

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра теоретической и
прикладной механики

**ОПД.Ф.02.01 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
РАЗДЕЛ СТАТИКА. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

Специальности:

110301 «Механизация сельского хозяйства»

110303 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство»

140106 «Энергообеспечение предприятий»

Уфа – 2011

УДК 531
ББК 22.21
Н34

Рекомендованы к изданию методической комиссией факультета механизации сельского хозяйства (протокол № 8 от 24 февраля 2011г.)

Составитель: доктор технических наук, доцент Нафиков М.З.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и информационных технологий ФГОУ ВПО «Башкирский государственный аграрный университет» Валиев М.М.;

кафедра «Основы конструирования механизмов и машин» института механики и энергетики ГОУВПО «Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева» (протокол заседания кафедры № 7 от 2 марта 2011г.)

Ответственный за выпуск: заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, к.т.н., доцент Масалимов И.Х.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ. СВЯЗИ, РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ	6
1.1 Сила, система сил, эквивалентная система сил и уравновешенная система сил	6
1.2 Аксиомы статики	7
1.3 Исследование связей и установление направления реакций	9
ЛЕКЦИЯ 2. СХОДЯЩАЯСЯ СИСТЕМА СИЛ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ, УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ	15
2.1 Проекция силы на ось	15
2.2 Сходящаяся система сил. Приведение к равнодействующей, условия равновесия	16
2.3 Теорема о трех силах	19
2.4 Момент силы относительно точки	19
2.5 Момент силы относительно точки как вектор	21
2.6 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей	22
Примеры решения задач	23
ЛЕКЦИЯ 3. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ	29
3.1 Приведение системы двух параллельных сил, направленных в одну сторону, к равнодействующей	29
3.2 Приведение системы двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, к равнодействующей	31
3.3 Пара сил. Момент пары сил	33
3.4 Момент пары как вектор	35
3.5 Теоремы об эквивалентности пар	37
3.6 Сложение пар, расположенных в одной плоскости. Условие равновесия пар	40
3.7 Сложение пар в пространстве. Условие равновесия пар в пространстве	41
Примеры решения задач	42
ЛЕКЦИЯ 4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ	44
4.1 Теорема о параллельном переносе силы	44

4.2 Приведение произвольной плоской системы сил к одной силе и к одной паре	45
4.3 Приведение произвольной плоской системы сил к равнодействующей	47
4.4 Условия равновесия произвольной плоской системы сил	47
4.5 Равновесие сочлененной системы тел	49
4.6 Распределенные силы	49
Примеры решения задач	52
ЛЕКЦИЯ 5. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ, ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА	56
5.1 Трение скольжения, конус трения. Трение качения	56
5.2 Центр тяжести твердого тела	52
Примеры решения задач	67
ЛЕКЦИЯ 6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ	72
6.1 Момент силы относительно оси	72
6.2 Теорема о моменте силы относительно оси и точки, лежащей на этой оси	73
6.3 Приведение произвольной пространственной системы сил к центру	75
6.4 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил	76
Примеры решения задач	78
Контрольные вопросы по статике	84
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	86
СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	86

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – фундаментальная естественная дисциплина, изучающая законы механического движения и равновесия материальных объектов и возникающее при этом механическое взаимодействие между материальными объектами.

В качестве материальных объектов в теоретической механике рассматриваются: абсолютно твердое тело, материальная точка и механическая система материальных точек или твердых тел.

Под материальными точками понимаются имеющие определенную массу тела, размерами которых в данной конкретной задаче можно пренебречь.

Обычно тела, рассматриваемые в теоретической механике, считаются абсолютно твердыми. Расстояния между точками таких тел не меняются, если на них действуют силы.

Мерой механического взаимодействия тел служит величина, называемая силой. Физическая природа сил разнообразна. Вопрос о физической природе сил в теоретической механике не рассматривается, мы интересуемся только эффектом, который они производят на данный материальный объект.

Теоретическая механика состоит из трех частей: статики, кинематики и динамики.

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические формы движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Законы теоретической механики, а также вытекающие из них многочисленные следствия широко применяются при решении широкого ряда на-

учных и практических задач технических и естественных наук - при проектировании и строительстве машин и механизмов, в том числе сельскохозяйственного назначения, закономерностей функционирования различных природных и технических объектов и т.д. При решении различных технических задач роль теоретической механики обычно является определяющей.

Теоретическая механика является научной базой теории механизмов и машин, сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, гидравлики, гидромеханики, газовой динамики и многих других дисциплин. Изучение многих разделов специальных дисциплин механизации сельского хозяйства также основывается на применении законов и теорем теоретической механики. Эта наука является базовой при подготовке специалистов агроинженерных специальностей.

В свою очередь, для успешного изучения теоретической механики нужно знать ранее пройденные дисциплины, особенно аналитическую механику и математический анализ. Большинство выводов и доказательств теорем в теоретической механике производится в векторной форме.

ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

1.1 Сила, система сил, эквивалентная система сил и уравновешенная система сил

В статике рассматриваются две основные задачи: 1) сложение и приведение к простейшему виду систем сил, действующих на свободное твердое тело; 2) определение необходимых и достаточных условий равновесия действующих на абсолютно твердое тело сил.

Тело, которое может получить любое перемещение в пространстве, называется абсолютно свободным.

Мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия, называется силой. Сила – это векторная величина, обозначается буквой \vec{F} . В некоторых случаях для обозначения векторов сил применяются и другие буквы латинского алфавита:

\bar{G} , \bar{Q} , \bar{T} , \bar{N} и другие. В системе единиц СИ сила измеряется в ньютонах ($N = \text{кгм}/\text{с}^2$; $1N = 9,81 \text{ кгс}$).

Совокупность сил, одновременно действующих на данное тело или систему тел, называется системой сил.

Если одну систему сил, действующих на данное свободное тело, можно заменить другой системой сил, то такие две системы называются эквивалентными.

Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил, а силы, совместное действие которых может быть заменено равнодействующей, называются составляющими. Таким образом, равнодействующая – это сила, которая может одна заменить действие данной системы сил на твердое тело.

Если под действием данной системы сил свободное тело не изменяет своего движения или, в частности, продолжает оставаться в покое, то такая система сил называется системой взаимно уравновешенных сил, или системой, эквивалентной нулю.

Сила, которая, будучи присоединена к некоторой системе сил, действующих на тело, приводит эту систему к равновесию, называется уравновешивающей силой.

Под состоянием равновесия тела в теоретической механике понимают не только состояние покоя, но и равномерное прямолинейное движение.

1.2 Аксиомы статики

В основе статики лежат несколько аксиом, или истин, принимаемых без математического доказательства. Они представляют собой законы природы, установлены опытным путем и подтверждаются всей практикой человечества.

Аксиома 1. Свободное твердое тело находится в равновесии под действием двух сил только в том случае, если эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

Такие две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 представляют простейшую уравновешенную систему сил.

Под действием только одной силы твердое тело в состоянии равновесия находиться не может.

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять систему сил, эквивалентную нулю.

Следствие. Не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело, точку приложения этой силы можно переносить вдоль ее линии действия в любую точку тела.

Доказательство следствия строится на аксиомах 1 и 2. Как показано на рисунке 1.1, б, в точке В приложим к твердому телу в соответствии с аксиомой 2 эквивалентную нулю систему сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , причем выберем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$. Согласно аксиоме 1 силы \vec{F}_2 и \vec{F} являются взаимно уравновешенными. В соответствии с аксиомой 2 эти уравновешенные силы отбрасываем (рисунок 1.1, в).

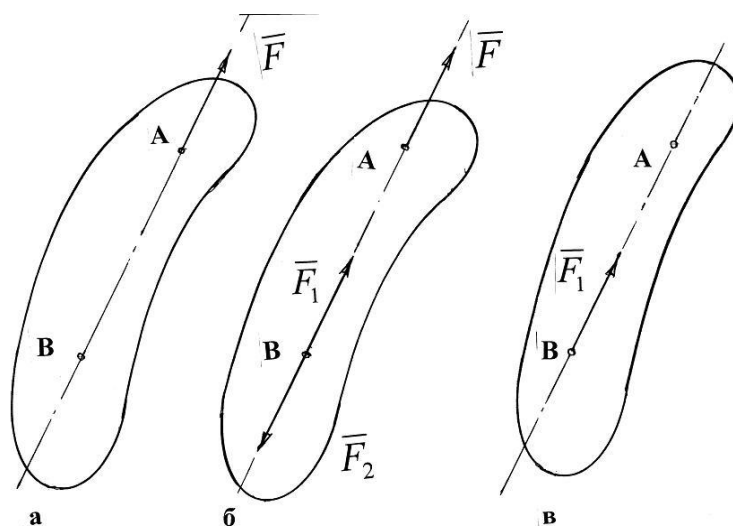


Рисунок 1.1 Следствие из аксиом 1 и 2.

Таким образом, сила – скользящий вектор.

Аксиома 3. Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, приложена в той же точке, равна по модулю диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, и направлена вдоль этой диагонали.

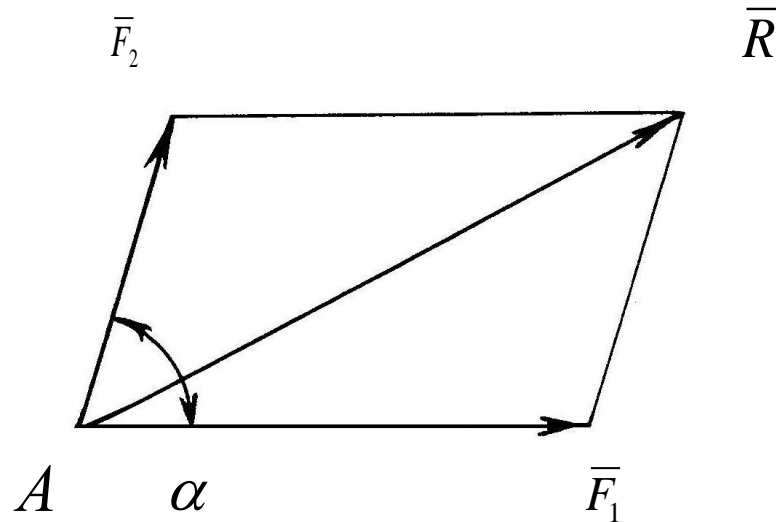
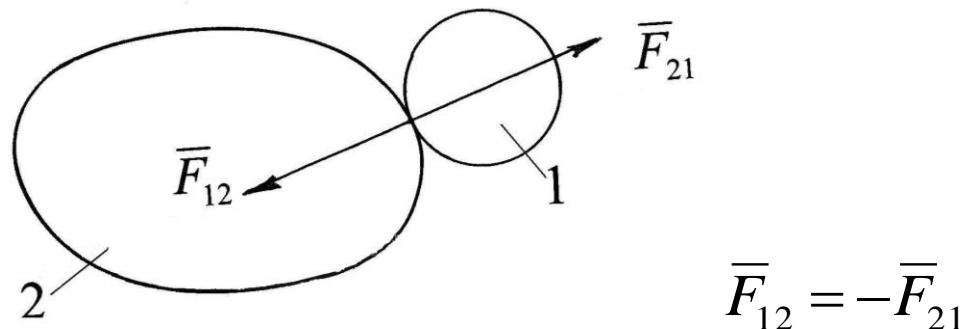


Рисунок 1.2 Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Аксиома 4. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рисунок 1.3).



$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

Рисунок 1.3 Действие и противодействие

Аксиома 5. Если деформируемое тело находится под действием некоторой системы сил в равновесии, то равновесие не нарушится и в том случае, если это тело отвердеет (станет абсолютно жестким).

1.3 Исследование связей и установление направления реакций

Тела, ограничивающие движения данного тела, называются связями. При решении задач по статике пользуются принципом освобожденности от связей (аксиомой связей).

Аксиома 6. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей.

Аксиома связей дает возможность применить к несвободному телу условия равновесия, справедливые для свободного тела.

В зависимости от вида связей для большинства из них можно указать направления реакций.

1) Связь посредством идеально гладкой неподвижной плоскости или поверхности.

При отсутствии трения поверхности являются идеально гладкими. Такая связь не препятствует скольжению тела по ее поверхности, но препятствует перемещению по общей нормали к поверхностям связи и твердого тела. Поэтому реакция связи направлена по общей нормали к поверхностям, как показано на рис.1.4, а. В случае кромочного касания нормальная реакция \bar{N}_A направлена по нормали к одной из поверхностей (рисунки 1.4, б, в).

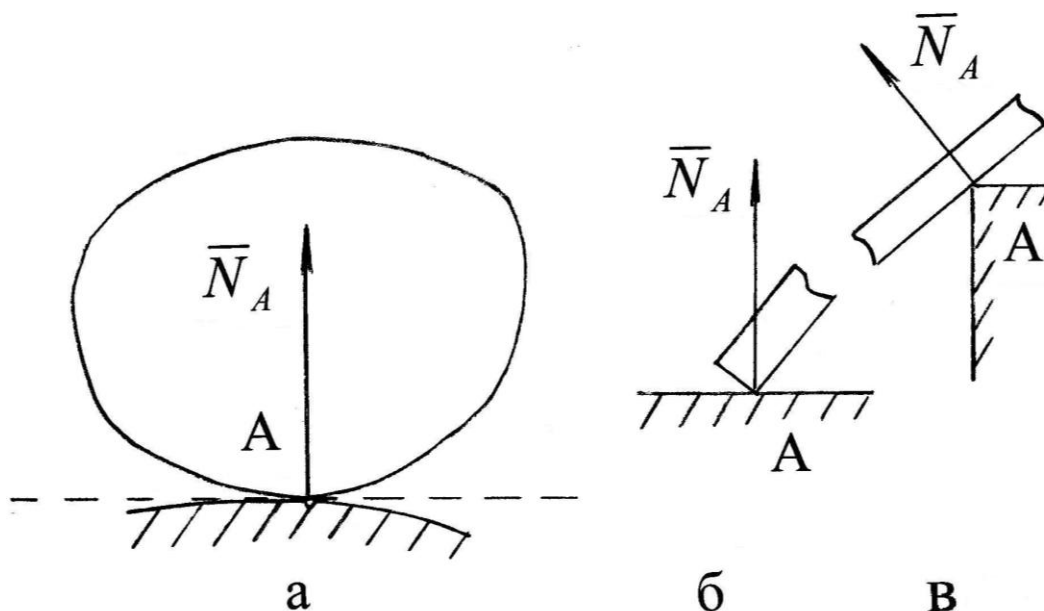


Рисунок 1.4 Связь в форме идеально гладкой поверхности

2) Гибкие связи. К числу гибких связей относятся нити, тросы, канаты, цепи и др.

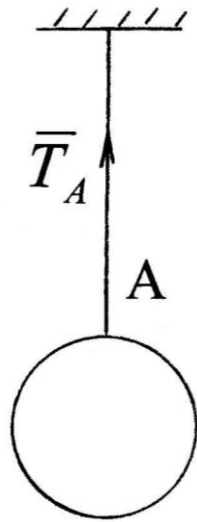


Рисунок 1.5 Реакция
гибкой связи

Реакции гибких связей направлены по касательной к связи в точке ее прикрепления к телу. В частности, сила реакции гибкой связи \bar{T}_A , как показано на рисунке 1.5, направлена вдоль этой связи.

3) Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник.

Простейший цилиндрический шарнир состоит, как показано на рисунке 1.6, а, из втулки, сопрягающейся с неподвижным болтом.

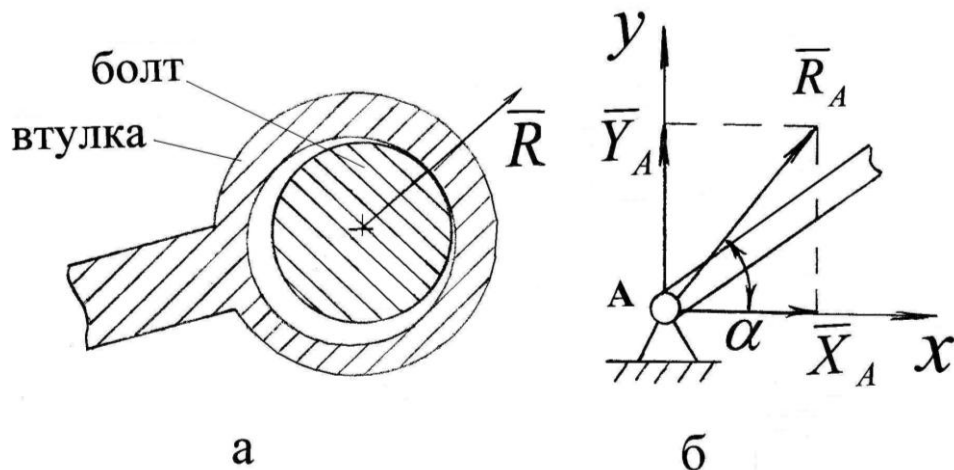


Рисунок 1.6 Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник

Трением между поверхностями втулки и болта часто можно пренебречь. Такая связь не препятствует повороту тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа, но отнимает у тела возможность перемещения по направлению нормали к поверхностям болта и втулки. Следовательно, реакция от болта на втулку может быть направлена только по этой нормали. Но так как положение втулки по отношению к болту зависит от действующих на тело активных сил, то контакт может происходить в любой точке поверхности болта и заранее указать направление реакции \bar{R} нельзя. Но можно утвер-

ждать, что сила реакции идеального неподвижного шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т.е. она расположена в плоскости xAy (рисунок 1.6, б). Поэтому реакцию \bar{R}_A раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие \bar{X}_A и \bar{Y}_A .

Решив задачу равновесия твердого тела и определив составляющие \bar{X}_A и \bar{Y}_A , модуль и направление полной реакции \bar{R}_A цилиндрического шарнира можно определить по соотношениям:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \cos \alpha = X_A / R_A.$$

4) Связь посредством сферического шарнира.

Сферический шарнир представляет собой шар, который может вращаться как угодно внутри сферической полости (рисунок 1.7, а). Направление реакции \bar{R}_A в этом случае заранее указать нельзя. При действии на тело пространственной системы сил реакцию \bar{R}_A показывают тремя взаимно перпендикулярными составляющими \bar{X}_A , \bar{Y}_A и \bar{Z}_A , как показано на рисунке 1.7,б.

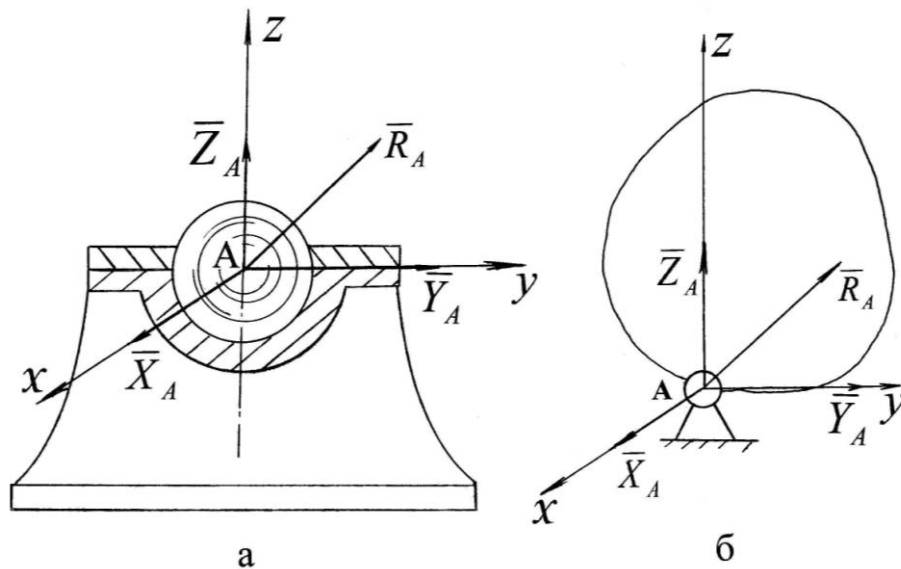


Рисунок 1.7 Связь в форме сферического шарнира

Решив задачу и определив составляющие \bar{X}_A , \bar{Y}_A и \bar{Z}_A , определяют модуль и направление вектора \bar{R}_A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2};$$

$$\cos(\bar{R}_A \wedge \bar{i}) = X_A / R_A; \quad \cos(\bar{R}_A \wedge \bar{j}) = Y_A / R_A; \quad \cos(\bar{R}_A \wedge \bar{k}) = Z_A / R_A,$$

где \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} - единичные векторы прямоугольной декартовой системы осей координат.

5) Связь осуществляется посредством подпятника.

