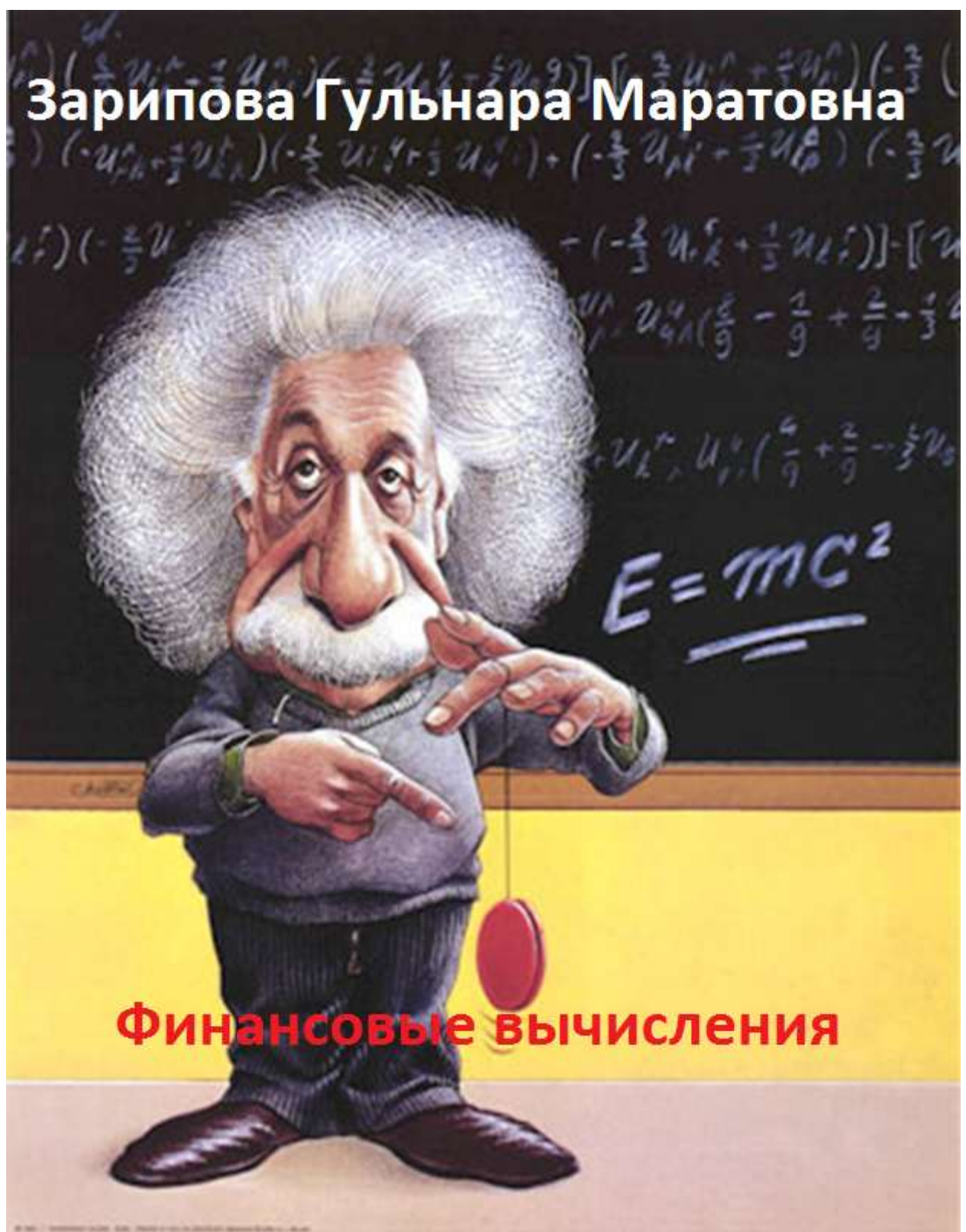


**Зарипова Гульнара Маратовна**



УДК 336(075.8)

ББК 65.262

3 11

ISBN 5-699-12024-6

**Рецензент:** к.э.н., доцент Запольских Ю.А.

**Г.М. Зарипова**

Финансовые вычисления. Учебно-практическое пособие /Под ред. кан. эконом. наук, доцент . Г.М. Зарипова.– Уфа.: 2012.– 100 с.

Кратко, наглядно и, насколько возможно, просто изложены основы организации и практики применения наиболее распространенных методов финансовых и актуарных вычислений.

Издание предназначено студентам экономических факультетов вузов и колледжей, а также преподавателям.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в условиях рыночных отношений в экономике России появилась потребность в использовании количественных методов оценки финансовых операций. Причины этого очевидны: появились самостоятельные предприятия, функционирующие на условиях самофинансирования и самоокупаемости, произошло становление рынка капитала, изменилась роль банковской системы в экономике и т. д.

В пособии изложены следующие разделы:

- 1) логика финансовых вычислений;
- 2) вычисления по простым процентам;
- 3) вычисления по сложным процентам;
- 4) финансовая эквивалентность обязательств;
- 5) оценка эффективности финансовых операций;
- 6) финансовые ренты;
- 7) кредитные расчеты;
- 8) финансовые расчеты в инвестиционном анализе;
- 9) инвестиционный анализ на рынке ценных бумаг;
- 10) экономические расчеты при проведении валютных операций;
- 11) финансовые расчеты в страховании.

Пособие предназначено для студентов специальности Финансы и кредит, студентов других экономических специальностей, преподавателей финансово-экономических дисциплин, а также специалистов в области экономики и финансов.

## Раздел 1. ЛОГИКА ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

### 1.1. Факторы, учитываемые в финансово-экономических расчетах

Финансовые процессы определяются многими факторами или параметрами, которые с достаточной долей условности можно отнести к двум типам: внутренним и внешним.

К *внутренним факторам* относятся те, которые определяют основные, существенные и непосредственные характеристики финансового процесса. К ним относятся, например, такие, как структура портфеля активов, участвующих в сделке, контрактные характеристики сделки, такие, как способ начисления процентов в кредитных сделках, выбранная схема погашения и т. п., а также факторы, определяющие начальные условия сделки: величину инвестируемого капитала, начальный момент инвестиций.

К *внешним* относятся факторы, определяющие рыночную среду, т.е. условия, в которых протекает финансовый процесс: такие, как фактор времени, текущие и будущие рыночные цены, инфляционные ожидания и др. Рассмотрим некоторые из них.

*Инфляционные ожидания* – существенный фактор, влияющий на уровень процентных ставок. Снижение покупательной способности денег за период кредитования приводит к уменьшению реального размера заемных средств, возвращаемых кредитору. Соответственно кредиторы пытаются компенсировать снижение реальных доходов за счет увеличения процентных ставок по активным операциям.

*Конкуренция на рынке финансовых ресурсов* также оказывает влияние на уровень банковских процентных ставок. Чем выше конкуренция среди заемщиков, тем выше процентные ставки по кредитам. Чем выше конкуренция среди кредиторов, тем они ниже.

*Развитие рынка ценных бумаг* выступает одним из факторов ценообразования на кредитном рынке. Организованный рынок государственных и корпоративных долговых обязательств является альтернативой прямому банковскому кредитованию, поэтому важнейшие параметры рынка ценных бумаг (доходность, объемы совершаемых операций, ожидания инвесторов, состояние инфраструктуры) и денежно-кредитного рынка находятся в прямой зависимости.

*Открытость национальной экономики, международная миграция капиталов, обменный курс валют, состояние платежного баланса страны* – факторы, также влияющие на национальную систему процентных ставок.

*Фактор риска* присущ практически любой финансовой сделке. С позиции макроэкономики риск зависит от экономической, политической и прочих составляющих и часто не поддается управлению.

*Система налогообложения* определяет размер чистой прибыли, остающейся в распоряжении налогоплательщика. Меняя ставки налогообложения, порядок взимания налогов, применяя систему льгот, государство стимулирует определенные экономические процессы. Этот порядок справедлив и для денежно-кредитного рынка. Например, инвестор может отдать предпочтение менее доходным государственным ценным бумагам, при наличии по ним определенных налоговых льгот.

Задание внутренних и внешних факторов финансового процесса полностью определяет его динамику. Так, задание схемы начисления процентов и процентной ставки полностью определяет процесс накопления денежной суммы вклада.

Внешние факторы, как правило, не поддаются управлению, однако при проведении финансово-экономических расчетов их необходимо учитывать. Это относится, прежде всего, к учету влияния инфляции, налоговой системы, финансовых рисков. Внутренние факторы могут рассматриваться двояко: как управляющие параметры, либо как параметры, значение которых необходимо определить в ходе выполнения расчетов.

Особую роль среди этих факторов играет *фактор времени*. В силу особой важности этого фактора, его влияние на финансовые процессы будет рассмотрена более подробно.

## **1.2. Фактор времени в рыночной экономике**

В условиях рыночной экономики при проведении долгосрочных финансовых операций важную роль играет фактор времени. «Золотое» правило бизнеса гласит: «Денежная сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра». Поэтому в финансовых расчетах фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Действительно, всегда найдутся организации и частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду). Таким образом, в большинстве случаев увеличение стоимости капитала происходит в результате предоставления его в долг и взимания процентной ставки.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки. В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств. Однако в финансовом менеджменте ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к величине вложенных

средств и выражаемого в долях единицы (десятичной дробью) или в процентах.

### 1.3. Виды процентов

Методы финансово-экономических расчетов различны в зависимости от вида применяемых процентов. Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными денежными средствами проценты подразделяются на *обычные* (декурсивные) и *авансовые* (антисипативные).

Отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами начисления процентов или срок финансовой операции, если проценты начисляются один раз, называется *периодом начисления процентов*.

*Обычные* проценты начисляются в конце периода относительно исходной величины средств. Доход, определяемый обычным процентом, выплачивается в конце периодов финансовой операции. Такие проценты применяют в большинстве депозитных и кредитных операций, а также в страховании.

*Авансовые* (антисипативные) проценты начисляются в начале периода относительно конечной суммы денег. Доход, определяемый авансовым процентом, выплачивается в момент предоставления кредита. Такая форма расчетов называется авансовой или учетом. При этом базой расчета процентов служит сумма денег с процентами (сумма погашения долга). Исчисленные таким образом проценты взимаются вперед и являются авансом. Так рассчитывают проценты в некоторых видах кредитования, операциях с дисконтными ценными бумагами, в международных расчетах.

Рассмотренным двум видам процентов на практике соответствуют определенные процентные ставки. Это, во-первых, обычная ставка процентов - *rate of interest* ( $i$ ) которая рассчитывается как отношение дохода, полученного за определенный период времени к величине капитала, предоставляемого в кредит. Во-вторых, учетная (антисипативная) ставка - *discount rate* ( $d$ ). Учетная ставка рассчитывается, как отношение дохода, полученного за определенный период времени к ожидаемой сумме погашения долга.

Простейшим видом финансовой операции является однократное предоставление в долг некоторой суммы  $PV$  с условием, что через  $n$  лет будет возвращена большая сумма  $FV$ . В этом случае обычная годовая

ставка процентов рассчитывается по формуле (1), а учетная ставка — по формуле (2):

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \quad (1.1)$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \quad (1.2)$$

В экономической литературе первый показатель также называют «процентная ставка», «процент», «рост», «ставка процента», «норма прибыли», «доходность», а второй - «учетная ставка», «дисконт». Обе ставки взаимосвязаны, т.е. зная один из показателей, можно рассчитать другой по формулам (3) и (4) соответственно:

$$i = \frac{d}{1 - d} \quad (1.3)$$

$$d = \frac{i}{1 + i} \quad (1.4)$$

В зависимости от условий проведения финансовых операций, начисление процентов может осуществляться с применением простых, либо сложных процентов.

*Простые* проценты, как правило, используются в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года. Базой для исчисления процентов за каждый период в этом случае служит первоначальная (исходная) сумма сделки.

*Сложные* проценты широко применяются в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года. Однако могут быть использованы и в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки. При этом база для начисления процентов меняется за счет присоединения ранее начисленных процентов, т.е. она включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

Практика расчетов процентов основывается на теории наращения денежных средств по арифметической или геометрической прогрессии. Арифметическая прогрессия соответствуют простым процентам, геометрическая - сложным.

**Пример.** Предприниматель получил на два года кредит в размере 100 тыс. руб. В конце срока он должен возвратить 140 тыс. руб. Определите годовые процентную и учетную ставки.

**Решение:**  $PV = 100$  тыс.руб;  $FV = 140$  тыс.руб;  $n = 2$  года.

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{140 - 100}{100 \cdot 2} = \frac{40}{200} = 0,2 \text{ или } 20\%.$$

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,2}{1+0,2} = 0,167 \text{ или } 16,7\%.$$

#### 1.4. Нарращение и дисконтирование

Процесс, в котором по заданной исходной сумме и процентной ставке необходимо найти ожидаемую в будущем к получению сумму, в финансовых вычислениях называется процессом *наращения*. Процесс, в котором по заданной ожидаемой в будущем к получению сумме и процентной ставке необходимо найти исходную сумму долга называется процессом *дисконтирования*. Логика финансовых операций схематически изображена на рис. 1.

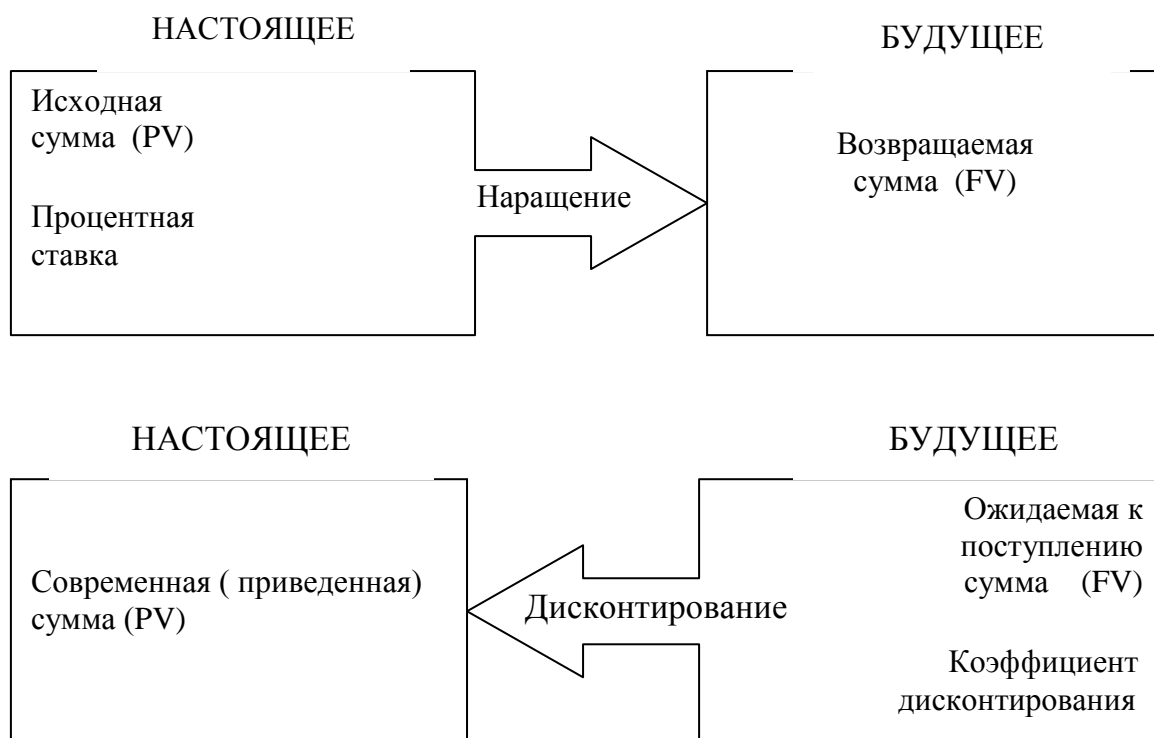


Рис. 1. Логическая схема операций наращенния и дисконтирования.

Экономический смысл метода наращенния состоит в определении величины, которая будет или может быть получена из некоторой первоначальной (текущей) суммы в результате проведения операции. Другими словами, метод наращенния позволяет определить будущую величину (future value - *FV*) текущей суммы (present value - *PV*) через некоторый промежуток времени, исходя из заданной процентной ставки.



Дисконтирование представляет собой процесс нахождения современной на заданный момент времени суммы по ее известному или предполагаемому значению в будущем, исходя из заданной процентной ставки.

В экономическом смысле величина  $PV$ , найденная в процессе дисконтирования, показывает современное (с позиции текущего момента времени) значение будущей величины  $FV$ . Таким образом – дисконтирование – это по сути дела зеркальное отражение наращенного. Используемую при этом процентную ставку называют нормой дисконта.

## Раздел 2. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТАМ

### 2.1. Расчеты при начислении простых процентов

Начисление простых процентов может происходить дискретно в зависимости от условий договора раз в год, полугодие, квартал или месяц. Иногда проценты начисляют и за более короткий срок.

Пусть задана исходная стоимость денег  $PV$ . Наращенную (будущую) сумму денег через определенный период обозначим через  $FV$ ; Число процентных периодов, т.е. периодов начисления процентов -  $n$ ; Ставку процентов за период -  $i$ .

Тогда простые обычные проценты за один процентный период начисляются следующим образом:  $PV \cdot i$ .

Следовательно, в конце первого процентного периода сумма денег составит  $PV + PV \cdot i = PV(1 + i)$ .

В конце второго процентного периода сумма увеличится еще на  $PV \cdot i$  и составит:  $PV(1 + i) + PV \cdot i = PV(1 + 2i)$ .

В конце третьего -  $PV(1 + 2i) + PV \cdot i = PV(1 + 3i)$  и т.д.

Наконец, в конце  $n$ -го процентного периода наращенная сумма составит:  $PV \cdot [1 + (n - 1) \cdot i] + PV \cdot i = PV(1 + ni)$ .

Таким образом, процесс наращения суммы денег за счет начисления простых процентов моделируется как арифметическая прогрессия с первым членом  $PV$  и разностью  $PV \cdot i$ .

Следовательно, наращенная сумма денег за счет начисления простых процентов за  $n$  процентных периодов времени имеет вид:

$$FV = PV(1 + in) \quad (2.1)$$

Формулой (2.1) можно воспользоваться, например, для исчисления суммы погашения ссуды, предоставленной под простые проценты; размера срочного вклада с процентами и пр.

Множитель  $(1 + in)$  называется множителем наращения простых процентов. Он показывает, во сколько раз увеличилась сумма вклада (или долга) к концу срока финансовой операции.

Сумма начисленных процентных денег может быть определена по формуле:  $D = FV - PV$ . Разность  $FV - PV$  называется *дисконтом*.

**Пример.** Вклад 100 000 рублей размещен в сберегательный банк на 3 года под обычные простые проценты 4,5 % годовых. Определите наращенную сумму вклада.

**Решение:**  $PV = 100000$  руб.;  $i = 0,045$ ;  $n = 3$  года.

Найдем наращенную сумму вклада по формуле (5):

$$FV = PV(1 + in) = 100000 \cdot (1 + 0,045 \cdot 3) = 100000 \cdot 1,135 = 113500 \text{ руб.}$$

Наращение суммы вклада (процентные деньги) составит 13500 рублей.

В рассмотренном примере срок финансовой операции составляет 3 года. Однако, как правило, к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд, срок которых менее года ( $n < 1$ ). Рассмотрим более общий случай, когда  $n$  не является целым числом.

Отметим, что при использовании формулы (5) размерности  $n$  и  $i$  должны быть согласованы. Если  $n$  измеряется в годах, то  $i$  – ставка годовых процентов (показывает рост за год).

В случае если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, периоды начисления процентов  $n$  выражают дробным числом, как отношение продолжительности финансовой сделки в днях к количеству дней в году (или отношение продолжительности финансовой сделки в месяцах к числу месяцев в году).

Обозначим срок операции  $t$  (time), В качестве временной базы выберем продолжительность года, выраженную в тех же единицах, что и  $t$ . Обозначим ее  $Y$  (year-год). Подставим отношение  $\frac{t}{Y}$  вместо  $n$  в формулу (5), получим формулу (6)

$$FV = PV \cdot \left( 1 + \frac{t}{Y} \cdot i \right) \quad (2.2)$$

Иногда при расчете простых процентов предполагают, что год состоит из 12 месяцев по 30 дней в каждом. Проценты, рассчитанные по временной базе  $Y = 360$  дней, называются *обыкновенными* или *коммерческими* процентами (ordinary interest). При использовании действительной продолжительности года (365 или 366 дней) получают *точные* проценты (exact interest).

Число дней финансовой операции также можно измерить приближенно и точно. В первом случае ее продолжительность определяется из условия, согласно которому месяц принимается равным 30 дням. Точное число дней финансовой операции определяется путем

подсчета числа дней между датой ее начала и датой ее окончания по календарю. Первый и последний день финансовой операции считается за один день. На практике для подсчета ее продолжительности можно пользоваться табл. 1 и 2 (приложение 1). В таблицах приведены порядковые номера дней в году (для обычного и високосного годов соответственно). Срок проведения финансовой операции рассчитывается как разность между порядковыми номерами даты ее окончания и даты начала. Таким образом, на практике применяют три варианта расчетов:

1) Точные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот вариант дает самые точные результаты. Он обозначается 365/365. Он применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например в Великобритании.

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот метод, иногда называемый банковским (Banker's Rule), распространен в ссудных операциях коммерческих банков, в частности во Франции. Он обозначается как 365/360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии. Этот метод обозначается как 360/360.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется.

**Пример.** Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана 20 января до 5 октября включительно под 18 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока? Найти решение тремя способами.

Определим точное число дней ссуды. Дате 20 января соответствует № 20 (таблица 1 приложения 1). Дате 5 октября - № 278. Таким образом, точное число дней ссуды составит 258 дней (278 – 20).

Определим приближенное число дней ссуды. При этом продолжительность каждого месяца принимается за 30 дней. Количество полных месяцев срока ссуды равно 8 (с 20 января по 20 сентября). Срок от 20 сентября по 5 октября составляет 15 дней: (30-20)+5. Приближенное число дней ссуды рассчитывается таким образом:  $8 \cdot 30 + 15 = 240 + 15 = 255$  дней.

Определим величину долга в конце срока тремя методами:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{365} \cdot 0,18\right) = 1127232,88 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360)

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{360} \cdot 0,18\right) = 1129000 \text{ руб.}$$

### 3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360)

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{255}{360} \cdot 0,18\right) = 1127500 \text{ руб.}$$

## 2.2 Переменные процентные ставки

В условиях динамично меняющегося состояния финансового рынка при заключении финансового соглашения может быть установлена не только постоянная на весь период финансовой сделки, но и переменная, изменяющаяся во времени процентная ставка.

Предположим, что в течение периода времени  $n_1$  установлена ставка простых процентов  $i_1$ , тогда приращение капитала за этот период составит  $PV \cdot n_1 \cdot i_1$ .

Если в течение периода времени  $n_2$  действует ставка простых процентов  $i_2$ , то начисленные за этот период проценты составят  $PV \cdot n_2 \cdot i_2$ .

Пусть число периодов начисления процентов -  $m$ .

Тогда при установлении переменной, т.е. дискретно изменяющейся во времени процентной ставки, наращенная сумма определяется по формуле:  $FV = PV + PV \cdot n_1 \cdot i_1 + PV \cdot n_2 \cdot i_2 + \dots + PV \cdot n_m \cdot i_m =$

$$= PV(1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_m \cdot i_m) = PV \left\{ 1 + \sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k \right\}, \quad (2.3)$$

где  $i_k$  — ставка простых процентов в периоде  $n_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ ;

**Пример.** Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 12% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 2,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада.

Определите наращенную за год сумму, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400,0 тыс. руб.

Решение:

$$PV = 400 \text{ тыс.рублей}; \quad n_1 = 0,5; \quad i_1 = 0,12; \quad n_2 = 0,25; \quad i_2 = 0,125; \quad n_3 = 0,25; \quad i_3 = 0,1275.$$

$$FV = PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_m \cdot i_m) = 400(1 + 0,5 \cdot 0,12 + 0,25 \cdot 0,125 + 0,25 \cdot 0,1275) = \\ = 400(1 + 0,060 + 0,03125 + 0,031875) = 400 \cdot 1,123125 = 449,25 \text{ тыс.рублей.}$$

## 2.3. Реинвестирование

Если по прошествии некоторого периода зафиксированная к данному моменту наращенная сумма инвестируется вновь, то такая операция называется *реинвестированием* (повторным инвестированием) или капитализацией полученных на каждом этапе наращения средств. В этом случае проценты начисляют на уже наращенные в предыдущем периоде суммы, т.е. происходит многократное наращение.

