емк-ю $C$ при нулевых нач. усл-ях опертн. сопр-ие имеет, ств-но, вид: $Z_R(p) = R$, $Z_L(p) = Lp$, $Z_C(p) = \dfrac{1}{Cp}$. При ненулевых нач. усл-ях к имеющимся в цепи источникам э.д.с. добавляются дпнт. источники. Вел-ы э.д.с. дпнт. источников опр-ся запасами энергии в инд-и и емк-и и равны в опертн. виде, ств-но, $Li(0)$ и $-\dfrac{1}{p}u_C(0)$.

Стн. (13) является осн-ым для расчетов заданного участка цепи в опертн. фор-ме.

**п8**. Найти ток $i(t)$ в цепи, избн-ой на рис. 1, при подключении пст-ой э.д.с. $e(t) = E$. Нач. усл-ия нулевые.

Р. Т.к. $e(t) = E \risingdotseq E/p$, то, используя стн. (13), находим:

$$Z(p)I(p) = E/p, \tag{14}$$

где опертн. сопр. $Z(p)$ цепи, избн-ой на рис. 1, имеет вид $Z(p) = Z_L(p) + Z_C(p) + Z_R(p) = $ $= Lp + \dfrac{1}{Cp} + R$ в силу нулевых нач. усл. Подс-я полученное врж. для $Z(p)$ в (14),

находим $$I(p) = \frac{E}{pZ(p)} = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{E}{L}\,\frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}. \tag{15}$$

Для отыскания ориг-а $i(t)$ следует рас-ть три случая в зв-ти от вида корней кв. ур-я в правой части врж-я (15).

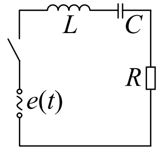


Рис. 1

Пусть $\dfrac{1}{LC} > \dfrac{R^2}{4L^2}$, тогда по сводке фм-л 8 изб-й находим

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}\, e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t.$$

Пусть $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{R^2}{4L^2}$, тогда по сводке фм-л 5: $i(t) = \dfrac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$.

Наконец, если $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$, то, комбинируя фм-ы 6 и 5 сводки, находим

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\, t\, .$$

При расчете элкч. цепей, когда воздействие на схему представляет собой фк-ю прзвл. вида, полезно использовать инт-л Дюамеля (см. (10): 14.1). Сначала опр-ся переходная хркс. цепи – закон изм-ия напряжения или тока при подаче на вход схемы едч. воздействия $e(t) = \eta(t)$. В этом случае из стн. (13) находим опертн. ток $I_1(p) = \dfrac{1}{pZ(p)}$, где $Z(p)$ – опертн. сопр-е всей цепи.

Если теперь на вход схемы подается прзвл-ое $e(t)$, то опертн. ток $I(p)$ имеет вид: $I(p) = \dfrac{U(p)}{Z(p)} = pI_1(p)U(p)$, где $U(p) \doteqdot e(t)$. Применяя формулу Дюамеля, окончательно находим:

$$i(t)=e(0)i_1(t)+\int_0^t e'(\tau)i_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=e(0)i_1(t)+\int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau=e(0)i_1(t)+e'*i_1. \quad (16)$$

**п9**. Найти ток в $RL$-цепи при подключении э.д.с. $e(t) = e^{\mu t}$ .

Р. Сначала опр-ем переходную хркс-у цепи, в данном случае ток $i_1(t)$, возникающий в $RL$-цепи при подключении э.д.с. $e(t) = \eta(t)$. Имеем (см. ответ к задаче 16 из 14.0: 14.2) $i_1(t) = \dfrac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Для опр-ия тока $i(t)$ воспользуемся фм-ой (16). Предварительно выч-им второе слг.: $e' * i_1 = \int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mu}{R}\int_0^t e^{\mu(t-\tau)}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mu}{R}\, e^{\mu t}\int_0^t \Big(e^{-\mu\tau} -$

$$- e^{-\tau\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\Big)\mathrm{d}\tau = \frac{\mu}{R}\, e^{\mu t}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu\tau}\Big|_0^t + \frac{1}{\mu+\frac{R}{L}}e^{-\tau\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\Bigg|_0^t\right) = \frac{1}{L\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\left(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

И окончательно находим

$$i(t) = e(0)i_1(t) + e' * i_1 = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L\left(\mu+\frac{R}{L}\right)}\left(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right).$$

## 14.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### 14.1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**Вопросы для самопроверки**

1. В чем состоит роль оперцн. исч-ия и в каких обл. оно применяется?
2. Что наз. прб-ем Лапласа и изб-ем $F(p)$ фк-и $f(t)$?
3. Что такое ориг-л $f(t)$ и каким усл. он уд-ет?
4. Выведите изб-ия фк-й $\sigma_0(t)$, $\cos t$, $\sin t$.
5. Сформулируйте (сформ.) теоремы ед-сти ориг-а $f(t)$ и антч-сти изб. $F(p)$.
6. Какие осн. св-ва изб-й вы знаете? Приведите св. подобия и выведите изб-ия фк-й $\sin at$, $\cos at$.
7. Сформ. св. лин-сти и приведите ствщ. пример.
8. Сформ. св-во смещения изб-ия и выведите изб-ия сд. фк-й: $e^{-\alpha t}$, $\operatorname{sh} at$, $\operatorname{ch} at$, $e^{-\alpha t}\sin at$, $e^{-\alpha t}\cos at$.
9. Сформ. и док-те теорему изб-ия. Выведите изб-ия фк-й $t^n$, $te^{-\alpha t}$ .
10. Сформ. и док-те теорему дифв-ия ориг-ла. Приведите ствщ. примеры.
11. Сформ. и док-те теорему интв-ия ориг-ла.
12. Сформ. и док-те теорему интв-ия изб-ия.
13. Сформ. и док-те теорему запаздывания.
14. Сформ. теорему упреждения. В чем состоит ее геомч. смысл?
15. Что наз. сверткой ориг-ов? Сформ. теорему о свертке (умн-ия) и док-те ее.
16. Как опр-ся инт-л Дюамеля? Приведите ствщ. пример.
17. Сформ. теоремы разл-ия изб-ия и приведите ствщ. примеры.
18. Как связаны инт-ы Лапласа и Фурье и как найти ориг-ы по их изб-ю с помощью вычетов? Приведите ствщ. примеры.

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу п1-п18 из 14.1 р-ть задачи 1-17.

1. Установить, какие из данных фк. яв-ся ориг-ми:

а) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ e^{(3+i)t} \text{ при } t > 0; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \sin(2-i)t \text{ при } t \ge 0; \end{cases}$ в) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 2^{t^2} \text{ при } t \ge 0. \end{cases}$ Ук: см. п1: 1°. О: а) Ориг-л, $s_0 = 3$; б) ориг-л, $s_0 = 0$; в) не ориг-л ($s_0 = \infty$).

2. Найти изб-я ед. ориг-ов: а) $f(t) = e^{-2t}$; б) $f(t) = t$; в) $f(t) = \operatorname{ch}(4-3i)t$. О: а) $\dfrac{1}{p+2}$; б) $\dfrac{1}{p^2}$; в) $\dfrac{p}{p^2-7+24i}$.

тз2. Пользуясь опр-ем, найти изб-ие фк-и $f(t) = e^{\alpha t}$ $(\alpha > 0)$.

Р. Согласно фм-е (1) $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \left.\dfrac{-e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\right|_0^\infty = \dfrac{1}{p-\alpha}$.

3. Используя св-а лин-сти и подобия, найти изб-я ориг-ов: а) $2 - 3e^{2t} + \sin 10t$; б) $\cos^4 t - \sin^4 t$; в) $\sin^2 5t$. О: а) $\dfrac{2}{p} - \dfrac{3}{p-2} + \dfrac{10}{p^2+100}$; б) $\dfrac{p}{p^2+4}$; в) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+100}\right)$.

тз3. Используя св-а лин-сти и подобия, найти изб-я ориг-ов: а) $2e^{-it} - 3 + 5\cos t$; б) $\sin 2t\cos 5t$.

Р. а) Используя сводку фм-л и св. лин-и, получим $2e^{-it} - 3 + 5\cos t \doteqdot 2\dfrac{1}{p+i} - 3\dfrac{1}{p} + 5\dfrac{p}{p^2+1}$.

б) Сначала представим пзв. $\sin 2t\cos 5t$ в виде $\sin 2t\cos 5t = \dfrac{1}{2}(\sin 7t - \sin 3t)$, а затем используем св-а лин-сти и подобия: $\sin 2t\cos 5t \doteqdot \dfrac{1}{2}\,\dfrac{7}{p^2+49} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{p^2+9}$.

4. Пользуясь св-ми смещения и запаздывания, найти изб-я ориг-ов: а) $\operatorname{ch} 5t\sin 3t$; б) $e^{-3t}\cos^2 t$;

в) $e^{t-2}\sin(t-2)\cdot 1(t-2)$. О: а) $\dfrac{3(p^2+34)}{(p^2+34)^2-100p^2}$; б) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+3}+\dfrac{p+3}{(p+3)^2+4}\right)$; в) $\dfrac{e^{-2p}}{(p-1)^2+1}$.

тз4. Пользуясь св-ми смещения и запаздывания, найти изб-я ориг-ов: а) $e^{-3t}\sin\pi t$; б) $\operatorname{sh}\beta t\cos\beta t$; в) $\sin(t-2)1(t-2)$; г) $\sin(t-2)\cdot 1(t)$; д) $f(t)=\begin{cases} t \text{ при } 0<t<2\pi;\\ \sin 2t \text{ при } t\ge 2\pi.\end{cases}$

Р. а) Т.к. $\sin\pi t \doteqdot \dfrac{\pi}{p^2+\pi^2}$, то по св-у смещения $e^{-3t}\sin\pi t \doteqdot \dfrac{\pi}{(p+3)^2+\pi^2}$.

б) Т.к. $\operatorname{sh}\beta t\cos\beta t = \dfrac{1}{2}\,e^{\beta t}\cos\beta t = \dfrac{1}{2}\left(e^{\beta t}-e^{-\beta t}\right)\cos\beta t$, то по св-ам лин-сти и смещения получим $\operatorname{sh}\beta t\cos\beta t = \dfrac{1}{2}\,e^{\beta t}\cos\beta t - \dfrac{1}{2}\,e^{-\beta t}\cos\beta t \doteqdot \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p-\beta}{(p-\beta)^2+\beta^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\beta^2}$.

в) Ориг-л $\sin t\cdot 1(t) \doteqdot 1/(p^2+1)$. Тогда по св-у запаздывания $\sin(t-2)1(t-2) \doteqdot e^{-2p}\dfrac{1}{p^2+1}$.

г) Ориг-л $\sin(t-2)1(t)$ опр-ен при $t\ge 0$, поэтому св-во запаздывания применять нельзя (в предыдущ. примере ориг-л включился с запаздыванием 2). Используя св-во лин-сти и разл-ив $\sin(t-2)$, получим $\sin(t-2)\cdot 1(t) = (\sin t\cos 2-\cos t\sin 2)1(t) \doteqdot \cos 2\cdot\dfrac{1}{p^2+1} - \sin 2\cdot\dfrac{p}{p^2+1}$ (фк-ю $1(t)$ здесь можно было и не писать).

д) Данный ориг. с помощью едч. фк-и можно представить в сд. виде $f(t) = t\cdot 1(t) - t\cdot 1(t-2\pi) + \sin t\cdot 1(t-2\pi) = t\cdot 1(t) - (t-2\pi+2\pi)1(t-2\pi) + \sin(t-2\pi+2\pi)\cdot 1(t-2\pi) = t\cdot 1(t) - (t-2\pi)1(t-2\pi) - 2\pi\cdot 1(t-2\pi) + \sin(t-2\pi)\cdot 1(t-2\pi)$. Используя св-во запаздывания и сводку фм-л, находим $f(t)\doteqdot \dfrac{1}{p^2} - e^{-2\pi p}\dfrac{1}{p^2} - 2\pi e^{-2\pi p}\dfrac{1}{p} + e^{-2\pi p}\dfrac{1}{p^2+1}$.

5. Найти ориг-ы по их изб-ям: а) $\dfrac{1}{p^2-4} + \dfrac{3p-2}{(p-1)^2+3}$; б) $\dfrac{p-3}{2p^2-6p-1}$; в) $\dfrac{e^{-2p}}{p^2+4p+3}$.

О: а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t + 3e^t\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,e^t\sin\sqrt{3}t$; б) $\dfrac{1}{2}\,e^{3t/2}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t - \dfrac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)$; в) $\dfrac{1}{2}\,(e^{-(t-2)} - e^{-3(t-2)})$.

тз5. Найти ориг-ы по их изб-ям: а) $\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10}$; б) $e^{-p}\dfrac{p}{p^2-9} + \dfrac{1}{p^2+5}$.

Р.а) Изб-ие представим в виде $\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10} = \dfrac{2p+1}{p^2+2\dfrac{5}{2}p+\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{4}+10} = \dfrac{2\left(p+\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}\right)+1}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} =$

$= 2\dfrac{p+\dfrac{5}{2}}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2} - 4\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,\dfrac{\sqrt{15}/2}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2}$. Т.к. $\dfrac{p}{p^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2} \doteqdot \cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$, $\dfrac{\sqrt{15}/2}{p^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2} \doteqdot \sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$, то, согласно св-ам смещения и лин-сти, получим $\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10} \doteqdot$ $\doteqdot 2e^{-\frac{5t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t - \dfrac{8}{\sqrt{15}}\,e^{-\frac{5t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$.

б) Используя сводку фм-л $p/(p^2-9)\doteqdot \operatorname{ch}3t$, а затем св-во запаздывания, получим $e^{-p}\dfrac{p}{p^2-9} \doteqdot \operatorname{ch}3(t-1)\cdot 1(t-1)$. Т.к. $\dfrac{1}{p^2+5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\sqrt{5}}{p^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \doteqdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\cdot 1(t)$, то

$e^{-p}\dfrac{p}{p^2-9}+\dfrac{1}{p^2+5}\risingdotseq \mathrm{ch}3(t-1)\cdot 1(t-1)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\cdot 1(t)$.

6. Найти изб-я сд-их дифн. врж-й: а) $y''(t)-4y'(t)+3y(t)$, если $y(0)=1$, $y'(0)=2$; $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ – ориг-лы; б) $y'''(t)+6y''(t)+y'(t)-2y(t)+3$, если $y(0)=-3$, $y'(0)=7$, $y''(0)=1$; $y^{(k)}(t)$ $(k=\overline{0,3})$ – ориг-ы. О: а) $(p^2-4p+3)Y(p)-p+2$; б) $(p^3+6p^2+p-2)Y(p)+3p^2+11p-40+\dfrac{3}{p}$.

тз6. Найти изб-ие дифн. врж-я $y'''(t)-3y''(t)+2y'(t)-4y(t)+1$, если $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=$ $=-3$ и фк-и $y^{(k)}(t)$ $(k=\overline{0,3})$ яв-ся ориг-ми, причем $y(t)\risingdotseq Y(p)$.

Р. На основании дифв-я ориг-а получаем:

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)+1;$$
$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+p-2;$$
$$y'''(t)\risingdotseq p^3Y(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)=p^3Y(p)+p^2-2p+3.$$

Используя св. лин-сти, находим $y'''-3y''+2y'-4y+1\risingdotseq p^3Y(p)+p^2-2p+3-3(p^2Y(p)+p-2)+$ $+2(pY(p)+1)-4Y(p)+1/p=(p^3-3p^2+2p-4)Y(p)+p^2-5p+11+1/p$.

7. Пользуясь св-ом дифв-ия изб-ия, найти изб-ия сд. ориг-ов: а) $2t-3t^4$; б) $t^2\cos 3t$.

О: а) $2\dfrac{1}{p^2}-3\dfrac{4!}{p^5}$; б) $\dfrac{2p\left(p^2-27\right)}{\left(p^2+9\right)^3}$.

тз7. Используя св-во дифв-я изб-ия, найти изб-ия сд. ориг-ов: а) $t\cos\beta t$; б) $t^2\mathrm{sh}3t$.

Р. а) Используя сводку фм-л $\cos\beta t\risingdotseq p/\left(p^2+\beta^2\right)$ и св. дифв-я изб-ия, получаем $t\cos\beta t\risingdotseq$ $\risingdotseq(-1)\left(\dfrac{p}{p^2+\beta^2}\right)'=\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$.

б) Т.к. $\mathrm{sh}3t\risingdotseq 3/\left(p^2-9\right)$, то $t^2\mathrm{sh}3t\risingdotseq(-1)^2\left(\dfrac{3}{p^2-9}\right)''=\left(\dfrac{-6p}{\left(p^2-9\right)^2}\right)'=18\,\dfrac{p^2+3}{\left(p^2-9\right)^3}$.

8. Пользуясь св-ом интв-я ориг-а, найти изб-я сд. ориг-ов: а) $\int\limits_0^t\left(\sin t+3t^2\right)\mathrm{d}t$; б) $\int\limits_0^t t^4e^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

О: а) $\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{6}{p^3}\right)$; б) $\dfrac{4!}{p\left(p+2\right)^5}$.

тз8. Используя св-во интв-я ориг-а, найти изб-я для ориг-ов: а) $\int\limits_0^t\left(e^{-3t}\,\mathrm{ch}\,2t+e^{4t}\sin 2t\right)\mathrm{d}t$; б) $\int\limits_0^t\left(t^7-5t^4-2t^2+3\right)e^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Р. С помощью св-ва смещения найдем изб-ие для подынт. фк-и: $e^{-3t}\mathrm{ch}2t+e^{4t}\sin 2t\risingdotseq$ $\risingdotseq\dfrac{p+3}{\left(p+3\right)^2-4}+\dfrac{2}{\left(p-4\right)^2+4}$. Применив св-во интв-я ориг-ла, получим $\int\limits_0^t\left(e^{-3t}\,\mathrm{ch}\,2t+e^{4t}\sin 2t\right)\mathrm{d}t\risingdotseq$ $\risingdotseq\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p+3}{\left(p+3\right)^2-4}+\dfrac{2}{\left(p-4\right)^2+4}\right)$.

б) Ориг-л $t^7-5t^4-2t^2+3\risingdotseq\dfrac{7!}{p^8}-5\dfrac{4!}{p^5}-2\dfrac{2!}{p^3}+3\dfrac{1}{p}$, поэтому, согласно св-у смещения, $(t^7-5t^4+2t^2+3)e^{2t}\risingdotseq\dfrac{7!}{\left(p-2\right)^8}-\dfrac{5!}{\left(p-2\right)^5}-\dfrac{4}{\left(p-2\right)^3}+\dfrac{3}{p-2}$. Тогда $\int\limits_0^t\left(t^7-5t^4-2t^2+3\right)e^{2t}\,\mathrm{d}t\risingdotseq$ $\risingdotseq\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{7!}{\left(p-2\right)^8}-\dfrac{5!}{\left(p-2\right)^5}-\dfrac{4}{\left(p-2\right)^3}+\dfrac{3}{p-2}\right)$.

9. Найти ориг-ы сд. изб-й: а) $\dfrac{1}{p\left(p^2+5\right)}$; б) $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+5\right)}$; в) $\dfrac{2p-5}{(p+2)^6}$. О: а) $\dfrac{1}{5}\left(1-\cos\sqrt{5}t\right)$; б) $\dfrac{1}{5}\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\right)$; в) $e^{-2t}\left(\dfrac{t^4}{12}-\dfrac{3t^5}{40}\right)$.

тз9. Найти ориг-ы сд. изб-й: а) $\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$; б) $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+4\right)}$; в) $\dfrac{1}{(p-3)^5}$.

Р. а) Т.к. $\dfrac{1}{p^2+4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{p^2+4} \div \dfrac{1}{2}\sin 2t$, то, согласно св-у интв-я ориг-а, получим $\dfrac{1}{p}\times$ $\times\dfrac{1}{p^2+4} \div \displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{2}\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^t = \dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$.

б) Используя результат предыдущий задачи, т.е. $\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)} \div \dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$, на основании св-ва интв-я ориг-а найдем $\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)} \div \displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

в) По сводке фм-л $t^4 \div \dfrac{4!}{p^5}$ находим $\dfrac{1}{p^5} \div \dfrac{t^4}{4!}$. Тогда по св-у смещения $\dfrac{1}{(p-3)^5} \div e^{3t}\dfrac{t^4}{4!}$.

10. Используя св. интв-я изб-ия, найти изб-я фк-й: а) $\dfrac{e^t-1}{t}$; б) $\dfrac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}$. О: а) $\ln\dfrac{p}{p-1}$; б) $\operatorname{arcctg}\dfrac{p+\alpha}{\beta}$.

тз10. Пользуясь св. интв-я изб-ия, найти изб-ие фк-и $f(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t}e^{-3t}$.

Р. Найдем изб-ие для ориг-а $1-\cos 2t$, затем применим св. интв-я изб-ия: $1-\cos 2t \div \dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}$;

$$\frac{1-\cos 2t}{t} \div \int_p^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\mathrm{d}p = \lim_{\operatorname{Re}A\to\infty}\int_p^A\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\mathrm{d}p = \lim_{\operatorname{Re}A\to\infty}\left(\ln p-\frac{1}{2}\ln\left(p^2+4\right)\right)\Bigg|_p^A =$$

$$= \lim_{\operatorname{Re}A\to\infty}\left(\ln\frac{A}{\sqrt{A^2+4}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right) = \ln 1-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}} = \ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

Изб-ие заданного ориг. получим, применив св. смещения.

Итак, $\dfrac{1-\cos 2t}{t}e^{-3t} \div \ln\dfrac{\sqrt{(p+3)^2+4}}{p+3} = \ln\dfrac{\sqrt{p^2+6p+13}}{p+3}$.

11. Найти изб-ия заданных прдч. ориг-ов прд-а $T = 2\pi$. а) $f(t) = \begin{cases}1-2t/\pi \text{ при } 0<t<\pi;\\ 2t/\pi-3 \text{ при } \pi<t<2\pi;\end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases}t/2 \text{ при } 0<t<\pi;\\ 2t \text{ при } \pi<t<2\pi.\end{cases}$ О: а) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{2\,\mathrm{th}\,\pi p}{\pi p^2}$; б) $\dfrac{\left(1-e^{-\pi p}\right)\left(0{,}5+2e^{-\pi p}\right)-\pi p e^{-\pi p}\left(4e^{-\pi p}-1{,}5\right)}{p^2\left(1-e^{-2\pi p}\right)}$.

тз11. Найти изб-ие ориг-а $f(t)$ (рис. 1) с прд-ом $T$ (этот ориг. наз-ют иногда туг. импульсом).

Р. Ориг-л $f(t)$ можно антч-ки записать прд. сд. образом:

$$f(t) = \begin{cases}\dfrac{2}{T}t \text{ при } 0\le t<\dfrac{T}{2};\\[2mm] \dfrac{2}{T}(T-t) \text{ при } \dfrac{T}{2}\le t<T.\end{cases}$$

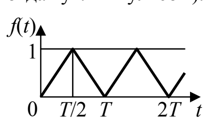


Рис. 1

Т.к. ориг-л прдч., то, согласно фм. (7а), его изб-ие $F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T\left(1-e^{-Tp}\right)}\times$

$\times\left(\int_0^{T/2} te^{-pt}\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}(T-t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)$. Инт-уя по частям, получаем $\int_0^{T/2} te^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\frac{T}{2p}\,e^{-Tp/2}-\frac{1}{p^2}\,e^{-Tp/2}+$

$+\frac{1}{p^2}$; $\int_{T/2}^{T}(T-t)e^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{T}{2p}\,e^{-Tp/2}+\frac{1}{p^2}\,e^{-Tp}-\frac{1}{p^2}\,e^{-Tp/2}$.

После подн-ки зн-й инт-ов в врж-ие для изб-ия $F(p)$ имеем $F(p)=\frac{2}{T\left(1-e^{-Tp}\right)}\left(\frac{1}{p^2}\,e^{-Tp}-\right.$

$\left.-\frac{2}{p^2}\,e^{-Tp/2}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{2}{Tp^2}\frac{\left(1-e^{-Tp/2}\right)^2}{1-e^{-Tp}}=\frac{2}{Tp^2}\frac{1-e^{-Tp/2}}{1+e^{-Tp/2}}=\frac{2}{Tp^2}\,\mathrm{th}\frac{Tp}{2}$.

12. Найти свертку ориг-ов: а) $t$ и $\cos t$; б) $1-at$ и $e^{at}$. Указать изб-ие полученной свертки. О: а) $1-\cos t$, $\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}$; б) $t$, $\frac{1}{p^2}$.

тз12. Найти свертку ориг-ов $\cos 2t$ и $\sin t$ и изб-ие для свертки.

Р. Согласно фм-е (8) имеем $\cos 2t*\sin t=\int_0^t\cos 2\tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\sin(t+\tau)+\sin(t-3\tau)\right)\mathrm{d}\tau=$

$=\frac{1}{2}\left(-\cos(t+\tau)+\frac{1}{3}\cos(t-3\tau)\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$. Итак, $\cos 2t*\sin t=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$. Изб-ие полученного ориг. найдем, используя св. линс-ти: $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)\risingdotseq\frac{1}{3}\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$.

Изб. свертки можно получить и по т9 Бореля: $\cos 2t*\sin t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+1}=\frac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$.

13. Пользуясь т9 Бореля, найти ориг-ы, ствщ. изб-ям: а) $\frac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$; б) $\frac{p^2}{p^4+13^2+36}$.

О: а) $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$; б) $\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

тз13. Пользуясь теоремой Бореля, найти ориг-ы, ствщ-ие сд. изб-ям: а) $\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$; б) $\frac{p}{p^4-1}$.

Р. а) Т.к. $\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{p}{p^2+a^2}\frac{p}{p^2+a^2}$ и $\frac{p}{p^2+a^2}\risingdotseq\cos at$, то на основании фм-ы (9) можно записать: $\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}\risingdotseq\cos at*\cos at$. Выч-я свертку $\cos at*\cos at$, получаем $\cos at*\cos at=$

$=\int_0^t\cos a\tau\cos a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\cos a\tau+\cos(2a\tau-at)\right)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left(\tau\cos at+\frac{1}{2a}\sin(2a\tau-at)\right)\Big|_0^t=$

$=\frac{1}{2}\left(t\cos at+\frac{1}{a}\sin at\right)$. Итак, $\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}\risingdotseq\frac{1}{2}\left(t\cos at+\frac{1}{a}\sin at\right)$.

б) Поскольку $\frac{p}{p^4-1}=\frac{p}{p^2-1}\frac{1}{p^2+1}$ и $\frac{p}{p^2-1}\risingdotseq\mathrm{ch}t$, $\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t$, по теореме Бореля имеем $\frac{p}{p^4-1} \risingdotseq \mathrm{ch}t * \sin t = \int\limits_0^t \mathrm{ch}\,\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\,(\mathrm{ch}t - \cos t)$.

14. Пользуясь фм-ой Дюамеля, найти ориг-ы, ствщ. изб-ям: а) $\frac{1}{p^3(p^2+1)}$; б) $\frac{p^3e^{-2p}}{(p^2+9)^2}$.
О: а) $t^2/2 + \cos t - 1$; б) $\cos 3(t-2) - 1{,}5(t-2)\sin 3(t-2)$.

тз14. Используя ф-му Дюамеля, найти ориг-л для изб-ия $p^3/(p^4-8p^2+12)$.

Р. Представим данное изб. в виде $\frac{p^3}{p^4-8p^2+12} = p\frac{p}{p^2-2}\,\frac{p}{p^2-6}$. Пусть $F(p) = \frac{p}{p^2-2} \risingdotseq$ $\risingdotseq \mathrm{ch}\sqrt{2}t = f(t)$, $\Phi(p) = \frac{p}{p^2-6} \risingdotseq \mathrm{ch}\sqrt{6}t = \varphi(t)$. Т.к. $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = 1$ и $\varphi'(t) = \sqrt{6}\,\mathrm{sh}\sqrt{6}t$, то по фм. (10) имеем $p\frac{p}{p^2-2}\,\frac{p}{p^2-6} \risingdotseq \mathrm{ch}\sqrt{2}t + \sqrt{6}\int\limits_0^t \mathrm{ch}\sqrt{2}\tau\,\mathrm{sh}\sqrt{6}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{ch}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\int\limits_0^t\Big(\mathrm{sh}\big(\sqrt{6}t - (\sqrt{2}+\sqrt{6})\tau\big) +$ $+ \mathrm{sh}\big(\sqrt{6}t + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\tau\big)\Big)\mathrm{d}\tau = \mathrm{ch}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\mathrm{ch}\big(\sqrt{6}t - (\sqrt{2}+\sqrt{6})\tau\big) + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\mathrm{ch}\big(\sqrt{6}t + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\tau\big)\right)\Bigg|_0^t =$

$= \mathrm{ch}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\big(\mathrm{ch}\sqrt{2}t - \mathrm{ch}\sqrt{6}t\big) + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\big(\mathrm{ch}\sqrt{2}t - \mathrm{ch}\sqrt{6}t\big)\right) = \frac{3}{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{6}t - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2}t$.

Итак, $\frac{p^3}{p^4-8p^2+12} \risingdotseq \frac{1}{2}\,\big(3\,\mathrm{ch}\sqrt{6}t - \mathrm{ch}\sqrt{2}t\big)$.

15. С помощью вычетов найти ориг-ы для данных изб.: а) $\frac{p^2+21p-40}{(p+1)(p^2-5p+6)}$; б) $\frac{5p^2+60p+146}{(p^2+4)(p+5)^2}$.
О: а) $8e^{3t} - 5e^{-t} - 2e^{2t}$; б) $3\sin 2t - te^{-5t}$. Ук: см. п18 из 7°: 14.1.

16. С помощью разл. изб-ия на простейшие дроби найти ориг-ы для данных изб.:
а) $\frac{3p^2+3p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$; б) $\frac{p^{-4p}}{(p+1)^3(p+3)}$. О: а) $e^{2t} + e^{-2t}(2\cos 2t - 0{,}5\sin 2t)$; б) $\frac{1}{8}\,(e^{-(t-4)}(1 - 2(t-4) + 2(t-4)^2) - e^{-3(t-4)})1(t-4))$.

тз16. С помощью разл. заданных изб. на простейшие дроби найти их ориг-ы: а) $\frac{2p^2-3p}{p^4-1}$; б) $\frac{(5p+4)e^{-2p}}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}$.

Р. а) Разл-им изб-ие $\frac{2p^2-3p}{p^4-1} = \frac{2p^2-3p}{(p-1)(p+1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$. Отсюда $2p^2 - 3p = A(p+1)(p^2+1) + B(p-1)(p^2+1) + (Cp+D)(p^2-1)$. Полагая посл-но $p = -1$, $p = 1$, $p = \pm i$, получаем: $A = -1/4$, $B = -5/4$, $C = 3/2$, $D = 1$. Поэтому $\frac{2p^2-3p}{p^4-1} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{p-1} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{p+1} +$ $+ \frac{3}{2}\,\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq -\frac{1}{4}\,e^t - \frac{5}{4}\,e^{-t} + \frac{3}{2}\cos t + \sin t$.

б) Найдем сначала ориг-л изб-ия $\frac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}$, разл-ие к-го на простейшие дроби имеет вид $\frac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}$. Отсюда $5p + 4 = A(p^2+2p+5) +$ $+ B(p-1)(p^2+2p+5) + (Cp+D)(p-1)^2$. Полагая в этом рав. $p = 1$, находим $A = 9/8$. Приравняем теперь коэф-ы при $p^3$, $p^2$, $p$ и $p^0$ и получим: $0 = B + C$; $0 = A + B + D - 2C$; $4 = 5A - 5B + D \Rightarrow B =$ $= 1/16$, $C = -1/16$, $D = -21/16$.

Т.о., $\dfrac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)} = \dfrac{9}{8}\dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{16}\dfrac{p+21}{(p+1)^2+4} = \dfrac{9}{8}\dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{1}{16}\times$ $\times\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{16}\dfrac{(p+1)+20}{(p+1)^2+4} \risingdotseq \dfrac{9}{8}te^t + \dfrac{1}{16}e^t - \dfrac{1}{16}e^{-t}\cos 2t - \dfrac{5}{8}e^{-t}\sin 2t$.

Согласно св-у запаздывания, ориг-л данного изб. $f(t) = \dfrac{1}{16}(e^{t-2}(18(t-2)+1) - e^{-(t-2)}(\cos 2(t-$ $-2) + 10\sin 2(t-2)))1(t-2)$.

17. Используя разл-ие изб-ия в ряд Лорана в окрс-ти беск. удалнной тч., найти ориг-ы, ствщ-ие изб-ям: а) $\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{1}{p}$; б) $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. О: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{((2n-1)!)^2}$; б) $\dfrac{1}{t}(e^t - e^{-t})$.

тз17. Используя разл. изб-ия в ряд Лорана в окрс-ти в беск. удаленной тч., найти ориг-ы, ствщ-ие изб-ям: а) $\dfrac{p^4}{p^5-1}$; б) $\dfrac{1}{p^2}\cos\dfrac{1}{p}$.

Р.а) Особыми тч. данной фк. яв-ся корни ур-ия $p^5 - 1 = 0$. Эти тч. лежат на окр-и $|p| = 1$. Значит, в обл-и $|p| > 1$, к-ая яв-ся окрс-ю беск. удаленной тч., фк-ю $p^4/(p^5 - 1)$ можно представить рядом Лорана по сп-ям $p$, т.е. в виде $\dfrac{p^4}{p^5-1} = \dfrac{p^4}{p^5\left(1-\dfrac{1}{p^5}\right)} = \dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p^5}} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^6} + \dfrac{1}{p^{11}} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{p^{5n-4}} + \ldots$ Отсюда, перейдя к ориг-ам, получим $\dfrac{p^4}{p^5-1} \risingdotseq 1 + \dfrac{t^5}{5!} + \dfrac{t^{10}}{10!} + \ldots + \dfrac{t^{5n-5}}{(5n-5)!} + \ldots$

б) Тч. $p = 0$ есть особая тч. для данной фк., поэтому окрс-ю тч-и $p = \infty$ яв-ся обл-ть $|p| \geq 0$. Разл-им в этой обл. фк-ю в ряд Лорана по сп-ям $p$: $\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{p^6} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-2)!}\dfrac{1}{p^{2n}} +$ $+ \ldots$ Перейдя к ориг-ам, получим $\dfrac{1}{p^2}\cos\dfrac{1}{p} \risingdotseq t - \dfrac{t^3}{2!3!} + \dfrac{t^5}{4!5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^{2n-1}}{(2n-2)!(2n-1)!} + \ldots$

## 14.2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### Вопросы для самопроверки

1. Как оперцн. методом р-ся лин. дифн. ур-я с пст коэф-ми?
2. Как оперцн. методом р-ся системы лин. дифн. ур-й с пст коэф-ми?
3. Как оперцн. методом р-ся интн. ур-я?
4. Как оперцн. методом р-ся ур-я в част. прв-х?
5. Как применяется оперцн. исч-ие при расчете элкч. цепей?
6. Как используется инт-л Дюамеля при расчете элкч. цепей?

**Задачи для самостоятельной работы**: по образцу п1-п9 р-ть задачи 1-24.

На основании п1 найти р-ия сд. дифн. ур-й, удщ-ие нач. усл-ям:

1. $x'' - 9x = 2 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. О: $(3t - 6 + 7e^{3t} - e^{-3t})/27$.
2. $x'' + 4x = 2\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$. О: $(2 + 0{,}5t)\sin 2t$.

На основании п2 найти с помощью фм-ы Дюамеля р-ия задач Коши:

3. $x'' - x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$. О: $0{,}5(te^t - \mathrm{sh}\,t)$.
4. $x^{IV} + 2x'' + x = \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$. О: $t(\sin t - t\cos t)/8$.

На основании п3 найти р-ия систем дифн. ур-й при заданных нач. усл-ях:

5. $\left.\begin{aligned} x' - 3x - 5y = 0;\\ y' + 2x - 8y = 0,\end{aligned}\right\}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 5$. О: $x(t) = 5e^{2t} - 3e^{-7t}$, $y(t) = 6e^{-7t} - e^{2t}$.

6. $\left.\begin{aligned} x' - x + y = 1{,}5t^2;\\ y' + 4x + 2y = 1 + 4t,\end{aligned}\right\}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 5$. О: $x(t) = -0{,}5t^2$, $y(t) = t^2 + t$.

На основании п4 р-ть интн. ур-ия:

7. $\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin^2 t$. О: $(1 + 3\cos 2t)/2$.

8. $\int\limits_0^t y(\tau)\mathrm{ch}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = t^n$. О: $nt^{n-1} - t^{n+1}/(n+1)$ $(n > 0)$.

9. $y(t) = \sin 2t - \dfrac{8}{3}\int\limits_0^t y(\tau)\mathrm{sh}\,3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. О: $(13\sin 2t - 16\mathrm{sh}\,t)/5$.

На основании п5 найти част. р-ия интегро-дифн. ур-й, удщ-ие нач усл-ям:

10. $y'(t) + 2y(t) + \int\limits_0^t y(\tau)\left(e^{-3(t-\tau)} + 3e^{t-\tau}\right)\mathrm{d}\tau = 0$, $y(0) = 1$. О: $4e^{-t} - 4te^{-t} - 3e^{-2t}$.

11. $y''(t) + \int\limits_0^t \left(y''(\tau) + y(\tau)\right)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. О: $t\sin t$.

На основании п6 найти р-ия лин. ур-й в част. прв-х, удщ-ие заданным усл-ям:

12. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = t + x - u$ $(0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$, $u(x, 0) = 1 - x$. О: $t + e^{-t}(1 - 2t - 2x) + x$.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = t$ $(0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$, $u(x, 0) = x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. О: $t + x\cos t - \sin t - 0{,}5t\sin t$.

На основании п 7 найти р-ие лин. ур-я в част. прв-х, удщ-е заданным усл-ям:

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l,\ 0 < t < \infty)$, $u(x, 0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$, $u(0, t) = 1$, $u(l, t) = 0$.

О: $1 - \dfrac{x}{l} - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{k\pi x}{l}\cos\dfrac{k\pi at}{l}\right)\Big/ k$.

На основании п8 найти р-ия сд. задач:

15. Найти ток $i(t)$ в RC-цепи (посл-но вкл-ны сопр-ие $R$ и емк-ть $C$) при подключении пст-ой э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$. О: $\dfrac{E - u_0}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$.

16. Найти ток $i(t)$ в RL-цепи (посл-но вкл-ны сопр-ие $R$ и инд-ть $L$) при подключении пст-ой э.д.с. $e(t) = E$. О: $\dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{E}{L}t}\right)$.

17. Найти ток $i(t)$ в цепи, избн. на рис. 1 (3°: 14.2), при подключении пст-ой э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$. О: $\dfrac{E - u_0}{L\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}\,t$ при $\dfrac{1}{LC} > \dfrac{R^2}{4L^2}$; $\dfrac{E - u_0}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$ при $\dfrac{1}{LC} =$ $= \dfrac{R^2}{4L^2}$; $\dfrac{E - u_0}{L\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\,\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}}\,t$ при $\dfrac{1}{LC} < \dfrac{R^2}{4L^2}$.

Для избн-ых на рис. 2-5 элкч. цепей опр-ть напряжение на указанном эл-те цепи при подключении пст-ой э.д.с. $e(t) = E$ (там, где нх-мо, положить $u_C(0) = 0$).

18. Рис. 2. $u_{L_1}(t) = ?$ О: $Ee^{-\frac{1}{2RL_1}t}\left(\cos\dfrac{1}{L_1}\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2} - \dfrac{1}{4R^2}}\,t - \dfrac{1}{2R\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2} - \dfrac{1}{4R^2}}}\sin\dfrac{1}{L_1}\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2} - \dfrac{1}{4R^2}}\,t\right)$ при $\dfrac{L_1}{L_2} >$

$> \dfrac{1}{4R^2}$ ; $Ee^{-\frac{1}{2RL_1}t}\left(1-\dfrac{1}{2RL_1}t\right)$ при $\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{1}{4R^2}$ ; $Ee^{-\frac{1}{2RL_1}t}\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{L_1}\sqrt{\dfrac{1}{4R^2}-\dfrac{L_1}{L_2}}\,t-\dfrac{1}{2R\sqrt{\dfrac{1}{4R^2}-\dfrac{L_1}{L_2}}}\mathrm{sh}\dfrac{1}{L_1}\sqrt{\dfrac{1}{4R^2}-\dfrac{L_1}{L_2}}\,t\right)$

при $\dfrac{L_1}{L_2} < \dfrac{1}{4R^2}$ .

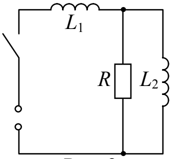


Рис. 2

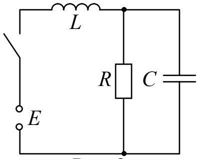


Рис. 3

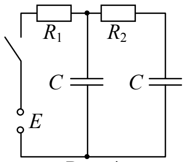


Рис. 4

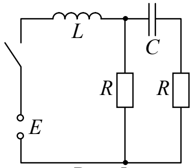


Рис. 5

19. Рис. 3. $u_L(t)$ = ? О: $\dfrac{EL}{L+C}e^{-\frac{1}{R(L+C)}t}$ .

20. Рис. 4. $u_{R_1}(t)$ = ? О: $E\left(1-e^{-\frac{2+R_1R_2}{2CR_2}t}\left(\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{2CR_2}t-\dfrac{(R_1R_2-2)\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{4C^2R_2^2}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{2CR_2}t\right)\right)$.

21. Рис. 5. $u_C(t)$ = ? О: $E\left(\left(\dfrac{1}{RC}-\dfrac{2L}{3C}\right)e^{-\frac{t}{RC}}+\dfrac{2L}{3C}e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2C}+\frac{1}{L}\right)t}\left(\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{L^2+4C^2}}{2LRC}t-\dfrac{\sqrt{L^2+4C^2}}{4LCR^2}\right.\right.$ ×

$\left.\left.\times\ \mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{L^2+4C^2}}{2LRC}t\right)\right)$.

Анч-но п9 р-ть сд. задачи:

22 Найти ток в RL-цепи при вкл-и синусоидальной э.д.с. $e(t) = E\sin\omega t$.

О: $\dfrac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(L\omega e^{-\frac{R}{L}t}+R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t\right)$.

23. Найти ток в RC-цепи, в к-ую при нулевых нач. усл. подключена э.д.с. $e(t) = Ete^{-\frac{1}{CR}t}$ .
О: $\dfrac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}\left(t-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

24. К элкч. контуру, избн-му на рис. 1 (3°: 14.2), подключена э.д.с. вида $e(t) = Et^2e^{-\frac{R}{2L}t}$ $\left(\dfrac{1}{LC}>\dfrac{R^2}{4L^2}\right)$. Найти ток в контуре (нач. усл-ия нулевые).

О: $\dfrac{E}{\dfrac{1}{C}-\dfrac{R^2}{4L^2}}e^{-\frac{R}{2L}t}\left(2t-t^2-\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L}}}\sin\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4C^2}}\,t+\dfrac{4}{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\sin^2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\,t\right)$.

# 15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

…Истинной логикой для этого мира является исчисление вероятностей, занимающееся нахождением величин вероятностей, которые учитывает или должен учитывать любой здравомыслящий человек.

Дж. К. Максвелл

## ЛЕКЦИЯ 42

## 15.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

**1°. Основные понятия. Случайные события**. Теория вероятностей есть мт. дисциплина, изучающая закономерности случайных (слн.) явлений и яв-ся основой мт. статистики.

Мт. статистика – раздел мт-ки, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений (нбл.) массовых слн. явлений с целью выявления сущ-щих закономерностей (их возникновение и развитие см. в [35]).

Под событием (сб.) будем понимать любой исход, возможный или нет, при реализации нек-го комплекса условий (усл.).

Реализация комплекса усл-й наз. испытанием (исп.) или опытом.

Сб. наз. достоверным, если оно происходит при каждом исп.

Сб. наз. невозможным, если оно не происходит при любом (каждом) исп.

Сб. обозначим (обз.) через $\varnothing$, $A$, $B$, $C$, …, $\Omega$ или $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, где $\varnothing$ – невозможное, $\Omega$ – достоверное сб-я.

Множество (мн.) сб-й $F = \{\varnothing, A, B, C, \ldots, \Omega\}$ наз. полной группой сб-й, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Каждое сб. $A$ может быть разложено (разл.) на $\{w_i\}$, назм-ые элементарными (элр.) (неразложимыми) сб., т.е. $A = \left\{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}\right\}$.

Мн-во элр. сб-й $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ наз. пространством (пр.) или полем элр. сб-й, если при опыте появится ровно одно сб. $w_j$. Т.о., мн. сб-й $F$ яв-ся системой подмножеств (подмн.) элр. сб-й.

**п1**. Пусть бросается однородная (одн.) шестигранная (1-6) игральная кость. Тогда бросание игральной кости – исп-ие, выпадание очков – сб-ие, невожможное сб. – выпадение 7 очков, достоверное сб. – выпадание очков от 1 до 6, элр. сб-ие – выпадение очка 5, сб. А = {2, 4, 6} - выпадение четных (чет.) очков, пр-во элр. сб-й - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, т.к. один из $i$ $(i = \overline{1, 6})$ выпадает обязательно, значит, $\Omega$ - достоверное сб.

**2°. Классическое определение вероятности событий. Частота событий**. Рас-им мн-во сб-й

$$F = \{A, B, C, \ldots, E\}, \tag{1}$$

к-ое обладает сд. св-ми:

1*. Образует полную группу сб-й.

2*. Несовместимо. Мн. сб-й (1) наз. несовместимым, если для любой пары $A$ и $B$ возможность одного сб. исключает возможность др-го (рис. 1). Иначе они совместны (рис. 4).

3*. Разновозможно. Мн. сб-й (1) наз. разновозможным, если для любой пары $A$ и $B$ появление одного сб. столь же возможно, как и появление др-го.

Мн-во сб-й (1), обладающее этими тремя св. 1*-3*, наз. случаями (сл.) (шансами). Н-р, сб-я для игральной кости $F = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – сл-и.

Сл. наз. благоприпятствующим (блпщ.) нек-му сб., если появление этого сл. влечет за собой появление данного сб.

Вероятностью (вер.) сб-я $A$ наз. число $P(A) = p = \dfrac{m}{n}$, где $m$ – число сл-в, блпщ-их сб-ю $A$, $n$ – число элр. сб-й полной группы сб-й. Данное опр. яв-ся классическим опр-ем вер-ти.

**п2**. Пусть бросается игральная кость. Здесь мы имеем шесть сл-ев: появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (это мн. образует полную группу сб-й, несовместимых и равновозможных). Найти вер-ти сб-й $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2\}$, $C = \{7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Р. $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$, $P(C) = \dfrac{0}{6} = 0$, т.е. $C = \varnothing$, $P(D) = \dfrac{6}{6} = 1$, т.е. $D = \Omega$.

Т.о., для возможного сб-я $P(\varnothing) = 0$, достоверного $P(\Omega) = 1$, а для слн. сб-я $P(A) \in [0, 1]$, н-р, для монеты выпадение герба ($\Gamma$) и не герба (цифры) ($\overline{\Gamma}$) одинаково возможно, поэтому $P(\Gamma) = P(\overline{\Gamma}) = 1/2$. Итак, получим $0 \le P(A) \le 1$. (2)

Если исп-ие не сводится к схеме случаев (н-р, при использовании неодн. игральной кости или стрельбе по движущейся мишени), то классическим опр-ем вер-ти сб-й пользоваться нельзя, и мы приходим к понятию частоты сб-й.

Частота сб-й есть выражение (врж.) вер-ти, полученной из опыта, практики, и обз. через $P^*(A) = P_n = \dfrac{m}{n}$. Пусть $\nu_i = 1$, если на $i$-м опыте сб. $A$ произошло, и $\nu_i = 0$ в противном сл. Тогда отн. $P^*(A) = P_n = \dfrac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n}{n} = \dfrac{m}{n}$ наз. частотой сб. $A$ при $n$ исп-ях. Н-р, если мы хотим проверить, что $P(\Gamma) = 1/2$, то подбрасываем монету $n$ раз и считаем $m$ – выпадение герба. Тогда $P_n = \dfrac{m}{n}$. Причем $P_n \to P(\Gamma)$ при $n \to \infty$. Этот факт врж-ет сущв-ие объективной закономерности, назм-ой устойчивостью частот. Поэтому мы принимаем $P(\Gamma) = 1/2$.

**п3**. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимают один шар. Найти вер-ть того, что вынутый шар будет белым.

Р. Пусть $A$ – сб-ие «появится белый шар». Тогда $m = 2$, $n = 5$. Отсюда $P(A) = 2/5$.

**3°. Элементы комбинаторики и некоторые задачи**. В теории вер-ей при р-и задач часто используются фм-ы комбинаторики (комб.), к-ые мы рас-ли в 5°: 6.1, поэтому здесь их только перечислим. Пусть дано мн. из $n$ эл-ов $M_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в част., $M_3 = \{a, b, c\}$. Дадим сд. опр-ия.

**о1**. Перестановками из $n$ эл-ов наз. такие их соединения, к-ые отличаются друг от друга только **порядком** входящая в них эл-ов и обз-ся $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. (3)

В част., для $M_3$ имеем $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Дсв-но, $abc$, $bca$, $cab$, $bac$, $cba$, $acb$.

**о2**. Размещениями из $n$ эл-ов по $m$ наз. такие их соединения, к-ые отзличаются друг от друга самими **эл-ми** и их **порядком** и обз-ся

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (4)$$

откуда при $m = n$ получим $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$ Принято считать, что $0! = 1$. Дсв-но, $n! = (n-1)!n$ и при $n = 1$ получаем $1! = 0!1$, тогда $0! = 1$. В част., $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Дсв-но, имеем $ab$, $ac$, $bc$, $ba$, $ca$, $cb$.

**о3**. Сочетаниями из $n$ эл-ов по $m$ наз. такие их соединения, к-ые отличаются друг от друга только самими **эл-ми** и обз-ся $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. (5)

В част., $C_3^2 = \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$. Дсв-но, получим: $ab$, $ac$, $bc$.

Из опр-й о1-о3 получим сд. св-ва:

**с1**. $A_n^0 = 1$. Д. Из $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ при $m = 0$ имеем $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.

**с2**. $C_n^0 = 1$. Д. Из $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$. В част., $C_n^1 = \dfrac{n}{1!} = n$.

**с3**. $C_n^m = C_n^{n-m}$. Д. $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$. В част., $C_n^0 = C_n^n = 1$.

**с4**. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, $1 \le m < n$ (правило Паскаля). Д-во см. в 5°: 6.1.

**с5**. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. Д-во см. в 5°: 6.1.

**зм1**. При р-и комб. задач два действия могут выполняться одновременно по правилу умн-ия (н-р, $P_nP_k$, $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ и т.д.) или может быть выполнено либо первое действие, либо второе по правилу сж-ия (н-р, $A_n^k + A_m^k$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$ и т.д.). Причем правила умн-ия и сж-ия можно распространить на любое к. ч. действий.

**п4**. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на расположенные подряд стулья, причем мальчики садятся на места с чет. номерами, а девочки – с нечет. Сколькими способами это можно сделать?

Р. Здесь соединения отличаются друг от друга только порядком. Тогда мальчики могут садиться $P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$ способами. Столько же – $P_4$ возможностей – имеют и девочки. Эти действия (перестановки) выполняются одновременно. Значит, всего будет $P_4P_4 = 24\cdot24 = 576$ способов.

**п5**. В группе (гр.) 25 учащихся. Нх-мо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

Р. В данном случае из 25 учащихся выбираем старосту и из оставшихся 24 – профорга, можно выбирать и наоборот: сначала профорга, затем старосту, т.е. соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком. Значит, имеем всего $A_{25}^2 = 25\cdot24 = 600$ способов выбора.

Задачу можно решить и так: сначала выбираем старосту $A_{25}^1 = 25$ способами, затем профорга $A_{24}^1 = 24$ способами. Т.к. эти действия выполняются одновременно, то по правилу умн-ия получим $A_{25}^1\ A_{24}^1 = 25\cdot24 = 600$.

**п6**. В гр-е 25 чел. Сколькими способами из них можно выбрать двоих на дежурство?

Р. Ясно, что здесь соединения отличаются друг от друга только самими эл-ми, сд-но, получим всего $C_{25}^2 = \dfrac{25\cdot 24}{2!} = 300$ способов выбора.

**п7**. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Нх-мо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывается порядок выбора изделий?

Р. При выборе двух изделий в каждом сорте соединения отличаются друг от друга самими эл-ми и их порядком, значит, $A_{20}^2 = 20\cdot19 = 380$ и $A_{30}^2 = 30\cdot29 = 870$. Причем два изделия выбираются или из первого сорта, или из второго, тогда по правилу сж-ия получим всего $A_{20}^2 + A_{30}^2 =$ $= 380 + 870 = 1250$ способов выбора.

**п8**. Сколько сущ-ет вариантов (врт.) опроса 12 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое кол-во учащихся, причем порядок, в к-ом опрашиваются учащиеся, безразличен?

Р. Здесь соединения различаются друг от друга только самими эл-ми, т.е. имеем дело с сочетаниями $C_{12}^m$, $m = \overline{0,12}$. Преподаватель (преп.) может не спросить ни одного из 12 учащихся, тогда таких вариантов будет $C_{12}^0$. Преп. может спросить только одного учащегося – $C_{12}^1$, двух – $C_{12}^2$ и т.д. до двенадцати – $C_{12}^{12}$. Тогда по правилу сж-ия (с учетом с5) получим $C_{12}^0 + C_{12}^1 + C_{12}^2 +$ $+ \ldots + C_{12}^{12} = 2^{12}$.

Задачу можно решить и так: для каждого учащегося сущ. две возможности: он будет опрошен или не опрошен. Тогда по правилу умн-ия имеем: $2\cdot2\cdot\ldots\cdot2 = 2^{12} = C_{12}^0 + C_{12}^1 + C_{12}^2 + \ldots + C_{12}^{12}$, что и следовало найти.