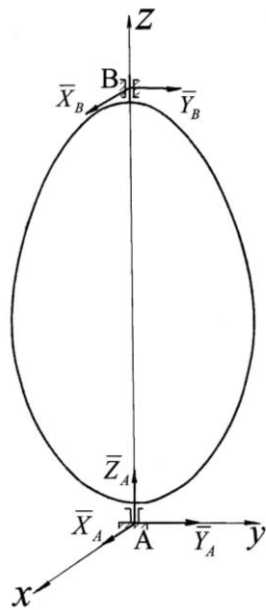
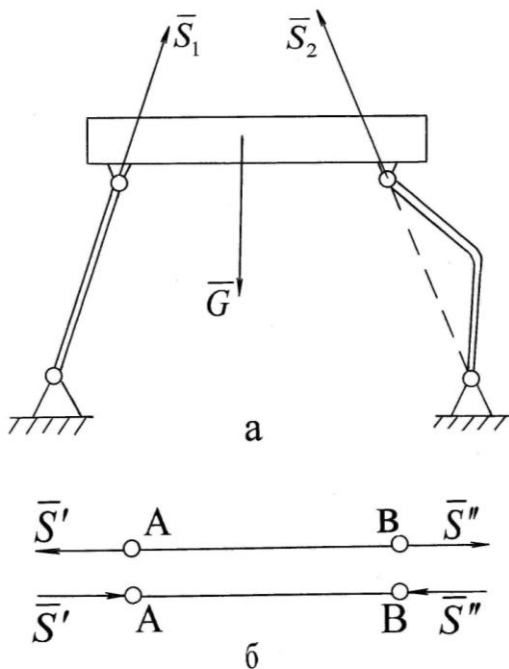


Рисунок 1.8 Связи в виде подпятника А и подшипника В, наложенные на ротор

Подпятник А на рисунке 1.8 представляет собой соединение цилиндрического шарнира с опорной плоскостью. Опорная плоскость не дает возможности ротору проседать (опускаться). Реакции подпятника складываются из реакции цилиндрического шарнира и реакции опорной плоскости, т.е. имеет три взаимно перпендикулярные составляющие \bar{X}_A , \bar{Y}_A и \bar{Z}_A .

Реакция верхнего подшипника В показана двумя составляющими \bar{X}_B и \bar{Y}_B .

б) Связь в форме невесомого идеального стержня.



В нашем курсе рассматриваются только невесомые твердые стержни, соединяющиеся друг с другом и другими телами при помощи идеальных (лишенных трения) шарниров. Стержни находятся в равновесии под действием двух сил, приложенных в узлах. Следовательно, в соответствии с 1 аксиомой статики, эти две силы равны по модулю и направлены по одной прямой (линии узлов) в противоположные стороны (рисунок 1.9, а). Стержни могут работать как на растяжение, так и на сжатие (рисунок 1.9, б).

Рисунок 1.9 Реакции невесомого стержня

7) Катки, катковые опоры. Подвижная катковая опора на рисунке 1.10, а отнимает у твердого тела лишь одно возможное движение – перпендикулярно неподвижной опорной поверхности. Именно в этом направлении и направлена реакция \bar{R} .

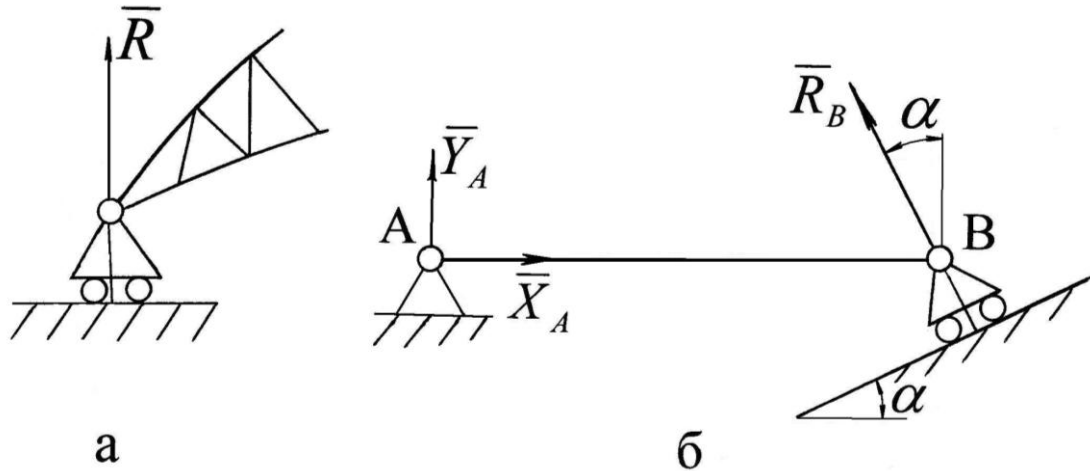


Рисунок 1.10 Катковые опоры

Балка АВ на рисунке 1.10, б имеет две опоры: неподвижную А и подвижную В. Реакцию шарнирной опоры А необходимо обозначать двумя взаимно перпендикулярными составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A . Реакция \bar{R}_B катковой опоры В перпендикулярна опорной поверхности.

8) Жесткая заделка (защемление).

Реакции жесткой заделки можно заменить одной неизвестной заранее силой, приложенной в некоторой точке, и одной парой сил (рисунок 1.11, а), момент которой наперед неизвестен. Силу при этом изображают двумя ее составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A (рисунок 1.11, б).

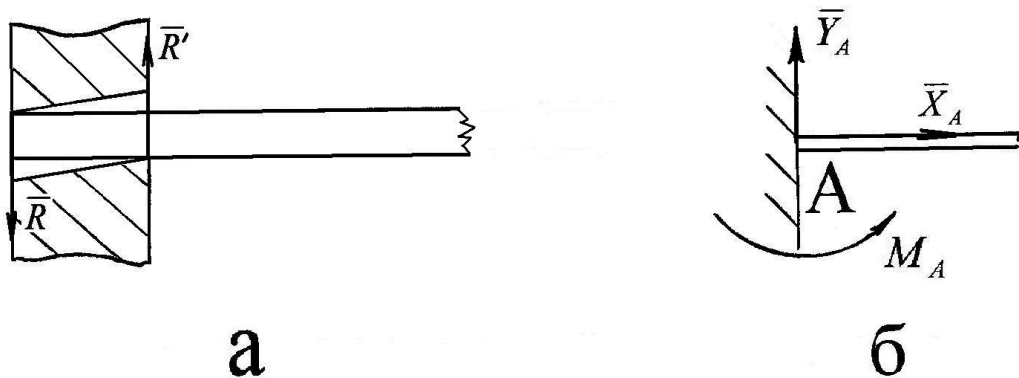


Рисунок 1.11 Реакции связей в точке защемления

ЛЕКЦИЯ 2. СХОДЯЩАЯСЯ СИСТЕМА СИЛ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ, УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

2.1 Проекция силы на ось

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и направлением оси: $F_x = F \cdot \cos \alpha$. При решении задач рекомендуется сначала вычислить абсолютное значение проекции силы на косинус острого угла между линией действия силы и осью, а потом по чертежу определить знак проекции. Если проекция направлена по оси, то знак проекции положительный (рисунок 2.1, а). Если направление проекции противоположно оси, как на рисунке 2.1, б, то проекция отрицательная. В частном случае, когда вектор силы перпендикулярен оси (рисунок 2.1, в), проекция равна нулю.

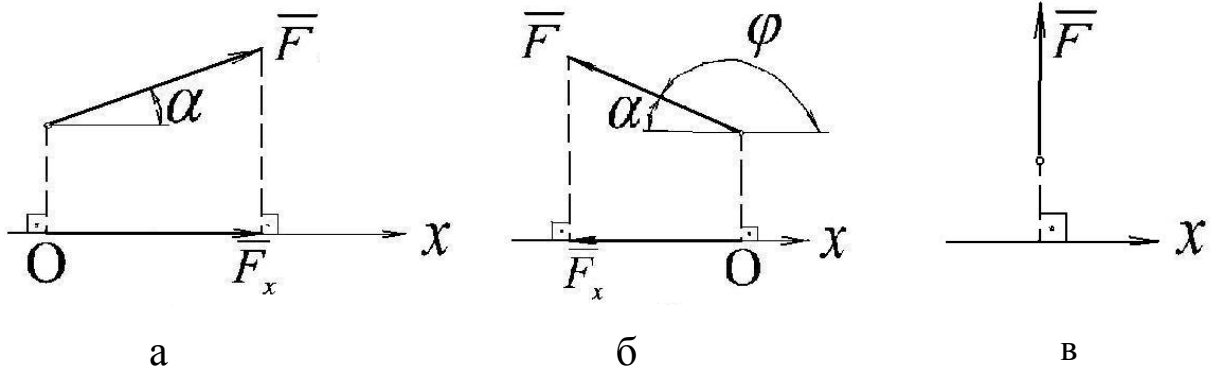
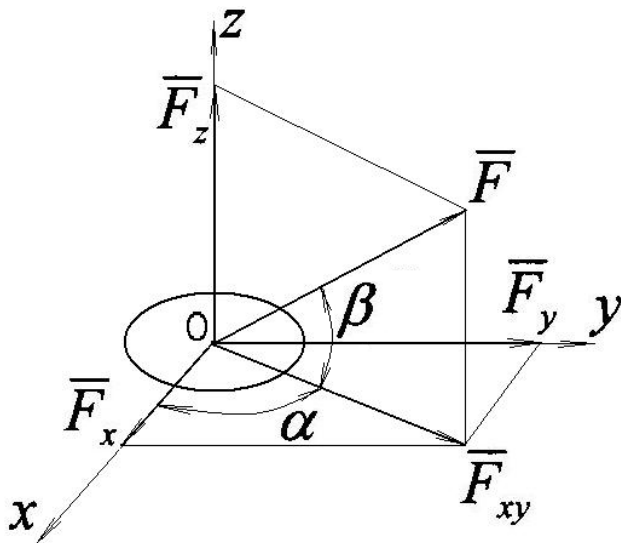


Рисунок 2.1 Проектирование вектора силы на ось



$$F_{xy} = F \cdot \cos \beta$$

$$F_x = X = F_{xy} \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$F_y = Y = F_{xy} \cdot \sin \alpha = F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$F_z = Z = F \cdot \sin \beta$$

Рисунок 2.2 Проектирование произвольно направленного вектора силы на три оси координат

Проекции силы на соответствующие оси координат обозначаются F_x , F_y , F_z . В теоретической механике соответствующие проекции могут также обозначаться X , Y , Z .

На рисунке 2. 2 показано проектирование произвольно направленного вектора силы \vec{F} на оси координат.

2.2 Сходящаяся система сил. Приведение к равнодействующей, условия равновесия

Сходящейся называется система сил, линии действия которых проходят через одну и ту же точку. Различают плоскую и пространственную сходящиеся системы сил.

Рассмотрим приведение сходящейся системы сил к простейшему виду и установим условия равновесия.

Приведение к равнодействующей силе. Применим к сходящейся системе сил на рисунке 2.3, а аксиому 3 параллелограмма. Заменяем первые две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 равнодействующей силой \vec{R}_{12} , как показано на рисунке 2.3, б, причем

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_{12}.$$

Затем по правилу параллелограмма складываем силы \vec{R}_{12} и \vec{F}_3 и получим их равнодействующую

$$\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продолжая процесс векторного сложения сил для всех n сил, построив $n-1$ параллелограмм, получим

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.1)$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе \vec{R} – равнодействующей этой системы сил.

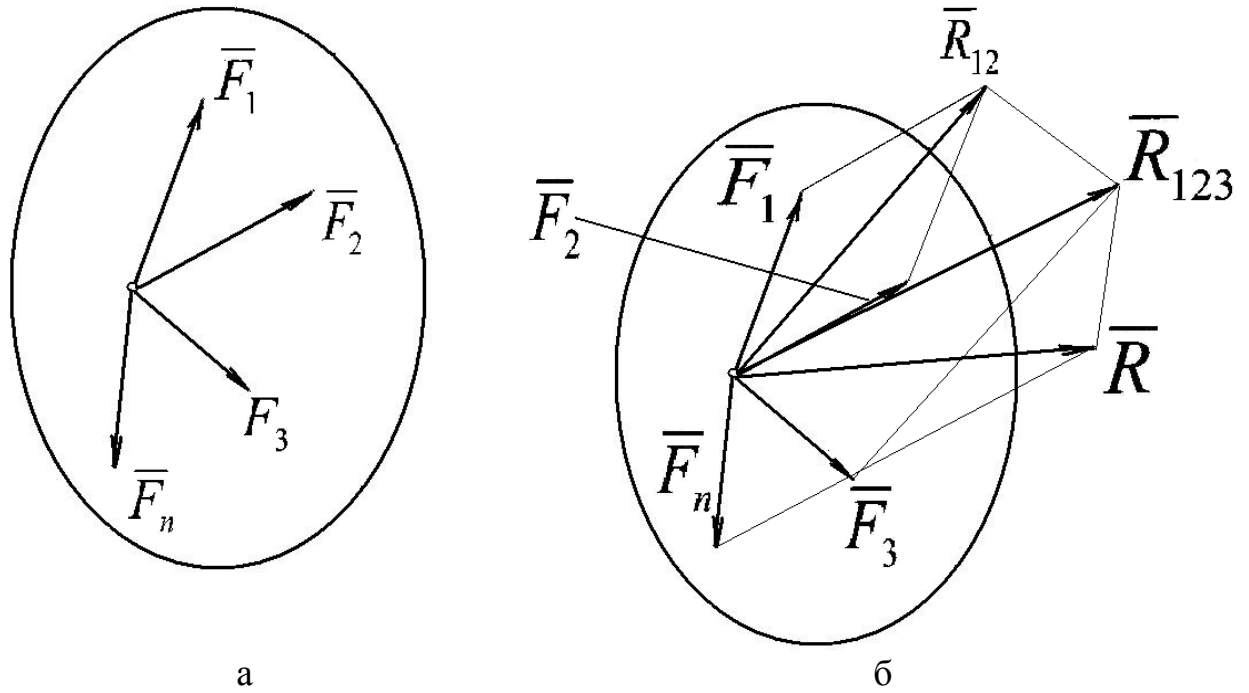


Рисунок 2.3 Определение равнодействующей сходящейся системы сил

Тот же результат можно получить, если последовательно выстроить, как показано на рисунке 2.4, в цепочку из n сил, затем начало первого вектора силы \bar{F}_1 соединить с концом последнего вектора \bar{F}_n .

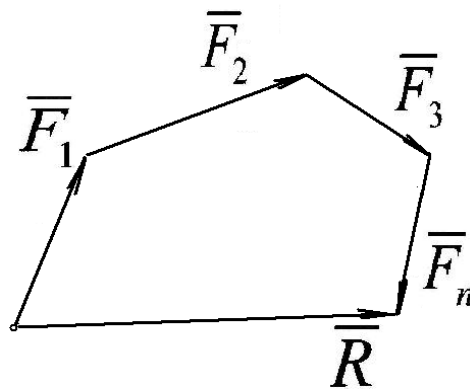


Рисунок 2.4 Построение силового многоугольника

Для пространственной сходящейся системы сил силовой многоугольник является пространственной фигурой, а для сходящейся плоской системы сил – плоской. Выполнив подобные построения в

масштабе, можно достаточно точно определить величину и направление равнодействующей силы \bar{R} .

Решим эту же задачу аналитически. Проектируем векторное уравнение (2.1) на неподвижные декартовы оси координат. Получим:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = \sum_1^n X_k ; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum_1^n Y_k ; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = \sum_1^n Z_k ;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} . \quad (2.2)$$

Косинусы направляющих углов вектора равнодействующей \bar{R} равны:

$$\cos(R_x \wedge x) = \cos \alpha = R_x / R ; \quad \cos(R_y \wedge y) = \cos \beta = R_y / R ;$$

$$\cos(R_z \wedge z) = \cos \gamma = R_z / R . \quad (2.3)$$

Условия равновесия сходящейся системы сил. Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этой системы сил была равна нулю (геометрическое условие равновесия):

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0 \quad (2.4)$$

Получим условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил в аналитической форме:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0 ;$$

$$R_x = \sum X = 0 ; \quad R_y = \sum Y = 0 ; \quad R_z = \sum Z = 0 . \quad (2.5)$$

Для равновесия свободного твердого тела под действием пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую их трех выбранных любым способом координатных осей были одновременно равны нулю.

Частный случай плоской сходящейся системы сил:

$$\sum X = 0 ; \quad \sum Y = 0 . \quad (2.6)$$

Для равновесия свободного твердого тела под действием плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на две взаимно перпендикулярные неподвижные оси координат были одновременно равны нулю.

2.3 Теорема о трех силах

При решении задач на равновесие плоской сходящейся системы сил часто пользуются теоремой о трех силах.

Дано: на свободное твердое тело, находящееся в равновесии, действуют силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , расположенные в одной плоскости (рисунок 2.5, а). Доказать, что линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство. Перенесем вектора сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в точку O пересечения их линий действия (следствие из аксиом 1 и 2). Построив векторный параллелограмм, заменим эти две силы равнодействующей \vec{R}_{12} , приложенной в точке O (рисунок 2.5, б). Свободное тело на рисунке 2.5, в находится в равновесии под действием уже двух сил \vec{F}_1 и \vec{R}_{12} . На основании аксиомы 1 линии действия этих сил совпадают, т.е. проходят через точку O .

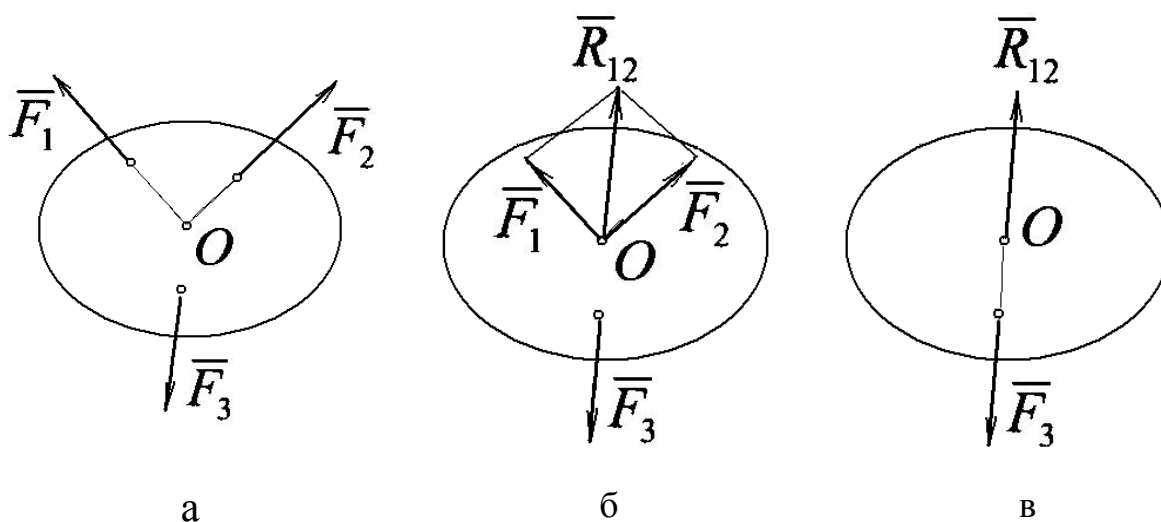


Рисунок 2.5 Равновесие твердого тела под действием трех сил

2.4 Момент силы относительно точки

Для количественного измерения вращательного эффекта силы \vec{F} вводится понятие о моменте силы относительно точки.

Моментом силы относительно некоторой точки O на плоскости называется скалярная величина, равная взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки (рисунок 2.6). Будем считать момент силы положительным, если эта сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, как на рисунке 2.6, а, и отрицательным – по ходу, как на рисунке 2.6, б.

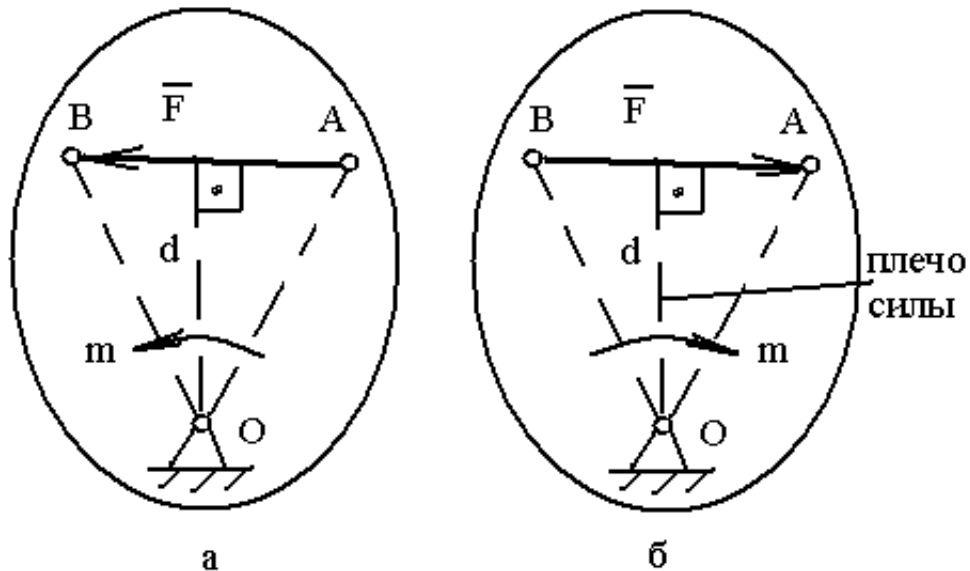


Рисунок 2.6 Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки будем обозначать символом $m_o(\bar{F})$.