Предположим, что в течение периода времени  $n_1$  установлена ставка простых процентов  $i_1$ , тогда к концу этого периода наращенная сумма составит  $PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1)$ . Затем эта сумма будет помещена на следующий срок  $n_2$  под  $i_2$  простых процентов. К концу периода  $n_2$  наращенная сумма будет равна величине  $PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1)(1 + n_2 \cdot i_2)$  и т.д.

Таким образом, итоговая наращенная сумма определится по формуле:

$$FV = PV(1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot \dots \cdot (1 + n_t \cdot i_t), \quad (2.4.)$$

где  $n_1, n_2, \dots, n_t$  — продолжительность периодов наращения;

$i_1, i_2, \dots, i_t$  — процентные ставки, по которым производится реинвестирование.

**Пример.** Клиент поместил в банк 500,0 тыс. руб. Какова будет наращенная за 3 месяца сумма вклада, если за первый месяц начисляются проценты в размере 10% годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5% с одновременной капитализацией процентного дохода?

Решение:

$PV = 500$  тыс.рублей;  $t_1 = 30$ ;  $t_2 = 30$  дней;  $t_3 = 30$  дней;  $i_1 = 0,1$ ;  $i_2 = 0,15$ ;  $i_3 = 0,2$ ;  
 $Y = 360$  дней.

$$FV = PV(1 + n_1 \cdot i_1)(1 + n_2 \cdot i_2)(1 + n_3 \cdot i_3) = 500 \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,1\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,15\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,2\right) =$$

$$= 531,896 \text{ тыс.рублей}$$

## 2.4. Математическое дисконтирование по простым процентам

В финансовой практике часто приходится решать задачу, обратную вычислению наращенной суммы, которая может быть сформулирована таким образом: определить сумму  $PV$ , которую необходимо инвестировать в данный момент времени, с тем, чтобы через некоторый определенный период  $n$  получить при установленной ставке процента  $i$  требуемую наращенную сумму  $FV$ . Для решения этой задачи применяется операция дисконтирования.

Дисконтирование позволяет по известным наращенной сумме, процентной ставке и сроке финансовой операции определить современную стоимость этой наращенной суммы.

Другими словами дисконтирование позволяет определить, какую первоначальную сумму надо дать в долг, чтобы получить в конце срока сумму  $FV$  при условии, что на долг начисляются проценты по ставке  $i$ .

В зависимости от вида процентной ставки применяются два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский

(коммерческий) учет. В первом случае при расчете применяют обычные (декурсивные), а во втором – авансовые проценты.

Рассмотрим, как производится математическое дисконтирование. Выразив из формулы (2.1)  $PV$ , получим формулу математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{1 + ni}, \quad (2.5)$$

Здесь  $PV$  - современная стоимость наращенной (будущей) суммы денег  $FV$ ;  $n$  - срок проведения финансовой операции (число процентных периодов);  $i$  - процентная ставка.

Дисконтный множитель  $\frac{1}{1 + n \cdot i}$  показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга  $PV$  в его окончательной сумме  $FV$ .

**Пример.** Заемщик должен возвратить кредит единовременным платежом с процентами за период 2 года. Проценты по кредиту составили 12% годовых. Какую сумму получил заемщик в момент заключения кредитного договора и чему равен дисконт, если сумма к возврату составляет 1 500 000 рублей?

Решение:  $FV=1500\,000$  рублей;  $n=2$  года;  $i=0,12$

$$PV = \frac{FV}{1 + n \cdot i} = \frac{1500000}{1 + 2 \cdot 0,12} = 1209677 \text{ рублей},$$

$$D = 1500000 - 1209677 = 290323 \text{ рубля}.$$

В случае если срок финансовой операции задан в днях или в месяцах, из формулы (2.2) получим формулу математического дисконтирования для  $n < 1$ :

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i}, \quad (2.6)$$

где  $t$  - длительность финансовой операции в днях (в месяцах);  $Y$  - число дней (месяцев в году).

**Пример.** Какую сумму инвестор должен внести сегодня под 16% годовых, чтобы через 180 дней после подписания договора накопить 310 тыс. руб. при условии, что начисляются простые точные проценты.

Решение:  $FV=310\,000$  рублей;  $t=180$  дней;  $i=0,16$ ;  $Y=365$  дней.

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i} = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0,16} = \frac{310000}{1,078904} = 287328,6 \text{ рублей}$$

$$D = 310000 - 287328,6 = 22671,4 \text{ рублей}.$$

## 2.5. Банковское дисконтирование (учет) по простым процентам

При начислении авансовых (антисипативных) процентов доход, получаемый кредитором, начисляется в начале периода финансовой операции относительно конечной суммы долга и выплачивается в момент предоставления кредита. Операция предварительного начисления процентов называется *дисконтированием по учетной ставке*, а также *банковским* или *коммерческим учетом*.

Банковский, или коммерческий учет используется при операциях с векселями и другими краткосрочными обязательствами.

Суть этой операции заключается в том, что банк или другие финансовые учреждения до наступления срока платежа по векселю покупает его у владельца (векселедержателя) и берет весь риск по получению денег на себя. При этом цена, по которой банк покупает вексель, должна быть меньше той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока (т.е. цены, выплачиваемой по векселю вместе с причитающейся ему частью дисконта).

Получив при поступлении срока деньги по векселю, банк, таким образом, реализует дисконт. Прежний владелец векселя с помощью учета векселя получает деньги ранее указанного в нем срока. То есть в определенном выигрыше оказываются обе стороны сделки.

При банковском учете проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды.

Применительно к учету векселя, это означает, что проценты начисляются на сумму, которую должен выплатить должник в конце срока векселя. Ставка, по которой в этом случае начисляются проценты, отличается от декурсивной ставки процентов  $i$ . Она называется учетной или дисконтной ставкой и обозначается  $d$ .

Напомним, что по определению учетная ставка находится как отношение:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n}.$$

В соответствии с этим размер дисконта, удерживаемого банком, будет равен  $D = FV \cdot n \cdot d$

Расчет суммы, получаемой владельцем при учете векселя в банке, производится по формуле:

$PV = FV - FV \cdot n \cdot d = FV(1 - n \cdot d)$  Таким образом, формула банковского или коммерческого учета имеет вид:

$$PV = FV(1 - n \cdot d) \quad (2.7)$$

Здесь  $1 - n \cdot d$  – банковский дисконтный множитель.

В случае если срок финансовой операции задан в днях или в месяцах,

$$PV = FV\left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d\right), \quad (2.8)$$

где  $t$  – срок вексельного кредита в днях (в месяцах);  $Y$  – число дней (месяцев в году). Обычно при вексельных расчетах принимают  $Y = 360$  дней.

Очевидно, что операция учета векселя имеет смысл только в том случае, если  $1 - n \cdot d \geq 0$ , что равносильно неравенству  $n \leq \frac{1}{d}$ .

При учете векселя задолго до срока платежа по нему и при высоком уровне учетной ставки дисконт может стать настолько большим, что сумма, которую должен получить владелец векселя становится равной 0 (при  $n = \frac{1}{d}$ ) или даже становится отрицательной (при  $n > \frac{1}{d}$ ). Понятно, что в этих случаях операция учета векселя лишена смысла.

**Пример.** Вексель выдан на сумму 1 млн. руб. с уплатой 17 ноября.

Владелец векселя учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 20 %. Определите полученную при учете сумму (без уплаты комиссионных) и дисконт.

Решение:  $FV = 1000\,000$  рублей;  $d = 0,2$ .

Определим срок, до погашения векселя  $t$ : 17 ноября - №321; 23 сентября - № 266. Следовательно  $t = 266 - 321 = 55$  дней;

Дисконтирование по учетной ставке обычно производится по временной базе, равной 360 дням, следовательно,  $Y = 360$  дней.

Таким образом, сумма, которую получил векселедержатель:

$$PV = FV\left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d\right) = 1000000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0,2\right) = 969444 \text{ руб.}$$

Дисконт банка составил 30556 рублей ( $1000000 - 969444$ ).

Простая учетная ставка может быть использована при расчете суммы, которую получит владелец векселя при его погашении в момент наступления срока платежа. Для этого следует использовать формулу определения наращенной суммы:



$$FV = \frac{PV}{1 - n \cdot d} = \frac{PV}{1 - \frac{t}{Y} \cdot d} \quad (13)$$

**Пример.** Вексель, учтен в банке по учетной ставке 18% годовых за 150 дней до его погашения. При этом владелец векселя получил 925000 рублей. Определите номинал векселя.

**Примечание.** Номинал – это сумма денег указанная на векселе, которую получит владелец векселя при его погашении в момент наступления срока платежа.

Решение:  $PV=925\,000$  рублей;  $d=0,18$ ;  $t=150$  дней.

$$FV = \frac{PV}{1 - \frac{t}{Y} \cdot d} = \frac{92500}{1 - \frac{150}{360} \cdot 0,18} = 100000 \text{ рублей.}$$

### Раздел 3. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО СЛОЖНЫМ ПРОЦЕНТАМ

#### 3.1. Нарращение по сложным процентам

В среднесрочных и долгосрочных финансово-кредитных операциях в случае, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, для наращивания применяются сложные проценты. База для начисления сложных процентов увеличивается с каждым периодом выплат. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется капитализацией процентов.

Предположим, что клиент положил в банк сумму, равную  $PV$  рублей под процентную ставку  $i$ . Через один период наращивания (например, через год) на его счете будет сумма, равная  $PV + PV \cdot i = PV(1+i)$ . Полученная сумма может быть вновь инвестирована под процентную ставку  $i$  на следующий процентный период. Тогда к концу второго процентного периода на его счете будет сумма, которая может быть исчислена следующим образом:

$PV(1+i) + [PV(1+i)] \cdot i = [PV(1+i)] \cdot (1+i) = PV(1+i)^2$ . Если повторить этот процесс еще раз, то к концу третьего процентного периода на счете будет сумма, которую можно определить следующим образом:

$$PV(1+i)^2 + [PV(1+i)^2] \cdot i = [PV(1+i)^2] \cdot (1+i) = PV(1+i)^3.$$

Нетрудно видеть, что наращивание по сложным процентам описывается геометрической прогрессией, начальный член которой  $a_0 = PV$ , а знаменатель  $q = 1+i$ .

Тогда  $n$ -ый член прогрессии, определяющий величину накопленной к концу  $n$ -го периода суммы  $FV$ , определяется по формуле:  $FV = PV(1+i)^n$

Следовательно, формула для расчета наращенной суммы в конце  $n$ -го года при условии, что проценты начисляются один раз в году, имеют вид:

$$FV = PV(1+i)^n, \quad (3.1)$$

где  $PV$  - первоначальный размер долга,

$i$  - процентная ставка,

$n$  - число лет наращения.

Проценты за этот период ( $n$  лет) равны:

$$D = FV - PV = PV(1+i)^n - PV = PV[(1+i)^n - 1]$$

Величина  $(1+i)^n$  называется множителем наращения по сложным процентам. Для облегчения расчетов со сложными процентами составлены таблицы множителей наращения и множителей дисконтирования.

**Пример.** Какой величины достигнет долг, равный 1000 000 рублей, через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

Решение:  $PV = 1000\ 000$  рублей;  $i = 0,155$ ;  $n = 5$ .

$$FV = PV(1+i)^n = 1000000(1+0,155)^5 = 2055464,2 \text{ руб.}$$

$$D = 2055464,2 - 1000000 = 1055464,2 \text{ руб.}$$

### 3.2. Переменные процентные ставки

Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему, например, с помощью применения изменяющихся во времени переменных ставок. В частности, в контракте может быть предусмотрено применение *плавающих ставок*, когда фиксируется не сама ставка, а ее базовое значение и маржа (margin) – величина надбавки к базе. Величина маржи в течение срока финансовой сделки может быть постоянной либо переменной, что определяется условиями контракта.

В случае если значения переменных ставок фиксируются в контракте, общий множитель наращения определяется как произведение частных множителей.

$$FV = PV(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_k)^{n_k}, \quad (3.2)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_k$  - последовательные во времени значения ставок;

$n_1, n_2, \dots, n_k$  - периоды, в течение которых используются соответствующие ставки.

**Пример.** Ссуда в размере 1000000 руб. выдана на 5 лет под 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75%-в оставшиеся. Определить наращенную величину долга.

Решение:

$$PV = 1000000; n = 5 \text{ лет}; i_1 = 0,12 + 0,005 = 0,125; n_1 = 2 \text{ года};$$

$$i_2 = 0,12 + 0,0075 = 0,1275; n_2 = 3 \text{ года}.$$

$$FV = PV(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} = 1000000(1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 = \\ = 1000000 \cdot 1,265625 \cdot 1,433341 = 1814072 \text{ руб.}$$

Наращение составит 814072 руб.

### 3.3. Наращение при дробном числе лет.

Наращение по сложной процентной ставке при дробном числе лет может производиться двумя методами: точным и смешанным.

*Точный метод.* Формула наращенных сложных процентов, выведенная для целых положительных  $n$ , может применяться и для нецелых  $n = \frac{t}{Y}$ .

**Пример.** 13 января в банк положили сумму 1000\$, до востребования под ставку 6% годовых сложных процентов. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября.

Решение:

13 января - № 13; 1 сентября - № 244.

Следовательно  $t = 244 - 13 = 231$ .  $PV = 1000\$$ ;  $i = 0,06$ .

$$FV = PV(1 + i)^{\frac{t}{Y}} = 1000 \cdot (1 + 0,06)^{\frac{231}{360}} = 1000 \cdot 1,06^{0,642} = 1000 \cdot 1,038 = 1038\$$$

*Смешанный метод наращенных по сложным процентам.* Если начисление процентов происходит за период, превышающий один год, и при этом период финансовой операции, выраженный в годах, является дробным числом, то с точки зрения инвестора (кредитора) наибольший эффект может быть получен при начислении процентов по смешанной схеме начисления процентов.

*Смешанный метод (смешанная схема) начисления процентов* – это такой метод, который предусматривает использование на разных временных интервалах различных схем начисления процентов. Такой метод позволяет комбинировать простые и сложные проценты с целью получения наибольшего эффекта. Формула наращенных при этом имеет вид:

$$FV = PV(1 + i)^a \cdot (1 + bi), \quad (3.3)$$

где  $a$  - целое число лет;

$b$  - дробная часть года.

Эту формулу, как правило, используют в реальной банковской практике для финансовых вычислений.

**Пример.** Кредит в размере 3 млн. руб. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых. Найти сумму долга на конец срока двумя методами.

1) Точный метод:

$$FV = PV(1+i)^n = 3000000(1+0,165)^{3,43836} = 507193,5 \text{ рублей}.$$

2) Смешанный метод:

$$FV = PV(1+i)^a \cdot (1+bi) = 3000000(1+0,165)^3 \cdot (1+0,43836 \cdot 0,165) = 508659,8 \text{ рублей}.$$

Как видим, смешанный метод дает более высокий результат.

### 3.4. Сравнение множителей наращения по простым и сложным процентам

Для того чтобы выяснить, какой схемой начисления процентов целесообразно пользоваться при проведении долгосрочных и среднесрочных финансовых операций, и какой – при проведении краткосрочных, сравним величины множителей наращения по простым  $(1+n \cdot i)$  и по сложным  $(1+i)^n$  процентам. Для этого выберем единый уровень процентной ставки, равный 10% годовых. Временной базой будем считать год, равный 365 дням. Значения множителей наращения занесем в таблицу.

Способ начисления	Значение множителя наращения в зависимости от срока операции						
	30 дней	180 дней	1год	5 лет	10 лет	20 лет	50лет
Простые проценты	1,00822	1,04932	1,10	1,5	2,0	3,0	6,0
Сложные проценты	1,00786	1,04812	1,10	1,61051	2,59374	6,72750	117,39085

Как видим, при  $0 < n < 1$  имеет место неравенство  $(1+i)^n < 1+n \cdot i$ .

При  $n > 1$  – неравенство противоположного смысла:  $(1+i)^n > 1+n \cdot i$ .

При  $n = 1$  значения множителей наращения равны.

Отметим, что эти соотношения верны при любых значениях  $i$ .

Таким образом, с точки зрения инвестора (кредитора) при долгосрочных финансовых операциях больший эффект достигается при применении сложных процентов, при краткосрочных операциях для наращения, с его точки зрения, выгоднее применять простые проценты.

### 3.5. Наращение процентов $m$ раз в году

Иногда в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а, например,

полугодие, квартал, месяц или другой период времени. В этом случае проценты начисляются  $m$  раз в году. В контрактах, как правило, фиксируется не ставка за процентный период, а годовая ставка процентов, которая в этом случае называется номинальной.

Пусть годовая (номинальная) ставка равна  $i$ , срок финансовой операции  $n$  лет, а число периодов начисления процентов в году равно  $m$ . Тогда каждый раз проценты начисляются по ставке  $\frac{i}{m}$ . Количество начислений при этом составит:  $N = m \cdot n$ .

Формулу наращения в этом случае можно представить следующим образом:

$$FV = PV \left(1 + \frac{i}{m}\right)^N, \quad (3.4)$$

где  $i$  - номинальная годовая ставка;

$N$  - общее количество периодов начисления,  $N = m \cdot n$ .

**Пример.** Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. руб. через пять лет при применении сложной ставки 15,5% годовых, если проценты начисляются ежеквартально?

Решение;  $PV = 100\,000$  рублей;  $n = 5$  лет;  $i = 0,155$ ;  $m = 4$ .

$$FV = PV \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = 100000 \left(1 + \frac{0,155}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 213904,9 \text{ рублей}.$$

### 3.6. Номинальная и эффективная процентные ставки

Предположим, что по требованию клиента, банк начисляет проценты ежеквартально, хотя в договоре указана годовая процентная ставка  $i = 12\%$ .

Если проценты начисляют ежеквартально, то количество начислений в год  $m = 4$ , а начисление будет производиться по ставке  $\frac{i}{m}$ . В данном случае  $\frac{i}{m} = \frac{0,12}{4} = 0,03$ , тогда за год множитель наращения составит:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = (1 + 0,03)^4 = 1,1255$$

Таким образом, фактически годовая ставка наращения составит 12,55%. В этом случае говорят, что эффективная ставка составляет 12,55%, а объявленная номинальная ставка - 12%.

Таким образом, *номинальной* называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах.

*Эффективная ставка* процента измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год от

начисления процентов. Иначе говоря, эффективная ставка, это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и  $m$  разовое начисление процентов по ставке  $\frac{i}{m}$ .

Если номинальная годовая ставка равна  $i$ , а сложные проценты начисляются  $m$  раз в год по ставке  $\frac{i}{m}$ , то эффективная годовая ставка  $f$  может быть определена из уравнения:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 1 + f,$$

Таким образом:  $f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$  (3.5)

**Пример.** Найдите эффективную ставку процента, если номинальная ставка равна 24% при ежемесячном начислении процентов.

Решение:  $i=0,24$ ;  $m=12$ .

$$f = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} - 1 = 1,02^{12} - 1 = 0,268 \quad \text{т.е. } 26,8\%$$

### 3.7. Математическое дисконтирование по сложной ставке процентов

Для того чтобы определить, какую денежную сумму  $PV$  следует вложить под сложные проценты сегодня, чтобы получить в определенный момент в будущем заданную сумму  $FV$ , следует применить дисконтирование.

Выразив  $PV$  из формулы 3.1, получим формулу математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}, \quad (3.6)$$

где  $\frac{1}{(1+i)^n}$  - дисконтный множитель, его значения приведены в Приложении 3.

Если проценты начисляются  $m$  раз в году, то из формулы 3.6 получим:

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}, \quad (3.7)$$

Здесь  $PV$  - современная величина (современная стоимость) денежной суммы  $FV$ .

Дисконт равен  $D = FV - PV = FV \left[ 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]$ .

Если проценты начисляются  $m$  раз в году, то

$$D = FV \left[ 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{nm}} \right].$$

Отметим, что современная величина суммы денег – одна из важнейших характеристик, применяемых в финансовом анализе.

**Пример.** Сумма 500 000 рублей будет выплачена через 5 лет. Определите ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов 12% годовых.

Решение:  $FV = 500\,000$  рублей;  $n = 5$  лет;  $i = 0,12$ .

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{500000}{(1+0,12)^5} = \frac{500000}{1,76234} = 283713,7 \text{ рубля.}$$

### 3.8. Непрерывное наращение и дисконтирование

До сих пор мы рассматривали в качестве процентного периода некоторый фиксированный промежуток времени (год, квартал, месяц, день). Уменьшая этот промежуток (до часа, минуты, секунды) и увеличивая частоту начисления процентов, можно перейти к непрерывному наращению процентов.

Пусть номинальная годовая ставка равна  $i$ .

При начислении процентов  $m$  раз в году по ставке  $\frac{i}{m}$

эффективная годовая ставка  $f = \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m - 1$

Таким образом, за год сумма увеличится в  $\left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m$  раз. При все более частом наращении процентов, т.е. при  $m \rightarrow \infty$ , используя второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{i} \cdot i} = \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{i}} \right]^i = e^i$$

где  $e$  - число Эйлера (основание натурального логарифма),  $e \approx 2,718$ .

Таким образом, *непрерывным наращением* по ставке  $i$  называется увеличение суммы  $PV$  в  $e^i$  раз за один год или в общем случае в  $e^{in}$  раз за  $n$  лет.

Процентную ставку, применяемую при непрерывном начислении процентов, называют *сила роста* и обозначают  $\delta$ . Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

В общем случае, формула непрерывного наращения процентов имеет вид:

$$FV = PV \cdot e^{in}. \quad (3.8)$$

Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, обозначим силу роста  $\delta$ . Тогда формула непрерывного начисления процентов примет вид:

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n} \quad (3.9)$$

Эта формула верна и для случая, когда  $n$  не является целым числом.

**Пример.** На сумму 10 000 рублей начисляются проценты по ставке 8% годовых. Определить наращенную сумму через 3,5 года.

Решение:  $PV = 10000$  руб.;  $\delta = 0,08$ ;  $n = 3,5$  года.

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n} = 10000 \cdot e^{0,08 \cdot 3,5} = 10000 \cdot 1,32313 = 13231,3 \text{ руб.}$$

Используя формулу (3.9), можно получить формулу непрерывного дисконтирования:

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} \quad (3.10)$$

**Пример.** Какую сумму следует поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 300 000 рублей, если проценты начисляются непрерывно по ставке 8%?

Решение:  $PV = 300000$  руб.;  $\delta = 0,08$ ;  $n = 5$  лет.

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} = 300000 \cdot e^{-0,08 \cdot 5} = 300000 \cdot e^{-0,4} = 300000 \cdot 0,670320 = 201096 \text{ рублей}$$

### 3.9. Банковское дисконтирование (учет) по сложной учетной ставке

В практике учетных операций иногда применяют *сложную учетную ставку*. В этих случаях каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме как при простой учетной ставке, а к сумме, уже дисконтированной на предыдущем этапе.



Пусть долговое обязательство на сумму  $FV$  со сроком погашения через  $n$  лет учитывается раньше срока по сложной годовой ставке  $d$ .

Если учет осуществляется за год до срока, то начисляются проценты в сумме  $FV \cdot d$ . В этом случае владелец векселя получит сумму  $FV - FV \cdot d = FV(1 - d)$

Если учет долгового обязательства осуществляется за два года до срока погашения, то за второй год проценты начисляются уже на сумму  $FV(1 - d)$ , дисконтированную на первом этапе. Тогда владелец векселя получит сумму, равную:  
 $FV(1 - d) - FV \cdot (1 - d) \cdot d = FV(1 - d) = FV(1 - 2d + d^2) = FV(1 - d)^2$  и т.д.

Если долговое обязательство продается за  $n$  лет до срока, то владелец векселя получит сумму  $FV(1 - d)^n$ .

Таким образом, дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$PV = FV(1 - d)^n \text{ где } d - \text{сложная годовая учетная ставка. (3.11)}$$

Здесь  $(1 - d)^n$  - дисконтный множитель. Дисконт равен величине:

$$D = FV - PV = FV - FV(1 - d)^n = FV[1 - (1 - d)^n]$$

Если дисконтирование производится по учетной ставке  $m$  раз в году, то применяется формула:  $PV = FV(1 - \frac{d}{m})^{mn}$

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn}. \quad (3.12)$$

**Пример.** Ценная бумага на сумму 500 000 рублей, учтена за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Какова сумма дисконта?