Теперь, используя эл-ты комбинаторики, р-им задачи теории вер-ей.

**п9**. В урне 3 белых шара и 4 черных. Из урны наугад вынимаются два шара. Найти вер-ть того, что оба шара будут белыми.

Р. Вытаскиваем два белых шара, значит, они отличаются не порядком, а самими эл-ми. Тогда $n = C_7^2$ – число всевозможных сл., $m = C_3^2$ – число блпщ. сл-в сб-ю $B$ – оба шара белые. Отсюда $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{3\cdot2\cdot1\cdot2}{1\cdot2\cdot7\cdot6} = \dfrac{1}{7}$.

**п10**. В партии из $N$ изделий $M$ бракованных (бркн.). Из партии наугад выбирается $n$ изделий. Найти вер-ть того, что из $n$ изделий будет $m$ бркн-х.

Р. Пусть событие $A$ – вытащили $m$ бркн. изделий, т.е. они отличаются лишь самими эл. Тогда $C_N^n$ – число всевозможных сл., $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ – число блпщ. сл-в; т.к. $m$ бркн-х и $n - m$ не бркн. изделий появляются одновременно. Отсюда получим

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{NM}(n, m). \tag{6}$$

В дальнейшем на п10 будем ссылаться неоднократно.

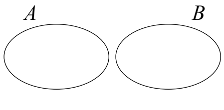



Рис. 1

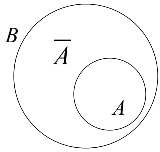



Рис. 2

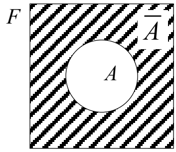



Рис. 3

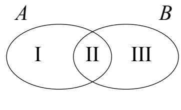



Рис. 4

**4°. Алгебра событий. Геометрия и аксиоматика вероятности**. Мн-во сб-й яв-ся специфической разновидностью общей теории мн-в (1°: 6.1), где мы расв-ли операции $A \cup B$ (сж-ия), $A \setminus B$ (разности), $A \cap B$ (умн-ия), $\overline{A}$ (отрицания, не $A$) и т.д. В мн-ве сб-й $F$ эти оперц. будем обз-ть ств-но через +, \, ·, –, а сб-ия $A$, $B$, $C$ иногда наз-ть мн-ми, и дадим сд. опр-ия.

**о1**. Если при каждом опыте $\sigma$ с появлением сб. $A$ происходит и сб. $B$, то будем говорить, что $A$ влечет за собой $B$, или $A$ яв-ся подмн-ом мн-ва $B$ и обз-ся $A \subset B$ (см. рис. 2). При этом рав-во мн-в вводится так:

$$A = B, \text{ если } A \subset B \text{ и } A \supset B.$$

В кач-ве примера рас-им мн-ва $A$, $B$ (рис. 4) и $C = \{1, 2, 5\}$, $D = \{2, 3, 5\}$, для к-ых имеет место $A \not\subset B$ и $C \not\subset D$, $A \not\supset B$ и $C \not\supset D$.

**о2**. Суммой (объединением) сб-й $A$ и $B$ наз. сб. $C = A + B$ (чт.: $A$ или $B$), состоящее в том, что в опыте произойдет хотя бы одно из этих сб. В част., $A + A = A$, $\varnothing + A = A$, $\Omega + A = \Omega$, $A + B = \{\text{I, II, III}\}$ (рис. 4), $C + D = \{1, 2, 3, 5\}$.

**о3**. Разностью сб-й $A$ и $B$ наз. сб. $C = A \setminus B$ (чт.: $A$ минус $B$) тех эл-ов из $A$, к-ые не содержатся в $B$, н-р, $A \setminus B = \{\text{I}\}$ (рис. 4), $C \setminus D = \{1\}$.

Для полной гр. сб-й $F$ ($A \subset F$) разность $F \setminus A = CA = C_F A = \overline{A}$ наз. дополнением к мн-у $A$ (отс-но $F$). Н-р, $F \setminus A = \overline{A}$ (рис. 3, чт.: не $A$)

Симч. разностью или разностным сж-ем наз. сумма разностей $A \setminus B$, $B \setminus A$ и обз-ся $A \Delta B = A \oplus B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$. Н-р, $A \Delta B = \{\text{I, III}\}$ (рис. 4), $C \Delta D = \{1, 3\}$.

**о4**. Произведением (пересечением) сб-й $A$ и $B$ наз. сб. $C = AB$ (чт.: $A$ и $B$), состоящее из эл-ов, принадлежащих $A$ и $B$. В част., $AA = A$, $\varnothing A = \varnothing$, $\Omega A = A$, $AB = \{\text{II}\}$ (рис. 4), $CD = \{2, 5\}$.

**о5**. Сб-я $A$ и $B$ наз. несовместимыми, если они не могут произойти одновременно в одном опыте, т.е. $AB = \varnothing$ (рис. 1).

Приведем осн. св-ва оперц-й над сб-ми:

| | |
|---|---|
| с1. $\Omega + A = \Omega$. | с7. $(A \setminus B)(B \setminus A) = \varnothing$. |
| с2. $\Omega A = A$. | с8. $A + B = B + A$. |
| с3. $AA = A$. | с9. $AB = BA$. |
| с4. $A + A = A$. | с10. $C(A + B) = CA + CB$. |
| с5. $A + \varnothing = A$. | с11. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$. |
| с6. $A\varnothing = \varnothing$. | с12. $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$. |

Для каждого из с1-с12 используем стдн. метод д-ва $A = B$: полагаем $x \in A$ и убеждаемся, что $x \in B$, тогда $A \subset B$ (1). Затем полагаем $x \in B$ и убеждаемся, что $x \in A$, и тогда $B \subset A$ (2). Из (1) и (2) следует $A = B$. Н-р, д-ем с10. Пусть $x \in C(A + B) \Rightarrow x \in C$ и $x \in A + B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\} \Rightarrow x \in CA$ или $x \in CB \Rightarrow x \in CA + CB$, тогда $C(A + B) \subset CA + CB$ (1). Теперь пусть $x \in CA + CB \Rightarrow x \in CA$ или $x \in CB \Rightarrow x \in C$, $x \in A$ или $x \in C$, $x \in B \Rightarrow x \in C$ и $x \in A$ или $x \in B \Rightarrow x \in C(A + B)$, тогда $CA + CB \subset C(A + B)$ (2). Из (1) и (2) следует $C(A + B) = CA + CB$.

**зм2**. Св-ва с1-с12 можно д-ть и геомч-ки, н-р, д-ем с11: из рис. 5 имеем $\overline{AB} = \{\text{I, III, IV}\}$ и $\overline{A} + \overline{B} = \{\text{III, IV}\} + \{\text{I, IV}\} = \{\text{I, III, IV}\}$, сдт-но, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

**о6**. Класс $F$ подмн-в пр-ва $\Omega$ наз. алгеброй (алг.) сб-й, если $\Omega \in F$ и если $AB \in F$, $A + B \in F$, $A \setminus B \in F$ при любых $A \in F$, $B \in F$.

Алг-у сб-й иногда наз. также алг-ой Буля.

Классическое опр. вер-ти, основанное на рас-и конечной группы равновероятных сб-й, недт-но для сл-ев, когда имеем беск. мн-во исходов. Это приводит к понятию геомч. вер-ти.

Пусть на пл-ти имеется обл. $G$ и в ней содержится обл. $g$ с квадрируемой границей. В обл. $G$ наудачу бросается тч. Найти вер-ть попадания тч-и в обл. $g$.

Ясно, что вер-ть попадания точки в обл. $g$ прцн-на ее мере (длине, пщ-ди, объему и т.д.) mes $g$ (обз-им ее через $mg$) и не зв-т от ее расположения и формы. Поэтому приходим к сд. опр-ю геомч. вер-ти:

$$P = \frac{mg}{mG}. \tag{7}$$

**зм3**. Если обл. $G$ норв-ть, то $mG = 1$. Тогда $P = mg$, т.е. вер-ть сб. $A$ можно врз-ть через ее меры: $P(A) = mg$. Это позволит д-ть ряд теорем.

**п11** (задача о встрече). Два лица $A$ и $B$ условились встретиться в опр-ом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 мин, после чего уходит. Чему равна вер-ть встречи лиц $A$ и $B$, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода незв-мы?

Р. Обз-им приход лица $A$ через $x$ и лица $B$ через $y$. Чтобы встреча произошла, нх-мо и дт-но выполнения усл-я $|x - y| \le 20$. Блпщ-я встрече $g = 60^2 - 40^2$ (рис. 6). Тогда $P = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$.

Если, согласно зм3, $mG = 60^2$ нор-уем (тогда $mG = 1$) и обз-им через $C$ – сб. встречи двух лиц, то получим (см. рис. 7) $P = P(C) = mg = 1^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

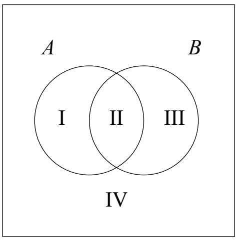



Рис. 5

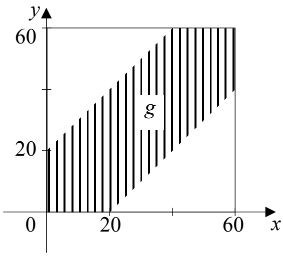



Рис. 6

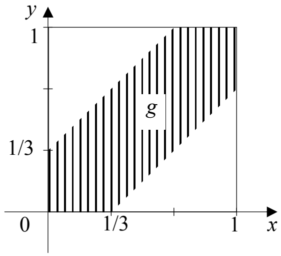



Рис. 7

**о7**. Алг-а сб-й $F$, включающая в себе результаты сж-я и умн-я счетного числа своих эл. (т.е. замкнутая отс-но этих операций), наз. $\sigma$-алгеброй. Эл-ты $\sigma$-алг. $F$ (т.е. подмн-ва пр-ва $\Omega$) наз. слн. сб-ми (или просто сб-ми).

Напомним, что мн. $A$ наз. счетным, если между всеми эл. $A$ и мн-ом нтр. чисел можно установить биективное ств. Н-р, мн. $\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ яв-ся счетным.

Рас-им аксиоматическое опр. вер-ти, предложенную А.Н. Колмогоровым.

**о8**. Вер-ю сб. $A$ наз. числовая фк. $P(A)$, опрн-я на $\sigma$-алг. $F$ и удщ-я сд. четырем аксиомам теории вер-ей:

**а1** (неотц-сть вер-и). Каждому сб. $A \in F$ ставится в ств-ие неотц. число $P(A)$, т.е. $P(A) \ge 0$ для любого $A \in F$.

**а2** (нормировка вер-и). Вер-ть достоверного сб. равна ед-це, т.е $P(\Omega) = 1$.

**а3** (конечная аддс-ть вер-и). Для любых несовместных сб. $A$ и $B$ из $F$ справедливо рав. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

**а4** (непр-сть вер-и). Для любой убщ. посл-ти $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ сб-й из $F$, такой, что $A_1A_2\ldots A_n\ldots = \varnothing$, имеет место рав. $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

**зм4**. Система аксиом Колмогорова не полна: даже одно и то же мн. $\Omega$ вер-ти $F$ можно выбирать различными способами. Н-р, для игральной кости мы можем положить $P(A_1) = \ldots = P(A_6) = 1/6$ или $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/4$, $P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = 1/12$. Неполнота аксиом вызвана существом дела, ведь игральная кость может быть неодн-ой.

Из а1-а4 получим ряд утв-й. Н-р, из рав. $\Omega = \varnothing + \Omega$ по а3 получим $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$. Откуда следует 1) $P(\varnothing) = 0$. Анч. можно получить: 2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; 3) $0 \le P(A) \le 1$; 4) если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$ и т.д.

**5°. Теорема сложения. Формула Стирлинга**. На основе классического опр. вер-ть $P(A) = m/n$, где $m$ – число сл-ев, блпщ-х сб-ю $A$, $n$ – число элр. сб-й полной гр. сб-й. В част., $P(\Omega) = n/n = 1$ и $P(\varnothing) = 0/n = 0$, где $\Omega$ – достоверное сб. и $\varnothing$ – невозможное сб. Сформулируем сд-ю

**т1** (сж-ия). Если $C = A + B$, $AB = \varnothing$ [$AB \neq \varnothing$] и $A, B, C \subset F$, то

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{8}$$

$$[P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)]. \tag{9}$$

Д. Стн. (9) д-ем на основе геомч. опр-ия вер-ти, используя зм3 (рис. 9). Пусть $mG = \{\text{I, II, III, IV}\} = 1$ и покажем, что $P(C) = P(A + B) = mg = \{\text{I, II, III}\}$. Из рис. 9 имеем $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \{\text{I, II}\} + \{\text{II, III}\} - \{\text{II}\} = \{\text{I, II}\} + \{\text{III}\} = \{\text{I, II, III}\} = mg$ ■ Здесь кол-во блпщ-их сл-ев сб-й $A$ и $B$ мы заменили кол-ом их ствщ. пщ-ей, а мн. сб. $F$ заменили мн. пщ-ей $G$, где $mG = 1$. Анч. д-ся (рис. 8) и стн. (8). Более того, для трех совместимых сб. получим:

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \tag{10}$$

Д. Для д-ва стн. (10) используем рис. 10. Пусть $mG = \{1, 2, \ldots, 7, 8\} = 1$. Покажем, что $P(D) = mg = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Дсв-но, из рис. 10 получим $P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \{1, 2, 4, 5\} + \{2, 3, 5, 6\} + \{4, 5, 6, 7\} - \{2, 5\} - \{4, 5\} - \{5, 6\} + \{5\} = \{1, 4\} + \{2, 3\} + \{6, 7\} + \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = mg$ ■ Причем стн. 10 можно обобщить для $n$ совместных сб-й $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мн. $F$. Если же сб-я $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то получим обобщение (8) в виде

$$P(C) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{8а}$$

В част-ти, на основании с12 и (8а) имеем:

$$P\left(A + \overline{A}\right) = P(\Omega) = 1 \text{ или } P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right). \tag{8б}$$

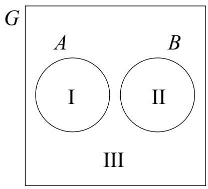



Рис. 8

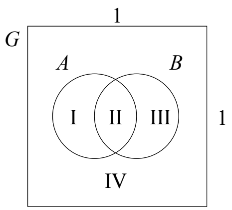



Рис. 9

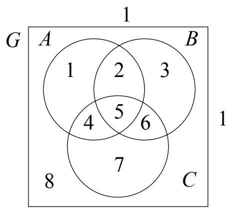



Рис. 10

**п12**. Из колоды 36 карт наудачу вынимаются три карты. Найти вер-ть того, что среди них окажется точно один туз (см. стн. (6) из 3°).

Р. Пусть $A$ – сб. «вытащили один туз». По условию задачи $n = C_{36}^3$ – число сл-в, $m = C_4^1\ C_{32}^2$ – число блпщ. сл-в. Тогда получим $P(A) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3} = \dfrac{4 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34} = \dfrac{31 \cdot 16}{35 \cdot 3 \cdot 17} = \dfrac{496}{1785} \approx 0{,}2778.$

**п13**. Из колоды карт наудачу вынимаются три карты. Найти вер-ть того, что среди них окажется хотя бы один туз.

Р. Пусть $A = A_1 + A_2 + A_3$, где несовместимые сб. означают: $A_1$ – появление одного туза, $A_2$ – двух, $A_3$ – трех тузов. Тогда по стн. (8) имеем $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$

$$= \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3} + \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} + \frac{C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} = \frac{16 \cdot 31}{3 \cdot 35 \cdot 17} + \frac{3 \cdot 16}{3 \cdot 35 \cdot 17} + \frac{1}{3 \cdot 35 \cdot 17} = 0{,}2778 + 0{,}0269 + 0{,}0006 = 0{,}3053.$$

Р. (др. способ). Найдем вер-ть противоположного сб. $\overline{A}$ (среди вынутых карт не окажется ни одного туза): $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{C_{32}^3 C_4^0}{C_{36}^3} = \dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34} = \dfrac{31 \cdot 8}{3 \cdot 37 \cdot 7} = 0{,}6947$. Тогда по стн-ю (8б) получим $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}6947 = 0{,}3053$. Выч-ие $P(A)$ этим способом выгодно в силу неразложимости $\overline{A}$ на элр. сб-я.

**зм5**. При выч-и факториалов полезна фм. Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$. (10а)

**п14**. Колоду из 36 карт разделяют пополам. Найти вер-ть того, что в обеих частях равное число черных и красных карт.

Р. Имеем $n = C_{36}^{18}$, $m = C_{18}^{9}\ C_{18}^{9}$. Тогда $P(A) = \dfrac{C_{18}^{9}C_{18}^{9}}{C_{36}^{18}} = \dfrac{18!\,18!\,18!\,18!}{9!\,9!\,9!\,9!\,36!} = \dfrac{(18!)^4}{36!(9!)^4} =$

$$= \frac{(2\pi\cdot 18)^2\left(18^{18}e^{-18}\right)^4}{\sqrt{2\pi\cdot 36}\ 36^{36}e^{-36}(2\pi\cdot 9)^2\left(9^9e^{-9}\right)^4} = \frac{2}{\sqrt{18\pi}} \approx 0{,}26.$$

**п15**. Вер-ть попадания в мишень первого стрелка равна 0,8, второго – 0,7. Найти вер-ть попадания при совместной стрельбе.

Р. Пусть сб. $A$ – попадание первого стрелка, $B$ – второго, причем $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$. Сб. совместны, т.е. $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}56$. Тогда по ф-ме (9) получим $P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}7 – 0{,}56 = 0{,}94$.

**6°. Независимость событий. Условная вероятность. Теорема умножения**. Дадим сд-ие

**о9**. Сб. $A$ наз. незв-ым от сб. $B$, если вер-ть сб. $A$ не зависит от того, произошло сб. $B$ или нет.

**о10**. Сб. $A$ наз. зв-ым от сб. $B$, если вер. сб. $A$ меняется в зв-ти от того, произошло сб. $B$ или нет.

**о11**. Вер-ть сб. $A$ при усл., что $B$ произошло, наз. условной (услн.) вер-ю и обз-ся $P(A/B)$.

Из этого опр. вытекают усл. незв-ти [зв-ти] сб-ий $A$ и $B$: $P(A/B) = P(A)$, (11)

$[P(A/B) \neq P(A)]$. (12)

Н-р, пусть бросаются две монеты и пусть сб. $A$ – появление герба на первой монете, $B$ – появление герба на второй. Здесь сб. $A$ незв-т от $B$, т.е. $P(A/B) = P(A)$. В п15 сб-ия $A$ – попадание первого стрелка и $B$ – второго также незв-ы, т.е. $P(A/B) = P(A) = 0{,}8$, $P(B/A) = P(B) = 0{,}7$.

**п16**. В урне три шара: два белых и один черный. Два лица наугад вынимают из урны по одному шару. Рас-им сб-ия $A$ – появление белого шара у первого лица, $B$ – появление белого шара у второго лица.

Вер-ть сб. $A$ до сб-ия $B$ равна $P(A) = 2/3$. Если стало известно, что сб. $B$ произошло, то $P(A/B) = 1/2$, т.е. $A$ зв-т от $B$.

**т2** (умн-ия). Вер-ть произведения (пзв.) двух сб. равна пзв-ю одного из них на усл. вер-ть другого, вычн-ую при усл-и, что первое имело место, т.е. $P(AB) = P(B)\ P(A/B)$, (13)

$P(AB) = P(A)\ P(B/A)$. (14)

Д-во см. в [35]. Из фм-л (13), (14) получим $P(B)\ P(A/B) = P(A)\ P(B/A)$, (15а)
откуда следует, что, если $A$ незв-мо от $B$, то $B$ незв-мо от $A$ в силу (11).

Если два сб. $A$ и $B$ незв-мы, то т2 запишется $P(AB) = P(A)P(B)$, (15)
и вообще, $P(AB\ldots EH) = P(A)P(B)\ldots P(E)P(H)$, (16)
если сб-ия $A$, $B$, …, $E$, $H$ незв-мы.

**зм6**. Методом мт. индукции стн. (14) можно обобщить

$$P(ABC\ldots EH) = P(A)P(B/A)P(C/AB)\ldots P(H/ABC\ldots E). \tag{17}$$

**зм7**. Для незв-ти совокупных сб-й недт-но их попарной незв-ти, а нх-ма незв-ть любого из них от любой совокупности остальных.

**п17**. В ящике 8 шаров, на к-ых написаны номера: 1, 2, 3, 12, 13, 20, 30, 123. И пусть сб. $A$ означает извлечение шара с цифрой 1 (1, или 12, или 13, или 123), $B$ – цифрой 2, $C$ – цифрой 3. Установить зв-ть или незв-ть сб. $A$, $B$, $C$.

Р. По условию $P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P(C) = \dfrac{1}{2}$; $P(AB) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, $P(AC) = \dfrac{1}{4}$, $P(BC) = \dfrac{1}{8}$.

Отсюда $P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8} = P(BC) \neq P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}$, т.е. $B$ и $C$ зв-мы. Хотя $P(ABC) = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = P(A)P(B)P(C)$ – независимы. Но в общем $A$, $B$, $C$ – зависимы, т.к. $B$ и $C$ зв-мы.

**п18**. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вер-ть того, что оба шара белые, при усл.: 1) вынутый шар в урну не возвращается; 2) возвращается.

Р. 1) Пусть сб. $A_1$ – появление белого шара при I вынимании, $A_2$ – II, $A = A_1A_2$ – появление двух (белых шаров) сб-й. Тогда $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} = 0{,}1$. 2) Поскольку шар возвращается в урну, то $A_1$ и $A_2$ незв-мы. Тогда $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5} = 0{,}16$.

Заметим, что на практике обычно теоремы сж-я и умн-я используют вместе.

**п19**. Рабочий обслуживает 3 станка. Вер-ть того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для 1-го станка 0,9, 2-го – 0,8, 3-го – 0,85. Найти вер-ть того, что в течение нек-го часа не потребует внимания рабочего: 1) ни один станок, 2) по крайней мере один станок.

Р. Пусть сб. $A_1$ означает, что не потребует внимания рабочего 1-й станок, $A_2$ – 2-й станок, $A_3$ – 3-й станок. Сб-ия $A_1$, $A_2$, $A_3$ незв-мы, но совместны. Тогда

1) $P(A_1A_2A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85 = 0{,}612$.

2) $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}85 - 0{,}9\cdot 0{,}8 - 0{,}9\cdot 0{,}85 - 0{,}8\cdot 0{,}85 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85 = 0{,}997$.

Ответ можно найти и короче. Пусть $D = A_1 + A_2 + A_3$, тогда $\overline{D} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, где $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – незв. Тогда $P\left(\overline{D}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}15 = 0{,}003$. Откуда $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$. Отсюда следует

**зм8**. Если противоположное сб. разлагается на меньшее число элр. сб-й, чем прямое сб., то имеет смысл при выч-и вер-ей переходить к противоположному сб.

**7°. Формула полной вероятности. Формула Байеса**. Используя основные теоремы (сж-ия и умн-ия), выведем важные фм-ы.

Пусть требуется опр-ть вер-ть нек-го сб. $A$, к-ое может произойти вместе с одним из сб. $H_1$, $H_2$, …, $H_n$, образующих полную гр. несовместимых сб., т.е. $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ (причем $\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) = 1$). Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A/H_i\right). \tag{18}$$

Д. $P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A/H_i\right)$ ■

Стн. (18) наз. фм-ой полной вер-ти. Сб-ия $H_1$, $H_2$, …, $H_n$ наз. гипотезами.

Следствием теоремы умн-ия и фм-ы полной вер-ти яв-ся так назм. теорема гипотез или фм-а Байеса.

Пусть имеется полная группа несовместимых гипотез $H_1$, $H_2$, …, $H_n$. Допустим, что сб. $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ произошло. Требуется уточнить вер-ть сб-ия $H_j$, т.е. найти $P\left(H_j/A\right)$.

Используя (15а) и (18), получим $P(AH_j) = P(A)P\left(H_j/A\right) = P(H_j)P\left(A/H_j\right) \Rightarrow$

$$P\left(H_j/A\right) = \frac{P\left(H_j\right)P\left(A/H_j\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(H_j\right)P\left(A/H_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)} \quad (j = \overline{1,n}). \tag{19}$$

Стн. (19) наз. фм-ой Байеса.

**п20**. Имеются три одинаковые на вид урны. В I урне 2 белых и 1 черный шар, во II – 3 б и 1 ч, в III – 2 б и 2 ч шаров. Наугад выбирают одну урну и вынимают из нее шар. Найти вер-ть того, что это белый шар, т.е. наступит сб. $A$.

Р. Рас-им три гипотезы: $H_1$ – выбор I урны, $H_2$ – II, $H_3$ – III, причем $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Усл. вер-ть $A$ при этих гипотезах ств-но равна $P\left(A/H_1\right) = \frac{2}{3}$, $P\left(A/H_2\right) = \frac{3}{4}$, $P\left(A/H_3\right) = \frac{1}{2}$.

Тогда по (18) получим $P(A) = P(H_1)P\left(A/H_1\right) + P(H_2)P\left(A/H_2\right) + P(H_3)P\left(A/H_3\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{23}{36}$.

**п21**. Около 40% приборов собирается из высококачественных деталей (дт.), а 60% – из дт-й обычного качества. Если прибор собран из высококачественных дт., то его надежность (вер-ть безотказной работы) за вр. $t$ равна 0,95. Если из дт. обычного качества – его надежность равна 0,7. Прибор испытывался в течение вр. $t$ и работал безотказно. Найти вер-ть того, что он собран из высококачественных дт.

Р. Пусть $H_1$ – прибор собран из высококачественных дт., $H_2$ – из обычных. До опыта $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$, а $P(A/H_1) = 0{,}95$, $P\left(A/H_2\right) = 0{,}7$. Тогда по ф-ме (19) получим:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}7} = 0{,}475.$$

**8°. Последовательность испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона. Наивероятнейшее число появлений событий**. Пусть производится несколько незв. исп-ий (опытов) над сб. $A$ с вер-ю $P(A) = p$, к-ые могут производиться в одинаковых усл. ($p$ = const, н-р, выстрелы по мишени) и в различных усл. ($p_i$ разные, н-р, выстрелы по движущейся мишени). В ств-и с этим получим две задачи.

**з1** (частная задача). Производится $n$ незв. опытов $E_1, E_2, \ldots, E_n$, в каждом из к-ых сб. $A$ появляется с вер-ю $p$ и не появляется с вер-ю $q = 1 - p$. Найти вер-ть $p_n(m)$ того, что сб. $A$ появится ровно $m$ раз из $n$ опытов.

Р. Обз-им через $B_m$ сб. «при $n$ опытах $A$ произойдет $m$ раз». Пусть $A_j$ – появление сб-я $A$ при $E_j$-ом исп., $\overline{A}_j$ – непоявление сб. $A$ при $E_j$. Тогда $B_m = A_1\ldots A_m\,\overline{A}_{m+1}\ldots\overline{A}_{n-1}\,\overline{A}_n + A_1\ldots\overline{A}_m\,\overline{A}_{m+1}\ldots$ $\ldots\overline{A}_{n-1}A_n + \ldots + \overline{A}_1\ldots\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}\ldots A_n$. Отсюда $P_n(m) = P(B_m) = p^mq^{n-m} + p^mq^{n-m} + \ldots + p^mq^{n-m} =$ $= C_n^m\,p^mq^{n-m}$. Итак, имеем

$$P_n(m) = C_n^m\,p^mq^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^mq^{n-m}. \qquad (20)$$

Стн. (20) наз. фм-ой бнмн-го рсп-ия вер-ей или фм-ой (схемой) Бернулли.

Если составим так назм. производящую фк-ю $\varphi_n(x) = (q + px)^n = q^n + \frac{n}{1!}q^{n-1}px + \frac{n(n-1)}{2!}\times$ $\times\, q^{n-2}p^2x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!}qp^{n-1}x^{n-1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}p^nx^n = \sum_{i=0}^{n}C_n^ip^iq^{n-i}x^i$, то $P_n(m) = C_n^m\,p^mq^{n-m}$ есть коэф-т при $x^m$. Если $x = 1$ и $q + p = 1$, тогда $\sum_{m=0}^{n}P_n(m) = 1$, т.к. $\sum_{m=0}^{n}P_n(m) = (q + p)^n = 1$.

**з2** (общая задача). Производится $n$ незв-х опытов ($E_1, \ldots, E_n$) при различных условиях, т.е. вер-ть появления сб. $A$ при $E_i$ опыте равна $p_i = P(A_i)$. Найти вер-ть $P_n(m)$ того, что $A$ произойдет ровно $m$ раз.

Р. $B_m = A_1\ldots A_m\,\overline{A}_{m+1}\ldots\overline{A}_{n-1}\,\overline{A}_n + A_1\ldots\overline{A}_m\,\overline{A}_{m+1}\ldots\overline{A}_{n-1}A_n + \ldots + \overline{A}_1\ldots\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}\ldots A_n \Rightarrow$ $P_n(m) = P(B_m) = p_1\ldots p_mq_{m+1}\ldots q_n + p_1\ldots p_{m-1}q_m\ldots q_{n-1}p_n + \ldots q_1\ldots q_{n-m}p_{n-m+1}\ldots p_n \Rightarrow$

$$P_n(m) = \sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\ldots p_{\alpha_m}q_{\alpha_{m+1}}\ldots q_{\alpha_n}. \qquad (21)$$

Стн. (21) наз. фм-ой (схемой) Пуассона.

Если введем производящую фк-ю $f_n(x) = (q_1 + p_1x)(q_2 + p_2x)\ldots(q_n + p_nx) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_ix)$, (22)

то $P_n(m)$ есть коэф. при $x^m$. Ф-му (22) можно записать в виде

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_ix) = \sum_{m=0}^{n}P_n(m)x^m, \text{ где } P_n(m) = \frac{1}{m!}\frac{d^mf_n(x)}{dx^m}. \qquad (23)$$

**зм9**. Если требуется найти вер-ть $R_n(m)$ того, что сб. $A$ при $n$ незв. опытах произойдет не менее $m$ раз, то получим

$$R_n(m) = P_n(m) + P_n(m + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{\mu=m}^{n}P_n(\mu). \qquad (24)$$

**зм10**. Вер-ть $P(m_1 \le \mu \le m_2)$ того, что сб. $A$ при $n$ незв. опытах произойдет не менее чем $m_1$ раз и не более чем $m_2$ раз, выч-ся фм-ой

$$P(m_1 \le \mu \le m_2) = \sum_{\mu=m_1}^{m_2}P_n(\mu). \qquad (24а)$$

Ф-мы (24) и (24а) могут применяться как по схеме Бернулли (20), так и по схеме Пуассона (21).

**п22**. Производится 5 выстрелов по одной мишени с вер-ю $p = 0{,}6$. Найти вер-ть попаданий 0, 1, 2, 3, 4, 5, т.е. $P_5(m)$, $0 \le m \le 5$.

Р. $P_5(0) = q^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^5$, $P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^4 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $P_5(2) = 10\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3$ и т.д.

**п23**. Производится 4 выстрела по одной мишени с различных расстояний с вер-ми попадания ств-но $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$. Найти вер-ти $P_4(0)$, $P_4(1)$, $P_4(2)$, $P_4(3)$, $P_4(4)$.

Р. Составляем производящую фк-ю $f_4(x) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i x) = (0{,}9 + 0{,}1x)(0{,}8 + 0{,}2x)(0{,}7 + 0{,}3x)\times$ $\times(0{,}6 + 0{,}4x) = 0{,}302 + 0{,}440x + 0{,}215x^2 + 0{,}040x^3 + 0{,}002x^4$. Тогда $P_4(0) = 0{,}302$; $P_4(1) = 0{,}440$; $P_4(2) = 0{,}215$; $P_4(3) = 0{,}040$; $P_4(4) = 0{,}002$.

**п24**. Производится 5 выстрелов по цели, вер-ть попадания в к-ую равна 0,2. Для разрушения целей дт-но трех попаданий. Найти вер-ть того, что цель будет разрушена.

Р. $R_5(3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2 + C_5^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8 + C_5^5\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0 = 0{,}0512 + 0{,}0064 +$ $+ 0{,}0003 = 0{,}0579$. Наиболее вер. число успехов в $n$ исп-ях Бернулли уд-ет нерав-ам:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{24б}$$

Д. Пусть $P_n(m)$ – нб-я, тогда $P_n(m) \ge P_n(m-1)$ и $P_n(m) \ge P_n(m+1)$, т.е. $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} \ge 1$, $\frac{P_n(m)}{P_n(m+1)} \ge 1$. Отсюда получим $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{p}{q} \ge 1$ или $(n+1)p - mp \ge mq$ $\Rightarrow (n+1)p \ge m(p+q) \Rightarrow np + p \ge m$ ①. Анч-но имеем $\frac{P_n(m)}{P_n(m+1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}} = \frac{m+1}{n-m}\cdot\frac{q}{p} \ge 1$ или $mq + q \ge np - mp \Rightarrow m(q+p) + q \ge np \Rightarrow m \ge np - q$ ②. Из ① и ② получим (24б). Причем если $np - q$ – целое число, то $P_n(m)$ достигает max в двух зн-х: $m_0 = np - q$ и $m_0 = np + n$. Т.о., фк-я $P_n(m)$ сначала возрастает до $m_0$, а затем уб-ет.

**п25**. Число коротких волокон в партии хлопка составляет в среднем 30% от всего кол-ва волокон. Опр-ть наивероятнейшее число коротких волокон из взятых наудачу 24 волокон.

Р. Задача уд-ет схеме повторных исп-й. Имеем $n = 24$, $p = 0{,}3$; $q = 1 - p = 0{,}7$. Отсюда $m_0 = [np + p] = [24\cdot 0{,}7 + 0{,}3] = [7{,}5] = 7$ ($[x]$ – целая часть числа $x$).

**п26**. Вер-ть нарушения точности в сборке прибора составляет 0,2. Опр-ть наиболее вер. число точных приборов в партии из 9 штук.

Р. Дано: $n = 9$, $q = 0{,}2$, а вер-ть сборки точного прибора $p = 1 - q = 0{,}8$. Откуда $m_0 = [np + p] =$ $= [9\cdot 0{,}8 + 0{,}8] = [8] = 8$. Вел. $m_0$ получилась целой, значит, $m_0$ имеет два значения. Выч-им еще $m_0 = np - q = 9\cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 7$.

**9°. Предельные теоремы. Распределение Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа**. При больших $m$ и $n$ выч-ия $P_n(m) = P(\mu_n = m)$ и $P_n(m_1 \le \mu \le m_2)$ затруднены. Такие затруднения возникают и при малых $p$ и $q$. Поэтому $P_n(m)$ и $P_n(m_1 \le \mu \le m_2)$ заменяют прж-но предельными (асимч-ми) фк-ми.

**т3** (Пуассона). Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda \in \,]0,\infty[$, то

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{25}$$

при любом пст-ом $m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) (д-во см. в [35]).

Фм. (25) наз. законом (рсп-ем) Пуассона.

**п27**. Вер-ть попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вер-ть попадания в цель двумя и более пулями из 5000 выстрелов.

Р. Находим $\lambda = np = 5000\cdot 0{,}001 = 5$. Тогда $P(\mu_n \ge 2) = \sum_{m=2}^{5000} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1) = 1 - e^{-5} - \frac{5}{1!}e^{-5} =$ $= 1 - 6e^{-5} = 0{,}9596$.

**зм11**. Если мало зн. $p$, то пуассоновским прж-ем можно воспользоваться для числа неудач. Причем замена фм-ы Бернулли при больших $n$ прж. фм-ой Пуассона оправдана, если $npq \le 9$. Если же пзв-ие $npq$ велико, то для выч-ия $P_n(m)$ используют локальную теорему Муавра-Лапласа. Введем сд. фк-и

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\text{где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),\ \phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du \ \text{ и } \phi^*(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u)du. \tag{26}$$

Фк. $\varphi(x)$ наз. фк-ей Гаусса. Ее зн. приведены в $T_1$ из $\Pi_4$ при $x \geq 0$. Для $x < 0$ используется та же табл., т.к. $\varphi(x)$ чет., т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Фк. $\phi(x)$ наз. фк-ей Лапласа. Ее зн-ия приведены в табл. $T_2$ из $\Pi_4$ для $x \geq 0$. Для $x < 0$ пользуются той же табл., т.к. $\phi(x)$ нечет., т.е. $\phi(-x) = -\phi(x)$. Причем в табл. приведены зн. инт-а лишь до $x = 5$, т.к. при $x > 5$ можно взять $\phi(x) = 0{,}5$.

**т4а** (локальная теорема Муавра-Лапласа). Если $n \to \infty$, $p(0 < p < 1)$ пст-но, вел. $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ огр-на равномерно по $m$ и $n$ ($-\infty < a \leq x \leq b < \infty$), то

$$P(\mu_n = m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_m)(1 + \alpha_m(m)) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \qquad (27)$$

где $|\alpha_n| < \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ при $x_m \in [a, b]$, $C > 0$ – пст-ая (д-во см. в [35]).

Ф-му (27) часто используют при $n > 100$ и $npq > 20$.

**п28**. Вер-ть изделию нек-го производства (прз.) оказаться бркн-ым равна 0,005. Чему равна вер. того, что из 10000 наудачу взятых изделий бркн-ых окажется ровно 40.

Р. Найти $P_{10000}(40) = C_{10000}^{40}(0{,}005)^{40}(0{,}995)^{9960}$ трудно. Используем (27), т.к. $n = 10000 > 100$, $npq = 10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 49{,}75 > 20$. Находим $\sqrt{npq} = \sqrt{49{,}75} \approx 7{,}05$; $\dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40 - 50}{7{,}05} \approx$ $\approx -1{,}42$. Тогда $P_n(m) = \dfrac{1}{7{,}05}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(1{,}42)^2}{2}} = \dfrac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206$. Точное значение $P_n(m) = 0{,}0197$.

Для выч-я при больших $n$ вер-ти того, что число успехов в $n$ исп-ях Бернулли $\mu_n$ находится между $m_1$ и $m_2$, используется

**т4** (интн. теорема Муавра-Лапласа). Если $n \to \infty$, $p$ $(0 < p < 1)$ пст-но, то

$$P_n(m_1, m_2) = P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \phi(b) - \phi(a), \qquad (28)$$

где $a = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $b = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ (д-во см. в [35]).

**п29**. Вер-ть изделию оказаться бркн-м равна 0,005. Найти вер. того, что из 10000 наудачу взятых изделий бркн-х окажется не более 70 (см. п28).

Р. $P(\mu \leq 70) = P\left(-\dfrac{50}{\sqrt{49{,}75}} \leq \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \dfrac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) = \left(-7{,}09 \leq \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq 2{,}84\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$ $= \phi(2{,}84) - \phi(-7{,}09) = \phi(2{,}84) + \phi(7{,}09) = 0{,}4975 + 0{,}5 = 0{,}9975$.

**зм12**. При малых $npq$ вместо (28) можно применить фм-у

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \phi\left(b + \frac{1}{2\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(a - \frac{1}{2\sqrt{npq}}\right) \qquad (29)$$

**10°. Закон больших чисел**. Интн. теорему Муавра-Лапласа можно применить для нахождения отк-ия $\varepsilon$ вер-ти $P$ наступления сб. $A$ при $n$ незв. исп-ях от частоты $\mu/n$ наступления этого сб.:

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \beta. \qquad (30)$$

Из (30) следует $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1, \qquad (31)$$

т.е. вер-ть нер-ва $\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon$ стремится к ед-це при $n\to\infty$.

Этот факт впервые обнаружен Я. Бернулли и носит название закона больших чисел или теоремы Бернулли. Именно через закон больших чисел (более подробно см. [35] в 1°, 2° из 2.4) теория вер-и соприкасается с практикой.

Из теоремы Бернулли (или из (30)) можно получить типичные задачи, т.е. найти одну из $p$, $n$, $\varepsilon$, $\beta$ по заданным трем:

1) Найти вер-ть $\beta$ того, что частота $\mu/n$ наступления сб. $A$ отк-ся от вер-ти $P$ не более чем на $\varepsilon$.

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

2) Найти нм-е число $n$ исп-й, чтобы с вер-ю, не меньшей $\beta$, частота $\mu/n$ отк-ась от вер-ти $P$ не больше чем на $\varepsilon$. Имеем нерав-во $P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge\beta$.

Его заменяем на $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \ge\beta$, откуда находим $n$.

3) При заданной вер-ти $\beta$ и числе исп-й $n$ найти границу возможных изм. $\left|\frac{\mu}{n}-p\right|$, т.е. по $p$, $n$, $\beta$ найти $\varepsilon$. Врж-ие $P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\beta$

заменяем на $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =\beta$, откуда находим $\varepsilon$.

**п30**. Дт. нестандартна с вер-ю $p$ = 0,1. Найти вер. того, что среди сл-но отобранных 400 дт. частота появления нестандартных дт. отк-ся от вер. $p$ = 0,1 по абсолютной (абс.) вел-е не более чем на 0,03.

Р. Дано: $n$ = 400, $p$ = 0,1 ($q$ = 0,9), $\varepsilon$ = 0,03. Найти: $\beta$ – ? По (30) имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|<0{,}03\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\phi(2) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

**п31**. Вер-ть того, что дт. нестандартна, равна $p$ = 0,1. Найти, сколько дт-й надо отобрать, чтобы с вер-ю, равной 0,9544, можно было утверждать, что частота появления нестандартных дт. (среди отобранных) отк-ся от вер-ти $p$ по абс. вел-е не более чем на 0,03.

Р. Дано: $p$ = 0,1 ($q$ = 0,9), $\varepsilon$ = 0,03, $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|<0{,}03\right)$ = 0,9544. Найти: $n$ – ?

$$2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}9544 \Rightarrow \phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772 \Rightarrow \phi(2) = 0{,}4772 \Rightarrow 0{,}1\sqrt{n} = 2 \Rightarrow n = 400.$$

**зм13**. Анч-но п31 можно найти $\varepsilon$, если заданы $p$, $n$, $\beta = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

# ЛЕКЦИЯ 43

## 15.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**1°. Случайные величины. Функция и плотность распределения**. Случайная (слн.) величина (вел.) яв-ся исх. понятием, как и мн-во, поэтому опр-ия не имеет.

Под слн. вел-ой понимается вел., к-ая в результате опыта может принимать то или иное зн., причем неизвестно заранее – какое именно.

Слн. вел-ы бывают дискретного (дк.) и непрерывного (непр.) типа. Н-р, число появлений герба при трех бросаниях монеты – дк. слн. вел-а; абсцисса тч-и попадания при выстрелах или ошибки измерителя высоты – непр. слн. вел-ы.

Рас-им дк. слн. вел-у $X$ с возможными зн. $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, к-ые образуют полную гр. несовместных сб. Обз-им вер-и этих сб. буквами $p_i$, т.е. $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, …, $P(X = x_n) = p_n$. Они есть вер-и полной гр. сб-й, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (1)$$

Законом распределения (рсп.) дк. слн. вел-ы наз. всякое стн., устанавливающее связь между возможными зн. сл-й вел. и ств-ми им вер-ми.

Закон рсп-ия дк. слн. вел-ы $X$ задается

1) в таблч. форме

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

. Такая табл. наз. рядом рсп-ия слн-й вел. $X$. Кратко ее обз-ют $\{x_i, p_i\}$;

2) в грфч. форме (рис. 1). Такая фигура наз. многоугольником (муг.) рсп-ия слн-й вел. $X$.

**п1**. Производится три выстрела по мишени с вер-ю попадания 0,4 при каждом выстреле. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд и муг-к рсп-ия.

Р. Пусть $X$ – число выбитых очков: $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$. По схеме Бернулли находим $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$: $P_3(0) = (0{,}6)^3 = 0{,}216$, $P_3(1) = C_3^1\, 0{,}4\cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$, $P_3(2) = C_3^2\, 0{,}4^2\cdot 0{,}6 = 0{,}288$, $P_3(3) = 0{,}4^3 = 0{,}064$. Откуда получим ряд (табл. 1) и муг-к (рис. 2) рсп-ия. И стн. (1) выполняется $\sum p_i = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$.

Таблица 1

| $X$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

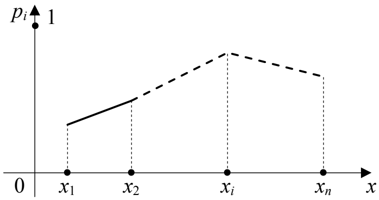


Рис. 1

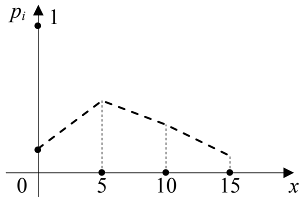


Рис. 2

Если слн. вел-а $X$ непр-я, то ряд рсп-ия не применим, ибо вер-ть каждой отдельной слн. вел-ы равна нулю (почему так!), т.е. $P(X = x_i) = 0$. Поэтому для количественной (колн.) характеристики (хркс.) рсп-ия непр-ой слн. вел-ы воспользуемся не вер-ю сб-ия $X = x$, а вер-ю сб. $X < x$, где $x$ – нек-ая текущая пер.

Вер-ть этого сб. зв-т от $x$. Эта фк. наз. фк-ей рсп-ия слн. вел-ы $X$ и обз-ся

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2)$$

Фк-ю рсп-ия $F(x)$ иногда наз. интн. фк-ей рсп-ия или интн-м законом рсп-ия.

Фк. рсп-ия – самая универсальная хркс. слн. вел-ы. Она сущ-ет для всех слн. вел-н – как непр-х, так и дк-х. Так, зная ряд рсп-ия дк. слн. вел-ы, легко построить ее фк-ю рсп-ия:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P\left(X = x_i\right). \qquad (3)$$

Фк-ия рсп-ия обладает сд. св-ми:

с1. $F(x)$ есть неубывающая (неуб.) фк., т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

с2. $F(-\infty) = 0$.

с3. $F(\infty) = 1$.

Отсюда следует, что грф-к фк-и рсп-ия $F(x)$ представляет собой грф-к неуб. фк-и (рис. 3) с обл-ю зн-й [0, 1], причем в отдельных тч. фк-ия может иметь скачки (разрывы), как на рис. 4, 5.

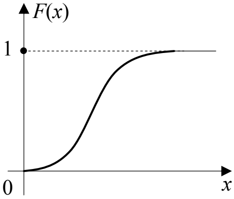


Рис. 3

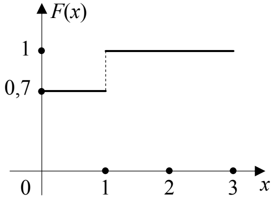


Рис. 4

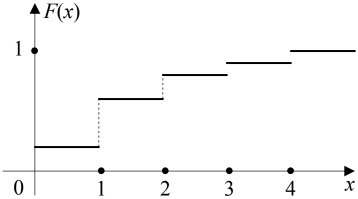


Рис. 5

**п2**. Производится один выстрел по мишени. Вер-ть попадания равна 0,3. Построить фк-ю рсп-ия числа попаданий.

Р. Ряд рсп-ия имеет вид

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

. Находим фк-и рсп-ия $F(x) = P(X < x) =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x \le 0, \\ 0{,}7 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } 1 < x < \infty. \end{cases}$$ Отсюда строим грф-к фк-и $F(x)$ на рис. 4.

**п3**. Производится 4 выстрела по мишени с вер-ю 0,3 при каждом выстреле. Построить фк-ю рсп-ия числа попаданий.

Р. Выч-им $P_4(m) = C_4^m\, p^m q^{4-m}$ при $m = \overline{0,4}$ , строим ряд рсп-ия:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2401 | 0,4116 | 0,2646 | 0,0756 | 0,0081 |

Найти $F(x) = P(X < x)$ самим и построить грф-к (рис. 5).

**Плотность рсп-ия**. Пусть $F(x)$ – фк. рсп-ия непр. слн. вел-ы $X$. Тогда фк.

$$f(x) = F'(x) \qquad (4)$$

наз. плотностью рсп-ия слн. вел-ы в данной тч. $x$.

Кривая (крв.), изб-щая плотность рсп-ия слн. вел. $X$, наз. крв-й рсп-ия (рис. 6).

Плотность рсп-ия, так же как и фк-ия рсп-ия, есть одна из форм закона рсп-ия. Но плотность рсп-ия не яв-ся универсальной, т.е. она сущ-т только для непр. слн. вел-ы. Роль анч-го понятия для дк. слн. вел-ы играет ряд рсп-ия.

Из стн. (4) следует, что фк. рсп-ия $F(x)$ яв-ся первообразной фк. для плотности рсп. $f(x)$, и связаны они стн-ем

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx = F(\beta) - F(\alpha), \qquad (5)$$

где (см. рис. 7)

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < \mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx \ . \qquad (5а)$$

Врж. $f(x)\mathrm{d}x$ наз. эл-ом вер-ти (рис. 8), а $P(\alpha < X < \beta)$ есть вер-ть попадания $X$ в промежуток $\left]\alpha, \beta\right[$ (рис. 9).

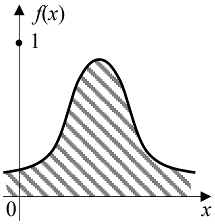


Рис. 6

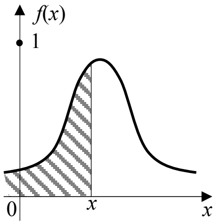


Рис. 7

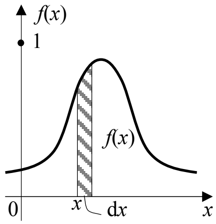


Рис. 8

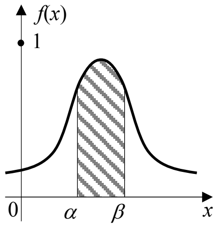


Рис. 9

Плотность рсп-ия обладает сд. св-ми:

с1. Плотность рсп-ия есть неуб. фк-ия, т.е. $f(x) \geq 0$, т.к. $F(x)$ яв-ся неуб. фк.

с2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(\infty) - F(-\infty) = 1$, как и для $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ дк. сл-я.

**п3а**. Фк-я рсп. непр. слн. вел-ы $X$ задана врж-ем $F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ ax^2, 0 < x \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$ Найти коэф. $a$, плотность рсп-я $f(x)$ и вер-ть $P(0{,}25 < X < 0{,}5)$.

Р. Т.к. $F(x)$ непр-на, то при $x = 1$ имеем $F(x) = ax^2 = 1 \Rightarrow a = 1$. Находим $F'(x) = f(x) =$

$$= \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ 2x, 0 < x \leq 1, \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

По стн. (5) выч-им $P(0{,}25 < X < 0{,}5) = \int\limits_{0{,}25}^{0{,}5} 2x\mathrm{d}x = 2 \cdot \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{0{,}25}^{0{,}5} = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1825.$

**2°. Математическое ожидание, мода, медиана, моменты и дисперсия**. В 1° мы рас-ли исчерпывающие хркс-ки слн. вел-н, наз-ых законами рсп-я: для дк. слн. вел-ы – фк-ю рсп-я, ряд рсп-я и муг-к рсп-я, а для непр. слн. вел-ы – фк-ю рсп-я, плотность рсп-я и крв-ю рсп-я.

Однако во многих вопросах практики нет надобности исчерпывающе хркз-ть слн. вел-у, дт-но указать нек-ые парм-ы, н-р, какое-то среднее (ср.) – центр группирования рсп-я, дисперсия – сп-нь разбросанности этих зн. отс-но ср-го и т.д. Так, н-р, при изучении рсп-я заработной платы интересуются, прежде всего, ср. заработной платой и хркс-ой ее рассеивания – дисперсией (дсп.).

Такие хркс., предназначенные выразить (врз.) в сжатой форме нб-е сущн-ые особенности рсп-я, наз. числовыми хркс-ми слн. вел-ы. Числовые хркс-ки позволяют также прж-но врз-ть одно рсп. через др.

Рас-им дк. слн-ю вел-у $x_i \in X$ с вер-ми $p_i$ ($i = \overline{1, n}$) и ее числовые хркс.

**Мт. ожиданием** (ож.) наз. сумма пзв-й всех возможных зн. слн. вел-н на их вер-ти и обз-ся

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \tag{6}$$

Для непр. слн. вел-ы заменяем $x_i$ на $x$, $p_i$ – на $f(x)$, сумму – на инт-ы:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{6а}$$

Если вел. $X$ принадлежит к вел-ам смешанного типа, то ее мт. ож-ие выражается (врж.) фм-ой

$$M[X] = \sum_{x_i \in X'} x_i p_i + \int_{x \in X''} xf(x)\mathrm{d}x. \qquad (6б)$$

Мт. ож-ие иногда обз-ют через $m_x = M[X]$ и наз-ют центром рсп-я вер-ей слн. вел-ы $X$ (рис. 10). Если крв-я рсп-ия симч-на отс-но оси $Oy$, то $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0$ (рис. 11).

Выясним верн-ый и физический смысл мт. ож-ия.

Пусть проведено $n$ испытаний (исп.), в к-ых слн. вел-а $X$ приняла $m_1$ раз зн-ие $x_1$, $m_2$ раз зн-ие $x_2$, …, $m_k$ раз зн. $x_k$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Тогда сумма всех зн., принятых $X$, равна $\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$. Отсюда можно найти ср. ариф. $\overline{X}$ всех зн., принятых слн. вел-ой:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{m_i}{n} \approx \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = M[X], \qquad (6в)$$

т.к. частота $\frac{m_i}{n}$ появления слн. вел-ы $x_i$ прж-но равна ее вер-ти $p_i$. Т.о., мт. ож-ие прж-но равно (тем точнее, чем больше $n$) ср. арифч-му нблм. зн-й слн. вел-ы. В этом состоит ее вер. смысл.