Геометрически численное значение момента силы \bar{F} относительно точки O равно удвоенной площади треугольника OAB на рисунке 2.7

$$m_o(\bar{F}) = F \cdot d = 2A \triangle OAB.$$

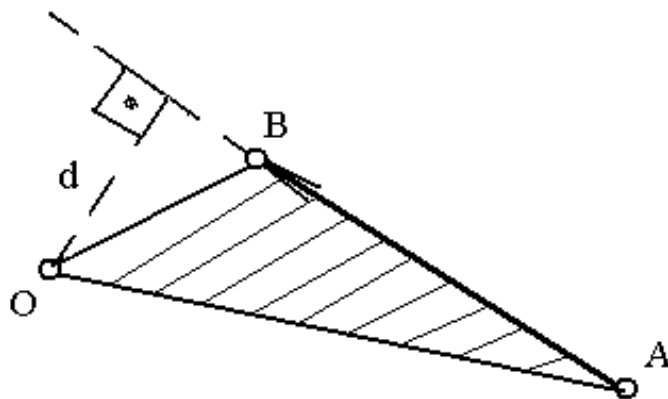


Рисунок 2.7 Геометрический смысл момента силы относительно точки

Единицей измерения момента в системе СИ является $H \cdot m$.

Момент силы относительно точки не изменится при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия. Если линия действия силы проходит через точку O , то момент этой силы относительно точки O равен нулю.

2.5 Момент силы относительно точки как вектор

При рассмотрении плоской системы сил момент силы относительно точки рассматривают как скалярную величину. В случае пространственной системы сил, когда линии действия сил системы расположены в различных плоскостях, момент силы относительно точки целесообразно представлять как векторную величину.

Моментом силы \vec{F} относительно точки O называется вектор, приложенный в точке O , равный по модулю произведению модуля силы на плечо силы и направленный по перпендикуляру к плоскости OAB , проходящей через линию действия силы \vec{F} и точку O , в ту сторону, откуда вращение тела силой представляется происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 2.8).

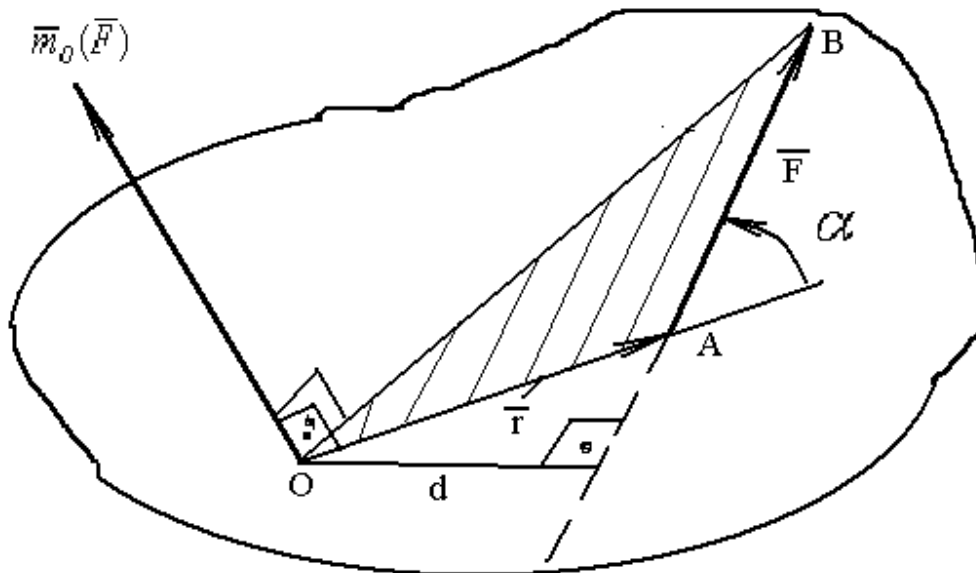


Рисунок 2.8 Момент силы относительно точки как вектор

Будем обозначать вектор-момент силы относительно точки символом $\vec{m}_O(\vec{F})$ и выразим его с помощью векторного произведения $\vec{r} \times \vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r} = \overline{OA}$ – радиус-вектор точки А приложения силы \vec{F} относительно точки О. Модуль данного векторного произведения равен

$$|\overline{m}_O(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}) = F \cdot d = 2\Delta OAB.$$

Правило определения направления вектора-момента силы относительно точки следующее: вектор-момент $\overline{m}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены вектора \vec{r} и \vec{F} таким образом, чтобы наблюдатель, смотрящий с положительного конца вектор-момента, видел поворот первого сомножителя \vec{r} до совмещения со вторым сомножителем \vec{F} на угол $\alpha < 180^\circ$ происходящим против хода часовой стрелки.

2.6 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Момент равнодействующей плоской сходящейся системы сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия этой системы сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

$$\underline{\text{Дано:}} \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

$$\underline{\text{Доказать:}} \quad m_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k).$$

Доказательство. В точке А твердого тела приложена плоская сходящаяся система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ (рисунок 2.9). Равнодействующая \vec{R} системы сил приложена в той же точке А. Проектируем все силы на ось x и на основании теоремы о проекции равнодействующей получаем $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$. Умножим обе части равенства на OA и получим

$$OA \cdot R_x = \sum_{k=1}^n (OA \cdot F_{kx}) \quad (2.7)$$

Пользуясь чертежом на рисунке 2.9, определим момент силы \vec{F}_1 относительно центра О.

$$m_O(\vec{F}_1) = 2\Delta OAB = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}. \quad (2.8)$$

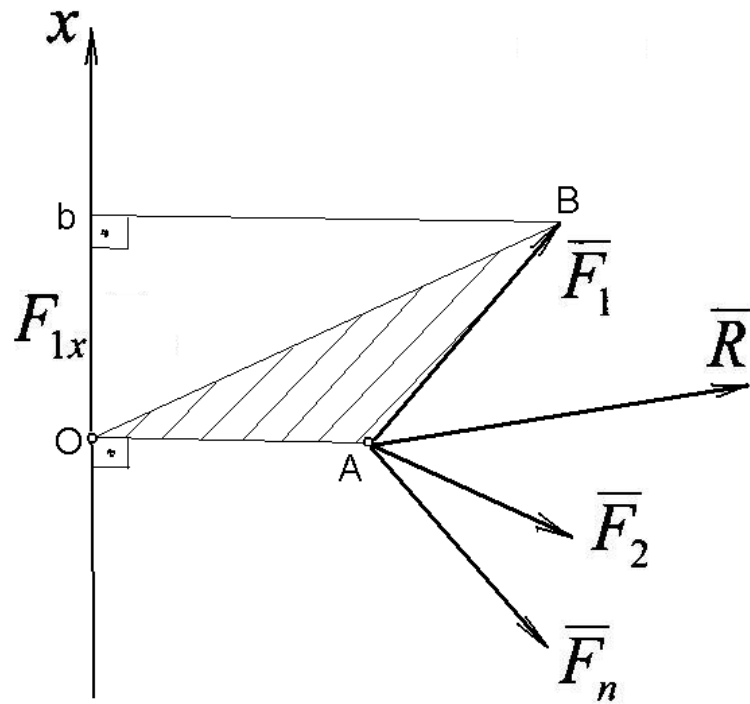


Рисунок 2.9 К доказательству теоремы Вариньона

Совершенно аналогично можно определить момент для любой из сил системы, в том числе момент равнодействующей \bar{R} . Формулы (2.7) и (2.8) нетрудно преобразовать к требуемому виду

$$m_o(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k). \quad (2.9)$$

Примеры решения задач

Задача 2.1 Два груза, в 10 Н и 5 Н, висят на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем больший груз висит ниже меньшего. Каково натяжение веревки, если верхний конец ее прикреплен к неподвижной точке?

Решение. Рассмотрим равновесие груза 1, освободив его от связи — веревки. На груз действует сила тяжести \bar{G}_1 , а также сила натяжения веревки \bar{T}_1 , направленная вдоль гибкой связи (рисунок 2.10, б). Составим уравнение равновесия системы двух сил, направленных по одной прямой:

$$\sum X = T_1 - G_1 = 0.$$

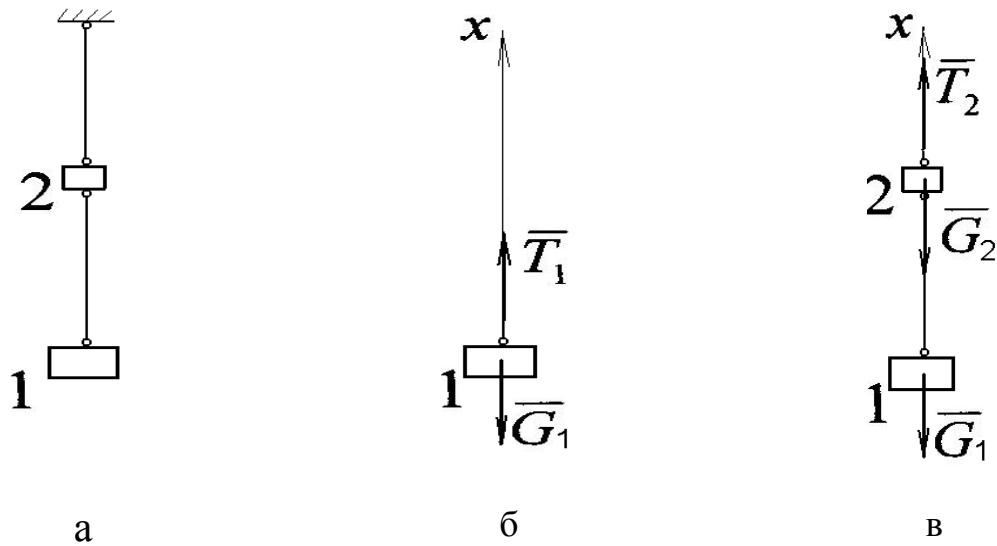


Рисунок 2.10 Расчетная схема к задаче 2.1

Натяжение веревки между двумя грузами равно

$$T_1 = G_1 = 5 \text{ Н.}$$

Для определения натяжения верхней части веревки отбросим связь выше груза 2 (рисунок 2.10, в). Составим уравнение равновесия для системы трех сил, направленных по одной прямой:

$$\sum X = T_2 - G_1 - G_2 = 0; \quad T_2 = G_1 + G_2 = 5 + 10 + 15 \text{ Н.}$$

Задача 2.2 Круглая заготовка весом $\bar{G} = 60 \text{ Н}$ оперяется на две гладкие взаимно перпендикулярные плоскости АВ и ВС стеллажа, как показано на рисунке 2.11, а. Определить давление заготовки на каждую плоскость, зная, плоскость ВС составляет с горизонталью угол 60° .

Решение. Рассмотрим равновесие заготовки. Показываем в центре О силу тяжести \bar{G} однородного диска. Освобождаем твердое тело от наложенных на него в точках Д и Е связей. Реакции \bar{N}_D и \bar{N}_E гладких опорных плоскостей направляем по общим нормальям к поверхностям, т.е. через центр О заготовки (рисунок 2.11, б).

Записывает условие равновесия плоской сходящейся системы сил, как векторное уравнение

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{G} + \bar{N}_D + \bar{N}_E = 0.$$

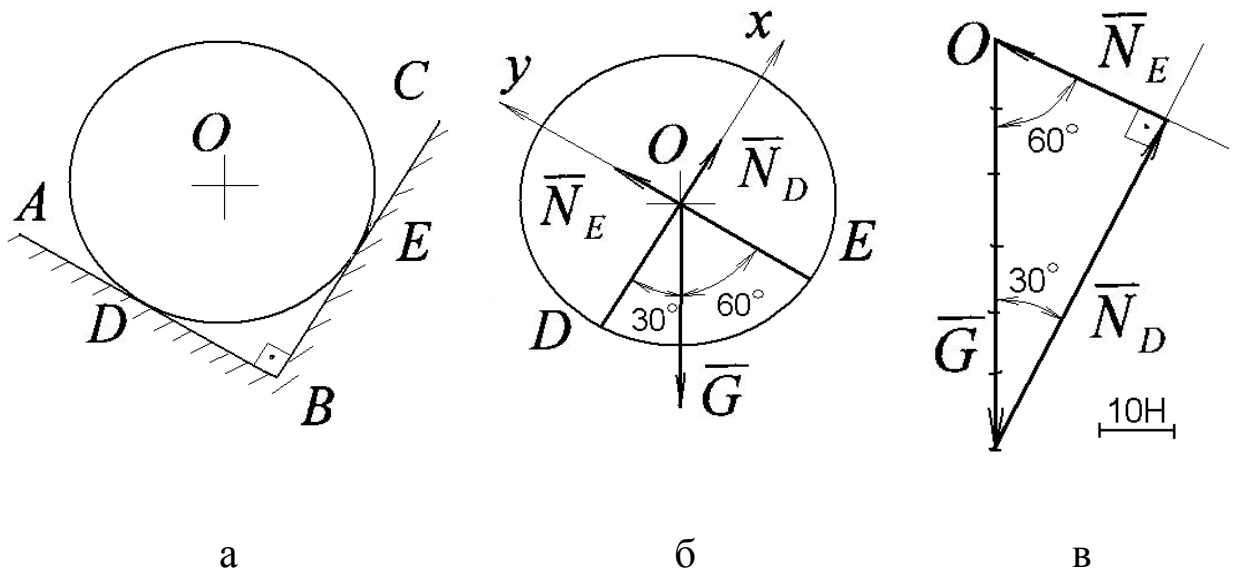


Рисунок 2.11 Расчетная схема к задаче 2.2

Строим в масштабе на рисунке 2.11, в силовой треугольник в соответствии с векторным уравнением. В результате графического решения определяем:

$$N_D = 52 \text{ Н}, \quad N_E = 30 \text{ Н}.$$

Решаем задачу аналитически, пользуясь расчетной схемой на рисунке 2.11, б:

$$\sum X = -G \cdot \cos 30 + N_D + 0 = 0; \quad \sum Y = -G \cdot \cos 60 + N_E + 0 = 0.$$

Производим вычисления:

$$N_D = G \cdot \cos 30 = 60 \cdot \cos 30 = 52,0 \text{ Н}; \quad N_E = G \cdot \sin 30 = 60 \cdot \sin 30 = 30 \text{ Н}.$$

Задача 2.3 Рама АВ теплицы, изображенная на рисунке 2.12 в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира А и своим краем В свободно опирается на выступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 Н, приложен к середине С рамы.

Решение. Рассматриваем равновесие рамы АВ. В центре С прикладываем к твердому телу силу тяжести \bar{G} . Реакцию \bar{N}_B гладкой опорной поверхности в точке В направляем перпендикулярно раме. Действие цилиндрического шарнира А на раму показываем реакцией \bar{R}_A , направление которой устанавливаем при помощи теоремы о трех силах. Для этого находим точку S

пересечения линий действия векторов \bar{N}_B и \bar{G} , проводим вспомогательную линию AS, по которой направляем реакцию \bar{R}_A . Линии действия трех сил пересеклись в одной точке S. Определяем значение угла α .

$$\underline{\Delta CBS.} \quad BC=BS=a. \quad \underline{\Delta ABS.} \quad \operatorname{tg} \alpha = BS / AB = a / 2a = 0,5; \quad \alpha = 26,6^\circ.$$

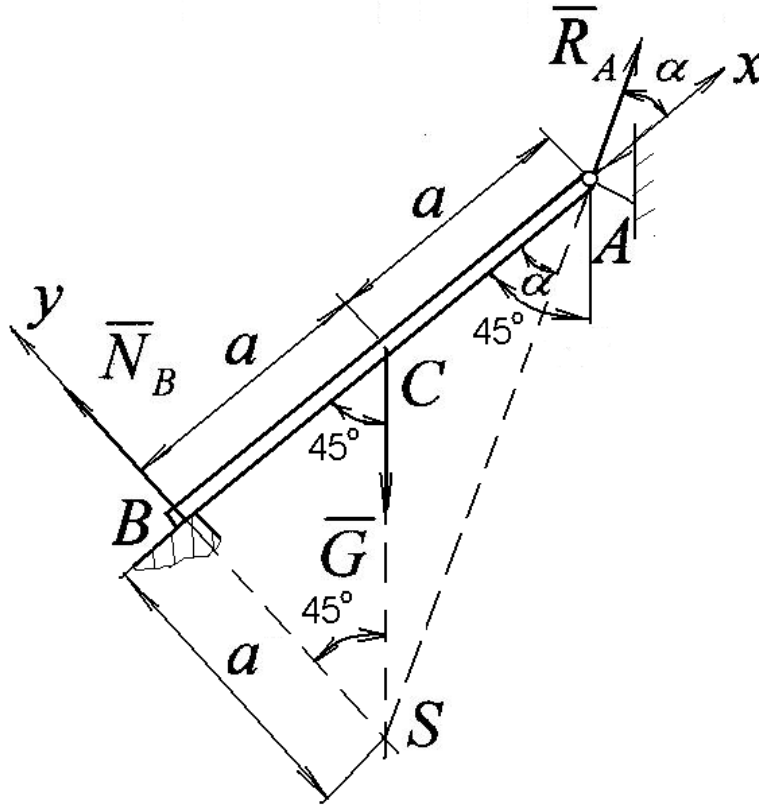


Рисунок 2.12 Расчетная схема к задаче 2.3

Выбираем оси координат, как показано на рисунке 2.12, и для плоской сходящейся системы трех сил составляем два аналитических уравнения равновесия:

$$\sum X = R_A \cdot \cos \alpha - G \cdot \cos 45 + 0 = 0; \quad \sum Y = R_A \cdot \sin \alpha - G \cdot \sin 45 + N_B = 0.$$

Вычисляем реакции опор:

$$R_A = G \cdot \frac{\cos 45}{\cos \alpha} = 89 \cdot \frac{\cos 45}{\cos 26,6} = 70,1 \text{ Н};$$

$$N_B = G \cdot \sin 45 - R_A \cdot \sin \alpha = 89 \cdot \sin 45 - 70,1 \cdot \sin 26,6 = 31,5 \text{ Н}.$$

Задача 2.4 В двигателе внутреннего сгорания площадь поршня равна $A = 0,02 \text{ м}^2$, длина шатуна $AB = 0,3 \text{ м}$, длина кривошипа $OA = 0,06 \text{ м}$. Давление газа в данный момент за поршнем равно $p_1 = 10^6 \text{ Н/м}^2$, перед поршнем

$p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Найти силу \bar{S} , действующую со стороны шатуна АВ на кривошип ОА, вызванную перепадом давлений газа, если угол ВАО равен 90° . Трением между поршнем и цилиндром пренебречь.

Решение.

В треугольнике ОАВ на рисунке 2.13, а определим величину угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = OA / AB = 0,06 / 0,2 = 0,3; \quad \alpha = 16,7^\circ.$$

Освободим поршень от связей и рассмотрим его равновесие (рисунок 2.13, б).

На поршень действуют усилия давления газов \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , величины которых равны: $P_1 = p_1 \cdot A = 10^6 \cdot 0,02 = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$, $P_2 = p_2 \cdot A = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,02 = 4 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Реакция \bar{S} со стороны невесомого стержня АВ на поршень направлена по шатуну, реакция \bar{N} от цилиндра на поршень горизонтальна.