Решение:

$$FV = 500000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; d = 0,15.$$

$$PV = FV(1 - d)^n = 500000 \cdot (1 - 0,15)^3 = 500000 \cdot 0,614125 = 307006,5 \text{ рублей}$$

получит при учете ценной бумаги ее владелец.

$$\text{Дисконт составит: } D = 500000 - 307062,5 = 192937,5 \text{ рублей.}$$

**Пример.** В условиях предыдущего примера рассчитать сумму, которую получит владелец ценной бумаги при поквартальном дисконтировании.

$$\text{Решение: } FV = 500000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; d = 0,15; m = 4.$$

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn} = 500000 \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{3 \cdot 4} = 500000 \cdot 0,63213 = 316065 \text{ руб.}$$

Сравнение результатов свидетельствует о том, что для банка более частое дисконтирование не выгодно, так как при этом увеличивается сумма, выдаваемая владельцу ценной бумаги при ее досрочном учете.

Сравнивая между собой банковское дисконтирование по простой и сложной учетным ставкам, получим следующее:

- а) при  $0 < n < 1$  справедливо неравенство  $(1 - nd) > (1 - d)^n$ ;
- б) при  $n > 1$  неравенство  $(1 - nd) < (1 - d)^n$ ;
- в) при  $n = 1$  значения дисконтных множителей совпадают:  $(1 - nd) = (1 - d)^n$ ;

Таким образом, при  $n < 1$  результаты финансовой операции для банка выгоднее с применением учета по сложным процентам, так как в этом случае дисконтный множитель будет меньше, чем в случае применения простых процентов, и, следовательно, величина выдаваемой суммы будет меньше. Если же  $n > 1$ , то для него выгоднее применить учет по простой учетной ставке.

### 3.10. Нарращение по сложной учетной ставке

Выразив  $FV$  из формулы (3.13), получим формулу наращенной суммы по сложной учетной ставке:

$$FV = \frac{PV}{(1 - d)^n}, \quad (3.13)$$

где  $d$  - учетная ставка;

$n$  - период наращенной авансовых процентов.

При наращении сложных процентов по учетной ставке  $m$  раз в году наращенная сумма может быть определена по формуле:

$$FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}}, \quad (3.14)$$

где  $d$  - учетная номинальная ставка;

$m$  - число периодов начисления процентов в течение года;

$n$  - период наращенной авансовых процентов.

**Пример.** Кредит в размере 350000 рублей выдан на 2,5 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму, если проценты начисляются:

а) ежегодно;

б) по полугодиям.

Решение:  $FV = 350000 \text{ руб.}; n = 2,5 \text{ года}; d = 0,12; \text{ а) } m = 1; \text{ б) } m = 2.$

$$\text{а) } FV = \frac{PV}{(1 - d)^n} = \frac{350000}{(1 - 0,12)^{2,5}} = \frac{350000}{0,726452} = 481793,7 \text{ рублей};$$

$$\text{б) } FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{350000}{\left(1 - \frac{0,12}{2}\right)^{2 \cdot 2,5}} = \frac{350000}{0,733904} = 476901,6 \text{ рублей}.$$

### 3.11. Номинальная и эффективная учетные ставки

Предположим, дисконтирование производится  $m$  раз в году, т.е. за весь период финансовой операции  $m \cdot n$  раз, каждый раз по ставке  $\frac{d}{m}$ , где  $d$  - номинальная учетная ставка, которая прописывается в контрактах.

Эффективная учетная ставка  $f$  характеризует фактическое дисконтирование за год. Следовательно, она может быть определена из равенства:

$$1 - f = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m.$$

$$\text{Таким образом, } f = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m \quad (3.15)$$

Для одних и тех же условий эффективная учетная ставка меньше номинальной.

**Пример.** Ценная бумага на сумму 500000 рублей, срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12% при ежемесячном дисконтировании. Определить сумму дисконта и эффективную учетную ставку.

Решение:  $FV = 500000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; d = 0,12; m = 12$ .

$$PV = 500000 \left(1 - \frac{0,12}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 500000 \cdot 0,696413 = 348206,5 \text{ рублей}$$

$$D = 500000 - 348206,5 = 151793,5 \text{ рублей}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{0,12}{12}\right)^{12} = 0,1136, \text{ то есть } 11,36\%.$$

## Раздел 4. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

### 4.1. Принцип финансовой эквивалентности обязательств

В финансовой практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, досрочно погасить задолженность, объединить несколько платежей в один, изменить схему начисления процентов и т.п. В таких случаях возникает вопрос о том, на каких принципах должно основываться изменение контракта.

На практике в качестве такого принципа наиболее часто применяется *принцип финансовой эквивалентности обязательств*, позволяющий сохранить баланс интересов сторон контракта. Этот принцип предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта. Так, при изменении способов начисления процентов необходимо учитывать взаимозаменяемость между различными видами процентных ставок.

*Эквивалентными* называют *процентные ставки*, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т.е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции.

При изменении условий платежей для реализации названного принципа необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения.

*Эквивалентными* считаются такие *платежи*, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

### 4.2. Эквивалентность процентных ставок

Для нахождения значений эквивалентных процентных ставок следует составить уравнение эквивалентности.

а) Рассмотрим *эквивалентность простой процентной и простой учетной ставок*. Предположим, что временная база равна 360 дням.

Полагаем, что начальные и наращенные суммы при применении рассматриваемых ставок должны быть одинаковы. Составим уравнение эквивалентности, исходя из равенства множителей наращивания:

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nd}.$$

Решая эти уравнения относительно  $i$  и  $d$ , получим формулы 1.3 и 1.4. приведенные в разделе 1.

Если срок финансовой операции задан в днях, то эти формулы примут вид:

$$i = \frac{360 \cdot d}{360 - t \cdot d} \quad (4.1)$$

$$d = \frac{360 \cdot i}{360 + t \cdot i} \quad (4.2)$$

Если же временная база для процентной ставки  $i$ , как это часто бывает, составляет 365 дней, а для учетной ставки  $d$  – 360 дней, то:

$$i = \frac{365 \cdot d}{360 - t \cdot d} \quad (4.3)$$

$$d = \frac{360 \cdot i}{365 + t \cdot i} \quad (4.4)$$

**Пример.** Срок до погашения векселя 100 дней. Операция учета векселя должна принести 20% годовых в виде обычных точных процентов. Какую следует назначить учетную ставку?

Решение:  $t = 100$  дней;  $i = 0,2$ .

$$d = \frac{360 \cdot i}{365 + t \cdot i} = \frac{360 \cdot 0,2}{365 + 100 \cdot 0,2} = \frac{72}{385} = 0,187.$$

Следовательно, для обеспечения заданного уровня доходности необходимо назначить учетную ставку 18,7%.

б) Определим соотношение эквивалентности между простой процентной ставкой наращенного и сложной процентной ставкой.

Для решения поставленной цели приравняем множители наращенного друг другу:

$$1 + n \cdot i = (1 + j)^n$$

где  $i$  - простая процентная ставка наращенного;

$j$  - сложная процентная ставка наращенного;

$n$  - срок операции в годах.

Решим это уравнение относительно  $i$  и  $j$ .

$$i = \frac{(1 + j)^n - 1}{n}, \quad (4.5)$$

$$1 + j = \sqrt[n]{1 + ni},$$

$$j = \sqrt[n]{1 + ni} - 1. \quad (4.6)$$

**Пример.** Кредит предоставлен под 20% простых годовых на 0,5 года. Определите доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.

Решение;  $i = 0,2$ ;  $n = 0,5$ .

$$j = \sqrt[n]{1 + ni} - 1 = \sqrt[0,5]{1 + 0,5 \cdot 0,2} - 1 = (1 + 0,1)^2 - 1 = 1,21 - 1 = 0,21 \quad \text{или } 21\%$$

### 4.3. Замена и консолидация платежей

В качестве метода, позволяющего осуществить принцип финансовой эквивалентности обязательств, принято использовать *метод приведения* (с помощью операций дисконтирования и наращивания) платежей к одному моменту времени.

При применении метода приведения следует, прежде всего, выбрать *базовый момент времени*, т.е. момент к которому предполагается приведение всех сумм в расчете.

Дисконтирование применяется, если необходимо привести платежи к более ранней дате, наращивание – когда базовый момент времени относится к будущему.

**Пример.** Выясните, являются ли равноценными два обязательства, если по одному из них должно быть выплачено 2 млн. рублей через 2 года, а по второму – 2,5 млн. рублей через 3 года. Для сравнения применить сложную процентную ставку 15% годовых.

Решение:  $FV_1 = 2000000 \text{ руб.}; n_1 = 2 \text{ года}, FV_2 = 2500000 \text{ руб.}; n_2 = 3 \text{ года}, i = 0,15$ .

Найдем современную стоимость этих платежей:

$$PV_1 = \frac{2000000}{(1 + 0,15)^2} = \frac{2000000}{1,3225} = 1512287,33 \text{ руб.};$$

$$PV_2 = \frac{2500000}{(1 + 0,15)^3} = \frac{2500000}{1,520875} = 1643790,58 \text{ руб.}$$

Как видим, данные обязательства не являются равноценными.

На практике при изменении условий платежей принцип финансовой эквивалентности реализуется путем составления уравнения эквивалентности, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения, как правило, реализуется на основе простых процентных ставок, для среднесрочных и долгосрочных – на основе сложных.

**Пример.**

Имеются два кредитных обязательства 400 тыс. руб. и 700 тыс. руб. со сроками уплаты 1 августа и 1 января (следующего года). По согласованию сторон условия обязательств пересмотрены: первый платеж в размере 600 тыс. рублей должник вносит 1 ноября, остальной долг он выплачивает 1 марта. Определите величину второго платежа, если в расчетах используется простая процентная ставка 20% годовых. Проценты точные.

Решение:

За базовую дату примем дату искомого платежа. Все остальные платежи приведем к этой дате - 1 марта.

Срок от 1 августа ( $P_1=400$  тыс. рублей) до 1 марта составляет 212 дней ( $365-213+60$ ).

Срок от 1 января ( $P_2=700$  тыс. рублей) до 1 марта составляет 59 дней ( $60-1$ ).

Срок от 1 ноября ( $P_3=600$  тыс. рублей) до 1 марта составляет 120 дней ( $365-305+60$ ).

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$400 \cdot \left(1 + \frac{212}{365} \cdot 0,2\right) + 700 \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0,2\right) = 600 \cdot \left(1 + \frac{120}{365} \cdot 0,2\right) + P_4.$$

$$446,47 + 722,63 = 639,45 + P_4,$$

Отсюда  $P_4=529,65$  тыс. рублей.

### **Пример.**

Согласно контракту предприятие должно выплатить 200, 300 и 500 тыс. рублей соответственно через 1,5 года, 2 и 4 года. Предприятие предлагает пересмотреть контракт и вернуть долг одним платежом через 3,5 года. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 18% годовых.

Решение:

$$P_4 = 200 \cdot (1 + 0,18)^{3,5-1,5} + 300 \cdot (1 + 0,18)^{3,5-2} + \frac{500}{(1 + 0,18)^{4-3,5}} =$$
$$= 278,48 + 384,54 + 460,29 = 1123,31 \text{ тыс. руб.}$$

## **Раздел 5. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ**

### **5.1. Доходность финансовых операций.**

Одной из важнейших проблем финансового менеджмента является оценка эффективности финансовых операций с целью определения наилучшего варианта инвестирования денежных средств. Результат финансовой операции может оцениваться с помощью показателей дохода или прибыли. Однако один и тот же финансовый доход в разных случаях может быть получен на основе инвестирования значительно отличающихся по объему денежных средств. Поэтому в качестве показателя эффективности финансовой операции, как правило, выбирают показатель доходности, рассчитанный на основе сопоставления дохода, полученного за определенный промежуток времени, с произведенными затратами.

Предположим некоторая сумма  $PV$  предоставлена в долг с условием, что через  $n$  лет будет возвращена большая сумма  $FV$ .

В качестве показателя доходности может служить:

а) обычная годовая ставка процентов, рассчитанная по формуле

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n}, \quad (5.1)$$

б) сложная годовая ставка процентов, определенная из формулы наращения по сложным процентам  $FV = PV(1+i)^n$ :

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \quad (5.2)$$

в) эффективная ставка процентов, если известна номинальная ставка процентов  $i$ , и проценты начисляются  $m$  раз в год:

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1. \quad (5.3)$$

### Пример

Ссуда в размере 2,5 млн. рублей выдана под простые проценты на 2 года, с условием возвратить в конце срока 3,5 млн. руб. Определить доходность этой операции на основе простой и сложной процентных ставок.

Решение:  $PV = 2,5 \text{ млн. руб.}; FV = 3,5 \text{ млн. руб.}; n = 2 \text{ года}$ .

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{3,5 - 2,5}{2,5 \cdot 2} = 0,2 \quad \text{или } 20\%.$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{3,5}{2,5}} - 1 = 0,183 \quad \text{или } 18,3\%.$$

### Пример

На вклад, помещенный в банк под 16% годовых, проценты начисляются ежеквартально. Оцените доходность этой операции на основе эффективной процентной ставки.

Решение:  $i=0,16; m=4$ .

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^4 - 1 = 0,1699 \quad \text{или } 16,99\%.$$

В некоторых финансовых операциях общий доход может исчисляться как результат сложения доходов от разных источников. Так, банки кроме взимания процентной ставки за кредит часто устанавливают комиссионное вознаграждение за осуществление операций по расчетным счетам клиентов а также удерживают с клиента определенную сумму, покрывающую затраты банка по каждой операции.

Следовательно, измерение доходности любой финансовой операции сводится к учету всех источников дохода, нахождению суммарного дохода за определенный период времени и сопоставлению его с затратами. Для кредитных операций – это сумма денег, предоставленная в кредит. Для владельца ценных бумаг – это сумма, затраченная для их приобретения. При этом все выплаты должны быть приведены к одному



моменту времени, чаще всего к сроку начала или окончания финансовой операции.

Таким образом, в общем случае оценка доходности сводится к определению расчетной процентной ставки, отражающей общую доходность на вложенный капитал.

### Пример

Ссуда 100 тыс. рублей выдана на 240 дней под 12% годовых. Проценты простые обыкновенные. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 1 тыс. рублей. Определить полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки.

Решение:  $PV=100$  тыс. руб.;  $t = 240$  дней;  $Y = 360$  дней.

Сумма долга с процентами составит:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{240}{360} \cdot 0,12\right) = 108 \text{ тыс. рублей}$$

Затраты составили 99 тыс. руб. (100-1). Срок финансовой операции  $n = \frac{240}{360} = 0,66667 \text{ года}$ .

Определим полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки из равенства:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[0,66667]{\frac{108}{99}} - 1 = 1,0909^{1,5} - 1 = 0,1394.$$

Следовательно, полная доходность этой финансовой операции составляет 13,94%.

## 5.2. Расчет средней процентной ставки

В условиях нестабильности финансового рынка процентные ставки могут быть непостоянны во времени. В связи с этим возникает задача определения такого значения процентной ставки, которое определяло бы уровень доходности за весь период финансовой операции. Для решения этой задачи определяют среднюю процентную ставку с помощью уравнения эквивалентности, которое ставит в соответствие коэффициенту наращения, определенному на основе годовой процентной ставки последовательность коэффициентов наращения, задающих схему проведения данной финансовой операции.

а) Предположим, что в течение периода времени  $n_1$  установлена ставка простых процентов  $i_1$ , в течение периода времени  $n_2$  действует ставка простых процентов  $i_2$  и т.д. Всего число периодов начисления процентов -  $m$ . В этом случае срок финансовой операции определяется

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$$

суммой:

Обозначим процентную ставку ссудных процентов, характеризующую среднюю доходность за конверсионный период,

символом  $\bar{i}$ . Тогда уравнение эквивалентности для ее определения будет иметь вид:

$$1 + N \cdot \bar{i} = 1 + \sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k$$

Отсюда

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k}{N} \quad (5.4)$$

Аналогично для простых учетных ставок  $d_1; d_2; \dots; d_m$  их средняя определяется из равенства:  $\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \cdot d_k}{N}$ . (5.5)

Средняя ставка  $\bar{i}$  (равно как и  $\bar{d}$ ) — это взвешенная средняя арифметическая величина, при расчете которой каждому значению процентной ставки ставится в соответствие интервал, в течение которого данное значение ставки использовалось.

В общем виде определение средней ставки может быть сформулировано следующим образом.

Средняя процентная ставка — это ставка, дающая такое наращение, которое эквивалентно наращению с применением ряда разных по значению процентных ставок, применяемых на различных интервалах времени.

**Пример.** На долг в 400 000 рублей согласно контракту предусматривается начислить годовые простые точные проценты по схеме, определенной следующей таблицей.

Таблица

Период	$i_k$	$n_k, лет$	$n_k \cdot i_k$
1	0,12	0,75	0,09
2	0,11	2,0	0,22
3	0,08	1,25	0,1
$\Sigma$		4,0	0,41

Требуется оценить доходность этой кредитной операции в виде простой годовой процентной ставки и найти сумму долга с процентами.

Решение:

$$PV = 400000 \text{ рублей}; \quad n_1 = 0,75; i_1 = 0,12; n_2 = 2,0; i_2 = 0,11; n_3 = 1,25; i_3 = 0,08.$$

Срок финансовой операции:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = 0,75 + 2,0 + 1,25 = 4,0.$$

Средняя процентная ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N} = \frac{0,41}{4,0} = 0,1025$$

или 10,25 % годовых.

Сумма долга с процентами:

$$FV = 400000 \cdot (1 + 4 \cdot 0,1025) = 564000 \text{ рублей.}$$

б) Допустим, что доходность операции с плавающей процентной ставкой на каждом интервале начисления была выражена через сложный процент. В этом случае средняя процентная ставка, которая равноценна последовательности ставок за весь период финансовой операции, может быть получена из следующего уравнения эквивалентности:

$$(1 + \bar{i})^N = (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_m}$$

$$\text{Отсюда } \bar{i} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_m}} - 1, \quad (5.6)$$

где

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$$

Следовательно, сложная средняя процентная ставка рассчитывается по формуле средней геометрической взвешенной.

**Пример.** Сложная процентная ставка по ссуде определена на уровне 8,5 % плюс маржа 0,5 % в первые 2 года и 0,75 % в последующие 3 года. Требуется определить среднюю ставку сложных процентов.

Решение:

$$n_1 = 2; i_1 = 0,085 + 0,005 = 0,09; n_2 = 3; i_2 = 0,085 + 0,0075 = 0,0925.$$

$$\text{Срок финансовой операции: } N = 2 + 3 = 5.$$

Средняя ставка сложных процентов:

$$\bar{i} = \sqrt[5]{(1 + 0,09)^2 \cdot (1 + 0,0925)^3} - 1 = 0,0915 \quad \text{или } 9,15\% \text{ годовых.}$$

### 5.3. Учет инфляции при оценке результатов финансовых операций

Инфляция возникает в результате изменения баланса между денежной массой и объемом созданных в стране благ и услуг. В результате повышается общий уровень цен в экономике, что влечет к снижению покупательной способности денег. Поскольку инфляционные процессы оказывают значительное влияние на реальную доходность финансовых операций, необходимо учитывать их влияние в финансовых

вычислениях. В связи с этим наряду с номинальной процентной ставкой, оценивающей доходность финансовой операции без поправки на инфляцию, следует определять реальную процентную ставку. Последняя позволяет оценить доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег.

Падение покупательной способности денег за период характеризуется с помощью индекса покупательной способности денег. Этот индекс принимают равным обратной величине индекса цен за тот же период.

**Пример.** Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5%. Как изменилась покупательная способность денег?

Решение: Индекс цен равен  $1 + 0,05 = 1,05$

Тогда индекс покупательной способности денег

$$i_{n.c} = \frac{1}{1,05} = 0,952 \quad \text{или} \quad 95,2\%.$$

Реально наращенная сумма денег с учетом инфляции ( $S$ ) может быть рассчитана, исходя из номинально наращенной суммы денег  $FV$  по формуле

$$S = FV \cdot i_{n.c}, \quad (5.7)$$

где  $FV$  - номинально наращенная сумма денег.

**Пример.** Два вклада в размере 100000 руб. были размещены на три года под 12% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 30%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

Решение:

$$PV = 100000 \text{ руб.}; i = 0,12; n = 3 \text{ года}; i_u = 1,3 \quad (1 + 0,3).$$

Определим номинальные наращенные суммы денег по простым процентам:

$$FV_1 = PV(1 + ni) = 100000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,12) = 136000 \text{ руб.}$$

Номинальные наращенные суммы денег по сложным процентам:

$$FV_2 = PV(1 + i)^n = 100000 \cdot (1 + 0,12)^3 = 100000 \cdot 1,40493 = 140493 \text{ руб.}$$

Найдем индекс покупательной способности:

$$i_{n.c} = \frac{1}{i_u} = \frac{1}{1,3} = 0,77$$

После этого рассчитаем реально наращенные суммы денег.

$$S_1 = FV_1 \cdot i_{n.c} = 136000 \cdot 0,77 = 104720 \text{ руб.};$$

$$S_2 = FV_2 \cdot i_{n.c} = 140493 \cdot 0,77 = 108180 \text{ руб.}$$

Оценим реальную доходность финансовых операций с помощью реальной сложной процентной ставки. Обозначим показатели реальной доходности по первому вкладу  $i_1$ , а по второму -  $i_2$ .

$$i_1 = \sqrt[n]{\frac{S_1}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{104720}{100000}} - 1 = 0,01549 \quad i_1 = 0,01549$$

$$i_2 = \sqrt[n]{\frac{S_2}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{108180}{100000}} - 1 = 0,02656 \quad i_2 = 0,02656$$

Таким образом, реальная доходность по первому вкладу составила 1,5% годовых, а по второму - 2,7% .

#### 5.4. Расчет реально наращенной суммы денег с учетом покупательной способности

Реально наращенная сумма денег может быть рассчитана на основе наращенной первоначальной суммы денег  $PV$  , скорректированной с учетом инфляции. При этом формулы наращенной суммы денег выбирают разные, в зависимости от применяемого процента (простой или сложный), а инфляционное влияние следует оценивать по сложному проценту, т.к. обесцениваются уже обесцененные деньги. Так, если наращение производится по простым процентам, то процесс наращенной суммы денег при наличии инфляции описывается формулой:  $S = \frac{1+ni}{(1+\gamma)^n}$ . (5.8)

Если наращение производится по сложным процентам – по формуле:

$$S = PV \cdot \left( \frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n \quad (5.9)$$

Где  $PV$  - первоначальная сумма денег, размещенная на вкладе;

$i$  - годовая декурсивная ставка процента по вкладу;

$\gamma$  - средний годовой темп инфляции;

$n$  - срок вклада.

Формула  $S = PV \cdot \left( \frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n = PV \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+\gamma)^n}$ , характеризует процесс

наращения в условиях инфляции: ставка доходности является фактором роста денег и находится в числителе, а показатель инфляции является фактором их обесценивания и находится в знаменателе.

При сравнении годовой ставки процента по вкладу и среднего годового темпа инфляции возможны три случая:

1).  $i > \gamma$  , тогда  $S > PV$  , т.е. только часть наращенной суммы денег «поглощается» инфляцией. Это наиболее оптимальный результат.

Темпы наращенной суммы денег по ставке процента опередили темп их обесценивания, в связи с этим, первоначальная сумма денег сохранила свою покупательную способность, и даже был получен некоторый прирост денег по вкладу.

2).  $i = \gamma$  , тогда  $S = PV$  , т.е. все наращение по вкладу «поглощено» инфляцией. Следовательно, роста реальной суммы нет. В этом случае ставка процента по вкладу позволила лишь сохранить покупательную способность первоначальной суммы вклада от инфляции.

3).  $i < \gamma$ , тогда  $S < PV$ . Т.е. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы денег, размещенной на вкладе. Такое положение называют «эрозией капитала». В этом случае темпы роста инфляции опередили темпы роста наращения денег по ставке процента. Это наихудший результат, при котором не удастся спасти вложенные деньги от обесценивания в условиях инфляции.

**Пример.** Первоначальная сумма вклада составляет 6000 руб. Вклад размещен на 3 года под 4,5% годовых. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7%. Требуется определить наращенную сумму денег с учетом инфляции.

Решение:  $PV = 6000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; i = 0,045; \gamma = 0,07$ .

$$S = PV \cdot \left( \frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n = 6000 \cdot \left( \frac{1+0,045}{1+0,07} \right)^3 = 6000 \cdot 0,93153 = 5589,2 \text{ руб.}$$

Т.о. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы вклада. Данная финансовая операция не позволила сохранить деньги от инфляции. По истечении срока вкладчик по покупательной способности получил сумму денег меньшую, чем та, которую он разместил на вкладе. Иначе говоря, произошла «эрозия капитала». Это стало возможно потому, что среднегодовой темп роста инфляции опередил наращение денег по декурсивной ставке процента.