Физический смысл мт. ож-ия состоит в том, что оно врж. центр тяжести масс. Пусть массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда абсцисса центра тяжести масс равна

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M[X]. \qquad (6г)$$

Из опр-ия легко получить св-ва мт. ож-я:

**с1**. Мт. ож-ие пст. вел-ы равно самой пст-ой, т.е.

$$M[C] = C.$$

Д. Рас-им пст-ю $C$ как дк. слн. вел-у, к-ая имеет одно возможное зн. $C$ и принимает его с вер-ю $p = 1$. Тогда $M[C] = C \cdot 1 = C$ ■

**сл1**. Если слн. вел. $X$ задана законом рсп-ия $\{x_i, p_i\}$, то слн. вел. $CX$ задается законом рсп-ия $\{Cx_i, p_i\}$.

**с2**. Пст. множитель (мнж.) можно выносить за знак мт. ож-ия:

$$M[CX] = CM[X].$$

Д. Пусть слн. вел. $X$ задана законом рсп-ия $\{x_i, p_i\}$, тогда, учитывая сл1, получим $M[CX] = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots x_np_n) = CM[X]$ ■

**зм1**. Рас-им вер-ти пзв-ия незв. слн. вел-ин $XY = \{x_i y_j\}$ ($i, j = \overline{1,n}$). Их можно расв-ть как незв. слн. сб-ия, тогда пзв-ие $x_i y_j$ имеет вер-ть $p(x_i y_j) = p(x_i)\times$ $\times p(y_j) = p_i p_j$. Тогда получим сд-е

**с3**. Мт. ож-ие пзв-ия двух незв. слн. вел-н равно пзв-ю их мт. ож-й:

$$M[XY] = M[X]\,M[Y].$$

**сл2**. Мт. ож-ие пзв-ия конечного числа незв. слн. вел-н равно пзв-ю их мт. ож-й, т.е. $M[XY...Z] = M[X]\,M[Y]\ldots M[Z]$.

**с4**. Мт. ож-ие суммы двух слн. вел. равно сумме их мт. ож.: $M[X+Y] =$ $= M[X] + M[Y]$ (д-во см. в [35]).

**с3**. Мт. ож-ие суммы конечного числа слн. вел-н равно сумме мт. ож-й слг-ых: $M[X+Y+...+Z] = M[X] + M[Y] + \ldots + M[Z]$.

**с5**. Мт. ож-ие $M[X]$ числа появления сб. $A$ в $n$ незв. исп-ях равно пзв-ю числа исп-й на вер-ть $p$ появления сб-я при каждом исп., т.е. $M[X] = np$ (д-во см. в [35]).

**п4**. Незв. слн. вел-ы $X$ и $Y$ заданы законами рсп-ия: {5; 2; 4: 0,6; 0,1; 0,3} и {7; 9: 0,8; 0,2}. Найти мт. ож-ие слн. вел-ы $XY$.

Р. $M[X] = 5\cdot0{,}6 + 2\cdot0{,}1 + 4\cdot0{,}3 = 4{,}4$; $M[Y] = 7\cdot0{,}8 + 9\cdot0{,}2 = 7{,}4$. Тогда $M[XY] = 4{,}4\cdot7{,}4 = 32{,}56$.

**п5**. Производится 3 выстрела с вер-ми попадания ств-но $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$ и $p_3 = 0{,}6$. Найти мт. ож-ие общего числа попаданий.

Р. Число попаданий в первом выстреле есть слн. вел. $X_1$, к-ая принимает два зн.: 1 (попадание) с вер-ю $p_1 = 0{,}4$ и 0 (промах) с вер-ю $q_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, поэтому $M[X_1] = 1\cdot0{,}4 = 0{,}4$. Анч-но, $M[X_2] = 0{,}3$; $M[X_3] = 0{,}6$. Тогда $M[X] =$ $= M[X_1 + X_2 + X_3] = M[X_1] + M[X_2] + M[X_3] = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1{,}3$ (попаданий).

**п6**. Найти мт. ож-ие суммы числа очков, к-ые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Р. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – число очков на первой кости с вер-ю каждого из них $p = \frac{1}{6}$, анч-но $Y$ – на второй кости. Тогда $M[X] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} +$ $+ 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1+6)\cdot 6}{2} = \frac{7}{2}$ и $M[Y] = \frac{7}{2}$. Отсюда $M[X+Y] = M[X] + M[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$.

**зм2**. Анч. св-ва имеет мт. ож-ие (см. (6а)) для непр. слн. вел-ы.

Зн-ие слн. вел-ы $X$, при к-ом плотность рсп-я имеет нб. зн-ие, наз. **модой** и обз-ся $M_0$. Для слн. вел-ы $X$, крв. рсп-я к-ой изб-на на рис. 10 и 11, мода совпадает с мт. ож-ем.

Число $M_e$ наз. **медианой** (рис. 12), если оно уд-ет рав-у

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)\mathrm{d}x = \int_{M_e}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Рав. (7) можно переписать так: $P(x < M_e) = P(M_e < x) = \dfrac{1}{2}$, а зн-е $x$ может не совпадать с $M_e$.

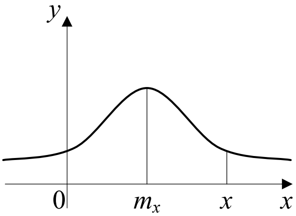


Рис. 10

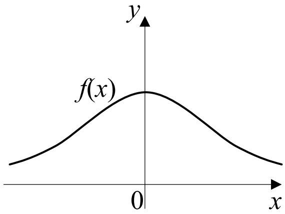


Рис. 11

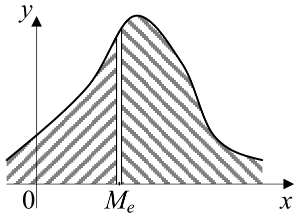


Рис. 12

На практике часто применяют **моменты** двух видов: начальные и центральные (цтр.).

Начальным (нач.) моментом $s$-го порядка дк. слн. вел-ы $X$ наз. сумма вида

$$\alpha_s\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \;, \tag{8}$$

а для непр. слн. вел-н

$$\alpha_s\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f\left(x\right)\mathrm{d}x \;. \tag{8а}$$

Мт. ож-ие есть первый нач. момент $\alpha_1\left[X\right] = M\left[X\right] = m_x$, а $\alpha_s\left[X\right] = M\left[X^s\right]$.

Слн. вел-а $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ наз. центрированной (цтрв.) слн. вел-ой.

Мт. ож-ие цтрв-ой слн. вел-ы равно нулю:

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M\left[X - m_x\right] = M\left[X\right] - M\left[m_x\right] = m_x - m_x = 0.$$

Моменты цтрв. слн. вел-ы носят название цтр. моментов (они анч-ны моментам отс-но центра тяжести в механике).

**Цтр-ым моментом** порядка $s$ слн. вел-ы $X$ наз. мт. ож-ие $s$-й степени (сп.) ств-ей цтрв. слн. вел-ы:

$$\mu_s\left[\overset{\circ}{X}\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^s\right] = M\left[\left(X - m_x\right)^s\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^s p_i \;, \tag{8б}$$

а для непр. слн. вел-ы

$$\mu_s\left[\overset{\circ}{X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - m_x\right)^s f\left(x\right)dx \;. \tag{8в}$$

Иногда врж-ия $\alpha_s\left[M\right]$ и $\mu_s\left[X\right]$ обз. через $\alpha_s$ и $\mu_s$.

Выразим цтр. моменты через нач-ые $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \Rightarrow \sum\right)$:

$$\mu_1 = \mu\left[\overset{\circ}{X}\right] = M\left[X - m_x\right] = \sum\left(x_i - m_x\right)p_i = \sum x_i p_i - m_x \sum p_i = m_x - m_x = 0. \tag{9}$$

$$\mu_2 = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = \sum\left(x_i - m_x\right)^2 p_i \;=\; \sum x_i^2 p_i \;- 2\, m_x \sum x_i p_i \;+ \tag{9а}$$

$$+\ m_x^2 \sum p_i \ = \alpha_2 - 2\,m_x^2 \ +\ m_x^2 \ = \alpha_2 -\ m_x^2\,.$$

$$\mu_3 = M\left[\ \overset{\circ}{X}{}^3\ \right] = \ \sum \left(x_i - m_x\right)^3 p_i \ = \alpha_3 - 3\alpha_2\, m_x + \\ + 3 m_x\, m_x^2 \ -\ m_x^3 \ = \alpha_3 - 3\alpha_2\, m_x \ + 2\, m_x^3\,. \qquad (9б)$$

$$\mu_4 = M\left[\ \overset{\circ}{X}{}^4\ \right] = \ \sum \left(x_i - m_x\right)^4 p_i \ = \alpha_4 - 4\alpha_3 m_x + \\ + 6\alpha_2\, m_x^2 \ - 4 m_x\, m_x^3 \ +\ m_x^4 \ = \alpha_4 - 4\alpha_3\, m_x \ + 6\alpha_2\, m_x^2 \ - 3\, m_x^4\,. \qquad (9в)$$

Второй цтр. момент наз. **дисперсией** слн-й вел-ы x и обз-ся

$$\mu_2 = \ D\left[X\right] \ = \ M\left[\left(X - m_x\right)^2\right] = \ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i\ , \qquad (10)$$

а для непр. слн. вел-н

$$D\left[X\right] \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^2 f\left(x\right) dx\ . \qquad (10а)$$

Дсп-ия есть хркс-ка рассеивания (разбросанности) зн-й слн. вел-ы $X$ около ее мт. ож-я.

Вел-а $\sigma\left[X\right] = \sqrt{D\left[X\right]}$ наз. **ср. квадратическим отклонением** (ср. кв. отк.).

**зм3**. Если рсп-ие симметрично (симч.) отс-но мт. ож-ия, то цтр. моменты нечет. порядка равны нулю, т.е. $\mu_s = 0$ при $s$ нечет. и $\mu_s \neq 0$ при $s$ чет-м.

Третий цтр. момент служит для хркс-ки асимметрии (или «скошенности») рсп-ия и обз-ся через $A$ или $S_x = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (рис. 13), в част., если рсп-ие симч. отс-но мт. ож-я, то $S_x = 0$ в силу $\mu_3 = 0$.

Четвертый цтр. момент служит для хркс-ки «крутости» рсп-ия. Это св-во рсп-ия наз. **эксцессом** и обз-ся $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (рис. 14), в част., для норм. рсп-ия $E_x = 0$.

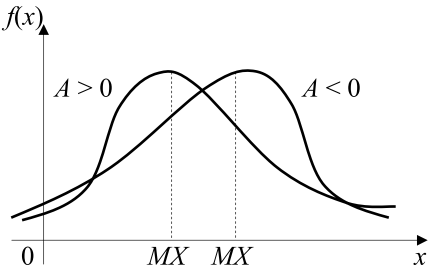


Рис. 13

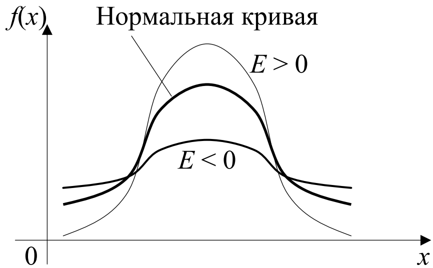


Рис. 14

Теперь рас-им св-ва дсп-и:

**с1**. Дсп-ия пст-ой равна нулю, т.е. $D\left[C\right] = 0$.

Д. $D\left[C\right] \ = \ M\left[\left(C - M\left(C\right)\right)^2\right] = \ M\left[\left(C - C\right)^2\right] = \ M\left[0\right] = 0$ ■

**с2**. Пст. мнж-ль можно выносить за знак дсп-и, возводя его в кв-т, т.е. $D\left[CX\right] = C^2\, D\left[X\right]$.

Д. $D[CX] = M\left[(CX - M[CX])^2\right] = M\left[(CX - CM[X])^2\right] = C^2 M\left[(X - M[X])^2\right] =$
$= C^2 D[X]$ ■

**с3**. Дсп-ия суммы двух незв. слн. вел-н равна сумме дсп-й этих вел-н, т.е. $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$ (д-во см. в [35]). Отсюда с учетом с2 получим

**с4**. $D[X-Y] = D[X] + D[Y]$.

**сл1**. $D[X+Y+...+Z] = D[X] + D[Y] + \ldots + D[Z]$, где $X$, $Y$, …, $Z$ – незв.

**сл2**. $D[C+X] = D[C] + D[X] = D[X]$.

**сл3**. $\sqrt{D[X]} = \sqrt{D[X_1]+...+D[X_n]} \Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(X_1)+...+\sigma^2(X_n)}$, где $X_1$, …, $X_n$ – незв. слн. вел-ы.

**с5**. Дсп. $D[X]$ числа появлений сб. $A$ с вер. $p$ в $n$ незв-х исп-ях равна $npq$, где $q = 1 - p$, т.е. $D[X] = npq$ (д-во см. в [35]).

**п7**. Производится один выстрел по мишени с вер-ю $p$. Найти $m_x$, $D_x$, $\sigma_x$.

Р. $m_x = \sum x_i p_i = 0\cdot q + 1\cdot p = p$, $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0^2 q + 1^2 p - p^2 = p(1-p) =$
$= pq$, $\sigma_x = \sqrt{pq}$ .

**3°. Распределения равномерное, Пуассона, нормальное и показательное**. Рас-им сд. рсп-я.

1*. Говорят, что слн. вел. $X$ в интервале $]\alpha, \beta[$ рсп-на равномерно, если все зн. $x_i \in X$ имеют одинаковую вер-ть (рис. 15), т.е.

$$f(x) = \begin{cases} C \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ 0 \text{ при } x < \alpha,\ x > \beta \end{cases} \quad \text{или } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \alpha < x < \beta, \\ 0, x < \alpha,\ x > \beta \end{cases} \tag{11}$$

$\left(\text{т.к. } C(\beta - \alpha) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\right)$.

Находим фк-ю рсп-ия (рис. 16): $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{x} \dfrac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\, x\Big|_{\alpha}^{x} =$

$= \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ 1 \text{ при } x > \beta. \end{cases} \tag{11a}$$

Выч-им числовые хркс-ки: $m_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \dfrac{x}{\beta - \alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$,

причем $m_x = M_e$, т.е. мт. ож-ие и медиана равны. Моды не имеет. $\mu_2 = D_x =$

$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (x - m_x)^2 f(x) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left( x - \dfrac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$, откуда получим ср. кв. откл-ие $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \dfrac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$. В силу симч-ти рсп-ия его асимметрия равна нулю: $S_x = \dfrac{\mu^3}{\sigma_x^3} = 0$. Для опр-ия эксцесса находим четвертый цтр. момент: $\mu_4 = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left( x - \dfrac{\alpha + \beta}{2} \right)^4 \mathrm{d}x = \dfrac{(\beta - \alpha)^4}{80}$, откуда $E_x = \dfrac{\mu^4}{\sigma_x^4} - 3 = -1{,}2$.

**п8**. Найти вер-ть попадания слн. вел-ы $X$, рсп-ой по закону равномерной плотности, на участок $]a, b[$.

Р. Из рис. 17 ясно, что $P(a < X < b) = (b - a)C = \dfrac{b - a}{\beta - \alpha}$.

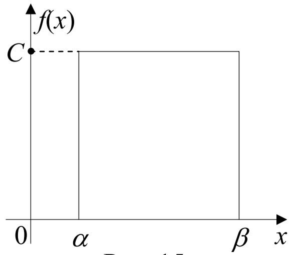


Рис. 15

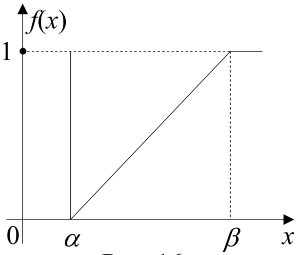


Рис. 16

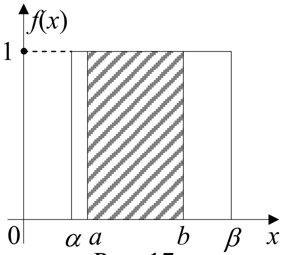


Рис. 17

2*. В 9°: 15.1 фм-у Бернулли прж-но заменили фм-ой (рсп-ем) Пуассона $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$, где $a = np$. Далее рсп-ие Пуассона (рис. 18) обз. так:

$$p_m = P_m(a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{12}$$

Найдем основные хркс-ки и убедимся, что $m_x = a$: $m_x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x p_m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} m \dfrac{a^m}{m!} e^{-a} = a e^{-a} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a e^{-a} e^{a} = a$, т.к. ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a^{m-1}}{m-1} = 1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + \ldots + \dfrac{a^m}{m!} + \ldots = e^a$. Выч-им $\alpha_2 = \sum\limits_{m=0}^{\infty} m^2 p_m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} m^2 \dfrac{a^m}{m!} e^{-a} = a \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} = a \left[ \sum\limits_{m=1}^{\infty} (m-1) \dfrac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} \right] = a[a + 1]$. Тогда $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = a(a + 1) - a^2 = a^2 + a - a^2 = a$. Итак, $m_x = D_x = a$.

**п9**. АТС получает в ср-м за час $k$ вызовов. Найти вер. того, что за данную минуту она получит ровно $m$ вызовов.

Р. Находим $a = \dfrac{k}{60}$. Тогда $p_m = \dfrac{\left(\dfrac{k}{60}\right)^m}{m!}\, e^{-\frac{k}{60}}$.

**зм1**. Если $a$ – ср. число сб-й за ед-у вр., то вер-ть появления $m$ сб-й за вр. $t$ опр-ся фм-ой Пуассона в виде

$$P_m(t) = \frac{(at)^m}{m!}\, e^{-at}. \tag{12a}$$

**п10**. С накаленного катода вылетает в ср-м $q$ электронов за ед-у вр. Найти вер. того, что за промежуток $\Delta t$ с катода вылетит ровно $m$ электронов.

Р. Имеем $a = q\Delta t$, тогда $p_m = \dfrac{(q\Delta t)^m}{m!}\, e^{-q\Delta t}$.

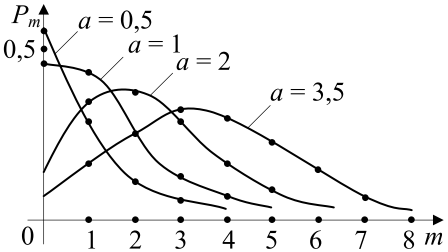


Рис. 18

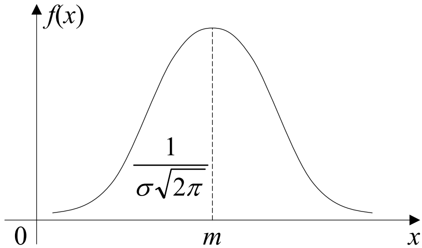


Рис. 19

3*. Нормальный (норм.) закон (или закон Гаусса) яв-ся предельным законом, к к-му прж-ся др. законы (см. 9°: 15.1). Он хркз-ся плотностью рсп-ия вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{13}$$

Крв-я рсп-ия по норм. закону имеет симч. холмообразный вид (рис. 19). При $x = m$ имеем $\max f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При $x \to \pm\infty$ плотность рсп-ия $f(x) \to 0$.

Покажем, что $m$ есть мт. ож-ие, $\sigma$ – ср. кв. отк-ие.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ x = \sigma\sqrt{2}t + m \\ \mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \left(\sigma\sqrt{2}t + m\right)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 0 + m = m,\ \text{т.к.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\ \text{(см. 5°: 4.1 из [35]).}$$

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ x - m = \sigma\sqrt{2}t \\ \mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} u = t,\ \mathrm{d}v = 2te^{-t^2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t,\ v = -e^{-t^2} \end{array} \right| = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\, te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t =$$

$= 0 + \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2$, т.е. $\sigma = \sqrt{D(X)}$ есть ср. кв. откл-ие.

При различном $m$ крв-я рсп-ия передвигается по оси $X$, а форма не меняется (рис. 20). При малом $\sigma$ получаем острый клин, а при большом $\sigma$ – тупой, т.к. пщ-дь под крв-й одинакова (рис. 21).

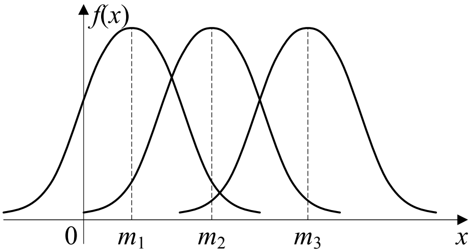


Рис. 20

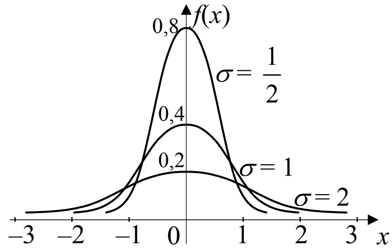


Рис. 21

Выч-им $\mu_s = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ \mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$

$$= \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^s e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-1} te^{-t^2} \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} u = t^{s-1},\ \mathrm{d}v = te^{-t^2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = (s-1)t^{s-2},\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{\sqrt{\pi}} \left\{ -t^{s-1} \cdot \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{s-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} \mathrm{d}t \right\} = \frac{(s-1)\left(\sigma\sqrt{2}\right)^s}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} \mathrm{d}t .$$

$\mu_{s-2} = \dfrac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ . Тогда

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2} = (s-1)\sigma^2 (s-3)\sigma^2 \mu_{s-4} = (s-1)!!\,\sigma^s. \tag{13а}$$

В част., $\mu_0 = 1$ как мт. ож-ие нулевой сп. Из (8) видно, что моменты при нечет. $s$ равны нулю. А при чет. – $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_6 = 15\sigma^6$. Отсюда находим скошенность $S_x = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$, эксцесс $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0$.

Найдем вер-ть попадания слн. вел-ы $X$, подчиненной норм. закону рсп-ия с параметрами $m$, $\sigma$ на участок $\left]\alpha,\beta\right[$, т.е. выч-им:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}\dfrac{x-m}{\sigma}=t;\ x=\alpha;\ t=\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\\ \mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t;\ x=\beta;\ t=\dfrac{\beta-m}{\sigma}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$ – фк. Лапласа (см. 9°: 15.1).

Фк-ия рсп-ия опр-ся по фм-ле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Фк. Лапласа $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ обладает св-ми:

**c1**. $\phi(0)=0$.
**c2**. $\phi(\infty)=0{,}5$.
**c3**. $\phi(-x)=-\phi(x)$, фк. нечет.

Врз-им фк-ю рсп-ия $F(x)$ через фк-ю Лапласа $\phi(x)$:

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=$$

$$=\phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)-\phi(-\infty)=\phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\phi(\infty)=\phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+0{,}5.$$

**п11**. Найти вер. попадания слн. вел. X норм. рсп-ия на участок $\left]m-\delta,m+\delta\right[$.

Р. $$P(m-\delta<X<m+\delta)=P\left(|x-m|<\delta\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{m-\delta}^{m+\delta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}\dfrac{x-m}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\delta}{\sigma}}^{\frac{\delta}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta=3\sigma$, то $2\phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)=2\phi(3)=2\cdot0{,}49865=0{,}9973$, т.е. вер. того, что слн. вел. $X$ выйдет за участок $m\pm3\sigma$, равно 0,0027. Это есть правило «трех сигма», к-ое часто используется на практике.

4*. Показательным (пкзт.) рсп-ем наз. рсп-ие с плотностью рсп-ия вида

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x\ge 0,\end{cases} \qquad (14)$$

где $\lambda$ – пст. плж. вел-а (см. рис. 22).

Из (14) можно найти фк-ю рсп-ия (рис. 23):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot \mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{x}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_0^x=1-e^{-\lambda x}. \qquad (14а)$$

Найдем вер-ть попадания пкзт-но рсп. слн. вел-ы в инр. $]a,b[$ (рис. 24). Учитывая рав-во $f(x)=F'(x)$ (см. (4) из 1°), получим

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \qquad (14б)$$

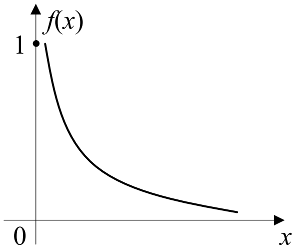


Рис. 22

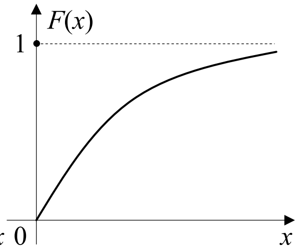


Рис. 23

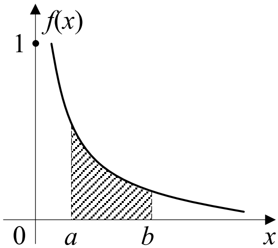


Рис. 24

**п12**. Непр. слн. вел. $X$ рсп-на по пкзт. закону $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2e^{-2x}, & x\ge 0.\end{cases}$ Найти вер. попадания $X$ на участок $]0{,}3;\,1[$.

Р. По (11) имеем: $P(0{,}3<X<1)=e^{-2\cdot 0{,}3}-e^{-2\cdot 1}=0{,}5488-0{,}1353\approx 0{,}41$. Опр-им числовые хркс-ки. Инт-уя по частям, найдем

$$m_x=M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}. \qquad (14в)$$

Учитывая (10а), получим

$$\begin{aligned}D_x=D(X)&=\int_0^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x-m_x^2=\\&=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned} \qquad (14г)$$

Отсюда имеем

$$\sigma_x=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (14д)$$

Сравнивая (14в) и (14д), заключаем, что $M(X)=\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

**п13**. Непр. слн. вел. $X$ рсп-на по пкзт. закону рсп-я $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 5e^{-5x}, \ x \geq 0. \end{cases}$

Найти мт. ож-ие, ср. кв. отк-ие и дсп-ю $X$.

Р. Т.к. $\lambda = 5$, то $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$. $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{5^2} = 0{,}04$.

**зм2**. Пусть на практике изучается пкзт-но рспн-ая слн. вел. $X$, причем парм. $\lambda$ неизвестен. Если мт. ож-ие также неизвестно, то находим выборочную (вбрч.) ср. $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда вместо $\lambda$ берем ее прж. зн-е $\lambda^* = \dfrac{1}{\bar{x}}$.

**зм3**. Пусть предполагается, что слн. вел. $X$ рсп-на пкзт-но. Чтобы проверить эту гипотезу (гп.), находим вбрч. ср-ю и вбрч-ое ср. кв. отк-ие. Если они близки друг к другу, то гп-а подтверждается, иначе – отвергается.

Пкзт. рсп-е широко применяется в прлж-ях, в част., в теории надежности. Рас-им ее подробнее.

Элементом (эл.) наз. нек-ое устройство, незв-мо от того, «простое» оно или «сложное».

Пусть эл-т начинает работать в момент вр. $t_0 = 0$, а по истечении вр. длительностью $t$ происходит отказ. Тогда инт. фк-я (фк-я рсп.)

$$F(t) = P(T < t)$$

опр-ет вер-ть отказа за вр. длительностью $t$.

Отсюда получим вер-ть (противоположного сб. $T > t$) безотказной работы эл-та длительностью $t$

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \qquad (15)$$

к-ая наз. фк-ей **надежности**.

Часто длительность вр-и безотказной работы эл-та имеет пкзт. рсп-е, инт-ая фк. к-го $F(x) = 1 - e^{-\lambda t}$ (см. (14а)). Тогда с учетом (15) получим фк-ю, назм-ую пкзт. законом надежности

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}, \qquad (15а)$$

где $\lambda$ – интенсивность отказов.

**п14**. Вр. безотказной работы эл-та рсп-но по пкзт. закону $f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$ при $t \geq 0$ ($t$ – вр. в часах). Найти вер. того, что эл-т проработает безотказно 100 часов.

Р. По условию пст-я интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. тогда по (15а) имеем $R(10) = e^{-0{,}02\cdot 100} = e^{-2} = 0{,}13534 \approx 0{,}14$.

**4°. Центральные предельные теоремы. Характеристические функции**. Предельные теоремы бывают двух видов:

1) для каждой слн. вел-ы нельзя предвидеть, какое она примет зн. в результате исп-я. Но поведение суммы большого числа слн. вел-н почти утрачивает слн. хрк-р и становится закономерным. Такая закономерность слн. вел-ы наз. «законом больших чисел». Н-р, при бросании монеты частота $P^* = m/n = P(Г)$ появления герба стремится к $P = 1/2$ при $n \to \infty$, т.е. $|P - P^*| < \alpha$, где $\alpha$ – беск. малая вел.;

2) такую же устойчивость (закономерность) имеют и плотность, фк-я рсп-ия. Свк-ть теорем этой группы получила наз-ие «центральной предельной теоремы» (ЦПТ). Н-р, при $n \to \infty$

плотность и фк-я рсп-ия фм-ы Бернулли стремится к плотности и фк-и рсп-ия норм. закона (см. т4а (локальная), т4 (интегральная) из 9°: 15.1).

Из группы ЦПТ здесь приведем без д-ва нерав-во Чебышева, теоремы Чебышева, Бернулли, Пуассона, и Маркова (более подробно, с их д-ми см. в [35]).

**л1** (нерав. Чебышева). Пусть имеется слн. вел. $X$ с мт. ож-ем $m_x$ и дсп-й $D_x$. Каково бы ни было плж. число $\alpha$, вер-ть того, что вел. $X$ отклонится (отк.) от своего мт. ож-я не меньше чем на $\alpha$, огр-на сверху вел-ой $\frac{D_x}{\alpha^2}$, т.е.

$$P(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2}. \qquad (16)$$

**п15**. Дана слн. вел. $X$ с мт. ож-ем и дсп-ей $\sigma^2$. Оценить сверху вер-ть того, что вел. $X$ отк-тся от своего мт. ож-ия не меньше чем на $3\sigma_x$ (см. п11 из 3°).

Р. Здесь $\alpha = 3\sigma_x$. Тогда $P(|X - m_x| > 3\sigma_x) \leq \frac{D_x}{9\sigma_x^2} = \frac{1}{9}$ – грубая оценка, а точная оценка равна 0,0027, т.к. $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) = 0{,}9973$.

Теперь дадим понятие «**сходимость по вероятности**».

Говорят, что вел. $X_n$ сх-ся к вел-е $a$, если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ вер-ть нерав-ва $|X_n - a| < \varepsilon$ с увлечением $n$ неогр-но прж-ся к ед-це, т.е.

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) > 1 - \delta \, (P \approx 1 \text{ почти}), \qquad (17)$$

где $\varepsilon$, $\delta$ – беск. малые вел.

Пусть $X$ слн. вел-а с парм-ми $m_x$, $D_x$. Производится $n$ незв-х опытов с появлением зн-й $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X$, каждая из к-ых рсп-на по тому же закону, что и сама $X$, т.е. $M(X_i) = m_x$, $D(X_i) = D_x$. Найдем мт. ож-ие и дсп-ю ср. арифч-го $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ этих вел-н

$$m_y = M(Y) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n m_x = m_x. \qquad (17а)$$

$$D_y = D(Y) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n D_x = \frac{D_x}{n} \qquad (17б)$$

**т1** (Чебышева). При дт-но большом числе незв. опытов ср. зн-ие нблн. зн-й слн. вел-ы сх-ся по вер-ти к ее мт. ож-ю:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \qquad (18)$$

**сл1** (теорема Бернулли). Пусть производится $n$ незв. опытов, в каждом из к-ых сб. $A$ появляется с вер-ю $p$. Тогда при $n \to \infty$ частота $p^* = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ появления сб. $A$ сх-ся по вер-ти к его вер-ти $p$, т.е.

$$P(|p^* - p| < \varepsilon) > 1 - \delta. \qquad (19)$$

Теорему Чебышева можно обобщить на более сложный случай, когда закон рсп-ия слн. вел-ы $X$ от опыта к опыту изменяется.

**т2** (Чебышева обобщенная). Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы с мтч. ож-ми $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ и дсп-ми $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}$, причем $D_{x_i} < L$, то при взр-и $n$ ср. арифч-ое $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ нблн. зн-й вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сх-ся по вер-ти к ср. арифч-му $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ их мтч. ож-й, т.е.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta. \qquad (20)$$

Из т2 можно получить св-во устойчивости при пер-ых усл-ях опыта, к-ое сформулируем в виде

**сл2** (теорема Пуассона). Если производится $n$ незв. опытов и вер-ть появления сб. $A$ в $i$-ом опыте равна $p_i$, то при увч-и $n$ частота сб-я $A$ сх-ся по вер-ти к ср. арифч-му с вер-ей $p_i$, т.е.

$$P\left(\left|p^*-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)>1-\delta, \qquad (21)$$

где $p^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ – частота появления сб. $A$.

Теорема Пуассона часто используется на практике, н-р, при воздушной стрельбе.

Закон больших чисел можно обобщать и на случай зв-ых слн. вел-н в виде сд-ей

**т3** (Маркова). Если имеются зв-ые слн. вел. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $\dfrac{1}{n^2}\;D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right]\to 0$ при $n\to\infty$, то ср. арифч-ое $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ зн-й слн. вел-н $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сх-ся по вер-ти к ср. арифч-у $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}m_{x_i}$ их мтч. ож-й, т.е.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta. \qquad (22)$$

**п16**. Сколько слг-х надо взять в т2 Чебышева, чтобы с надежностью 96% и точностью до 0,01 выполнялось прж. рав-во $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \approx \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}m_{x_i}$, если считать, что $L = 1$ ($D_x < L$).

Р. Здесь $\varepsilon = 0{,}01$, $\delta = 0{,}04$ и $L = 1$, тогда из $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}m_{x_i}\right|\ge\varepsilon\right) < \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}D_{x_i}}{n^2\varepsilon^2} < \dfrac{nL}{n^2\varepsilon^2} =$ $= \dfrac{L}{n\varepsilon^2} < \delta$ получим $n \ge \dfrac{1}{0{,}04\cdot 0{,}0001} = 250000$ (грубый подсчет, как мы уже отметили). Более точный ответ см. в п22.

**Характеристические функции**. Отметим, что все формы ЦПТ посвящены установлению усл-й, при к-ых возникает норм. закон рсп-ия. Он возникает во всех сл., когда исслм-ая слн. вел. может быть представлена в виде суммы дт-но большого числа незв-ых (или слабо зв-ых) элр. слг-ых, каждое из к-ых в отдельности сравнительно мало влияет на сумму.

Для д-ва наиболее общей формы ЦПТ Ляпунов создал метод хркч. фк-й.

Хркч. фк-ей слн. вел-ы Х наз. фк-ия

$$g(t) = M[e^{itx}], \qquad (23)$$

где $i$ – мнимая ед. Фк-я $g(t)$ представляет собой мтч. ож-ие нек-ой комплексной слн. вел-ы $U = e^{itx}$, функционально (фнц.) связанной с $X$.

При р-и многих задач удобнее пользоваться хркч. фк-ей, чем законами рсп-ия.

Зная закон рсп-ия, легко найти ее хркс-ю фк. Так для дк. слн. вел-ы $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ имеем

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n}e^{itx_k}p_k\,. \qquad (23а)$$

А для непр. слн. вел-ы будем иметь

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx_k}f(x)\mathrm{d}x\,. \qquad (23б)$$

**п17**. Слн. вел. $X$ есть число попаданий при одном выстреле с вер-ю $p$. Найти хркч. фк-ию слн. вел-ы $X$.

Р. $g(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{itx_k} p_k = e^{it\cdot 0}(1-p) + e^{it\cdot 1}p = q + e^{it}p.$

**п18**. Слн. вел. $X$ имеет норм. рсп-ие $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $m = 0$, $\sigma = 1$. Найти ее хркч. фк-ию (использовать инт. Пуассона из 5°: 4.1 [35]).

Р. $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \times$
$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Итак, $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Фм-а (23б) есть прб-ие Фурье, врж-е $g(t)$ через $f(x)$. В свою очередь, $f(x)$ можно выразить через $g(t)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t) \mathrm{d}t. \tag{24}$$

Хркч. фк-и обладают сд. св-ми.

**с1**. Если слн. вел-ы $X$ и $Y$ связаны стн-ем $Y = aX$, где $a$ – неслн. мнж-ль, то их хркс-ие фк-и связаны стн-ем: $g_y(t) = g_x(at)$.

**с2**. Хркч. фк-я суммы незв. слн. вел-н равна пзв-ю хркч. фк-й слг-х.

**п19**. Имеются две незв. слн. вел-ы $X$ и $Y$ с плотностями рсп-ия $f_1(X)$ и $f_2(Y)$. Найти плотность рсп-ия вел-ы $Z = X + Y$.

Р. Находим хркч-ие фк-и $g_x(t)$ и $g_y(t)$ слн. вел-н $X$ и $Y$, откуда получим $g_z(t) = g_x(t)g_y(t)$. Затем по (24) находим $f(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itZ} g_Z(t) \mathrm{d}t$.

Рас-им ЦПТ-у для одинаково рспн. слг-х.

**т4**. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы, имеющие один и тот же закон рсп-ия с мт. ож-ем $m$ и дсп-й $\sigma^2$, то при неогр. увеличении $n$ закон рсп-ия суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неогр-но прж-ся к норм-у.

Рас-им практические применения ЦПТ. Опыт показывает, что когда слг-ых около десяти, закон рсп-ия суммы обычно может быть заменен норм-ым.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незв. слн. вел-ы с мт. ож-ми $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и дсп-ми $D_1, D_2, \ldots, D_n$, а $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 10$. Тогда, в силу т4, вер-ть того, что слн. вел. $Y$ попадет на участок $]\alpha, \beta[$, врж-ся фм-ой

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right), \tag{25}$$

где $m_y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}$. $\Phi(x)$ – норм. фк. рсп-ия.

Стн. (25) верно, когда выполнено условие т4: равномерное малое влияние слг-ых на рассеивание суммы.

Если возьмем нормв-ю сумму $Z = \frac{Y^0}{\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$, для к-ой $M[Z] = 0$, $D[Z] = \sigma_Z = 1$, то

(25) имеет вид

$$P(\alpha < Z < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{25а}$$

Отметим, что все приведенные рассуждения справедливы и для дк-ых слн. вел-н. Частным случаем т4 для дк-ых слн. вел-н яв-ся

**т5** (Лапласа). Если производится $n$ незв-х опытов, в каждом из к-ых сб. А появляется с вер-ю $p$, то верно стн-ие

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{25б}$$

где $Y$ – число появлений сб-ия $A$ в $n$ опытах, $q = 1 - p$ (см. (28) из 9°: 15.1).

**п20**. В полосе укреплений противника сбрасывается 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии мт. ож-ие числа попаданий равно 2, а ср. кв. отк-ие числа попаданий равно 1,5. Найти прж-но вер-ть того, что при сбрасывании 100 серий в полосу попадет от 180 до 220 бомб.

Р. $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ , $X_i$ – число попаданий в $i$-й серии, $m_x = \sum_{i=1}^{100} m_i = 200$, $D = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{100} 1{,}5^2 = 225$.

Тогда $P(180 < X < 220) = \Phi\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \Phi\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) = 0{,}82$, т.е. с вер-ю 0,82 можно утв-ть, что общ. число попаданий не выйдет за пределы $188 \div 220$.

**п21**. Пусть слн. вел-ы в ЦПТ имеют равные мт. ож-ия и дсп-и: $M(X_k) = m$ и $D(X_k) = \sigma^2$ при любом $k$. Найти вер. того, что ср. арифч-ое наступления сб. $A$ отк-ся от мт. ож-я не меньше чем на $\varepsilon$ при $n \to \infty$.

Р. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right| < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$

$= 1 - P\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - 2\,\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Итак,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\,\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{26}$$

Сделаем теперь подсчет для п16, пользуясь более точной оценкой (17).

**п22**. Сколько слг-х надо взять, чтобы с надежностью 96% и точностью $\varepsilon = 0{,}01$ для $\sigma = 1$ выполнялось прж-ое рав. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx m$?

Р. По (24) имеем $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\,\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0{,}04$, т.е. $\Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) > 0{,}48$.

По таблице находим $\Phi(2{,}06) = 0{,}480301$, тогда $\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}06 \Rightarrow n = \left(2{,}06 \cdot \frac{1}{0{,}01}\right)^2 \approx 40000$, т.е. $n$ получилось в 6 раз меньше, чем в п16.

# ЛЕКЦИЯ 44

## 15.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. КОРРЕЛЯЦИЯ

**1°. Основные задачи математической статистики. Выборочный метод**. Мтч. статистика (стс.) есть раздел мт-ки, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений (нбл.) массовых слн. явлений с целью выяснения существующих (сущ.) закономерностей и построения теоретико-вероятностную модель (мд.) изучаемого явления. Цтр. понятием мтч. стс-и яв-ся выборка (вбр.).

Отсюда вытекают осн. задачи мтч. стс-ки:

1) выяснение, какие черты слн. вел-ы яв-ся существенными (сущн.), а какие – не сущн-ми (связанными с огромным кол. опытных данных);

2) проверка правдоподобия гипотез (гп.). Данная задача связана с предыдущей. Н-р, могут ставиться такие задачи: согласуются ли результаты опыта с гп-ой о том, что данная слн. вел. подчинена закону $F(x)$; указывает ли нблм-я в опыте тенденция к зв-ти между двумя слн. вел-ми на наличие объективной зв-и между ними или же она объясняется слн. причинами, связанными с недт-ым объемом нбл-й и т.д.;

3) задача опр-ия неизвестных парм-ов рсп-ия. Здесь возникает нх-ть опр-ия точности и надежности опрм. парм-ов.

Кроме осн-х, мтч. стс-ка р-ет и ряд практических задач, связанных с анализом и контролем (кр.) точности, последовательным (посл.) анализом, теорией инф-и, массового обс-ия, слн. процессов и т.д.

Основные задачи мтч. стс-ки и связь мтч. стс-ки с теорией вер-ти см. также во введении.

Пусть требуется изучить совокупность (свк.) однородных (одн.) объектов отс-но нек-го качественного (качн.) или кол-го признака, хркз-го эти объекты. Н-р, если имеется партия деталей (дт.), то качн. признаком может служить стандартность (стдн.) дт-и, а кол-ым – контролируемый (крум.) размер дт-и.

Иногда проводят сплошное обследование объектов отс-но признака, к-ым интересуются. На практике это не всегда возможно из-за большого кол-ва объектов или разрушения объекта в результате обследования (н-р, при проверке рыбной консервной банки). В таких сл. из свк-ти отбирают огрн. число объектов и изучают их с целью вывода закономерности всей свк.

Выборочной (вбрч.) свк-ю, или просто вбр-ой, наз. свк-ть сл-но отобранных объектов.

Генеральной (гнр.) свк-ю наз. свк-ть объектов, из к-ых производится вбр-ка.

Объемом свк-ти (вбрч-ой или гнр-ой) наз. число объектов свк-ти. Н-р, если из 1000 дт. сл-но отобрано для обследования 100 дт., то объем гнр. свк-ти $N = 1000$, а объем вбр-и $n = 100$.

Вбр-ки бывают повторные (когда отобранный объект перед отбором сд-го возвращается в гнр. свк-ть) и бесповторные (когда объект не возвращается). На практике обычно пользуются бесповторным слн. отбором. Если объем гнр. свк-ти дт-но велик, то различие между повторной и бесповторной вбр-ми стирается.

Чтобы правильно судить о гнр. свк-ти по данным вбр-и, предъявляется сд. требование: вбр. должна быть репрезентативной (представительной). В силу закона больших чисел можно утв-ть, что вбр-ка будет репрезентативной, если все ее объекты из гнр. свк-ти отобраны сл-но, т.е. все объекты имеют одинаковую вер. попасть в вбр-ку.

На практике применяются два способа отбора:

1*. Отбор, не требующий расчленения гнр. свк-ти на части. Сюда относятся:

а) простой слн. повторный отбор. Его можно осуществить различными способами. Н-р, для извлечения $n$ объектов из гнр. свк-ти объема $N$ поступают так: выписывают номера $1 \div N$ на карточках, перемешивают, наугад вынимают одну карточку и объект, имеющий такой же номер, подвергают обследованию; затем карточка (объект) возвращается в пачку (в гнр. свк-ть) и процесс повторяется $n$ раз;

б) простой слн-ый бесповторный отбор. Происходит как описано в а), но без возврата карточки в пачку.

При большом объеме гнр. свк-ти (их объекты все равно пронумерованы) пользуются слн. вбр-ой из готовых табл. «слн. чисел». При появлении одинаковых чисел из табл-ы надо взять только одно из них.

2*. Отбор, при к-ом гнр. свк-ть разбивается на части. Сюда относятся:

а) типичный отбор. Объекты отбираются не из всей гнр. свк-и, а из каждой ее «типической» части. Н-р, если дт-и изготавливают на нескольких станках, то отбор производят из продукции каждого станка в отдельности;

б) механический отбор. При этом гнр. свк-ть «механически» делится на столько групп (гр.), сколько объектов должно войти в вбр-ку, и из каждой гр. отбирается один объект;

в) серийный отбор. Здесь объекты отбирают из гнр. свк-ти не по одному, а «сериями», к-ые подвергаются сплошному обследованию.

На практике применяется и комбинированный отбор, при к-ом сочетаются указанные способы.

**2°. Выборочные распределения. Полигон и гистограмма. Выравнивание статистических рядов**. Пусть из гнр. свк-и извлечена вбр., причем $x_1$ нбл-ось $n_1$ раз, $x_2 - n_2$ раз, …. $x_k - n_k$ раз и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем вбр-ки.

Нблм. зн-я $x_i$ наз. вариантами (врт.), а посл-ть врт-ов, записанных в возрастающем (взрщ.) порядке, – вариационным (врцн.) рядом. Числа нбл-й $n_i$ наз. частотами, а их отн-ия к объему вбр-ки $\frac{n_i}{n} = p_i^*$ – отс. частотами, где $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. Иногда $p_i^*$ наз. плотностью.

Статистическим (стсч.) рсп-ем вбр-ки наз. перечень врт-ов и ств-их им частот или отс. частот (табл. 1). Стсч. вбр-ку можно построить на графике (грф.) Причем ломаная из $\{x_i, n_i\}$ наз. полигоном частот, а $\{x_i, p_i^*\}$ – полигоном отс. частот (рис. 1).

Стсч. рсп-ие можно задать также в виде посл-ти интервалов (инр.) $J_i$ и ств-их им частот (табл. 2). Причем число инр-ов $J_i$ должно быть не слишком большим (рсп-ие не выразительно) и слишком малым (описание грубо), практически 10÷20 считается норм-ым. Обычно длины инр-ов берут одинаковыми, а иногда разной длины: в наибольшей (нб.) плотности инр-ы берут узкими, чем в обл-и малой плотности.

Таблица 1

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 10 | 7 |
| $p_i^*$ | 0,15 | 0,50 | 0,35 |

Таблица 2

| $J_i$ | – 4; – 3 | – 3; – 2 | – 2; – 1 | – 1; 0 | 0; 1 | 1; 2 | 2; 3 | 3; 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 25 | 72 | 133 | 120 | 88 | 46 | 10 |
| $p_i^*$ | 0,012 | 0,050 | 0,144 | 0,266 | 0,240 | 0,176 | 0,092 | 0,020 |

Длину инр-ов обз-им через $h$ и вел-у $n_i/h_i$ наз. плотностью частоты, а $p_i^*/h_i$ – плотностью отс. частоты. Они приведены в табл. 3 при $h = 5 = \text{const}$. Их можно построить на грф-е. При этом ломаная из $\{J_i, n_i/h_i\}$ наз. гистограммой частот (рис. 2), а $\{J_i, p_i^*/h_i\}$ – гистограммой отс. частот.

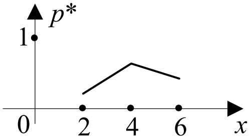



Рис. 1

Таблица 3

| $J_i$, $h = 5$ | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 6 | 16 | 36 | 24 | 10 | 4 |
| $p_i^*$ | 0,04 | 0,06 | 0,16 | 0,36 | 0,24 | 0,10 | 0,04 |
| $n_i/h_i$ | 0,8 | 1,2 | 3,2 | 7,2 | 4,8 | 2,0 | 0,8 |
| $p_i^*/h_i$ | 0,008 | 0,012 | 0,032 | 0,072 | 0,048 | 0,020 | 0,080 |

Эмпирической (стсч-ой) фк-ей рсп-ия (или фк-ей рсп-ия вбр-и) наз-ют фк-ю $F^*(x)$, опрщ-ю для каждого зн. $x$ отс. частоту сб-ия $X < x$, т.е.

$$F^*(x) = P^*(X < x) = \frac{n_x}{n}, \tag{1}$$

где $n_x$ – число врт-ов, меньшее $x$, $n$ – объем вбр-и.

В отличие от $F^*(x)$, интн. фк-ию $F(x) = P(X < x)$ рсп-ия гнр. свк-ти наз. теоретической (теор.) фк-ей рсп-ия. Причем в силу сл1 (теорема Бернулли) из 2°: 2.4 [35] $F^*(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$. И $F^*(x)$ обладает теми же св., что и $F(x)$ (см. 2°: 2.1 из [35]).

Очевидно, что $F^*(x_1) = 0$, $F^*(x_2) = p_1^*$, $F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*$, …, $F^*(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. Соединяя тч-и $\{x_i, F^*(x_i)\}$ плавной крв. (гистограммой), получим прж. грф-к эмпирической (эмп.) фк-и рсп-ия.

**п1**. Произведено 500 измерений (измр.). Результаты измр-й сведены в стсч. ряд (табл. 2). Построить грф. фк-и рсп-ия.

Р. Находим $F^*(-4) = 0$, $F^*(-3) = 0{,}012$, $F^*(-2) = 0{,}012 + 0{,}050 = 0{,}062$, $F^*(-1) = 0{,}062 + 0{,}144 = 0{,}206$, $F^*(0) = 0{,}472$, $F^*(1) = 0{,}712$, $F^*(2) = 0{,}888$, $F^*(3) = 0{,}980$, $F^*(4) = 1{,}000$. Грф. см. на рис. 3.

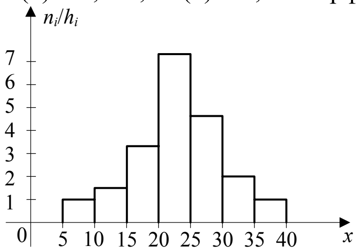



Рис. 2

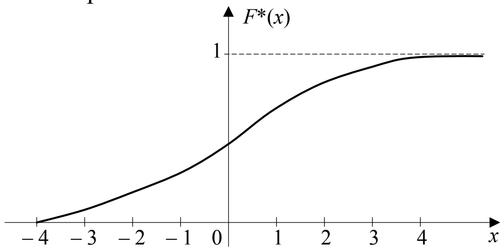



Рис. 3

Во всяком стсч. (вбрч.) рсп-и неизбежно присутствуют эл. слн-ти, связанные с огр-ем кол-ва нбл-й. Нам нх-мо подобрать теор-ю крв-ю рсп-ия, врж-щую лишь сущн. черты стсч. материала, но не слн-ти, связанные с огр-ем кол-ва опытов. Такая задача наз. задачей выравнивания (сглаживания (сгж.)) стсч. рядов.

Эта задача неопр-ая, и ее решение зв-т от того, что условиться считать «наилучшим». Н-р, при сгж-и эмп. зв-ей часто применяется метод нм. кв-ов (кв.) (см. далее), где наилучшим прж. считается обращение в min суммы кв-ов отк-й. При этом вопрос о том, в каком именно классе фк-й следует искать наилучшее прж., р-ся уже не из мтч. соображений, а из соображений, связанных с физикой р-мой задачи, с учетом хрк-ра полученной эмп. крв-й и сп-ни точности произведенных нбл.

Эти рассуждения относятся и к задаче выравнивания стсч. рядов. Н-р, предположим, что исслм-я слн. вел. $X$ есть ошибка измр-я, возникающая в результате суммирования (сумв.) воздействий мн-ва незв. элр. ошибок. Тогда из теор. соображений можно считать, что $X$ подчинена норм. закону

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

и задача выравнивания переходит в задачу о рац. вбр-е парм-ов $m$ и $\sigma$. При этом фк. $f(x)$ должна обладать св-ми: $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Парм-ы $m$ и $\sigma$ подбираются так, чтобы они совпали с стсч. моментами $m^*$ и $\sigma^*$. Если фк. $f(x)$ зв-т от трех парм-ов, то нх-мо, чтобы совпали три момента.

**п2**. Произведено 500 измр-й с результатами ряда из табл. 4. Требуется выровнять это рсп. с помощью норм. закона.

Таблица 4

| $J_i = x$ | – 4; – 3 | – 3; – 2 | – 2; – 1 | – 1; 0 | 0; 1 | 1; 2 | 2; 3 | 3; 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 25 | 72 | 133 | 120 | 88 | 46 | 10 |
| $p_i$* | 0,012 | 0,050 | 0,144 | 0,266 | 0,240 | 0,176 | 0,092 | 0,020 |
| $f(x)$ | 0,004 | 0,025 | 0,090 | 0,199 | 0,274 | 0,234 | 0,124 | 0,041 |

Здесь $f(x)$ выч-ны в левых концах инр-а; выч-им также $f(4) = 0{,}008$.

Р. Находим $m^* = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i\, p_i^* = -\,3{,}5\cdot 0{,}012 - 2{,}5\cdot 0{,}050 - 1{,}5\cdot 0{,}144 - 0{,}5\cdot 0{,}266 + 0{,}5\cdot 0{,}240 + 1{,}5\ \times$
$\times\cdot 0{,}176 + 2{,}5\cdot 0{,}092 + 3{,}5\cdot 0{,}020 = 0{,}168$, $\alpha_2^* = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i^2\, p_i^* =$
$= 2{,}126$. Тогда $D^* = \alpha_2^* - m^{*2} = 2{,}126 - 0{,}028 = 2{,}098$. Выбираем $m = m^* = 0{,}168$, $\sigma^2 = D^* = 2{,}098$ или $\sigma = 1{,}448$.

Отсюда $f(x) = \dfrac{1}{1{,}448\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-0{,}168)^2}{2\cdot 1{,}448^2}}$.

На рис. 4 построена гистограмма и выравнивающая крв.