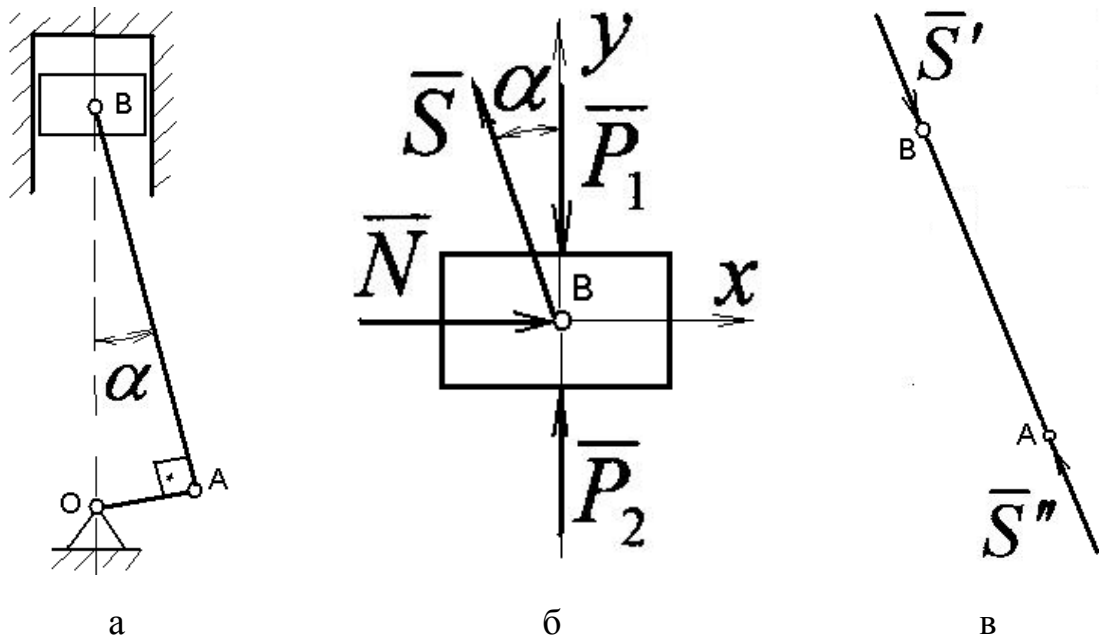


Рисунок 2.13 Расчетная схема к задаче 2.4

Запишем аналитические уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum X = N - S \cdot \sin \alpha; \quad \sum Y = S \cdot \cos \alpha - P_1 + P_2.$$

Производим подсчеты:

$$S = (P_1 - P_2) / \cos \alpha = (2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^3) / \cos 16,7 = 1,68 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$N = S \cdot \sin \alpha = 1,68 \cdot 10^4 \cdot \sin 16,7 = 5,05 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Невесомый стержень АВ, изображенный на рисунке 2.13, в, находится в равновесии под действием сил \bar{S}' и \bar{S}'' , причем $\bar{S}' = -\bar{S}$ (на основании аксиомы 4); $\bar{S}'' = -\bar{S}'$ (на основании аксиомы 1). Со стороны шатуна АВ на кривошип ОА действует реакция, равная по модулю \bar{S}'' , и противоположно \bar{S}'' направленная.

Задача 2.5 Горизонтальная балка АВ удерживается в равновесии стержнями АС и АД. Найти усилия в стержнях и балке, если к концу А балки приложена сила \bar{F} , перпендикулярная балке и образующая с вертикалью угол α . Известно: $\angle OAB = \beta$; $\angle DAO = \angle CAO = \gamma$. Весами балки и стержней пренебречь, крепления на рисунке 2.14, а шарнирные.

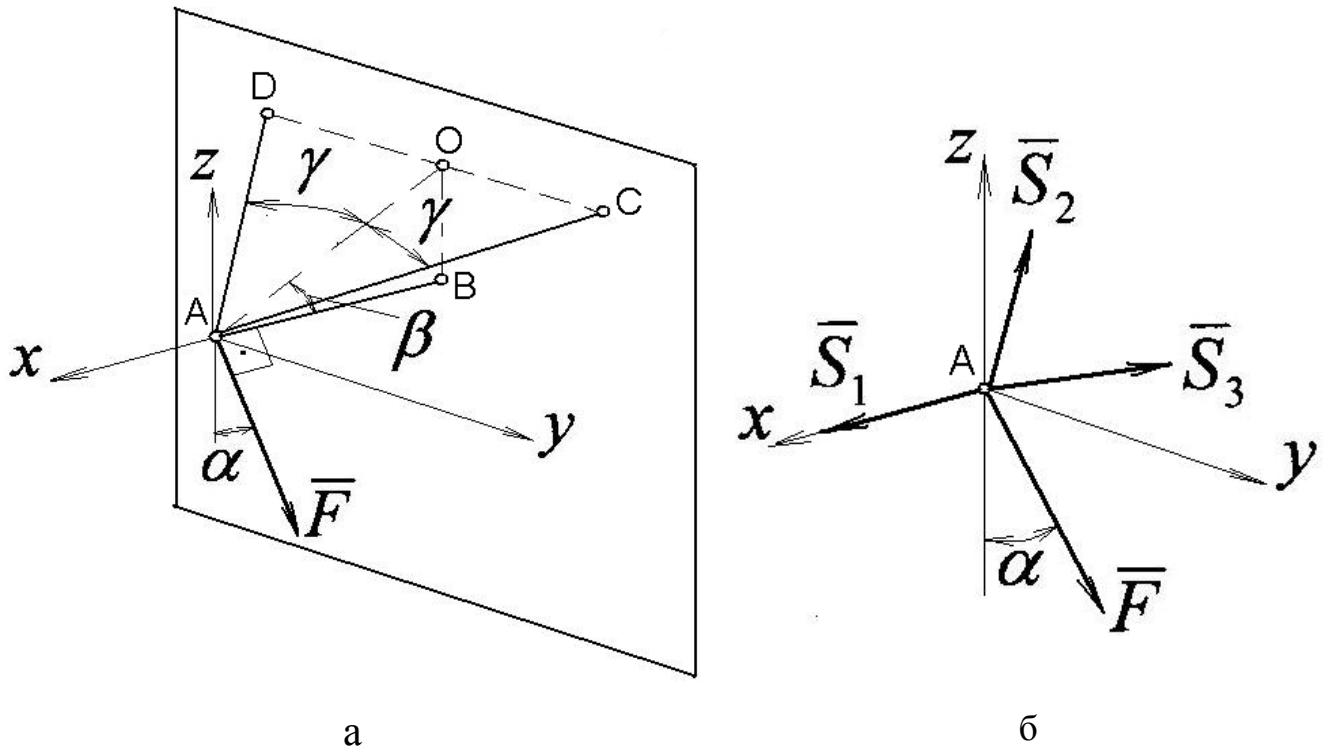


Рисунок 2.14 Расчетная схема к задаче 2.5

Решение. Рассматриваем равновесие шарнирного узла А. Заменяем действие невесомых стержней АВ, АС и АД на узел А усилиями \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 , направив вектора по соответствующим стержням (рисунок 2.14, б).

В таблице 2.1 приведены проекции сил, действующих на точку А, на оси координат.

Таблица 2.1 Проекция сил, действующих на узел А, на оси координат

Проекция сил	Силы			
	F	S_1	S_2	S_3
F_{kx}	0	$-S_1 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta$	$-S_2 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta$	S_3
F_{ky}	$F \cdot \sin \alpha$	$-S_1 \cdot \sin \gamma$	$S_2 \cdot \sin \gamma$	0
F_{kz}	$-F \cdot \cos \alpha$	$S_1 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta$	$S_2 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta$	0

Аналитические уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил имеют вид:

$$\sum X = -S_1 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta - S_2 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta + S_3 = 0;$$

$$\sum Y = F \cdot \sin \alpha - S_1 \cdot \sin \gamma + S_2 \cdot \sin \gamma = 0;$$

$$\sum Z = -F \cdot \cos \alpha + S_1 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta + S_2 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta = 0.$$

Из уравнений равновесия получаем:

$$S_1 = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}; \quad S_2 = \frac{F \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma}{2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta};$$

$$S_3 = F \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

Стержень АВ на рисунке 2.14, а сжат, стержни АС и АД растянуты.

ЛЕКЦИЯ 3. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

3.1 Приведение системы двух параллельных сил, направленных в одну сторону, к равнодействующей

В случае системы параллельных сил для определения их равнодействующей правило параллелограмма не годится, так как линии действия сил не пересекаются.

Имеем систему параллельных сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенных к твердому телу и направленных в одну сторону, как показано на рисунке 3.1, а. Будем для определенности считать, что $F_1 > F_2$. В соответствии с аксиомами 1 и 2 состояние тела не изменится, если к нему добавить, как показано на рисунке

3.1, б, эквивалентную нулю систему двух равных по модулю и противоположно направленных по прямой АВ сил ($\bar{P}; -\bar{P}$).

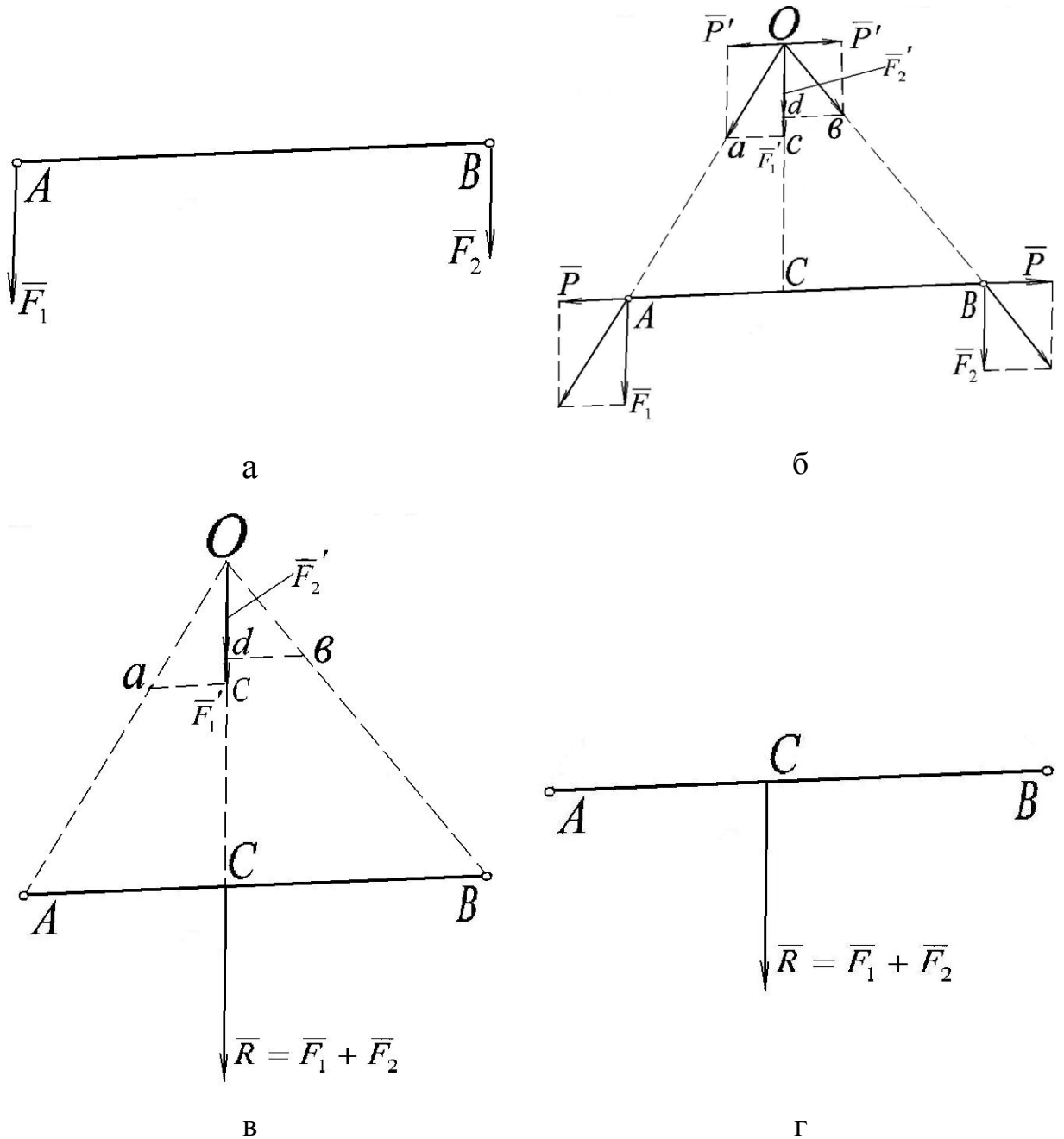


Рисунок 3.1 Приведение системы двух параллельных сил, направленных в одну сторону, к равнодействующей

Пользуясь третьей аксиомой статики, заменим по правилу параллелограмма силы \bar{F}_1 и \bar{P} равнодействующей \bar{R}_1 , приложенной в точке А, а силы \bar{F}_2 и \bar{P} равнодействующей силой \bar{R}_2 , приложенной в точке В.

$$\bar{F}_1 + \bar{P} = \bar{R}_1; \quad \bar{F}_2 + \bar{P} = \bar{R}_2.$$

Перенесем вектора \bar{R}_1 и \bar{R}_2 в точку О пересечения линий их действия. Затем, пользуясь правилом параллелограмма, разложим вектор \bar{R}_1 на вектора \bar{F}_1' и \bar{P} , а вектор \bar{R}_2 заменим векторами \bar{F}_2' и \bar{P} . Приложенную в точке О эквивалентную нулю систему сил $(\bar{P}; -\bar{P})$ отбросим (рисунок 3.1, в).

Перенесем вектора сил \bar{F}_1' и \bar{F}_2' по общей линии их действия в точку С прямой АВ. Таким образом, вектор $\bar{R} = \bar{F}_1' + \bar{F}_2'$ на рисунке 3.1, г является равнодействующей системы двух направленных в одну сторону сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 . По модулю $R = F_1 + F_2$.

Определим положение точки С приложения равнодействующей \bar{R} .

На рисунке 3.1, б $\triangle OAC$ подобен $\triangle Oac$. Следовательно

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ac}{Oc} \quad \text{или} \quad \frac{AC}{OC} = \frac{P}{F} \quad (3.1)$$

Из подобия треугольников ОВС и Овс следует

$$\frac{BC}{OC} = \frac{bd}{Od} \quad \text{или} \quad \frac{BC}{OC} = \frac{P}{F_2} \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) получим

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \quad (3.3)$$

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, им параллельна, направлена в ту же сторону и равна по модулю сумме их модулей. Линия действия равнодействующей лежит между линиями действия составляющих сил на расстояниях от них, обратно пропорциональных модулям этих сил.

3.2 Приведение системы двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, к равнодействующей

Заменим силу \bar{F}_1 на рисунке 3.2, а двумя параллельными ей, направленными в одну сторону силами \bar{F}_2' и \bar{R} таким образом, чтобы система сил на рисунке 3.2, б оставалась эквивалентной системе на рисунке 3.2, а. Для этого произведем действие, обратное операции в § 3.1.

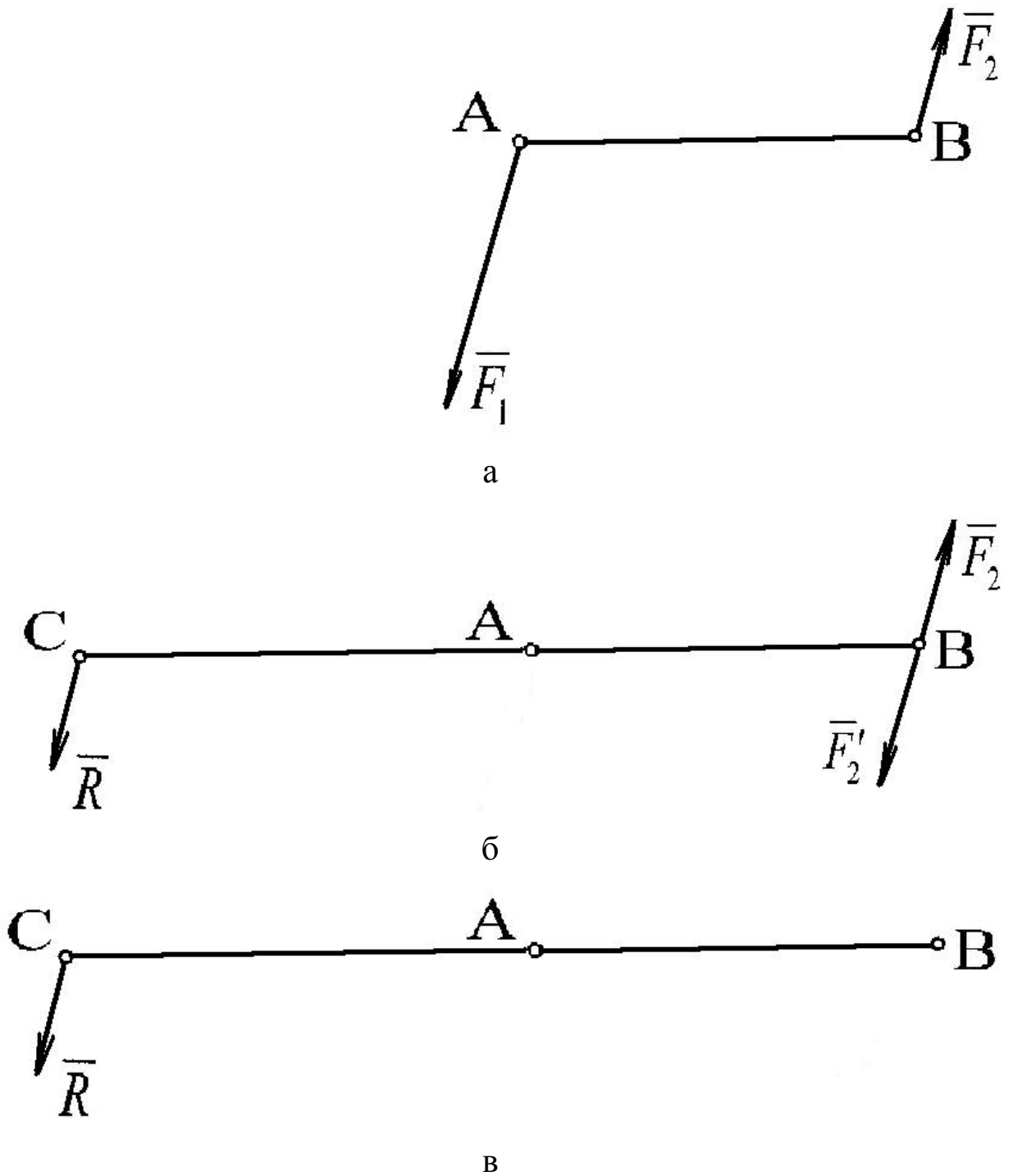


Рисунок 3.2 Приведение системы двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, к равнодействующей

Эквивалентность соблюдается в том случае, если сила \vec{F}_1 будет равнодействующей сил \vec{R} и \vec{F}_2' . Для этого должны соблюдаться условия:

$$F_1 = F_2' + R; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{R}{F_2'}$$

Силу F_2' выбираем равной по модулю силе F_2 . В этом случае:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{R}{F_2}; \quad R = F_1 - F_2; \quad AB = BC - AC;$$

$$\frac{BC - AC}{AC} = \frac{F_1 - F_2}{F_2}; \quad \frac{BC}{AC} - \frac{AC}{AC} = \frac{F_1}{F_2} - \frac{F_2}{F_2}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (3.4)$$

Таким образом (рисунок 3.2, в), равнодействующая двух неравных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, им параллельна, направлена в сторону большей силы и равна по модулю разности их модулей. Линия действия равнодействующей лежит за большей силой на расстояниях от линий действия составляющих сил, обратно пропорциональных модулям этих сил.

3.3 Пара сил. Момент пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю параллельных друг другу и направленных в противоположные стороны сил, линии действия которых не совпадают.

Пару сил будем обозначать символом (\bar{F}_1, \bar{F}_2) . Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил называется плечом пары (рисунок 3.3).

Попытаемся заменить пару сил одной равнодействующей по правилу, полученному в предыдущем параграфе 3.2. Из зависимостей (3.3) получим:

$$R = F_1 - F_2 = 0: \quad AC = AB \cdot \frac{F_2}{R} = AB \cdot \frac{F_2}{0} = \infty.$$

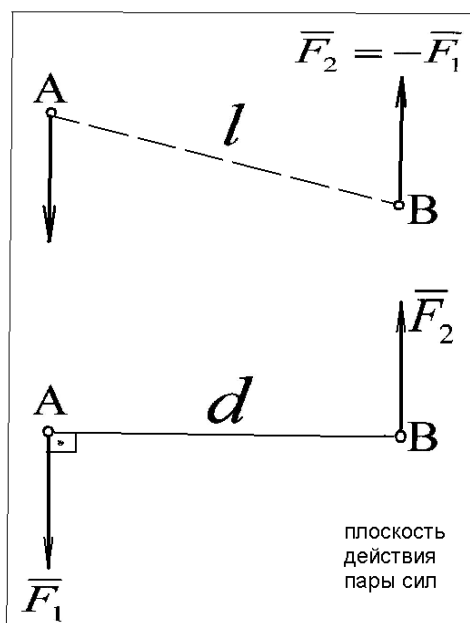
Следовательно, равнодействующая пары сил равна нулю, а ее точка приложения находится в бесконечности. Иными словами, пара сил не имеет равнодействующей и ее нельзя заменить одной силой, ей эквивалентной. Вместе с тем, силы, составляющие пару сил, не могут находиться в равновесии, так как в соответствии с первой аксиомой статики равновесие возможно лишь тогда, когда силы действуют по одной прямой.