**Пример.** Ежемесячный уровень инфляции составляет 7% (по отношению к предыдущему месяцу). Исчислить реально наращенную стоимость вклада в 200 тыс. руб., хранящегося на счете до востребования в сбербанке в течение 7 месяцев по ставке 10% годовых. Проценты простые.

$$S = PV \frac{\left( 1 + \frac{t}{Y} \cdot i \right)}{(1+\gamma)^n} = 200 \frac{\left( 1 + \frac{7}{12} \cdot 0,1 \right)}{(1+0,07)^7} = 200 \cdot \frac{1,058333}{1,60578} = 131,1815 \text{ тыс.руб.}$$

Отметим, что в проектном анализе часто не вычисляют  $S$ , довольствуются сравнением  $i$  и  $\gamma$  путем вычисления  $i_\gamma$  – реальной процентной ставки или нетто-ставки – ставки доходности уменьшенной под влиянием инфляции. Ее находят из соотношения:

$$(1+i_\gamma)^n = \frac{(1+i)^n}{(1+\gamma)^n}$$

Выразив из этого равенства  $i_\gamma$ , получим:  $i_\gamma = \frac{i-\gamma}{1+\gamma}$ . (5.10)

**Пример.** Определить целесообразность помещения средств на год под 20% годовых, если прогнозируемый уровень инфляции 15%.

Решение:  $i = 0,2; \gamma = 0,15$ .

$$i_{\gamma} = \frac{0,2 - 0,15}{1 + 0,15} = \frac{0,05}{1,15} = 0,0435$$

Реальная положительная ставка - 4,35%, т.е. реальный доход по операции будет 4,35% от каждой единицы вложенных средств, обесцененной за год на 13% ( $\frac{1}{1,15} = 0,87$  или 87%      $100 - 87 = 13\%$ )

### 5.5. Учет инфляции при определении процентной ставки

Инфляция уменьшает реальную ставку процента. В результате реальная ставка процентов составит  $i_{\gamma} = \frac{i - \gamma}{1 + \gamma}$ . При достаточно большой инфляции, когда  $\gamma > i$  ставка процентов  $i_{\gamma}$  может стать отрицательной. В случае если кредитор не отреагирует на инфляцию достаточным увеличением ставки по кредитам, он будет работать себе в убыток. Увеличение процентной ставки должно компенсировать обесценивающее влияние инфляции. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке  $j$ , которая определяется из соотношения  $1 + j = (1 + i) \cdot (1 + \gamma)$ . Следовательно,  $j = i + \gamma + i\gamma$ . (5.11)

**Замечание.** При невысокой инфляции величины  $i$  и  $\gamma$  малы, поэтому их произведением можно пренебречь. В этом случае поправка на инфляцию ограничивается величиной темпа инфляции  $\gamma$ , и ставку корректируют по формуле:  $j = i + \gamma$ .

**Пример.** Кредит в 300000 рублей выдается на 2 года. Прогнозируемый уровень инфляции на этот период 8% в год. Проценты сложные. Какую процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 10% годовых. Определите наращенную сумму долга.

Решение:  $PV = 300000 \text{ руб.}; n = 2 \text{ года}; \gamma = 0,08; i = 0,1$ .

$$j = i + \gamma + i \cdot \gamma = 0,1 + 0,08 + 0,1 \cdot 0,08 = 0,188;$$

Следовательно, для того чтобы обеспечить требуемый уровень доходности, банк должен назначить процентную ставку 18,8%.

В этом случае сумма долга с процентами может быть определена таким образом:

$$FV = 300000(1 + 0,188)^2 = 423403,2 \text{ рубля.}$$

Дисконт банка при этом составит 123403,2 рубля.

## Раздел 6. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

### 6.1. Потоки платежей

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, некоторую их последовательность во времени. Например, погашение задолженности в рассрочку, выплата дивидендов, пенсий и т.д.

Ряд следующих друг за другом выплат и поступлений называют *потоками финансовых платежей*. Финансовые потоки могут быть регулярными и нерегулярными.

В регулярных финансовых потоках поступление средств осуществляется через одинаковые промежутки времени, например, взносы от погашения кредита, перечисление прибыли и т.п.

Регулярные финансовые потоки называют также *финансовыми рентами* или *аннуитетами*. Величину каждой отдельной выплаты денег, входящей в состав ренты, называют *членом ренты*. Рентные платежи производят через равные промежутки времени. Эти временные интервалы между двумя платежами называют *периодом ренты*. Время, измеренное от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода называется *сроком ренты*. Процентная ставка представляет собой ставку, используемую при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента. Наряду с этим, при характеристике отдельных видов финансовых рент применяются параметры: число платежей в году, число начисления процентов, моменты произведения платежей и др.

### 6.2. Виды финансовых рент

В зависимости от размера платежа различают ренты *постоянные* и *переменные*. По времени осуществления платежи могут производиться в начале процентного периода. Такая рента называется *пренумерандо*. Если платежи осуществляются в конце процентного периода, то рента называется *постнумерандо*. Исходя из продолжительности периода, существуют годовые, полугодовые, ежемесячные,  $p$ -срочные, платежи. Регулярные финансовые потоки могут быть *безусловными* и *условными*. Последние выплачиваются после поступления какого-либо события. Различают также ренты *немедленные*, действие которых начинается сразу после заключенного договора, и *отложенные*, платежи по которым производятся по истечении некоторого оговоренного периода.

### 6.3. Определение наращенной стоимости годовой финансовой ренты

Пусть задан регулярный финансовый поток *постнумерандо*. Суммарный годовой платеж обозначим  $R$ . Предположим, что начисление процентов и осуществление платежей производится один раз в год.



Нарращенные отдельные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом  $R$  и знаменателем прогрессии  $(1+i)$ , где  $i$  - процентная ставка.

Определим наращенную стоимость ренты  $FV_f$ , как сумму геометрической прогрессии:

$$FV_f = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad (6.1)$$

Выражение  $f_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  называют коэффициентом или множителем наращения финансовой ренты. Он представляет собой стоимость регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице к моменту окончания всех платежей. Значения множителей наращения ренты  $f_{(n,i)}$  приведены в приложении 4.

Рассмотрим финансовую ренту *пренумерандо*, т.е. платежи осуществляются вначале каждого периода. Следовательно, число раз наращения каждого платежа на один раз больше, что дает увеличение каждого платежа в  $(1+i)$  раз. Поэтому множитель наращения будет выглядеть следующим образом:

$$f_{(n,i)} \cdot (1+i),$$

следовательно, в этом случае ..

$$FV_f = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \quad (6.2)$$

# I

**Пример.** В течение 4 лет ежегодно в конце года на специальный счет поступает 50 тыс. руб. Определить наращенную стоимость начисления сложных процентов по ставке 10%.

Решение:

Рента постнумерандо;  $R = 50$  тыс. руб.,  $n = 4$ ,  $i = 0,1$

$$FV_f = 50 \cdot \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1} = 50 \cdot \frac{0,4641}{0,1} = 232,05 \text{ тыс. руб.}$$

**Пример.** Создается целевой фонд для обеспечения инвестиций в сумме 10 млн. руб. сроком на 5 лет, процентная ставка 20%. Определить ежегодные платежи пренумерандо.

Решение:  $FV_f^{pre} = 10 \text{ млн. руб.}; n = 5; i = 0,2$ . Найти  $R$ .

$$FV_f^{pre} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i); \quad 10 = R \cdot \frac{1,2^5 - 1}{0,2} \cdot 1,2;$$

$$10 = R \frac{1,48832}{0,2} \cdot 1,2; \quad 10 = R \cdot 8,93; \quad R = \frac{10}{8,93} = 1,1198 \text{ млн. руб.}$$

#### 6.4. Нарощенная сумма годовой ренты с начислением процентов $m$ раз в год

Рассмотрим случай, капитализация процентов осуществляется чаще, чем один раз в год.

Предположим, проценты начисляются  $m$  раз в год. В этом случае их каждый раз начисляют по ставке  $\frac{i}{m}$ , где  $i$  - номинальная ставка процентов.

Срок ренты  $n$  лет.

Нарощенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом  $R$  и знаменателем прогрессии  $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$ .

Нарощенная сумма такой ренты определяется по формуле:

$$FV_f = R \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}, \quad (6.3)$$

где  $R$  - размер годового платежа.

**Пример.** На банковский счет ежегодно в конце года поступает 10 000 рублей в течение 7 лет. На эти средства ежеквартально начисляют проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определить, какая сумма будет на банковском счете к концу срока.

Решение:  $R=10\,000$  руб.;  $m = 4$  раза в год;  $n=7$  лет;  $i = 0,15$ .

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} = 10000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \cdot 7} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} = 10000 \cdot 11,366392 = 113663,92 \text{ руб.}$$

#### 6.5. Нарощенная величина $p$ -срочной ренты

Предположим, что вложение средств и капитализация процентов осуществляются чаще, чем один раз в год.

Пусть  $R$  - размер годового платежа;

$n$  - срок финансовой операции (лет);

$i$  - годовая процентная ставка;

$p$  - число платежей в год;

$m$  - количество начислений процентов.

Тогда платеж за период  $\frac{R}{p}$

Число процентных периодов  $m \cdot n$ , по ставке  $\frac{i}{m}$ .

Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом  $\frac{R}{p}$  и знаменателем прогрессии  $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$ .

Количество членов ренты равно  $p \cdot n$ . Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \quad (6.4)$$

$$\text{Для ренты пренумерандо: } FV_f^{pre} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right). \quad (6.5)$$

**Пример.** Страховая компания принимает платежи по полугодиям равными частями по 250 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты ежеквартально из расчета 10% годовых. Определить, какую сумму получит страховая компания по истечению срока договора.

Решение:  $\frac{R}{p} = 250$  тыс. руб.,  $R = 500$  тыс. руб.;  $i = 0,1$ ;  $p = 2$  раза;  $m = 4$  раза;  $n = 3$  года.

$$FV_f = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 250 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1} = 250 \cdot \frac{0,344}{0,0506} = 250 \cdot 6,798 = 1699,5 \text{ тыс.руб.}$$

**Пример.** Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд средств. В фонд поступают платежи в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 4 млн. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5% годовых.

Найти величину фонда на конец срока, если

1). Проценты начисляются, и платежи выплачиваются один раз в год. ( $m = p = 1$ ).

$R = 4$  млн.руб.;  $i = 18,5\%$  годовых;  $n = 5$  лет.

$$FV_f = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 4 \cdot \frac{(1+0,185)^5 - 1}{0,185} = 4 \cdot \frac{1,3366}{0,185} = 28,90 \text{ млн. руб.}$$

2). Проценты начисляются поквартально, платежи осуществляются один раз в год ( $m = 4$ ,  $p = 1$ ),

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 4 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^4 - 1} = 4 \cdot \frac{1,4701}{0,1982} = 29,669 \text{ млн. руб.}$$

Переход от годового начисления процентов к поквартальному несколько увеличил наращенную сумму.

3). Допустим, проценты начисляются раз в год, платежи выплачиваются поквартально. ( $m = 1$ ,  $p = 4$ );

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{(1 + 0,185)^{1 \cdot 5} - 1}{(1 + 0,185)^{\frac{1}{4}} - 1} = 4 \cdot \frac{1,3366}{0,04335} = 30,833 \text{ млн. руб.}$$

4). Пусть платежи и начисление процентов производятся поквартально. ( $m = p = 4$ );

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^1 - 1} = 1 \cdot \frac{1,4701}{0,04625} = 31,786 \text{ млн. руб.}$$

5). Пусть платежи производятся поквартально, а начисление процентов производится ежемесячно ( $m = 12$ ,  $p = 4$ ).

$$FV_f = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = 1 \cdot \frac{1,054167^{60} - 1}{1,054167^3 - 1} = \frac{1,504132}{0,046967} = 32,025 \text{ млн. руб.}$$

## 6.6. Определение современной стоимости годовой ренты

Под современной стоимостью регулярных финансовых потоков понимают сумму всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.

Дисконтированные отдельные платежи  $\frac{R}{1+i}; \frac{R}{(1+i)^2}; \frac{R}{(1+i)^3}; \dots; \frac{R}{(1+i)^n}$

представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом  $\frac{R}{1+i}$  и

знаменателем  $\frac{1}{1+i}$ . Ее сумма имеет вид:

$$PV_f^{post} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \quad (6.6)$$

Величина  $\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$  называется *коэффициентом современной стоимости срочного аннуитета* или *коэффициентом приведения годовой ренты* и характеризует современную величину обычного регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице. Значения коэффициентов приведения содержатся в приложении 5.

Каждый член полученной геометрической прогрессии в  $(1+i)$  раз больше, чем в случае с рентой постнумерандо, следовательно:

$$PV_f^{pre} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \quad (6.7)$$

**Пример.** В начале первого периода фирме предложено вложить 8 млн. руб. Доходы от инвестирования ожидаются в конце четырех последующих периодов по 2,2 млн. руб. Определить чистую приведенную стоимость, исходя из ставки сравнения 10% за период.

Решение:

Поскольку деньги имеют различную ценность в разные моменты времени, приведем все суммы к началу первого периода. Определим приведенную стоимость финансовой ренты постнумерандо, состоящей из четырех выплат по 2,2 млн. рублей ( $R=2,2$  млн. руб.;  $i=0,1$ ;  $n=4$  года):

$$PV_f = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2,2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^4}}{0,1} = 2,2 \cdot 3,1699 = 6,974 \text{ млн.руб.}$$

Общая сумма приведенных поступлений на начало финансовой операции равна -  $8 + 6,974 = - 1,026$  млн. рублей.  $< 0$ .

Следовательно, если поступления от инвестирования ограничиваются указанными, то проект убыточен.

### 6.7. Определение современной стоимости годовой ренты с начислением процентов $m$ раз в год

Начисление процентов производится  $m$  раз в год, то есть за весь срок ренты  $m \cdot n$  раз. Годовой платеж равен  $R$ . Для определения современной стоимости ренты определим дисконтные множители каждого платежа:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m}; \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{2m}}; \dots; \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

Современная стоимость ренты может быть определена, как сумма геометрической прогрессии с первым членом  $\frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$  и знаменателем

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}. \text{ Следовательно: } PV_f = \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} - 1}{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} - 1} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-m}}. \quad (6.8)$$

**Пример.** В течение семи лет ежегодно в конце года в фонд поступают по 10000 рублей. На них ежеквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определите современную стоимость фонда.

Решение:  $R=10\,000$  руб.;  $i=0,15$ ;  $m=12$ ;  $n=7$ .

$$PV_f = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-m}} = 10000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4 \cdot 7} - 1}{1 - \left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4}} = 10000 \cdot 4,054672 = 40546,72 \text{ руб.}$$

## 6.8. Определение современной стоимости р-срочной ренты с начислением процентов $m$ в раз в год

Предположим, что начисление процентов производится  $m$  раз в год в течение  $n$  лет по номинальной ставке  $i$ . Каждый раз проценты начисляются по ставке  $\frac{i}{m}$ . Количество начислений –  $mn$ .

В общем случае современная стоимость финансовой ренты может быть определена по формуле

$$PV_f = \frac{FV_f}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} : \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \quad (6.9)$$

**Пример.** Ежеквартально в течение 2 лет на специальный счет поступает 100 тыс. руб. Определить современную стоимость финансовой ренты, если проценты по ставке 12% годовых начисляются ежемесячно.

Решение:  $\frac{R}{p} = 100$  тыс. руб.;  $p = 4$ ;  $i = 0,12$ ;  $n = 2$ ;  $m = 12$ .

$$PV_f = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 100000 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{-2 \cdot 12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = 100000 \cdot \frac{0,212434}{0,030301} = 701079,17 \text{ руб.}$$

Т.о., современная стоимость данной финансовой ренты 701 079 руб.

## 6.9. Вечные ренты

Наращенная сумма вечной ренты при любых ее параметрах равна бесконечно большой величине, в то же время ее современная величина имеет конкретное значение. Современная величина вечной ренты оказывается полезной характеристикой в ряде финансовых расчетов, например при замене некоторых потоков платежей, оценке финансовых инвестиций, в страховых расчетах.

Современная величина вечной годовой ренты определяется по

$$\text{формуле: } PV_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{R}{i} \quad (6.10)$$

**Пример.** Квартира арендована за 10000 \$ в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Решение:  $R = 10\,000$  \$;  $i = 0,05$ .

Выкупная цена ренты - это современная величина всех будущих арендных платежей. Она равна  $PV_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{10000}{0,05} = 200000$  \$.

Заметим, что если поместить 200000 \$ в банк под 5% годовую ставку, то годовые процентные деньги составят в точности 10 000 \$.

Формула для вычисления современной стоимости р-срочной вечной ренты с начислением процентов  $m$  раз в году имеет вид:

$$PV_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \quad (6.11)$$

**Пример.** Определите цену вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 2 тыс. рублей при номинальной процентной ставке 12% годовых и ежеквартальном начислении процентов.

Решение:

$$\frac{R}{p} = 2000 \text{ руб.}; i = 0,12; p = 12; m = 4.$$

$$PV_{\infty} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 2000 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} = 2000 \cdot \frac{1}{0,009902} = 201979,4 \text{ руб.}$$

### 6.10. Конверсия рент

В ряде случаев возникает необходимость принять условия финансового соглашения, предусматривающего выплату ренты. Процесс, связанный с изменением условий ренты, называется конверсией ренты. Иногда конверсия ренты заключается в замене ренты единовременным платежом. Иногда рента с одним набором условий заменяется рентой с другими условиями. При этом предполагается, что конверсия рент не приводит к изменению финансовых последствий для каждого из участвующих в соглашении сторон, то есть она должна основываться на принципе финансовой эквивалентности платежей.

При этом находят современную величину данной ренты, а затем подбирают ренту с такой же современной величиной и нужными параметрами.

**Пример.** Годовую ренту пренумерандо со сроком 5 лет, разовым платежом  $R=2000$  руб. и процентной ставкой  $i=6\%$  необходимо заменить рентой сроком 8 лет. Определите параметры ренты.

Решение:  $R_1=2\,000$  руб.;  $i=0,06$ ;  $n_1=5$ ;  $n_2=8$ .

1). Определим современную стоимость такой ренты.

$$1) PV_f^{pre} = R_1 \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2000 \cdot (1+0,06) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,06)^5}}{0,06} = 8930,21 \text{ руб.}$$

2). Найдем разовый платеж восьмилетней ренты с такой же современной стоимостью. Для этого составим уравнение эквивалентности:

$$R_2 \cdot (1+0,06) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,06)^8}}{0,06} = 8930,21.$$

3). Разрешим это уравнение относительно  $R_2$ :

$$R_2 \cdot 6,582381 = 8930,21;$$

$$R_2 = \frac{8930,21}{6,582381} = 1356,68 \text{ руб.}$$



## 6.11. Объединение рент

Предположим, несколько рент необходимо заменить одной. Замена базируется на принципе финансовой эквивалентности обязательств, который реализуется путем составления уравнения эквивалентности.

При составлении уравнения эквивалентности находят современные величины рент-слагаемых и суммируют, а затем приравнивают эту сумму современной стоимости заменяющей ренты.

Правило объединения рент:

- 1) находят современные величины рент-слагаемых и суммируют их;
- 2) приравнивают полученную сумму современной стоимости заменяющей ренты;
- 3) задав все параметры заменяющей ренты, кроме одного, из уравнения эквивалентности определяют недостающий параметр.

### Пример.

Найти ренту-сумму для двух годовых рент постнумерандо: одна - длительностью 5 лет с годовым платежом 1000 \$., а другая - 8 лет с годовым платежом 800 \$. Годовая ставка процента равна 8%.

Решение:  $R_1 = 1000\$; n_1 = 5 \text{ лет}; R_2 = 800\$; n_2 = 8 \text{ лет}.$

$$1) PV_f^1 = R_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n_1}}}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,08)^5}}{0,08} = 1000 \cdot 3,9927 = 3992,7\$ \quad - \text{ современная величина первой ренты.}$$

$$2) PV_f^2 = R_2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n_2}}}{i} = 800 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,08)^8}}{0,08} = 800 \cdot 5,7466 = 4597,28\$ \quad - \text{ современная величина второй ренты.}$$

3) Определим современную величину ренты-суммы:

$$3992,7 + 4597,28 = 8590,02 = 8589,98 \$.$$

Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем определить второй из этих параметров.

Предположим, что рента – сумма имеет длительность 6 лет, тогда уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_3 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,08^6}}{0,08} = 8589,98; \quad \text{или} \quad R_3 \cdot 4,6229 = 8589,98;$$

$$\text{Отсюда: } R_3 = \frac{8589,98}{4,6229} = 1858,14\$.$$

## 6.12. Определение параметров ренты

Постоянная рента описывается набором основных параметров  $R$ ,  $n, i$ , и дополнительными параметрами  $p$  и  $m$ . Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик  $FV_f$  и  $PV_f$  и два основных параметра. В этом случае возникает необходимость определить значение недостающего параметра.

а). Определение члена ренты

Задается  $FV_f$  или  $PV_f$  и набор параметров, кроме  $R$ . Необходимо определить значение  $R$ .

**Пример.** Определите ежегодный платеж для создания целевого фонда для погашения задолженности в сумме 100 тыс. рублей через 5 лет. Процентная ставка равна 20%.

Решение:  $FV_f = 100000 \text{ руб.}; n = 5 \text{ лет}; i = 0,2$ .

$$FV_f^{post} = 100000 \text{ руб.}; \quad \text{или} \quad R \cdot \frac{(1+0,2)^5 - 1}{0,2} = 100000;$$

$$\text{Поскольку } \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,2)^5 - 1}{0,2} = \frac{1,48832}{0,2} = 7,4416, \text{ то}$$

$$R \cdot 7,4416 = 100000, \text{ отсюда находим: } R = \frac{100000}{7,4416} = 13 \text{ тыс. } 438 \text{ руб.}$$

б) Определение срока ренты.

Иногда при разработке условий контракта возникает необходимость определения срока ренты, если известны ее остальные параметры.

**Пример.** Какой срок необходим для накопления 100 тыс. руб. при условии, что ежемесячно вносится по 1 тыс. руб., и на ежемесячные вложения начисляются проценты по ставке 24 % годовых.

Решение:  $\frac{R}{p} = 1000 \text{ руб.}; p = 12$ ; следовательно  $R = 12000 \text{ руб.}; m = 12; i = 0,24$ .

$$\text{Вспользуемся формулой: } FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

$$\text{Получим следующее уравнение: } 100000 = 1000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12n} - 1}{\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{\frac{12}{12}} - 1}.$$

Разрешим его относительно  $n$ :

$$1,02^{12n} - 1 = 100 \cdot 0,02;$$

$$1,02^{12n} = 2 + 1; \quad \text{или} \quad 1,02^{12n} = 3;$$

$$12n \cdot \ln 1,02 = \ln 3;$$

$$n = \frac{\ln 3}{12 \cdot \ln 1,02} = \frac{1,0986}{12 \cdot 0,0198} = 4,6 \text{ года.}$$

### 6.13. Переменные финансовые ренты

Наряду с постоянными рентами, в последние годы, в финансовой практике часто встречаются ренты, параметры которых изменяются во времени. Такие ренты носят название переменных во времени.

Суть расчета в этом случае сводится к тому, что, если процесс изменения переменной ренты носит не систематический характер, и соответственно его нельзя описать аналитически, то величину будущей и современной стоимостей таких потоков следует определять прямым счетом, наращивая и дисконтируя к требуемому моменту времени отдельные платежи и затем суммируя полученные величины.

В общем случае современную стоимость финансовой ренты постнумерандо можно представить таким образом:

$$PV_f^{post} = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^k} \quad (6.12)$$

Здесь  $R_k$  ожидаемые поступления в момент времени  $k$ ;  $n$  - временной горизонт.

Расчет современной стоимости регулярных финансовых потоков используют при выборе наилучшего варианта инвестирования и возврата долга.

**Пример.** Имеется переменный финансовый поток постнумерандо 20,12,8,45,30 (тыс. руб.). Рассчитайте приведенную стоимость финансового потока, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 25% годовых, т.е. равен одному году. Как изменяется оценка финансового потока, если он представляет собой поток пренумерандо?