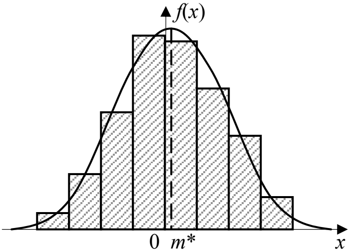


Рис. 4

Кроме того, после выравнивания стсч. рсп-ия с теор. крв-й $f(x)$ может возникнуть вопрос: вызвано ли расхождение между ними слн. обстоятельством, связанным с огр-ем числа опытов, или причина яв-ся сущн-ой, т.е. крв-я плохо выравнивает стсч. рсп-е. Ответом служит «критерий согласия» (см. 4: 15.4).

**3°. Основные распределения статистики (показательное, гамма-рсп., Пирсона, Стьюдента, Фишера)**. Указанные рсп. связаны с норм. рсп-ем. Фк-я плотности норм. рсп-я $f(x)$ с парм-ми $m = 0$, $\sigma = 1$ наз. плотностью стдн-ой норм. слн. вел-ы, а ее график – стдн. крв-й Гаусса (рис. 5). Тогда плотность рсп-я $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = N(0,\, 1)$, зн-я к-ой приведены в табл. $T_1$.

Отсюда получим фк-ю Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, а ее зн-я приведены в табл. $T_2$. Кратко опишем сд. рсп-я, связанные с норм. рсп-ем.

**1***. Распределения показательное, гамма и Вейбулла. Напомним, что пкзт. рсп-ем наз. рсп-ие с плотностью рсп-я вида

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\lambda$ – пст. плж. вел-а (рис. 6 при $\lambda = 1$). Из (3) получим фк-ю рсп-ия:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (3а)$$

и мтч. ож., ср. кв. отк-ие $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, где $\sigma[X] = \sqrt{D(X)}$. Обратно, из

(3а) получим (3): $f(x) = F'(x) = (1 - e^{-\lambda x})' = \lambda e^{-\lambda x}$.

Дадим понятия инт-а Пуассона и гамма-фк-и, к-ые нх-мы в дальнейшем. С помощью полярных крд. выч-им так назм-й инт. Пуассона: $J = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ ①. Т.к. опрн. инт-л не зв-т от обз-ия пер-ой инт-ия, то вместо ① можно взять $J = \int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y$ ②. Перемножая фм-ы ① и ② и расв-ая их как двн. инт-л, будем иметь $J^2 = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int\limits_s e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}s$ ③. Переходя к полярным крд. ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $ds = rd\varphi dr$, рис. 9), получим $J^2 = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi \times$ $\times \int\limits_0^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r = \varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Отсюда, учитывая плж-ть числа $J$, находим $J = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ④. В силу чет-сти фк-и $y = e^{-x^2}$ имеем также $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ и $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ ⑤.

Гамма-фк. $\Gamma$ опр. как инт. $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} x^{\lambda-1}e^{-x}\mathrm{d}x$, $\lambda > 0$ ⑥. Инт-уя по частям, из ⑥ получим $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} x^{\lambda-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^{\lambda-1}, \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (\lambda-1)x^{\lambda-2}\mathrm{d}x, v = -e^{-x}\end{vmatrix} = -x^{\lambda-1}e^{-x}\Big|_0^{\infty} +$ $+ (\lambda - 1)\int\limits_0^{\infty} x^{\lambda-2}e^{-x}\mathrm{d}x = (\lambda - 1)\Gamma(\lambda - 1)$. Откуда следует, что если $\lambda$ – плж. целое число, то $\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1)!$ или $\Gamma(n + 1) = n!$ ($n = 0, 1, \ldots$) при $\lambda = n + 1$ ⑦. Если $\lambda > 0$, но не яв-ся целым числом, то $\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots \delta\Gamma(\delta)$ ⑧, где $0 < \delta < 1$. В част., $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Дсв., из ⑧ и ④ получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Отметим, что гамма-фк. ⑦ связана с фм-й Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, т.е. $\Gamma(n + 1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} = f(n)$ ⑨, где $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{f(n)} = 1$, н-р, для 1!, 2!, 5! получим 0,9221; 1,919; 118,019 с отн. ошибками 8%, 4%, 2%. А для 10! = = 3628800 отн. ошибка равна 0,8%.

Обобщением пкзт. рсп-ия яв-ся гамма-рсп. с плотностью

$$P(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x} \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{4а}$$

Парм-ы $\lambda$ и $\alpha$ могут быть любыми плж. числами. Пст. $C$ опр-ся из стн-я $\int\limits_0^\infty Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = 1$. Учитывая 6 и полагая $\alpha x = z$ $\left(x = \dfrac{z}{\alpha},\ \mathrm{d}x = \dfrac{dz}{\alpha}\right)$, имеем $\int\limits_0^\infty Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty C\dfrac{z^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda-1}}e^{-z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\alpha} = \dfrac{C}{\alpha^\lambda}\int\limits_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z}\mathrm{d}z = \dfrac{C}{\alpha^\lambda}\Gamma(\lambda) = 1$, тогда $C = \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}$.
Сдт-но,

$$P(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

На рис. 7 показан вид крв-х рсп-ия вер-ей (4) при $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$ (при $\lambda = 1$ см. рис. 6).

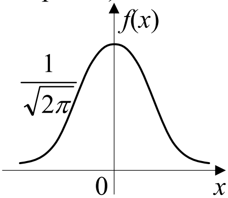


Рис. 5

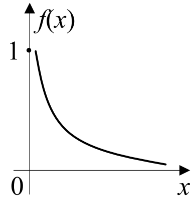


Рис. 6

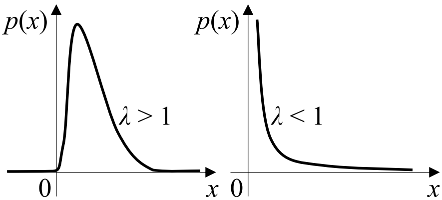


Рис. 7

Пкзт. рсп-ие широко применяется в прлж-ях, в част., в теории надежности. Н-р, пусть эл-т начинает работать в момент $t_0 = 0$, а по истечении вр-и длительностью $t$ происходит отказ. Тогда для плотности рсп-ия

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x},\ t \ge 0,\ \lambda > 0 \end{cases} \tag{5}$$

фк-я (3а) $F(t) = P(T < t)$ опр-ет вер-ть отказа за вр. длительностью $t$. Откуда получим вер-ть безотказной работы эл-та длительностью $t$:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{5а}$$

Из (5а) получим фк-ю, назм-ю. пкзт. законом надежности:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}, \tag{5б}$$

Взяв отн-ие плотности рсп-я к фк-и надежности, получим интенсивность появления отказов (см. (3а) и (3б)):

$$h(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda z}\mathrm{d}z} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \tag{6}$$

Пкзт. рсп-ие применяется в основном при пст-стве интенсивности отказов. А когда вер-ть отказов меняется с течением вр-и, применяется рсп-ие

Вейбулла с интенсивностью отказов:

$$h(t) = \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\eta-1}. \tag{7a}$$

Плотность рсп-я Вейбулла имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\eta}}, & t \ge 0,\ \sigma > 0,\ \eta > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\sigma$ – парм-р масштаба, $\eta$ – парм. формы.

Фк-я рсп-ия Вейбулла

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\eta}}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{8}$$

На рис. 8 изб-но рсп-ие Вейбулла для $\sigma = 1$ и различных $\eta$.

**2***. Распределение Пирсона (хи-квадрат). Пусть $U_k$, $k = \overline{1,n}$, – набор из $n$ незв-х норм-но рсп. слн. вел-н, $U_k \sim N(0, 1)$. Тогда слн. вел-а $X_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} U_k^2$ имеет рсп-ие хи-квадрат ($\chi^2$-рсп.) с $n$ сп-ми свободы, что обз-ся как $X_n \sim \chi^2(n)$.

Слн. вел-а $X_n$ имеет сд. плотность рсп-ия:

$$f(x, n) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ при } x > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} y^{m-1} e^{-y}\,\mathrm{d}y$ – гамма-фк-я (см. 6).

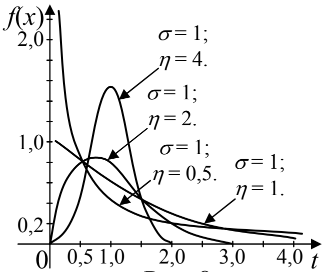


Рис. 8

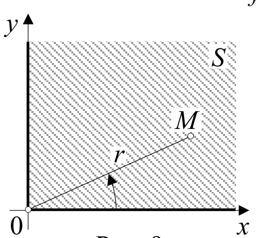


Рис. 9

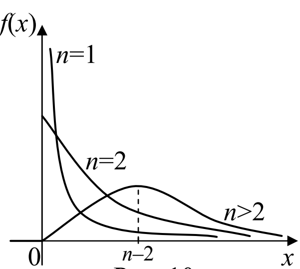


Рис. 10

Грф-и фк-й $f(x, n)$ (рис. 10), назм. крв-ми Пирсона, асимч-ны и начиная с $n > 2$ имеют один max в тч. $x = n - 2$.

Хркч. фк-я слн. вел-ы $X_n$ имеет вид $g(t, n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x, n)\mathrm{d}x = (1 - 2ti)^{-n/2}$.

Слн. вел-а $X_n \sim \chi^2(n)$ имеет сд. моменты: $M[X_n] = n$, $D[X_n] = 2n$.

Рсп-ие хи-кв. обладает св-ом асимпч. норм-сти $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{F} U$ при $n \to \infty$, где слн. вел-а $U$ имеет рсп. $N(0, 1)$. Это означает, что $X_n \sim N(n, 2n)$ (при $n \geq 30$).

**п3**. Приведем пример, в к-ом возникает рсп-ие хи-кв. Пусть вбр-а $Z_n$ ств. норм. рсп-ю $N(m, \sigma^2)$. Рас-им вбрч. дсп-ю $d_X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \hat{m}_X\right)^2$, где $\hat{m}_X$ – вбрч. ср. Тогда слн. вел-а $Y_n \triangleq n\hat{d}_X \big/ \sigma^2$ имеет рсп. $\chi^2(n - 1)$ и не зв-т от $\hat{m}_X$.

**3***. Распределение Стьюдента. Пусть $U$ и $X_n$ – незв. слн. вел-ы $U \sim N(0, 1)$, $X_n \sim \chi^2(n)$. Тогда слн. вел-а $T_n = U\big/\sqrt{X_n/n}$ имеет рсп-ие Стьюдента с $n$ сп-ми свободы, что обз-ют $T_n \sim S(n)$.

Слн. вел-а $T_n$ имеет плотность рсп-я

$$f(t, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{10}$$

Грф-и плотностей $f(t, n)$ (рис. 11), назм. крв-ми Стьюдента, симч-ны при всех $n = 1, 2, \ldots$ отс-но оси ординат.

Слн. вел-а $T_n$ имеет мтч. ож-ие $M(T_n) = 0$ для всех $n \geq 2$ и дсп-ю $D(T_n) = n/(n - 2)$ при $n > 2$. А при $n > 2$ дсп-я $D(T_n) = +\infty$.

При $n = 1$ рсп-ие Стьюдента наз. рсп-ем Коши, плотность к-го равна

$$f(t, 1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + t^2}. \tag{10a}$$

Мтч. ож-ие и дсп-я слн. вел-ы $T_1$ не сущ-ют, т.к. $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = +\infty$, где $I(a) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{t}{t^2 + 1}\mathrm{d}t$.

Можно показать, что при $n \to \infty$ рсп. $S(n)$ асимпч-ки норм-но, т.е. $T_n \xrightarrow{F} U \sim N(0, 1)$. При $n \geq 30$ рсп. Стьюдента $S(n)$ практически не отличается от $N(0, 1)$.

**п4**. Рас-им пример, в к-ом возникает рсп. Стъюдента. Пусть вбр-а $Z_n$ ств-ет норм. рсп-ю $N(m, \sigma^2)$. Пусть $\hat{m}_X$ – вбрч. ср-е, а $\hat{d}_X$ – вбрч. дсп-я. Тогда слн. вел-а $T_n = \sqrt{n-1}\,\frac{\hat{m}_X - m}{\sqrt{\hat{d}_X}}$ имеет рсп. Стьюдента $S(n - 1)$.

**4***. Распределение Фишера. Пусть незв. вел-ы $X_n$ и $X_m$ имеют рсп-ия хи-кв.

со сп-ми свободы ств-но $n$ и $m$. Тогда слн. вел-а $V_{n,m} = \dfrac{X_n/n}{X_m/m}$ имеет рсп. Фишера со сп-ми свободы $n$ и $m$, что записывают как $V_{n,m} \sim F(n, m)$.

Слн. вел. $V_{n,m}$ имеет плотность $f(v, n, m) = 0$ при $v \le 0$ и

$$f(v, n, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nv)^{\frac{n+m}{2}}} \text{ при } v > 0. \qquad (11)$$

Грф-и фк-и $f(v, n, m)$, назм. крв-ми Фишера, асимч-ны и при $n > 2$ достигают своих мкс. зн. в тч-х $v = \dfrac{(n-2)m}{(m+2)n}$, близких к ед-це при больших зн. $n$ и $m$ (рис. 12).

Слн. вел-а $V_{n,m}$ имеет сд. моменты: $M[V_{n,m}] = \dfrac{m}{m-2}$ при $m > 2$, $D[V_{n,m}] = \dfrac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ при $m > 4$.

**п5**. Пусть $Z_n = (X_1, \ldots, X_n)$ – вбр-ка объема $n$, порожденная слн. вел-ой $X$ с норм. рсп-ем $N(m_X, \sigma^2)$, $W_n = (Y_1, \ldots, Y_m)$ – вбр-ка объема $m$, порожденная слн. вел-ой $Y$ с норм. рсп-ем $N(m_Y, \sigma^2)$, и слн. вел-ы $Z_n$ и $W_n$ незв-мы. Тогда слн. вел. $V_{n,m}$, образованная отн-ем «исправленных» вбрч. дсп-й слн. вел-н $X$ и $Y$, т.е. $V_{n,m} \triangleq \dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{m}_X)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(X_j - \hat{m}_Y)^2}$, имеет рсп-ие $F(n-1; m-1)$.

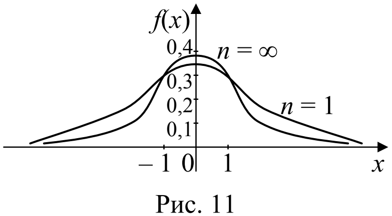



Рис. 11

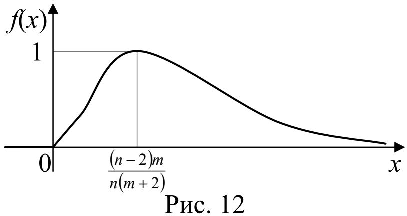



Рис. 12

**4°. Статистические оценки параметров распределения. Интервальные оценки**. Если над слн. вел-ой $\xi$ произведено $n$ незв. опытов, в результате к-ых получены зн-я $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то после равноточных измр-й оценкой мтч. ож-я $m_\xi$ служит ср. арифч-ое результатов $n$ опытов, т.е.

$$\tilde{m}_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a), \qquad (12)$$

где $a$ – новое нач. крд-т, вводимое для упрощения расчетов.

В случае неравноточных измр-й имеем средневзвешенное результатов $n$

опытов:

$$\tilde{m}_\xi = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} g_i \ , \tag{12а}$$

где $g_i = 1\big/\sigma_{\xi_1}^2$ – вес $i$-го измр-я.

При равноточных и неравноточных измр-ях ср. квч. отк-я оценки $\tilde{m}_\xi$ имеют ств. вид:

$$\sigma_{\tilde{m}_\xi} = \sigma_\xi \big/ \sqrt{n} \ ; \ \sigma_{\tilde{m}_\xi} = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)^{-1} . \tag{12б}$$

При неизвестном зн. мтч. ож-я несмещенная оценка дсп-и

$$\tilde{D}_\xi = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2 - \frac{n}{n-1} \left(\tilde{m}_\xi - a\right)^2 . \tag{13}$$

При известном мтч. ож-и $m_\xi$ несмещенная оценка дсп-и

$$\tilde{D}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_\xi\right)^2 . \tag{13а}$$

Пусть над системой двух слн. вел. ($\xi$, $\eta$) при одинаковых усл. производится $n$ незв. опытов и ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$), …, ($x_n$, $y_n$) – результаты этих опытов. Тогда оценки для мтч. ож-й $m_\xi$, $m_\eta$ и дсп-й $D_\xi$, $D_\eta$ опр-ся по фм-ам (12) и (13) ств-но. Оценками корреляционного (крцн.) момента $K_{\xi\eta}$ и коэф-а корреляции (крц.) $\rho_{\xi\eta}$ при неизвестных мтч. ож-ях $m_\xi$ и $m_\eta$ служат:

$$\tilde{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)\left(y - \tilde{m}_\eta\right); \ \tilde{\rho}_{\xi\eta} = \frac{\tilde{K}_{\xi\eta}}{\tilde{\sigma}_\xi \tilde{\sigma}_\eta} . \tag{14}$$

При известных мтч. ож-ях $m_\xi$ и $m_\eta$ оценками дсп-й и крцн. момента яв-ся:

$$\tilde{D}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_\xi\right)^2 ; \tilde{D}_\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - m_\eta\right)^2 ; \tilde{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_\xi\right)\left(y_i - m_\eta\right). \tag{14а}$$

При большом числе опытов над системой вел-н ($\xi$, $\eta$) одно и то же зн. $x_i$ может встретиться $m_i$ раз, одно и то же зн. $y_j$ – $m_j$ раз, одна и та же пара чисел ($x_i$, $y_j$) – $r_{ij}$ раз. Поэтому данные группируют и записывают в виде табл. 5, к-ю наз. крцн. табл-й.

Таблица 5

| $y$ \ $x$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_l$ | $m_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $r_{11}$ | $r_{21}$ | … | $r_{l1}$ | $m_1$ |
| $y_2$ | $r_{12}$ | $r_{22}$ | … | $r_{l2}$ | $m_2$ |
| . . . . . . | | | | | |
| $y_k$ | $r_{1k}$ | $r_{2k}$ | … | $r_{lk}$ | $m_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_l$ | $N = \sum_{i=1}^{l} n_i = \sum_{j=1}^{k} m_j$ |

Одним из важнейших методов отыскания оценок парм-ов рсп-я по данным опыта яв-ся метод наибольшего правдоподобия, к-ый сводится к сд-му.

Пусть плотность вер-ти слн. вел-ы $\xi$ содержит один подлежащий оценке парм. $\theta$: $f(x) = f(x;\ \theta)$. Фк-ей правдоподобия для оценки этого парм. наз. фк-я

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = f(x_1;\ \theta)f(x_2;\ \theta)\ldots f(x_n;\ \theta), \qquad (15)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – нблн. зн-я слн. вел-ы $\xi$.

Если слн. вел-а $\xi$ – дк. с возможными зн. $x_1, x_2, \ldots, x_r$ с кол-ом зн-й ств-но $m_1, m_2, \ldots, m_r$, то

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = P_1^{m_1}(\theta)P_2^{m_2}(\theta)\ldots P_r^{m_r}(\theta), \qquad (15а)$$

где $P_i(\theta) = P(\xi = x_i)$.

За оценку мкс. правдоподобия парм-а $\theta$ принимаются р-я ур-я правдоподобия $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$, обращающую фк-ю $L$ в мкс-ум.

Доверительным (дврт.) интервалом (инр.) наз. инр-л, к-ый с заданной дврт. вер-ю (надежностью) покрывает оцениваемый парм-р $a$.

Ширина $2\varepsilon$ симчн. дврт-го инр-а опр-ся усл-ем $P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta$, где $\tilde{a}$ – оценка парм-а, а вер-ть $P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon)$ опр-ся законом рсп-я оценки $\tilde{a}$.

Если слн. вел. $\xi$ имеет норм. рсп-ие, причем ср. квч. отк-ие $\sigma_\xi$ этого рсп-я известно, то дврт. вер-ть $\beta$ мтч. ож-я опр-ся фм-й

$$\beta = P(|\tilde{m}_\xi - m_\xi| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\xi}\right) = \Phi(t), \qquad (16)$$

где $t = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma_\xi$.

Если задана дврт. вер-ть $\beta$, то из ур. $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_\xi\right) = \beta$ по Т$_2$ находим $\varepsilon =$ $= t_\beta \dfrac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}}$, где зн-ие $t_\beta$ уд-ет рав-ву $\Phi(t_\beta) = \beta$.

Через вел-у $t_\beta$ дврт. инр-л при заданной дврт. вер-ти врж-ся виде

$$\left(\tilde{m}_\xi - t_\beta \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}};\ \tilde{m}_\xi + t_\beta \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}}\right). \qquad (16а)$$

Дврт. вер-ть $\beta$ для мтч. ож-я при известном $\sigma_\xi$ опр-ся фм-ой

$$\beta = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S(t,n)\,\mathrm{d}t, \qquad (17)$$

где $S(t,n) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ – рсп. Стьюдента; $t = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\xi} = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)^2}}$.

Здесь вместо $n$ взяли $n - 1$ (см. (10)).

По заданным $t_\beta$ и $n$ можно найти вер-ть $\beta$ по Т$_6$. Обратно, по заданным $\beta$ и $n$ можно найти $t_\beta$ и построить дврт. инр-л:

$$\left(\widetilde{m}_\xi - t_\beta \frac{\widetilde{\sigma}_\xi}{\sqrt{n}};\ \widetilde{m}_\xi + t_\beta \frac{\widetilde{\sigma}_\xi}{\sqrt{n}}\right), \tag{18}$$

покрывающий неизвестное мтч. ож-ие $m_\xi$ с надежностью $\beta$. Дврт. инр-л для дсп-и $D_\xi$ при заданной дврт. вер-ти $\beta$ имеет вид $\left(\frac{\widetilde{D}_\xi(n-1)}{\chi_2^2};\ \frac{\widetilde{D}_\xi(n-1)}{\chi_1^2}\right)$, где $\widetilde{D}_\xi$ выч-ся по фм-е (13), а $\chi_1^2$ и $\chi_2^2$ опр-ся при $k = n - 1$ по Т$_8$ из рав-в

$$P\left(\chi_1^2\right) = (1 + \beta)/2;\ P\left(\chi_2^2\right) = (1 - \beta)/2. \tag{19}$$

Вел-а $\frac{(n-1)\widetilde{D}_\xi}{D_\xi}$ подчиняется закону рсп-я $\chi^2$ с $k = n - 1$ сп-ми свободы.

Дврт. инр-л и дврт. вер-ть ср. квч. отк-я опр-ся из рав-ва

$$P\left(\frac{\widetilde{\sigma}_\xi\sqrt{n-1}}{\chi_2} < \sigma_\xi < \frac{\widetilde{\sigma}_\xi\sqrt{n-1}}{\chi_1}\right) = \beta. \tag{20}$$

**п6**. Произведено 20 измр-й нач. скр-и ракеты $x_i$ (м/с). Результаты измр-й представлены в виде ряда в табл. 6.

Таблица 6

| $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1582,9 | 6 | 1585,2 | 11 | 1587,5 | 16 | 1584,3 |
| 2 | 1586,2 | 7 | 1583,3 | 12 | 1584,8 | 17 | 1585,4 |
| 3 | 1585,6 | 8 | 1584,2 | 13 | 1585,4 | 18 | 1583,6 |
| 4 | 1587,3 | 9 | 1586,4 | 14 | 1586,1 | 19 | 1587,5 |
| 5 | 1584,6 | 10 | 1585,8 | 15 | 1587,5 | 20 | 1584,9 |

Найти оценки мтч. ож-я, дсп-и и ср. квч. отк-я нач. скр-и ракеты.

Р. Для выч-я оценки мтч. ож-я нач. скр-и ракеты воспользуемся фм-ой (12). Сост. табл. 7, полагая $a = 1585$.

Таблица 7

| $i$ | $x_i - a$ | $i$ | $x_i - a$ | $i$ | $x_i - a$ | $i$ | $x_i - a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – 2,1 | 6 | 0,2 | 11 | 2,5 | 16 | – 0,7 |
| 2 | 1,2 | 7 | – 1,7 | 12 | – 0,2 | 17 | 0,4 |
| 3 | 0,6 | 8 | – 0,2 | 13 | 0,4 | 18 | – 1,4 |
| 4 | 2,3 | 9 | 1,4 | 14 | 1,1 | 19 | 2,5 |
| 5 | – 0,4 | 10 | 0,8 | 15 | 2,5 | 20 | – 0,1 |

Найдем оценку мтч. ож-я: $m_\xi = 1585 + \frac{1}{20}(- 2{,}1 + 1{,}2 + 0{,}6 + 2{,}3 - 0{,}4 + {}$ ${}+ 0{,}2 - 1{,}7 - 0{,}2 + 1{,}4 + 0{,}8 + 2{,}5 - 0{,}2 + 0{,}4 + 1{,}1 + 2{,}5 - 0{,}7 + 0{,}4 - 1{,}4 + 2{,}5 -{}$ ${}- 0{,}1) = 1585 + \frac{1}{20}\cdot 9{,}1 \approx 1585{,}5$ м/с.

Оценку дсп-и нач. скр-и ракеты выч-им по фм-е (13): $\widetilde{D}_\xi = \frac{1}{19}$ (4,41 + 1,44 + + 0,36 + 5,29 + 0,16 + 0,04 + 2,89 + 0,04 + 1,96 + 0,64 + 6,25 + 0,04 + 0,16 + 1,21 + + 6,25 + 0,49 + 0,16 + 6,25 + 0,01) – $\frac{20}{19}\cdot 0{,}5 = \frac{1}{19}\cdot 38{,}05 - 0{,}52 \approx 1{,}48$ м²/с².

Оценка для ср. квч. отк-я нач. скр-и ракеты $\widetilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\widetilde{D}_\xi} = \sqrt{1{,}48} \approx 1{,}2$ м/с.

**п7**. По результатам измр-й, приведенных в п6, найти: а) дврт. инр-л для мтч. ож-я нач. скр-и ракеты с надежностью 0,98; б) дврт. инт-ы для дсп-и ср. квч. отк-я с надежностью 0,8.

Р. а) Инр-л (18) яв-ся дврт. инр-ом для мтч. ож-я с надежностью $\beta$ при неизвестном ср. квч. отк-и. По результатам р-я п6 $\widetilde{m}_\xi = 1585{,}5$, $\widetilde{\sigma}_\xi = 1{,}2$.

Из $T_5$ при $k = n - 1 = 19$ и $\beta = 0{,}98$ опр-ем $t_\beta = 2{,}54$. Тогда $\varepsilon = t_\beta \frac{\widetilde{\sigma}_\xi}{\sqrt{n}} =$ $= 2{,}54 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{20}} \approx 0{,}67$.

Т.о., инр-л (1584,83; 1586,17) накрывает тч-у $m_\xi$ с вер-ю 0,98.

б) Построим сначала дврт. инр-л для дсп-и. Воспользуемся фм-ми (19) при $\beta = 0{,}8$: $P\left(\chi_1^2\right) = \frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}9$; $P\left(\chi_2^2\right) = \frac{1-0{,}8}{2} = 0{,}1$. Из $T_7$ при $k = 19$ получаем: $\chi_1^2 = 11{,}65$, $\chi_2^2 = 27{,}2$. Сдт-но, при $D_\xi = 1{,}48$ и $n - 1 = 19$ находим: $\frac{\widetilde{D}_\xi(n-1)}{\chi_2^2} = \frac{1{,}48\cdot 19}{27{,}2} \approx 1{,}03$; $\frac{\widetilde{D}_\xi(n-1)}{\chi_1^2} = \frac{1{,}48\cdot 19}{11{,}65} \approx 2{,}41$. Т.о., инр-л (1,03; 2,41) накрывает искомую тч. $D_\xi$ с вер-ю 0,8.

По фм. (20) и предыдущим расчетам, найдем: $\sigma_1 = \frac{\widetilde{\sigma}_\xi\sqrt{n-1}}{\chi_2} = \frac{1{,}2\sqrt{19}}{\sqrt{27{,}2}} \approx 1$;

$\sigma_2 = \frac{\widetilde{\sigma}_\xi\sqrt{n-1}}{\chi_1} = \frac{1{,}2\sqrt{19}}{\sqrt{11{,}65}} \approx 1{,}55$. Итак, инр-л (1; 1,55) накрывает искомую тч. $\sigma_\xi$ с вер-ю 0,8.

**п8**. Методом мкс-го правдоподобия найти оценку парм-а $\lambda$ пкзт-го рсп-я по вбр-е $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и д-ть несмещенность этой оценки.

Р. Фк-я правдоподобия для оценки парм. $\lambda$ пкзт. рсп-я имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1}\lambda e^{-\lambda x_2}\ldots\lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i}.$$

Лгр-уя фк-ю правдоподобия, имеем $\ln L = n\ln\lambda - \lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i$.

Диф-уя по неизвестному парм. $\lambda$ и приравнивая к нулю, получаем ур. правдоподобия $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = n\dfrac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, р-ем к-го отс-но $\lambda$ яв-ся $\lambda = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i$ .

Т.к. мтч. ож-ие слн. вел-ы $\xi$, имеющей пкзт. рсп., есть вел-а, обратная парм-у $\lambda$, полученная оценка яв-ся несмещенной: $M\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = M\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$ .

**5°. Обработка результатов наблюдений методом наименьших квадратов**. Метод нм. кв-ов применяется для нахождения оценок парм-ов фнц-ой зв-ти между пер-ми, зн-ия к-ых опр-ся из опыта. Вид искомой фнц. зв-и предполагается известным.

Сущность метода нм. кв-ов заключается в сд-ем. Пусть зв-ть $y$ от $x$ врж-ся фм-ой $y = f(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_m)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – подлежащие опр-ю парм-ы.

В результате $n$ незв. опытов получены сд. данные: $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_n \end{array}$.

Согласно методу нм. кв-ов, невероятнейшее зн. парм-ов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ дает min фк-и $S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\left(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_m\right)\right)^2$ . Поэтому парм-ы находим из системы ур-й с $m + 1$ неизвестными: $\dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0$; $\dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0$; …; $\dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0$. Н-р, если фк-я имеет вид мчл-а $f(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ ($m \le n$), то оценки его коэф-ов $\tilde{a}_k$ ($k = \overline{0, m}$) опр-ся из сиситемы $m + 1$ лин. ур-й:

$$\left.\begin{array}{r} a_0 n + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \ldots + a_m\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Более подробно о методе нм. кв-ов см. в [35].

**п9**. В результате расчетного эксперимента (эксп.) получена сд. зв-ть между вел-ми. Отк-я напряжения $U$ на трансформаторной подстанции и н/х-го ущерба $Y$ от отк-я напряжения всех потребителей этой подстанции (табл. 8):

Таблица 8

| $Y$, р. | 6 | 5,5 | 5 | 4,5 | 3 | 2 | 2,5 | 3, | 4,5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U$, % | 0,5 | 1 | 1,5 | 2,5 | 3 | 3,5 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Методом нм. кв-ов подобрать парм-ы зв-ти $Y = F(U)$, представив ее парб-й второго порядка $Y = aU^2 + bU + c$, отвечающей эксп-ой зв-ти, и опр-ть по ней ущерб при $U = 4\%$.

Р. Для нахождения коэф-ов $a$, $b$, $c$ сост-им систему вида (21):

$$\left.\begin{aligned} cn + b\sum_{i=1}^{n} U_i + a\sum_{i=1}^{n} U_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i; \\ c\sum_{i=1}^{n} U_i + b\sum_{i=1}^{n} U_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} U_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i U_i; \\ c\sum_{i=1}^{n} U_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} U_i^3 + a\sum_{i=1}^{n} U_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i U_i^2. \end{aligned}\right\}$$

Подс-в в эту систему табличные данные, получим:

$$\left.\begin{aligned} 10c + 38b + 205a &= 43; \\ 38c + 205b + 1286a &= 162{,}25; \\ 205c + 1286b + 8694{,}25a &= 936{,}875. \end{aligned}\right\} \qquad (21а)$$

Р-ив систему (21а) с точностью до сотых долей, найдем: $a = 0{,}26$, $b = -2{,}19$, $c = 7{,}28$, т.е. $Y = 0{,}26U^2 - 2{,}19U + 7{,}28$. Подс-в зн-ие $U = 4$, опр-им интересующий нас ущерб: $Y = 2{,}68$ р.

**6°. Элементы теории корреляции**. Слн. вел-ы $\xi$ и $\eta$ находятся в крцн. зв-и, если каждому зн. одной из них ств-ет нек-ое рсп. другой.

Нб-е важной хркс-ой стохастической связи яв-ся зв-ть, вржщ-я ср-е зн. усн-го рсп-я одной слн. вел-ы при изм-и другой.

Усн-ым мтч. ож-ем дк-ой слн. вел-ы $\xi$ при $\eta = y$ ($y$ – нек-ое возможное зн. слн. вел-ы $\eta$) наз. сумма пзв-й возможных зн-й $\xi$ на их усн. вер-ти:

$$M(\xi/\eta = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i / y). \qquad (22)$$

Для непр-ой слн. вел-ы

$$M(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x/y)\,\mathrm{d}x, \qquad (22а)$$

где $f_\xi(x/y)$ – усн. плотность вер-ти слн. вел-ы $\xi$ при $\eta = y$.

Анч-но опр-ся усн-ое мтч. ож-ие $M(\eta/\xi = x)$ слн. вел-ы $\eta$.

Из опр-я усн-го мтч. ож-я $M(\xi/\eta = y)$ следует, что с изм-ем $y$ будет изм-ся и $M(\xi/\eta = y)$. Это значит, что мы можем расв-ть фк-ю $m_\xi(y) = M(\xi/\eta = y)$ от $y \in \eta$. Фк-ю $m_\xi(y)$ наз-ют фк-ей регрессии (рег.) первого рода или модельной (мдн.) фк-ей рег-и $\xi$ на $\eta$ (рис. 13).

Анч-но усн-ое мтч. ож-ие $M(\eta/\xi = x)$ яв-ся фк-ей от $x \in \xi$, т.е. $m_\eta(x) = M(\xi/\eta = x)$, к-ая носит название мдн. рег-и $\eta$ на $\xi$ (рис. 13).

Ур-ия

$$m_\xi(y) = M(\xi/\eta = y);\ m_\eta(x) = M(\xi/\eta = x) \qquad (23)$$

наз. ур-ми рег-и первого рода ств-но $\xi$ на $\eta$ и $\eta$ на $\xi$. Линии, опрм-ые ур-ми (23), наз. мдн-ми линиями рег-и (рис. 14).

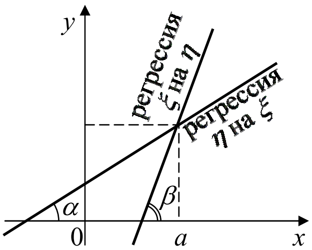



Рис. 13

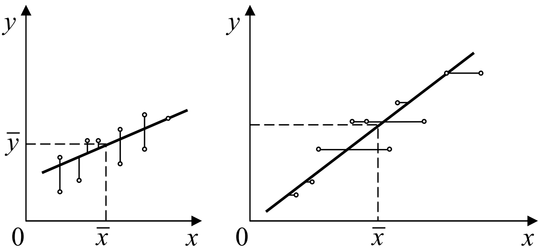



Рис. 14

Если обе линии рег-и $\xi$ на $\eta$ и $\eta$ на $\xi$ пм-ые, крц-ю наз-ют линейной (лин.). В случае лин. крц-и они проходят через центр рсп-я ($m_\xi$, $m_\eta$) системы слн. вел-н ($\xi$, $\eta$). Заметим, что для норм-но рспн-ой системы слн. вел-н ($\xi$, $\eta$) линиями рег-и яв-ся пм-ые.

Ур-ия пм-х рег-и имеют вид:

$$y - m_\eta = \rho_{y/x}(x - m_\xi);\ x - m_\xi = \rho_{x/y}(y - m_\eta). \tag{23а}$$

Угл. коэф-ы пм-х рег-и $\rho_{y/x}$ и $\rho_{x/y}$ наз-ют коэф-ми лин. рег-и ств-но $\eta$ на $\xi$ и $\xi$ на $\eta$ (рис. 13). Коэф-ы лин-й рег-и врж-ся через числовые хркс-ки системы ($\xi$, $\eta$) сд. образом: $\rho_{y/x} = K_{\xi\eta}\big/\sigma_\xi^2$; $\rho_{x/y} = K_{\xi\eta}\big/\sigma_\eta^2$. Учитывая, что коэф-т крц-и $\rho_{\xi\eta} = K_{\xi\eta}\big/(\sigma_\xi\sigma_\eta)$, имеем

$$\rho_{y/x} = \rho_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi};\ \rho_{x/y} = \rho_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}. \tag{24}$$

Перемножая правые числа рав-в (24), после извлечения корня получим

$$\rho_{\xi\eta} = \pm\sqrt{\rho_{y/x}\rho_{x/y}}, \tag{24а}$$

т.е. коэф-т крц-и есть ср. геомч-ое коэф-ов лин-й рег-и. Заметим, что, если $\rho_{\xi\eta} > 0$, то пм-ые рег-и наклонены вправо, если $\rho_{\xi\eta} < 0$, – влево. Если $\rho_{\xi\eta} = 1$, то пм-ые рег-и сливаются в одну пм. и слн. вел-ы $\xi$ и $\eta$ связаны между собой лин. зв-ю $\eta = a\xi + b$. Если $\rho_{\xi\eta} = 0$, то пм-ые рег-и проходят прл-но осям крд. В этом случае $\xi$ и $\eta$ некоррелированны (некрв.); в част-и, так будет всегда, когда $\xi$ и $\eta$ незв-мы, однако обратного заключения сделать нельзя, т.е. слн. вел-ы $\xi$ и $\eta$ могут быть связаны нек-ой фнц-ой зв-ю, а коэф-т крц-и $\rho_{\xi\eta} = 0$.

Вбрч-ые ур-я пм-х рег-и имеют вид:

$$y - \tilde{m}_\eta = \tilde{\rho}_{\xi\eta}\frac{\tilde{\sigma}_\eta}{\tilde{\sigma}_\xi}\left(x - \tilde{m}_\xi\right);\ x - \tilde{m}_\xi = \tilde{\rho}_{\xi\eta}\frac{\tilde{\sigma}_\xi}{\tilde{\sigma}_\eta}\left(y - \tilde{m}_\eta\right), \tag{25}$$

где $\tilde{m}_\xi$, $\tilde{m}_\eta$ – оценки мтч. ож-й ств-но для $m_\xi$ и $m_\eta$; $\tilde{\sigma}_\xi$, $\tilde{\sigma}_\eta$ – оценки ср. квч-х отк-й для $\sigma_\xi$ и $\sigma_\eta$; $\tilde{\rho}_{\xi\eta}$ – оценка для коэф-та крц-и $\rho_{\xi\eta}$. Фм-ы для получения этих оценок приведены в 4°.

Если грф-к рег-и изб-ся крв-й линией, крц-я наз криволинейной (крвл.). При крвл. крц-и коэф-т крц-и только с нек-ым прж-ем может расв-ся как показатель силы связи между слн. вел-ми $\xi$ и $\eta$. В этом случае за силу зв-ти $\xi$ и $\eta$ принимают отн-ие ср. квч-го отк-я усн-го мтч. ож-я $\widetilde{Y}_x = M(\xi/\eta = x)$ отс-но мтч. ож-я $m_\eta$ к ср. квч. отк-ю $\sigma_\eta$. Эта вел. наз. крцн-ым отн-ем $\eta$ к $\xi$ и обз-ся $\eta_{y/x}$. Анч-но вводится $\eta_{x/y}$.

Т.о., если рсп-ие слн. вел-н $\xi$ и $\eta$ задается крцн-ой табл. 5, то

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma\left(\widetilde{Y}_x\right)}{\sigma_\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} n_i\left(\widetilde{Y}_{x_i} - m_y\right)^2}{\sum_{j=1}^{k} m_j\left(y_j - m_y\right)^2}}\ ; \eta_{x/y} = \frac{\sigma\left(\widetilde{Y}_x\right)}{\sigma_\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} m_j\left(\widetilde{Y}_{y_j} - m_x\right)^2}{\sum_{i=1}^{l} n_i\left(x_i - m_x\right)^2}}\ . \quad (26)$$

Крцн. отн-ие обладает сд. св-ми:

1. $0 \le \eta_{y/x} \le 1$, $0 \le \eta_{x/y} \le 1$.

2. $|\rho_{\xi\eta}| \le \eta_{y/x}$, $|\rho_{\xi\eta}| \le \eta_{x/y}$.

3. Нх-ое и дт-ое усл-ие отсутствия крцн. зв-ти слн. вел-ы $\eta$ от слн. вел-ы $\xi$ состоит в том, что $\eta_{y/x} = 0$.

4. Если крцн. отн-ие $\eta_{y/x} = 1$, между слн. вел-ми сущ-ет фнц. зв-ть: $\eta = \varphi(\xi)$.

5. Если $U = \alpha(\xi - x_0)$, а $V = \beta(\eta - y_0)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, то $\eta_{V/U} = \eta_{y/x}$ и $\eta_{U/V} = \eta_{x/y}$.

**п10**. Измр-ась чувствительность видео- и звукового каналов первой программы 20 телевизоров. Данные измр-й (в микровольтах) приведены ниже (первое (второе) из чисел пары - чувствительность видеоканала (звукоканала) каждого телевизора):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 400-140 | 340-160 | 480-160 | 320-120 |
| 420-170 | 500-240 | 430-270 | 540-260 |
| 450-110 | 450-100 | 420-190 | 450-280 |
| 380-160 | 280-150 | 410-200 | 320-130 |
| 540-180 | 310-120 | 500-180 | 460-200 |

Найти ср. чувствительность видеоканала ($\xi$) и звукоканала ($\eta$) телевизоров, ср. квч. отк-ие чувствительности каждого из каналов и вбрч. коэф-т крц-и чувствительности обоих каналов. Написать вбрч. ур-ие лин. рег-и $\xi$ на $\eta$.

Р. Оценки для $m_\xi$ и $m_\eta$ найдем по фм-ам $m_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ; $m_\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ .

Подс-в числ. зн-я, получим: $m_\xi = \frac{1}{20}$ (400 + 420 · 2 + 450 · 3 + 380 + 540 · 2 + + 340 + 500 · 2 + 280 + 310 + 480 + 430 + 410 + 320 · 2 + 460) = 420; $m_\eta = \frac{1}{20} \times$ × (140 + 170 + 110 + 160 · 3 + 180 ·2 + 240 + 100 + 150 + 120 · 2 + 270 + 190 + + 200 + 260 + 280 · 2 + 130) = 180.

При неизвестных мтч. ож-ях $m_\xi$ и $m_\eta$ оценками для ср. квч-х отк-й будут:

$$\widetilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widetilde{m}_\xi\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(x_i - 420\right)^2} \approx 76;$$

$$\widetilde{\sigma}_\eta = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widetilde{m}_\eta\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(y_i - 180\right)^2} \approx 57{,}8.$$

Используя фм-у оценки для крцн. момента при неизвестных мтч. ож-ях $m_\xi$ и $m_\eta$, найдем $\widetilde{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widetilde{m}_\xi\right)\left(y_i - \widetilde{m}_\eta\right) = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 420\right)\left(y_i - 180\right) = 589{,}47.$

Сдт-но, вбрч. коэф-т крц-и слн. вел-н $\xi$ и $\eta$ $\widetilde{\rho}_{\xi\eta} = \dfrac{\widetilde{K}_{\xi\eta}}{\widetilde{\sigma}_\xi\widetilde{\sigma}_\eta} = \dfrac{589{,}47}{76\cdot 57{,}8} \approx 0{,}13.$

По фм. (25) напишем ур-ие лин. рег-и $\xi$ на $\eta$:

$$x - \widetilde{m}_\xi = \widetilde{\rho}_{\xi\eta}\frac{\widetilde{\sigma}_\xi}{\widetilde{\sigma}_\eta}\left(y - \widetilde{m}_\eta\right);\ x - 420 = 0{,}17(y - 180).$$

**п11**. Произведено 60 исп-й крепости волокна хлопка в зв-ти от его толщины. Данные этих исп-й приведены в крцн-ой табл. 9, где $X$ обз-ет нек-ую усл. вел-у, обратно прцн-ю толщине волокна, а $Y$ – предельную нагрузку (в граммах).

Таблица 9

| $y$ \ $x$ | 4,3 | 4,5 | 4,7 | 4,9 | 5,1 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,2 | 3 | 2 | – | – | – | 5 |
| 5,7 | 1 | 6 | 4 | 2 | – | 13 |
| 5,2 | – | 2 | 12 | 7 | 2 | 23 |
| 4,7 | – | – | 2 | 12 | 5 | 19 |
| $n_x$ | 4 | 10 | 18 | 21 | 7 | $n = 60$ |

Найти вбрч. ур-ие рег-и $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ и вбрч-ое крцн. отн-ие $\eta_{x/y}$.

Р. Для опр-я коэф-ов $a_0$, $a_1$ и $a_2$ методом нм. кв-ов сост-ем систему вида (21):

$$\left.\begin{aligned} a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}y_i;\\ a_0\sum_{i=1}^{n}x_i + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n}y_i x_i;\\ a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^4 &= \sum_{i=1}^{n}y_i x_i^2. \end{aligned}\right\}$$

Подс-в в эту систему таблч. данные, получим:

$$\left.\begin{aligned} 60a_0 + 285{,}4a_1 + 1360{,}36a_2 &= 314;\\ 285{,}4a_0 + 1360{,}36a_1 + 6497{,}278a_2 &= 1489{,}08;\\ 1360{,}36a_0 + 6497{,}278a_1 + 31093{,}293a_2 &= 7076{,}852. \end{aligned}\right\}$$

Р-ив полученную систему методом Гаусса, найдем сд. оценки парм-ов вбрч-го ур-ия рег-и: $a_0 = -1{,}37$, $a_1 = 0{,}77$, $a_2 = 0{,}13$. Т.о., ур. рег-и $Y$ на $X$ имеет вид $y = 0{,}13x^2 + 0{,}77x - 1{,}37$.

Для опр-я вбрч-го крцн. отн-ия $\eta_{x/y}$ найдем оценки для мтч. ож-ия $\widetilde{m}_x$ и усл. мтч. ож-я $\widetilde{X}_{y_j}$ : $\widetilde{m}_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{60}(4{,}3 \cdot 4 + 4{,}5 \cdot 10 + 4{,}7 \cdot 18 + 4{,}9 \cdot 21 + 5{,}1 \cdot 7) = 4{,}75$; $\widetilde{X}_{y_1} = \dfrac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{m_1} x_i = \dfrac{1}{5}(4{,}3 \cdot 3 + 4{,}5 \cdot 2) = 4{,}38$; $\widetilde{X}_{y_2} = \dfrac{1}{m_2}\sum\limits_{i=1}^{m_2} x_i = \dfrac{1}{13}(4{,}3 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 6 + 4{,}7 \cdot 4 + 4{,}9 \cdot 2) = 4{,}6$; $\widetilde{X}_{y_3} = \dfrac{1}{m_3}\sum\limits_{i=1}^{m_3} x_i = \dfrac{1}{23}(4{,}5 \cdot 2 + 4{,}7 \times 12 + 4{,}9 \cdot 7 + 5{,}1 \cdot 2) = 4{,}77$; $\widetilde{X}_{y_4} = \dfrac{1}{m_4}\sum\limits_{i=1}^{m_4} x_i = \dfrac{1}{19}(4{,}7 \cdot 2 + 4{,}9 \cdot 12 + 5{,}1 \cdot 5) = 4{,}93$.

Стд-но, по (26) имеем $\eta_{x/y} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k} m_j\left(\widetilde{X}_{y_j} - m_x\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{l} n_i\left(x_i - m_x\right)^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{5(-0{,}37)^2 + 13(0{,}15)^2 + 23(0{,}02)^2 + 19(0{,}18)^2}{4(0{,}45)^2 + 0{,}25^2 + 18(0{,}05)^2 + 21(0{,}15)^2 + 7(0{,}35)^2}} = \sqrt{\frac{1{,}6018}{2{,}81}} \approx 0{,}57.$$

# ЛЕКЦИЯ 45

## 15.4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

**1°. Основные понятия**. Статистической (стсч.) гипотезой (гп.) наз. любое предположение о св-ах рсп-ия вер-ей, лежащее в основе нблм. явлений.

По своему содержанию стсч. гп-ы можно подразделить на несколько осн. типов:

1) гп-ы о виде закона рсп-я исслм-ой слн. вел-ы;

2) гп-ы о числ. зн-ях парм-ов слн. вел-ы;

3) гп-ы об общем виде модели (мд.), описывающей стсч. зв-ть между признаками;

4) гп-ы о принадлежности нек-го признака к тому или иному классу.

Гп-ы обз-ся буквами $H_0$, $H_1$, …, $H_k$. Гп. $H_0$ яв-ся основной в том смысле, что нам было бы желательно убедиться в ее справедливости (н-р, $H_0$ – благополучная посадка самолета, выздоровление больного, успех в коммерческой деятельности и т.д.).

Гп-е $H_0$ противопоставляются гп-ы $H_1$, …, $H_k$, к-ые наз. альтернативными (альт.) В дальнейшем будем рас-ть только две гп-ы: $H_0$ – осн-ю и $H_1$ – альт-ю (конкурирующую). Понятие гп-ы $H_0$ или ее альт-вы основано на иссл-и стсч. данных, т.е. вбр-ки $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из нек-ой генеральной (гнр.) свк-ти.

Гп. $H$ наз. простой, если она полностью опр-ет теоретическое (теор.) рсп-ие слн. вел-ы по имеющейся вбр-е ее зн-й. В противном случае гп-а наз. сложной. Обычно осн. гп-а $H_0$ яв-ся простой, а ее альт-ва может быть простой или сложной. Рас-им сд. пример. Пусть вбр-а зн-й слн. вел-ы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $N(a, \sigma)$ и $\sigma$ известны. Тогда, если $H_0$: $a = a_1$, $H_1$: $a = a_2$, где $a_1$ и $a_2$ – нек. числа, то $H_0$ и $H_1$ – простые гп. Если $H_0$: $a = a_0$, $H_1$: $a \neq a_0$, то $H_0$ – простая гп., $H_1$ – сложная.

Правило $K$, по к-му принимается или отвергается гп-а, наз. критерием (крт., кр.). Вер-ть отвергнуть гп-у $H_0$, если она верна (т.е. принять гп-у $H_1$), наз. вер-ю ошибки первого рода или уровнем значимости и обз. $\alpha$:

$$P\{H_1/H_0\} = \alpha. \tag{1}$$

Вел-а $1 - \alpha$, равная вер-и принять верную гп-у, наз. уровнем доверия:

$$P\{H_0/H_0\} = 1 - \alpha = \gamma. \tag{2}$$

Вер-ть принять осн. гп-у, если она неверна, наз. ошибкой второго рода и обз-ся $\beta$:

$$P\{H_0/H_1\} = \beta. \tag{3}$$

Вер-ть принять гп-у $H_1$, если она верна, наз. мощностью крт-ия:

$$P\{H_1/H_1\} = 1 - \beta. \tag{4}$$

Процедура построения крт-ия происходит сд. образом. По имеющимся данным вбр-ки составляется (сост.) стс-ка $\overline{\theta}_n$ так, чтобы в случае, если гп. $H_0$ верна, рсп-ие слн. вел-ы $\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ было бы известным. Построение кр-ия в зв-ти от вида гп. $H_0$ заключается в вбр-е таких зн-й $\theta_1$ и $\theta_2$, что если $\theta_1 < \overline{\theta}_n < \theta_2$, то гп-а $H_0$ принимается. При этом возможно $\theta_1 = -\infty$ или $\theta_2 = \infty$. Зн-я $\theta_1$ и $\theta_2$ наз. критическими (крч.) тч-ми, а обл-ть

$$T_д = \{\theta\colon \theta_1 < \theta < \theta_2\} \tag{5}$$

наз. обл-ю допустимых зн. Так что если $\overline{\theta}_n \in T_д$, то гп. $H_0$ принимается, если $\overline{\theta}_n \notin T_д$, то отвергается, т.е. принимается альт-ва $H_1$. При этом обл-ть

$$T_{кр} = \{\theta\colon \theta \le \theta_1,\ \theta \ge \theta_2\} \tag{6}$$

наз. крч. обл-ю.

В зв-ти от вида конкурирующей (конкр.) гп. $H_1$ выбирают правостороннюю (прс.), левостороннюю (лвс.) или двустороннюю (двс.) обл-ть. Для прс-ей крч. обл-и имеем $P\{\overline{\theta}_n \ge \theta_2\} = \alpha$ ①, для лвс-ей $P\{\overline{\theta}_n \le \theta_1\} = \alpha$ ②, для двс-ей $P\{\overline{\theta}_n \le \theta_1\} = P\{\overline{\theta}_n \ge \theta_2\} = \dfrac{\alpha}{2}$ ③.

Предположим, что, если верна гп. $H_0$, то стс-ка $\overline{\theta}_n$ имеет рсп-ие с плотностью $p = p_1(\theta)$, а если верна гп. $H_1$, то $p = p_2(\theta)$. Тогда описанные выше построения можно избз-ть грфч-ки. На рис. 1 $\theta_1 = -\infty$, $\theta_2 = \theta_{кр}$. Крч-ой прс-ей обл-ю $T_{кр}$ яв-ся мн-во $\{\theta\colon \theta \ge \theta_{кр}\}$. Гп. $H_0$ принимается, если $\overline{\theta}_n < \theta_{кр}$. Пщ-ди заштрихованных обл-ей представляют собой вер-и ошибок 1-го и 2-го рода, $\alpha$ и $\beta$ ств-но

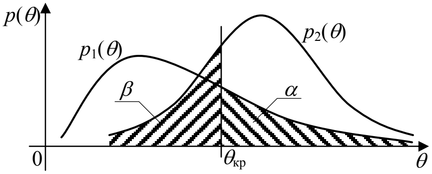


Рис. 1

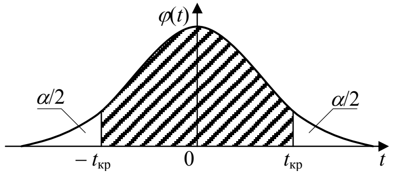


Рис. 2

Схем проверки гп-з удобно представлять в виде табл. 1.