Пара сил, приложенная к твердому телу, способна привести его к вращательному движению, если этому не препятствуют наложенные связи.

Вращательный эффект пары определяют ее моментом m – произведением модуля одной из сил пары на плечо этой пары. Условимся считать положительным момент такой пары, которая стремится повернуть тело против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке.

$$m = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d.$$

Момент пары сил равен произведению основания треугольника ABC на рисунке 3.4 на его высоту, т.е. удвоенной площади треугольника. Размерность момента пары сил в системе единиц СИ Нм.



$$m = F_2 \cdot d = 2A_{\Delta ABC}$$

Рисунок 3.3 Пара сил и ее плечо

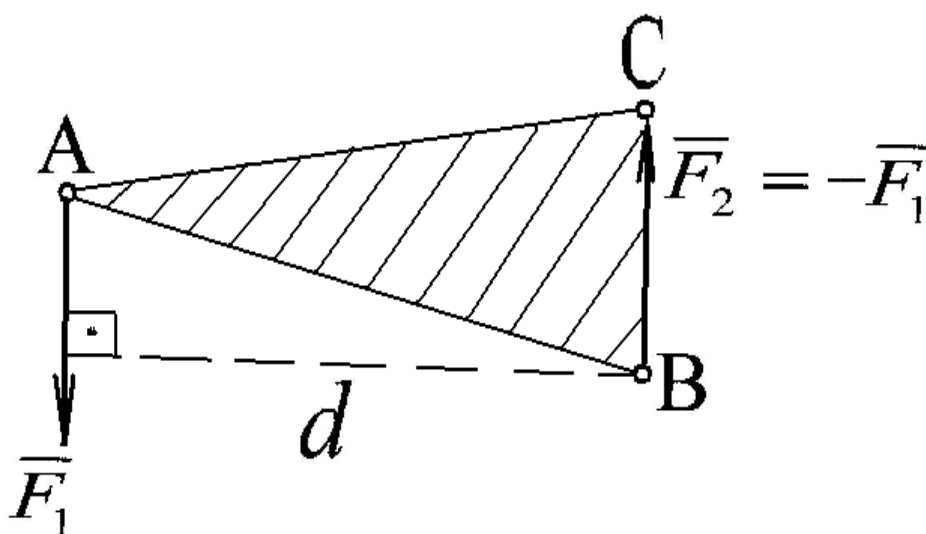


Рисунок 3.4 Геометрический смысл момента пары сил

Теорема. Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно точки, лежащей в плоскости ее действия, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

Дано: $(\vec{F}_1; \vec{F}_2)$; $F_1 = F_2 = F$; d .

Доказать: $m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) = F \cdot d$.

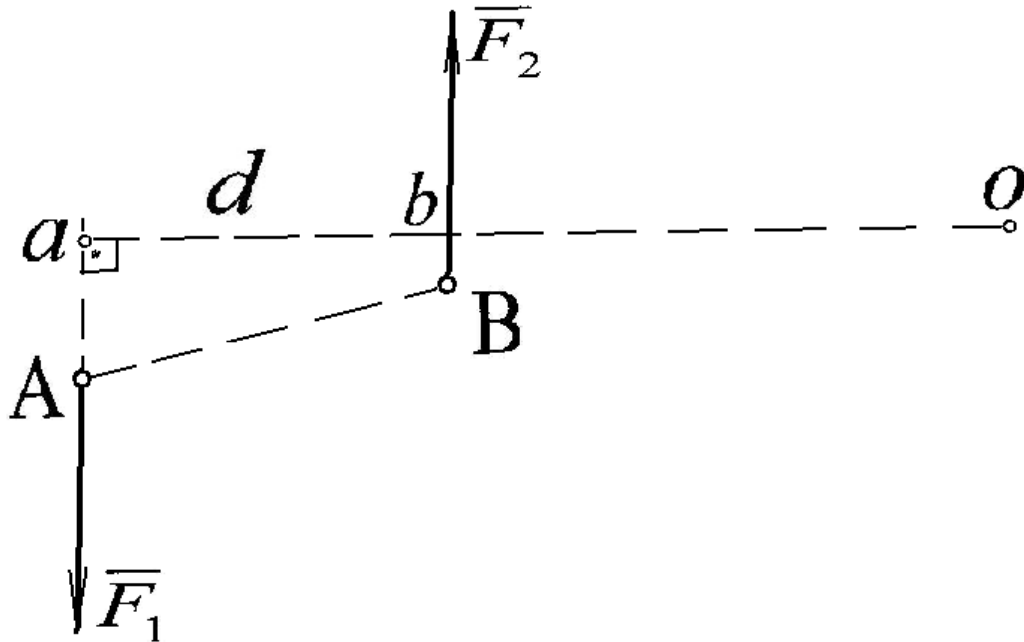


Рисунок 3.5 К доказательству теоремы

Доказательство. Сложим моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно точки O плоскости действия пары:

$$\begin{aligned}
 m_o(\vec{F}_2) &= F_2 \cdot bo = F \cdot (d + ao) \\
 + \\
 m_o(\vec{F}_1) &= -F_1 \cdot ao = -F \cdot ao \\
 \hline
 m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) &= F \cdot d .
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.4 Момент пары как вектор

Действие пары сил на тело характеризуется: 1) величиной модуля момента пары, 2) плоскостью ее действия, 3) направлением поворота в этой плоскости.

Условимся обозначать момент пары сил вектором \vec{m} , модуль которого равен модулю момента пары, т.е. произведению одной из сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки.

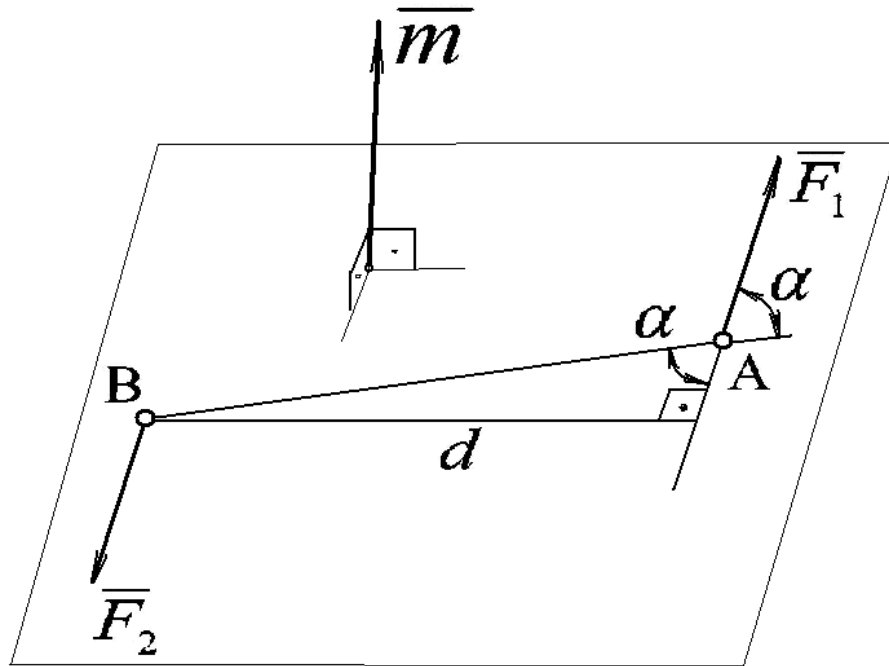


Рисунок 3.6 Момент пары сил как вектор

Вектор-момент пары сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) определяется как векторное произведение

$$\vec{m} = \vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_1 = \vec{BA} \times \vec{F}_2;$$

$$m = AB \cdot F_1 \cdot \sin \alpha = F_1 \cdot d.$$

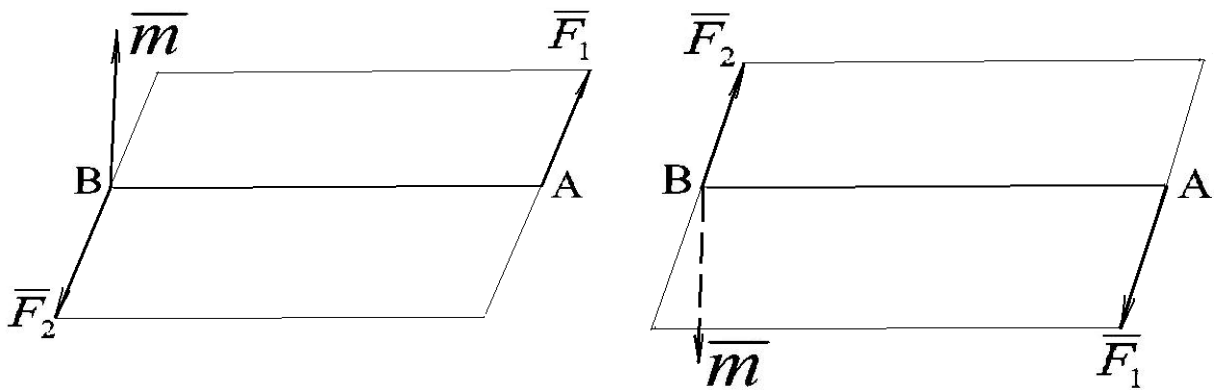


Рисунок 3.7 Определение направления вектор-момента \vec{m}

Вектор-момент \bar{m} пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия пары таким образом, чтобы наблюдатель, смотрящий с положительного конца вектора видел направление пары против часовой стрелки (рисунок 3.7).

3.5 Теоремы об эквивалентности пар

Действие пары сил на тело не изменится, если эту пару заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент.

Дано: (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) ; $m_1 = F_1 \cdot d_1$.

Доказать: пару (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) можно перенести в любое место плоскости, не меняя ее момент.

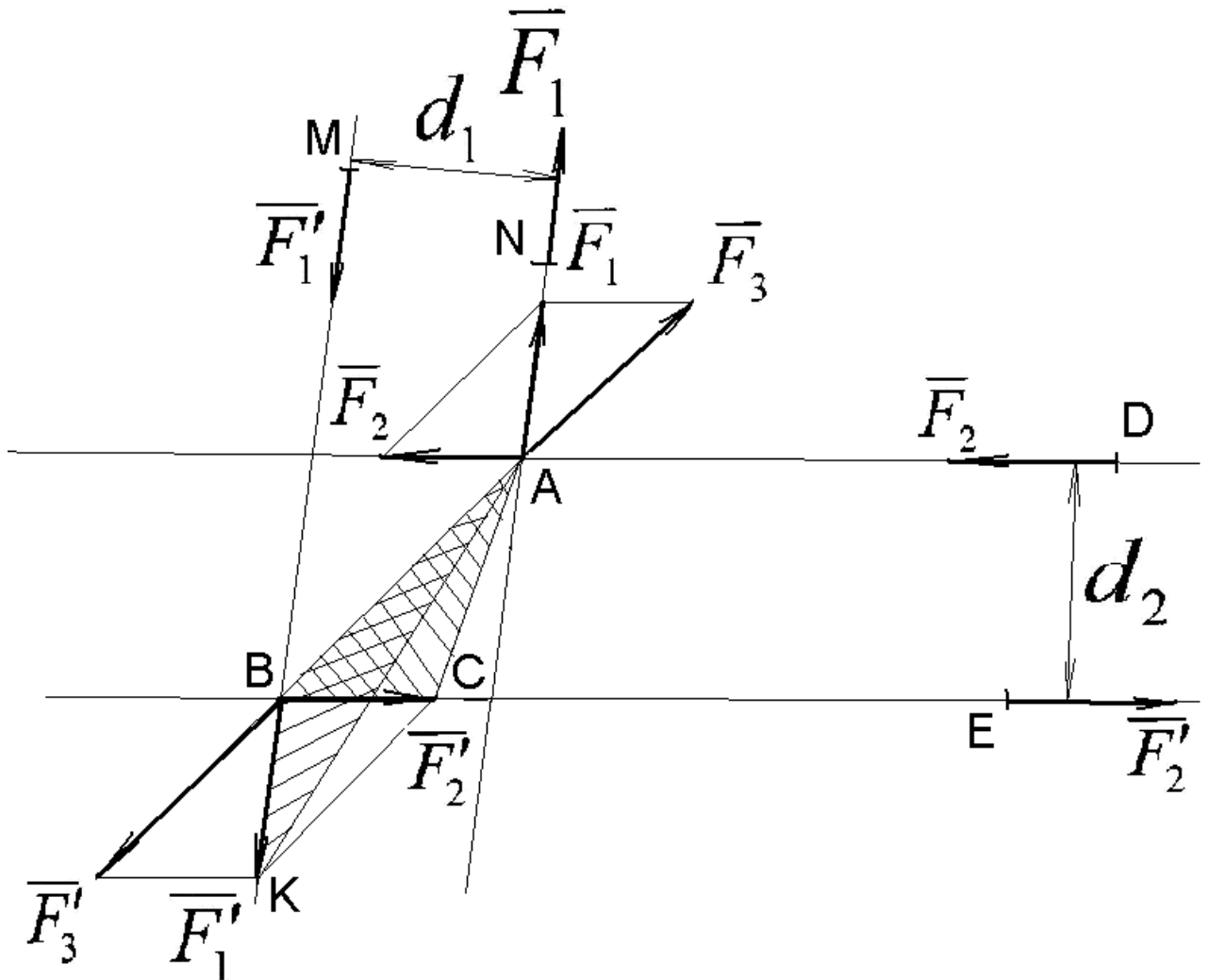


Рисунок 3.8 Перенос пары сил в плоскости ее действия

Доказательство. Перенесем силы \bar{F}_1 и \bar{F}_1' вдоль линии действия и приложим их в точках А и В. Разложим силу \bar{F}_1 по направлениям АВ и АД на составляющие \bar{F}_2 и \bar{F}_3 (рисунок 3.8). Аналогично раскладываем \bar{F}_1' на составляющие \bar{F}_2' и \bar{F}_3' . Учтем, что $\bar{F}_2 = -\bar{F}_2'$ и $\bar{F}_3 = -\bar{F}_3'$.

Силы \bar{F}_3 и \bar{F}_3' , так как они уравновешенные (на основании аксиомы 1), отбрасываем (аксиома 2).

Перенесем затем вектора \bar{F}_2 и \bar{F}_2' вдоль линии своего действия в точки В и Е соответственно.

Таким образом, пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1') заменена парой (\bar{F}_2, \bar{F}_2') с другими силами и другим плечом.

Докажем теперь что моменты этих пар $m(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$ и $m(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$ равны.

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = 2A \Delta ABK; m(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = 2A \Delta ABC.$$

В треугольниках АВК и АВС общее основание АВ, а высоты одинаковы, т.к. СК||АВ.

$$\text{Следовательно } A \Delta ABK = A \Delta ABC, A \Delta ABC = m(\bar{F}_2, \bar{F}_2').$$

Таким образом, теорема доказана. Из доказанной теоремы вытекают следующие свойства пары сил:

1) данную пару не изменяя оказываемого действия на тело, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;

2) у данной пары, не изменяя оказываемого действия на тело, можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.

Отсюда следует, что две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

Теорема. Действие пары сил на твердое тело не изменится, если пару перенести из данной плоскости в другую плоскость, ей параллельную.

Дано: (\bar{F}_1, \bar{F}_1') ; пл. I || пл. II.

Доказать, что пару (\bar{F}_1, \bar{F}_1')

можно перенести в пл. II.

Доказательство. Приложим в точках Д и Е плоскости I $\bar{F}_2, \bar{F}'_2, \bar{F}_3, \bar{F}'_3$, приняв $\bar{F}_2 = \bar{F}_3 = \bar{F}_1$; $\bar{F}'_2 = \bar{F}'_3 = \bar{F}'_1$ (рисунок 3.9).

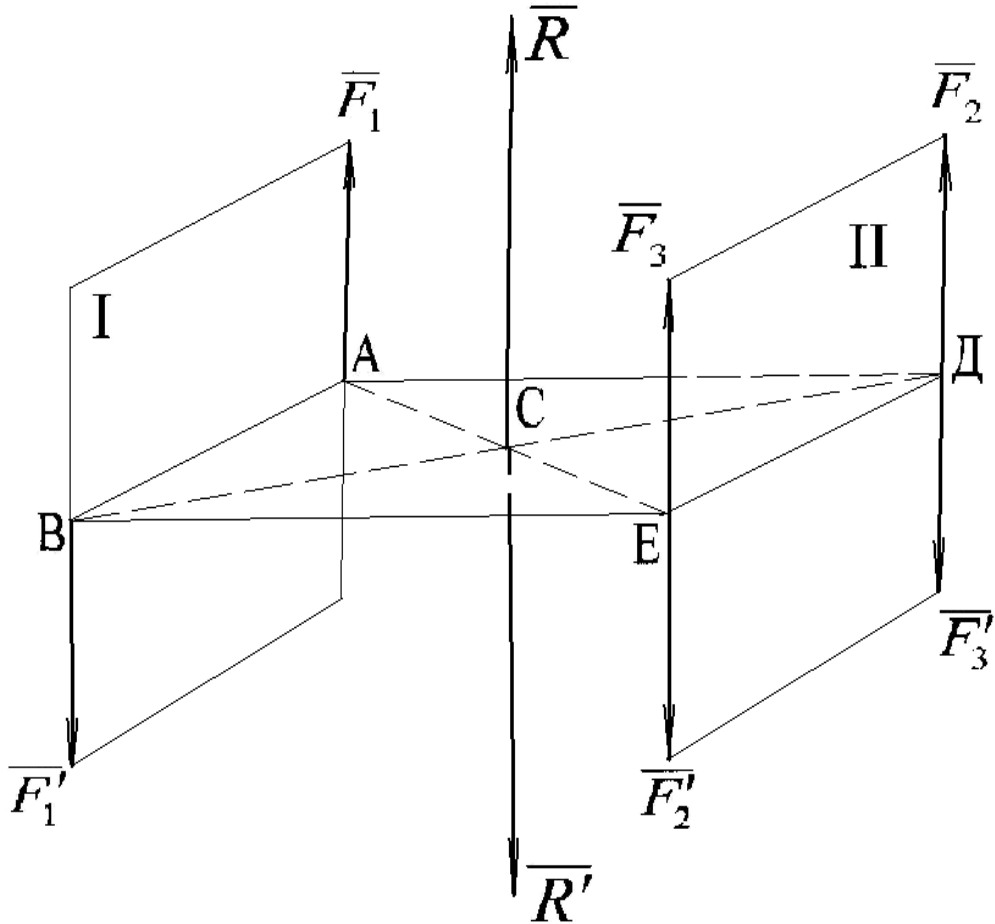


Рисунок 3.9 Перенос пары в параллельную плоскость

Фигура АВЕД является параллелограммом. Сложим параллельные силы \bar{F}_1 и \bar{F}_3 . Они заменяются равнодействующей \bar{R} , приложенной в точке С, причем

$$R = F_1 + F_3.$$

Аналогично силы \bar{F}'_1 и \bar{F}'_3 одной равнодействующей \bar{R}' , также приложенной в точке С.

$$R' = F'_1 + F'_3.$$

Две равные и противоположно направленные по одной прямой силы \bar{R} и \bar{R}' отбрасываем.

В результате пара (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) оказалась замененной парой (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , лежащей в плоскости II.

3.6 Сложение пар, расположенных в одной плоскости.

Условие равновесия пар

Теорема. Всякую систему пар, расположенных в одной плоскости, можно заменить одной равнодействующей парой, действующей в той же плоскости, и имеющей момент, равный алгебраической сумме моментов всех пар этой системы.

Дано: m_1, m_2, m_3 .

Доказать, что эти пары можно заменить одной равнодействующей парой.