Решение:  $n = 5; R_1 = 20; R_2 = 12; R_3 = 8; R_4 = 45; R_5 = 30 \text{ тыс. руб.}$

$$PV_f^{post} = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} + \frac{R_4}{(1+i)^4} + \frac{R_5}{(1+i)^5} = \frac{20}{1,25} + \frac{12}{1,25^2} + \frac{8}{1,25^3} + \frac{45}{1,25^4} + \frac{30}{1,25^5} = 56,039 \text{ тыс. руб.}$$

Для определения стоимости финансового потока пренумерандо необходимо умножить полученный результат на  $1+i = 1+0,25 = 1,25$ .

$$PV_f^{pre} = PV_f^{post} \cdot (1+i) = 56,039 \cdot 1,25 = 70,049 \text{ тыс. руб.}$$

## **Раздел 7. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ**

### **7.1. Планирование погашения задолженности**

Одним из практических приложений финансовой математики является разработка плана погашения средне- и долгосрочных кредитов.

К среднесрочным, как правило, относят кредиты, выданные на срок от 2 до 5 лет. Кредиты, выданные на более длительный срок, являются долгосрочными.

Расходы, связанные с погашением займа, должны включать как текущие выплаты процентов, так и средства, предназначенные для погашения суммы займа, или основного долга. В совокупности они называются расходами заемщика по обслуживанию долга или амортизацией займа.

Существуют различные способы погашения задолженности. Участники кредитной сделки оговаривают их при заключении контракта. В соответствии с условиями контракта составляется план погашения задолженности. Одним из важнейших элементов плана является определение количества выплат в течение года, т.е. определение числа так называемых срочных уплат и их величины.

Срочные уплаты рассматриваются как средства, предназначение для погашения, как основного долга, так и текущих процентных платежей. При этом средства, направляемые на погашение (амортизацию) основного долга, могут быть равными или изменяющимися, а плата за кредит, вычисленная по сложным процентам, может выплачиваться отдельно. Иногда в течение ряда лет выплачиваются только проценты за кредит, а сам долг погашается в оставшееся время в рассрочку, т.е. несколькими платежами, или разовым платежом.

Погашение кредита может также производиться в виде финансовой ренты, т.е. платежами, вносимыми через равные промежутки времени и содержащими как выплату основного долга, так и процентный платеж за пользование кредитом. Величина срочных уплат зависит от величины кредита, его срока, наличия и продолжительности льготного периода, размера процентной ставки и т.п. Однако, как правило, проценты за кредит должны выплачиваться и в льготном периоде. Рассмотрим некоторые методы разработки планов погашения кредитов.

### **7.2. Потребительский кредит. Погашение основного долга равными выплатами**

Потребительный кредит предоставляется для покупки предметов личного потребления. Существуют различные формы потребительского кредита, отличающиеся друг от друга методами и сроками его погашения.

Так, например, кредит может быть предоставлен с отсрочкой платежа и последующим разовым погашением всей суммы. Другой метод предусматривает погашение платежа в рассрочку, частями.

Если кредит, выданный потребителю, будет погашен равными выплатами, то наращенная сумма долга будет определяться по формуле:  $FV = PV(1 + in)$ . Сумму разового погасительного платежа, если платеж осуществляется  $m$  раз в году, можно определить по формуле:  $R = \frac{FV}{mn}$ .

**Пример.** Холодильник ценой 8 тыс. руб. продается в кредит на два года под 10 % годовых. Погасительные платежи вносятся ежемесячно. Определить размер разового платежа.

Решение:  $PV = 8000 \text{ руб.}; n = 2 \text{ года}; m = 12 \text{ раз}; i = 0,1$ .

Сумма, подлежащая погашению за весь срок кредита:

$$FV = 8000(1 + 2 \cdot 0,1) = 9600 \text{ руб.}$$

Разовый платеж:  $R = \frac{9600}{12 \cdot 2} = 400 \text{ руб.}$

### 7.3. Погашение потребительского кредита изменяющимися суммами - правило «78».

При погашении кредита иногда возникает необходимость определить сумму, идущую на погашение основного долга, и суммы процентных платежей. Такая ситуация возможна, например, при досрочном погашении долга. Для решения этого вопроса можно воспользоваться правилом «78».

Для того чтобы объяснить происхождение названия этого правила, рассмотрим следующий пример:

Кредит предоставлен на 1 год с ежемесячным погашением. Сумма порядковых номеров месяцев года равна:  $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$ . В соответствии с этим правилом уплата при первом платеже составит величину  $12/78$  общей начисляемой суммы процентов. А оставшаяся часть платежа пойдет на уплату основного долга. При втором платеже: на оплату процентов идет  $11/78$  общей суммы начисления процентов, а оставшаяся часть погашает основной долг и т.д.

В общем случае знаменатель этих дробей можно определить по формуле:  $N = \frac{1+k}{2} \cdot k$ , где  $k$  – количество платежей в году.

После определения знаменателя, составляют следующую последовательность дробей:  $\frac{k}{N}; \frac{k-1}{N}; \frac{k-2}{N}; \dots; \frac{1}{N}$ . Величина каждой из этих дробей, в сумме составляющих единицу, показывает какая часть общей начисляемой суммы процентов идет на уплату процентов. Оставшаяся часть платежа идет на погашение основного долга.

Схема с убывающей величиной процентной платы соответствует логике ссудно-заемных операций. Поскольку с течением времени сумма основного долга снижается, то и сумма процентов, начисляемых на непогашенный остаток долга, должна снижаться. Эта схема страхует кредитора на случай досрочного погашения долга, если эта возможность предусмотрена кредитным договором. При досрочном погашении долга заемщик понесет определенный убыток, т.к. большая часть процентов он уже заплатил в начале срока кредитования.

**Пример.** Кредит в сумме 15000 рублей выдан на 2 года под 20% годовых. Проценты простые. Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

Решение:  $PV = 15000 \text{ руб.}; n = 2 \text{ года}, m = 12 \text{ раз}; i = 0,2$ .

Наращенная сумма долга в конце периода составит  $FV = 15000(1 + 0,2 \cdot 20) = 21000 \text{ руб.}$

Сумма начисленных процентов  $D = 21\,000 - 15\,000 = 6\,000$  рублей. Количество платежей в году - 12, следовательно, за весь рассматриваемый период количество платежей  $k = 12 \cdot 2 = 24$ . Определим значение знаменателя  $N = \frac{1+k}{2} \cdot k = \frac{1+24}{2} \cdot 24 = 300$ .

Определим величину разового платежа:  $R = \frac{FV}{mn} = \frac{21000}{24} = 875 \text{ рублей.}$

В соответствии с правилом «78» уплата при первом платеже составит величину 24/300 общей начисляемой суммы процентов (6 000 рублей). Оставшаяся часть платежа пойдет на уплату основного долга. При втором платеже на оплату процентов пойдет 23/300 общей суммы начисленных процентов, а оставшаяся часть будет направлена на погашение основного долга и т.д.

В соответствие с этим получим следующий план погашения долга:  
(руб.)

Остаток основного долга на начало месяца	$\frac{k}{N}$	Сумма погашения процентных платежей	Сумма погашения основного долга
15000	24/300	480	395
14605	23/300	460	415
14190	22/300	440	435
13755	21/300	420	455
13300	20/300	400	475
12825	19/300	380	495
12330	18/300	360	515
11815	17/300	340	535
11280	16/300	320	555

10725	15/300	300	575
10150	14/300	280	595
9555	13/300	260	615
8940	12/300	240	635
8305	11/300	220	655
7650	10/300	200	675
6975	9/300	180	695
6280	8/300	160	715
5565	7/300	140	735
4830	6/300	120	755
4075	5/300	100	775
3300	4/300	80	795
2505	3/300	60	815
1690	2/300	40	835
855	1/300	20	855
$\Sigma$	1,000	6000	15000

#### 7.4. Погашение займа одним платежом в конце срока

Пусть заем  $D$  выдан на  $n$  лет под  $i$  сложных годовых процентов. К концу  $n$ -го года его наращенная величина составит  $D(1+i)^n$ . Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

**Пример.** Заем величиной 20000 руб. был выдан на 8 лет под 10% годовых. Долг с процентами должен быть погашен одним платежом в конце срока займа. Определить размер этого платежа.

Решение:  $D = 20000 \text{ руб.}; n = 8 \text{ лет}; i = 0,1$ .

Величина долга с процентами составит:

$$D(1+i)^n = 20000(1+0,1)^8 = 20000 \cdot 2,14359 = 42871,8 \text{ руб.}$$

#### 7.5. Погашение основного долга одним платежом в конце срока

Расходы заемщика по обслуживанию долга состоят из основного долга, равного самому займу, и процентных денег – платы за пользование кредитом. Пусть заем  $D$  выдан на  $n$  лет под  $i$  сложных годовых процентов. За первый год процентные деньги составят  $iD$ . Если их выплатить в конце года, то останется только долг в размере  $D$ .

Если выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги  $iD$ , то сумма долга останется постоянной в течение всего срока ссуды. В конце  $n$ -го последнего года выплаты составят величину  $iD + D$  - процентные деньги за последний год и основной долг.

**Пример.** Заем величиной 100000 руб. был выдан на 3 года под 15% годовых сложных процентов. Составить схему погашения основного долга, если в течение рассматриваемого срока выплачиваются процентные деньги  $iD$ , а в конце периода - процентные деньги и основной долг  $iD + D$ .  
Решение:  $D = 100000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; i = 0,15$ .

Определим процентные деньги за использование суммы в 100000 руб. в течение года:  $iD = 0,15 \cdot 100000 = 15000 \text{ руб.}$

Составим схему погашения долга:

конец 1 года- 15000 руб.;

конец 2 года – 15000 руб.;

конец 3 года –  $15000 + 100000 = 115000 \text{ руб.}$

## 7.6. Погашение основного долга равными выплатами

Пусть заем  $D$  выдан на  $n$  лет под  $i$  сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе выплаты долга в конце каждого года выплачивается  $n$ -я доля основного долга, т.е. величина  $\frac{D}{n}$ . В конце первого года, кроме того платятся проценты с суммы  $D$ , которой пользовались в течение этого года, т. е.  $iD$ . Весь платеж в конце первого года равен:

$$R_1 = \frac{D}{n} + iD;$$

Основной долг при этом уменьшится на  $\frac{D}{n}$  и составит  $D - \frac{D}{n}$ .

В конце 2-го года выплата составит  $R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n}\right)$  и т.д.

**Пример.** Заем величиной 5000 \$ выдан на 5 лет под сложные проценты 10% годовых. Составим план погашение задолженности с условием, что основной долг гасится равными выплатами.

Решение:  $D = 5000\$; n = 5 \text{ лет}; i = 0,1$ .

Основной долг гасится равными выплатами:  $\frac{D}{n} = \frac{5000}{5} = 1000\$$ .

Процентные деньги за первый год составят  $5000 \cdot 0,1 = 500\$$ . Таким образом, в конце первого года должник выплатит 1500\$ (1000+500).

На начало второго года основной долг уменьшится на 1000\$ и составит 4000\$. Следовательно, процентные деньги за второй год составят  $4000 \cdot 0,1 = 400\$$ . Вместе с суммой, направленной на погашение основного долга, это составит 1400 \$, и т. д.

Таким образом, схема погашения долга следующая:



5000	4000	3000	2000	1000	0
0	1	2	3	4	5
	1000	1000	1000	1000	1000
	+	+	+	+	+
	500	400	300	200	100
	=	=	=	=	=
	1500	1400	1300	1200	1100

### 7.7. Погашение займа равными годовыми выплатами

Пусть заем выдан на  $n$  лет под  $i$  сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого периода выплачивается одинаковая сумма  $R$ .

Выплаты  $R$  можно рассматривать как годовую ренту длительностью  $n$  лет с годовым платежом  $R$ . Приравняем современную величину этой ренты величине займа. Тогда

$$D = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i},$$

где  $\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$  - коэффициент приведения ренты.

Отсюда определим величину годового платежа:  $R = \frac{Di}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$ .

**Пример.** Заем 5000 \$ выдан на 5 лет под сложные проценты 10% годовых. Найдите величину годового платежа, если долг должен быть погашен равными годовыми выплатами.

Решение:  $D = 5000\$; n = 5 \text{ лет}; i = 0,1$ .

$$R = \frac{5000 \cdot 0,1}{1 - \frac{1}{1,1^5}} = \frac{500}{1 - \frac{1}{1,61051}} = \frac{500}{1 - 0,6209} = \frac{500}{0,3779} = 1323 \text{ долл.}$$

### 7.8. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год

Пусть выплаты размером  $Y$  производятся  $m$  раз в году в течение  $n$  лет. Тогда количество выплат составит  $m \cdot n$ . На эти выплаты начисляют

проценты  $m$  раз в году по ставке  $\frac{i}{m}$ . Выплаты образуют ренту. Ее наращенная величина может быть определена по формуле:

$$FV_f = Y \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{i}{m}}$$

Пусть  $D$  - размер займа. Наращенная величина займа к концу срока составит:

$$D \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Составим уравнение эквивалентности, приравняв приведенные к концу срока финансовой операции величины займа и ренты:

$$D \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = Y \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{i}{m}}.$$

Из этого равенства определим размер выплаты  $Y$ .

$$Y = \frac{D \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \cdot \frac{i}{m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1};$$

**Пример.** Заем в 10000 \$ выдан на 3 года под 12 сложных годовых процентов. Выплаты производятся

а) ежеквартально ( $m = 4$ )

б) ежемесячно ( $m = 12$ )

Найти величину разовой выплаты.

Решение:  $D = 10000\$; n = 3 \text{ года}; i = 0,12$ .

а)  $m = 4$ .

$$Y = \frac{10000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{3 \cdot 4} \cdot \frac{0,12}{4}}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{12} - 1} = \frac{10000 \cdot 1,4258 \cdot 0,03}{1,4258 - 1} = 1004,56 \text{ долл.}$$

б)  $m = 12$ .

$$Y = \frac{10000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{3 \cdot 12} \cdot \frac{0,12}{12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{36} - 1} = \frac{10000 \cdot 1,4308 \cdot 0,01}{1,4308 - 1} = 332,13\$.$$

**Пример.** Заем в 500 000 руб. выданный на 5 лет под 10% сложных годовых, должен быть погашен ежеквартальными выплатами. Найти величину разовой выплаты.

Решение:  $D = 500000 \text{ руб.}; n = 5 \text{ лет}; m = 4; i = 0,1$ .

$$Y = \frac{500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 5} \cdot \frac{0,1}{4}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1} = \frac{500000 \cdot 1,6386 \cdot 0,025}{1,6386 - 1} = 32074,07\$.$$

## 7.9. Формирование погасительного фонда

Долг может погашаться различными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить долг с процентами одним платежом в конце срока. Очевидно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность поместить деньги погасительного фонда под более высокие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Пусть заем размером  $D$  взят в начале года на  $n$  лет под ставку  $i$  сложных процентов в год. Тогда к концу  $n$ -го долг с процентами составит  $D(1+i)^n$ . Ежегодные платежи в погасительный фонд образуют ренту с годовым платежом  $R$  и годовой ставкой сложных процентов  $g > i$ .

Тогда в фонде к концу  $n$ -го года накопится сумма  $R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$ , из которой и будет погашен заем величиной  $D(1+i)^n$ .

Величина разовых платежей может быть определена из равенства:

$$D(1+i)^n = R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}.$$

**Пример.** Льготный кредит в 9000 \$ взят под 4% годовых на 10 лет. Заемщик имеет возможность поместить валютные средства под 8% годовых. Он намерен образовать погасительный фонд, перечисляя определенную сумму денег в конце каждого года. Определить размер ежегодного платежа в погасительный фонд.

Решение:  $D = 9000\$; n = 10 \text{ лет}; i = 0,04; g = 0,08$ .

Для того, чтобы погасить долг с процентами, необходимо к концу срока накопить в фонде следующую сумму:

$$D(1+i)^n = 9000(1,04)^{10} = 9000 \cdot 1,4802 = 13321,8\$.$$

Для того, чтобы определить размер ежегодного платежа в накопительный фонд, составим следующее уравнение:

$$R \cdot \frac{(1+0,08)^{10} - 1}{0,08} = 13321,8.$$

Разрешив его относительно R, получим величину годового платежа:

$$R = \frac{13321,8}{14,4866} = 919,6\$.$$

## **Раздел 8. ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В ИНВЕСТИЦИОННОМ АНАЛИЗЕ**

### **8.1. Основные понятия инвестиционного анализа**

Латинское слово *invest* означает «вкладывать». Вложение денежных средств и других капиталов в реализацию различных экономических проектов или в ценные бумаги с целью получения прибыли, называется *инвестированием*, а сами вкладываемые средства *инвестициями*. Целью инвестирования является получение прибыли, увеличение капиталов.

Важнейшими задачами анализа инвестиционных проектов является определение их финансовой эффективности и сравнение эффективности альтернативных инвестиционных проектов с целью выбора наилучшего из возможных вариантов инвестирования.

Инвестиционные проекты являются *альтернативными*, если реализация одного из них исключает возможность реализации другого. Например, частный инвестор приобретает акции компании «Норильский никель» на сумму 2,5 млн. рублей. В этом случае эти деньги уже не могут быть положены на депозит в Сбербанк. Следовательно, эти варианты инвестирования денежных средств являются альтернативными. Для выбора наилучшего варианта инвестирования необходимо провести инвестиционный анализ.

Один из ключевых моментов при принятии инвестиционных решений составляет оценка эффективности предполагаемых капиталовложений. Существующие методы оценки инвестиций можно разбить на две группы: статические или учетные и динамические, учитывающие фактор времени.

Динамические методы отражают наиболее современные подходы к оценке эффективности инвестиций. Они преобладают в практике крупных и средних предприятий развитых стран. Эти методы часто называют дисконтными, поскольку они базируются на определении современной величины денежных потоков, связанных с реализацией инвестиционного проекта.

## 8.2. Методы оценки эффективности реальных инвестиций на основе расчета чистого приведенного дохода

Методика определения чистого приведенного дохода NPV (Net Present Value) заключается в суммировании дисконтированных сальдо потоков реальных денег в течение расчетного периода времени.

Определяя коэффициент дисконтирования, обычно исходят из гарантированного уровня доходности финансовых инвестиций, который обеспечивается государственным банком по вкладам или при операциях с ценными бумагами. При этом часто предусматривается надбавка за риск, причем, чем рискованнее проект, тем больше размер надбавки. Т.о. процентная ставка, используемая в качестве коэффициента дисконтирования имеет вид:  $r = i + gr$ , где  $i$  – безрисковая доходность (процентная ставка по банковским депозитам или ставка доходности государственных облигаций),  $gr$  – надбавка за риск.

Рассматриваемый проект может быть признан эффективным, если чистый приведенный доход положителен ( $NPV > 0$ ), значит проект доходный. При сравнении вариантов осуществления инвестиционных проектов одинаковой продолжительности следует руководствоваться критерием максимума чистого приведенного дохода ( $NPV \rightarrow \max$ ). Если рассматриваемые варианты различаются продолжительностью расчетного периода, то в качестве ключевого оценочного показателя используется среднегодовой чистый приведенный доход. Следовательно, и выбор наилучшего варианта осуществляется по критерию максимума среднегодового значения NPV.

При однократном инвестировании для оценки NPV производится сопоставление величины исходной инвестиции (IC) с общей суммой дисконтированных чистых денежных поступлений в течение прогнозируемого срока. Приток денежных средств осуществляется в различные моменты времени. В соответствие с этим он дисконтируется с помощью коэффициента  $r$ , устанавливаемого аналитиком (инвестором) самостоятельно, исходя из ежегодного процента возврата, который он хочет или может иметь на инвестируемый им капитал. Допустим, прогнозируется, что в результате инвестирования средств в объем IC в течение  $n$  лет будут поступать годовые доходы в размере  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Общая накопленная величина дисконтированных доходов в этом случае определяется по формуле:

$$\frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k},$$

Тогда чистый приведенный доход равен:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC.$$

Очевидно, что если  $NPV > 0$ , то проект прибыльный, его следует принять, если  $NPV < 0$ , то проект убыточный, его следует отвергнуть, если  $NPV = 0$ , то проект ни прибыльный, ни убыточный.

**Пример.** Требуется проанализировать проект со следующими характеристиками по годам: - 150;30;70; 70;30 млн. рублей. Требуемая норма доходности по проекту 12%.

Решение:  $IC = 150 \text{ млн. руб.}; P_1 = 30; P_2 = 70; P_3 = 70; P_4 = 30 \text{ млн. руб.}; i = 0,12$ .

Определим чистый приведенный доход:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC = \frac{30}{1+0,12} + \frac{70}{(1+0,12)^2} + \frac{70}{(1+0,12)^3} + \frac{30}{(1+0,12)^4} - 150 = 0,93 > 0$$

Поскольку чистый приведенный доход положителен (составляет 930 тысяч рублей), то проект принимается, так как является прибыльным.

Если предполагается не разовое инвестирование финансовых ресурсов, а последовательное в течение  $m$  лет в объемах  $IC_0; IC_1; \dots; IC_m$ , то формула для вычисления  $NPV$  будет иметь вид:

$$NPV = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j}$$

**Пример.** Мясокомбинат планирует приобрести новое оборудование. Для этого необходимо подготовить соответствующее помещение. Подготовка займет несколько месяцев. Подготовительные затраты составят 500 тыс. рублей. Оборудование стоимостью 3 млн. рублей, планируют приобрести в конце первого года и затем эксплуатировать в течение 3 лет. Денежный доход от эксплуатации этого оборудования за этот период по годам составит 1 млн. руб.; 1,5 млн. руб. и 2 млн. руб. соответственно. Оцените этот инвестиционный проект, если требуемый уровень доходности составляет 10%.

Решение: Затраты на подготовку помещения могут рассматриваться как прединвестиционные затраты в 0-вом году.

$IC_0 = 0,5 \text{ млн. руб.}; IC_1 = 3 \text{ млн. руб.}; P_2 = 1 \text{ млн. руб.}; P_3 = 1,5 \text{ млн. руб.}; P_4 = 2,0 \text{ млн. руб.}$

$$NPV = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j} = \frac{1,0}{(1+0,1)^2} + \frac{1,5}{(1+0,1)^3} + \frac{2,0}{(1+0,1)^4} - \frac{0,5}{(1+0,1)^0} - \frac{3,0}{(1+0,1)^1} =$$

$= 0,0921 \text{ млн. рублей}$

Поскольку  $NPV = 92,1 \text{ тыс. руб.} > 0$ , то проект прибыльный.

В случае если в результате инвестирования определенных средств возникает регулярный финансовый поток (финансовая рента), то для оценки  $NPV$  можно использовать теорию финансовых рент.

**Пример.** Некая фирма собирается за 55 млн. рублей приобрести помещение для магазина. Предполагается, что организация продаж в этом магазине обеспечит приток денежных средств в размере 10 млн. рублей на протяжении 10 предстоящих лет. Стандартный уровень доходности по

альтернативным формам инвестирования составляет 9,5%. Решите вопрос о целесообразности приобретения магазина.

Решение:  $IC_0 = 55 \text{ млн.руб.}; R = 10 \text{ млн.руб.}; n = 10 \text{ лет}; i = 0,095$ .

В результате инвестирования средств в размере 55 млн. рублей образовалась финансовая рента длительностью 10 лет с членом, равным 10 млн. рублей. Найдем современную стоимость этой ренты.

$$PV_f = R \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 10 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,095)^{10}}}{0,095} = 62,7880 \text{ млн.руб.}$$

$$NPV = 62,788 - 55,0 = 7,88 \text{ млн.рублей.}$$

Поскольку  $NPV > 0$ , то целесообразно приобрести помещение.

### 8.3. Методы оценки эффективности инвестиций на основе индекса рентабельности

Индекс рентабельности инвестиций – это отношение суммарного дисконтированного сальдо денежного потока, определённого без учёта инвестиций по проекту, к суммарным дисконтированным инвестициям.

В простейшем случае, когда в результате инвестирования средств в размере  $IC$  возникает денежный поток  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , индекс рентабельности инвестиций рассчитывается по формуле:

$$PI = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : IC$$

При неоднократном инвестировании эта формула приобретает вид:

$$PI = \sum_{k=m+1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : \sum_{j=0}^m \frac{IC_j}{(1+r)^j}.$$

В отличие от чистого приведённого дохода индекс рентабельности является относительным показателем. Он характеризует уровень доходов на единицу затрат, т.е. эффективность вложений.

Очевидно, что, если  $PI > 1$ , то проект следует принять. Если  $PI < 1$ , то проект следует отвергнуть. Если  $PI = 1$ , то проект не является ни прибыльным, ни убыточным.

Чем больше значение индекса рентабельности, тем выше отдача от каждого рубля, инвестированного в данный проект, благодаря чему критерий  $PI$  очень удобен при выборе одного проекта из нескольких альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения  $NPV$ , но разные объёмы требуемых инвестиций. Из этих проектов выгоднее тот, который обеспечит большую эффективность вложений.