Таблица 1

| Гипотеза | Принятие решения | |
|---|---|---|
| | принята | отклонена |
| Верна | Уровень доверия $P\{H_0/H_0\} = \gamma = 1 - \alpha$ | Ошибка 1 рода (уровень значимости) $P\{H_1/H_0\} = \alpha$ |
| Неверна | Ошибка 2 рода $P\{H_0/H_1\} = \beta$ | Мощность критерия $P\{H_1/H_1\} = 1 - \beta$ |

Обычно при опр-и крч-го зн-я $\theta_{кр}$ задается уровень доверия $\gamma = 1 - \alpha$ или уровень значимости $\alpha$ (н-р, $\gamma = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$) и $\theta_{кр}$ находится из усл-я

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = \gamma = 1 - \alpha. \tag{7}$$

Принятие гп-ы означает, что на заданном уровне надежности гп. $H_0$ не противоречит имеющимся у нас вбрч. данным.

**2°. Гипотезы о значениях числовых характеристик** (зн-ия ср-го, дсп-и и доли признака). Гп-ы о рав-ве ср. зн-я $a$ и дсп-и $\sigma^2$ опрн. числам $a_0$ и $\sigma_0^2$ яв-ся простыми гп. Они возникают, н-р, при проверке кач-ва фнцр-ия измрт. устройств. Если $a_0$ – номинальное зн. измрм-го парм-а и $a \neq a_0$, то это означает, что прибор дает систематитческую ошибку. Точность прибора опр-ся зн-ем $\sigma_0$ и, если $\sigma > \sigma_0$, значит, кач-во прибора не отвечает стдн. требовавниям. Рас-им их подробнее.

1*. Гп-а о численной вел. ср. зн-я. Пусть слн. вел-а $X \in N(a, \sigma)$ и имеется вбр-ка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ее зн-й. Рас-им гп-у $H_0$: $a = a_0$, где $a_0$ – нек-ое число, и ее альт-ву. Проверим гп-у $H_0$ на уровне $\gamma$.

1) Дсп-я $\sigma^2$ известна. Т.к. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, то слн. вел-а (стс-ка)

$$t = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \tag{8}$$

будет иметь стдн-ое норм. рсп-ие, если $H_0$ верна (т.е. $a = a_0$). При заданном уровне доверия $\gamma$ по табл. фк-и $\Phi(t)$ находим такое $t_{кр}$, чтобы

$$P\{|\xi_0| < t_{кр}\} = \gamma \text{ (где } \xi_0 \in N(0, 1)). \tag{8a}$$

Будем принимать гп-у $H_0$, если $|t| < t_{кр}$. Тогда крч. зн-ми будут $t_1 = -t_{кр}$, $t_2 = t_{кр}$ (рис. 2).

Крч. обл-ю будет двс-я крч. обл-ть $T_{кр} = \{t\colon |t| \geq t_{кр}\}$, а обл-ю допустимых зн-й $T_д = \{t\colon |t| < t_{кр}\}$.

2) Дсп-я $\sigma^2$ неизвестна. В этом случае в кач-е стс-ки $t$ берут вел-у

$$t = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\bar{S}} \quad \left( \text{где } \bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \right). \tag{8б}$$

Стс-ка $t$ имеет рсп-ие Стьюдента с $n - 1$ сп-ми свободы. Для заданного уровня доверия $\gamma$ по табл. Стьюдента опр-ся крч. зн-ие из усл-я

$$P\{|t_{n-1}| < t_{\text{кр}}\} = \gamma, \tag{8в}$$

и гп. $H_0$ принимается, если $|t| < t_{n-1,\,\text{кр}}$.

2*. Гп-а о числовом зн-и дсп-и. Пусть слн. вел-а $X \in N(a, \sigma)$ и имеется вбр-а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ее зн-й. Рас-им гп-у $H_0$: $\sigma = \sigma_0$ против конкр. гп-ы $H_1$: $\sigma \neq \sigma_0$, при этом $a$ может быть пзвл. В этом случае в кач-е стс-ки выбираем вел-у

$$t = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2}. \tag{9}$$

Известно, что стс-ка $t$ имеет рсп-ие $\chi^2_{n-1}$ (хи-кв. с $n - 1$ сп-ми свободы). По табл. рсп-я для заданного уровня значимости $\gamma$ выбираем такие $U$ и $V$, чтобы

$$P\left\{\chi^2_{n-1} \le U\right\} = P\left\{\chi^2_{n-1} \ge V\right\} = \frac{\gamma}{2}, \tag{9а}$$

и гп-у $H_0$ принимаем, если

$$U < t < V. \tag{9б}$$

3*. Гп. о числовом зн-и доли признака. Иногда возникает нх-сть сравнения числового зн-я доли $p$ признака $A$ в нек-ой гнр. свк-и $X$ с заданным числом $p_0$. Само число $p_0$ опр-ся на основе дпнт. инф-и, полученной в предыдущих иссл-ях.

Для р-ия этой задачи сост-ся стс-ка

$$t = \frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}, \tag{10}$$

к-ая при больших $n$ ($n \ge 30$) рсп-на по стдн. норм. закону $N(0, 1)$. Гп. $H_0$: $p = p_0$ принимается на уровне доверия $\gamma$, если $|t| < t_{\text{кр}}$, где $\Phi(t_{\text{кр}}) = \gamma$.

Схемы проверки гп-з о числ. зн-ях хркс-ик сведем в табл. 2.

Таблица 2

| Гипотеза $H_0$ | Предположение | Статистика $t$ | Критерий |
|---|---|---|---|
| $a = a_0$ | $\sigma^2$ известна | $\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ | $\lvert t\rvert < t_{\text{кр}}$ |
| $a = a_0$ | $\sigma^2$ неизвестна | $\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\bar{S}}$ | $\lvert t\rvert < t_{n-1,\,\text{кр}}$ |
| $\sigma = \sigma_0$ | – | $\frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2}$ | $U < t < V$ |
| $p = p_0$ | $n > 30$ | $\frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$ | $\lvert t\rvert < t_{\text{кр}}$ |

**п1**. По результатам $n = 9$ замеров установлено, что вбрч. ср-е вр-я (в секундах) изготовления дт-и $\bar{x}$ = 48. Предполагая, что вр. изготовления – норм. рспн-я слн. вел-а с дсп-ей $\sigma^2 = 9$, рас-ть на уровне 0,95 гп-у $H_0$: $a = 49$ против конкр-ей гп-ы $H_1$: $a \neq 49$.

Р. Здесь расв-ся простая гп. $a = 49$ против сложной $a \neq 49$. На уровне $\gamma = 0{,}95$ находим по $T_3$ $t_{кр} = 1{,}96$. Согласно табл. 2, гп-а принимается при $|t| = \left|\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\sigma}\right| < t_{кр}$.

Т.к. $t = \frac{(48-49)\sqrt{9}}{3} = -1$, то $|t| < t_{кр}$ и гп-а принимается.

**п2**. По утв-ю руководства фирмы, ср. размер дебиторского счета равен 187,5 тыс. руб. Ревизор сост-ет слн. вбр-у из 10 счетов и обнаруживает, что ср. арифч. вбр-и равно 175 тыс. руб. при ср. квч. отк-и 35 тыс. руб. Может ли в дсв-ти оказаться правильным объявленный размер дебиторского счета? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Р. Здесь $a_0 = 187{,}5$, $\bar{x} = 175$, $n = 10$, $\bar{\sigma} = 35$. Поскольку $\alpha = 0{,}05$, то $\gamma = 0{,}95$. Т.к. дсп-я неизвестна, то для проверки гп-ы $H_0$: $\bar{x} = a$ возьмем рсп-ие Стьюдента (табл. 2). Тогда $t = \frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\bar{S}} = \frac{(175-187{,}5)\sqrt{10}}{35} = -1{,}129$. По $T_6$ при $\gamma = 0{,}95$ находим $t_{9,кр} = 2{,}25$. Т.к. $|t| = 1{,}129 < t_{9,кр}$, то гп. $H_0$ о ср. размере дебиторского счета принимается на уровне доверия $\gamma = 0{,}95$.

**п3**. Точность работы станка-автомата проверяется по дсп-и $\sigma^2$ контролируемого размера изделий, к-ая не должна превышать 0,15. По данным из 25 отобранных изделий выч-на оценка дсп-и $\bar{S}^2 = 0{,}25$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ выяснить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

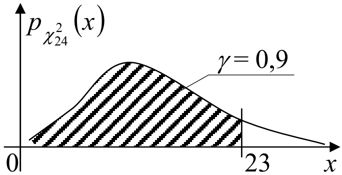


Рис. 3

Р. Предположим, что размер изделия – норм. слн. вел-а. Рас-им гп-у $H_0$: $\sigma^2 = 0{,}15$ и альт-ву $H_1$: $\sigma^2 \geq 0{,}15$. Найдем по $T_2$ табл. $\chi^2$ число $V$ из усл-я $P\{\chi^2_{n-1} > V\} = 0{,}1$ при $n = 25$. Получим $V = 15{,}5$. Считаем $Г = 0$, расв-я при этом прс-ю крч. обл-ть (рис. 3).

Для проверки гп-ы выч-им по фм-е (9) стс-ку $t = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0{,}25}{0{,}15} = 40$.

Т.к. $t = 40 > t_{кр} = 15{,}5$, то гп-а о достижении станком требуемой точности отклоняется.

**п4**. Партия изделий принимается в том случае, если вер-ть того, что изделие окажется ствщ-им стд-у, будет не менее 0,95. Среди слн. отобранных 100 изделий оказалось 98 ствщ-их стд-у. Можно ли на уровне $\alpha = 0{,}1$ принять партию?

Р. В задаче требуется принять гп-у о том, что неизвестная гнр. доля не менее опрн-го числа. Пусть $H_0$: $p > p_0 = 0{,}95$, $H_1$: $P \leq 0{,}95$. Т.к. конкр-щая гп. – лвс-я, то и крч. обл-ть лвс-я. Вычислим стс-у $t = \dfrac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \dfrac{(0{,}98 - 0{,}95)\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}95 \cdot 0{,}05}} = 1{,}3768$.

Найдем $t_{\text{кр}}$ из усл-я $P\{t < t_{\text{кр}}\} = 0{,}9$. По Т$_3$ получим $t_{\text{кр}} = 1{,}6$.

Т.к. $t = 1{,}3768 < t_{\text{кр}} = 1{,}6$, то гп-а о принятии партии изделий принимается.

**3°. Проверка гипотез средних, долей признака и дисперсий**. На практике часто встречаются ситуации, когда ср. зн-ие одного эксп-та отличается от ср. зн-я данных другого, хотя усл-я эксп-та одинаковы. Отсюда возникает вопрос, можно ли считать это расхождение незначимым, т.е. чисто слн-ым, или оно вызвано сущн-ым различием двух гнр. свк-ей. Н-р, такие вопросы возникают при иссл-и надежности техн. систем, где результаты сравниваются с предыдущими измр.; при кр-ле кач-ва изделий, изготовленных на разных предприятиях; в финансах – при сравнении уровня доходности различных активов.

Пусть $X_1 \in N(a_1, \sigma_1)$, $X_2 \in N(a_2, \sigma_2)$ и дсп-и $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ известны. Имеются вбр-ки $\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_{n_2}\}$ из гнр-ых свк-ей $X_1$ и $X_2$.

Гп. $H_0$ состоит в том, что ср-ие рсп-ий равны, т.е. $H_0$: $a_1 = a_2$, при этом $H_1$: $a_1 \neq a_2$.

Если выполняется гп. $H_0$, то стс-ка

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (11)$$

имеет стдн. норм. рсп-ие $N(0, 1)$ и на заданном уровне доверия $\gamma$ гп-а проверяется по схеме 1* из 2°, где $t$ выч-ся по фм-е (11).

Если дсп-и $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ неизвестны, но равны, то в случае справедливости гп-ы $H_0$ стс-ка

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \qquad (11а)$$

имеет рсп-ие Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ сп-ми свободы. Здесь $S_1^2$ и $S_2^2$ «неисправленные» вбрч-ые дсп-и, т.е. $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2$, $S_2^2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2$.

Для заданного уровня доверия $\gamma$ по Т$_8$ рсп-я Стьюдента находим $t_{\text{к,кр}}$ из усл.

$$P\{|t_{\text{к}}| < t_{\text{к,кр}}\} = \gamma, \qquad (11б)$$

и гп. $H_0$ принимается, если полученное после выч-й по фм-е (11а) зн. $t_{\text{к}}$ уд-ет нерав-ву $|t_{\text{к}}| < t_{\text{к,кр}}$.

Если $n > 30$, то рсп-я ср-их $\bar{x}$ и $\bar{y}$ можно считать прж-но норм-ми, тогда схема проверки гп-з для ср-х, изложенная в 1*, 2*: 2°, подходят для вбр-к из любых гнр. свк-ей.

Рас-им проверку гп-ы о рав-ве долей признака. Сравнение долей признака в двух свк-ях яв-ся важной для практики задачей, т.к. значимые расхождения между долями признаков хркз-ет различие между гнр. свк-ями.

Пусть имеются две вбр-и объемами $n_1$ и $n_2$ из двух свк-ей с гнр. долями $p_1$ и $p_2$. Вбрч-ые доли признаки равны $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$, где $m_1$ и $m_2$ – ств-но число эл-ов 1-й и 2-й вбр-к, обладающих данным признаком. Будем считать $n_1$ и $n_2$ дт-но большими ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$), тогда $w_1$ и $w_2$ имеют прж-но норм-й закон рсп-я с мт. ож-ми $p_1$ и $p_2$ и дсп-ми $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$ и $\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$ ств-но.

Если гп. $H_0$: $p_1 = p_2$ верна, то разность $w_1 - w_2$ имеет норм-й закон рсп-я с парм-ми $M(w_1 - w_2) = 0$, $D(w_1 - w_2) = \sigma^2_{w_1} + \sigma^2_{w_2} = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$. Поэтому стс-ка

$$t = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \tag{12}$$

имеет стд. норм. рсп-ие $N(0, 1)$.

Вместо неизвестного зн-я $p$, входящего в фм-у (12), берем общ. вбр-ю долю признака

$$\overline{p} = \frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2}. \tag{12a}$$

Далее гп-у $H_0$ проверяем по выше описанной схеме.

Теперь рас-им проверку гп-ы о рав-ве дсп-й. Гп-ы дсп-ях возникают довольно часто, поскольку дсп-я хркз-ет такие важные показатели, как точность приборов, технологических (техл.) процессов, сп-нь однс-ти признаков, риск, связанный с отк-ем доходности от заданного уровня и т.д.

Пусть имеются вбр-и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ из двух норм. гнр. свк-ей $N(a_1, \sigma_1)$ и $N(a_2, \sigma_2)$. Рас-им гп-у $H_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против конкр-ей гп-ы $H_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Стс-ка

$$t = \frac{\overline{S}_1^2}{\overline{S}_2^2} \tag{13}$$

имеет рсп-ие Фишера со сп-ми свободы $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$. По табл. рсп-я Фишера находим такие $U$ и $V$, чтобы при заданном уровне доверия $\gamma = 1 - \alpha$

$$P\{F_{n_1-1,n_2-1} \le U\} = P\{F_{n_1-1,n_2-1} \ge V\} = \frac{\alpha}{2}, \tag{13a}$$

где $F_{n_1-1,n_2-1}$ – слн. вел-а, рспн-я по закону Фишера с $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$ сп-ми свободы. Гп. $H_0$ принимается, если $U < t < V$.

Схема проверки гп-з о рав-е числ. хркс-к приведена в табл. 3, где альт-я гп. $H_1$ выбирается двс-ей.

Таблица 3

| Гипотеза $H_0$ | Предположение | Статистика $t$ | Критерий $K$ |
|---|---|---|---|
| $a_1 = a_2$ | Дисперсии $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ известны | $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | $\|t\| < t_{кр}$ |
| $a_1 = a_2$ | Дисперсии неизвестны, но равны: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ | $\|t\| < t_{к,\ кр}$ |
| $p_1 = p_2$ | $n_1 > 30$, $n_2 > 30$ | $t = \dfrac{w_1 - w_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ | $\|t\| < t_{кр}$ |
| $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | $X_1 \in N(a_1, \sigma_1)$, $X_2 \in N(a_2, \sigma_2)$ | $t = \dfrac{\overline{S}_1^2}{\overline{S}_2^2}$ | $U < t < V$ |

**п5**. Было произведено 12 измр-й диаметра вала (в мм). При этом оказалось, что ср-е $\overline{x}_1 = 10{,}2$, а стд. отк-ие $S_1 = 0{,}05$. Затем вал поместили в усл-я с высокой темп-ой и произвели еще 8 измр-й диаметра его оси. Ср-е на этот раз оказалось равным 10,25, а стд. отк-ие – 0,06. Можно ли сделать вывод при 5%-ном уровне значимости, что диаметр вала сущ-но увеличивается при увеличении темп-ры?

Р. Здесь $\overline{x}_1 = 10{,}2$, $\sigma_1 = 0{,}05$; $n_1 = 12$; $\overline{x}_2 = 10{,}25$, $\sigma_2 = 0{,}06$; $n_2 = 8$. $H_0$: $a_1 = a_2$ против $H_1$: $a_1 \neq a_2$. Результаты измр-й яв-ся норм-но рспн-ми слн. вел. с известными дсп. $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$. Для проверки гп-ы $H_0$ сост-им стс-ку

$t = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} = \dfrac{10{,}2 - 10{,}25}{\sqrt{\dfrac{0{,}05^2}{12} + \dfrac{0{,}06^2}{8}}} = -\,1{,}9487$. Из $T_3$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $t_{кр} = 1{,}96$ и $|t| < t_{кр}$, то гп. $H_0$ на уровне доверия 0,95 принимается и можно считать, что диаметр сущ-но не увеличивается в усл-ях повышенной темп-ры.

**п6**. Расходы сырья $x_1$ и $y_1$ на ед-цу продукции по старой и новой техл-ям приведены в табл. 4.

Таблица 4

| | По старой технологии | | | | По новой технологии | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Расход сырья | $x_i$ | 304 | 307 | 308 | $y_j$ | 303 | 304 | 306 | 308 |
| Число изделий | $n_i$ | 1 | 4 | 4 | $n_j$ | 2 | 6 | 4 | 1 |

Предполагается, что гнр. свк-ти $X$ и $Y$ имеют норм. рсп-я с одинаковыми дсп-ми и ср-ми $a_1$, $a_2$. Требуется проверить гп-у $H_0$: $a_1 = a_2$ против $H_1$: $a_1 \neq a_2$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

Р. Выч-им $\bar{x} = \dfrac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{3} x_i n_i = 307{,}11$; $\bar{S}_x^2 = \dfrac{1}{n_x - 1}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \bar{x})^2 = 1{,}1610$;

$\bar{y} = \dfrac{1}{n_y}\sum_{j=1}^{4} y_j n_j = 304{,}77$; $\bar{S}_y^2 = \dfrac{1}{n_y - 1}\sum_{j=1}^{4}(y_j - \bar{y})^2 = 1{,}2065$. Тогда стс-ка $t =$

$$= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{n_1\bar{S}_x^2 + n_2\bar{S}_y^2}{n_x + n_y - 2}\left(\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}\right)}} = \frac{307{,}11 - 304{,}77}{\sqrt{\dfrac{9\cdot 1{,}1610 + 13\cdot 1{,}2065}{9 + 13 - 2}\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{13}\right)}} = 4{,}722.$$

Если $H_0$ верна, то стс-ка $t$ имеет рсп-ие Стьюдента с $n_x + n_y - 2 = 20$ сп-ми свободы. При $\alpha = 0{,}1$ по $T_6$ находим $t_{20,\text{кр}} = 1{,}725$, т.к. $|t| > t_{20,\text{кр}}$, то гп-у $H_0$ отвергаем, т.е. при переходе на новую техл-ю происходит изм-ие ср. расхода сырья.

**п7**. Кр. работу по мт-ке выполнили студенты (ст.) двух гр-п. В 1 гр. было предложено 100 задач, из к-ых были правильно р-ны 58, во 2 гр. из 120 задач верно р-ны 65. На уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверить гп-у о том, что материал одинаково усвоен ст-ми обеих гр-п.

Р. Вбрч. доли р-ных задач равны $w_1 = \dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{58}{100} = 0{,}58$; $w_2 = \dfrac{m_2}{n_2} = \dfrac{65}{120} =$

$= 0{,}542$. Имеем гп-у $H_0$: $p_1 = p_2$ против $H_1$: $p_1 \neq p_2$, где $p_1$ и $p_2$ – истинные доли числа р-ных задач ст-ми обеих гр. Сост-им стс-ку $t = \dfrac{w_1 - w_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$.

Принимая в кач-ве $p$ зн-ие $p = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{58 + 65}{100 + 120} = 0{,}559$, получим

$t = \dfrac{0{,}58 - 0{,}542}{\sqrt{0{,}559(1 - 0{,}559)\left(\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{120}\right)}} = 0{,}565$. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}02$ ($\gamma = 0{,}98$) по $T_{2а}$ находим $t_{\text{кр}} = 2{,}33$. Т.к. $|t| < t_{\text{кр}}$, то гп-у $H_0$ об одинаковой усваиваемости материала принимаем.

**п8**. Проверить гп-у $H_0$ о рав-ве дсп-й в п6 на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

Р. $\bar{S}_x^2 = 2{,}1138$; $\bar{S}_y^2 = 1{,}5554$; $t = \bar{S}_x^2 \big/ \bar{S}_y^2 = 1{,}359$. Из (13а), пользуясь табл. рсп-я Фишера $T_9$, находим $U$ и $V$: $P\{F_{8,12} < U\} = 0{,}05 \Rightarrow U = 0{,}305$; $P\{F_{8,12} > V\} = 0{,}05 \Rightarrow V = 2{,}85$.

Т.к. $U < t < V$, т.е. $0{,}305 < 1{,}359 < 2{,}85$, то гп. $H_0$ принимается.

**4°. Критерий согласия Колмогорова и Пирсона**. Одна из осн. задач стсч. проверки гп-з ставится так: на основании тех или иных данных выносится предположение о виде закона рсп-я интересующей слн. вел-ы $\xi$. Спрашивается, совместимы ли нбл-ные зн-я с гп-ой о том, что слн. вел-а $\xi$ дсв-но имеет предполагаемое рсп. Рас-им два критерия (крт., кр.) согласия: Колмогорова и Пирсона.

Кр-й Колмогорова яв-ся нб-е простым кр-ем проверки гп-ы о виде закона рсп-я, однако его можно применять только в том случае, когда известен вид фк-и рсп-я $F(x)$ и все ее парм-ы. Общ. схема применения кр-я Колмогорова может быть сд-ей.

1. По результатам $n$ незв-ых опытов опр-ют стсч. (опытную) фк. рсп-я $F^*(x)$.

2. Опр-ют зн-ие $D$ кр-я Колмогорова: $D = \max|F^*(x) - F(x)|$ и выч-ют $\lambda_{оп} = D\sqrt{n}$ . Зн-ие $D$ можно опр-ть, либо построив предварительно в одной и той же системе крд-т грф-и фк-й $F^*(x)$ и $F(x)$, либо путем сравнения вел-н $|F^*(x_i) - F(x_i)|$ в заданных тч-х.

3. Применяют тот или иной уровень значимости $q$ кр-я Колмогорова.

4. Зная $P(\lambda_{оп}) = 1 - q$, находят по $T_{11}$ ствщ-е зн-ие $\lambda_q$. Если $\lambda_{оп} < \lambda_q$, гп-а принимается, если же $\lambda_{оп} > \lambda_q$, гп-а бракуется.

Кр-й $\chi^2$ (критерий Пирсона) позволяет выполнить проверку гп-ы о ств-и опытного закона рсп-я предполагаемому в случаях, когда неизвестен вид фк-и рсп-я $F(x)$ и ее парм-ы.

Пусть с целью получения опытного закона рсп-я слн. вел-ы $\xi$ и проверки его ств-я нек-му предполагаемому закону производится $n$ незв-х законов. Свк-ть результатов разбита на $m$ инр-ов $l_i$ и оформлена в виде стсч. свк-ти (табл. 5).

Таблица 5

| $l_i$ | $(x_1; x_2)$ | $(x_2; x_3)$ | … | $(x_m; x_{m+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_m$ |
| $p_i^*$ | $p_1^*$ | $p_2^*$ | … | $p_m^*$ |

Схема применения кт-я $\chi^2$ сводится к сд-му.

1. Исходя из предполагаемого закона рсп-я, находим вер-ти $p_i$ попадания слн. вел-ы $\xi$ в каждый из заданных $m$ инр-ов стеч-ой свк-ти.

2. Выч-м зн-ие кт-я $\chi^2$, ствщ-е опытным данным по фм-е

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i}\left(p_i^* - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}. \tag{14}$$

3. Опр-им число $k$ сп-й свободы рп-я по фм-е $k = m - s - 1$, где $s$ – число парм-ов предполагаемого закона рсп-я, найденных опытным путем.

4. Зная $k$ и $\chi^2$, по табл. $T_8$ опр-м вер-ть того, что вел-а, имеющая рсп-ие $\chi^2$ с $k$ сп-ми свободы, превзойдет данное зн. $\chi^2$. Если эта вер-ть отс-но велика, гп-у можно признать не противоречащей опытным данным. Если же она весьма мала, гп-а отбрасывается как неправдоподобная. Обычно вер-ти, не превосходящие $q = 0{,}01$, считаются уже дт-но малыми (иногда берут $q = 0{,}05$). Вер-ть $q$ наз-ют уровнем значимости кр-я, а отвечающую ей обл-ть отк-й – кр-ой обл-ю.

**п9**. При сверлении одним и тем же сверлом и последующим измр-м диаметров отверстий получены результаты, приведенные в виде стсч-ой свк-ти (табл. 6). Проверить с помощью кр-я Колмогорова гп-у $H_0$ о том, что вбр-а извлечена из гнр-ой свк-и, равномерно рсп-ной на инр-ле (40,10; 40,60.)

Таблица 6

| $l_i$, мм | $n_i$ | $p_i^*$ | $l_i$, мм | $n_i$ | $p_i^*$ | $l_i$, мм | $n_i$ | $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (40,10; 40,15) | 13 | 0,162 | (10,25; 40,30) | 6 | 0,075 | (40,40; 40,45) | 9 | 0,113 |
| (40,15; 40,20) | 14 | 0,175 | (40,30; 40,35) | 7 | 0,087 | (40,45; 40,50) | 13 | 0,162 |
| (40,20; 40,25) | 11 | 0,138 | (40,35; 40,40) | 3 | 0,038 | (40,50; 40,55) | 4 | 0,050 |

Фк-я рсп-я равномерно рсп-й слн. вел-ы $\xi$ в инр-е (40,1; 40,6) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 40{,}1; \\ \dfrac{x - 40{,}1}{0{,}5} & \text{при } 40{,}1 < x < 40{,}6; \\ 1 & \text{при } x \ge 40{,}6. \end{cases}$$

Пользуясь данными стсч-ой свк-ти, найдем зн-я стсч. фк-и рсп-я $F^*(x)$, теорч-ой фк-и рсп-я $F(x)$ и абс-ое зн. $\alpha_i$ разности $F^*(x_i) - F(x_i)$. Результаты выч-й см. в табл. 7.

Таблица 7

| $i$ | $x_i$ | $F^*(x_i)$ | $F(x_i)$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 40,10 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40,15 | 0,162 | 0,1 | 0,062 |
| 3 | 40,20 | 0,337 | 0,2 | 0,137 |
| 4 | 40,25 | 0,475 | 0,3 | 0,175 |
| 5 | 40,30 | 0,550 | 0,4 | 0,150 |
| 6 | 40,35 | 0,637 | 0,5 | 0,137 |
| 7 | 40,40 | 0,675 | 0,6 | 0,075 |
| 8 | 40,45 | 0,788 | 0,7 | 0,088 |
| 9 | 40,50 | 0,950 | 0,8 | 0,150 |
| 10 | 40,55 | 1 | 0,9 | 0,100 |
| 11 | 40,60 | 1 | 1 | 0 |

Сравнивая абс. вел-ы разностей $d_i$, находим $D = \max|F^*(x_i) - F(x_i)| = 0{,}175$ и выч-ем $\lambda_{\text{оп}} = D\sqrt{n} = 0{,}175\sqrt{80} \approx 1{,}56$. Пусть уровень значимости $q = 0{,}01$. Зная $P(\lambda_q) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$, находим по $T_{11}$ $\lambda_q = 1{,}64$. Т.к. $\lambda_{\text{оп}} = 1{,}56 < 1{,}64 = \lambda_q$, вбр-а согласуется с гп-ой $H_0$.

**п10**. ОТК с точностью до 1 мкм было измр-но 100 дт-й, изготовленных на автч. станке. В табл. 8 приведены отк-я от норм. размера, разбитые на разряды, численность разрядов и их частоты $p_i^*$. Оценить с помощью кр-я $\chi^2$ гп-у $H_0$ о согласии вбрч. рсп-я с норм. законом рсп-я при уровне значимости $q = 0{,}05$.

Таблица 8

| $l_i$, мкм | $n_i$ | $p_i^*$ | $l_i$, мкм | $n_i$ | $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (– 20; – 15) | 3 | 0,03 | (5; 10) | 20 | 0,20 |
| (– 15; – 10) | 6 | 0,06 | (10; 15) | 13 | 0,13 |
| (– 10; – 5) | 8 | 0,08 | (15; 20) | 8 | 0,08 |
| (– 5; 0) | 12 | 0,12 | (20; 25) | 4 | 0,04 |
| (0; 5) | 25 | 0,25 | (25; 30) | 1 | 0,01 |

Р. Опр-им неизвестные парм-ы $\tilde{m}_\xi$ и $\tilde{\sigma}_\xi$ предполагаемого норм. рсп-я: $\tilde{m}_\xi = -17{,}5 \cdot 0{,}03 - 12{,}5 \cdot 0{,}06 - 2{,}5 \cdot 0{,}12 - 7{,}5 \cdot 0{,}08 + 2{,}5 \cdot 0{,}25 + 7{,}5 \cdot 0{,}20 + 12{,}5 \cdot 0{,}13 + 17{,}5 \cdot 0{,}08 + 22{,}5 \cdot 0{,}04 + 27{,}5 \cdot 0{,}01 = 4{,}15$ мкм;

$$\tilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)^2} \approx 9{,}5 \text{ мкм}.$$

Сдт-но, согласно гп-е, плотность вер-ти слн. вел-ы $\xi$, врж-щей отк-ие размера дт-ли от номинального, имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{9{,}5\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-4{,}15)^2}{2(9{,}5)^2}\right)$.

Т.к. в каждом разряде должно быть не менее пяти измр-й, то, объединив все результаты измр-й в восемь разрядов, получим табл. 9.

Таблица 9

| Разряды | Менее – 10 | (– 10; – 5) | (– 5; 0) | (0; 5) | (5; 10) | (10; 15) | (15; 20) | Более 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 9 | 8 | 12 | 25 | 20 | 13 | 8 | 5 |

Применив теорч-й норм. закон рсп-я, найдем вер-ти попадания в разряды: $p_i = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x_{i+1}-4{,}15}{9{,}5}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-4{,}15}{9{,}5}\right)\right)$, где $x_i$, $x_{i+1}$ – границы $i$-й гр-ы; $p_1 = 0{,}0682$; $p_2 = 0{,}0998$; $p_3 = 0{,}1634$; $p_4 = 0{,}2042$; $p_5 = 0{,}1951$; $p_6 = 0{,}1918$; $p_7 = 0{,}0294$; $p_8 = 0{,}0481$.

По фм-е (14) выч-ем зн-ие меры расхождения: $\chi^2 \approx 1{,}126$.

Опр-ем число сп-й свободы как число разрядов минус число наложенных связей (в данном примере $s = 2$): $k = 8 - 2 - 1 = 5$.

По $T_7$ для $k = 5$ находим: при $\chi^2 = 0{,}145$ $p = 0{,}95$; при $\chi^2 = 1{,}61$ $p = 0{,}90$. Сдт-но, искомая вер-ть $p$ при $\chi^2 = 1{,}126$ прж-но равна 0,91. При уровне значимости $q = 0{,}05$ вер-ть $p > q$, поэтому гп-у $H_0$ о том, что вел-а $\xi$ рсп-на по норм. закону, можно считать правдоподобной.

**5°. Дисперсионный анализ**. Дспн. анализ был предложен Р. Фишером для р-ия нек-ых задач в области биологических иссл., в част-и, в с/х-ой стс-ке. В настоящее вр. дспн-й анализ опр-ся как стсч. метод, предназначенный для оценки влияния различных факторов (фкт.) на результат эксп-та. Рас-им сд. вопросы:

1*. Пусть гнр. свк-ти $X_1, X_2, \dots, X_n$ рсп-ны нор-но и имеют одинаковую, хотя и неизвестную дсп-ю. А мт. ож-я также неизвестны, но могут быть различными. Требуется при заданном уровне значимости $\alpha$ по вбрч-ым ср. проверить нулевую гп. $H_0$: $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n)$ о рав-ве всех мт. ож-й, т.е. установить сущ-но или несущ-но различаются вбрч-ые ср.

Казалось бы, для сравнения нескольких ср-х ($n > 2$) можно сравнить их попарно. Однако с взр-ем числа ср-х взр-ет и нб-е различие между ними. Поэтому для сравнения нескольких ср-х пользуются др. методом, основанным на сравнении дсп-й. Этот метод назван дспн. анализом.

На практике дспн-й анализ применяют для выяснения, оказывает ли сущн. влияние нек-ый качественный (качн.) фкт. $A$, к-ый имеет $n$ уровней $A_1, \dots, A_n$ на изучаемую вел. $X$. Н-р, если требуется выяснить, какой вид удобрений нб-е эффективен (эфв.) для получения нб. урожая, то фкт-р $A$ – удобрение, а его уровни – вид удобрений.

Осн. идея дспн. анализа состоит в сравнении «факторной (фктн.) дисперсии», обусловленной слн. причинами. Если различие между этими дсп. значимо (сущ-но), то фкт. оказывает сущн. влияние на $X$. В этом случае ср-ие нблм-ых зн-й на каждом уровне (групповые ср.) будут различаться значимо.

Если установлено, что фкт. сущ-но влияет на $X$ и требуется выяснить, какой из уровней оказывает нб. воздействие, то дпн-но производят попарное сравнение ср-их.

Дспн. анализ применяется также, чтобы установить однородность (однс.) нескольких свк-ей (дсп-и этих свк. одинаковы по предположению; если дспн. анализ покажет, что и мт. ож. одинаковы, то свк-и в этом смысде одн-ны). Одн-ые свк-и можно объединить в одну и получить о ней дпн-ю инф. и сделать надежные выводы.

В более сложных случаях иссл-ют воздействие нескольких фкт-ов на несколько пст-ых или слн-ых уровнях и выясняют влияние отдельных уровней и их комбинаций. В этом случае мы имеем дело с многофакторным (мфктн.) дсп. анализом.

2*. Рас-им общ-ю, фктн-ю и остаточную (ост.) суммы кв-ов отк-й. Пусть на количественный (колн.) норм-но рспн-й признак $X$ воздействует фкт. $A$, к-ый имеет $n$ пст. уровней. Будем предполагать, что число нбл-й на каждом уровне одинаково и равно $m$. И пусть нбл-ось $mn$ зн-й $x_{ij}$ признака $X$, где $i$ – номер опыта ($i = \overline{1, m}$), $j$ – номер уровня фкт-а ($j = \overline{1, n}$). В табл. 10 представлены результаты нбл-й.

Таблица 10

| Номер испытания | Уровни фактора $A$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | … | $A_n$ |
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1n}$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | … | $x_{mn}$ |
| Групповая средняя | $\overline{x}_{\cdot 1}$ | $\overline{x}_{\cdot 2}$ | … | $\overline{x}_{\cdot n}$ |

Из табл. 10 получим общ-ю и групповую (грв.) ср-ие

$$\overline{x} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad \overline{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad (j = \overline{1, n}), \tag{15}$$

а также общ. сумму кв-ов отк-й нблм-х зн-й от общ. ср-ей $\overline{x}$ :

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2, \tag{15а}$$

фктн. сумму кв-ов отк-й грв-ых ср-их от общ. ср-ей

$$Q_{\text{фкт}} = m\sum_{j=1}^{n} \left(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}\right)^2, \tag{15б}$$

к-ая хркз-ет рассеяние между гр-ми. Находим ост. сумму кв-ов отк-й нблм. зн-й гр-ы от своей грв. ср-ей:

$$Q_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{m} \left(x_{i1} - \overline{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(x_{i2} - \overline{x}_{\cdot 2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} \left(x_{im} - \overline{x}_{\cdot n}\right)^2, \tag{15в}$$

к-ая хркз-ет рассеяние «внутри гр-ы». При этом имеет место стн-е

$$Q_{\text{общ}} = Q_{\text{фкт}} + Q_{\text{ост}}, \tag{16}$$

д-во к-го приведено в [35]. Из (16) опр-ем

$$Q_{\text{ост}} = Q_{\text{общ}} - Q_{\text{фкт}}. \tag{16а}$$

Фм-ы (15а) и (15б) с помощью элр. прб-й можно писать в виде

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{n} P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right]^2}{mn}, \tag{16б}$$

$$Q_{\text{фкт}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j^2}{m} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right]^2}{mn}, \tag{16в}$$

где $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2$, $R_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

**зм1**. Тогда вместо (16б) и (16в) получим

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{n} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn}, \tag{17}$$

$$Q_{\text{фкт}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j^2}{m} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{mn}, \tag{17а}$$

где $Q_j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}^2$, $T_j = \sum_{i=1}^{m} Y_{ij}$.

**зм2**. Если число исп-й на уровне $A_j$ равно $m_j$ ($j = \overline{1, n}$), то общ. сумму кв-ов отк-й выч-ют как в случае одинакового числа исп-й на всех уровнях. А фктн. сумму кв-ов отк-й находят по фм-е:

$$Q_{\text{фкт}} = \frac{T_1^2}{m_1} + \frac{T_2^2}{m_2} + \ldots + \frac{T_n^2}{m_n} + \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} T_j\right]^2}{N},$$

где $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ – общ. число исп-й.

Покажем наглядно (см. п11), что $Q_{\text{фкт}}$ отражает влияние фкт-а, а $Q_{\text{ост}}$ – влияние слн. причин.

**п11**. Двумя приборами ($j = 1, 2$) произведены 2 измр-ия ($i = 1, 2$) физической вел-ы, истинный размер к-ой равен $x$. Расв-я в кач-е фкт-а систематическую ошибку $C$, а в качестве его уровней $C_1$ ($C_2$) первого (второго) прибора, показать, что $Q_{\text{фкт}}$ опр-ся систематическими, а $Q_{\text{ост}}$ – слн. ошибками измр-й.

Р. Пусть $\alpha_1$, $\alpha_2$ ($\beta_1$, $\beta_2$) – слн. ошибки первого и второго измр-я первым (вторым) прибором. Тогда нблм-ые зн-ия результатов измр-й равны: $x_{11} = x + C_1 + \alpha_1$, $x_{12} = x + C_2 + \beta_1$, $x_{21} = x + C_1 + \alpha_2$, $x_{22} = x + C_2 + \beta_2$. Ср. зн-ия измр-й первым и вторым прибором равны $\bar{x}_{\cdot 1} = x + C_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x + C_1 + \alpha$, $\bar{x}_{\cdot 2} = x + C_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = x + C_2 + \beta$. Отсюда находим общую ср-ю $\bar{x} = \frac{\bar{x}_{\cdot 1} + \bar{x}_{\cdot 2}}{2} = x + \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}$. Тогда фктн. сумма

$$S_{\text{фкт}} = \left(\bar{x}_{\cdot 1} - \bar{x}\right)^2 + \left(\bar{x}_{\cdot 2} - \bar{x}\right)^2 = \frac{\left(C_1 - C_2\right)^2}{2} + (C_1 - C_2)(\alpha - \beta) + \frac{\left(\alpha - \beta\right)^2}{2} \tag{18}$$

опр-ся, главным образом, первым слг. (поскольку слн. ошибки измер-й малы) и дсв-но отражает влияние фкт-а $C$. Отсюда сумма $Q_{\text{ост}} = \left(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \left(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{\cdot 1}\right)^2 + \left(\bar{x}_{12} - \bar{x}_{\cdot 2}\right)^2 + \left(\bar{x}_{22} - \bar{x}_{\cdot 2}\right)^2 = [(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2] + [(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2]$ опр-ся слн. ошибками измр-й и дсв-но отражает влияние слн. вел-н.

3*. Теперь рас-им общ-ю, фктн-ю, ост-ю дсп-и и сравним несколько из них ср. методом дспн-го анализа. Разделив суммы кв-ов отк-й на ств-е число сп-ей свободы, получим общ-ю, фктн-ю и ост-ю дсп-и:

$$S^2_{\text{общ}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{nm - 1},\ S^2_{\text{фкт}} = \frac{Q_{\text{фкт}}}{n - 1},\ S^2_{\text{ост}} = \frac{Q_{\text{ост}}}{n\left(m - 1\right)}, \tag{19}$$

где $n$ – число уровней фкт-а, $m$ – число нбл-й на каждом уровне.

Если нулевая гп. о рав-ве ср-х справедлива, то все эти дсп-и яв-ся несмещенными оценками гнр-ой дсп-и. Н-р, учитывая, что объем вбр-и $N = nm$, заключаем, что $S^2_{\text{общ}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{nm - 1} = \frac{Q_{\text{общ}}}{N - 1}$ – исправленная вбрч. дсп-я, к-ая известна, яв-ся несмещенной оценкой гнр-ой дсп-и.

Вернемся к задаче, поставленной в 1*: проверить при заданном уровне значимости $\alpha$ нулевую гп. $H_0$: $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n)$ о рав-ве нескольких ($n > 2$) ср-х норм-ых свк-ей с неизвестными, но одинаковыми дсп-ми. Покажем, что р-ие этой задачи сводится к сравнению фктн-ой и ост-ой дсп-й $\left(H_0' : S^2_{\text{фкт}} = S^2_{\text{ост}}\right)$ по крт-ю Фишера-Снедекора, т.е. находим слн. вел-у $F = \frac{S^2_{\text{фкт}}}{S^2_{\text{общ}}}$ из Т$_9$ по стн-ю

$$P[F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha(k_1 = n - 1, k = n(m - 1)) \tag{20}$$

и опр-ем $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F > F_{\text{кр}}$, то $H_0'$, а сдт-но, и $H_0$ отвергаются; если $F < F_{кр}$, – они принимаются.

Если гп. $H_0$ ложна, то с взр-ем расхождения между грв-ми ср. будет увеличиваться и фктн. дсп-я, т.е. получим $F > F_{\text{кр}}$ и $H_0'$ будет отвергнута.

Анч-но док-ся справедливость обратных утв.: из правильности (ложности) гп-ы о дсп-ях следует правильность (ложность) гп-ы о ср-х.

Итак, чтобы проверить нулевую гп. о рав-ве грв. ср-х норм-ых свк-й с одинаковыми дсп-ми, дт-но проверить по крт-ю $F$ нулевую гп. о рав-ве фктн-ой и ост-ой дсп-й. В этом состоит метод дспн. анализа.

**зм3**. Если $S^2_{\text{фкт}} < S^2_{\text{ост}}$, то уже отсюда следует справедливость гп-ы о рав-ве грв. ср-х и нет надобности прибегать к крт-ю $F$.

**п12**. Произведено по 4 исп-ия (см. табл. 11) на каждом из трех уровней $A_j$ ($j = \overline{1, 3}$). Методом дспн. анализа при уровне значимости $\alpha$ = 0,05 проверить нулевую гп. о рав-ве грв. ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм. свк-й с одинаковыми дсп-ми.

Таблица 11

| $i$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 52 | 42 |
| 2 | 52 | 54 | 44 |
| 3 | 56 | 56 | 50 |
| 4 | 57 | 58 | 52 |
| $\overline{x}_{\cdot j}$ | 54 | 55 | 47 |

Таблица 12

| $i$ | $A_1$ | | $A_2$ | | $A_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{i1}$ | $y_{i1}^2$ | $y_{i2}$ | $y_{i2}^2$ | $y_{i3}$ | $y_{i3}^2$ | |
| 1 | – 1 | 1 | 0 | 0 | – 10 | 100 | |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | – 8 | 64 | |
| 3 | 4 | 16 | 4 | 16 | – 2 | 4 | |
| 4 | 5 | 25 | 6 | 36 | 0 | 0 | |
| $Q_j = \Sigma\, y_{ij}^2$ | | 42 | | 56 | | 168 | $\Sigma Q_j = 266$ |
| $T_j$ | 8 | | 12 | | – 20 | | $\Sigma T_j = 0$ |
| $T_j^2$ | 64 | | 144 | | 400 | | $\Sigma\, T_j^2 = 608$ |

Р. Полагая $C$ = 52, находим $y_{ij} = x_{ij} - 52$ (см. табл. 12). По фм-ам (17), (17а) выч-ем $Q_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{n} Q_j - \frac{\left(\sum T_j\right)^2}{nm} = 266 - 0 = 266$, $Q_{\text{фкт}} = \frac{\sum T_j^2}{m} - \frac{\left(\sum T_j\right)^2}{mn} = \frac{608}{4} - 0 = 152$. Тогда $Q_{\text{ост}} = Q_{\text{общ}} - Q_{\text{фкт}} = 266 - 152 = 114$.

По фм-е (19) найдем фктн-ю и ост-ю дсп-и: $S^2_{\text{фкт}} = \frac{Q_{\text{фкт}}}{n-1} = \frac{150}{3-1} = 76$; $S^2_{\text{ост}} = \frac{Q_{\text{ост}}}{n(m-1)} = \frac{114}{3\cdot 3} = 12{,}67$. Отсюда $F = \frac{S^2_{\text{фкт}}}{S^2_{\text{общ}}} = \frac{76}{12{,}67} = 6$.

Из Т$_9$ находим $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)] = F_{\text{кр}}(0{,}05; 2; 9) = 4{,}26$. Т.к. $F > F_{\text{кр}}$ ($6 > 4{,}26$), то нулевую гп-у о рав-ве грв. ср-х отвергаем, т.е. грв. ср-ие различаются значимо (сущ-но).

**зм4**. Если нблм. зн-ия $x_{ij}$ – десятичные дроби с одним знаком после запятой, то полагаем $y_{ij} = 10x_{ij} - C$, где $C$ – примерно ср. зн-ие чисел $10x_{ij}$. В результате получим небольшие целые числа. Хотя при этом фктн-ая и ост-ая дсп-и увеличиваются в $10^2$ раз, но их отн-ие не изм-ся. Анч-но поступаем, если после запятой имеется $k$ знаков: $y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$.

4*. Рас-им двухфктн-ый (дфктн.) дспн. анализ. В многофктн-ом (мфктн.) дспн. анализе (при двух и более фкт-ов) процедура остается принципиально такой же, как и при однофктн. (офктн.) дспн. анализе, но выкладки усложняются. Н-р, пусть двумя микроскопами производятся измр-я частоты пвх-ти различными операторами. Требуется оценить, обуславливается ли рассеивание ср-х зн-й измр-й различием между приборами или между операторами, производящими измр-я.

Р. Осн. идея дспн. анализа в данном случае заключается в разложении суммы кв-ов отк-й общ. ср-го на компоненты, отвечающие предполагаемым фкт-ам изменчивости.

Пусть имеются два фкт-а $A = \{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_r\}$ и $B = \{B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_v\}$, т.е. весь материал разбивается на $rv$ гр-п. Для простоты огр-мся случаем, когда в каждой гр. имеется лишь одно нбл., так что общ. число нбл-й $N = rv$. Через $x_{ij}$ обз-им нбл-ие, попавшее в гр. $A_i$ по признаку $A$ и в гр. $B_j$ по признаку (фкт-у) $B$ (см. табл. 13).

Таблица 13

| B \ A | | j | | | | $\bar{x}_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_v$ | |
| $i$ | $A_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1v}$ | $\bar{x}_{1\cdot}$ |
| | $A_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2v}$ | $\bar{x}_{2\cdot}$ |
| | … | … | … | … | … | … |
| | $A_r$ | $x_{r1}$ | $x_{r2}$ | … | $x_{rv}$ | $\bar{x}_{r\cdot}$ |
| $\bar{x}_{\cdot j}$ | | $\bar{x}_{\cdot 1}$ | $\bar{x}_{\cdot 2}$ | … | $\bar{x}_{\cdot v}$ | $\bar{x}_{\cdot\cdot}$ |

Обз-им через

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}\ , \tag{21а}$$

$$\bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\ , \tag{21б}$$

$$\bar{x}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{rv}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}\ . \tag{21}$$

Осн. тожд-ву (16) офктн-го анализа здесь отвечает тожд-во

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left[x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x}_{\cdot\cdot}+\left(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)+\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)\right]^2 = \\ &= v\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right) + r\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left[x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x}_{\cdot\cdot}\right]^2 = Q_1+Q_2+Q_3. \end{aligned} \tag{22}$$

Врж-ия $Q_1$ и $Q_2$ наз. суммами кв-ов разностей между «строками» и между «столбцами» табл. 13. А $Q_3$ наз. ост-ой суммой кв-ов и хркз-ет влияние неучтенных фкт-ов.

Будем предполагать, что вел-ы $x_{ij}$ норм-о рсп-ны по закону $N(x, v, \sigma)$, где $\sigma^2$ – общ., но неизвестный парм-р дсп-и. И будем использовать данные табл. 13 для проверки гп-ы о рав-е центров $v_{ij}$. При этой гп-е вел-ы

$$Q/\sigma^2,\ Q_1/\sigma^2,\ Q_2/\sigma^2 \text{ и } Q_3/\sigma^2$$

рсп-ны по закону $\chi^2$ с $(rv-1)$, $(r-1)$, $(v-1)$ и $(r-1)(v-1)$ сп-ми свободы ств-но, а поэтому $Q$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ могут быть использованы для оценки $\sigma^2$. Эта оценка может быть проведена с помощью несмещенных хркс-ик (эмп. дсп-й):

$$S^2 = \frac{Q}{rv-1} = \frac{1}{rv-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2\ , \tag{23}$$

$$S_1^2 = \frac{Q_1}{r-1} = \frac{v}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2\ , \tag{23а}$$

$$S_2^2 = \frac{Q_2}{v-1} = \frac{r}{v-1}\sum_{j=1}^{v}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2\ , \tag{23б}$$

$$S_3^2 = \frac{Q_3}{(r-1)(v-1)} = \frac{1}{(r-1)(v-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2\ . \tag{23в}$$

Для проверки сп-и значимости расхождений, обнаруженных в ср-х по строкам и по столбцам, выч-ся кт-и:

$$F_A = \frac{\frac{1}{r-1}Q_1}{\frac{1}{(r-1)(v-1)}Q_3} = \frac{S_1^2}{S_3^2}\ ,\ F_B = \frac{\frac{1}{v-1}Q_2}{\frac{1}{(r-1)(v-1)}Q_3} = \frac{S_2^2}{S_3^2}\ . \tag{24}$$

Вел-ы $F_A$ и $F_B$ используем как и в офктн. анализе.

5*. Введем нек-ые упрощения для практических расчетов. Полезны сд. фм-ы:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{v} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv},\ Q_2 = \sum_{i=1}^{v}\frac{\left(\sum_{i=1}^{r}x_{ij}\right)^2}{r} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{v} - \frac{\sum_{j=1}^{v}\left(\sum_{i=1}^{r}x_{ij}\right)^2}{r} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}x_{ij}\right)^2}{rv}. \tag{25}$$

**п13**. Рас-им данные (см. табл. 14) об отк-ях диаметров шариков в микронах от общ. «ложного нуля», полученных на подшипниковом заводе десятью наладчиками, каждый из к-ых обслуживал по пять доводочных станков. Требуется сравнить влияние на рассеивание диаметров шариков точности станков и квалификации наладчиков.

Таблица 14

| Станки $i$ | $j$ – наладчики | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\sum_j x$ | $\left(\sum_j x\right)^2$ | $\sum_j x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | | | |
| | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ | | | |
| 1 | 3 | 9 | 7 | 49 | 3 | 9 | 6 | 36 | 6 | 36 | 7 | 49 | 6 | 36 | 3 | 9 | 8 | 64 | 3 | 9 | 52 | 2704 | 306 |
| 2 | 6 | 36 | 5 | 25 | 7 | 49 | 4 | 16 | 9 | 81 | 4 | 16 | 3 | 9 | 2 | 4 | 7 | 49 | 8 | 64 | 55 | 3025 | 349 |
| 3 | 8 | 64 | 6 | 36 | 3 | 9 | 2 | 4 | 7 | 49 | 8 | 64 | 6 | 36 | 9 | 81 | 3 | 9 | 8 | 64 | 60 | 3600 | 416 |
| 4 | 4 | 16 | 7 | 49 | 7 | 49 | 8 | 64 | 6 | 36 | 4 | 16 | 5 | 25 | 8 | 64 | 4 | 16 | 7 | 49 | 60 | 3600 | 384 |
| 5 | 6 | 36 | 2 | 4 | 6 | 36 | 6 | 36 | 8 | 64 | 9 | 81 | 7 | 49 | 6 | 36 | 8 | 64 | 1 | 1 | 59 | 3481 | 407 |
| $\sum_i x$ | 27 | | 27 | | 26 | | 26 | | 36 | | 32 | | 27 | | 28 | | 30 | | 27 | | 286 | | |
| $\left(\sum_i x_i\right)^2$ | 729 | | 729 | | 676 | | 676 | | 1296 | | 1024 | | 729 | | 784 | | 900 | | 729 | | | 16410 / 8272 | |
| $\sum_i x^2$ | | 161 | | 163 | | 152 | | 156 | | 266 | | 226 | | 155 | | 194 | | 202 | | 187 | | | 1862 |

Р. Используя (25) и данные табл. 14, находим

$Q_1 = \frac{16410}{10} - \frac{286^2}{5\cdot 10} = 1641{,}0 - 1635{,}9 = 5{,}1$ мк$^2$,

$Q_2 = 8272/5 - 1635{,}9 = 1654{,}4 - 1635{,}9 = 18{,}5$ мк$^2$, $\Rightarrow$

$Q_3 = 1862 - 1641{,}0 - 1654{,}4 + 1635{,}9 = 202{,}5$ мк$^2$,

$Q = 1862 - 1635{,}9 = 226{,}1$ мк$^2$.