Доказательство. На основании теоремы об эквивалентности пар можем заменить эти три пары другими тремя парами (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) , (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , (\bar{F}_3, \bar{F}'_3) , имеющими общее плечо d и такие же моменты (рисунок 3.10):

$$F_1 \cdot d = m_1; \quad F_2 \cdot d = m_2; \quad F_3 \cdot d = m_3.$$

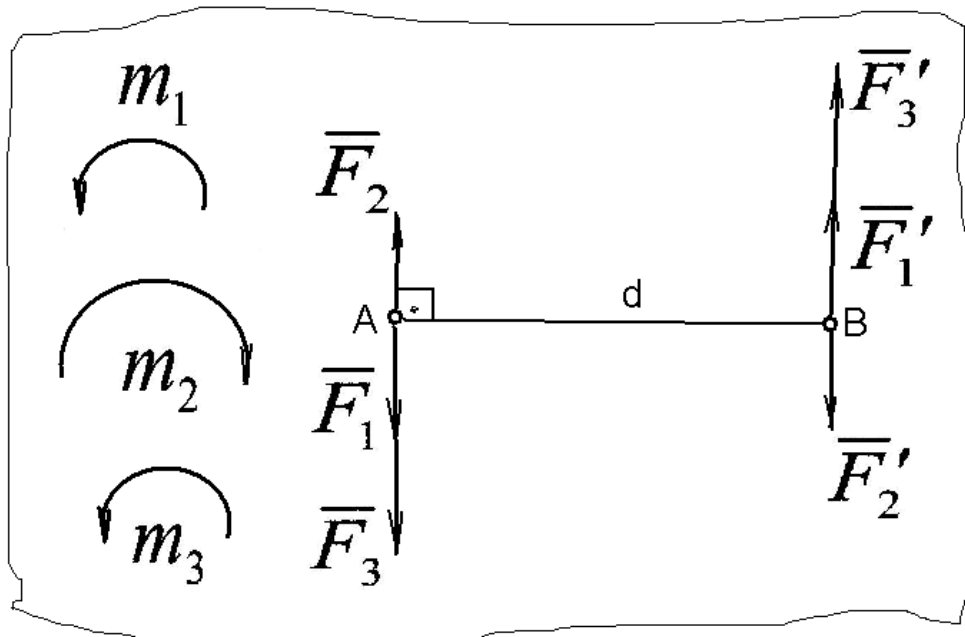


Рисунок 3.10 Сложение пар, расположенных в одной плоскости

Сложим отдельно силы, приложенные в точках А и В:

$$R = F_1 - F_2 + F_3; \quad R' = F'_1 - F'_2 + F'_3; \quad R = R'.$$

В результате вся система пар заменится одной парой (\bar{R}, \bar{R}') с момен-

ТОМ

$$m = R \cdot d = F_1 \cdot d + (-F_2) \cdot d + F_3 \cdot d = m_1 + m_2 + m_3.$$

Тот же самый результат получится при сложении любого числа пар.
Для n пар

$$m = \sum_{k=1}^n m_k .$$

Из доказанной теоремы вытекает, что для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех этих пар была равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_k = 0 .$$

3.7 Сложение пар в пространстве.

Условие равновесия пар в пространстве

Теорема. Любая система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Дано: (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) в плоскости I с моментом \bar{m}_1 ,

(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) в плоскости II с моментом \bar{m}_2 .

Доказать, что эти пары можно заменить одной равнодействующей парой.

Доказательство. Сложим пары (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) и (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , действующие в пересекающихся плоскостях I и II. Приведем эти пары к общему плечу AB, лежащему на линии пересечения плоскостей (рисунок 3.11).

$$F_1 = F'_1 = \frac{m_1}{AB}; \quad F_2 = F'_2 = \frac{m_2}{AB} .$$

Сложим по правилу параллелограмма силы \bar{F}_1 и \bar{F}_2 , приложенные в точке A, и силы \bar{F}'_1 и \bar{F}'_2 , приложенные в точке B:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2; \quad \bar{R} = -\bar{R}' .$$

Найдем вектор-момент результирующей пары (\bar{R}, \bar{R}') .

$$\bar{m} = \bar{AB} \times \bar{R}' = \bar{AB} \times (\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2) = \bar{AB} \times \bar{F}'_1 + \bar{AB} \times \bar{F}'_2 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 .$$

Вектор-момент равнодействующей пары по модулю и направлению изображается диагональю параллелограмма, построенного из векторов-моментов слагаемых пар.

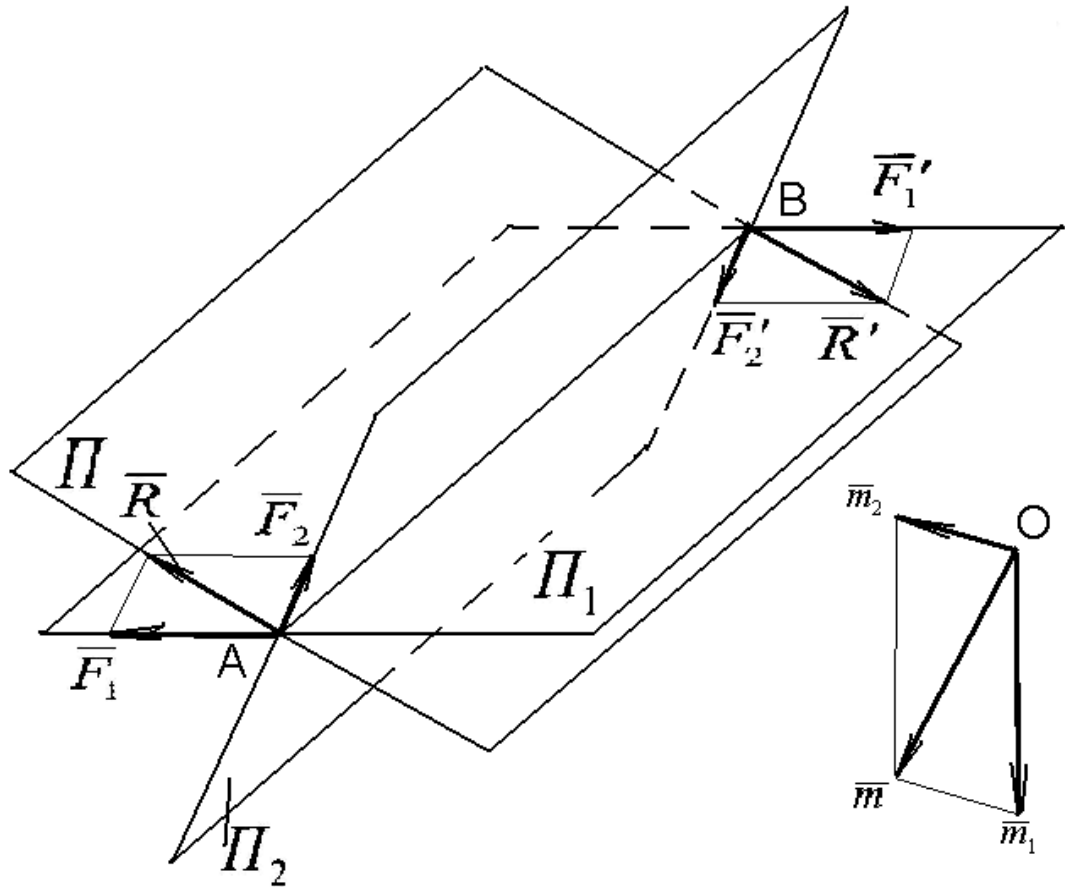


Рисунок 3.11 Сложение пар сил в пространстве

При сложении большего числа пар

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k .$$

Для равновесия пар в пространстве необходимо и достаточно, чтобы вектор-момент равнодействующей пары был равен нулю, т.е.

$$\bar{m} = 0, \quad \sum \bar{m}_k = 0.$$

Проектируя последнее векторное уравнение на оси координат, получим условия равновесия системы пар, лежащих в разных плоскостях, в аналитической форме:

$$\sum m_{kx} = 0; \quad \sum m_{ky} = 0; \quad \sum m_{kz} = 0.$$

Примеры решения задач

Задача 3.1 На невесомую балку АВ длиной L , лежащую на двух опорах А и В, действует пара сил с заданным моментом M (рисунок 3.12, а). Определить реакции опор А и В.

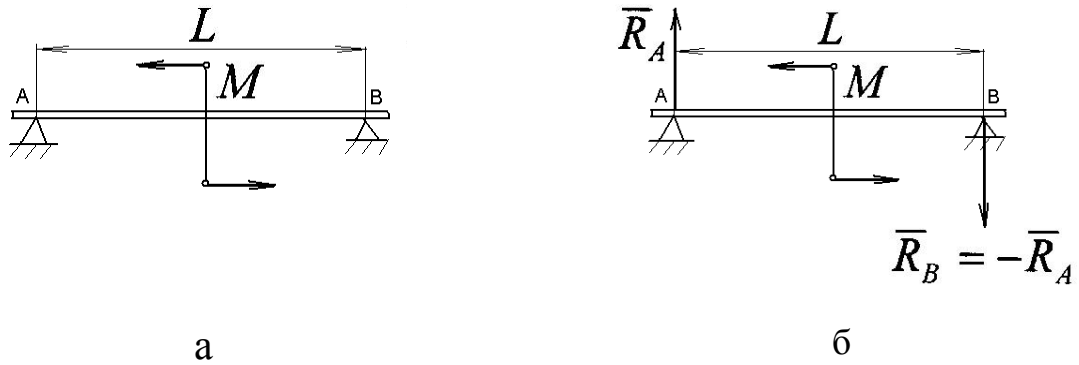


Рисунок 3.12 Равновесие пар сил, действующих на балку

Решение. Рассмотрим равновесие балки. Действие опор А и В на твердое тело заменяем реакциями \bar{R}_A и \bar{R}_B . Действие на балку заданной пары с моментом M можно уравновесить только такой же по величине и противоположно направленной парой сил. Поэтому реакции \bar{R}_A и \bar{R}_B составляют пару сил, направленную по часовой стрелке (рисунок 3.12, б), $\bar{R}_B = -\bar{R}_A$.

Согласно условию равновесия пар

$$\sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = M - R_A \cdot L = 0.$$

откуда

$$R_A = R_B = \frac{M}{L}.$$

Задача 3.2 К валу приложена пара (\bar{F}, \bar{F}') с моментом M , равным 1000 Нм, и направленным по ходу часовой стрелки (рисунок 3.13). К тормозному колесу диаметром $2r=50$ см, которое заклинено на валу, прижаты тормозные колодки силами \bar{N} и \bar{N}' , равными по величине. Найти величину этих сил, если известно, что коэффициент трения скольжения между колодками и колесом равен $f = 0,25$.

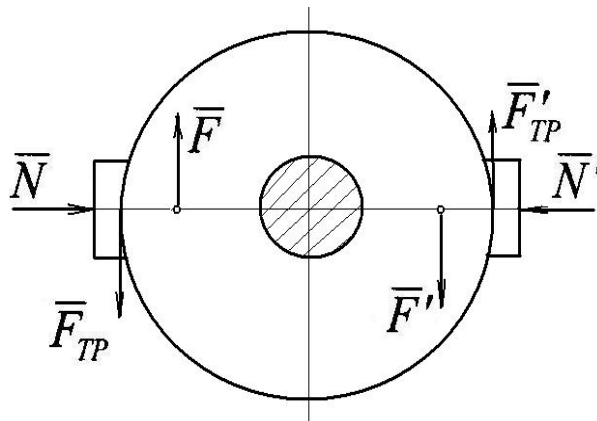


Рисунок 3.13 Равновесие вала с тормозным колесом

Решение. Рассматриваем равновесие вала вместе с тормозным колесом. Если отбросить две взаимно уравновешенные силы \bar{N} и \bar{N}' , то можно считать, что твердое тело находится в равновесии под действием двух пар сил, действующих в одной плоскости (рисунок 3.13). Момент реактивной пары $(\bar{F}_{TP}, \bar{F}'_{TP})$ равен и противоположно направлен моменту M активной пары (\bar{F}, \bar{F}') .

$$\sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = -M + F_{TP} \cdot 2r = 0,$$

откуда
$$F_{TP} = \frac{M}{2r} = \frac{1000}{0,5} = 2000 \text{ Н.}$$

Из формулы Кулона

$$N = \frac{F_{TP}}{f} = \frac{2000}{0,25} = 8000 \text{ Н.}$$

ЛЕКЦИЯ 4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Произвольной плоской называется система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости, не пересекаются в одной точке и не параллельны между собой.

4.1 Теорема о параллельном переносе силы

Действие силы на твердое тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую другую точку этого тела, добавив при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, в которую сила переносится.

Дано: \bar{F} , точки А и В, плечо d силы \bar{F} .

Перенести силу \bar{F} из точки А в точку В.

Доказательство. В точке А твердого тела приложена сила \bar{F} (рисунок 4.1). Состояние тела не изменится, если в точке В приложить, как показано на рисунке 4.1, б, две равные противоположно направленные силы \bar{F}' и \bar{F}'' , приняв при этом

$$\bar{F}' = -\bar{F}'' = \bar{F}.$$

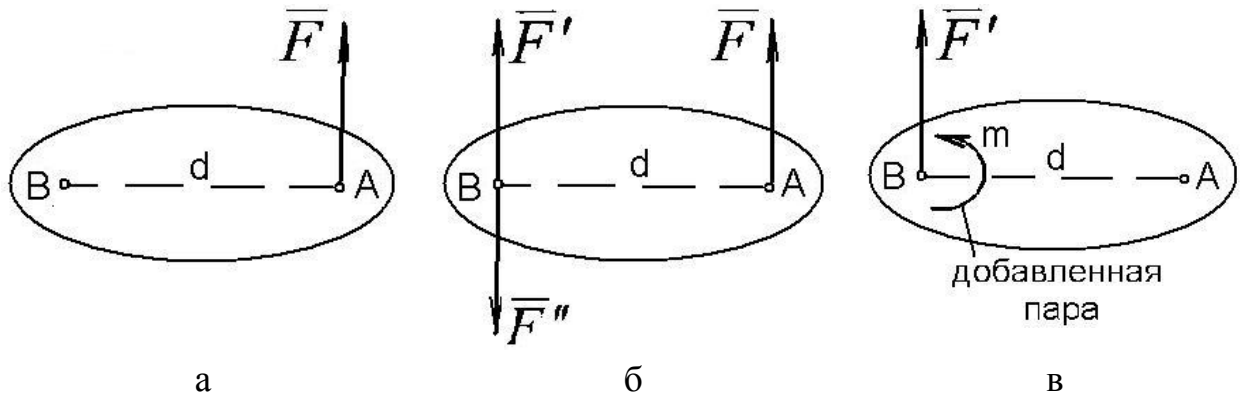


Рисунок 4.1 Параллельный перенос силы \bar{F} из точки А в точку В

Силы \bar{F} и \bar{F}'' составляют так называемую добавленную пару сил с моментом m . Момент m пары (\bar{F}, \bar{F}'') на рисунке 4.1, в равен моменту переносимой силы \bar{F} относительно точки В, в которую эта сила переносится.

4.2 Приведение произвольной плоской системы сил к одной силе и к одной паре

Пусть на твердое тело, показанное на рисунке 4.2, а, действует произвольная плоская система сил $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_k, \dots \bar{F}_n$, приложенных соответственно в точках $A_1, \dots, A_k, \dots, A_n$. Выберем в плоскости действия сил произвольную точку О, которую будем называть центром приведения. Воспользуемся ранее доказанной в предыдущем параграфе 4.1 теоремой о параллельном переносе силы и перенесем все заданные силы параллельно самим себе в центр приведения О.

В результате приведения (рисунок 4.2, б) получим приложенную в точке О систему сходящихся сил $\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \dots, \bar{F}'_k = \bar{F}_k, \dots, \bar{F}'_n = \bar{F}_n$, а также систему действующих в плоскости xOy добавленных пар сил, моменты которых равны:

$$m_1 = m_o(\bar{F}_1), \dots, m_k = m_o(\bar{F}_k), \dots, m_n = m_o(\bar{F}_n).$$

Приведенную к точке О систему сил геометрически складываем и заменяем одной эквивалентной силой \bar{R}' , приложенной в точке О (рисунок 4.2, в):

$$\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (4.1)$$

Все добавленные пары алгебраически складываем и заменяем одной эквивалентной парой, действующей в той же плоскости xOy . Момент равнодействующей пары равен

$$M_o = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k). \quad (4.2)$$

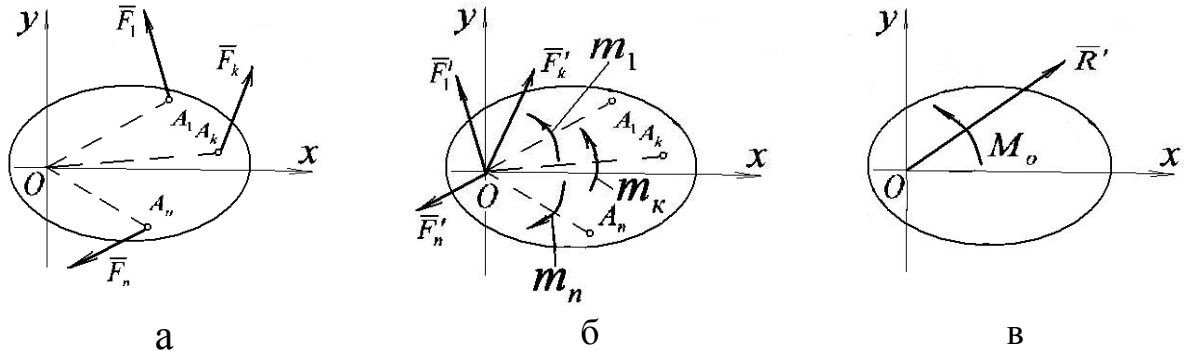


Рисунок 4.2 Приведение произвольной плоской системы сил к одному центру

Вектор \bar{R}' , равный геометрической сумме всех сил системы, называется главным вектором произвольной плоской системы сил.

Момент M_o , равный алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения O , называется главным моментом произвольной плоской системы сил относительно центра приведения O .

Таким образом, произвольную плоскую систему сил, действующую на твердое тело, можно в общем случае можно заменить одной силой \bar{R}' – главным вектором, приложенным в центре приведения, и одной парой M_o – главным моментом системы относительно центра приведения O .

Модуль и направление главного вектора произвольной плоской системы сил можно найти геометрически – построением в масштабе силового многоугольника, или аналитически по формулам:

$$R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2};$$

$$\cos(\bar{R}' \wedge \bar{i}) = \frac{R'_x}{R'} = \frac{\sum X}{R'}; \quad \cos(\bar{R}' \wedge \bar{j}) = \frac{R'_y}{R'} = \frac{\sum Y}{R'}. \quad (4.3)$$

Модуль и направление главного вектора \bar{R}' не зависят от выбора центра приведения, т.е. главный вектор является инвариантом по отношению к

центру приведения. Значение главного момента M_O зависит от положения точки O , т.е. главный момент инвариантом по отношению к центру приведения не является.

4.3 Приведение произвольной плоской системы сил к равнодействующей

Произвольная плоская система сил в общем случае приводится к главному вектору \bar{R}' и главному моменту M_O (рисунок 4.3, а). Такую систему сил можно упростить и привести к одной равнодействующей силе $\bar{R} = \bar{R}'$.

Представим момент M_O в форме пары сил (\bar{R}, \bar{R}'') , приняв $R' = \bar{R} = -\bar{R}'$. Плечо этой пары, показанной на рисунке 4.3, б, равно

$$d = OA = \frac{M_O}{R'}$$

Отбрасываем эквивалентную нулю систему сил (\bar{R}', \bar{R}'') .

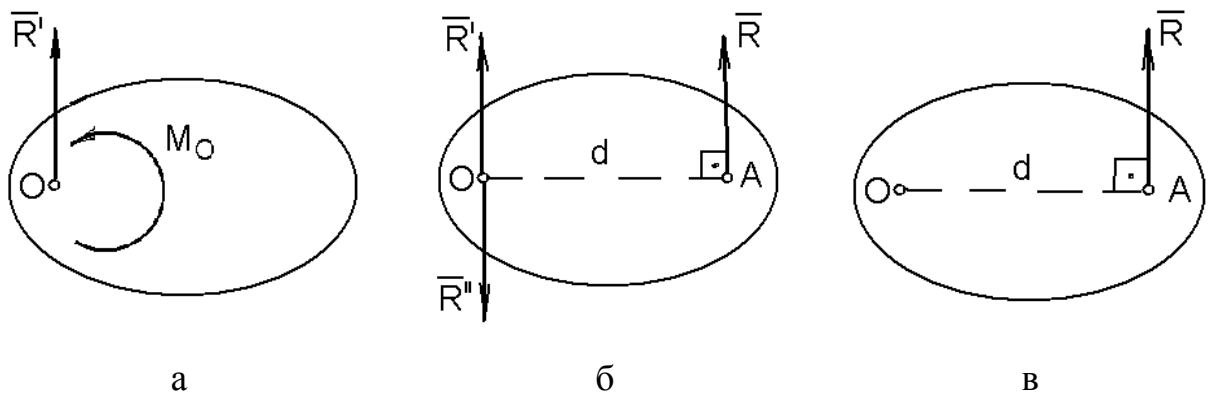


Рисунок 4.3 Приведение произвольной плоской системы сил к равнодействующей \bar{R}

Таким образом, произвольная плоская система сил эквивалентна равнодействующей \bar{R} , приложенной в точке A твердого тела (рисунок 4.3, в).