**Пример.** Предприятие закупило новую технологическую линию за 1000 тыс. руб. Срок эксплуатации оборудования 6 лет. Денежный доход от использования оборудования по годам составит 250; 300; 350; 400; 450;

500 тыс. руб. соответственно. Рассчитать индекс рентабельности, если норма дисконта составляет 20%.

Решение:  $IC = 1000; P_1 = 250; P_2 = 300; P_3 = 350; P_4 = 400; P_5 = 450; P_6 = 500; i = 0,12$ .

$$PI = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} : IC = \left[ \frac{250}{1+0,2} + \frac{300}{(1+0,2)^2} + \frac{350}{(1+0,2)^3} + \frac{400}{(1+0,2)^4} + \frac{450}{(1+0,2)^5} + \frac{500}{(1+0,2)^6} \right] : 1000 = 1160,4 : 1000 = 1,1604.$$

Поскольку индекс рентабельности  $PI = 1,1604 > 1$ , то проект следует принять.

#### 8.4. Методика определения срока окупаемости инвестиций

Срок окупаемости (период возмещения) – это минимальный период времени, в течение которого чистый дисконтированный доход становится положительным. Этот показатель характеризует период времени, в течение которого сделанные инвестором вложения в проект возмещится доходами от его реализации.

Формула для расчета дисконтированного срока окупаемости:

$$DPP = \min n, \text{ при котором выполняется неравенство: } \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k} \geq IC$$

Применяются следующие подходы к оценке инвестиционных проектов по критерию срока окупаемости:

- а) проект принимается, если окупаемость имеет место;
- б) проект принимается только в случае, если срок окупаемости не превышает установленного в компании лимита (например, 5 лет).

**Пример.** Рассчитайте дисконтированный срок окупаемости инвестиционного проекта, характеризующегося по годам следующим денежным потоком:

-250; 100; 150; 160; 100 тысяч рублей. Норма дисконта 11%.

Решение:

Вычисления удобно свести в расчетную таблицу:

(тыс.

рублей)

Годы	Денежный поток	Дисконтный множитель	Дисконтированный денежный поток	Дисконтированный денежный поток нарастающим итогом
0	- 250	1,000	- 250,00	- 250,00
1	100	0,901	90,10	- 159,90
2	150	0,812.	121,80	- 38,10
3	160	0,731	116,96	<b>78,86 &gt; 0</b>
4	100	0,659	65,90	



Как видим, инвестиционный проект полностью окупится в течение трех лет.

Для того, чтобы определить более точное значение DPP, разделим последнее из отрицательных значений в последнем столбце таблицы на следующее за ним число в предпоследнем столбце:  $\frac{38,10}{116,96} = 0,326$ .

Таким образом, DPP= 2, 326 года или 2 года и 119 дней.

### **8.5. Определение внутренней нормы доходности инвестиций**

Внутренняя норма доходности IRR (international rate of return) - показатель, широко используемый при оценке эффективности инвестиционных проектов.

Реализация любого инвестиционного проекта требует привлечения финансовых ресурсов, за которые необходимо платить. Так за заемные средства платят проценты, за привлеченный акционерный капитал - дивиденды и т.д.

Показатель, характеризующий относительный уровень этих расходов, является ценой за использованный (авансируемый) капитал. При финансировании проекта из различных источников этот показатель определяется по формуле средней арифметической взвешенной.

Чтобы обеспечить доход от инвестированных средств или, по крайней мере, их окупаемость, необходимо добиться такого положения, когда чистая текущая стоимость будет больше нуля или равна нулю.

Для этого необходимо подобрать такую процентную ставку дисконтирования членов потока платежей, которая обеспечит получение неотрицательного чистого приведенного дохода ( $NPV \geq 0$ ).

Такая ставка должна отражать ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке с учетом фактора риска.

Поэтому под внутренней нормой доходности понимают ставку дисконтирования, использование которой обеспечивает равенство текущей стоимости денежных оттоков и текущей стоимости ожидаемых денежных притоков, т.е. при начислении на сумму инвестиций процентов по ставке, равной внутренней норме доходности, обеспечивается получение распределенного по времени дохода.

Показатель внутренней нормы доходности – IRR характеризует максимально допустимый относительный уровень расходов, которые могут быть произведены при реализации данного проекта.

Например, если для реализации проекта получена банковская ссуда, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным.

Таким образом, смысл этого показателя заключается в том, что инвестор должен сравнить полученное значение IRR с ценой привлеченных финансовых ресурсов (cost of capital - CC).

Если  $IRR > CC$ , то проект следует принять;

$IRR < CC$  – проект следует отвергнуть;

$IRR = CC$  – проект ни прибыльный, ни убыточный.

Практическое применение данного метода сводится к последовательной итерации, с помощью которой находится дисконтирующий множитель, обеспечивающий равенство  $NPV = 0$ .

При этом алгоритм решения следующий.

Ориентируясь на существующие в момент анализа процентные ставки на ссудный капитал, выбирают два значения коэффициента дисконтирования  $r_1 < r_2$  таким образом, чтобы в интервале  $[r_1, r_2]$  функция  $NPV = f(r)$  меняла свое значение с «+» на «-» или наоборот. Затем используют формулу:

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1),$$

где  $r_1$  - значение процентной ставки в дисконтном множителе, при котором  $f(r_1) > 0$  ( $f(r_1) < 0$ );

$r_2$  - значение процентной ставки в дисконтном множителе, при котором  $f(r_2) < 0$  ( $f(r_2) > 0$ ).

Точность вычислений обратно пропорциональна длине интервала  $[r_1, r_2]$ . Наиболее точный результат достигается в случае, когда длина интервала минимальна, т.е. когда  $r_1$  и  $r_2$  - ближайшие друг к другу значения коэффициента дисконтирования, в случае изменения знака NPV с «+» на «-» удовлетворяющие условиям:

$r_1$  - значение коэффициента дисконтирования, минимизирующее положительное значение NPV, т.е.  $NPV(r_1) = \min\{NPV(r) > 0\}$ ;

$r_2$  - значение коэффициента дисконтирования, максимизирующее отрицательное значение показателя NPV, т.е.  $NPV(r_2) = \max\{NPV(r) < 0\}$  в случае изменения знака NPV с «+» на «-»).

Подобным же образом описывается ситуация для случая когда функция меняет знак с «-» на «+».

**Пример.** Определить значение внутренней нормы доходности IRR для проекта, рассчитанного на 3 года, требующего инвестиции в размере 20 млн. руб. и имеющего предполагаемые денежные поступления в размере 6 млн. руб. (первый-год), 8 млн.руб. (второй год) и 14 млн.руб. (третий год).

Решение:

Возьмем два произвольных значения процентной ставки для коэффициента дисконтирования  $r_1 = 15\%$  и  $r_2 = 20\%$ .

Соответствующие расчеты сведем в таблицу:

Год	Денежный поток	Расчет I		Расчет II	
		Дисконтный множитель для $r_1=15\%$	$NPV(r_1)$	Дисконтный множитель для $r_2=20\%$	$NPV(r_2)$
0-й	-20,0	1,0	-20,0	1,0	-20,0
1-й	6,0	0,8696	5,2176	0,8333	4,9998
2-й	8,0	0,7561	6,0488	0,6944	5,5552
3-й	14,0	0,6575	9,2050	0,5787	8,1018
$\Sigma$			+0,4714		-1,3432

Для расчета IRR применим формулу:

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1) = 15 + \frac{0,4714}{0,4714 - (-1,3432)}(20 - 15) =$$

$$= 15 + \frac{0,4714}{1,8146} \cdot 5 = 15 + 1,30 = 16,3\%$$

Уточним величину ставки. Для этого примем значения процентных ставок, равными  $r_1=16\%$  и  $r_2=17\%$ , т.к.  $16,3 \in (16, 17)$ .

Произведем новый расчет.

Год	Денежный поток	Расчет I		Расчет II	
		Дисконтный множитель для $r_1=16\%$	$NPV(r_1)$	Дисконтный множитель для $r_2=17\%$	$NPV(r_2)$
0-й	-20,0	1,0	-20,0	1,0	-20,0
1-й	6,0	0,8662	5,1972	0,8547	5,1282
2-й	8,0	0,7432	5,9200	0,7305	5,8440
3-й	14,0	0,6407	8,9698	0,6244	8,7416
$\Sigma$			+0,0870		-0,2862

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1) = 16 + \frac{0,0870}{0,0870 - (-0,2862)}(17 - 16) =$$

$$= 16 + \frac{0,0870}{0,3732} \cdot 1 = 16 + 0,23 = 16,23\%$$

Таким образом,  $IRR=16,23$  является верхним пределом процентной ставки, по которой фирма может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта. Для получения прибыли фирма должна брать кредит по ставке менее 16,23%.

## Раздел 9. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

### 9.1. Модель оценка финансовых активов

Ценные бумаги классифицируются по ряду признаков. Подробно классификация ценных бумаг рассматривается в курсе «Рынок ценных бумаг». Мы остановимся на наиболее существенных для проведения инвестиционного анализа признаках: функциональное назначение; срок обращения и доход по ценным бумагам.

По функциональному назначению ценные бумаги подразделяются на *долговые и долевого ценные бумаги и платежные документы*.

К долговым ценным бумагам относятся облигации, депозитные и сберегательные сертификаты, банковские книжки на предъявителя.

К долевым ценным бумагам относятся акции.

К платежным документам относятся векселя и чеки.

Обращение ценных бумаг всегда ограничено временными рамками. Существуют ценные бумаги со сроком обращения до одного года, так называемые краткосрочные ценные бумаги. Ценные бумаги, которые имеют срок обращения от одного до пяти лет, называются среднесрочными, а более пяти лет – долгосрочными.

Доходом по ценным бумагам могут быть процентные выплаты в денежной форме, в виде купонных выплат, дивидендов. Все зависит от того, каков порядок погашения, выплаты дохода, и в какой форме доход заложен в условиях выпуска, обращения и погашения ценных бумаг. Согласно этому признаку классификации ценные бумаги можно представить как процентные с постоянным и переменным доходом, купонные, дисконтные, выигрышные и дивидендные.

Рассмотрим, что представляют собой такие виды ценных бумаг, как облигации, акции и векселя.

*Облигация* – это кредитная ценная бумага, удостоверяющая внесение средств ее владельцем и подтверждающая право владельца требовать ее погашения (выплату номинальной стоимости или номинальной стоимости и процентов) в установленные сроки. При этом условия и сроки погашения (в том числе досрочного) оговариваются в решении о выпуске облигаций.

Доход по облигациям может быть представлен, как разница между ценой покупки и ценой продажи (погашения). Такой вид дохода называется дисконтным. Кроме того, доход может быть в виде процентного (купонного) дохода.

*Акции* – ценные бумаги, выпускаемые акционерным обществом, свидетельствующие о вложении их владельцами определенной суммы денег в капитал акционерного общества и дающие право получать

ежегодный доход – дивиденд. Дивиденды выплачиваются из чистой прибыли общества.

Акции бывают привилегированные и обыкновенные. Владельцы привилегированных акций получают дивиденды обычно в виде не зависящего от размера прибыли процента, Владельцы обыкновенных акций получают часть прибыли, которая остается после оплаты привилегированных акций. Обыкновенные акции дают возможность участвовать в управлении акционерным обществом и получать интересующую акционера информацию. (Облигации такого права не дают). Владельцы привилегированных акций не имеют права голоса.

*Вексель* представляет собой разновидность письменного долгового обязательства векселедателя оплатить сумму, указанную на векселе, его владельцу (векселедержателю) при наступлении срока платежа или по его предъявлению.

Инвестор, принимая решение о целесообразности приобретения той или иной ценной бумаги, пытается оценить экономическую эффективность планируемой операции. При этом он ориентируется на абсолютные или на относительные показатели. В первом случае речь может идти о цене или стоимости актива, во втором — о его доходности.

Логика рассуждений инвестора в первом случае такова. Ценная бумага имеет две взаимосвязанные абсолютные характеристики: объявленную текущую рыночную цену ( $P_m$ ), по которой ее можно приобрести на фондовом рынке, и теоретическую, или внутреннюю, стоимость ( $V_t$ ).

Обе характеристики динамично меняются во времени, и с позиции конкретного инвестора часто не совпадают. Дело в том, что по сравнению с ценой, которая реально существует и объективна, поскольку она объявлена и ценная бумага по ней равнодоступна любому участнику рынка, внутренняя стоимость гораздо более неопределенна и субъективна. Под субъективностью в данном случае понимается то обстоятельство, что каждый инвестор имеет свой взгляд на внутреннюю стоимость актива, полагаясь в ее оценке на результаты собственного субъективного анализа.

Любая ценная бумага имеет внутренне присущую ей ценность, которая может быть количественно оценена как дисконтированная стоимость будущих поступлений, генерируемых этой бумагой, т.е. при ее оценке нужно двигаться от будущего к настоящему. Все дело лишь в том, насколько точно удастся предсказать эти поступления, анализируя общую ситуацию на рынке, инвестиционную и дивидендную политику компании, инвестиционные возможности и т.п. Текущая внутренняя стоимость ( $V_t$ ) любой ценной бумаги в общем виде может быть рассчитана по формуле:

$$V_t = \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_k}{(1+r)^k} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k},$$

Где  $P_1; P_2; \dots; P_k; \dots; P_n$  – предполагаемые поступления,  $r$  – требуемая данным инвестором норма прибыли,  $n$  – период финансовой операции.

Подставляя в эту формулу значения предполагаемых поступлений, требуемую норму доходности и продолжительность периода прогнозирования, можно рассчитать текущую внутреннюю стоимость любого финансового актива. Именно такой подход чаще всего и используется потенциальными инвесторами.

Как видно из формулы оценка теоретической стоимости зависит от трех параметров: ожидаемые денежные поступления, горизонт прогнозирования и норма прибыли, причем последний параметр, вероятно, наиболее существен. Дело в том, что первые два параметра тесно привязаны непосредственно к базисному активу и потому обладают большей степенью объективности. Приемлемая норма прибыли, закладываемая инвестором в анализ, в этом случае в принципе не имеет отношения к базисному активу – она лишь отражает доходность альтернативных вариантов вложения капитала, доступных возможно лишь данному инвестору, что и предопределяет выбор этого параметра. Вот почему именно нормой прибыли обычно варьируют инвесторы в процессе имитационного моделирования. В частности, приемлемая норма прибыли может устанавливаться инвестором такими же способами, как и при определении процентной ставки в множителе дисконтирования:  $r = i + r_p$ , где  $i$  – безрисковая доходность (процентная ставка по банковским депозитам или ставка доходности государственных облигаций),  $r_p$  – надбавка за риск.

В качестве относительной оценки финансового актива может служить один из показателей, измеряющих доходность:

а) обычная годовая ставка процентов, рассчитанная по формуле:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n},$$

б) сложная годовая ставка процентов:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

## 9.2. Оценка облигаций

По способам выплаты дохода различают *облигации с фиксированной или плавающей купонной ставкой* и *облигации с нулевым купоном*. Для облигации с нулевым купоном эмиссионный курс устанавливается ниже номинального. Разница между ценой приобретения облигации и ценой ее погашения представляет собой доход инвестора. Периодическая выплата процентов по купонным облигациям осуществляется по купонам — вырезным талонам с напечатанной на нем цифрой купонной ставки. Периодичность выплаты процента по облигации определяется условиями

займа. Она может быть квартальной, полугодовой или годовой. При прочих равных условиях, чем чаще начисляется доход, тем облигация выгоднее, тем выше ее рыночная цена.

Облигации могут быть охарактеризованы различными стоимостными показателями, основными из которых являются нарицательная (или номинальная), а также выкупная и рыночная цены. *Нарицательная стоимость* напечатана на самой облигации и используется чаще всего в качестве базы для начисления процентов. Этот показатель имеет значение только в двух случаях: в момент выпуска облигации при установлении цены размещения, а также в моменты начисления процентов, если они привязаны к номиналу. В период размещения облигационного займа цена облигации, как правило, совпадает с ее нарицательной стоимостью.

*Выкупная цена* (синонимы: цена досрочного погашения, отзывная цена) — это цена, по которой производится выкуп облигации эмитентом по истечении срока облигационного займа или до этого момента, если такая возможность предусмотрена условиями займа. Эта цена совпадает с нарицательной стоимостью, как правило, в том случае, если заем не предполагает досрочного его погашения.

*Рыночная* (курсовая) цена облигации определяется конъюнктурой рынка. Значение рыночной цены облигации ( $P_m$ ) в процентах к номиналу ( $M$ ) называется *курсом* облигации. Как уже отмечалось выше, эта цена может не совпадать с текущей внутренней стоимостью облигации.

Курс облигации определяется из выражения  $\frac{P_m}{M} \cdot 100\%$

**Пример.** Облигация номиналом 500 руб. продается по цене 465 руб., определите ее курс.

$$\frac{P_m}{M} \cdot 100\% = \frac{465}{500} \cdot 100\% = 93\% .$$

### 9.3. Оценка облигаций с нулевым купоном

Поскольку денежные поступления по годам, за исключением последнего года, равны нулю, формула  $V_t = \frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n}$  принимает вид:

$$V_t = \frac{C}{(1+r)^n},$$

где  $C$  — сумма, выплачиваемая при погашении облигации;

$n$  — число лет, через которое произойдет погашение облигации.

**Пример.** Облигации с нулевым купоном нарицательной стоимостью 1000 руб. и сроком погашения через пять лет продаются за 560,35 руб. Проанализировать целесообразность приобретения этих облигаций, если имеется возможность альтернативного инвестирования с нормой прибыли 14%.

Решение:

Анализ можно выполнять разными способами.

**1 способ.**  $C = 1000 \text{ тыс. руб.}; r = 0,14; n = 5 \text{ лет.}$

Рассчитать теоретическую стоимость облигации и сравнить ее с текущей ценой:

$$V_t = \frac{1000}{(1 + 0,14)^5} = 1000 \cdot 0,5194 = 519,4 \text{ рублей.}$$

Расчет показывает, что приобретение облигаций является невыгодным вложением капитала, поскольку стоимость каждой облигации с позиции инвестора (519,4 руб.) меньше, чем цена, по которой продается облигация (560,35 руб.).

**2 способ.** Исчислить доходность данной облигации в виде эффективной годовой процентной ставки, если  $FV = 1000 \text{ руб.}; PV = 560,35 \text{ руб.}; n = 5 \text{ лет.}$

$$i = \sqrt[5]{\frac{1000}{560,35}} - 1 = 0,1228, \text{ или } 12,28\%$$

Поскольку доходность данных облигаций (12,28%) меньше альтернативной (14%), то их приобретение нецелесообразно.

#### 9.4. Оценка бессрочных облигаций

Бессрочная облигация предусматривает неопределенно долгую выплату дохода в установленном размере  $A$ . В этом случае имеем вечную ренту постнумерандо ( $P_k = A$  для любого  $k$ ), и формула  $V_t = \sum_k \frac{P_k}{(1 + r)^k}$

принимает вид  $V_t = \frac{A}{r}$ .

**Пример.** Определить теоретическую стоимость бессрочной облигации, если выплачиваемый по ней годовой доход составляет 1 тыс. руб., а приемлемая норма прибыли — 16%.

Решение:  $A = 1000 \text{ руб.}; r = 0,16$ .

Теоретическая стоимость бессрочной облигации:  $V_t = \frac{A}{r} = \frac{1000}{0,16} = 6250 \text{ руб.}$



Таким образом, в условиях равновесного рынка в данный момент времени облигации такого типа будут продаваться по цене равной 6250 руб. По мере изменения рыночной нормы прибыли цена облигации может меняться.

### 9.5. Оценка облигаций с фиксированной купонной ставкой

Денежный поток при оценке облигаций фиксированной купонной ставкой (с постоянным доходом) складывается из одинаковых по годам поступлений  $A$  и нарицательной стоимости облигации  $M$ , выплачиваемой в момент погашения. Так как поступления по купонам образуют постоянную ренту постнумерандо с членом, равным  $A$ , то теоретическая стоимость облигации определяется по формуле:

$$V_t = \sum_{k=1}^n \frac{A}{(1+r)^k} + \frac{M}{(1+r)^n} = A \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} + \frac{M}{(1+r)^n}$$

**Пример.** Номинал облигации, до погашения которой остается пять лет, равен 1000 руб., купон 10% выплачивается один раз в год. Определить цену облигации, чтобы она обеспечила покупателю доходность до погашения в размере 15% годовых.

Решение:  $M = 1000 \text{ руб.}; A = 1000 \cdot 0,1 = 100 \text{ руб.}; n = 5 \text{ лет}; r = 0,15$ .

Так как в конце каждого года инвестор будет получать 100 руб., то теоретическая стоимость облигации составит:

$$V_t = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,15^5}}{0,15} + \frac{1000}{1,15^5} = 100 \cdot 3,3522 + 1000 \cdot 0,4972 = 335,22 + 497,2 = 832,42 \text{ руб.}$$

Курсовая цена облигации при этом равняется:

$$\frac{V_t}{M} \cdot 100\% = \frac{832,42}{1000} \cdot 100\% = 83,24\%$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: начисление сложных процентов по ставке 15% годовых на цену облигации (832,42 руб.) равноценно выплатам купонного дохода (ежегодно по 100 руб.) и суммы (1000 руб.) для погашения облигации в конце срока.

### 9.6. Операции с акциями. Оценка привилегированных акций

Акция представляет собой долевою ценную бумагу, свидетельствующую об участии ее владельца в собственном капитале компании. Обыкновенная акция дает право на получение плавающего дохода, т.е. дохода, зависящего от

результатов деятельности общества, а также право на участие в управлении (одна акция — один голос).

Владелец привилегированной акции, как правило, имеет преимущественное право по сравнению с владельцем обыкновенной акции на получение дивидендов, в форме гарантированного фиксированного процента, а также на долю в остатке активов при ликвидации общества. Дивиденды по таким акциям в большинстве случаев должны выплачиваться независимо от результатов деятельности общества и до их распределения между держателями обыкновенных акций. Таким образом, привилегированные акции являются менее рискованными вложениями средств, однако это отражается на величине дивидендов, уровень которых в среднем, как правило, более низок по сравнению с уровнем дивидендов, выплачиваемых по обыкновенным акциям. Кроме того, привилегированная акция не дает право на участие в управлении обществом, если иное не предусмотрено уставными документами.

Стоимость акции, указанная на ее бланке называется *номинальной стоимостью* акции.

*Внутренняя стоимость* представляет собой расчетный показатель, который исчисляется по формуле:  $V_t = \sum_k \frac{P_k}{(1+r)^k}$ , где  $P_k$  — ожидаемое денежное поступление в  $k$ -м периоде;  $r$  — приемлемая доходность.

*Эмиссионная цена* представляет собой цену, по которой акция эмитируется, т.е. продается на первичном рынке. Эта цена может отличаться от номинальной стоимости.

Для учета и анализа наибольшее значение имеет *курсовая (текущая рыночная) цена*. Именно по этой цене акция *котируется* (оценивается) на вторичном рынке ценных бумаг. Курсовая цена зависит от разных факторов: конъюнктура рынка, рыночная норма прибыли, величина и динамика дивиденда, выплачиваемого по акции, и др. Она может определяться различными способами, однако в основе их лежит один и тот же принцип: сопоставление дохода, приносимого данной акцией, с рыночной нормой прибыли. В качестве показателя дохода можно использовать либо дивиденд, либо величину чистой прибыли, приходящейся на акцию.

Оценка целесообразности приобретения акций, как и в случае с облигациями, предполагает расчет теоретической стоимости акции и сравнения ее с текущей рыночной ценой.

*Привилегированные акции*, как и бессрочные облигации, генерируют доход  $P_k = D$ , где  $D$  — дивиденд, неопределенно долго, поэтому их текущая теоретическая стоимость определяется по формуле современной стоимости вечной ренты:  $V_t = \frac{D}{r}$ . Таким образом, наиболее простым вариантом оценки привилегированной акции является отношение величины дивиденда

к рыночной норме прибыли по акциям данного класса риска (например, ставке банковского процента по депозитам с поправкой на риск).

### 9.7. Модели оценки обыкновенных акций

Наиболее распространенным методом оценки акций является метод, основанный на оценке их будущих поступлений, т.е. на применении формулы  $V_t = \sum_k \frac{P_k}{(1+r)^k}$ . В зависимости от предполагаемой динамики дивидендов конкретное представление этой формулы меняется. Базовыми являются три варианта динамики прогнозных значений дивидендов:

- дивиденды не меняются;
- дивиденды возрастают с постоянным темпом прироста;
- дивиденды возрастают с изменяющимся темпом прироста.