$S_c^2 = 5{,}1/4 = 1{,}28$ – дсп-ия между станками,

$S_н^2 = 18{,}5/9 = 2{,}06$ – дсп. между наладчиками,

$S_o^2 = 202{,}5/36 = 5{,}62$ – дсп. остаточная,

$S^2 = 226{,}1/49 = 4{,}61$ – дсп. общая.

Нулевую гп-у проверим при помощи $F$ крт-ия по $T_9$ и $T_{15}$ из [35] при $k > 17$.

для ср-го кв-та между станками имеем $F_c = 5{,}62/1{,}28 = 4{,}39$

и для ср-го кв-та между наладчиками – $F_н = 5{,}62/2{,}06 = 2{,}73$.

Из $T_{15}$ по стн-ю $P(F_c > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)) = \alpha$ находим

$F_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 4) = 5{,}72$ и $F_{кр}(0{,}01;\ 36;\ 4) = 13{,}78$, а для $F_н$

$F_{кр}(0{,}05;\ 36;\ 9) = 2{,}86$ и $F_{кр}(0{,}01;\ 36;\ 9) = 4{,}59$.

Т.к. $F_c < F_{кр}$ и $F_н < F_{кр}$, то влияние станков и наладчиков на рассеивание яв-ся несущ-ми (незначимыми). Теперь в кач-е оценки дсп-и следует взять общий ср-й кв-т, т.е. $\sigma^2 = 4{,}61$ мк$^2$. Тогда поле рассеивания диаметров шариков можно при надежности в 99,73% принять равным $2\cdot 3\sigma = 2\cdot 3\cdot 2{,}15 \approx 12{,}9$ мк.

# 15.0. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

## 15.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

**Вопросы для самопроверки**

1. В чем состоит общее и особенности теории вер-и и мтч. стс-ки?
2. Охркз-те слн. сб-ия. Приведите ствщ. примеры.
3. Дайте классическое опр. вер-и сб-й. Что такое частота сб-й?
4. Приведите фм-ы комбинаторики и примеры.
5. Приведите фм-ы алг. сб-й и примеры.
6. В чем состоит суть геом-и и аксиоматики вер-ти?
7. Сформулируйте теорему сж-ия. Приведите примеры.
8. Что такое незв-ть сб-й, усл. вер-ть? Сформулируйте теорему умн-ия.
9. Приведите фм-ы полной вер-ти и Байеса. Примеры.
10. Посл-ти исп-й. Фм-ы Бернулли и Пуассона. Приведите примеры.
11. Наивероятнейшее число появлений сб-й. Приведите пример.
12. Предельные теоремы. Рсп-ие Пуассона и его применение.
13. Локальная и интн-я теоремы Муавра-Лапласа и их применение.
14. В чем заключается суть закона больших чисел? Примеры.

## 15.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Вопросы для самопроверки**

1. Понятие слн. вел-ы. Примеры.
2. Каковы виды слн. вел-н и как они хркз-ся?
3. Что такое ряд рсп-я и муг-к рсп-я слн. вел-ы $X$? Приведите примеры.
4. Что такое фк-я рсп-ия, плотность рсп-ия и крв-я рсп-ия? Приведите примеры.
5. Мтч. ож-ие, мода, медиана, моменты и дисперсия. Примеры.
6. Рсп-ия равномерное, Пуассона, норм-ое и пкзт-ое. Примеры.
7. Каковы виды предельных теорем? Охркз-те их и приведите примеры.
8. Приведите нерав-во Чебышева, теоремы Чебышева, Бернулли, Пуассона и Маркова.
9. Характеристические фк-и и их применение.
10. Практическое применение ЦПТ. Примеры.

**Задания для кр. работы**: по образцу п1-п31 из 15.1 и п1-п22 из 15.2 р-ть сд. задачи.

В задачах 1-20 найти вер-ти указанных сб-й, пользуясь правилами сж-ия и умн-ия вер-ей.

1. Для сигнализации об аварии установлены два незв-мо работающих сигнализатора. Вер-ть того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95, а второй – 0,80. Найти вер-ть того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

2. Отдел техн-го кр-ля проверяет изделия на стандартность (стдн.). Вер-ть того, что наугад взятое изделие окажется бракованным (бркн.), равна 0,15. Проверено три изделия. Какова вер-ть того, что два из них бркн-ые?

3. В гр-е студентов (ст.), состоящей из 20 человек, 12 юношей и 8 девушек. Для дежурства слн. образом отобрано двое ст-ов. Какова вер-ть того, что среди них будет один юноша и одна девушка?

4. В ящике имеется 12 деталей (дт.), из к-ых 5 дт. нестандартны (нестд.). Сборщик наудачу извлекает из ящика 4 дт. Какова вер-ть того, что все они будут нестд-ны?

5. Ст-т знает 15 из 20 вопросов программы. Какова вер-ть того, что он знает все три вопроса, предложенные экзаменатором?

6. Техн. устройство содержит три незв-мо работающих эл-та. Вер-ть отказа этих эл. ств-но равны 0,05; 0,07 и 0,09. Найти вер-ть того, техн. устройство не сработает, если для этого дт-но, чтобы отказал хотя бы один эл.

7. Для поражения цели дт-но одного попадания. По цели произведено три выстрела с вер-ми попадания 0,75; 0,85; 0,90 ств-но. Найти вер-ть того, что цель будет поражена.

8. Вер-ть попадания в мишень при трех выстрелах хотя бы один раз равна 0,875. Найти вер-ть попадания при одном выстреле.

9. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вер-ть того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,3. Найти вер-ть того, что из трех проверенных изделий только два будут высшего сорта.

10. Иссл-ль разыскивает нужные ему сведения в трех справочниках. Вер-ть того, что эти сведения находятся в первом, во втором и в третьем справочнике равны ств-но 0,7; 0,6; 0,9. Найти вер-ть того, что требуемые сведения содержатся хотя бы в одном справочнике.

11. В урне находятся 15 шаров, пять из к-ых красные, а остальные белые. Наудачу друг за другом извлекаются три шара. Какова вер-ть того, что все они будут красными?

12. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Какова вер-ть, что оба шара белые?

13. Три стрелка производят выстрел по цели. Вер-ть попадания в цель первого стрелка равна 0,6, второго – 0,8, третьего – 0,9. Найти вер. того, что произойдет не менее двух попаданий.

14. В урне 20 шаров, из к-ых 7 красных, а остальные белые. Наудачу вынули три шара. Какова вер., что все они белые?

15. Вер-ть того, что электролампочка неисправна, равна 0,2. Какова вер. того, что хотя бы одна из четырех лампочек исправна?

16. В гр. из 18 ст-ов имеется 5 отличников. Выбираются наудачу три ст-та. Какова вер. того, что все они отличники?

17. В ящике находятся 15 дт-й, пять из к-ых бркн-ые. Наудачу отобраны три дт. Какова вер., что все они не окажутся бркн-ми?

18. Имеются два ящика, в первом из к-ых 5 белых и 8 красных шаров, а во втором – 3 белых и 2 красных шара. Из каждого ящика вынимается наудачу по одному шару. Какова вер-ть того, что один из них будет красным, а другой белым?

19. Вер-ть выхода из строя станка в течение одного рабочего дня равна 0,01. Какова вер-ть того, что за три рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя?

20. Вер-ть обнаружения цели при одном цикле обзора радиолокационной станцией равна 0,3. Какова вер-ть обнаружения цели хотя бы один раз при четырех циклах обзора?

**Решение типовых задач.**

**тз1**. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель незв-мо от друг друга. Вер-ти попадания в цель для каждого из них равны ств-но 0,7; 0,8; 0,9. Найти вер. того, что: а) в цель попадет только один стрелок; б) в цель попадут только два стрелка; в) в цель попадет хотя бы один стрелок.

Р. а) Рас-им сд. сб-я: $A_1$, $A_2$, $A_3$ $(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3)$ – в цель попал (не попал) ств-но I, II, III стрелок. По усл., $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}9$; $P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$; $P(\overline{A}_3) = 0{,}1$. Пусть сб. $B$ – попал только один стрелок. Тогда $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Отсюда, в силу несовместности событий-слг-х и незв-сти событий-сомножителей, получим

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = 0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}1 + 0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}1 + 0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}9 = 0{,}092.$$

б) Пусть сб. $C$ – попадут только два стрелка, т.е. $C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$. Тогда $P(C) = 0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}1 + 0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}9 + 0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}9 = 0{,}398$.

в) пусть сб. $D$ – попал хотя бы один стрелок. Тогда противоположное сб. $\overline{D}$ – не попал ни один из них, т.е. $\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Поэтому $P(\overline{D}) = 0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}1 = 0{,}006$. Отсюда $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

**тз2**. Среди 15 микрокалькуляторов (мркл.), имеющихся в вычт-ой лаборатории, лишь 6 новых, а остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три мркл-ра. Какова вер-ть, что все они окажутся новыми?

Р. Рас-им сб-я: $A_1$, $A_2$, $A_3$ – новые мркл-ы, взятые ств-но в I, II, III раз. Тогда $P(A_1A_2A_3) =$ $= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \dfrac{6}{15}\cdot\dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{4}{13} = \dfrac{4}{91}$.

**В задачах** 21-40 две незв-мые дк. слн. вел-ы $X$ и $Y$ заданы своими законами рсп-я. Найти мтч. ож-ие и дсп-ю для слн. вел-ы $Z = 3X - 2Y$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21. | $X$ | – 6 | 8 | 9 | 10 | $Y$ | – 8 | 2 |
| | $P$ | 0,1 | 0,1 | 0,6 | 0,2 | $P$ | 0,4 | 0,6 |
| 22. | $X$ | – 2 | – 1 | 0 | 3 | $Y$ | – 3 | 2 |
| | $P$ | 0,2 | 0,5 | 0,1 | 0,2 | $P$ | 0,3 | 0,7 |
| 23. | $X$ | – 5 | – 4 | – 2 | 3 | $Y$ | – 8 | – 1 |
| | $P$ | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,2 | $P$ | 0,7 | 0,3 |
| 24. | $X$ | – 6 | – 3 | 2 | 1 | $Y$ | – 2 | 8 |
| | $P$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | $P$ | 0,2 | 0,8 |
| 25. | $X$ | – 4 | – 2 | – 1 | 3 | $Y$ | – 3 | – 1 |
| | $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | $P$ | 0,4 | 0,6 |
| 26. | $X$ | – 2 | 0 | 1 | 4 | $Y$ | 1 | 3 |
| | $P$ | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | $P$ | 0,2 | 0,8 |
| 27. | $X$ | – 7 | – 5 | – 2 | 3 | $Y$ | – 3 | 4 |
| | $P$ | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,1 | $P$ | 0,1 | 0,9 |
| 28. | $X$ | – 1 | 2 | 4 | 8 | $Y$ | – 2 | 1 |
| | $P$ | 0,2 | 0,5 | 0,1 | 0,2 | $P$ | 0,8 | 0,2 |
| 29. | $X$ | – 8 | – 6 | – 1 | 5 | $Y$ | 3 | 7 |
| | $P$ | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | $P$ | 0,2 | 0,8 |
| 30. | $X$ | – 2 | 1 | 3 | 8 | $Y$ | 7 | 10 |
| | $P$ | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | $P$ | 0,1 | 0,9 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31. | $X$ | – 7 | 0 | 2 | 6 | $Y$ | – 3 | 2 |
| | $P$ | 0,5 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | $P$ | 0,3 | 0,7 |
| 32. | $X$ | – 4 | – 1 | 3 | 8 | $Y$ | 1 | 4 |
| | $P$ | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 0,1 | $P$ | 0,6 | 0,4 |
| 33. | $X$ | – 5 | – 2 | 3 | 7 | $Y$ | 1 | 5 |
| | $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | $P$ | 0,2 | 0,8 |
| 34. | $X$ | – 3 | – 1 | 0 | 2 | $Y$ | – 3 | 2 |
| | $P$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,3 | $P$ | 0,5 | 0,5 |
| 35. | $X$ | – 8 | – 6 | – 1 | 3 | $Y$ | 2 | 8 |
| | $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | $P$ | 0,3 | 0,7 |
| 36. | $X$ | – 2 | – 1 | 3 | 8 | $Y$ | 1 | 5 |
| | $P$ | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,2 | $P$ | 0,7 | 0,3 |
| 37. | $X$ | – 3 | 0 | 2 | 7 | $Y$ | 3 | 4 |
| | $P$ | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 0,1 | $P$ | 0,2 | 0,8 |
| 38. | $X$ | – 5 | 1 | 2 | 4 | $Y$ | 2 | 3 |
| | $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | $P$ | 0,4 | 0,6 |
| 39. | $X$ | – 3 | 2 | 4 | 6 | $Y$ | 3 | 7 |
| | $P$ | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | $P$ | 0,9 | 0,1 |
| 40. | $X$ | – 3 | – 7 | 1 | 2 | $Y$ | 2 | 4 |
| | $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | $P$ | 0,3 | 0,7 |

**тз1**. Заданы законы рсп-я двух незв. слн. вел-н $X$ и $Y$. Найти мтч. ож-е и дсп-ю для слн. вел-ы $Z = 2X - 7Y$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | – 5 | 2 | 3 | 4 | $Y$ | 1 | 4 |
| $P$ | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | $P$ | 0,2 | 0,8 |

Р. Найдем мтч. ож-ия дсп-и и слн. вел-н $X$, $Y$ и мтч. ож-я $X^2$, $Y^2$. $M(X) = -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3$; $M(Y) = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}8 = 3{,}4$. $M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3$; $M(Y^2) = 1\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}8 = 13{,}0$. Отсюда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21$; $D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 13{,}0 - 3{,}4^2 = 1{,}44$. Тогда $M(Z) = M(2X - 7Y) = 2M(X) - 7M(Y) = 2(-0{,}3) - 7\cdot 3{,}4 = -2{,}4{,}4$; $D(Z) = D(2X - 7Y) = 4D(X) + 49\cdot D(Y) = 4\cdot 15{,}21 + 49\cdot 1{,}44 = 131{,}4$.

**В задачах** 41-60 слн. вел-а $X$ задана фк-ей рсп-я вер-ей $F(x)$. Найти: а) вер-ть попадания слн. вел-ы $X$ в инр. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; б) плотность рсп-я вер-ей $f(x)$ слн. вел. $X$; в) мтч. ож-ие слн. вел-ы $X$.

41. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 \text{ при } -1 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

51. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

42. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

51. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{27}x^2 + \frac{2}{9}x \text{ при } 0 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

43. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

53. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{1}{49}(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } x > 5 \end{cases}$

44. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

54. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le \frac{1}{4}, \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \text{ при } \frac{1}{4} < x \le \frac{5}{4}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{5}{4}. \end{cases}$

45. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

55. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 \text{ при } -1 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

46. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \frac{1}{16}(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

56. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

47. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 \text{ при } -1 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

57. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\frac{1}{2}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ при } -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

48. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

58. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

49. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le \frac{1}{5}, \\ \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \text{ при } \frac{1}{5} < x \le \frac{5}{6}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{5}{6}. \end{cases}$

59. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5} \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

50. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

60. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{25}(x+1)^2 \text{ при } -1 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

**тз1**. Слн. вел-а $X$ задана фк-ей рсп-я вер-ей $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2 \text{ при } -3 < x \le 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$ Найти: а) вер. попадания слн. вел-ы $X$ в инр-л $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; б) плотность рсп-я вер-ей $f(x)$ слн. вел-ы $X$; в) мтч. ож-ие слн. вел-ы $X$.

Р. Вер-ть того, что слн. вел-а $X$ примет зн-ие, заключенное в инр-е $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, равна приращению фк-и рсп-я на этом инр-е: $P\left(-\frac{1}{2} < X < -\frac{1}{4}\right) = F\left(-\frac{1}{4}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 = \frac{7}{48}$.

б) Найдем плотность рсп-я $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -3, \\ \frac{2}{9}(x+3) \text{ при } -3 < x \le 0, \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

в) По фм-е $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ находим мтч. ож-ие слн-й вел-ы $X$: $M(X) = \int_{-3}^{0} x \cdot \frac{2}{9}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int_{-3}^{0}\left(x^2+3x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = -1$.

**В задачах** 61-80 предполагается, что слн. отклонения (отк.) контролируемого (крум.) размера дт-ли, изготовленной станком-автоматом, от проектного размера подчиняются норм. закону рсп-я со ср. кв. отк-ем $\sigma$ (мм) и мтч. ож-ем $a = 0$. Дт-ль, изготовленная станком-автоматом, считается годной, если отк-ие ее крум-го размера от проектного по абс. вел-е не превышает $m$ (мм). Сколько процентов годных дт-ей изготовляет станок?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 61. $m = 15$, $\sigma = 7$. | 66. $m = 17$, $\sigma = 10$. | 71. $m = 40$, $\sigma = 22$. | 76. $m = 28$, $\sigma = 16$. |
| 62. $m = 18$, $\sigma = 10$. | 67. $m = 12$, $\sigma = 8$. | 72. $m = 60$, $\sigma = 35$. | 77. $m = 32$, $\sigma = 18$. |
| 63. $m = 20$, $\sigma = 10$. | 68. $m = 40$, $\sigma = 18$. | 73. $m = 50$, $\sigma = 30$. | 78. $m = 44$, $\sigma = 20$. |
| 64. $m = 6$, $\sigma = 3$. | 69. $m = 25$, $\sigma = 12$. | 74. $m = 35$, $\sigma = 17$. | 79. $m = 50$, $\sigma = 28$. |
| 65. $m = 8$, $\sigma = 5$. | 70. $m = 30$, $\sigma = 18$. | 75. $m = 45$, $\sigma = 20$. | 80. $m = 38$, $\sigma = 16$. |

**тз1**. Станок-автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отк-ие $X$ его диаметра от проектного размера по абс. вел-е меньше 0,9 мм. Считая, что слн. вел-а $X$ рсп-на норм. с нулевым мтч. ож-ем и со ср. кв. отк-ем $\sigma = 0{,}5$ мм, найти, сколько процентов годных шариков изготовляет станок-автомат.

Р. Воспользуемся фм-ой для выч-ия вер-ти заданного отк-ия норм-но рсп-ой слн. вел-ы $X$ от ее мтч-го ож-я $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, где $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, $\Phi(x)$ – фк-я Лапласа (см. $T_2$ из $П_4$). По усл-ю задачи, $a = M(X) = 0$; $\sigma = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}9$, поэтому $P(|X| < 0{,}9) = 2\Phi(1{,}8) = 2 \cdot 0{,}4641 = 0{,}9282$. Т.о., станок-автомат изготавливает 92,82% годных шариков.

**В задачах** 81-100 известно, что проведено $n$ равноточных измерений (измр.) нек-ой физической вел-ы и найдено ср. арифч-ое результатов измр-й $\bar{x}$. Все измр-я проведены одним и тем же прибором с известным ср. кв. отк-ем ошибок измр-й. Считая результаты измр-й норм-но рсп-ной слн. вел-ой, найти с надежностью $\gamma$ доверительный (дврт.) инр-л для оценки истинного зн-ия измр-мой физической вел-ы.

| | |
|---|---|
| 81. $\bar{x} = 40{,}2$; $\sigma = 2{,}3$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 16$. | 91. $\bar{x} = 47{,}2$; $\sigma = 3{,}4$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 28$. |
| 82. $\bar{x} = 83{,}1$; $\sigma = 3{,}2$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 24$. | 92. $\bar{x} = 53{,}1$; $\sigma = 4{,}2$; $\gamma = 0{,}85$; $n = 8$. |
| 83. $\bar{x} = 45{,}7$; $\sigma = 3{,}7$; $\gamma = 0{,}93$; $n = 9$. | 93. $\bar{x} = 37{,}8$; $\sigma = 6{,}7$; $\gamma = 0{,}80$; $n = 30$. |
| 84. $\bar{x} = 48{,}9$; $\sigma = 4{,}1$; $\gamma = 0{,}85$; $n = 15$. | 94. $\bar{x} = 41{,}7$; $\sigma = 3{,}4$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 12$. |
| 85. $\bar{x} = 20{,}3$; $\sigma = 1{,}8$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 18$. | 95. $\bar{x} = 87{,}4$; $\sigma = 7{,}1$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 14$. |
| 86. $\bar{x} = 73{,}2$; $\sigma = 5{,}7$; $\gamma = 0{,}92$; $n = 25$. | 96. $\bar{x} = 91{,}2$; $\sigma = 6{,}8$; $\gamma = 0{,}85$; $n = 17$. |

87. $\bar{x} = 88{,}3$; $\sigma = 6{,}1$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 30$.

88. $\bar{x} = 68{,}1$; $\sigma = 5{,}1$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 17$.

89. $\bar{x} = 72{,}8$; $\sigma = 4{,}7$; $\gamma = 0{,}92$; $n = 14$.

90. $\bar{x} = 83{,}7$; $\sigma = 6{,}2$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 12$.

97. $\bar{x} = 48{,}5$; $\sigma = 4{,}2$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 18$.

98. $\bar{x} = 71{,}7$; $\sigma = 5{,}3$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 14$.

99. $\bar{x} = 82{,}5$; $\sigma = 3{,}4$; $\gamma = 0{,}90$; $n = 20$.

100. $\bar{x} = 34{,}2$; $\sigma = 2{,}8$; $\gamma = 0{,}95$; $n = 22$.

Ук. к р-ю задач 81-100 (см. также 10°: 15.1). Дврт-ым наз. такой инр., к-ый с заданной надежностью $\gamma$ покрывает оцениваемый парм-р.

Для оценки мтч. ож-я $a$ норм-но рсп-ной слн. вел-ы по выборочной ср-ей $\bar{x}$ при известном $\sigma$ служит дврт. инр-л $\bar{x} - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, где $t$ – такое зн. арг-а фк-и Лапласа $\Phi(t)$ (см. $T_2$), при к-ом $\Phi(t) = \dfrac{1}{2}\gamma$.

**тз1**. Пусть в результате $n = 25$ измр-й ср. арифч-ое результатов измр-й $\bar{x} = 42{,}5$ с известным ср. кв. отк-ем $\sigma = 2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$ дврт. инр-л, покрывающий мтч. ож-ие $a$.

Р. По $T_2$ находим $t$ из рав-ва $\Phi(t) = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}95 = 0{,}475$. Получаем $t = 1{,}95$. Отсюда дврт. инр-л имеет вид $42{,}5 - \dfrac{1{,}96\cdot 2{,}1}{5} < a < 42{,}5 + \dfrac{1{,}96\cdot 2{,}1}{5}$, или $41{,}7 < a < 43{,}3$.

**В задачах** 101-120 задана вбр-ка зн-й норм-но рспн-го признака $X$ (даны зн-я признака $x_i$ и ствщ-ие им частоты $n_i$). Найти: а) вбрч-ю ср. $\bar{x}$ и исправленное ср. кв. отк-ие $s$; б) дврт. инр-л, покрывающий неизвестное мтч. ож-ие $a$ признака $X$; в) дврт. инр-л, покрывающий неизвестное ср. кв. отк-ие $\sigma$ признака $X$ (наждежность оценки во всех вариантах считать равной $\gamma = 0{,}95$).

| № | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 101. | $x_i$ | – 5 | – 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| | $n_i$ | 2 | 3 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 102. | $x_i$ | – 3 | – 2 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| | $n_i$ | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 1 |
| 103. | $x_i$ | – 5 | – 4 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| | $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| 104. | $x_i$ | – 6 | – 4 | – 3 | 2 | 3 | 5 |
| | $n_i$ | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 105. | $x_i$ | – 2 | – 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| | $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 3 | 1 |
| 106. | $x_i$ | – 7 | – 6 | – 4 | 2 | 3 | 5 |
| | $n_i$ | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| 107. | $x_i$ | – 3 | – 2 | 1 | 4 | 5 | 7 |
| | $n_i$ | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 3 |
| 108. | $x_i$ | – 5 | – 2 | – 1 | 2 | 4 | 6 |
| | $n_i$ | 1 | 4 | 6 | 5 | 1 | 3 |
| 109. | $x_i$ | – 6 | – 2 | – 1 | 3 | 5 | 7 |
| | $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 1 |
| 110. | $x_i$ | – 3 | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| | $n_i$ | 4 | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 |

| № | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111. | $x_i$ | – 3 | – 2 | 1 | 3 | 4 | 7 |
| | $n_i$ | 1 | 4 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 112. | $x_i$ | – 3 | – 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | $n_i$ | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 113. | $x_i$ | – 5 | – 4 | 1 | 3 | 6 | 8 |
| | $n_i$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 1 |
| 114. | $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| | $n_i$ | 1 | 4 | 3 | 3 | 4 | 1 |
| 115. | $x_i$ | – 2 | – 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| | $n_i$ | 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 116. | $x_i$ | – 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| | $n_i$ | 2 | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 |
| 117. | $x_i$ | – 5 | – 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | $n_i$ | 3 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 |
| 118. | $x_i$ | – 4 | – 2 | – 1 | 3 | 5 | 6 |
| | $n_i$ | 1 | 5 | 5 | 4 | 3 | 1 |
| 119. | $x_i$ | – 2 | – 1 | 2 | 4 | 5 | 7 |
| | $n_i$ | 1 | 5 | 5 | 1 | 3 | 3 |
| 120. | $x_i$ | – 4 | – 2 | – 1 | 2 | 3 | 7 |
| | $n_i$ | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |

**тз1**. Задана вбр-ка зн-й $X$, имеющего норм. рсп-ие:

| $x_i$ | – 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

. Требуется: а) найти вбрч-ю ср. $\bar{x}$ и исправленное ср. кв. отк-ие $s$; б) указать дврт. инр-л, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное мтч. ож-ие $a$ признака $X$; в) указать дврт. инр., покрывающий с надежностью 0,95 ср. кв. отк-ие $\sigma$ признака $X$.

Р. а) Выч-им объем вбр-ки: $n = \Sigma n_i = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10$. Тогда $\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma n_i x_i = \frac{1}{10} \times$ $\times [-2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1] = 2$; $s^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}[(-2-2)^2\cdot 2 + (1-2)^2\cdot 1 + (2 - 2)^2\cdot 2 + (3-2)^2\cdot 2 + (4-2)^2\cdot 2 + (5-2)^2\cdot 1] = 5{,}76$; $s = 2{,}4$.

б) Искомый доверительный инр. для мтч. ож-я $a$ имеет вид $\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$, где $t_\gamma$ находим по $T_5$ прлж-ия $П_4$. При $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ получаем $t_\gamma = 2{,}26$. Тогда $\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 - 2{,}26\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 0{,}3$, $\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 + 2{,}26\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 3{,}7$. Т.о., $0{,}3 < a < 3{,}7$.

в) Дврт. инр. для генерального (гнр.) ср. кв. отк-я $\sigma$ имеет вид $s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)$, если $q < 1$ и $0 < \sigma < s(1 + q)$, если $q \geq 1$. Ствщ. зн-я $q$ берем из $T_6$: $П_4$. По заданным $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ находим $q = 0{,}65$. Теперь искомый дврт. инр. запишется сд. образом: $s(1 - 0{,}65) < \sigma < s(1 + 0{,}65)$ или $0{,}84 < \sigma < 3{,}96$.

## 15.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. КОРРЕЛЯЦИЯ

### Вопросы для самопроверки

1. Какие осн. задачи мтч. стс-ки вы знаете?
2. В чем состоит суть вбрч-го метода?
3. Что наз. врцн. рядом, гистограммой и полигоном стсч-го рсп-я?
4. Как выравнивать стсч. ряды?
5. Охркз-те стсч. рсп-я: показательное, гамма-рсп., Пирсона, Стьюдента.
6. Как вы понимаете точечные оценки парм-ов рсп-ия?
7. В чем заключается суть инр-ой оценки?
8. Где и как используется метод нм-их кв-ов?
9. Что такое крцн. момент и коэф-т крц-ии?
10. Где и как применяется метод крц-и?
11. Приведите ур-я рег-и. Как опр-ся угл. коэф-ы рег-и?

**Задачи для самост. работы**: по образцу п1-п11 р-ть задачи 1-20.

1. Вбр-ка задана в виде частот:

| $x_i$ | 2 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 3 | 6 |

. Найти рсп-ие отс. частот. Ук: найдем объем вбр-и $n = 1 + 3 + 6 = 10$ и отс. частоты: $P_1^* = 1/10 = 0{,}1$; $P_2^* = 3/10 = 0{,}3$; $P_3^* = 6/10 = 0{,}6$. О:

| $x_i$ | 2 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,6 |

.

2. Вбр. задана в виде частот:

| $x_i$ | 4 | 7 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 2 | 3 | 10 |

. Найти рсп-ие отс. частот.

О:

| $x_i$ | 4 | 7 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,25 | 0,10 | 0,15 | 0,50 |

.

3. Найти эмпирическую (эмп.) фк. по данному рсп-ию вбр-и:

| $x_i$ | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 15 | 25 |

. Начертить график (грф.) полученной фк. Ук: найдем $n = 10 + 15 + 25 = 50$ – объем вбр-и. Нм. варианта равна ед-це, сд-но, $F^*(x) = 0$ при $x \leq 1$. Зн-ие $x < 4$, а именно $x_1 = 1$, нбл-сь 10 раз, тогда $F^*(x) = 10/50 = 0{,}2$ при $1 < x \leq 4$ и т.д. О: $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1, \\ 0{,}2 \text{ при } 1 < x \leq 4, \\ 0{,}5 \text{ при } 4 < x \leq 6, \\ 1 \text{ при } x > 6 \end{cases}$ (рис. 1).

4. Найти эмп. фк-ю по данному рсп. вбр-и:

| $x_i$ | 2 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 3 | 2 | 4 |

О: $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}1 \text{ при } 2 < x \le 5, \\ 0{,}4 \text{ при } 5 < x \le 7, \\ 0{,}6 \text{ при } 7 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$

5. Найти эмп. фк-ю по данному рсп. вбр-и:

| $x_i$ | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 2 | 3 |

О: $F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 4, \\ 0{,}4 \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 07 \text{ при } 7 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$

6. Построить полигон частот по данному рсп. вбр-и:

| $x_i$ | 1 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 20 | 10 | 14 | 6 |

Ук: отложим на оси $Ox$ варианты $x_i$, на оси $Oy$ – $n_i$, соединив точки $(x_i, n_i)$ отрезками прямых, получим полигон частот (рис. 2).

7. Построить полигон частот вбр-и

| $x_i$ | 2 | 3 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 15 | 5 | 20 |

8. Построить полигон частот вбр-и

| $x_i$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 15 | 30 | 20 | 25 |

9. Построить полигон отс. частот по данному рсп. вбр-и.

| $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 0,15 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,45 |

Ук: отложим на оси $Ox$ варианты $x_i$, оси $Oy$ – $n_i$. Соединив тч-и $(x_i, w_i)$ отрезками пм-х, получим искомый полигон отс. частот (рис. 3).

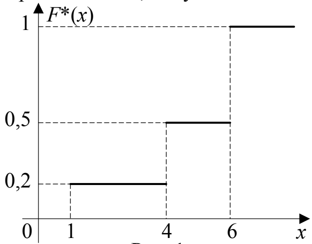


Рис. 1

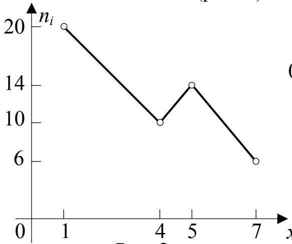


Рис. 2

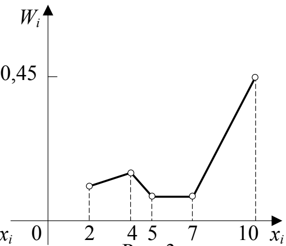


Рис. 3

10. Построить гистограмму частот по данному рсп. вбр-и объема $n = 100$:

| Номер интервала | Частичный интервал | Сумма частот вариант интервала | Плотность частоты |
|---|---|---|---|
| $i$ | $x_i - x_{i+1}$ | $n_i$ | $n_i/h$ |
| 1 | 1-5 | 10 | 2,5 |
| 2 | 5-9 | 20 | 5 |
| 3 | 9-13 | 50 | 12,5 |
| 4 | 13-17 | 12 | 3 |
| 5 | 17-21 | 8 | 2 |

Ук: построим на оси $Ox$ заданные инр-ы $h = 4$, на оси $Oy$ отложим отрезки, равные ствщ. плотностям частоты $n_i/h$, н-р, для инр-а (1, 5) $n_i/h = 10/4 = 2{,}5$; анч-но строят остальные отрезки.

По анг-и с п6-п8 р-ть сд. задачи:

11. В результате 8 измр-й рст-ия между двумя пунктами получены сд. зн-я (в км): 216,54; 216,53; 216,51; 216,56; 216,57; 216,55; 216,52; 216,54. Найдите несмещенные оценки мтч. ож-я и дсп-и измрм-го рст-я. Опр-те дврт. инр-ы для мтч. ож-я ср. кв. отк-я с надежностью 0,95. О: $\tilde{m}_\xi = 216{,}54$; $\tilde{D}_\xi = 0{,}0004$; $l_{m_\xi} = (216{,}5233; 216{,}5567)$, $l_{\tilde{\sigma}_\xi} = (0{,}003; 0{,}028)$.

12. Четырьмя способами были проведены измр-я омического (омч.) сопр-я, точность к-ых хркз-ся ср. квч. отк-ми: $\sigma_1 = 3$ Ом, $\sigma_2 = 1$ Ом, $\sigma_3 = 2$ Ом, $\sigma_4 = 4$ Ом. Результаты измр-й $x_1 = 1002$ Ом, $x_2 = 998$ Ом, $x_3 = 1003$ Ом, $x_4 = 997$ Ом. Найти прж. зн-ие омч. сопр-я и оценить его точность. О: $m_\xi = 999{,}1539$, $\sigma_{\tilde{m}_\xi} = 0{,}838$.

13. Емкость (емк.) конденсатора измр-ют 12 раз и получают сд. результаты (в микрофарадах): 3,2364; 3,253; 3,239; 3,231; 3,237; 3,235; 3,234; 3,235; 3,236; 3,233; 3,235; 3,234. Опр-ть: а) дврт. инр-л для мтч. ож-я зн-ия емк-и конденсатора с надежностью 0,99; б) между какими границами с надежностью 0,96 находится ср. квч. отк-ие возможного результата измр-я.

О: $l_{\widetilde{m}_\xi} = (3{,}2332;\ 3{,}2368)$, $l_{\widetilde{\sigma}_\xi} = (0{,}0014;\ 0{,}0035)$.

14. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью 0,86 точность мтч. ож-я $m_\xi$ была 0,5, если ср. квч. отк-ие $\sigma_\xi = 4$? О: $n \geq 139$.

15. Методом мксн. правдоподобия найти ошибку парм-а $a$ рсп-я Пуассона по вбр-е $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ и док-ть несмещённость полученной оценки. О: $a = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \widetilde{m}_\xi$. Очевидно, оценка несмешанная: $m_a = m_\xi = a$.

По анг-и с п9 р-ть сд. задачи:

16. Результаты равноточных измр-й нек-ой вел-ы $y$, отвечающих ряду зн-й $x$, приведены в табл.:

| $x_i$ | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,4 | 2,8 | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | – 1,48 | – 1,15 | – 0,7 | – 0,1 | 1,35 | 1,84 | 2,25 | 2,92 | 3,45 |

Предполагая, что верна зв-ть $y = ax + b$, опр-ть оценки коэф-ов $a$ и $b$. О: $y = 1{,}657x - 1{,}72$.

17. Пусть зв-ть признака $y$ от признака $x$ хркз-ся табл-ей:

| $x_i$ | – 4 | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,5 | 1,4 | 0,1 | – 0,8 | – 2 | – 2,6 | – 1,2 | – 0,4 | 1,2 | 3,6 |

Сост-ть ур-ие парб-ы по методу нм-их кв-ов. О: $y = -1{,}902 - 0{,}304x + 0{,}275x^2$.

18. Себестоимость $y$ одного экземпляра книги в зв-ти от тиража $x$ хркз-ся данными табл.:

| $x_i$, тыс. экз. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$, р. | 1,25 | 1,15 | 1,00 | 0,80 | 0,65 | 0,41 | 0,36 | 0,20 | 0,15 | 0,1 |

Применив метод нм-х кв-ов, опр-ть коэф-ы для гпрбч. зв-ти вида $y = a/x + b$. О: $y = 00{,}302 + 1{,}22/x$.

По анг-и с п10, п11 р-ть сд. задачи:

19. Результаты измр-й вел-н $X$ и $Y$ приведены в крцн-ой табл. Найти вбрч-ое крцн. отн-ие $\eta_{x/y}$ и, применив метод нм-х кв-ов, опр-ть вбрч. ур-ие рег-и $x = a_0 + a_1y + a_2y^2$. О: $\eta_{x/y} = 0{,}96$, $x = 3{,}18 + 0{,}02y + 2{,}8y^2$.

| $y$ \ $x$ | 6 | 30 | 50 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | – | – | 15 |
| 3 | 1 | 14 | – | 15 |
| 4 | – | 2 | 18 | 20 |
| $n_x$ | 16 | 16 | 18 | $n = 50$ |

20. Измр-лись длина $\xi$ и диаметр $\eta$ 500 роликов. Результаты измр-й (в мм) даны в табл. Найти вбрч. коэф-т крц-и $\widetilde{\rho}_{\xi\eta}$. Написать вбрч. ур-ие пм-х рег-и $\xi$ на $\eta$ и $\eta$ на $\xi$. О: $\widetilde{\rho}_{\xi\eta} = 0{,}76$, $x - 35{,}8 = 0{,}76\,\dfrac{15{,}2}{4{,}96}\,(y - 13{,}92)$, $y - 13{,}92 = 0{,}76\cdot\dfrac{4{,}96}{15{,}2}\times(x - 35{,}8)$.

| $y$ \ $x$ | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | – | 2 | – | – | – | – | 4 |
| 8 | – | 1 | 4 | – | – | – | – | 5 |
| 12 | – | 4 | 3 | 10 | – | – | – | 17 |
| 16 | – | 2 | – | 2 | 3 | 6 | – | 13 |
| 20 | – | – | – | – | 5 | 4 | – | 9 |
| 24 | – | – | – | – | – | 1 | 1 | 2 |
| $n_x$ | 2 | 7 | 9 | 12 | 8 | 11 | 1 | $n = 50$ |

21. При изучении влияния механизации уборочных работ на себестоимость центнера (ц) кукурузы в районе в отчетном году были получены сд. данные, приведенные в крцн. табл., где $X$ – удельный вес механизированных уборочных работ (в процентах), $Y$ – себестоимость 1 ц кукурузы (в рублях). Применяя метод нм. кв-ов, опр-ть вбрч. ур-ие рег-и $y = a/x + b$ и оценить с помощью крцн. отн-я тесноту связи между $X$ и $Y$. О: $y = \dfrac{147{,}3}{x} + 0{,}425$.

| $y$ \ $x$ | 1,5-2,1 | 2,1-2,7 | 2,7-3,3 | 3,3-3,9 | 3,9-4,5 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50-60 | – | – | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 60-70 | 1 | 4 | 1 | – | – | 6 |
| 70-80 | 3 | 6 | 1 | – | – | 10 |
| 80-90 | 6 | 3 | – | – | – | 9 |
| 90-100 | 10 | 3 | 3 | – | – | 16 |
| $n_x$ | 20 | 16 | 6 | 1 | 1 | $n = 44$ |

## 15.4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое гп-за? Какие виды гп-з вы знаете?
2. Что наз. крт-ем, ошибкой первого или второго рода, уровнем доверия и мощностью крт-ия?
3. Как вы понимаете гп-ы о зн-ях ср-го, дсп-и и доли признака?
4. В чем заключается проверка гп-з ср-их, долей признака и дсп-й?
5. Что такое крт-и согласия Колмогорова и Пирсона и где они применяются?
6. В чем состоит роль дспн. анализа и какие вопросы он решает?
7. Объясните офктн-ый дспн. анализ и приведите пример.
8. Объясните дфктн-й дспн. анализ и приведите пример.

**Задачи для самост. работы**: на базе 1°-5° и п1-п13 р-ть задачи 1-20.

По анг-и с п1-п8 р-ть сд. задачи.

1. Для проверки эффективности (эфс.) нового лекарства были отобраны две слн. гр-ы по 15 чел., страдающих гриппом. При применении старого лекарства ср. срок выздоровления составлял 11 дней с вбрч. дсп-ей $S_1^2 = 3$, при применении нового срок выздоровления составил 8 дней с $S_2^2 = 4$. Проверить на уровне 0,99 гп-у о преимуществе нового лекарства. О: $t_{кр} = 2{,}76$, $t = 4{,}24$, гп-а принимается.

2. В двух фирмах, выпускающих детское питание, производилась оценка кач-ва продукции. В фирме А, где проверялось 30 ед-ц продукции, ср. сумма баллов оказалась равной 52. Во второй фирме проверялось 36 ед. продукции и их ср. сумма баллов – 47. Считая дсп-ю балльной оценки равной 12, опр-ть на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, какая фирма выпускает лучшую продукцию. О: $t_{кр} = 1{,}65$, $t = 1{,}652$, лучшую продукцию выпускает фирма А.

3. При $n = 4000$ бросаниях моменты Ж.Л. Бюффон получил $m = 2048$ выпаданий герба. На каком уровне значимости можно принять гп-у о том, что вер-ть выпадания герба $P = 0{,}5$? О: $\alpha = 0{,}4$.

4. Точность работы двух станков оценивалась отк-ми от номинала производимой продукции. Из 10 ед-ц продукции первого станка отк-ие от номинала (вбрч. дсп-я) составила $\overline{S}_1^2 = 3{,}5$; из 15 ед-ц продукции второго станка – $\overline{S}_2^2 = 4{,}5$. Можно ли считать на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$, что станки имеют одинаковую точность? О: $U = 0{,}1$, $V = 7{,}1$, $t = 0{,}6$, гп-а об одинаковой точности станков принимается.

5. В прошлом году доля бркн-ых изделий, выпускаемых предприятиям, равнялась 0,04. В этом году было проверено 300 изделий, из к-ых 95 оказались бркн-ми. Можно ли на уровне значимости 0,01 считать, что кач-во продукции осталось прежним? О: $t_{кр} = 2{,}58$, $t = 2{,}165$. Гп-а принимается.

6. Учет вр-и сборки узла машины бригадой из 10 слесарей показал, что ср. вр-я (в мин) сборки узла равно $\overline{x} = 76$, а $\overline{S}^2 = 15$. Предполагая рсп-ие вр-и сборки норм-ым, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гп-у о том, что 75 мин яв-ся нормативом (мтч. ож-ем) трудоемкости. О: $t_{9,кр} = 1{,}83$, $|t| < t_{9,кр}$, и гп-а принимается.

7. Номинальная точность прибора равна $\sigma_0 = 2$ мкм. Из 10 замеров дт-и была получена вбрч. дсп-я показаний прибора, равная $\overline{S}^2 = 0{,}9$. На уровне доверия $\gamma = 0{,}9$ проверить гп-у $H_0$: $\sigma = \sigma_0$. О: $t = 1{,}832$, $t_{9,кр} = 1{,}83$, $t < t_{9,кр}$, гп-а принимается.

8. По техн. усл-ям ср. прочность троса сост-ет 2000 кг. В результате исп-й 20 кусков троса было установлено, что ср. прочность на разрыв равна 1955 кг при ср. ошибке 25 кг. Уд-ет ли образец троса техн. усл-ям? О: $t_{кр} = 1{,}96$, $t = 8{,}05$. Гп-а отвергается, трос не уд-ет техн. усл-ям.

9. Для проверки новой технологии (техл.) были выбраны две гр. рабочих по $n_1 = 40$ чел. и $n_2 = 50$ чел. В первой гр. при применении старой техл. ср. выработка сост. $\overline{x}_1 = 85$ изделий, во второй, где применялась новая техл-я, $\overline{x}_2 = 95$. Дсп-я по гр-ам $\sigma_1^2 = 100$, $\sigma_2^2 = 75$ были известны заранее. Выяснить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ влияние новой техл. на производительность (прзл.). О: при $\alpha = 0{,}05$ $t_{кр} = 1{,}96$, $t = 5$, гп-а о рав-ве ср-х отвергается, новая техл. повышает првл-сть.

10. Ср. годовой оборот 5 компаний в регионе А сост-л 4900 усл. ед., ср. оборот 10 компаний в регионе В сост-л 5000 усл. ед. Вбрч. дсп-я оборота компаний в регионе А оказалась рав-

ной 1000, а в регионе B – 4000. Считая дсп-и ср. годовых оборотов одинаковыми ( $\sigma_1^2$ , $\sigma_2^2$ ), проверить на уровне значимости $\alpha$ = 0,05 гп-у о рав-ве ср-х зн-й в регионах A и B. О: $t$ = – 3,103; $t_{кр}$ = 1,8. Ср. годовой оборот компаний в регионе B больше, чем в регионе A.

11. Из 50 чел., покупающих в магазине кофе, 23 выбирают сорт «Арабика». Проверить на уровне значимости $\alpha$ = 0,05 гп-у о том, что половина покупателей выбирает данный сорт. О: гп-а подтверждается. Ук: $t$ = 0,566; $t_{кр}$ = 1,96.

12. При проверке размеров подшипников из двух партий по 10 штук в каждой, поставленных разными заводами, были обнаружены отк-ия от номинала, хркз-мые вбрч. дсп-ми $\overline{S}_1^2$ = 9, $\overline{S}_2^2$ = 8,5. Можно ли считать при уровне доверия $\alpha$ = 0,1 одинаковой точность изготовления подшипников разными заводами? О: да. Ук: $U$ = 0,1; $V$ = 7,1; $t$ = 1,06.

13. Стрелок по летающим тарелками попадал в цель в 80% случаев. После тренировок в учебном центре он стал поражать мишени в 89 случаях из 100. Можно ли считать на уровне доверия 0,95, что его квалификация улучшилась? О: да. Ук: $t$ = 2,25; $t_{кр}$ = 1,96.

14. Ср. урожай пшеницы с 1 га сост-ял $Q$ = 80 ц/га. После рекультивации почвы был опр-ен ср. урожай с пщ-ди в 9 га, причем оказалось, что $\overline{Q}$ = 85 ц/га, а $\overline{S}_Q^2$ = 4,5. Можно ли считать на уровне доверия 0,05, что урожайность поля увеличилась? О: да. Ук: $t$ = 7,071; $t_{кр}$ = 1,9.

По анг-и с п9, 10 р-ть сд. задачи.

15. Результаты проверки датчика слн. чисел представлены в табл.

| Интервалы | Число случаев | Интервалы | Число случаев | Интервалы | Число случаев |
|---|---|---|---|---|---|
| (0; 0,1) | 110 | (0,3; 0,4) | 98 | (0,6; 0,7) | 95 |
| (0,1; 0,2) | 100 | (0,4; 0,5) | 93 | (0,7; 0,8) | 84 |
| (0,2; 0,3) | 124 | (0,5; 0,6) | 110 | (0,8; 0,9) | 76 |
| | | | | (0,9; 1) | 101 |

Проверить с помощью крт-ия Колмогорова гп-у о согласии результатов опыта с законом равномерного рсп. в инр-е (0; 1). Уровень значимости крт-я принять равным 0,05. О: согласие уд-ое.

16. Произведены с точностью до 1 мкм измр-ия 100 дт-й, изготовленных на одном автч. станке. Результаты отк-й номинального размера приведены в табл.

| $l_i$, мкм | $n_i$ | $p_i^*$ | $l_i$, мкм | $n_i$ | $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (3; 8) | 6 | 0,06 | (23; 28) | 16 | 0,16 |
| (8; 13) | 8 | 0,08 | (28; 33) | 8 | 0,08 |
| (13; 18) | 15 | 0,15 | (33; 38) | 7 | 0,07 |
| (18; 23) | 40 | 0,40 | | | |

Оценить с помощью крт-ия Пирсона $\chi^2$ гп-у о согласии вбрч. рсп-я с норм. законом рсп-я при уровне значимости $q$ = 0,04. О: гп-а о норм. рсп-и гнр. свк-ти не согласуется с данными вбр-и.

По анг-и с п11-п13 р-ть сд. задачи.

17. Проведено по 5 исп-й на каждом из четырех уровней фкт-а $A$. Методом дспн. анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп. о рав-ве грв. ср-х $\overline{x}_{\cdot j}$ . Предполагается, что вбр-и извлечены из норм. свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

| $i$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 36 | 56 | 52 | 39 |
| 2 | 47 | 61 | 57 | 57 |
| 3 | 50 | 64 | 59 | 63 |
| 4 | 58 | 66 | 58 | 61 |
| 5 | 67 | 66 | 59 | 65 |
| $\overline{x}_{\cdot j}$ | 51,6 | 62,6 | 61,0 | 57,0 |

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} – 58$.
О: $Q_{общ}$ = 1850,55; $Q_{фкт}$ = 360,15;
$Q_{ост}$ = 1490,40; $S^2_{фкт}$ = 120; $S^2_{ост}$ = 93;
$F_{нбл}$ = 1,29; $F_{кр}$(0,05; 3; 16) = 3,24.
Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве групповых ср-х.

18. Проведено по 8 исп-й на каждом из шести уровней фкт-а. Методом дспн-го анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гп-у о рав-ве грв. ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

| $i$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 92 | 74 | 68 | 64 | 69 |
| 2 | 101 | 102 | 87 | 80 | 83 | 71 |
| 3 | 126 | 104 | 88 | 83 | 83 | 80 |
| 4 | 128 | 115 | 93 | 87 | 84 | 80 |
| 5 | 133 | 119 | 94 | 86 | 90 | 81 |
| 6 | 141 | 122 | 101 | 87 | 96 | 82 |
| 7 | 147 | 128 | 102 | 106 | 101 | 86 |
| 8 | 148 | 146 | 105 | 127 | 111 | 99 |
| $\bar{x}_{\cdot j}$ | 128 | 116 | 93 | 93 | 89 | 81 |

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 100$.
О: $Q_{общ} = 21567{,}48$;
$Q_{фкт} = 11945{,}60$; $Q_{ост} = 9622$;
$S^2_{фкт} = 2389$; $S^2_{ост} = 229$;
$F_{нбл} = 10{,}43$;
$F_{кр}(0{,}01;\ 5;\ 42) = 2{,}44$.
Нулевая гп-а о рав-ве грв. ср-х отвергается.

19. Проведено по 4 исп-я на каждом из трех уровней. Методом дспн. анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп. о рав-ве грв. ср-х. Предполагается, что вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

| $i$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 30 | 21 |
| 2 | 32 | 24 | 22 |
| 3 | 31 | 26 | 34 |
| 4 | 30 | 20 | 31 |
| $\bar{x}_{\cdot j}$ | 32 | 25 | 27 |

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 28$.
О: $Q_{общ} = 296$; $Q_{фкт} = 104$;
$Q_{ост} = 192$; $S^2_{фкт} = 52$; $S^2_{ост} = 21{,}3$;
$F_{нбл} = 2{,}44$; $F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$.
Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве грв. ср-х.

20. Проведено по 7 исп-й на каждом из четырех уровней фкт-а. Методом дспн. анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гп. о рав-ве грв. ср-х. Вбр-и извлечены из норм-х свк-й с одинаковыми дсп-ми. Результаты исп-й приведены в табл.:

| $i$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 52 | 56 | 54 |
| 2 | 59 | 58 | 56 | 58 |
| 3 | 53 | 66 | 58 | 62 |
| 4 | 59 | 69 | 58 | 64 |
| 5 | 63 | 70 | 70 | 66 |
| 6 | 69 | 72 | 74 | 67 |
| 7 | 72 | 74 | 78 | 69 |
| $\bar{x}_{\cdot j}$ | 60,9 | 65,9 | 64,3 | 62,9 |

Ук: принять $y_{ij} = x_{ij} - 63$.
О: $Q_{общ} = 1539$; $Q_{фкт} = 95$;
$Q_{ост} = 1414$; $S^2_{фкт} = 31{,}67$; $S^2_{ост} = 60{,}17$.
Нет оснований отвергнуть нулевую гп-у о рав-ве грв. ср-х.