4.4 Условия равновесия произвольной плоской системы сил

В результате приведения произвольной плоской системы сил к произвольно выбранному центру O может оказаться, что главный вектор \bar{R}' и главный момент M_O одновременно равны нулю:

$$\bar{R}' = 0; \quad M_O = 0,$$

или
$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.4)$$

Условия (4.4) являются необходимыми и достаточными условиями равновесия произвольной плоской системы сил. Если какое-либо из этих условий не выполняется, то система приводится к одной силе или к одной паре сил, и в равновесии находиться не может. Условия (4.4) являются достаточными, потому, что при $\bar{R}' = 0$ система приводится к паре с моментом M_O , а так как $M_O = 0$, то система сил будет находиться в равновесии.

Известно, что $R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$, поэтому условия (4.4) равновесия произвольной плоской системы сил можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) являются аналитическими условиями равновесия произвольной плоской системы сил. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на две взаимно перпендикулярные оси координат, а также алгебраическая сумма моментов сил системы относительно произвольно выбранной точки плоскости были одновременно равны нулю.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил можно записать и в двух других формах.

Вторая форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n X_k = 0. \quad (4.6)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно каждой из двух любых точек, расположенных в плоскости действия сил, а также алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось плоскости, не перпендикулярную к прямой, проходящей через эти две точки, были одновременно равны нулю.

Третья форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.7)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

Частный случай – плоская система параллельных сил. Условия равновесия записываются двумя аналитическими уравнениями:

$$\sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0, \quad (4.8)$$

или

$$\sum_{k=1}^n \pm F_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0.$$

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма этих сил равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно произвольной точки плоскости также была равна нулю.

Другая форма аналитических уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad (4.9)$$

где точки А и В не должны лежать на прямой, параллельной данным силам.

4.5 Равновесие сочлененной системы тел

Систему, состоящую из нескольких тел, свободно опирающихся друг на друга или соединенных между собой подвижными соединениями (шарниры, тросы и т.д.), называют системой сочлененных тел. Все силы, действующие на сочлененную систему, подразделяют на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, с которыми на тела системы действуют тела, в систему не входящие.

Внутренними называются силы взаимодействия между телами данной системы.

Так силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ на рисунке 4.4, а для системы, состоящей из двух полуарок, являются внешними. К числу внешних сил системы этих двух тел относятся и реакции опор А и В (рисунок 4.4, б). Силы $\bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C$, с которыми действуют друг на друга две полуарки на рисунке 4.4, в, являются для составной системы внутренними.

Если система сочлененных тел находится в равновесии, то в равновесии находится и каждое из тел системы. При решении задач составную систему расчленяют по местам их подвижных соединений. Можно составить уравнения равновесия, как для составной конструкции в целом, так и для каждого из твердых тел.

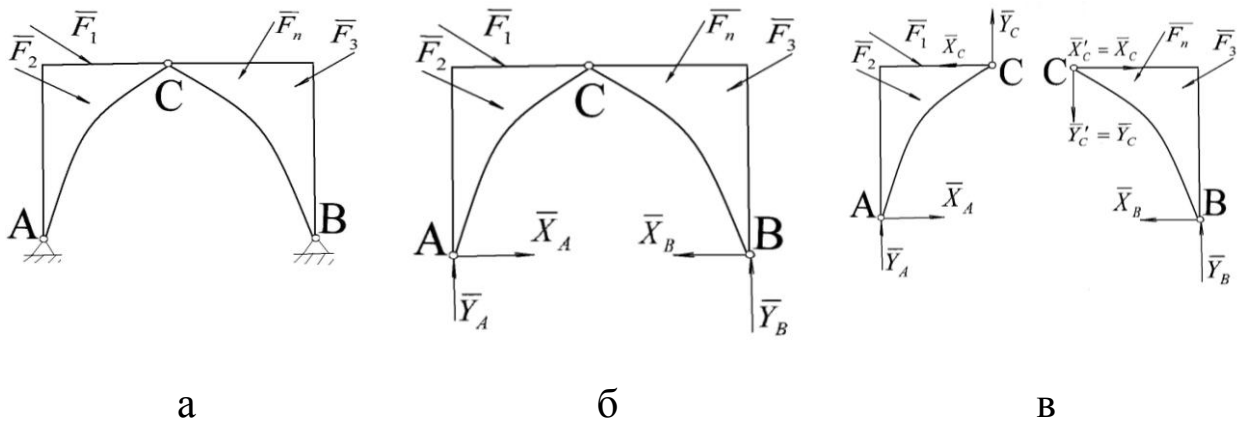


Рисунок 4.4 Равновесие сочлененной системы тел

Так, в рассматриваемом примере можно составить три уравнения равновесия для плоской системы сил на рисунке 4.4, б, и три уравнения равновесия для любой из полуарок на рисунке 4.4, в. Есть и другой вариант решения задачи: для каждой из двух полуарок составить по три аналитических уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

4.6 Распределенные силы

Все силы можно разделить на сосредоточенные, приложенные в одной точке тела, и распределенные (по объему тела, по поверхности, по линии). В данном параграфе определяется равнодействующая для четырех законов линейно распределенных сил.

Сила, равномерно распределенная по отрезку прямой линии (рисунок 4.5, а).

Интенсивность распределенной нагрузки q измеряется в системе единиц СИ в Н/м и показывает, какая сила действует на метр отрезка АВ. Таким образом, равнодействующая равна по модулю $Q = q \cdot a$, т.е. равна площади эпюры на рисунке 4.5, а. Вектор равнодействующей \bar{Q} прикладывается в центре тяжести эпюры распределенной нагрузки.

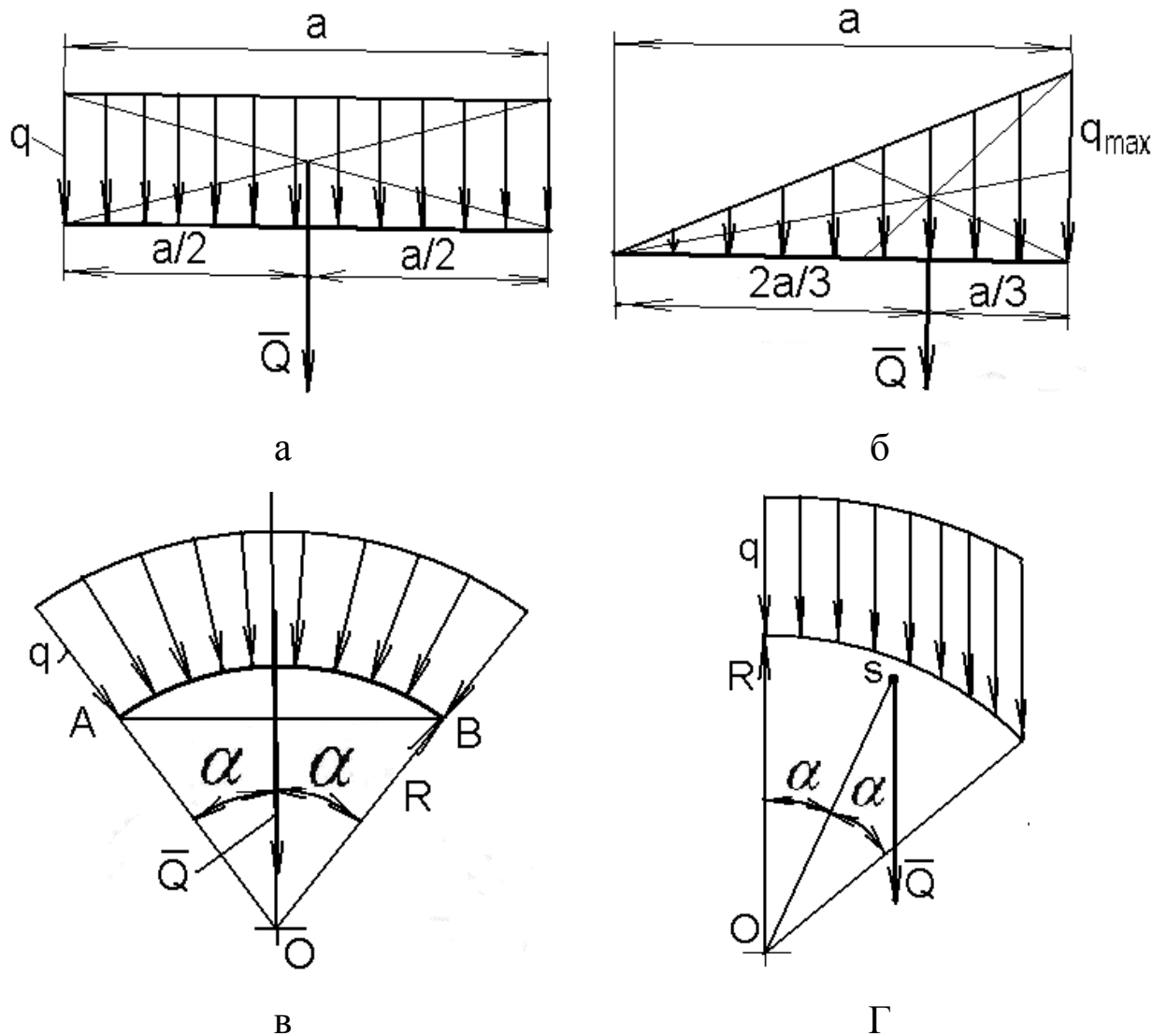


Рисунок 4.5 Замена распределенных нагрузок сосредоточенной равнодействующей силой

Сила, распределенная по отрезку АВ по линейному закону (закону треугольника).

Величина равнодействующей \bar{Q} определяется как площадь эпюры нагрузок на рисунке 4.5, б и прикладывается в центре тяжести треугольника, т.е. в точке пересечения его медиан.

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot a.$$

Сила, равномерно распределенная по дуге окружности (рисунок 4.5, в).

Действующая на дугу система сходящихся сил имеет равнодействующую \bar{Q} , направленную по оси симметрии дуги.

Величина равнодействующей равна произведению интенсивности нагрузки q на длину хорды АВ, стягивающей эту дугу:

$$Q = q \cdot AB = q \cdot 2R \cdot \sin \alpha.$$

Сила, равномерно действующая по длине дуги окружности (рисунок 4.5, г).

Для определения равнодействующей такой нагрузки необходимо перемножить ее интенсивность q на длину дуги окружности и приложить вектор \bar{Q} в центре тяжести S этой дуги, как показано на рисунке 4.5, г.

$$Q = q \cdot R \cdot 2\alpha; \quad OS = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Примеры решения задач

Задача 4.1 Стропила односкатной крыши состоят из бруса АВ, у верхнего конца В свободно лежащего на гладкой опоре, а нижним А упирающегося в стену (рисунок 4.6). Наклон крыши $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$; на брус АВ приходится вертикальная нагрузка $F = 9$ кН, приложенная в середине бруса. Определить реакции опор в точках А и В.

Решение. Рассмотрим равновесие стропильного бруса АВ, в середине С которого действует активная сила \bar{F} . Реакция \bar{N}_B гладкой опорной поверхности в точке В направлена перпендикулярно брусу. Связями на верхнем конце А бруса являются две такие площадки: вдоль и поперек волокон. По-

этому показываем в точке А две составляющие \bar{N}'_A и \bar{N}''_A , каждую перпендикулярно своей опорной площадке (рисунок 4.6).

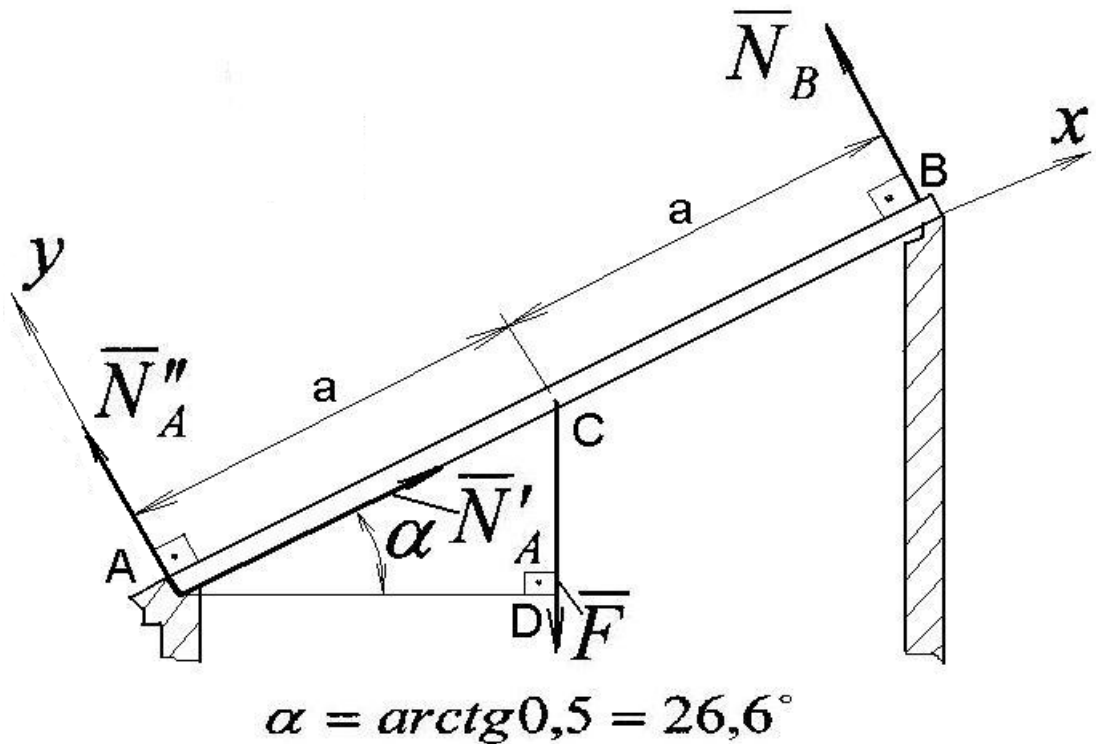


Рисунок 4.6 Односкатная крыша

Для произвольной плоской системы сил, действующей на брус АВ, составляем три аналитических уравнения равновесия:

$$\sum X = -F \cdot \sin \alpha + N'_A = 0; \quad \sum Y = N''_A - F \cdot \cos \alpha + N_B = 0$$

$$\sum m_A = N_B \cdot 2a - F \cdot \cos \alpha \cdot a = 0.$$

Решаем систему уравнений и определяем неизвестные реакции:

$$N'_A = F \cdot \sin \alpha = 9 \cdot \sin 26,6 = 4,03 \text{ кН}; \quad N_B = \frac{F \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{9 \cdot \cos 26,6}{2} = 4,03 \text{ кН};$$

$$N''_A = F \cdot \cos \alpha - N_B = 9 \cdot \cos 26,6 - 4,03 = 4,03 \text{ кН}.$$

Задача 4.2 Определить реакции опор А и В балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки (рисунок 4.7).

Дано: $F_1 = 8 \text{ кН}$; $F_2 = 6 \text{ кН}$; $q = 3 \text{ кН/м}$.

Решение. Определяем величину равнодействующей Q равномерно распределенной нагрузки (рисунок 4.7)

$$Q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}.$$

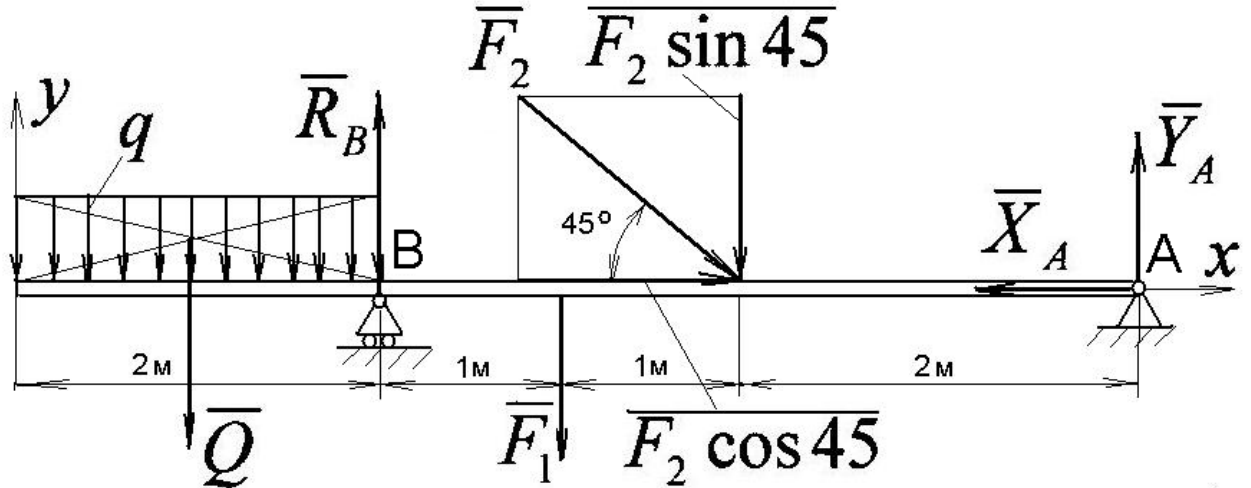


Рисунок 4.7 Расчетная схема к задаче 4.2

Реакцию \bar{R}_B катковой опоры В показываем перпендикулярно опорной поверхности, реакцию шарнирно-неподвижной опоры А обозначаем на чертеже двумя взаимно-перпендикулярными составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A .

Для произвольной плоской системы сил на рисунке 4.7 составляем три аналитических уравнения равновесия:

$$\sum X = F_2 \cdot \cos 45 - X_A = 0;$$

$$\sum Y = -Q + R_B - F_1 - F_2 \sin 45 + Y_A = 0;$$

$$\sum m_B = Q \cdot 1 - F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot \sin 45 \cdot 2 + Y_A \cdot 4 = 0.$$

Решаем систему уравнений и определяем неизвестные реакции:

$$X_A = F_2 \cdot \cos 45 = 6 \cdot \cos 45 = 4,16 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{F_1 \cdot 1 - Q \cdot 1 + F_2 \cdot \sin 45 \cdot 2}{4} = \frac{8 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 6 \cdot \sin 45 \cdot 2}{4} = 2,62 \text{ кН};$$

$$R_B = Q + F_1 + F_2 \cdot \sin 45 - Y_A = 6 + 8 + 6 \cdot \sin 45 - 2,62 = 15,62 \text{ кН}.$$

Задача 4.3 Определить реакции опор А, В, С и усилие в шарнире D составной балки, изображенной на чертеже 4.8 вместе с нагрузкой.

Дано: $F = 4 \text{ кН}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим сосредоточенной равнодействующей силой

$$Q = q \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН}.$$

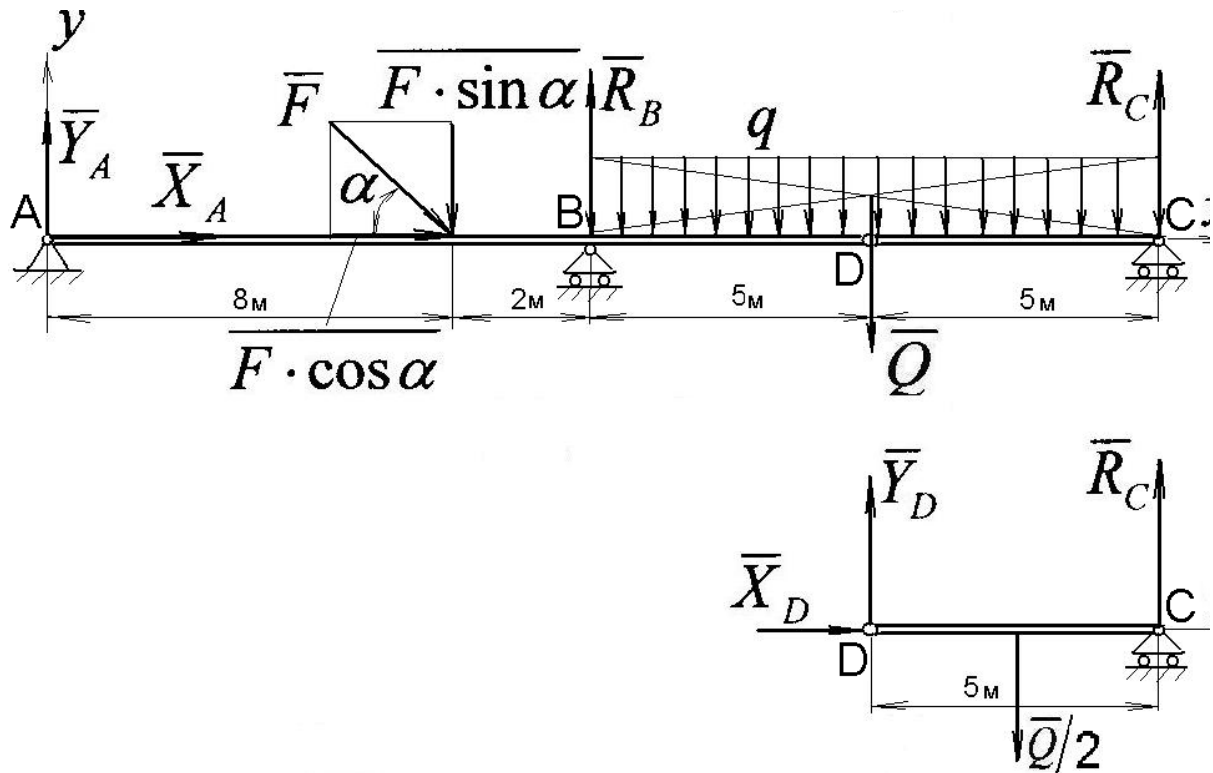


Рисунок 4.8 Равновесие составной балки

Действие опор А, В и С на балку показываем на чертеже реакциями \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B , \bar{R}_C . Для произвольной плоской системы сил, действующих на составную балку, составляем аналитические уравнения равновесия:

$$\sum X = X_A + F \cdot \cos \alpha = 0; \quad \sum Y = Y_A - F \cdot \sin \alpha + R_B - Q + R_C = 0;$$

$$\sum m_A = -F \cdot \sin \alpha \cdot 8 + R_B \cdot 10 - Q \cdot 15 + R_C \cdot 20 = 0.$$

Из составленной системы трех уравнений нельзя определить четыре неизвестных составляющих реакций связей.