*Вариант с неизменными дивидендами* аналогичен ситуации с привилегированными акциями, т.е. применяется формула  $V_t = \frac{D}{r}$ , где  $D$  – размер дивиденда,  $r$  – требуемая норма прибыли. Если выплачиваются одинаковые дивиденды в течение всего времени, темп прироста дивидендов равен нулю и соответствующая модель называется *моделью нулевого роста*.

**Пример.** Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 6 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 35 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 15% годовых?

Решение:  $D = 6000 \text{ руб.}; r = 0,15$ .

Из формулы  $V_t = \frac{D}{r}$  следует, что истинная стоимость акции составляет  $V_t = \frac{D}{r} = \frac{6000}{0,15} = 40000 \text{ руб.}$ , следовательно, целесообразно приобрести акции по предлагаемой цене 35 тыс. руб.

*Вариант с постоянными темпами роста дивидендов.* В этом случае предполагается, что выплачиваемые дивиденды растут от периода к периоду в одной пропорции. Соответствующая модель называется *моделью постоянного роста*.

Пусть базовая величина дивиденда (т.е. последнего выплаченного дивиденда) равна  $D$ . Ожидается, что дивиденды будут ежегодно увеличиваться с темпом прироста  $g$ . Тогда по окончании первого года периода прогнозирования будет выплачен дивиденд в размере  $D(1+g)$ , по окончании второго года –  $D(1+g)^2$ , по окончании  $k$ -го года – в размере  $D(1+g)^k$  и т.д. Тогда формула  $V_t = \sum_k \frac{P_k}{(1+r)^k}$  примет вид:

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^k}{(1+r)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} D \cdot \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^k$$

Последнее выражение представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом  $D$  и знаменателем  $\left( \frac{1+g}{1+r} \right)$ . Как известно, при  $\left( \frac{1+g}{1+r} \right) < 1$ , т. е.

при  $r > g$ , ее сумма может быть найдена по формуле:

$$\frac{D}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{D \cdot (1+r)}{1+r-1-g} = \frac{D \cdot (1+r)}{r-g}.$$

$$\text{Следовательно, } V_t = \frac{D \cdot (1+r)}{r-g}.$$

Данная формула называется моделью Гордона и имеет смысл при  $r > g$ . Очевидно, что числитель формулы этой представляет собой первый ожидаемый дивиденд фазы постоянно роста.

**Пример.** Компания за прошедший год выплатила 2,7 тыс. руб. на акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 4% ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделать вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 20 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 14% годовых.

Решение:  $D = 2,7 \text{ тыс. руб.}; g = 0,04; r = 0,14.$

Определим теоретическую стоимость акции:

$$V_t = \frac{D \cdot (1+g)}{r-g} = \frac{2,7 \cdot (1+0,04)}{0,14-0,04} = 28,08 \text{ тыс. руб.}$$

Так как стоимость акции с позиции инвестора превышает ее цену 20 тыс. руб., то имеет смысл приобрести акцию.

*Вариант с изменяющимися темпами прироста дивидендов.* При оценке акций, дивиденды которых возрастают с изменяющимся темпом прироста, используется *модель переменного роста*.

а) Предположим, что инвестор прогнозирует, что с высокой вероятностью наступит такой период  $S$ , после которого дивиденды будут расти с постоянным темпом  $g$ . До наступления  $S$ -го периода инвестор прогнозирует величину дивидендов по годам в размере:  $D_1; D_2; \dots; D_s$ .

В этом случае теоретическая стоимость акции определяется по формуле:

$$V_t = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_s}{(1+r)^s} + \frac{D_s(1+g)}{r-g} \cdot \frac{1}{(1+r)^s}.$$

**Пример.** В течение последующих четырех лет компания планирует выплачивать дивиденды соответственно по 1,2; 1,8; 2; 2,4 долл. на акцию. Ожидается, что в дальнейшем дивиденд будет увеличиваться равномерно с темпом 5% в год. Рассчитайте теоретическую стоимость акции, если рыночная норма прибыли составляет 14%.

Решение:  $D_1 = 1,2\$$ ;  $D_2 = 1,8\$$ ;  $D_3 = 2,0\$$ ;  $D_4 = 2,4\$$ ;  $g = 0,05$ ;  $r = 0,14$ ;  $S = 4$ .

Теоретическая стоимость акции:

$$V_t = \frac{1,2}{1+0,14} + \frac{1,8}{(1+0,14)^2} + \frac{2}{(1+0,14)^3} + \frac{2,4}{(1+0,14)^4} + \frac{2,4 \cdot (1+0,05)}{0,14-0,05} \cdot \frac{1}{(1+0,14)^4} = 21,79 \text{ долл.}$$

Таким образом, в условиях эффективного рынка акции данной компании на момент оценки должны продаваться по цене, примерно равной 21,79 долл.

б) Согласно формуле Гордона текущая цена обыкновенной акции очень чувствительна к параметру  $g$ : даже незначительное его изменение может существенно повлиять на цену. Поэтому в расчетах иногда пытаются разбить интервал прогнозирования на подынтервалы, каждый из которых характеризуется собственным темпом прироста. Так, если выделить два подынтервала с темпами прироста  $g$  и  $q$  соответственно, то формула

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^k}{(1+r)^k} \text{ принимает вид:}$$

$$V_t = D_0 \cdot \sum_{k=1}^s \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k} + D_s \cdot \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(1+q)^k}{(1+r)^k} = D_0 \cdot \sum_{k=1}^s \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k} + \frac{D_s(1+q)}{r-q} \cdot \frac{1}{(1+r)^s}$$

где  $D_0$  — дивиденд, выплаченный в базисный момент времени;

$D_s$  — прогноз дивиденда в  $S$ -м периоде

$g$  — прогноз темпа прироста дивиденда в первые  $S$  периодов;

$q$  — прогноз темпа прироста дивидендов в последующие периоды.

**Пример.** За прошедший год компания выплатила в качестве дивидендов по 10\$ на акцию. Ожидается, что в течение следующих трех лет дивиденд будет расти на 3% в год, затем темп прироста снизится до 2% в год на весь оставшийся период. Определить теоретическую стоимость акции, если рыночная норма прибыли составляет 10%.

Решение:  $D_0 = 10\$$ ;  $g = 0,03$ ;  $q = 0,02$ ;  $S = 3$ .

$$D_3 = 10(1+0,03)^3 = 10,927\$.$$

$$V_t = D_0 \cdot \sum_{k=1}^s \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k} + \frac{D_s(1+q)}{r-q} \cdot \frac{1}{(1+r)^s} = 10 \cdot \left( \frac{1,03}{1,1} + \frac{1,03^2}{1,1^2} + \frac{1,03^3}{1,1^3} \right) + \frac{10,927(1+0,02)}{0,1-0,02} \cdot \frac{1}{1,1^3} =$$

$$= 10(0,936 + 0,877 + 0,821) + 139,319 \cdot 0,731 = 26,34 + 101,84 = 128,18\$$$

## 9.8. Оценка доходности операций с акциями

Доходность  $i$  бессрочной привилегированной акции, равно как и обыкновенной акции с неизменным дивидендом, находится по формуле

$$i = \frac{D}{P_m}$$

где  $D$  — ожидаемый дивиденд;

$P_m$  - текущая рыночная цена акции.

**Пример.** Определить доходность привилегированной акции с постоянным дивидендом, равным 60 руб., если ее текущая рыночная цена составляет 1000 руб.

Решение:  $D = 60 \text{ руб.}$   $P_m = 1000 \text{ руб.}$ , тогда  $r = \frac{60}{1000} = 0,06$ , или  $r = 6\%$ .

Если инвестор приобретает акцию с целью продать ее через некоторое время, то доходность операции с акцией можно ориентировочно определить по формуле:

$$i = \frac{D}{P_0} + \frac{\frac{P_1 - P_0}{n}}{P_0}$$

где  $P_0$  — рыночная цена акции на момент покупки;

$P_1$  — ожидаемая цена акции на момент предполагаемой ее продажи;

$n$  — ожидаемое число лет владения акцией;

$D$  — средний дивиденд за  $n$  лет (рассчитывается как среднее арифметическое).

**Пример.** Инвестор приобрел акцию за 5 тыс. руб. и продал через три года за 8 тыс. руб. За первый год инвестору выплатили дивиденд в размере 300 руб., за второй — 450 руб., за третий — 600 руб. Определить доходность операции.

Решение:  $P_0 = 5000 \text{ руб.}$ ,  $P_1 = 8000 \text{ руб.}$ ,  $n = 3$ .

Средний дивиденд за три года:

$$D = \frac{300 + 450 + 600}{3} = 450 \text{ руб.}$$

Определим доходность финансовой операции:

$$i = \frac{450}{5000} + \frac{\frac{8000 - 5000}{3}}{5000} = 0,29.$$

Следовательно, доходность операции с акцией составила 29% годовых.

## 9.9. Расчет доходности по вексельным операциям

Предположим, что вексель продан через некоторое время после его покупки до наступления срока его погашения. Эффективность этой операции может быть измерена с помощью простых или сложных процентов. При этом финансовая результативность зависит от разности цен купли-продажи, которая определяется уровнем учетных ставок и сроками до погашения векселя. Дисконтирование может производиться по простой или сложной учетным ставкам.

Пусть номинал векселя равен  $FV$  рублей. Вексель был куплен по учетной ставке  $d_1$  за  $t_1$  дней до наступления срока.

а). Дисконтирование производится по простой учетной ставке за  $t_1$  дней до срока погашения.

Цена векселя в момент покупки составила  $PV_1 = FV \left( 1 - \frac{t_1}{Y} \cdot d_1 \right)$

$Y$  -временная база учета для вексельных операций, как правило,  $Y = 360$  дней

За  $t_2$  дней до погашения вексель был продан по ставке  $d_2$  по цене

$$PV_2 = FV \left( 1 - \frac{t_2}{Y} \cdot d_2 \right)$$

б) Для средне- и долгосрочных операций с векселями, как правило, применяется сложная учетная ставка.

Пусть цена векселя в момент покупки за  $n_1$  лет до погашения составила:

$$PV_1 = FV(1 - d_1)^{n_1}$$

За  $n_2$  лет до погашения вексель был продан по ставке  $d_2$  по цене

$$PV_2 = FV(1 - d_2)^{n_2}$$

Доходность подобных операций может быть оценена с помощью простой или сложной процентных ставок. В первом случае процентная ставка может быть определена по формуле:

$$i = \frac{PV_2 - PV_1}{PV_1(n_1 - n_2)}$$

Замечание: Для краткосрочного периода  $n_1 = \frac{t_1}{Y}$ ;  $n_2 = \frac{t_2}{Y}$ ;

Во втором случае доходность может быть оценена с помощью сложной процентной ставки по формуле:

$$i = \sqrt[n_1 - n_2]{\frac{PV_2}{PV_1}} - 1$$

**Пример.** Вексель номиналом 100 тыс. рублей куплен за 150 дней до его погашения, простая учетная ставка - 15%. Через 30 дней его реализовали по простой учетной ставке 12%. Оцените эффективность финансовой операции в виде простой процентной ставки.

Решение:  $FV = 100000 \text{ руб.}; t_1 = 150 \text{ дней}; t_2 = 150 - 30 = 120 \text{ дней}; d_1 = 0,15; d_2 = 0,12$ .

Цена векселя в момент покупки:

$$PV_1 = 100000 \left( 1 - \frac{150}{360} \cdot 0,15 \right) = 93750 \text{ рублей}$$

Цена продажи векселя составила:

$$PV_2 = 100000 \left( 1 - \frac{120}{360} \cdot 0,12 \right) = 96000 \text{ рублей}$$

Оценим доходность финансовой операции с помощью простой процентной ставки:

$$i = \frac{96000 - 93750}{93750 \cdot \frac{30}{360}} = \frac{2250 \cdot 360}{93750 \cdot 30} = 0,288 \text{ или } 28,8\%$$

**Пример.** Вексель номиналом 200000 рублей куплен за 5 лет до срока погашения. Сложная учетная ставка - 10%. Через три года его продали по сложной учетной ставке 8%. Оценить эффективность этой финансовой операции в виде сложной учетной ставки.

Решение:

$$FV = 200000 \text{ рублей}, d_1 = 0,1; d_2 = 0,08; n_1 = 5 \text{ лет}, n_2 = 5 - 3 = 2 \text{ года}$$

$$PV_1 = 200000(1 - 0,1)^5 = 118098 \text{ рублей}$$

$$PV_2 = 200000(1 - 0,08)^2 = 169280 \text{ рублей}$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{169280}{118098}} - 1 = 1,1275 - 1 = 0,1275 \text{ или } 12,75\%$$

## Раздел 10. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВАЛЮТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

### 10. 1. Основные понятия валютных расчетов

В периоды экономической нестабильности, высокой инфляции многие граждане предпочитают хранить сбережения в свободно конвертируемой валюте (СКВ) или на валютных депозитах.

Валюта покупается и продается, как и любой другой товар, исходя из спроса и предложения. Конечная цена иностранной валюты, полученная в результате торгов, выражается в *валютном курсе*. Валютный курс – это цена денежной единицы национальной валюты, выраженная в денежных единицах другой страны. Установление курса иностранной валюты называется *котировкой*.

Различают *прямую и косвенную котировку валюты*. При прямой котировке курс валюты показывает, сколько единиц национальной валюты надо заплатить за одну или 100 единиц иностранной валюты. При косвенной котировке - сколько единиц иностранной валюты можно получить за одну или 100 единиц национальной валюты.

Цены продажи и покупки валюты отличаются по величине. Разница между курсом продажи и курсом покупки валюты называется *спрэдом*. За счет различия в курсах спроса и предложения банк имеет возможность покрыть расходы по совершению сделок, учесть возможный риск, связанный с валютными операциями, и получить определенную прибыль.



## 10. 2. Оценка доходности операции покупки валюты

Рассмотрим, как оценивается доходность финансовой операции покупки валюты. Предположим, некоторая сумма в объеме  $PV$  рублей обменена на валюту. Затем через период  $n$  лет совершен ее обмен на рубли.

Обозначим сумму в рублях на начало операции  $PV$  ;

$FV$  - сумма в рублях на конец операции;

$K_0$  и  $K_1$  - курс обмена в начале и в конце операции соответственно, имеющий размерность, например, в руб./долл. или в руб./евро. Иначе говоря,  $K_0$  - банковский курс продажи валюты,  $K_1$  - банковский курс покупки валюты.

Сумма, полученная в результате проведенной операции, может быть определена по формуле:

$$FV = \frac{PV}{K_0} \cdot K_1 = PV \cdot I_k, \quad \text{где } I_k = \frac{K_1}{K_0}.$$

Поскольку в течение  $n$  лет в результате инфляции покупательная способность полученной суммы в определенной степени снизилась, то ее реальная покупательная способность  $S$  может быть определена по формуле:

$$S = PV \cdot \frac{I_k}{I_p}. \quad \text{Здесь } I_p - \text{индекс цен за период } n \text{ лет.}$$

$$I_p = (1 + \gamma)^n, \quad \text{где } \gamma - \text{среднегодовой темп инфляции.}$$

Определим доходность рассматриваемой финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки  $i$  из равенства:

$$PV \cdot \frac{I_k}{I_p} = PV(1 + i)^n.$$

Выразив из этого равенства  $i$ , найдем формулу для определения доходности операции покупки валюты:

$$i = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1.$$

Доходность такой операции равна нулю, если выполняется условие  $I_k = I_p$ . При  $I_k > I_p$  операция будет доходной, а при  $I_k < I_p$  - убыточной.

**Пример.** Предприниматель, имея свободную сумму 500 тыс. рублей предполагает приобрести на нее валюту с целью сохранения средств от инфляции, с тем, чтобы через 1,5 года вновь обменять валюту на рубли и приобрести на эти средства необходимое оборудование. На начало финансовой операции цена покупки доллара банком составляет 24, 15 руб., а цена продажи - 24,20 рублей. Для евро эти показатели соответственно 34, 65 руб. и 34, 75 руб. Предполагается, что концу срока цена покупки долларов банком составит 24,75 руб., а цена продажи – 24,85 руб. Аналогичные показатели для евро на конец операции – 36, 50 руб. и

36, 60 руб. Среднегодовой темп инфляции прогнозируется на уровне 7,5%.

Определить:

- а) сумму в рублях, полученную в результате операции покупки-продажи долларов и евро;
- б) покупательную способность полученных сумм с учетом инфляции;
- в) доходность финансовых операций;
- г) курс покупки валюты банком в конце операции, который обеспечил бы полное сохранение средств от инфляции.

Решение:

$$I_p = (1 + \gamma)^n = (1 + 0,075)^{1,5} = 1,1146.$$

Таким образом, за 1,5 года цены возрастут на 11,46% ,

$$а) \quad I_{\text{долл}k} = \frac{K_1}{K_0} = \frac{24,75}{24,20} = 1,02273.$$

$$FV_{\text{долл}} = PV \cdot I_{\text{долл}k} = 500 \cdot 1,02273 = 511,36 \text{ тыс. рублей}$$

$$I_{\text{евро}k} = \frac{K_1}{K_0} = \frac{36,50}{34,75} = 1,05036.$$

$$FV_{\text{евро}} = PV \cdot I_{\text{евро}k} = 500 \cdot 1,05036 = 525,18 \text{ тыс. рублей}$$

Из произведенных расчетов видно, что операция с евро в данном случае дает лучший результат.

б) Скорректируем этот результат с поправкой на инфляцию:

$$S_{\text{долл}} = PV \cdot \frac{I_{\text{долл}k}}{I_p} = \frac{FV_{\text{долл}}}{I_p} = \frac{511,36}{1,1146} = 458,783 \text{ руб.}$$

$$S_{\text{евро}} = PV \cdot \frac{I_{\text{евро}k}}{I_p} = \frac{FV_{\text{евро}}}{I_p} = \frac{525,18}{1,1146} = 471,825 \text{ руб.}$$

Следовательно, не удастся полностью сохранить деньги от инфляции.

в) Определим доходность рассматриваемых финансовых операций.

$$i_{\text{долл}} = \sqrt[n]{\frac{I_{\text{долл}k}}{I_p}} - 1 = \sqrt[1,5]{\frac{1,02273}{1,1146}} - 1 = 0,9443 - 1 = -0,0557.$$

Операция с долларами является убыточной. Ее доходность отрицательна и составляет – 5,57%.

$$i_{\text{евро}} = \sqrt[n]{\frac{I_{\text{евро}k}}{I_p}} - 1 = \sqrt[1,5]{\frac{1,05036}{1,1146}} - 1 = 0,96120 - 1 = -0,0388.$$

Операция с евро также убыточна. Ее доходность составляет – 3,88%.

г) Определим, при каком курсе покупки валюты в конце срока, операции по покупке-продаже валюты были бы безубыточны. Для этого используем равенство:  $I_k = I_p$ .

Оно выполняется в случае покупки долларов, если  $I_{\text{долл}k} = \frac{K_1}{24,20} = 1,1146$ , то есть при  $K_1 = 26,97 \text{ руб.}$  Таким образом, при курсе покупки долларов банком по цене 26,97 руб. удастся сохранить деньги от

инфляции. Для получения прибыли от такой операции, курс покупки должен превысить этот уровень.

Аналогично определим критическое значение курса евро из равенства:  $\frac{K_1}{34,75} = 1,1146$ . Отсюда  $K_1 = 38,73 \text{ руб.}$

Полученный пример показывает, что достаточно сложно уберечь деньги от инфляции, не инвестируя их с целью наращивания процентов.

### **10.3. Конверсия валюты и наращение по простым и сложным процентам**

Рассмотрим финансовые операции, совмещающие конверсию валюты с наращением процентов. Для того чтобы найти возможности наилучшего размещения денежных средств (с конверсией или без нее), необходимо сравнить результаты непосредственного размещения денежных средств и опосредованно через другую валюту.

Существует четыре варианта для наращивания процентов:

- 1) СКВ  $\Rightarrow$  СКВ;
- 2) СКВ  $\rightarrow$  Руб  $\Rightarrow$  Руб  $\rightarrow$  СКВ;
- 3) Руб  $\Rightarrow$  Руб
- 4) Руб  $\rightarrow$  СКВ  $\Rightarrow$  СКВ  $\rightarrow$  Руб

Здесь  $\rightarrow$  означает процесс конверсии;  $\Rightarrow$  означает процесс наращивания.

Вариант 1 и 3 не представляют интереса, т.к. здесь применяются обычные формулы наращивания простых и сложных процентов.

В операциях наращивания с конверсией валют можно выделить три этапа: обмен валюты, наращивание процентов на полученную сумму и конвертирование в исходную валюту. При этом существует два источника дохода: изменение курса валют и наращивание процента. Причем если второй из них является безусловным источником дохода (ставка процента фиксирована), то этого нельзя сказать о первом. Более того, двойное конвертирование валюты может быть как прибыльным, так и убыточным.

#### **Вариант СКВ $\rightarrow$ Руб $\Rightarrow$ Руб $\rightarrow$ СКВ.**

Введем следующие обозначения: \*

$PV^*$  — исходная сумма в валюте;

$PV$  — исходная сумма депозита в рублях;

$FV$  — наращенная сумма депозита в рублях;

$FV^*$  — наращенная сумма в валюте;

$K_0$  — курс покупки валюты в начале операции;

$K_1$  — курс продажи валюты в конце операции;

$n$  — срок депозита;

$i$  — ставка наращивания простых процентов на рублевых депозитах;

$j$  — ставка наращивания для валютного депозита в валюте

конкретного вида.

(Знак \* показывает, что величина измеряется в денежных единицах выбранной валюты).

Эта финансовая операция предполагает обмен валюты в количестве  $PV^*$  на рубли, наращение на полученную в рублях сумму  $PV$  простых процентов по ставке  $i$  и конвертирование в исходную валюту. Рассматривая этот процесс поэтапно, получим следующие результаты:

$$1) PV = PV^* \cdot K_0;$$

$$2) FV = PV(1 + in) = PV^* \cdot K_0(1 + in);$$

$$3) FV^* = \frac{FV}{K_1} = \frac{PV^* \cdot K_0(1 + in)}{K_1} = PV^* (1 + in) \cdot \frac{K_0}{K_1}.$$

Таким образом, процесс наращения с конверсией валюты в этом случае выражается формулой:

$$FV^* = PV^* (1 + in) \cdot \frac{K_0}{K_1}.$$

Нетрудно видеть, что результат операции в случае наращения по сложным процентам может быть определен по формуле:

$$FV^* = PV^* (1 + i)^n \cdot \frac{K_0}{K_1}.$$

Доходность операции будет нулевой, если  $FV^* = PV^*$ , т.е. при  $(1 + in) \cdot \frac{K_0}{K_1} = 1$

если наращение произведено по простым процентам и  $(1 + i)^n \cdot \frac{K_0}{K_1} = 1$  при

наращении по сложным процентам.

Следовательно, критическое значение курса продажи валюты в конце финансовой операции  $K_1 = K_0(1 + in)$  в случае, если проценты простые, и  $K_1 = K_0(1 + i)^n$  для сложных процентов.

В случае если  $K_1 > K_0(1 + in)$ , то операция будет убыточной в случае наращения по простым процентам.

Для наращения по сложным процентам операция становится убыточной в случае, если выполняется неравенство:  $K_1 > K_0(1 + i)^n$ .

**Пример.** Предприниматель намерен поместить 5000 \$ на рублевый депозит на 4 месяца. Курс покупки долларов на начало финансовой операции составляет 25,3руб. за доллар. Ожидаемый курс продажи – 25,85руб. за доллар. Процентная ставка по рублевым депозитам 9%. Проценты простые. Определите:

а) наращенную сумму в долларах;

б) доходность операции с конверсией;

в) критическое значение курса продажи доллара в конце сделки, при котором проведение финансовой операции целесообразно.

Решение:

а) Наращенная сумма:

$$FV^* = PV * (1 + in) \cdot \frac{K_0}{K_1} = 5000 \left( 1 + 0,09 \cdot \frac{4}{12} \right) \cdot \frac{25,3}{25,85} = 5040,43\$.$$

б) Доходность операции с конверсией  $i_k = \frac{5040,43 - 5000}{5000 \cdot \frac{4}{12}} = 0,024$  или 2,4%.

в) Критическое значение  $K_1 = K_0(1 + in) = 25,3 \cdot \left( 1 + 0,09 \cdot \frac{4}{12} \right) = 26,06$  руб.

В случае если  $K_1 > 26,06$  руб., операция становится убыточной.

Поскольку в момент заключения контракта значение курса продажи валюты в конце сделки  $K_1$  неизвестно, полезно знать его максимально допустимое значение, при котором эффективность операции наращивания с конверсией валюты будет равна существующей ставке по соответствующим валютным депозитам. В этом случае применение двойного конвертирования не дает дополнительной выгоды.