## ПРИЛОЖЕНИЯ
## [графики, сводка формул, таблицы ($T_i$)] $П_k$

> Геометрические представления процесса решений задач весьма полезны, поскольку ничего не является для нас более полезным, чем фигура, ибо ее можно осязать и видеть.
>
> Декарт

## $П_1$. ВАЖНЕЙШИЕ ПОСТОЯННЫЕ

| | |
|---|---|
| $\pi = 3{,}14159$, | $\pi^{-1} = 0{,}31831$, |
| $\pi^2 = 9{,}86960$, | $\pi^{-2} = 0{,}10132$, |
| $e = 2{,}71828$, | $e^{-1} = 0{,}36788$ |
| $e^2 = 7{,}38906$, | $e^{-2} = 0{,}13534$, |
| $M = \mathrm{li}e = 0{,}43429$, | $M^{-1} = \ln 10 = 2{,}30259$. |

## $П_2$. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

### 1°. Основные элементарные функции

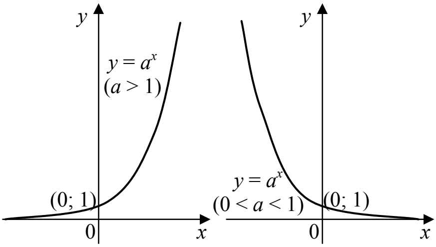



Рис. 1 (пкзт. фк-и)

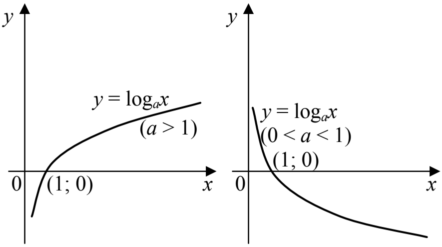



Рис. 2 (лгрч. фк-и)

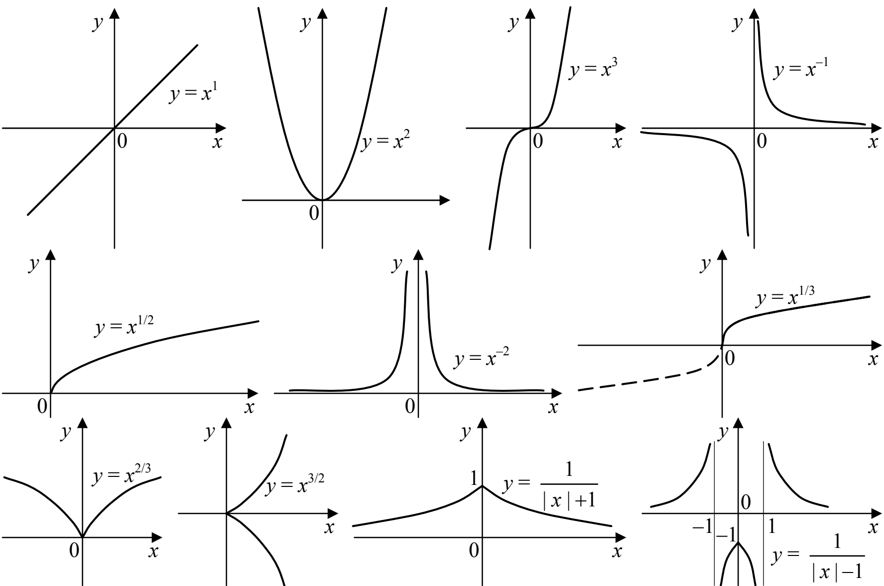



Рис. 3 (спн. фк-и)

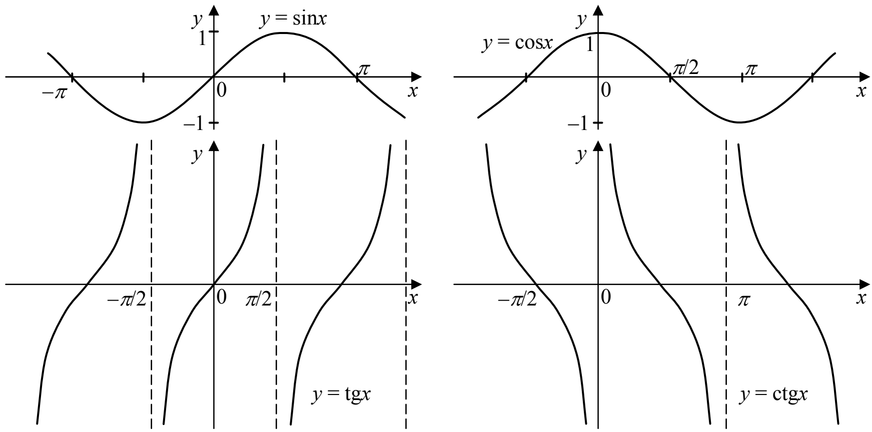



Рис. 4 (тригч. фк-и)

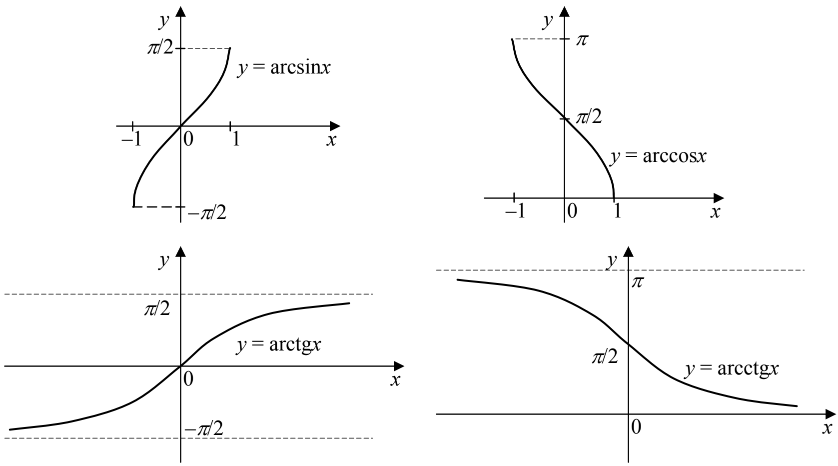



Рис. 5 (обратно-тригч. фк-и)

**2°. Обратные тригонометрические функции от тригонометрических функций.**

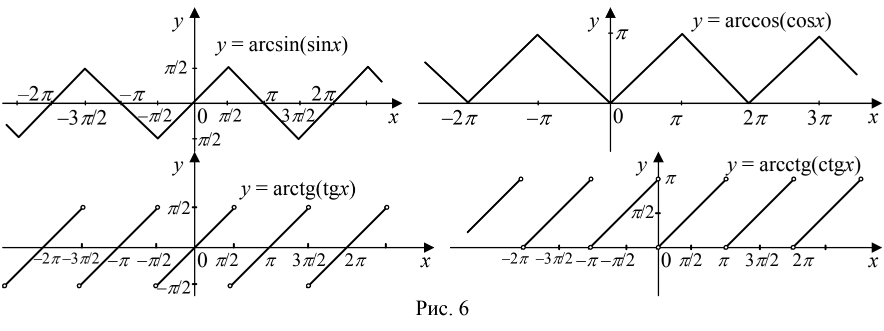



Рис. 6

**3°. Гиперболические (гпрб.) и обратно-гпрб. функции.**

1*. $y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2*. $y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

3*. $y = \mathrm{arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. 4*. $y = \mathrm{arch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

5*. $y = \mathrm{arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 6*. $y = \mathrm{arcth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

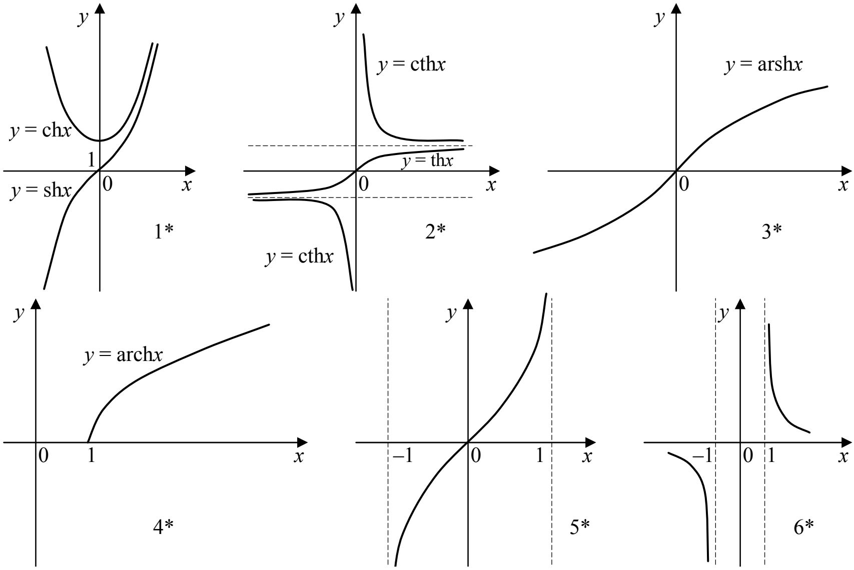
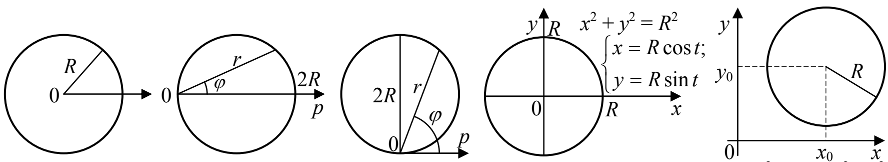
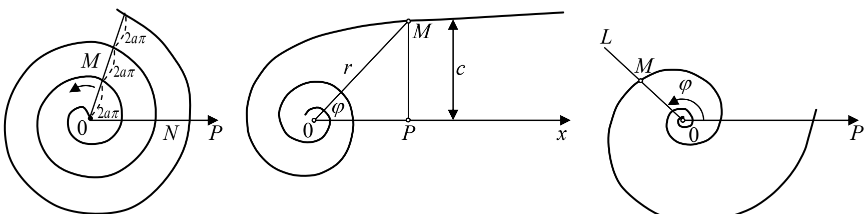



Рис. 7



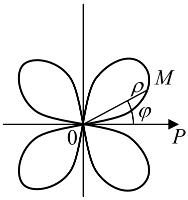

а) $r = R$ б) $r = 2R\cdot\cos\varphi$ в) $r = 2R\cdot\sin\varphi$ г) д) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Рис. 8 (окр. радиуса $R$)



а) Архимеда, $\rho = a\varphi$; б) гпрб-ая, $\rho = a/\varphi$; в) лгрч-ая, $\rho = a^{\varphi}$ ($a > 0$)

Рис. 9 (спирали)



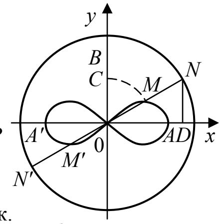

а) роза 4-лепестк.

$\rho = a\sin 2\varphi$;

$\rho = a\sin 3\varphi$ (3-лепестк.);

$\rho = a\sin\frac{5}{3}\varphi$ (5-лепестк.);

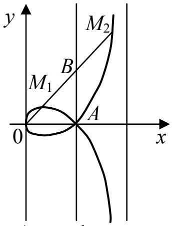
$\rho = a\sin\frac{4}{3}\varphi$ (8-лепестк.);




б) лемниската Бернулли

$(x^2+y^2)^2 =$
$= 2a^2(x^2-y^2)$;

$\rho = 2a^2\cos 2\varphi$;

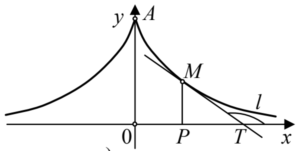



в) строфоида

$(x^2+y^2)(x-a)^2 - a^2y^2 = 0$;

$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm a\,\mathrm{tg}\varphi$;

$x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at(t^2-1)}{1+t^2}$;




г) трактриса

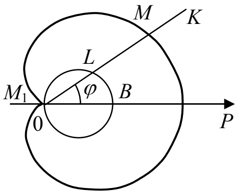
$x = a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}$

$x = a\left(\ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y = a\sin t$;

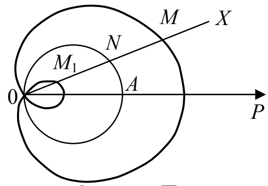
длина дуги от тч. $A(0; a)$ до $B(x, t)$

$S_t = -a\ln\sin t$. Пщ. $S = \frac{\pi a^2}{2}$

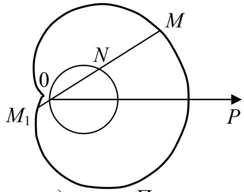
Рис. 10




а) кардиоида $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$;
улитка Паскаля ($b = 2a$) $\rho = 2a\cos\varphi + b$

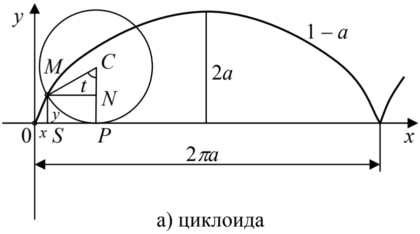



б) улитка Паскаля
$\rho = 2a\cos\varphi + b$ ($b < 2a$)




в) улитка Паскаля
$\rho = 2a\cos\varphi + b$ ($b > 2a$)

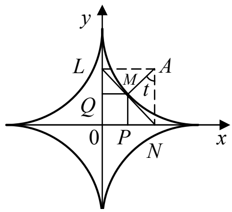
Рис. 11




а) циклоида

$x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$;

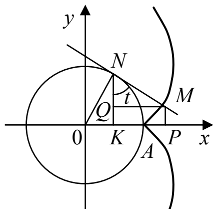
$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$.




б) астроида

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

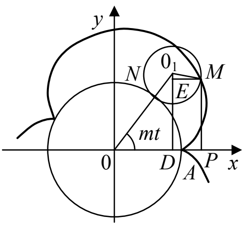
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.




в) развертка окр-ти

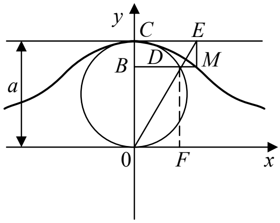
$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t);\\ y &= a(\sin t - t\cos t).\end{aligned}\right\}$

Рис. 12




а) эпициклоида

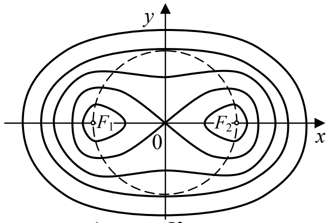
$\left.\begin{aligned} x &= (R+mR)\cos mt - mR\cos(t+mt);\\ y &= (R+mR)\sin mt - mR\sin(t+mt).\end{aligned}\right\}$




б) локон Аньеза

$x = a\,\mathrm{ctg}t$, $y = a\cos^2 t$;

$y(x^2+a^2) = a^3$.




в) овалы Кассини

$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4$, где

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы, $|MF_1||MF_2| = a^2$

При $a \ge c\sqrt{2}$ линия вып., $c < a < c\sqrt{2}$
имеет вид овала, при $a = c$ – лемниската
Бернулли, $c > a$ состоит из двух линий

Рис. 13

**5°. Линии в пространстве и поверхности.**

1*. Винтовая линия – линия, описываемая тч-й $M$, к-ая вращается с пст. угл. скр-ю $\omega$ вокруг оси $Oz$ и одновременно перемещается поступательно с пст. скр-ю $v$ вдоль этой оси (рис. 14). Пармч. ур-ия: $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = vt$ или $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$, где $a$ – радиус цлн-ра, на к-ом расположена линия, $\varphi = \omega t$, $b = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{h}{2\pi}$, $h$ – шаг винтовой линии.

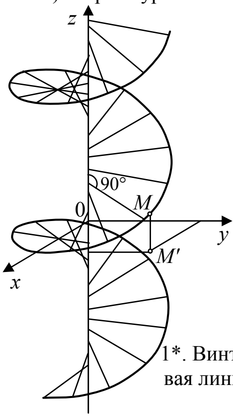
Проекции винтовой линии на крд. пл-ти: на пл. $xOy$: $x^2 + y^2 = a^2$ – окр-ть, на пл. $yOz$: $y = a\sin\dfrac{z}{b}$ – синусоида, на пл. $xOz$: $x = a\cos\dfrac{z}{b}$ – синусоида.

Длина винтовой линии от тч. перч-я с пл-ю $xOy$ до прзвл. тч-и $M$: $s = \sqrt{a^2+b^2}\,t$. Пармч. ур-ия винтовой линии, где за парм-р принята длина дуги: $x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z = \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Кривизна $k = \dfrac{a}{a^2+b^2}$. Кручение $\chi = \dfrac{b}{a^2+b^2}$.

2*. Линия Вивиани – линия перч-я сф-ы радиуса $R$ круглой цлнч. пвх-ю, диаметр к-ой равен радиусу сф-ы и одна из образующих проходит через центр сф-ы (рис. 15). Неявные ур-я: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx = 0$. Пармч. ур-ия: $x = R\cos^2 u$, $y = R\cos u\sin u$, $z = \pm R\sin u$, где $u$ – долгота тч-и на сф-е.

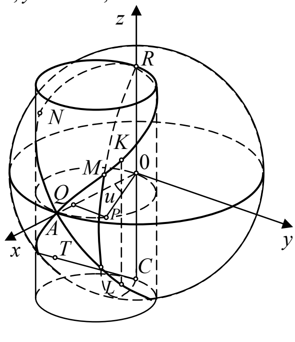
3*. Коническая спираль – линия, описываемая тч-ой $M$, к-ая движется по пм-й $OL$ со скр-ю, прц-ой рст-ю $OM$, а пм. $OL$, не прп-ая оси $Oz$, равномерно вращается вокруг нее с пст. угл. скр-ю $\omega$ (рис. 16). Пармч. ур-ия: $x = ae^{k\varphi}\cos\varphi$, $y = ae^{k\varphi}\sin\varphi$, $z = be^{k\varphi}$, где $k = m/\omega$.

4*. Коническая винтовая линия – линия, описываемая тч-й $M$, к-ая движется по пм-й $OL$ с пст-ой скр-ю, а пм. $OL$, не прп-ая оси $Oz$, равномерно вращается вокруг нее с пст. угл. скр-ю $\omega$ (рис. 16). Пармч. ур-ия: $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $z = bt$.



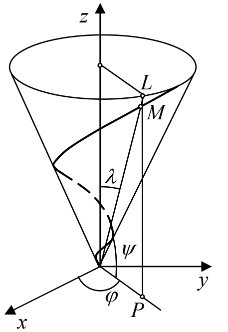

1*. Винтовая линия

Рис. 14




2*. Линия Вивиани

Рис. 15




3*. Коническая линия.
4*. Коническая винтовая линия

Рис. 16

## ПОВЕРХНОСТИ

Пвх-ть вращения. От врщ-ия линии $x = f(u)$, $z = \varphi(u)$ в пл. $xOz$ вокруг оси $Oz$ получим пармч. ур-ия: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = \varphi(u)$. Первая квч. форма: $ds^2 = (f'^2 + \varphi'^2)du^2 + f^2dv^2$.

$\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{f'^2+\omega'^2}}\,((f'\varphi'' - \varphi'f'')du^2 + f\varphi'dv^2)$. Гауссова кривизна: $K = \dfrac{\varphi'(f'\varphi'' - f''\varphi')}{f(f'^2+\varphi'^2)}$.

1*. Сфера (рис. 17). Пармч. ур-ия: $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = R\sin u$. Первая квч. форма: $ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u\,dv^2)$. Вторая квч. форма: $\varphi_2 = R^2(du^2 + \cos^2 u\,dv^2)$. Гауссова кривизна: $K = 1/R^2$.

2*. Тор – пвх-ть, образованная врщ-ем окр-ти $x = a + b\cos u$, $y = 0$, $z = b\sin u$, $b < a$ вокруг оси $Oz$. Пармч. ур-ия $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$ (рис. 18). Первая квч. форма: $\mathrm{d}s^2 = b^2\mathrm{d}u^2 + (a + b\cos u)^2\mathrm{d}v^2$. Вторая квч. форма: $\varphi_2 = b\mathrm{d}u^2 + \cos u(a + b\cos u)\mathrm{d}v^2$. Гауссова кривизна: $K = \dfrac{\cos u}{b(a + b\cos u)}$.

3*. Катеноид – пвх-ть, образованная врщ-ем цепной линии $x = a\,\mathrm{ch}\dfrac{u}{a}$, $y = 0$, $z = u$ вокруг оси $Oz$ (рис. 19). Пармч. ур-ия: $x = a\,\mathrm{ch}\dfrac{u}{a}\cos v$, $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{u}{a}\sin v$, $z = u$. Первая квч. форма: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}\,\mathrm{d}u^2 + a^2\,\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}\,\mathrm{d}v^2$. Вторая квч. форма: $\varphi_2 = a\mathrm{d}v^2 - \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}u^2$. Гауссова кривизна: $K = -\dfrac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^4\dfrac{u}{a}}$.

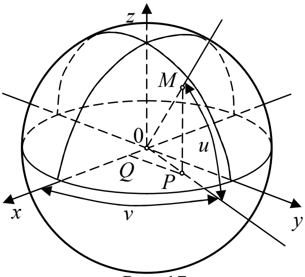


Рис. 17

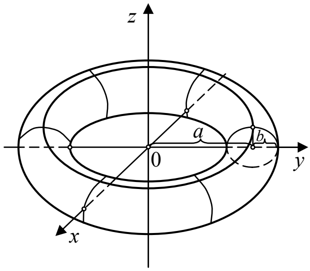


Рис. 18

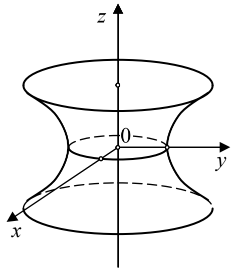


Рис. 19

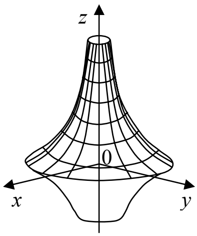


Рис. 20

Псевдосфера (рис. 20) – пвх-ть, образованная врщ-ем трактрисы (см. рис. 10 г) $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a\left(\ln\mathrm{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u\right)$ вокруг оси $Oz$. Пармч. ур-ия: $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\left(\ln\mathrm{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u\right)$. Первая квч. форма: $\mathrm{d}s^2 = a^2\mathrm{ctg}^2u\mathrm{d}u^2 + a^2\sin^2u\mathrm{d}v^2$. Заменой $\hat{u} = -a\ln\sin u$, $\hat{v} = av$ получим $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\hat{u}^2 + e^{-\frac{2\hat{u}}{a}}\mathrm{d}\hat{v}^2$, заменой $\sin u = e^{-\bar{u}}\,\mathrm{ch}\dfrac{\bar{u}}{a}$, $v = e^{\bar{v}}\,\mathrm{th}\dfrac{\bar{u}}{a}$ – – $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\bar{u}^2 + \mathrm{ch}^2\dfrac{\bar{u}}{a}\mathrm{d}\bar{v}^2$, заменой $x = \hat{v}$, $y = ae^{\frac{\hat{u}}{a}}$ – $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{a^2\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)}{y^2}$. Вторая квч. форма: $\varphi_2 = a(-\mathrm{ctg}\,u\,\mathrm{d}u^2 + \sin u\cos u\,\mathrm{d}v^2)$. Гауссова кривизна: $K = -\dfrac{1}{a^2}$.

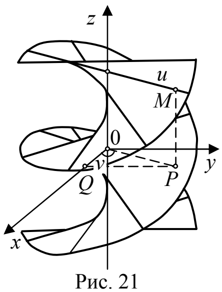


Рис. 21

Прямой геликоид (рис. 21) – пвх-ть, образованная движением пм-й, вращающейся вокруг оси и прп-ой к ней и одновременно поступательно движущейся в нпв-и этой оси, причем скр-и этих движений прц-ны. Пармч. ур-ия $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$. Первая квч. форма: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + (u^2 + a^2)\mathrm{d}v^2$. Вторая квч. форма: $\varphi_2 = -\dfrac{2a\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2 + a^2}}$.

Гауссова кривизна: $K = -\dfrac{a^2}{\left(a^2 + u^2\right)^2}$.

## П$_3$. СВОДКА ФОРМУЛ

### 1°. Тригонометрия.

Связь между радианной и градусной мерами 1 рад = $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57°17'45''$, $\alpha° = \alpha\cdot\dfrac{\pi}{180}$ рад.

Тригч. фк-и (см. рис. 4: $\Pi_2$):

а) $y = \sin x$, $-\infty < x < \infty$; фк-я нечет., прдч. с прд-ом $2\pi$,

б) $y = \cos x$, $-\infty < x < \infty$; фк-я чет. с прд. $2\pi$,

в) $y = \mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $-\infty < x < \infty$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; нечет., прд. $-\pi$,

г) $y = \mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $-\infty < x < \infty$, $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; нечет., прд. $-\pi$.

1. Осн. стн-ия (связи между тригч. фк-ми):

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, в част., $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 2) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$.

2. Фм-ы суммы и разности углов. Фк-и двойного угла.

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, в част., $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, в част., $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

5) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$, в част., $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$;

6) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$.

3. Фм-ы перехода от суммы к пзв-ю:

1) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; 2) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; 4) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 6) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

7) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; 8) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

4. Фм-ы перехода от пзв. к сумме и фк-и половинного угла:

1) $\cos mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$, в част., $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$;

2) $\sin mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$;

3) $\sin mx \cdot \sin nx = \dfrac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$; $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

4) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; 5) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

6) $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ или $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

5. Тригч. фк-и двойного и тройного арг-а

1) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; 2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 3) $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$;

4) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 5) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 6) $\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$.

6. Знаки тригч. фк-й:

| Четверть | Величина угла | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ | + | + | + | + |
| II | $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ | + | – | – | – |
| III | $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ | – | – | + | + |
| IV | $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ | – | + | – | – |

7. Нек-ые зн-ия тригч. фк-й:

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | | $\frac{7}{6}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $-1$ | $0$ | | $0$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | | $0$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\frac{5}{6}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{3}$ | $2\pi$ | $0$ | $1$ | $0$ | |
| $\pi$ | $0$ | $-1$ | $0$ | | | | | | |

8. Фм-ы приведения

| $\beta$ | $\sin\beta$ | $\cos\beta$ | $\mathrm{tg}\,\beta$ | $\mathrm{ctg}\,\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\pi+\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $2\pi+\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $-\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\pi-\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $2\pi-\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

9. Врж-ие тригч. фк-й через одну из них того же арг-та

| | sin | cos | tg | ctg | sc | csc |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | $=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ | $=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}{\operatorname{sc} x}$ | $=\dfrac{1}{\csc x}$ |
| $\cos x$ | $=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ | | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ | $=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$ | $=\dfrac{1}{\operatorname{sc} x}$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}{\csc x}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $=\dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ | | $=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ | $=\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}$ | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$ | $=\dfrac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$ | $=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ | | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}$ | $=\pm\sqrt{\csc^2 x-1}$ |
| $\operatorname{sc} x$ | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$ | $=\dfrac{1}{\cos x}$ | $=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$ | | $=\dfrac{\csc x}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$ |
| $\csc x$ | $=\dfrac{1}{\sin x}$ | $=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$ | $=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$ | $=\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ | $=\dfrac{\operatorname{sc} x}{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}$ | |

10. Врж-ие тригч. фк-й через тангенс половинного арг-та $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t\right)$.

1) $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$; 2) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-t^2}{2t}$.

11. Прб-ие сп-й синуса и косинуса.

1) $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$; 2) $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$; 3) $\sin^3\alpha=\dfrac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$;

4) $\cos^3\alpha=\dfrac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$; 5) $\sin^4\alpha=\dfrac{1}{8}(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$; 6) $\cos^4\alpha=\dfrac{1}{8}(3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$.

12. Осн. фм-ы для гпбр. фк-й.

1) Опр-ие гпрб. фк-й: $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $\operatorname{cth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ $(x\neq0)$.

2) Осн. тожд-ва: $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$, $\operatorname{th}x\cdot\operatorname{cth}x=1$, $1-\operatorname{th}^2x=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$, $\operatorname{cth}^2x-1=\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}$ $(x\neq0)$.

3) Врж-ие гпрб. фк-й через одну из них:

через $\operatorname{sh}x$: $\operatorname{ch}x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}$, $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}$, $\operatorname{cth}x=\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}{\operatorname{sh}x}$,

$\operatorname{ch}x$: $\operatorname{sh}x=\operatorname{sgn}x\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}$, $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sgn}x\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\operatorname{ch}x}$, $\operatorname{cth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sgn}x\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}$ $(x\neq0)$,

$\operatorname{th}x$: $\operatorname{sh}x=\dfrac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$, $\operatorname{ch}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$, $\operatorname{cth}x=\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$ $(x\neq0)$.

4) Фм-ы суммы и разности углов:

$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$, $\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$, $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$,

$\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$, $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}\,x + \mathrm{th}\,y}{1 + \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}$, $\mathrm{th}(x-y) = \dfrac{\mathrm{th}\,x - \mathrm{th}\,y}{1 - \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}$.

5) Фм-ы перехода от суммы к пзв-ию:

$\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\,\dfrac{x+y}{2}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x-y}{2}$, $\mathrm{sh}x - \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\,\dfrac{x-y}{2}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x+y}{2}$,

$\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2\mathrm{ch}\,\dfrac{x+y}{2}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x-y}{2}$, $\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y = 2\mathrm{sh}\,\dfrac{x+y}{2}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{x-y}{2}$,

$\mathrm{th}x + \mathrm{th}y = \dfrac{\mathrm{sh}(x+y)}{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y}$, $\mathrm{th}x - \mathrm{th}y = \dfrac{\mathrm{sh}(x-y)}{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y}$.

6) Фм-ы перехода от пзв-ия к сумме:

$\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y))$, $\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y))$,

$\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y))$.

7) Гпрб. фк-и двойного и половинного арг-ов:

$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}2x = \mathrm{sh}^2x + \mathrm{ch}^2x = 1 + 2\mathrm{sh}^2x = 2\mathrm{ch}^2x - 1$, $\mathrm{th}2x = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2\,x}$, $\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{2} = \mathrm{sgn}\,x\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}\,x - 1}{2}}$,

$\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}\,x + 1}{2}}$, $\mathrm{th}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\mathrm{ch}\,x - 1}{\mathrm{sh}\,x} = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x + 1}$.

8) Врж-ие гпрб. фк-й через тангенс половинного агр-та $\left(\mathrm{th}\,\dfrac{x}{2} = t\right)$:

$\mathrm{sh}x = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{th}^2\,\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\mathrm{ch}x = \dfrac{1 + \mathrm{th}^2\,\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{th}^2\,\frac{x}{2}} = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{th}x = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{th}^2\,\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

9) Прб-ие сп-ей гпрб. фк-й:

$\mathrm{sh}^2x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}2x - 1)$, $\mathrm{ch}^2x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}2x + 1)$, $\mathrm{th}^2x = \dfrac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{\mathrm{ch}\,2x + 1}$, $(\mathrm{sh}x + \mathrm{ch}x)^n = \mathrm{sh}nx + \mathrm{ch}nx$.

13. Обратные тригч. фк-и.

1) Выч-ие зн-й тригч. фк-й от обратных тригч. фк.

| | $\arcsin x$ | $\arccos x$ | $\mathrm{arctg}x$ | $\mathrm{arcctg}x$ |
|---|---|---|---|---|
| sin | $x$<br>$\lvert x\rvert \le 1$ | $\sqrt{1-x^2}$<br>$\lvert x\rvert \le 1$ | $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| cos | $\sqrt{1-x^2}$<br>$\lvert x\rvert \le 1$ | $x$<br>$\lvert x\rvert \le 1$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| tg | $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$ | $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < \lvert x\rvert \le 1$ | $x$ | $\dfrac{1}{x}$, $x \ne 0$ |
| ctg | $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < \lvert x\rvert \le 1$ | $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$ | $\dfrac{1}{x}$, $x \ne 0$ | $x$ |

2) Прб-ие сумм обратных тригч. фк.

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$, $\arccos x + \mathrm{arcos}(-x) = \pi$,

$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}(-x) = 0$, $\mathrm{arcctg}x + \mathrm{arcctg}(-x) = \pi$, $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \gamma\pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$, где $\gamma = \begin{cases} 0, \text{ если } xy < 1, \\ 1, \text{ если } x > 0 \text{ и } xy > 1, \\ -1, \text{ если } x < 0 \text{ и } xy > 1. \end{cases}$

$\arcsin x + \arcsin y = \gamma\pi + \delta \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, где $\begin{matrix} \gamma = 0,\ \delta = 0, \text{ если } xy \le 0 \text{ или } x^2 + y^2 \le 1, \\ \gamma = 1,\ \delta = -1, \text{ если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1, \\ \gamma = -1,\ \delta = -1, \text{ если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{matrix}$

**2°. Планиметрия.** Нек-ые обз-ия: $[AB]$ – отрезок с концами $A$ и $B$, $|AB|$ – длина отрезка $[AB]$, $(AB)$ – прямая, проходящая через $A$ и $B$, $[AB)$ – луч с началом $A$, проходящий через $B$, $\angle ABC$ – угол с верш. в тч. $B$, $\widehat{ABC}$ – величина угла, $d$ – величина прямого угла.

1. Треугольник (рис. 1): 1) Сумма внутренних углов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
2) Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
3) Теорема синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ ($R$ – радиус описанной окр-ти).
4) Длина медианы $m_a$, проведенной из верш. $A$, $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .
5) Длина высоты из верш. $A$, $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2} - \text{полупериметр}\right)$.
6) Длина биск. $l_a$ туг-ка, проведенной из верш. $A$, $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ .
7) Св. бист-ы угла $A$. Если $D$ – тч. перч-я бист-ы со стороной $BC$, то $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ .
8) Св. ср. линии. Если $E$ и $F$ – ств-но середины сторон $[AB]$ и $[BC]$, то $[EF] \parallel [AC]$, $|EF| = \dfrac{1}{2}|AC|$.
9) Пщ-дь: $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$ ($h_a$, $h_b$, $h_c$ – длины высот, проведенных из тч. $A$, $B$ $C$ ств-но);

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (фм-а Герона).

$S = \dfrac{abc}{4R}$ ($R$ – радиус описанной окр-ти), $S = pr$ ($r$ – радиус вписанной окр.).

2. Прямоугольный туг-к (рис. 2): 1) Сумма углов $\alpha + \beta = \pi/2$.
2) Теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ ($a$, $b$ – длины катетов, $c$ – длина гипотенузы).
3) Стн-ия между сторонами и высотой, проведенной из верш. $C$, $b^2 = b_c \cdot c$, $a^2 = a_c \cdot c$, $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.
4) Стн-ия между сторонами и углами $a = c \cdot \sin\alpha$, $a = c \cdot \cos\beta$, $b = c \cdot \sin\beta$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$, $a = b \cdot \mathrm{ctg}\beta$, $b = a \cdot \mathrm{tg}\beta$, $b = a \cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

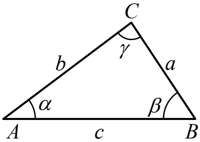


Рис. 1

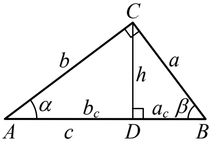


Рис. 2

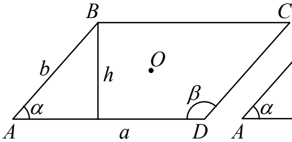


Рис. 3

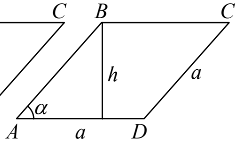


Рис. 4

3. Параллелограмм (прлг.) (рис. 3): 1) Св-ва сторон и углов $[AB] \parallel [CD]$, $[AB] \cong [CD]$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, $[AD] \parallel [BC]$, $[AD] \cong [BC]$, $\alpha + \beta = \pi$.
2) Св-ва диагоналей: $O = [AC] \cap [BD]$ – тч. перч-я диагоналей, центр сим-и прлг-ма, $[AO] \cong [OC]$, $[BO] \cong [OD]$, $|AC|^2 + |BD|^2 = 2(a^2 + b^2)$.
3) Пщ-дь: $S = ah$, $S = ab\sin\alpha$, $S = \dfrac{1}{2}|AC| \cdot |BD|\sin\widehat{AOB}$.

4. Ромб (рис. 4): 1) Св-ва сторон: $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$, $[AB] \parallel [DC]$, $[BC] \parallel [AD]$.
2) Св-ва диагоналей: $[AC] \perp [BD]$. 3) Пщ.: $S = ah$, $S = a^2\sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$.

5. Прямоугольник (пуг.) (рис. 5): 1) Св. сторон и углов: $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$, $[AB] \parallel [CD]$, $[AD] \parallel [BC]$, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$. 2) Св. диагоналей: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|AC| = |BD|$. 3) Пщ. $S = ab$.

6. Квадрат (рис. 6): 1) Св-ва сторон и углов: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} =$ $= \widehat{CDA} = \frac{\pi}{2}$. 2) Длина диагонали $d = a\sqrt{2}$. 3) Пщ. $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$.

7. Трапеция (рис. 7): 1) Св-ва сторон: $[AD] \parallel [BC]$, $[AB] \nparallel [CD]$. 2) Ср. линия: $[EF] \parallel [AD]$, $|EF| = \frac{1}{2}(a + b)$. 3) Пщ. $S = \frac{a+b}{2}h$, $S = |EF| \cdot h$.

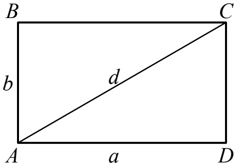



Рис. 5

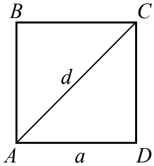



Рис. 6

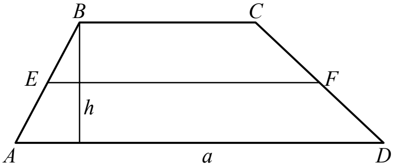



Рис. 7

8. Многоугольники (муг.).
1) Сумма внутренних [внешних] углов выпуклого $n$-угл. равна $A_n^{\circ} = \pi(n - 2)$ $[A_n = 2\pi]$.
2) Вписанные и описанные муг-ки ($R$ – радиус описанной окр-ти, $r$ – радиус вписанной окр., $p$ – полупериметр муг-ка, $S$ – его пщ.). Для туг-ка $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ ($a$, $b$, $c$ – длины сторон). Если четырехугольник (чуг.) вписан в окр-ть, то $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$, $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$. Если чуг-к $ABCD$ описан около окр-ти, то $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.
3) Подобные муг-ки. Если $\Phi_1$ и $\Phi$ – подобные муг-ки с коэф-ом подобия $k$, а $P_1$ и $P$, $S_1$ и $S$ – ств-но их периметры и пщ-ди, то $P_1 : P = k$, $S_1 : S = k^2$.
4) Правильные (првл.) муг-ки. Вел-а $\alpha_n$ внутреннего угла првл-го $n$-угл. $\alpha_n = \pi\frac{n-2}{n}$. Сторона $a_n$ првл-го $n$-угл. $a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$ ($R$ – радиус описанной окр-ти). В част., сторона првл-го туг-ка $a_3 =$ $= R\sqrt{3}$, сторона кв-а $a_4 = R\sqrt{2}$, сторона првл. шуг-ка $a_6 = R$. 5) Пщ. правильного $n$-угл. $S_n =$ $= \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$, $S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot r = \frac{1}{2}na_nr$ ($P_n$ – периметр $n$-угл-ка, $r$ – апофема), $S_n = \frac{1}{2}P_nR\cos\frac{\pi}{n}$.

9. Окружность и круг ($r$ – радиус окр-ти (круга), $d = 2r$ – диаметр).
1) Длина окр-ти $C = 2\pi R = \pi d$. 2) Длина дуги в $\alpha$ радиан [в градусах $\beta°$] $l = \alpha r$ $\left[l = \frac{\pi r\beta}{180}\right]$.
3) Пщ. круга $S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$. 4) Пщ. сектора в $\alpha$ радиан и в $\beta°$ ств-но: $S_{сек} = \frac{1}{2}r^2\alpha$ и $S_{сек} = \frac{\pi r^2\beta}{360}$.

**3°. Стереометрия.** Стереометрия – раздел мт-ки, в к-ом изучаются фигуры в пр-ве. На рис. 1-3 изб-ны ств-н куб, сф-а, тетраэдр. Объединение нескольких геом. фигур в пр-ве есть также геом. фигура. На рис. 4 фигура сост. из двух тетраэдров.

1. Призма, параллелепипед (прлп.) и цилиндр (цлн.).

1) Призма (рис. 5-9). Призма наз. прямой, если ее бок. ребра прп-ны основаниям (рис. 6). В противном случае призма наз. наклонной (рис. 5).

Призма наз. првл-ой, если ее основаниями яв-ся првл. (равносторонние) муг-ки. На рис. 7, 8, 9 изб-ны првл. призмы, основаниями у них яв-ся ств-но првл. туг-к, кв-т, првл. шуг-к.

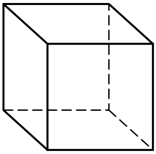


Рис. 1

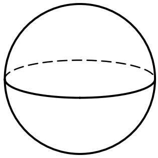


Рис. 2

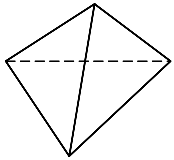


Рис. 3

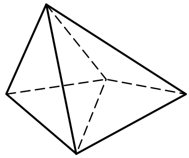


Рис. 4

Пщ. пвх-ти $S_{пр} = 2S_{осн} + S_{бок}$ ($S_{осн}$ – пщ. основания призмы, $S_{бок}$ – пщ. бок. пвх-ти). Пщ. бок. пвх-ти $S_{бок} = P \cdot l$ ($P$ – периметр прп-го сечения, $l$ – длина бок. ребра).

Объем: $V = QH$ ($Q$ – пщ. основания, $H$ – высота призмы), $V = Q_1 l$ ($Q_1$ – пщ. прп-го сечения, $l$ – длина бок. ребра).

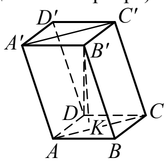


Рис. 5

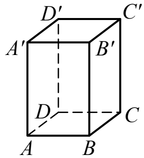


Рис. 6

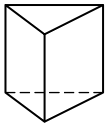


Рис. 7

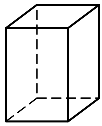


Рис. 8

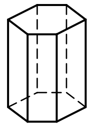


Рис. 9

Призмой, вписанной в цлн., наз. такая призма, основания к-ой – равные муг-ки, вписанные в основания цлн-а. Ее бок. ребра яв-ся образующими цлн-а (рис. 10).

Призма наз. описанной около цлн-а, если ее основания – равные муг-ки, описанные около оснований цлн-а. Пл-ти ее граней касаются бок. пвх-ти цлн-а (рис. 11).

2) Прямоугольный прлп., рис. 12: св-ва диагоналей $|AC_1| = |BD_1| = |CA_1| = |DB_1| = d$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (все диагонали прлп-да перк-ся в одной тч. и делятся ею пополам). Пщ. пвх-ти $S = 2(ab + bc + ac)$. Объем $V = abc$. В част., для куба $a = b = c$, $d = a\sqrt{3}$ , $S = 6a^2$, $V = a^3$.

3) Цилиндр (рис. 13): пщ. бок. пвх-ти $S_{бок} = 2\pi RH$. Пщ. полной пвх-ти $S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2$. Объем $V_{цил} = \pi R^2 H$.

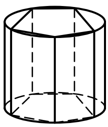


Рис. 10

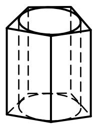


Рис. 11

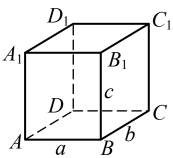


Рис. 12

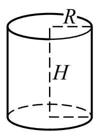


Рис. 13

2. Пирамида и конус.

1) Пирамида (рис. 14, 15). Пирамида наз. $n$-угл-ой, если ее основанием яв-ся $n$-угл-к. Туг. пирамида наз. также тетраэдром. Пл-ть, прл-ая основанию пирамиды и перкщ-я ее, отсекает подобную пирамиду (рис. 15). Пирамида наз. првл-ой, если ее основанием яв-ся првл. муг-к, и основание высоты совпадает с центром этого муг-ка. Осью првл. пирамиды наз. пм-я, содержащая ее высоту. Высота бок. грани првл. пирамиды, опущенная из ее верш-ы, наз. **апофемой**.

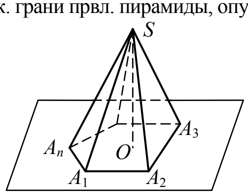


Рис. 14

Рис. 15

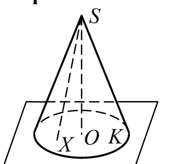


Рис. 16

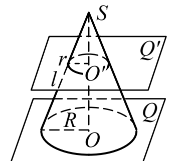


Рис. 17

Пщ. пвх-ти $S_{пир} = S_{бок} + S_{осн}$ ($S_{бок}$ – пщ. бок. пвх-ти, $S_{осн}$ – пщ. основания пирамиды). Объем $V = \dfrac{1}{3}QH$ ($Q$ – пщ. основания, $H$ – высота пирамиды). 2) Првл. пирамида: $S_{бок} = \dfrac{1}{2}Ph_{бок}$ ($P$ – периметр основания, $h_{бок}$ – высота бок. грани), $S_{бок} = \dfrac{Q}{\cos\alpha}$ ($\alpha$ – угол между бок. гранью и плоскостью основания). 3) Првл. усеченная пирамида (рис. 15): $S_{бок} = \dfrac{1}{2}(p + p_1)h_{бок}$ ($p$, $p_1$ – периметры оснований, $h_{бок}$ – высота бок. грани). 4) Конус (рис. 16, 17). Пщ. бок. и полной пвх-ти: $S_{бок} = \pi RL$ и $S_{кон} = \pi RL + \pi R^2$. Объем $V_{кон} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$. 5) Усеченный конус (рис. 17). Пщ. бок. и полной пвх.: $S_{бок} = \pi(R + r)l$ и $S_{кон} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)$. Объем $V_{кон} = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Pr + r^2)$ (где $H = OO'$).

3. Сфера и шар (рис. 18): 1) пщ. пвх-ти сф-ы $S = 4\pi R^2$ ($R$ – радиус шара); 2) объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ (рис. 18); 3) шаровой сектор (рис. 19) $S = \pi R(2h + a)$; $V = \dfrac{2\pi R^2 h}{3}$; 4) шаровой сегмент ($M$ – бок пвх-ть) (рис. 20) $a^2 = h(2R - h)$; $M = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$; $S = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2)$; $V = \dfrac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2) = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$; 5) шаровой слой (рис. 21) $R^2 = a^2 + \left(\dfrac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$; $M = 2\pi Rh$; $S = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$; $V = \dfrac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

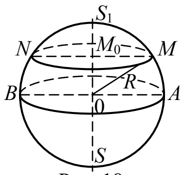


Рис. 18

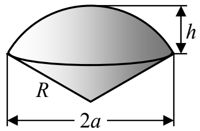


Рис. 19

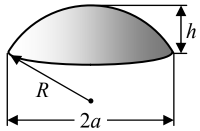


Рис. 20

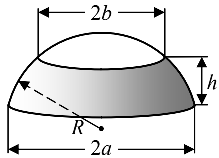


Рис. 21

**4°. Алгебра.** 1. Законы и операции над числами и дробями.

1) Переместительный (коммутативный) закон сложения (сж.) $a + b = b + a$.
Сочетательный (ассоциативный) закон сж. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Коммутативный закон умножения (умн.) $a \cdot b = b \cdot a$.
Ассоциативный закон умн-ия $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
Распределительный (дистрибутивный) закон умн-ия отс-но сж-ия $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
Дистрибутивный закон умн-ия отс-но вычитания $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

2) Дробные выражения (врж.). Основное св. дроби $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0, c \neq 0)$.

Операции с дробями: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + dc}{bd}$, $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, n \in N)$.

3) Проценты. Процент – одна сотая часть числа. Выделяют три типа задач на проценты.
По плану суточная заготовка свекловицы составляет 2400 ц. Фермер решил (с учетом погодных условий) заготовку довести до 2880 ц. Вес сахарного песка составляет 12,5% от веса переработанной свекловицы. Найти: з1. Сколько (ц) свекловицы надо добывать, если план довести до 120%? з2. Сколько свекловицы потребуется для изготовления 300 ц песка? з3. На сколько процентов увеличилась заготовка свекловицы за сутки?

Р. з1. 2400 ц – 100%, $x$ ц – 125% | $x = \dfrac{2400 \cdot 120}{100} = 2880$ (ц). з2. 300 ц – 12,5%, $x$ ц – 100% | $x = \dfrac{300 \cdot 100}{12{,}5} = 2400$ (ц).

з3. 2400 ц – 100%, 2880 – $x$% | $x = \dfrac{2880 \cdot 100}{2400} = 120\%$, тогда $120 - 100 = 20\%$.

4) Пропорциональность (прцн.). Пропорция (прц.) – равенство (рав.) двух отн-й $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$, где $a$ и $d$ – крайние члены, $b$ и $c$ – средние члены прц-и. Основное св. прц-и $ad = bc$.
Врж-ие члена прц-и через остальные $a = \dfrac{bc}{d}$, $b = \dfrac{ad}{c}$, $c = \dfrac{ad}{b}$, $d = \dfrac{bc}{a}$.

Если истинна прц-я $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$), то истинны сд. прц-и: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$, $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Прямая прцн-сть – фк-я, заданная фм-ой $y = kx$ ($k \neq 0$), ($k$ – коэф. прцн-сти, $y$ и $x$ – прцн. пер-ые). Св. прямой прцн-сти $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Обратная прцн. – фк-я, заданная фм-ой $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, $x \neq 0$). Св. обратной прцн.: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

5) Степени (сп.) и корни.

Сп-нь с целым показателем $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ ($n$ раз; $n \in N$, $n \neq 1$), $a^1 = a$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($n \in N$, $a \neq 0$). Св-ва: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Корень $n$-й сп-и $\sqrt[n]{a}$ – арифч. корень $n$-й сп-и из числа $a$, $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $n \in N$, $n > 1$.

Св-ва: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$), $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($a \geq 0$, $b > 0$), $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$ ($a \geq 0$).

$\sqrt{a}$ – арифч. кв-ый корень, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ($a \geq 0$), $\sqrt{a^2} = |a|$.

Сп-нь с дробным (рац-ым) показателем $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in Z$, $n \in N$, $n \geq 2$, $a > 0$).

Св-ва сп-и с дсв. показателем ($a > 0$, $b > 0$, $x \in R$, $y \in R$) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, $a^x = b^{x \lg_b a}$, $a^x = e^{x \ln a} = \exp(x\ln a)$, $a^x = 10^{x \lg a}$.

2. Прогрессии.

1) Арифч. прогрессия – числовая посл-ть $\{a_n\}$, опрм-ая условиями: 1) $a_1 = a$, 2) $a_{n+1} = a_n + d$ ($d$ – разность арифч. прогрессии). Св-ва: $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Фм-а $n$-го члена $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Фм-а суммы $n$ первых членов $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

2) Геомч. прогрессия – числовая посл-ть $\{b_n\}$, опрм-ая усл-ми: 1) $b_1 = b$ ($b \neq 0$), 2) $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($q \neq 0$) ($q$ – знаменатель геомч. прогрессии).

Св-ва геомч. прогрессии: $b_{n+1} : b_n = b_{n+2} : b_{n+1}$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$ ($b_n > 0$). Фм-а $n$-го члена $b_n = b_1 q^{n-1}$. Фм-а суммы $n$ первых членов ($q \neq 1$) $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, $S_n = \frac{b_1(q_n - 1)}{q - 1}$.

Сумма беск. геомч. прогрессии $b + bq + bq^2 + \ldots$, где $|q| < 1$, $S = \frac{b}{1-q}$.

3) Нек-ые тожд.: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$,

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$, $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$,

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$,

$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$,

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

$\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

4) Тожд. сокращенного умн-ия: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$, $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5) Возведение трехчлена в кв-т: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$, $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$.

3. Числовые неравенства (нерав.).

1) Св-ва: если $a < b$, то при любом $c$ $a+c < b+c$, если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$, если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$, если $a < b$, $a$ и $b$ одного знака, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, если $a < b$ и $c < d$, то $a+c < b+d$, $a-d < b-c$, если $a < b$, $c < d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$, если $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^2 < b^2$, $a^n < b^n$ $(n \in N)$, если $|a| < |b|$, то $a^2 < b^2$.

2) Нек-ые полезные нерав-ва.

Сравнение ср-го геомч. и ср. арифч. неотц-ых чисел. 1*. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ (рав-во лишь при $a = b$), $\sqrt{a_1a_2...a_n} \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ (рав-во лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$). 2*. $\frac{2ab}{a^2+b^2} \le 1$ $(a, b > 0)$ (рав-во лишь при $a = b$). 3*. $a + \frac{1}{a} \ge 2$ $(a > 0)$ (рав-во лишь при $a = 1$).

4*. $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a, b \ge 0)$ (рав-во лишь при $ab = 0$).

5*. Нерав-во Буняковского $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$.

6*. Нерав-во Бернулли $(1+h)^n \ge 1 + nh$ $(h > -1, n \in N)$, $(1+h_1)(1+h_2)\ldots(1+h_n) \ge 1 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ ($h_1, h_2, \ldots, h_n$ – числа одного знака, большие $-1$).

7*. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 8*. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ $(n > 1)$.

9*. Нерав-ва с модулем $|a+b| \le |a| + |b|$, $|a-b| \le |a| + |b|$, $|a-b| \ge |a| - |b|$, $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$.

4. Логарифмы (лгр.):

1) $\lg_a b$ $(a > 0, a \ne 1, b > 0)$ – лгр-м числа $b$ по основанию $a$. Осн. лгрч. тожд-во $a^{\lg_a b} = b$, $\lg b$ – десятич. лгр-м (по основанию 10), $\ln b$ – нтр-й лгр-м (по основанию $e$), $\ln b = \lg_e b$, $e^{\lg b} = b$.

2) Переход от одного основания лгр-ов с др. $\lg_a b = \frac{\lg_c b}{\lg_c a}$. В част., $\lg_a b = \frac{1}{\lg_b a}$, $\lg_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$, $\lg_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, $\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{M}$, где $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343$ – модуль перехода от нтр. лгр-ов к десятич.

3) Св-ва $(u, v > 0)$ $\lg_a a = 1$, $\lg_a 1 = 0$, $\lg_a(uv) = \lg_a u + \lg_a v$, $\lg_a\frac{1}{v} = -\lg_a v$, $\lg_a\frac{u}{v} = \lg_a u - \lg_a v$, $\lg_a u^\alpha = \alpha\lg_a u$, $\lg_a\sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\lg_a u$ $(n \in N, n \ne 1)$.

5. Ур-ия и нерав-ва:

1) **Лин. ур-ие** $ax + b = 0$. Если $a \ne 0$, то мн-во р-ий $M = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$. Если $a = 0$, $b = 0$, то $M = R$. Если

$a = 0$, $b \neq 0$, то $M = \varnothing$. **Лин. нерав-во** $ax + b > 0$. Если $a > 0$, то мн-во р-ий $M = \left]-\frac{b}{a}; \infty\right[$.