Предположим, процентная ставка по валютным депозитам равна  $j$ .

Тогда максимально допустимое значение  $K_1$  может быть определено из равенства:

$$1 + jn = (1 + in) \cdot \frac{K_0}{K_1};$$

$$K_1 = K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn}.$$

Таким образом, если  $K_1 > K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn}$ , то проводить конверсию валюты нецелесообразно.

**Пример.** В условиях предыдущей задачи определить максимальное значение курса продажи долларов в конце операции, если процентная ставка по долларовому депозиту равна 4%.

Решение:

$$K_1 = 25,3 \cdot \frac{1 + 0,09 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 0,04 \cdot \frac{1}{3}} = 25,72 \text{ руб.}$$

Поскольку в конце операции ожидают, что значение курса продажи долларов будет 25,85 руб. за доллар (больше, чем 25,72 руб. за доллар), то применять конверсию нецелесообразно, а лучше положить валюту на долларовый депозит.

Для того, чтобы убедиться в этом, определим наращенную сумму на долларовом депозите:

$$FV^* = PV * (1 + jn) = 5000 \cdot \left( 1 + 0,04 \cdot \frac{1}{3} \right) = 5066,67\$ > 5040,43\$$$

Следовательно, в этом случае производить конверсию нецелесообразно.

### Вариант Руб $\rightarrow$ СКВ $\Rightarrow$ СКВ $\rightarrow$ Руб

Данная финансовая операция предполагает обмен денежной суммы в рублях в количестве  $PV$  валюту, наращение на полученную сумму  $PV \cdot j$  процентов по ставке  $j$  и конвертирование валюту наращенной суммы в валюту в рубли. Рассматривая этот процесс поэтапно, получим следующие результаты:

$$1) PV^* = \frac{PV}{K_0};$$

$$2) FV^* = PV^* (1 + jn) = \frac{PV(1 + jn)}{K_0};$$

$$3) FV = FV^* \cdot K_1 = \frac{PV \cdot K_1(1 + jn)}{K_0} = PV(1 + jn) \cdot \frac{K_1}{K_0}.$$

Таким образом, процесс наращения с конверсией в этом случае выражается формулой:

$$FV = PV(1 + jn) \cdot \frac{K_1}{K_0}.$$

Результат операции в случае наращения по сложным процентам может быть определен по формуле:

$$FV = PV(1 + j)^n \cdot \frac{K_1}{K_0}.$$

Доходность операции будет нулевой, если  $FV = PV$ , т.е. при  $(1 + jn) \cdot \frac{K_1}{K_0} = 1$

если наращение произведено по простым процентам и  $(1 + j) \cdot \frac{K_1}{K_0} = 1$  при наращении по сложным процентам.

Критическое значение курса продажи валюты в конце финансовой операции  $K_1 = \frac{K_0}{1 + jn}$  в случае, если проценты простые, и  $K_1 = \frac{K_0}{(1 + j)^n}$  для сложных процентов.

В случае если  $K_1 < \frac{K_0}{1 + jn}$ , то операция будет убыточной в случае наращения по простым процентам.

Для наращения по сложным процентам операция становится убыточной в случае, если выполняется неравенство:  $K_1 < \frac{K_0}{(1 + j)^n}$

Определим значение  $K_1$ , при котором эффективность операции наращения с конверсией будет равна существующей ставке по рублевому депозиту. В этом случае применение двойного конвертирования не дает дополнительной выгоды.

Тогда минимально допустимая величина  $K_1$  может быть определено

из равенства:

$$1 + in = (1 + jn) \cdot \frac{K_1}{K_0};$$

$$\text{Отсюда } K_1 = K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn}.$$

Если  $K_1 < K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn}$ , то нецелесообразно проводить конверсию, а лучше положить деньги на рублевый депозит.

**Пример.** Предприниматель, имея сумму в размере 400 тыс. рублей, предполагает поместить ее на долларовом депозите на 3 месяца под процентную ставку 5% годовых, а затем обменять полученную сумму на рубли. Курс продажи долларов на начало срока депозита 25,45 руб., ожидаемый курс покупки через 3 месяца 25,85 руб. Процентная ставка на рублевом депозите 10%. Выяснить целесообразность этой сделки.

Решение:

Оценим целесообразность проведения конверсии. Для этого сравним значения  $K_1 = 25,85 \text{ руб.}$  и  $K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn}$ .

$$K_0 \cdot \frac{1 + in}{1 + jn} = 25,45 \cdot \frac{1 + 0,1 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,05 \cdot \frac{3}{12}} = 25,14 \text{ руб.}$$

Следовательно, целесообразно провести операцию с конверсией. Чтобы убедиться в этом, сравним результаты наращения с конверсией и без нее.

1) наращенная сумма с конверсией:

$$FV = PV(1 + jn) \cdot \frac{K_1}{K_0} = 400(1 + 0,05 \cdot 0,25) \cdot \frac{25,85}{25,45} = 411,365 \text{ тыс. руб.}$$

2) наращенная сумма на рублевом депозите (без конверсии):

$$FV = PV \cdot (1 + in) = 400 \cdot 1,10(1 + 0,1 \cdot 0,25) = 410 \text{ тыс. руб.}$$

## Раздел 11. ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В СТРАХОВАНИИ

### 11.1. Основные понятия и базовые принципы страхования

*Страховщик* – специализированная организация, проводящая страхование,

*Страхователь* – физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

*Объекты и предметы страхования* – подлежащие страхованию материальные ценности, в личном страховании – жизнь, здоровье и трудоспособность страхователя или застрахованного лица.

*Страховая сумма* – сумма денежных средств, на которую фактически застрахованы имущество, жизнь, здоровье.

*Страховой тариф* – процентная ставка от совокупной страховой суммы. Страховой тариф служит основой для формирования страхового фонда.

Финансовые расчеты в страховании (актуарные расчеты) базируются на двух основных принципах – *финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика, учета фактор времени и солидарности застрахованных.*

Согласно принципу финансовой эквивалентности обязательств теоретическая себестоимость страховой операции – нетто-премия должна быть равна стоимости страхования. Этот принцип реализуется с помощью уравнения, в котором нетто-премия приравнивается к актуарной стоимости страховых платежей, которая представляет собой современную стоимость страховых выплат с учетом условий страхования.

Учет фактора времени достигается с помощью дисконтирования платежей – приведения их к начальному моменту времени.

Например, пусть страхователь в возрасте  $x$  лет заключил договор со страховщиком, согласно которому последний выплатит ему сумму  $S$  при достижении возраста  $x+n$  лет. Предположим, вероятность дожития до этого возраста равна  ${}_n p_x$ . Тогда математическое ожидание выплаты составит  ${}_n p_x \cdot S$ . Поскольку выплаты премии и страховых сумм производятся в разное время, найдем современную стоимость платежа  $A$  с учетом вероятности его выплаты с помощью операции дисконтирования:

$$A = {}_n p_x \cdot S \cdot \frac{1}{(1+i)^n}.$$

(11.1)

Здесь  $i$  – сложная годовая процентная ставка.

Величина  $A$  представляет собой математическое ожидание дисконтированной страховой выплаты, то есть актуарную стоимость страховой выплаты. Нетто-премия при страховании на дожитие равна этой величине.

Принцип солидарности застрахованных подразумевает согласованность интересов. Например, в негосударственном пенсионном страховании пенсии выплачиваются из накоплений всех участников данного вида страхования, доживших и не доживших до их получения. То есть пенсионные расходы распределяются между всеми участниками. В результате цена страхования пенсии оказывается меньше, чем обеспечение такой же пенсии по сберегательной схеме, то есть без учета фактора солидарности.

Аналогично при страховании на дожитие страховая выплата обеспечивается не только собственным взносом застрахованного лица, но и взносами тех, кто не дожил до этого возраста.



В медицинском страховании в соответствие с принципом солидарности участники, у которых затраты на лечение незначительны или вовсе отсутствуют, оплачивают часть медицинских расходов участников с более высокими расходами на эти цели поскольку расходы распределяются между всеми застрахованными.

### **11.2. Финансовые потоки в страховании**

Совокупность страховых взносов и выплат, производимых в разные моменты времени можно рассматривать как вероятностные потоки платежей. Заранее количество платежей в таких потоках неизвестно, поскольку взносы производятся лишь за живущих участников страхования. Выплаты также получают только живущие (за исключением страхования на случай смерти, когда выплата осуществляется в случае смерти застрахованного лица). Каждый член такого потока связан с некоторой вероятностью дожития. Такой поток обычно называют условным или страховым аннуитетом.

Модель потока платежей, учитывающая все требования к взносам и выплатам, позволяет получить такую важную для актуарных расчетов характеристику, как актуарная стоимость страховых выплат (или взносов).

Под актуарной стоимостью потока платежей понимают сумму последовательных платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, с учетом вероятностей их выплат.

### **11.3. Структура тарифной ставки**

Для определения размера денежных выплат каждого страхователя, как участника солидарной ответственности, рассчитывается тарифная нетто-ставка, используемая для расчета страхового платежа – основного источника дохода страховщика. Расчет нетто-ставки базируется на оценке вероятности наступления страховых случаев.

*Нетто-ставка* – основная часть страхового тарифа. Она формирует *страховой фонд* и устанавливается условиями страхования. Для рискованных видов страхования в состав нетто-ставки включается *рисковая надбавка*, которая учитывает отклонения возможных выплат от их среднего уровня и формирует *запасной фонд*.

Страховой и запасной фонд предназначены для расчетов со страхователями: выплаты суммы страховых возмещений, отчислений в резервный фонд, отчислений на предупредительные мероприятия.

Брутто-ставка включает в себя нетто-ставку и нагрузку. Нагрузка обеспечивает расходы на ведение дела и прибыль страховой кампании. За счет нагрузки страховщик оплачивает труд работников, содержание помещений и пр. Нагрузка, как правило, составляет 10-20% брутто-ставки. Брутто-ставка может быть рассчитана на основе соотношения:

$$P = \frac{H}{1-f},$$

(11.2)

где  $P$  – брутто-ставка,  $H$  – нетто-ставка,  $f$  – доля нагрузки в брутто-ставке.

#### 11.4. Страхование жизни

Рассмотрим основные виды страхования жизни.

- а). *Страхование на дожитие.* Выплата производится при условии дожития застрахованного лица до определенного возраста и полной оплаты соответствующего договора очередными или единовременными взносами.
- б). *Страхование на случай смерти.* Страховая сумма выплачивается только при наступлении смерти застрахованного в период действия договора.
- в). *Страхование от несчастных случаев.* Выплата производится, если физическое лицо пострадает от несчастного случая. Под несчастным случаем подразумевается физическое повреждение, следствием которого может быть временная инвалидность, постоянная инвалидность, смерть.
- г). *Смешанное страхование жизни.* Этот вид страхования объединяет в одном договоре страхование на дожитие, на случай смерти и страхование от несчастных случаев. Нетто-ставка по смешанному страхованию рассчитывается как сумма нетто-ставок его составляющих.

#### 11.5. Методы построения страховых тарифов.

Условия страхования жизни обычно предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания действия договора страхования или в случае его смерти в течение этого срока.

Вероятность дожить до определенного возраста или окончания срока страхования зависит в первую очередь от возраста в момент страхования и срока действия договора страхования жизни.

Она определяется с помощью таблицы смертности населения. Эта таблица разработана на основе данных демографической статистики (дифференцировано для мужчин и женщин). Таблица содержит конкретные цифры смертности для каждого возраста в расчете на 100000 населения. На основе этих таблиц рассчитывают страховые тарифы.

Возраст человека обозначается символом  $x$ , а число лиц, доживающих до возраста  $x$ , обозначается  $l_x$ . Число умирающих при переходе от возраста  $x$  к возрасту  $x+1$  обозначается символом  $d_x$ .

Вероятность умереть в возрасте  $x$  лет, не дожив до возраста  $x+1$  лет:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (11.3)$$

Например, из 100 000 родившихся женщин до 50 лет доживают 90792 чел. ( $l_x = 90792$ ), до 51 года не доживают 459 чел. ( $d_x = 459$ ), следовательно, вероятность умереть в возрасте 50 лет у женщин:

$$q_{50} = \frac{d_{50}}{l_{50}} = \frac{459}{90792} \approx 0,00506.$$

Используя таблицу смертности, страховщик может определить величину страхового фонда, необходимого для выплаты в обусловленные сроки страховых сумм.

Используя метод дисконтирования можно определить его современную стоимость, равную сумме, которую необходимо собрать со страхователей в момент заключения договора страхования.

Страховые взносы могут вноситься единовременно при заключении договора страхования или ежегодно, образуя финансовую ренту. Рассмотрим некоторые случаи определения нетто-ставок.

### 11.6. Определение единовременной нетто-ставки по дожитию

Условия страхования предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания срока договора. С помощью таблицы смертности устанавливается вероятное число выплат по дожитию застрахованного лица до окончания срока страхования. На основе данных о страховых суммах определяется размер страхового фонда, необходимого для страховых выплат.

Предположим, страхователь в возрасте  $x$  лет заключил договор со страховщиком, согласно которому последний выплатит ему сумму  $S$  при достижении возраста  $x+n$  лет. Обозначим вероятность дожития до этого возраста  ${}_n p_x$ .

Тогда  ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ , где  $l_x$  - число лиц, заключивших договор страхования в возрасте  $x$  лет,  $l_{x+n}$  - число лиц, доживших до окончания договора страхования.

Математическое ожидание выплаты составит

$${}_n p_x \cdot S = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S. \quad (11.4)$$

Дисконтируя эту величину по сложной процентной ставке  $i$ , определим математическое ожидание дисконтированной страховой выплаты, то есть актуарную стоимость страховой выплаты или величину единовременного взноса (без учета нагрузки):

$$A = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot (1+i)^n} \cdot S.$$

(11.5)

Предположим,  $S = 1 \text{ руб.}$  Тогда единовременная нетто-ставка по страхованию на дожитие определяется по формуле:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot (1+i)^n}.$$

(11.6)

**Пример.** Страховщик заключил договор страхования с мужчиной 45 летнего возраста на 5 лет на дожитие на сумму 20 000 руб. Необходимо определить единовременную страховую премию при условии, что нагрузка составляет 10%. Страховщик предполагает всю сумму страховых взносов инвестировать под 9% годовых.

Решение:

$S = 20 \text{ тыс. руб.}$  Согласно таблице смертности  $l_{45} = 84204$ ;  $l_{50} = 79519$ .

Определим нетто-ставку:

$${}_5E_{45} = \frac{79519}{84204} \cdot \frac{1}{1,09^5} = \frac{0,9444}{1,5386} = 0,6138 \text{ руб. на } 1 \text{ руб. страховой суммы.}$$

Найдем брутто-ставку, учитывая, что нагрузка  $f = 0,1$  по формуле (11.2):

$$P = \frac{0,6138}{1 - 0,1} = 0,682$$

Следовательно, величина единовременного взноса составит:  
 $A = 20000 \cdot 0,682 = 13640 \text{ руб.}$

При единовременном взносе страхователь сразу при заключении договора погашает свои обязательства перед страховщиком и в дальнейшем не производит никаких дополнительных взносов.

### 11.7. Единовременная нетто-ставка на случай смерти

Этот вид страхования является наиболее распространенным. Страховая сумма, равная  $S$  выплачивается в случае смерти застрахованного. Допустим договор заключен в возрасте  $x$  лет. Если застрахованный умрет на первом году страхования, а выплата страховых сумм наследникам производится в конце года наступления страхового события, то с учетом его вероятности современная величина выплаты (на момент заключения договора) составит:

$$q_x \cdot \frac{S}{1+i} = \frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{S}{1+i}.$$

Если страховой случай наступит во втором году, то современная величина выплаты равна:  $\frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{S}{(1+i)^2}$ , и т.д.

Единовременную нетто-ставку в расчете на 1 руб. страховой суммы ( $S=1$ ) определим на основе принципа эквивалентности обязательств, в соответствии с которым искомая сумма должна быть равна математическому ожиданию суммы страховых выплат:

$${}_nA_x = \frac{d_k}{l_k} \cdot \frac{1}{1+i} + \frac{d_{k+1}}{l_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{d_{k+n-1}}{l_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{l_x} \left[ \frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n} \right] \quad (11.7),$$

где  $d_k, d_{k+1}, \dots, d_{k+n-1}$  - количество умирающих в течение срока страхования.

При смешанном страховании на дожитие и на случай смерти совокупная нетто-ставка определяется по формуле:

$$T_n = {}_nE_x + {}_nA_x \quad (11.8)$$

**Пример.** Определить единовременную нетто-ставку и страховую премию для мужчины 55 летнего возраста, оформляющего страховку на случай своей смерти сроком на 5 лет на сумму 10 тыс. руб. Страховая компания предполагает поместить страховую сумму под 9% годовых. Нагрузка составляет 12%.

Решение:

Выберем из таблицы смертности число умерших в интервале от 55 до 59 лет;

$$d_{55} = 1462; d_{56} = 1532; d_{57} = 1610; d_{58} = 1695; d_{59} = 1783, l_{55} = 73212.$$

$$\begin{aligned} {}_5A_{55} &= \frac{1}{73212} \cdot \left[ \frac{1462}{1+0,09} + \frac{1532}{1,09^2} + \frac{1610}{1,09^3} + \frac{1695}{1,09^4} + \frac{1783}{1,09^5} \right] = \\ &= \frac{1}{73212} \cdot (1341,28 + 1289,45 + 1243,22 + 1200,78 + 1158,83) = \frac{6233,56}{73212} = 0,08514 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Учитывая, что нетто-ставка составляет 0,08514 рублей, а нагрузка  $f = 0,12$ , определим брутто-ставку:

$$P = \frac{0,08514}{1 - 0,12} = 0,09675.$$

Величина единовременного взноса составит:

$$S \cdot {}_5A_{55} = 10000 \cdot 0,09675 = 967,5 \text{ руб.}$$

## 11.8. Расчет годичной нетто-ставки

При расчете единовременной нетто-ставки предполагается, что сумма подлежащих оплате взносов погашаются единовременно в момент заключения договора о страховании. Однако чаще всего страхователи

предпочитают платить взносы в течение всего срока страхования. В связи с этим возникает необходимость расчета годовых нетто-ставок.

Единовременная нетто-ставка отличается по величине от годичной ставки по ряду причин. Во-первых, при единовременной уплате страхового взноса он может быть сразу после его поступления инвестирован под проценты. Годичные же взносы поступают постепенно, в связи с чем сумма начисленных процентов будет значительно меньше, чем при единовременном взносе. В результате страховщик получит меньший страховой фонд. Во-вторых, страховой фонд выплачивают все лица, заключившее страховой договор, а при годичной уплате ряд страхователей прекратит взносы в результате своей смерти.

Следовательно, при расчете годичной нетто-ставки необходимо учитывать частичную потерю сумм и снижение числа платежей в результате смерти некоторой части застрахованных.

Предположим, что все мужчины, достигшие возраста  $x$  лет, обязались в конце каждого страхового года вносить страховой компании 1 руб. в течение  $n$  лет. Тогда в конце первого года будет внесено  $l_{x+1} \cdot 1$  руб.

Современная стоимость этой суммы составит  $\frac{l_{x+1}}{1+i}$ , где  $i$  - норма накопления данной страховой компании. Во втором году современная стоимость взносов составит  $\frac{l_{x+2}}{(1+i)^2}$ , в третьем -  $\frac{l_{x+3}}{(1+i)^3}$ , в  $n$  году -  $\frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}$ .

Таким образом, современная стоимость финансовых обязательств страховщика, относящихся ко всем  $l_x$  лицам выразится суммой:

$$\frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^2} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^3} + \dots + \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}.$$

Для получения современной стоимости финансовых обязательств по отношению к одному лицу, то есть годичной нетто-ставки, эту сумму необходимо поделить на  $l_x$  - число лиц, заключивших договор:

$${}_n a_x = \frac{\frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^2} + \frac{l_{x+3}}{(1+i)^3} + \dots + \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}}{l_x} \quad (11.9)$$

Значение  ${}_n a_x$  можно рассматривать как коэффициент рассрочки. Зная его значение, можно определить годичный взнос по формуле:

$${}_n P_x = \frac{{}_n E_x}{{}_n a_x},$$

Здесь  ${}_n E_x$  - единовременная нетто-ставка.

**Пример.** Мужчина в возрасте 45 лет, заключил договор по смешанному страхованию жизни сроком на 3 года. Страховая сумма составляет 25 тыс. руб. Норма доходности страховой компании - 8%. Доля нагрузки в брутто-

ставке 10%. Определите единовременную брутто-ставку и брутто-премию; коэффициент рассрочки и величину годичного взноса.

Решение:  $n = 45 \text{ лет}; x = 3 \text{ года}; S = 25 \text{ тыс. руб.}; i = 0,08; f = 0,1$ .

1) Определим нетто-ставку на дожитие по формуле:

$${}_x E_n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}.$$

$${}_3 E_{45} = \frac{l_{48}}{l_{45}} \cdot \frac{1}{(1+0,08)^3} = \frac{81208}{84379} \cdot 0,794 = 0,764 \text{ руб.}$$

Таким образом, нетто-ставка на дожитие составляет 76,4 руб. со 100 рублей страховой суммы.

2). Определим нетто-ставку на случай смерти по формуле:

$${}_n A_x = \frac{1}{l_x} \left[ \frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n} \right]$$

$${}_3 A_{45} = \frac{1}{l_{45}} \left[ \frac{d_{45}}{1+i} + \frac{d_{46}}{(1+i)^2} + \frac{d_{47}}{(1+i)^3} \right] = \frac{1}{84379} \left[ \frac{994}{1+0,08} + \frac{1058}{1,08^2} + \frac{1119}{1,08^3} \right] =$$

$$= \frac{1}{84379} (920,37 + 907,06 + 888,30) = \frac{2715,73}{84379} = 0,032 \text{ руб.}$$

Следовательно, нетто-ставка на случай смерти составляет 3 руб.20 коп. со 100 руб. страховой суммы.

3). Нетто-ставка при смешанном страховании жизни:

$$T_n = {}_3 E_{45} + {}_3 A_{45} = 0,764 + 0,032 = 0,796 \text{ руб.}$$

4) Определим единовременную брутто-ставку:

$$T_b = \frac{T_n \cdot 100}{100 - f} = \frac{0,796 \cdot 100}{90} = 0,8844$$

5) Брутто-премия составит  $T_b \cdot S = 0,8844 \cdot 25000 = 22110 \text{ руб.}$

6). Определим коэффициент рассрочки:

$${}_n a_x = \frac{\frac{l_{x+1}}{1+r} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{l_{x+n}}{(1+r)^n}}{l_x} = {}_3 a_{45} = \frac{\frac{83385}{1,08} + \frac{82327}{1,08^2} + \frac{81208}{1,08^3}}{84379} =$$

$$= \frac{77208,3 + 70582,1 + 64465,5}{84379} = \frac{212255,9}{84379} = 2,5155.$$

7). Учитывая, что единовременный взнос или брутто-премия составляет 22110 руб., определим годичный взнос:

$$\frac{22110}{2,5155} = 8789,51 \text{ руб.}$$

Таким образом, при выплате в рассрочку за 3 года страхователем будет уплачено 26368,52 руб.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Касимов Ю. Ф. Финансовая математика.: Учебник. – М.: Гардарики, 2008
2. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения: Учебно-практическое пособие для ВУЗов. – М.: ПРИОР, 2009
3. Касимова О.Ю. Введение в финансовую математику (анализ кредитных и инвестиционных операций). – М.: Анкил, 2009
4. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов.- М.: Финансы и статистика, 2010.
5. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2002.
6. Криничанский К.В. Математика финансового менеджмента: учебное пособие. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2009.
7. Кузнецов Б. Т. Финансовая математика: Учебное пособие для вузов – М.: Издательство «Экзамен», 2008.
8. Лукасевич И.Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений.: Учебное пособие для вузов. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 2009
9. Малыхин В.И. Финансовая математика/ Учебное пособие для вузов. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009
10. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: Учебно-справочное пособие. – М.:ИНФРА, 2008
11. Салин В.Н., Ситникова О.Ю. Техника финансово-экономических расчетов: Учебное пособие. -М.: Финансы и статистика, 2009
12. Симчера В.М. Введение в финансовые и актуарные вычисления. – М.: Финансы и статистика, 2008
13. Уланов В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений/Под ред. Проф. В.В. Ковалева. -М.: Финансы и статистика, 2009
14. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: «Дело-Ltd», 2011. гл. 12 «Изменение эффективности инвестиций».