Если $a < 0$, то $M = \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$. Если $a = 0$, $b > 0$, то $M = R$. Если $a = 0$, $b \leq 0$, то $M = \varnothing$.

2) **Кв. ур-ие** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то мн-во р-ий $M = \{x_1, x_2\}$, $x_1$, $x_2$ – корни кв. ур-ия; $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Если $D = 0$, то $M = \{x_1\}$, $x_1 = \frac{-b}{2a}$. Если $D < 0$, то $M = \varnothing$. В част., $x^2 + px + q = 0$, $D = p^2 - 4q$,

при $D > 0$ $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, при $D = 0$ $x_1 = -\frac{p}{2}$, $ax^2 + bx = 0$ ($b \neq 0$),

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{2}$, $ax^2 + c = 0$ ($ac < 0$), $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

**Теорема Виета**. Если $D > 0$ и $x_1$, $x_2$ – корни кв. ур-ия $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

**Разл-ие кв. трехчлена на мнж-ли**. Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

**Кв. нерав-ва**. $D$ – дискриминант, $x_1$, $x_2$ – корни кв. ур-ия ($x_1 < x_2$), $M$ – мн. р-ий.

| | $D$ | $a$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| 1*. $ax^2 + bx + c > 0$ | $> 0$ | $> 0$ | $]-\infty; x_1[ \cup ]x_2; \infty[$ |
| | $> 0$ | $< 0$ | $]x_1, x_2[$ |
| | $= 0$ | $> 0$ | $R \setminus \{x_1\}$ |
| | $= 0$ | $< 0$ | $\varnothing$ |
| | $< 0$ | $> 0$ | $R$ |
| | $< 0$ | $< 0$ | $\varnothing$ |
| 2*. $ax^2 + bx + c \geq 0$ | $> 0$ | $> 0$ | $]-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty[$ |
| | $> 0$ | $< 0$ | $[x_1, x_2]$ |
| | $= 0$ | $> 0$ | $R$ |
| | $= 0$ | $< 0$ | $\{x_1\}$ |
| | $< 0$ | $> 0$ | $R$ |
| | $< 0$ | $< 0$ | $\varnothing$ |

Нерав-ва $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \leq 0$ сводятся к расн-ым умн-ем на $-1$.

Нек-ые частные случаи: 1*. $x^2 - \alpha^2 > 0$, $M = ]-\infty; -|\alpha|[ \cup ]|\alpha|; \infty[$. 2*. $x^2 - \alpha^2 \geq 0$, $M = ]-\infty; -|\alpha|] \cup [|\alpha|; \infty[$. 3*. $x^2 - \alpha^2 < 0$, $M = ]-|\alpha|; |\alpha|[$. 4*. $x^2 - \alpha^2 \leq 0$, $M = [-|\alpha|; |\alpha|]$. 5*. $x^2 + \alpha^2 > 0$ ($\alpha \neq 0$), $M = R$. 6*. $x^2 + \alpha^2 \geq 0$, $M = R$. 7*. $x^2 + \alpha^2 < 0$, $M = \varnothing$. 8*. $x^2 + \alpha^2 \leq 0$ ($\alpha \neq 0$), $M = \varnothing$.

**Бикв. ур-ие** $ax^4 + bx^2 + c = 0$ сводится к кв-му заменой $x^2 = y$.

3) **Пкзт. ур-ие** $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) при $b > 0$ имеет едн. корень $x = \lg_a b$, а при $b \leq 0$ ур-ие корней не имеет.

**Пкзт. нерав-ва** ($M$ – мн. р-ий).

| | $b$ | $a$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| 1*. $a^x < b$ | $> 0$ | $> 1$ | $]-\infty; \lg_a b[$ |
| | $> 0$ | $0 < a < 1$ | $]\lg_a b; \infty[$ |
| | $\leq 0$ | | $\varnothing$ |
| 2*. $a^x > b$ | $> 0$ | $> 1$ | $]\lg_a b; \infty[$ |
| | $> 0$ | $0 < a < 1$ | $]-\infty; \lg_a b[$ |
| | $< 0$ | | $R$ |

4) **Лгрч. ур-ие** $\lg_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) имеет едн. корень $x = a^b$.

Лгрч. нерав-ва ($M$ – мн. р-ий). 1*. $\lg_a x < b$: если $a > 1$, то $M = ]0; a^b[$. Если $0 < a < 1$, то $M = ]a^b; \infty[$. 2*. $\lg_a x < b$: если $a > 1$, то $M = ]a^b; \infty[$. Если $0 < a < 1$, то $M = ]0; a^b[$.

5) **Тригч. ур-ия** ($M$ – мн. р-ий). 1*. sinix $= a$ $(|a| \le 1)$, $M = \{x \mid x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z\}$.

В част., $\sin x = 0$, $M = \{x \mid x = \pi k,\ k \in Z\}$; $\sin x = 1$, $M = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\}$; $\sin x = -1$, $M =$ $= \{x \mid x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\}$. 2*. $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$, $M = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\}$.

В част., $\cos x = 0$, $M = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\}$; $\cos x = 1$, $M = \{x \mid x = 2\pi k,\ k \in Z\}$; $\cos x = -1$, $M =$ $= \{x \mid x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z\}$. 3*. $\mathrm{tg} x = a$, $M = \{x \mid x = \mathrm{arctg} a + \pi k,\ k \in Z\}$. В част., $\mathrm{tg} x = 0$, $M = \{x \mid x =$ $= \pi k,\ k \in Z\}$; $\mathrm{tg} x = 1$, $M = \{x \mid x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z\}$; $\mathrm{tg} x = -1$, $M = \{x \mid x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z\}$.

4*. $\mathrm{ctg} x = a$, $M = \{x \mid x = \mathrm{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z\}$. В част., $\mathrm{ctg} x = 0$, $M = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\}$;

$\mathrm{ctg} x = 1$, $M = \{x \mid x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z\}$; $\mathrm{ctg} x = -1$, $M = \{x \mid x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z\}$.

**Тригч. нерав-ва** ($M$ – мн. р-ий).

| | $a$ | $M$ |
|---|---|---|
| 1*. $\sin x < a$ | $-1 < a \le 1$ | $\{x \mid -\arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z\}$ |
| | $a > 1$ | $R$ |
| | $a \le -1$ | $\varnothing$ |
| 2*. $\sin x > a$ | $-1 \le a < 1$ | $\{x \mid -\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z\}$ |
| | $a < -1$ | $R$ |
| | $a \ge 1$ | $\varnothing$ |
| 3*. $\cos x < a$ | $-1 < a \le 1$ | $\{x \mid -\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\}$ |
| | $a > 1$ | $R$ |
| | $a \le 1$ | $\varnothing$ |
| 4*. $\cos x > a$ | $-1 \le a < 1$ | $\{x \mid -\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\}$ |
| | $a < -1$ | $R$ |
| | $a \ge 1$ | $\varnothing$ |

5*. $\mathrm{tg} x < a$, $M = \{x \mid -\frac{\pi}{2} + \pi k < x = \mathrm{arctg} a + \pi k,\ k \in Z\}$.

6*. $\mathrm{tg} x > a$, $M = \{x \mid \mathrm{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\}$.

7*. $\mathrm{ctg} x < a$, $M = \{x \mid \mathrm{arcctg} a + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z\}$.

8*. $\mathrm{ctg} x > a$, $M = \{x \mid x = \pi k < x < \mathrm{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z\}$.

6) Простейшие ур-ия и нерав-ва, содержащие модуль $|x - a| = b$.

| Ур-ие | $b$ | $M$ |
|---|---|---|
| 1*. $\lvert x - a\rvert = b$ | $> 0$ | $\{a - b;\ a + b\}$ |
| | $= 0$ | $\{a\}$ |
| | $< 0$ | $\varnothing$ |
| Нерав-ва | | |
| 2*. $\lvert x - a\rvert < b$ | $> 0$ | $]a - b;\ a + b[$ |
| | $\le 0$ | $\varnothing$ |
| 3*. $\lvert x - a\rvert > b$ | $> 0$ | $]-\infty;\ a - b[ \cup ]a + b;\ \infty[$ |
| | $= 0$ | $R \setminus \{a\}$ |
| | $< 0$ | $R$ |

## П$_4$. ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Таблица зн-й фк-и $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3639 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3188 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

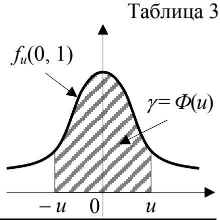
Таблица 2

Таблица значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,00000 | 00399 | 00798 | 01197 | 01595 | 01994 | 92392 | 02790 | 03188 | 03586 |
| 0,1 | 03983 | 04380 | 04776 | 05172 | 05567 | 05962 | 06356 | 06749 | 07142 | 07535 |
| 0,2 | 07926 | 08317 | 08706 | 09095 | 09483 | 09871 | 10257 | 10642 | 11026 | 11409 |
| 0,3 | 11791 | 12172 | 12552 | 12930 | 13307 | 13683 | 14058 | 14431 | 14803 | 15173 |
| 0,4 | 15542 | 15910 | 16276 | 16640 | 17003 | 17364 | 17724 | 18082 | 18439 | 18793 |
| 0,5 | 19146 | 19497 | 19847 | 20194 | 20540 | 20884 | 21226 | 21566 | 21904 | 22240 |
| 0,6 | 22575 | 22907 | 23237 | 23565 | 23891 | 24215 | 24537 | 24857 | 25175 | 25490 |
| 0,7 | 25804 | 26115 | 26424 | 26730 | 27035 | 27337 | 27637 | 27935 | 28230 | 28524 |
| 0,8 | 28814 | 29103 | 29389 | 29673 | 29955 | 30234 | 30511 | 30785 | 31057 | 31327 |
| 0,9 | 31594 | 31859 | 32121 | 32381 | 32639 | 32894 | 33147 | 33398 | 33646 | 33891 |
| 1,0 | 34134 | 34375 | 34614 | 34850 | 35083 | 35314 | 35543 | 35769 | 35993 | 36214 |
| 1,1 | 36433 | 36650 | 36864 | 37076 | 37286 | 37493 | 37698 | 37900 | 38100 | 38298 |
| 1,2 | 38493 | 38686 | 38877 | 39065 | 39251 | 39435 | 39617 | 39796 | 39973 | 40147 |
| 1,3 | 40320 | 40490 | 40658 | 40824 | 40988 | 41149 | 41309 | 41466 | 41621 | 41774 |
| 1,4 | 41924 | 42073 | 42220 | 42364 | 42507 | 42647 | 42786 | 42922 | 43056 | 43189 |
| 1,5 | 43319 | 43448 | 43574 | 43699 | 43822 | 43943 | 44062 | 44179 | 44295 | 44408 |
| 1,6 | 44520 | 44630 | 44738 | 44845 | 44950 | 45053 | 45154 | 45254 | 45352 | 45449 |
| 1,7 | 45543 | 45637 | 45728 | 45818 | 45907 | 45994 | 46080 | 46164 | 46246 | 46327 |
| 1,8 | 46407 | 46485 | 46562 | 46638 | 46712 | 46784 | 46856 | 46926 | 46995 | 47062 |
| 1,9 | 47128 | 47193 | 47257 | 47320 | 47381 | 47441 | 47500 | 47558 | 47615 | 47670 |
| 2,0 | 47725 | 47778 | 47831 | 47882 | 47932 | 47982 | 48030 | 48077 | 48124 | 48169 |
| 2,1 | 48214 | 48257 | 48300 | 48341 | 48382 | 48422 | 48461 | 48500 | 48537 | 48574 |
| 2,2 | 48610 | 48645 | 48679 | 48713 | 48745 | 48778 | 48809 | 48840 | 48870 | 48899 |
| 2,3 | 48928 | 48956 | 48983 | 49010 | 49036 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 |
| 2,4 | 49180 | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 |
| 2,5 | 49379 | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 |
| 2,6 | 49534 | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 |
| 2,7 | 49653 | 49664 | 49674 | 49683 | 49693 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 |
| 2,8 | 49744 | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 |
| 2,9 | 49813 | 49819 | 49825 | 49831 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,0 | 0,49865 | 3,1 | 49903 | 3,2 | 49931 | 3,3 | 49952 | 3,4 | 49966 |
| 3,5 | 49977 | 3,6 | 49984 | 3,7 | 49989 | 3,8 | 49993 | 3,9 | 49995 |
| 4,0 | 499968 | | | | | | | | |
| 4,5 | 499997 | | | | | | | | |
| 5,0 | 49999997 | | | | | | | | |

Таблица 3




Значение функции Лапласа $\Phi(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^u e^{-t^2/2}dt$ или значение вероятности: $\gamma = P(|N(0, 1)| < u)$.

| $u$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0080 | 0,0160 | 0,0238 | 0,0319 | 0,0399 | 0,0478 | 0,0558 | 0,0638 | 0,0717 |
| 0,1 | 0797 | 0876 | 0955 | 1034 | 1113 | 1192 | 1271 | 1350 | 1428 | 1507 |
| 0,2 | 1585 | 1663 | 1741 | 1819 | 1897 | 1974 | 2051 | 2128 | 2205 | 2282 |
| 0,3 | 2358 | 2434 | 2510 | 2586 | 2661 | 2737 | 2812 | 2886 | 2960 | 3035 |
| 0,4 | 3108 | 3182 | 3255 | 3328 | 3401 | 3473 | 3545 | 3616 | 3688 | 3759 |
| 0,5 | 3829 | 3899 | 3969 | 4039 | 4108 | 4177 | 4245 | 4313 | 4381 | 4448 |
| 0,6 | 4515 | 4581 | 4647 | 4713 | 4778 | 4843 | 4907 | 4971 | 5035 | 5098 |
| 0,7 | 5161 | 5223 | 5285 | 5346 | 5407 | 5467 | 5527 | 5587 | 5646 | 5705 |
| 0,8 | 5763 | 5821 | 5878 | 5935 | 5991 | 6047 | 6102 | 6157 | 6211 | 6265 |
| 0,9 | 6319 | 6372 | 6424 | 6476 | 6528 | 6579 | 6629 | 6679 | 6729 | 6778 |
| 1,0 | 0,6827 | 0,6875 | 0,6923 | 0,6970 | 0,7017 | 0,7063 | 0,7109 | 0,7154 | 0,7199 | 0,7243 |
| 1,1 | 7287 | 7330 | 7373 | 7415 | 7457 | 7499 | 7540 | 7580 | 7620 | 7660 |
| 1,2 | 7699 | 7737 | 7775 | 7813 | 7850 | 7887 | 7923 | 7959 | 7994 | 8029 |
| 1,3 | 8064 | 8098 | 8132 | 8165 | 8198 | 8230 | 8262 | 8293 | 8324 | 8355 |
| 1,4 | 8385 | 8415 | 8444 | 8473 | 8501 | 8529 | 8557 | 8584 | 8611 | 8638 |
| 1,5 | 8664 | 8690 | 8715 | 8740 | 8764 | 8789 | 8812 | 8836 | 8859 | 8882 |
| 1,6 | 8904 | 8926 | 8948 | 8969 | 8990 | 9011 | 9031 | 9051 | 9070 | 9090 |
| 1,7 | 9109 | 9127 | 9146 | 9164 | 9181 | 9189 | 9216 | 9233 | 9249 | 9265 |
| 1,8 | 9281 | 9297 | 9312 | 9327 | 9342 | 9357 | 9371 | 9385 | 9399 | 9412 |
| 1,9 | 9426 | 9439 | 9451 | 9464 | 9476 | 8488 | 9500 | 9512 | 9523 | 9534 |
| 2,0 | 0,9545 | 0,9556 | 0,9566 | 0,9576 | 0,9586 | 0,9596 | 0,9606 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9634 |
| 2,1 | 9643 | 9651 | 9660 | 9668 | 9676 | 9684 | 9692 | 9700 | 9707 | 9715 |
| 2,2 | 9722 | 9729 | 9736 | 9743 | 9749 | 9756 | 9762 | 9768 | 9774 | 9780 |
| 2,3 | 9786 | 9791 | 9797 | 9802 | 9807 | 9812 | 9817 | 9822 | 9827 | 9832 |
| 2,4 | 9836 | 9841 | 9845 | 9849 | 9853 | 9857 | 9861 | 9865 | 9869 | 9872 |
| 2,5 | 9876 | 9879 | 9883 | 9886 | 9889 | 9892 | 9895 | 9898 | 9901 | 9904 |
| 2,6 | 9907 | 9910 | 9912 | 99915 | 99917 | 99920 | 9922 | 9924 | 9926 | 9928 |
| 2,7 | 9931 | 9933 | 9935 | 9937 | 9938 | 9940 | 9942 | 9944 | 9946 | 9947 |
| 2,8 | 9949 | 9951 | 9952 | 9953 | 9955 | 9956 | 9958 | 9959 | 9960 | 9961 |
| 2,9 | 9963 | 9964 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 |
| 3,0 | 0,9973 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 |
| 3,1 | 9981 | 9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 |
| 3,5 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 | 9997 |
| 3,6 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 | 9998 | 9998 |
| 3,7 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 |
| 3,8 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 3,9 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 4,0 | 0,999936 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 4,5 | 0,999994 | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| 5,0 | 0,99999994 | – | – | – | – | – | – | – | – | – |

Таблица 4

Таблица значений функции $P_k(a) = \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$

| k \ a | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3 | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5 | | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6 | | | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7 | | | | | 0,000001 | 0,000003 |

| k \ a | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2 | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3 | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4 | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5 | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6 | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7 | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8 | | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008101 |
| 9 | | | | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10 | | | | | 0,000038 | 0,000810 |
| 11 | | | | | 0,000007 | 0,000221 |
| 12 | | | | | 0,000001 | 0,000055 |
| 13 | | | | | | 0,000013 |
| 14 | | | | | | 0,000003 |
| 15 | | | | | | 0,000001 |

| k \ a | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 |
| 2 | 0,146525 | 0,084224 | 01044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3 | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 |
| 4 | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5 | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6 | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7 | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8 | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9 | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 |
| 10 | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11 | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12 | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13 | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14 | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15 | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16 | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17 | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |
| 18 | | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 |
| 19 | | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,001370 |
| 20 | | | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 |
| 21 | | | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 |
| 22 | | | | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 |
| 23 | | | | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 |
| 24 | | | | | 0,000003 | 0,000016 |
| 25 | | | | | 0,000001 | 0,000006 |
| 26 | | | | | | 0,000002 |
| 27 | | | | | | 0,000001 |

Таблица 5

Таблица значений функции $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m e^{-a}}{m!}$

**зм1**. Для $k > 28$, $a > 9$ см. табл. 19.

| $k$ \ $a$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,995321 | 0,982477 | 0,963063 | 0,938448 | 0,909796 | 0,878099 |
| 2 | 0,999845 | 0,998852 | 0,996400 | 0,992074 | 0,985612 | 0,976885 |
| 3 | 0,999996 | 0,999943 | 0,999734 | 0,999224 | 0,998248 | 0,996642 |
| 4 | 1,000000 | 0,999998 | 0,999984 | 0,999939 | 0,999828 | 0,999606 |
| 5 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 | 0,999986 | 0,999962 |
| 6 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 |
| 7 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |

| $k$ \ $a$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,844195 | 0,808792 | 0,772483 | 0,735759 | 0,406006 | 0,199148 |
| 2 | 0,965858 | 0,952577 | 0,937144 | 0,919699 | 0,676677 | 0,423190 |
| 3 | 0,994246 | 0,990920 | 0,986542 | 0,981012 | 0,857124 | 0,647232 |
| 4 | 0,999214 | 0,998589 | 0,997657 | 0,996340 | 0,947348 | 0,815263 |
| 5 | 0,999909 | 0,999816 | 0,999658 | 0,999406 | 0,983437 | 0,916082 |
| 6 | 0,999990 | 0,999980 | 0,999958 | 0,999917 | 0,995467 | 0,966491 |
| 7 | 0,999998 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999990 | 0,998904 | 0,988095 |
| 8 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999763 | 0,996196 |
| 9 | | | | 1,000000 | 0,999954 | 0,998897 |
| 10 | | | | | 0,999992 | 0,999707 |
| 11 | | | | | 0,999999 | 0,999928 |
| 12 | | | | | 1,000000 | 0,999983 |
| 13 | | | | | | 0,999996 |
| 14 | | | | | | 0,999999 |
| 15 | | | | | | 1,000000 |

| $k$ \ $a$ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 0,091579 | 0,040428 | 0,017352 | 0,007295 | 0,003019 | 0,001234 |
| 2 | 0,238105 | 0,124652 | 0,061970 | 0,029636 | 0,013754 | 0,006232 |
| 3 | 0,433472 | 0,265026 | 0,151205 | 0,081765 | 0,042380 | 0,021228 |
| 4 | 0,628839 | 0,440493 | 0,285058 | 0,172991 | 0,099632 | 0,054963 |
| 5 | 0,785132 | 0,615960 | 0,445681 | 0,300708 | 0,191236 | 0,115690 |
| 6 | 0,889326 | 0,762183 | 0,606304 | 0,449711 | 0,313374 | 0,206780 |
| 7 | 0,948866 | 0,866628 | 0,743981 | 0,598714 | 0,452961 | 0,323896 |
| 8 | 0,978636 | 0,931806 | 0,847239 | 0,729091 | 0,592548 | 0,455652 |
| 9 | 0,991867 | 0,968172 | 0,916077 | 0,830496 | 0,716625 | 0,587408 |
| 10 | 0,997159 | 0,986305 | 0,957380 | 0,901479 | 0,815887 | 0,705988 |
| 11 | 0,999084 | 0,994547 | 0,979909 | 0,946650 | 0,888077 | 0,803008 |
| 12 | 0,999726 | 0,997981 | 0,991173 | 0,973000 | 0,936204 | 0,875773 |
| 13 | 0,999923 | 0,999202 | 0,996372 | 0,987188 | 0,965820 | 0,926149 |
| 14 | 0,999979 | 0,999774 | 0,998600 | 0,994282 | 0,982744 | 0,958533 |
| 15 | 0,999994 | 0,999931 | 0,999491 | 0,997593 | 0,991770 | 0,977964 |
| 16 | 0,999998 | 0,999980 | 0,999825 | 0,999041 | 0,996283 | 0,988894 |
| 17 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999943 | 0,999637 | 0,998407 | 0,994680 |
| 18 | 0,999999 | 0,999998 | 0,999982 | 0,999869 | 0,999351 | 0,997573 |
| 19 | 0,999999 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999955 | 0,999748 | 0,998943 |
| 20 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999998 | 0,999985 | 0,999907 | 0,999560 |
| 21 | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999995 | 0,999967 | 0,999824 |
| 22 | | | 0,999999 | 0,999998 | 0,999989 | 0,999932 |
| 23 | | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999974 |
| 24 | | | | 0,999999 | 0,999999 | 0,999990 |
| 25 | | | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 |
| 26 | | | | | 1,000000 | 0,999998 |
| 27 | | | | | | 0,999999 |
| 28 | | | | | | 1,000000 |

Таблица 6

Критические тч. распределения Стьюдента

| Число сп-ей свободы $k$ | Уровень значимости $\alpha$ (двусторонняя критическая обл.) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 6,31 | 12,7 | 31,82 | 63,7 | 318,3 | 637,0 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,92 | 22,33 | 31,6 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,22 | 12,9 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 | 6,86 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 4,79 | 5,40 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 | 3,96 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,49 | 3,77 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 | 3,74 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,45 | 3,72 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1,71 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,17 | 3,37 |
| $\infty$ | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,09 | 3,29 |
| | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,001 | 0,0005 |
| | Уровень значимости $\alpha$ (односторонняя критическая обл.) | | | | | |

Таблица 7

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

| $n$ \ $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $n$ \ $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1,37 | 2,67 | 5,64 | 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 |
| 6 | 1,09 | 2,01 | 3,88 | 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 7 | 0,92 | 1,62 | 2,98 | 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 8 | 0,80 | 1,38 | 2,42 | 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 9 | 0,71 | 1,20 | 2,06 | 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 10 | 0,65 | 1,08 | 1,80 | 45 | 0,22 | 0,32 | 0,46 |
| 11 | 0,59 | 0,98 | 1,60 | 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | 1,45 | 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | 1,33 | 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | 1,23 | 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | 1,15 | 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 16 | 0,44 | 0,70 | 1,07 | 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | 1,01 | 150 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 | 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

Таблица 8

Критические тч. распределения $\chi^2$

| k \ a | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 0,064 | 0,148 | 0,455 |
| 2 | 0,02 | 0,04 | 0,103 | 0,211 | 0,446 | 0,713 | 1,386 |
| 3 | 0,115 | 0,185 | 0,352 | 0,584 | 1,005 | 1,424 | 2,37 |
| 4 | 0,297 | 0,429 | 0,711 | 1,064 | 1,649 | 2,2 | 3,36 |
| 5 | 0,554 | 0,752 | 1,145 | 1,61 | 2,34 | 3,00 | 4,35 |
| 6 | 0,872 | 1,134 | 1,635 | 2,2 | 3,07 | 3,83 | 5,35 |
| 7 | 1,239 | 1,564 | 2,17 | 2,83 | 3,82 | 4,67 | 6,35 |
| 8 | 1,646 | 2,03 | 2,73 | 3,49 | 4,59 | 5,53 | 7,34 |
| 9 | 2,09 | 2,53 | 3,32 | 4,17 | 5,38 | 6,39 | 8,34 |
| 10 | 2,56 | 3,06 | 3,94 | 4,86 | 6,18 | 7,27 | 9,34 |
| 11 | 3,05 | 3,61 | 4,58 | 5,58 | 6,99 | 8,15 | 10,34 |
| 12 | 3,57 | 4,18 | 5,23 | 6,3 | 7,81 | 9,03 | 11,34 |
| 13 | 4,11 | 4,76 | 5,89 | 7,04 | 8,63 | 9,93 | 12,34 |
| 14 | 4,66 | 5,37 | 6,57 | 7,79 | 9,47 | 10,82 | 13,34 |
| 15 | 5,23 | 5,98 | 7,26 | 8,55 | 10,31 | 11,72 | 14,34 |
| 16 | 5,81 | 6,61 | 7,96 | 9,31 | 11,15 | 12,62 | 15,34 |
| 17 | 6,41 | 7,26 | 8,67 | 10,08 | 12,00 | 13,53 | 16,34 |
| 18 | 7,02 | 7,91 | 9,39 | 10,86 | 12,86 | 14,44 | 17,34 |
| 19 | 7,63 | 8,57 | 10,11 | 11,65 | 13,72 | 15,35 | 18,34 |
| 20 | 8,26 | 9,24 | 10,85 | 12,44 | 14,58 | 16,27 | 19,34 |
| 21 | 8,9 | 9,92 | 11,59 | 13,24 | 15,44 | 17,18 | 20,30 |
| 22 | 9,54 | 10,6 | 12,34 | 14,04 | 16,31 | 18,10 | 21,30 |
| 23 | 10,2 | 11,29 | 13,09 | 14,85 | 17,19 | 19,02 | 22,30 |
| 24 | 10,86 | 11,99 | 13,85 | 15,66 | 18,06 | 19,94 | 23,30 |
| 25 | 11,52 | 12,7 | 14,61 | 16,47 | 18,94 | 20,90 | 24,30 |
| 26 | 12,2 | 13,41 | 15,38 | 17,29 | 19,82 | 21,80 | 25,30 |
| 27 | 12,88 | 14,12 | 16,15 | 18,11 | 20,70 | 22,70 | 26,30 |
| 28 | 13,56 | 14,85 | 16,93 | 18,94 | 21,60 | 23,60 | 27,30 |
| 29 | 14,26 | 15,57 | 17,71 | 19,77 | 22,50 | 24,60 | 28,30 |
| 30 | 14,95 | 16,31 | 18,49 | 20,60 | 23,40 | 25,50 | 29,30 |

| k \ a | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,074 | 1,642 | 2,71 | 3,84 | 5,41 | 6,64 | 10,83 |
| 2 | 2,41 | 3,22 | 4,60 | 5,99 | 7,82 | 9,21 | 13,82 |
| 3 | 3,66 | 4,64 | 6,25 | 7,82 | 9,84 | 11,34 | 16,27 |
| 4 | 4,88 | 5,99 | 7,78 | 9,49 | 11,67 | 13,28 | 18,46 |
| 5 | 6,06 | 7,29 | 9,24 | 11,07 | 13,39 | 15,09 | 20,50 |
| 6 | 7,23 | 8,56 | 10,64 | 12,59 | 15,03 | 16,81 | 22,50 |
| 7 | 8,38 | 9,80 | 12,02 | 14,07 | 16,62 | 18,48 | 24,30 |
| 8 | 9,52 | 11,03 | 13,36 | 15,51 | 18,17 | 20,10 | 26,10 |
| 9 | 10,66 | 12,24 | 14,68 | 16,92 | 19,68 | 21,70 | 27,90 |
| 10 | 11,78 | 13,44 | 15,99 | 18,31 | 21,20 | 23,20 | 29,60 |
| 11 | 12,90 | 14,63 | 17,28 | 19,68 | 22,60 | 24,70 | 31,30 |
| 12 | 14,01 | 15,81 | 18,55 | 21,00 | 24,10 | 26,20 | 32,90 |
| 13 | 15,12 | 16,98 | 19,81 | 22,40 | 25,50 | 27,70 | 34,60 |
| 14 | 16,22 | 18,15 | 21,10 | 23,70 | 26,90 | 29,10 | 36,10 |
| 15 | 17,32 | 19,31 | 22,30 | 25,00 | 28,30 | 30,60 | 37,70 |
| 16 | 18,42 | 20,50 | 23,50 | 26,30 | 29,60 | 32,00 | 39,30 |
| 17 | 19,51 | 21,60 | 24,80 | 27,60 | 31,00 | 33,40 | 40,80 |
| 18 | 20,60 | 22,80 | 26,00 | 28,90 | 32,30 | 34,80 | 42,30 |
| 19 | 21,70 | 32,90 | 27,20 | 30,10 | 33,70 | 36,20 | 43,80 |
| 20 | 22,80 | 25,00 | 28,40 | 31,40 | 35,00 | 37,60 | 45,30 |
| 21 | 23,90 | 26,20 | 29,60 | 32,70 | 36,30 | 38,90 | 46,80 |
| 22 | 24,90 | 27,30 | 30,80 | 33,90 | 37,70 | 40,30 | 48,30 |
| 23 | 26,00 | 28,40 | 32,00 | 35,20 | 39,00 | 41,60 | 49,70 |
| 24 | 27,10 | 29,60 | 33,20 | 36,40 | 40,30 | 43,00 | 51,20 |
| 25 | 28,20 | 30,70 | 34,40 | 37,70 | 41,70 | 44,30 | 52,60 |
| 26 | 29,20 | 31,80 | 35,60 | 38,90 | 42,90 | 45,60 | 54,10 |
| 27 | 30,30 | 32,90 | 36,70 | 40,10 | 44,10 | 47,00 | 55,50 |
| 28 | 31,40 | 34,00 | 37,90 | 41,30 | 45,40 | 48,30 | 56,90 |
| 29 | 32,50 | 35,10 | 39,10 | 42,60 | 46,70 | 49,60 | 58,30 |
| 30 | 33,50 | 36,20 | 40,30 | 43,80 | 48,00 | 50,90 | 59,70 |

Таблица 9

Критические точки распределения *F* Фишера-Снедекора
($k_1$ – число степеней свободы большей дисперсии,
$k_2$ – число степеней свободы меньшей дисперсии)

| Уровень значимости $\alpha$ = 0,01 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5889 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6082 | 6106 |
| 2 | 98,49 | 99,01 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 49,34 | 99,36 | 99,36 | 99,40 | 99,41 | 99,42 |
| 3 | 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,34 | 27,23 | 27,13 | 27,05 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,54 | 14,45 | 14,37 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,45 | 10,27 | 10,15 | 10,05 | 9,96 | 9,89 |
| 6 | 13,74 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,79 | 7,72 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 7,00 | 6,84 | 6,71 | 6,62 | 0,54 | 6,47 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,19 | 6,03 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,67 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,62 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,9S | 5,64 | 5,39 | 5,21 | 5,06 | 4,95 | 4,85 | 4,78 | 4,71 |
| 11 | 9,86 | 7,20 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,88 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4,10 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,65 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,20 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 4,02 | 3,96 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,86 | 3,80 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3 89 | 3,80 | 3,73 | 3,67 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,61 | 3,55 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,52 | 3,15 |

| Уровень значимости $\alpha$ = 0,05 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19,37 | 19,38 | 19,39 | 19,40 | 19,41 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,88 | 8,84 | 8,81 | 8,78 | 8,76 | 8,74 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,93 | 5,91 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,78 | 4,74 | 4,70 | 4,68 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,03 | 4,00 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,63 | 3,60 | 3,57 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,34 | 3,31 | 3,28 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,10 | 3,07 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,97 | 2,94 | 2,91 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,86 | 2,82 | 2,79 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 | 2,76 | 2,72 | 2,69 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,84 | 2,77 | 2,72 | 2,67 | 2,63 | 2,60 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,56 | 2,53 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,55 | 2,51 | 2,48 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,45 | 2,42 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,02 | 2,55 | 2,50 | 2,45 | 2,41 | 2,38 |

Таблица 10

## Критические точки распределения Кочрена
## ($k$ – число сп-ей свободы, $l$ – кол-во выборок)

Уровень значимости $\alpha$ = 0,01

| $l$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,9999 | 0,9950 | 0,9794 | 0,9586 | 0,9373 | 0,9172 | 0,8988 |
| 3 | 9933 | 9423 | 8831 | 8335 | 7933 | 7606 | 7335 |
| 4 | 9676 | 8643 | 7814 | 7212 | 6761 | 6410 | 6129 |
| 5 | 0,9279 | 0,7885 | 0,6957 | 0,6329 | 0,5875 | 0,5531 | 0,5259 |
| 6 | 8828 | 7218 | 6258 | 5635 | 5195 | 4866 | 4608 |
| 7 | 8376 | 6644 | 5685 | 5080 | 4659 | 4347 | 4105 |
| 8 | 0,7945 | 0,6152 | 0,5209 | 0,4627 | 0,4226 | 0,3932 | 0,3704 |
| 9 | 7544 | 5727 | 4810 | 4251 | 3870 | 3592 | 3378 |
| 10 | 7175 | 5358 | 4469 | 3934 | 3572 | 3308 | 3106 |
| 12 | 0,6528 | 0,4751 | 0,3919 | 0,3428 | 0,3099 | 0,2861 | 0,2680 |
| 15 | 5747 | 4069 | 3317 | 2882 | 2593 | 2386 | 2228 |
| 20 | 4799 | 3297 | 2654 | 2288 | 2048 | 1877 | 1748 |
| 24 | 0,4247 | 0,2871 | 0,2295 | 0,1970 | 0,1759 | 0,1608 | 0,1495 |
| 30 | 3632 | 2412 | 1913 | 1635 | 1454 | 1327 | 1232 |
| 40 | 2940 | 1915 | 1508 | 1281 | 1135 | 1033 | 0957 |
| 60 | 0,2151 | 0,1371 | 0,1069 | 0,0902 | 0,0796 | 0,0722 | 0,0668 |
| 120 | 1225 | 0759 | 0585 | 0489 | 0429 | 0387 | 0357 |
| ∞ | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

| $l$ \ $k$ | 8 | 9 | 10 | 16 | 36 | 144 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,8823 | 0,8674 | 0,8539 | 0,7949 | 0,7067 | 0,6062 | 0,5000 |
| 3 | 7107 | 6912 | 6743 | 6059 | 5153 | 4230 | 3333 |
| 4 | 5897 | 5702 | 5536 | 4884 | 4057 | 3251 | 2500 |
| 5 | 0,5037 | 0,4854 | 0,4697 | 0,4094 | 0,3351 | 0,2644 | 0,2000 |
| 6 | 4401 | 4229 | 4084 | 3529 | 2858 | 2229 | 1667 |
| 1 | 3911 | 3751 | 3616 | 3105 | 2494 | 1929 | 1429 |
| 8 | 0,3522 | 0,3373 | 0,3248 | 0,2779 | 0,2214 | 0,1700 | 0,1250 |
| 9 | 3207 | 3067 | 2950 | 2514 | 1992 | 1521 | 1111 |
| 10 | 2945 | 2813 | 2704 | 2297 | 1811 | 1376 | 1000 |
| 12 | 0,2535 | 0,2419 | 0,2320 | 0,1961 | 0,1535 | 0,1157 | 0,0833 |
| 15 | 2104 | 2002 | 1918 | 1612 | 1251 | 0934 | 0667 |
| 20 | 1646 | 1567 | 1501 | 1248 | 0960 | 0709 | 0500 |
| 24 | 0,1406 | 0,1338 | 0,1283 | 0,1060 | 0,0810 | 0,0595 | 0,0417 |
| 30 | 1157 | 1100 | 1054 | 0867 | 0658 | 0480 | 0333 |
| 40 | 0898 | 0853 | 0816 | 0668 | 0503 | 0363 | 0250 |
| 60 | 0,0625 | 0,0594 | 0,0567 | 0,0461 | 0,0344 | 0,0245 | 0,0167 |
| 120 | 0334 | 0316 | 0302 | 0242 | 0178 | 0125 | 0083 |
| ∞ | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

Уровень значимости $\alpha$ = 0,05

| $l$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,9985 | 0,9750 | 0,9392 | 0,9057 | 0,8772 | 0,8534 | 0,8332 |
| 3 | 9669 | 8709 | 7977 | 7457 | 7071 | 6771 | 0530 |
| 4 | 9065 | 7679 | 6841 | 6287 | 5895 | 5598 | 5365 |
| 5 | 0,8412 | 0,6338 | 0,5981 | 0,5440 | 0,5063 | 0,4783 | 0,4564 |
| 6 | 7808 | 6161 | 5321 | 4803 | 4447 | 4184 | 3980 |
| 7 | 7271 | 5612 | 4800 | 4307 | 3974 | 3726 | 3535 |
| 8 | 0,6798 | 0,5157 | 0,4377 | 0,3910 | 0,3595 | 0,3,462 | 0,3185 |
| 9 | 6385 | 4775 | 4027 | 3584 | 3286 | 3067 | 2901 |
| 10 | 6020 | 4450 | 3733 | 3311 | 3029 | 2823 | 2666 |
| 12 | 0,5410 | 0,3924 | 0,3624 | 0,2880 | 0,2624 | 0,2439 | 0,2299 |
| 15 | 4709 | 3346 | 2758 | 2419 | 2195 | 2034 | 1911 |
| 20 | 3894 | 2705 | 2205 | 1921 | 1735 | 1602 | 1501 |
| 24 | 0,3434 | 0,2354 | 0,1907 | 0,1656 | 0,1493 | 0,1374 | 0,1286 |
| 30 | 2929 | 1980 | 1593 | 1377 | 1237 | 1137 | 1061 |
| 40 | 2370 | 1576 | 1259 | 1082 | 0968 | 0887 | 0827 |
| 60 | 0,1737 | 0,1131 | 0,0895 | 0,0765 | 0,0682 | 0,0623 | 0,0583 |
| 120 | 0998 | 0632 | 0495 | 0419 | 0371 | 0337 | 0312 |
| | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

| $l$ \ $k$ | 8 | 9 | 10 | 16 | 36 | 144 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,8159 | 0,8010 | 0,7880 | 0,7341 | 0,6602 | 0,5813 | 0,5000 |
| 3 | 6333 | 6167 | 6025 | 5466 | 4748 | 4031 | 3333 |
| 4 | 5175 | 5017 | 4884 | 4366 | 3720 | 3093 | 2500 |
| 5 | 0,4387 | 0,4241 | 0,4118 | 0,3645 | 0,3066 | 0,2013 | 0,2000 |
| 6 | 3817 | 3682 | 3568 | 3135 | 2612 | 2119 | 1667 |
| 1 | 3384 | 3259 | 3154 | 2756 | 2278 | 1833 | 1429 |
| 8 | 0,3043 | 0,2926 | 0,2829 | 0,2462 | 0,2022 | 0,1016 | 0,1250 |
| 9 | 2768 | 2659 | 2568 | 2226 | 1820 | 1446 | 1111 |
| 10 | 2541 | 2439 | 2353 | 2032 | 1655 | 1308 | 1000 |
| 12 | 0,2187 | 0,2098 | 0,2020 | 0,1737 | 0,1403 | 0,1100 | 0,0833 |
| 15 | 1815 | 1736 | 1671 | 1429 | 1144 | 0889 | 0067 |
| 20 | 1422 | 1357 | 1303 | 1108 | 0879 | 0675 | 0500 |
| 24 | 0,1216 | 0,1160 | 0,1113 | 0,0942 | 0,0743 | 0,0567 | 0,0417 |
| 30 | 1002 | 0958 | 0921 | 0771 | 0C04 | 0457 | 0333 |
| 40 | 0780 | 0745 | 0713 | 0595 | 0462 | 0347 | 0250 |
| 60 | 0,0552 | 0,0520 | 0,0497 | 0,0411 | 0,0316 | 0,0234 | 0,0167 |
| 120 | 0292 | 0279 | 0266 | 0218 | 0165 | 0120 | 0083 |
| ∞ | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

Таблица 11

Таблица значения функции $K(\lambda)$ Колмогорова

| $\lambda$ | $K(\lambda)$ | $\lambda$ | $K(\lambda)$ | $\lambda$ | $K(\lambda)$ | $\lambda$ | $K(\lambda)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,28 | 0,000001 | 0,86 | 0,549744 | 1,44 | 0,968382 | 2,02 | 0,999428 |
| 0,29 | 0,000004 | 0,87 | 0,564546 | 1,45 | 0,970158 | 2,03 | 0,999474 |
| 0,30 | 0,000009 | 0,88 | 0,579070 | 1,46 | 0,971846 | 2,04 | 0,999516 |
| 0,31 | 0,000021 | 0,89 | 0,593316 | 1,47 | 0,973448 | 2,05 | 0,999552 |
| 0,32 | 0,000046 | 0,90 | 0,602270 | 1,48 | 0,974970 | 2,06 | 0,999588 |
| 0,33 | 0,000091 | 0,91 | 0,620928 | 1,49 | 0,956412 | 2,07 | 0,999620 |
| 0,34 | 0,000171 | 3,92 | 0,634286 | 1,50 | 0,977782 | 2,08 | 0,999650 |
| 0,35 | 0,000303 | 0,93 | 0,647338 | 1,51 | 0,979080 | 2,09 | 0,999680 |
| 0,36 | 0,000511 | 0,94 | 0,660082 | 1,52 | 0,980310 | 2,10 | 0,999705 |
| 0,37 | 0,000826 | 0,95 | 0,672516 | 1,53 | 0,981476 | 2,11 | 0,999728 |
| 0,38 | 0,001285 | 0,96 | 0,684636 | 1,54 | 0,982578 | 2,12 | 0,999750 |
| 0,39 | 0,001929 | 1,97 | 0,696444 | 1,55 | 0,983622 | 2,13 | 0,999770 |
| 0,40 | 0,002808 | 3,98 | 0,702814 | 1,56 | 0,984610 | 2,14 | 0,999790 |
| 0,41 | 0,003972 | 3,99 | 0,719126 | 1,57 | 0,985544 | 2,15 | 0,999806 |
| 0,42 | 0,005476 | 1,00 | 0,730000 | 1,58 | 0,985426 | 2,16 | 0,999822 |
| 0,43 | 0,007377 | 1,01 | 0,740566 | 1,59 | 0,987260 | 2,17 | 0,999838 |
| 0,44 | 0,009730 | 1,02 | 0,750826 | 1,60 | 0,988048 | 2,18 | 0,999852 |
| 0,45 | 0,012590 | 1,03 | 0,760780 | 1,61 | 0,988791 | 2,19 | 0,999864 |
| 0,46 | 0,016005 | 1,04 | 0,770434 | 1,62 | 0,989492 | 2,20 | 0,999874 |
| 0,47 | 0,020022 | 1,05 | 0,779794 | 1,63 | 0,990154 | 2,21 | 0,999886 |
| 0,48 | 0,024682 | 1,06 | 0,788860 | 1,64 | 0,990777 | 2,22 | 0,999896 |
| 0,49 | 0,030017 | 1,07 | 0,797636 | 1,65 | 0,991304 | 2,23 | 0,999904 |
| 0,50 | 0,036055 | 1,08 | 0,806128 | 1,66 | 0,991917 | 2,24 | 0,999912 |
| 0,51 | 0,042814 | 1,09 | 0,814342 | 1,67 | 0,992438 | 2,25 | 0,999920 |
| 0,52 | 0,050306 | 1,10 | 0,822282 | 1,68 | 0,992928 | 2,26 | 0,999926 |
| 0,53 | 0,058534 | 1,11 | 0,829950 | 1,69 | 0,993389 | 2,27 | 0,999934 |
| 0,54 | 0,067497 | 1,12 | 0,837356 | 1,70 | 0,993823 | 2,28 | 0,999940 |
| 0,55 | 0,077183 | 1,13 | 0,844502 | 1,71 | 0,994230 | 2,29 | 0,999944 |
| 0,56 | 0,087577 | 1,14 | 0,851394 | 1,72 | 0,994612 | 2,30 | 0,099949 |
| 0,57 | 0,098656 | 1,15 | 0,858038 | 1,73 | 0,994972 | 2,31 | 0,999954 |
| 0,58 | 0,110395 | 1,16 | 0,864442 | 1,74 | 0,995309 | 2,32 | 0,999958 |
| 0,59 | 0,122760 | 1,17 | 0,870612 | 1,75 | 0,995625 | 2,33 | 0,999962 |
| 0,60 | 0,135718 | 1,18 | 0,876548 | 1,76 | 0,995922 | 2,34 | 0,999965 |
| 0,61 | 0,149229 | 1,19 | 0,882258 | 1,77 | 0,996200 | 2,35 | 0,999968 |
| 0,62 | 0,163225 | 1,20 | 0,887750 | 1,78 | 0,996460 | 2,36 | 0,999970 |
| 0,63 | 0,177753 | 1,21 | 0,893030 | 1,79 | 0,996704 | 2,37 | 0,999973 |
| 0,64 | 0,192677 | 1,22 | 0,898104 | 1,80 | 0,996932 | 2,38 | 0,999976 |
| 0,65 | 0,207987 | 1,23 | 0,902972 | 1,81 | 0,997146 | 2,39 | 0,999978 |
| 0,66 | 0,223637 | 1,24 | 0,907648 | 1,82 | 0,997346 | 2,40 | 0,999980 |
| 0,67 | 0,239582 | 1,25 | 0,912132 | 1,83 | 0,997533 | 2,41 | 0,999982 |
| 0,68 | 0,255780 | 1,26 | 0,916432 | 1,84 | 0,997707 | 2,42 | 0,999984 |
| 0,69 | 0,272189 | 1,27 | 0,920556 | 1,85 | 0,997870 | 2,43 | 0,999986 |
| 0,70 | 0,288765 | 1,28 | 0,924505 | 1,86 | 0,998023 | 2,44 | 0,999987 |
| 0,71 | 0,305471 | 1,29 | 0,928288 | 1,87 | 0,998145 | 2,45 | 0,999988 |
| 0,72 | 0,322265 | 1,30 | 0,931908 | 1,88 | 0,998297 | 2,46 | 0,999988 |
| 0,73 | 0,339113 | 1,31 | 0,935370 | 1,89 | 0,998421 | 2,47 | 0,999990 |
| 0,74 | 0,355981 | 1,32 | 0,938682 | 1,90 | 0,998536 | 2,48 | 0,999991 |
| 0,75 | 0,372833 | 1,33 | 0,941848 | 1,91 | 0,998644 | 2,49 | 0,999992 |
| 0,76 | 0,389640 | 1,34 | 0,944872 | 1,92 | 0,998745 | 2,50 | 0,9999925 |
| 0,77 | 0,406472 | 1,35 | 0,947756 | 1,93 | 0,998837 | 2,55 | 0,9999956 |
| 0,78 | 0,423002 | 1,36 | 0,950512 | 1,94 | 0,998924 | 2,60 | 0,9999974 |
| 0,79 | 0,439505 | 1,37 | 0,952142 | 1,95 | 0,999004 | 2,65 | 0,9099984 |
| 0,80 | 0,455857 | 1,38 | 0,955650 | 1,96 | 0,999079 | 2,70 | 0,9999990 |
| 0,81 | 0,472041 | 1,39 | 0,958040 | 1,97 | 0,999149 | 2,75 | 0,9999994 |
| 0,82 | 0,488030 | 1,40 | 0,960318 | 1,98 | 0,999213 | 2,80 | 0,9999997 |
| 0,83 | 0,503808 | 1,41 | 0,962486 | 1,99 | 0,999273 | 2,85 | 0,99999982 |
| 0,84 | 0,519366 | 1,42 | 0,964552 | 2,00 | 0,999329 | 2,90 | 0,99999990 |
| 0,85 | 0,534682 | 1,43 | 0,966516 | 2,01 | 0,999380 | 2,95 | 0,99999994 |
| | | | | | | 3,00 | 0,99999997 |

# ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

**1. Альфред Реньи**. Диалоги о математике. – М.: Мир, 1969. – 96 с.

**2. Беллман Р**. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

**3. Белько И.В.**, **Свирид Г.П.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи. – Минск: Новое знание, 2007. – 251 с.

**4. Бугров Я.С., Никольский С.М**. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 176 с.

**4а. Бугров Я.С., Никольский С.М**. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

**5. Букур И., Деляну А**. Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259 с.

**6. Выгодский М.Я**. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966. – 871 с.

**7. Глаголев А.А., Солнцева Т.В**. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1971. – 656 с.

**8. Гмурман В.Е.** Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. – М.: Высшая школа, 1966. – 380 с.

**9. Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2008. – 404 с.

**10. Гнеденко Б.В.** Введение в специальность Математика. – М.: Наука, 1991. – 238 с.

**11. Гнеденко Б.В.** Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982. – 145 с.

**12. Головина Л.И**. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1975. – 408 с.

**13. Гурский Е.И., Домашов В.П**. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. – Минск, 1989. – 350 с. (часть 1); 1990. – 400 с. (часть 2).

**14. Гусак А.А.** Высшая математика (учебник для студентов вузов). – Минск: ТетраСистемс, 2001. – Том 1. – 544 с.; том 2. – 448 с.

**15. Гутер Р.С., Янпольский А.Р**. Дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1976. – 304 с.

**16. Ефимов Н.В**. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. – 272 с.

**17. Ильин В.А., Позняк Э.Г**. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

**18. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жебержеев В.Ф**. Специальный курс высшей математики (прикладные вопросы анализа). – М.: Высшая школа, 1976. – 389 с.

**19. Козлов В.Н**. Математика и информатика. – СПб.: Питер, 2004. – 266 с.

**20. Корн Г., Корн Т**. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

**21. Кручкович Г.И., Мордасова Г.М.** и др. Сборник задач и упражнений по специлальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.

**22. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И**. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.

**23. Кудрявцев Л.Д**. Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1980. – 144 с.

**24. Курош А.Г**. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

**25. Маркович Э.С**. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая школа, 1972. – 480 с.

**26. Минорский В.П**. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

**27. Петров В.А**. Математические задачи из сельскохозяйственной практики. – М.: Просвещение, 1980. – 64 с.

**28. Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Том 1. – 456 с.; том 2. – 576 с.

**29. Савельев Л.Я.** Комбинаторика и вероятность. – Новосибирск: Наука, 1975. – 424 с.

**30. Смирнов Н.В.** Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964. – 208 с.

**31. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П**. Рассказы о прикладной математике. – М.: Наука, 1979. – 207 с.

**32. Тухватов М.Б.** Лекции по математике (для поступающих в вузы и самообразования). – Уфа: БГАУ, 1997. – 640 с.

**33. Тухватов М.Б.** Лекции по общей математике (учебное пособие для вузов). Ч. 1: Множества и их отображения. Дискретная математика. – Уфа: БГАУ, 2002. – 396 с.

**34. Тухватов М.Б.** Лекции по общей математике (учебное пособие для вузов). Ч. 2: Математические модели и методы их решения. – Уфа: БГАУ, 2006. – 667 с.

**35. Тухватов М.Б.** Лекции по общей математике (учебное пособие для вузов). Ч. 3: Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая обработка результатов опыта. – Уфа: БГАУ, 2008. – 640 с.

**35а. Тухватов М.Б.** Весовые методы в математическом программировании. – Ташкент: ФАН УзССР, 1981. – 158 с.

**35б. Тухватов М.Б.** Задачи и принципы построений АСУ ВУЗ. Деп. 20.08.82 г. № 399-82. – 160 с.

**35в. Тухватов М.Б.** Весовой подход к оценке эффективности и качества вузовского учебника математики // Научные труды ТИНХ: Применение математических методов в экономических исследованиях. Вып. 205. Ташкент, 1982. – С. 66-79.

**36. Фройденталь Г**. Математика как педагогическая задача. Часть II. – М.: Просвещение, 1983. – 192 с.

**37. Цыпкин А.Г**. Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1964. – 480 с.

**38. Цыпкин А.Г., Пинский А.И**. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

**39. Чинаев П.И., Минин А.Ю**. и др. Высшая математика (специальные главы). – Киев: Вища школа, 1981. – 368 с.

**40. Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

*Учебное издание*

*ТУХВАТОВ Миндигали Бадретдинович*
*профессор, доктор технических наук*

**ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

Часть 4

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие для вузов

Компьютерный набор, верстка *Н.А. Николаенко*

Сдано в набор 09.03.2011 г. Подписано в печать 19.12.2011 г. Формат $60\times90^{1}/_{16}$
Бумага и печать офсетная. Гарнитура Times New Roman
Печ. листов 45. Усл. печ. л. 45. Тираж 40 экз. Заказ № 277. Цена договорная

Отпечатано в типографии ПЛ-1 г. Уфы
450001, Уфа, бульвар Х. Давлетшиной, 3