Расчленим составную конструкцию по шарниру D и рассматриваем равновесие одной из частей балки – например, правой поубалки DC. Реакции \bar{X}_D и \bar{Y}_D в шарнире D показывают действие отброшенной левой поубалки AD на оставшуюся правую DC. Составляем уравнения равновесия для новой плоской системы сил:

$$\sum X = X_D = 0; \quad \sum Y = Y_D - Q/2 + R_C = 0; \quad \sum m_D = R_C \cdot 5 - \frac{Q}{2} \cdot 2,5 = 0.$$

Из системы шести уравнений определяем шесть неизвестных реакций связей:

$$X_D = 0; \quad R_C = Q/4 = 20/4 = 5 \text{ кН}; \quad Y_D = Q/2 - R_C = 20/2 - 5 = 5 \text{ кН};$$

$$X_A = -F \cdot \cos \alpha = -4 \cdot \cos 45 = 2,83 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot 8 + Q \cdot 15 - R_C \cdot 20}{10} = \frac{4 \cdot \sin 45 \cdot 8 + 20 \cdot 15 - 5 \cdot 20}{10} = 22,23 \text{ кН};$$

$$Y_A = F \cdot \sin \alpha - R_B + Q - R_C = 4 \cdot \sin 45 - 22,23 + 20 - 5 = -4,40 \text{ кН}.$$

ЛЕКЦИЯ 5. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ, ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1 Трение скольжения, конус трения. Трение качения

В теоретической механике различают два вида трения: скольжения и качения. Трением называется сопротивление, возникающее при перемещении одного тела по поверхности другого. Если это перемещение представляет собой скольжение, то соответствующее трение называется трением скольжения. Когда указанное перемещение является качением, то возникает трение качения.

Трение скольжения. Тело на рисунке 5.1 а находится в покое. Состояние покоя не изменится, если к телу приложить небольшую по величине сдвигающую силу \bar{Q} . Кроме нормальной реакции \bar{N} , в контакте возникает другая составляющая реакции связи \bar{F} – сила трения скольжения, препятствующая движению тела по связи, причем

$$\bar{F} = -\bar{Q}.$$

С увеличением силы \bar{Q} увеличивается и сила трения скольжения \bar{F} .

При увеличении силы \bar{Q} до некоторого значения \bar{Q}_{\max} начинается скольжение тела по связи (рисунок 5.1, б). За меру сопротивления скольжению тела принимают максимальную силу \bar{F}_{\max} – силу трения скольжения в покое. Силу \bar{F}_{\max} приходится учитывать в инженерных расчетах. При этом исходят из установленных опытным путем в 1781 году Кулоном общих законов трения.

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся тел и направлена в сторону, противоположную направле-

нию возможного или реального скольжения тела под действием приложенных сил. Сила трения при покое зависит от активных сил и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из состояния равновесия, т.е.

$$0 \leq F \leq F_{\max}.$$

2. Максимальная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся тел. Например, величина силы, которую надо приложить, чтобы сдвинуть с места кирпич, не зависит от того, какой гранью, широкой или узкой, он положен на шероховатую плоскость.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению (нормальной реакции), т.е.

$$F_{\max} = f_o \cdot N,$$

где f_o – безразмерный коэффициент трения скольжения в покое. Коэффициент f_o зависит от природы, состояния и качества обработки трущихся поверхностей. При этом f_o не зависит от силы нормального давления.

$$0 < f_o < 1.$$

Опыты показывают, что при скольжении одного тела по поверхности другого возникшая сила трения скольжения незначительно зависит от скорости скольжения. Для большинства коэффициент трения уменьшается с увеличением с относительной скорости скольжения.

Многие задачи на равновесие тела на шероховатой поверхности удобно решать, пользуясь понятиями угол и конус трения. Пусть, как показано на рисунке 5.1, б, тело на шероховатой поверхности находится в предельном состоянии равновесия. В этом случае $Q = Q_{\max} = F_{\max}$, $N = G$, полная реакция шероховатой поверхности \bar{R}_{\max} отклонена от нормали n на некоторый угол φ_o – угол трения, причем

$$\operatorname{tg} \varphi_o = F_{\max} / N; \quad f_o = \operatorname{tg} \varphi_o,$$

т.е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения в покое.

Конусом трения называется конус, описанный полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции (рисунок 5.1, в). Для анизотропных материалов (например, дерева) конус трения оказывается несколько искаженным, сплюснутым.

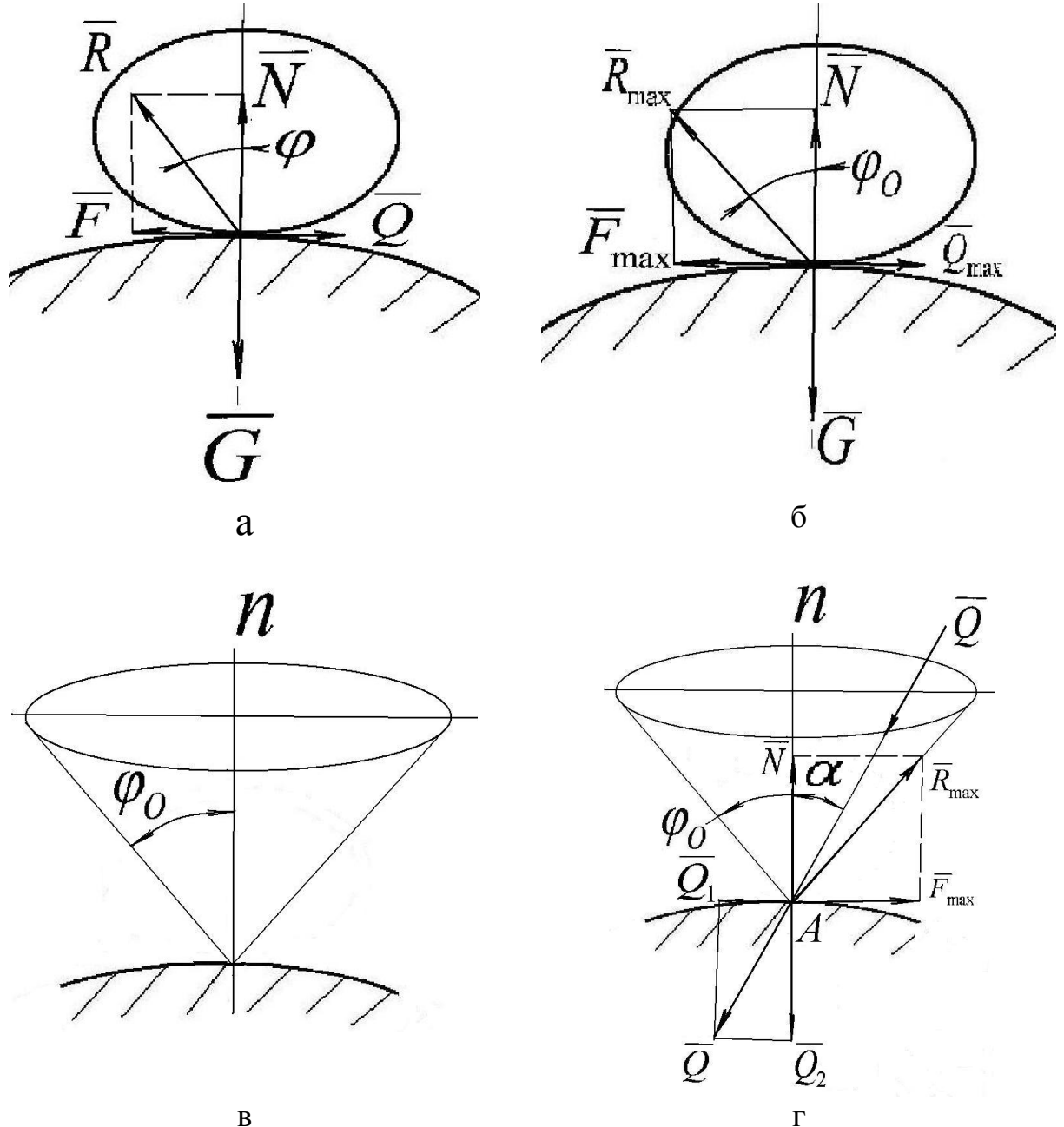


Рисунок 5.1 К определению силы трения скольжения

Пусть действующие на тело силы (включая и его вес \bar{G}) приводятся к одной равнодействующей \bar{Q} , линия действия которой, как показано на рисунке 5.1, г, проходит через точку А касания тела с плоскостью и образует с нормалью n угол α . Перенесем вектор силы \bar{Q} по линии действия в точку А и разложим на две составляющие \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 . Первая составляющая \bar{Q}_1 лежит в

касательной плоскости, проведенной через точку А, а вторая \bar{Q}_2 направлена по нормали. По модулю первая составляющая реакции равна $Q_1 = Q_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ и стремится вызвать скольжение тела по поверхности связи. Вторая составляющая приведет к появлению равной себе по модулю и противоположно направленной нормальной силы реакции \bar{N} .

Модуль максимально возможной силы трения скольжения равен

$$F_{MAX} = f_o \cdot N = f_o \cdot Q_2 = Q_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_o,$$

где φ_o – угол трения; при этом сила \bar{F}_{MAX} направлена в сторону, противоположную силе \bar{Q}_1 . Построив на силах \bar{N} и \bar{F}_{MAX} параллелограмм, получим равнодействующую \bar{R}_{MAX} , составляющую с нормалью А n угол трения φ_o .

Для того, чтобы тело оставалось на поверхности связи в состоянии покоя, необходимо, чтобы сила \bar{Q}_1 была по модулю меньше или равна максимальной силе трения скольжения в покое \bar{F}_{MAX} , т.е.

$$Q_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq Q_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_o; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi_o; \quad \alpha \leq \varphi_o.$$

Из этого заключаем, что, тело нельзя вывести из состояния покоя любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения (рисунок 5.1, г).

Трение качения. На каток, находящийся на горизонтальной плоскости (рисунок 5.2, а), действуют сила тяжести \bar{G} и равная ей по модулю нормальная реакция \bar{N} .

Приложим к катку горизонтальную активную силу \bar{Q} (рисунок 5.2, б). Произойдет деформации катка и плоскости вблизи точки А. Касание тела и связи происходит по некоторой площадке. При этом в контакте возникнет сила трения $\bar{F} = -\bar{Q}$. Каток в правой части прижимается к площадке на связи сильнее, чем в левой, а полная реакция \bar{R} приложена правее точки А. Нормальная составляющая \bar{N} смещена от центра О шара на величину h .

На цилиндр на рисунке 5.2, б действуют две пары сил: (\bar{Q}, \bar{F}) с плечом r и (\bar{G}, \bar{N}) с плечом h . В случае равновесия цилиндра моменты этих пар

равны по величине, противоположны по направлению. Составим уравнения равновесия цилиндра:

$$Q - F = 0; \quad N - G = 0; \quad -Q \cdot r + N \cdot h = 0. \quad (5.1)$$

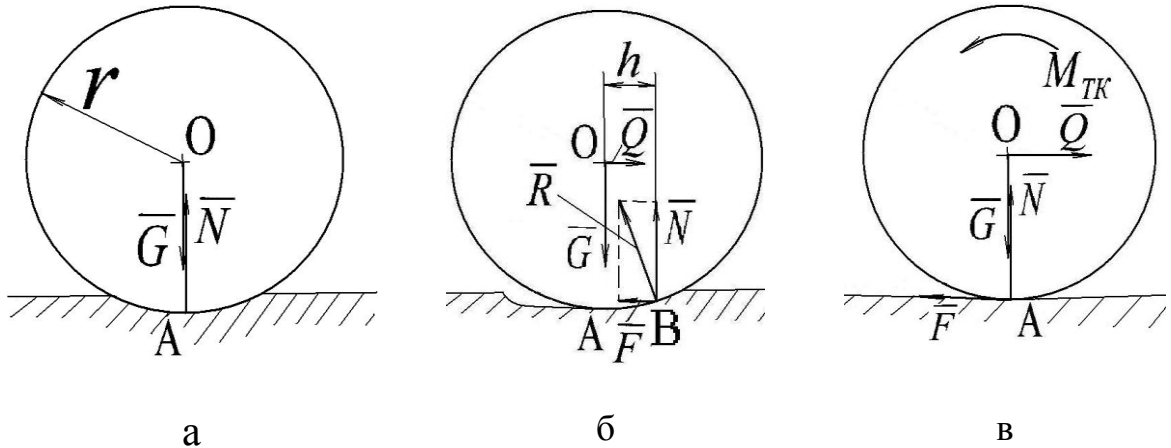


Рисунок 5.2 К определению момента трения качения

Обозначим $M_{TK} = N \cdot h$ и будем в дальнейшем называть момент трения качения. Из третьего уравнения равновесия (5.1) можно получить расстояние между точками А и В:

$$h = Q \cdot r / N = Q \cdot r / G. \quad (5.2)$$

Как видно из (5.2), с увеличением активной силы \bar{Q} увеличивается и расстояние h . Но неограниченно это расстояние увеличиваться не может. Неизбежно наступит такой момент, когда увеличение силы \bar{Q} приведет к нарушению равновесия и цилиндр покатится по связи. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ . Экспериментально установлено, что величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для различных материалов.

Следовательно, если имеет место равновесие, то выполняется условие $\delta \leq h$.

Величина δ называется коэффициентом трения качения и имеет размерность длины, т.е. в системе единиц СИ измеряется в метрах.

Максимальное значение момента трения качения равно $M_{TK}^{MAX} = \delta \cdot N$. Значения коэффициента трения качения приводятся для различных материалов в справочниках.

При решении задач силу нормальной реакции \bar{N} удобнее изображать без смещения, по центральной линии АО цилиндра, а момент трения качения M_{TK} показывать круговой стрелкой, как на рисунке 5.2, в.

5.2 Центр тяжести твердого тела

Введем понятие центра тяжести твердого тела. На все частицы тела, находящегося вблизи земной поверхности, действуют силы притяжения к земле, называемыми силами тяжести. В связи с небольшими размерами тела по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести отдельных частиц тела с достаточной точностью можно считать параллельными между собой силами.

Силой тяжести \bar{G} называется равнодействующая параллельных сил тяжести отдельных частиц тела. Центром тяжести тела С называется центр параллельных сил тяжести отдельных частиц твердого тела (рисунок 5.3).

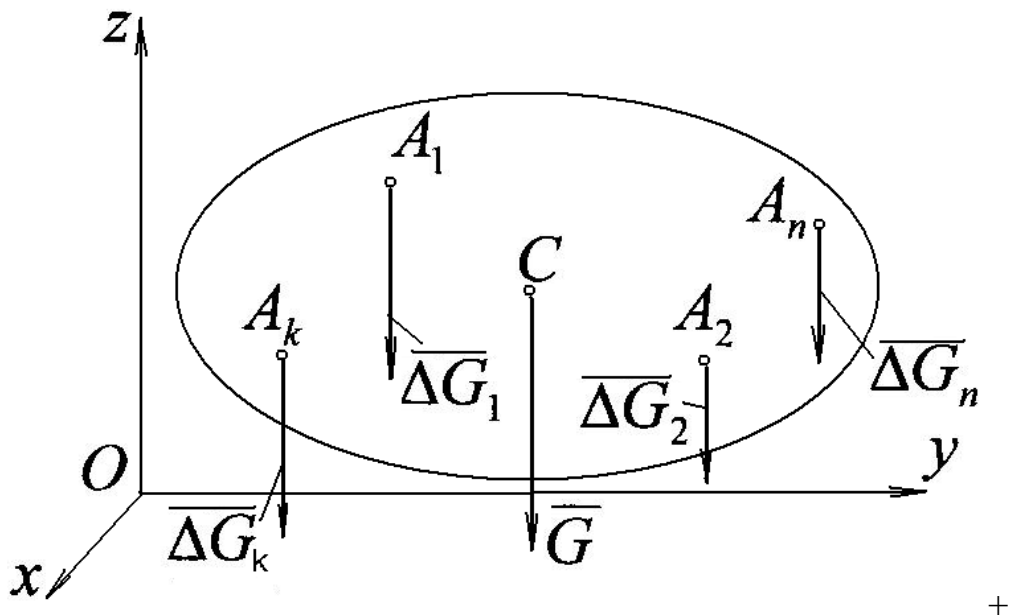


Рисунок 5.3 Определение центра тяжести твердого тела

Координаты точки С – центра тяжести твердого тела можно определить как координату центра тяжести системы параллельных сил по формулам:

$$x_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta G_k}{G}; \quad y_C = \frac{\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta G_k}{G}; \quad z_C = \frac{\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \cdot \Delta G_k}{G}. \quad (5.3)$$

Пределы сумм, стоящие в числителе формул (5.3), представляют собой интегралы вида:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta G_k = \int_V x \cdot dG; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta G_k = \int_V y \cdot dy; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \cdot dG_k = \int_V z \cdot dz, \quad (5.4)$$

где V – объем твердого тела.

Таким образом,

$$x_c = \frac{\int_V x \cdot dG}{G}; \quad y_c = \frac{\int_V y \cdot dG}{G}; \quad z_c = \frac{\int_V z \cdot dG}{G}. \quad (5.5)$$

При определении координат центра тяжести твердого тела пользуются следующими конкретными способами.

Способ симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести этого тела лежит соответственно или в плоскости, или на оси, или в центре симметрии.

Так, центр тяжести отрезка материальной прямой линии лежит на его середине. Центр тяжести круглого кольца, круглой или прямоугольной пластинки, площади правильного многоугольника и эллипса, объема прямоугольного параллелепипеда и других тел, имеющих центр симметрии, лежит в их геометрических центрах (в центрах симметрии).

Способ разбиения применяется при определении центра тяжести тел сложной геометрической формы. Такое тело разбивают на конечное число частей простейшей геометрической формы, для каждой из которых положение центра тяжести легко находится.

Способ дополнения является частным случаем способа разбиения. Его применяют к телам, имеющим вырезы. Центры тяжести тел без вырезов и вырезанных частей должны быть известны. При этом способе площади (объемы, длины) вырезанных частей считаются отрицательными.

Способ интегрирования. Тело сначала разбивают на произвольно малые объемы (площадки, отрезки). Переходят к пределам, предполагая, что число элементарных частиц, из которых состоит тело, неограниченно возрастает.

тает, а размеры стремятся к нулю. Таким образом, нахождение центра тяжести твердого тела сводится к операции математического интегрирования.

Если речь идет об однородном твердом теле, то плотность его ρ по всему объему V постоянна. Сила тяжести такого тела равна $G = \rho \cdot g \cdot V$, а вес элемента равен $dG = \rho \cdot g \cdot dV$, где g – ускорение свободного падения; dV – элементарный объем. Подставляя в формулы (5.5) эти значения, получим формулы для определения координат центра тяжести однородного тела:

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}; \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}; \quad z_c = \frac{\int z dV}{V}. \quad (5.6)$$

Однородная плоская фигура. В случае однородной плоской фигуры (рисунок 5.4) сила тяжести пропорциональна ее площади и равна $G = \rho' \cdot g \cdot A$, где ρ' – масса единицы площади, A – площадь фигуры. Получим:

$$x_c = \frac{\int x \cdot dA}{A}; \quad y_c = \frac{\int y \cdot dA}{A}, \quad (5.7)$$

Где интеграл $\int_A x \cdot dA$, распространенный на всю площадь плоской фигуры, называется статическим моментом этой фигуры относительно оси y и обозначается через S_y . Аналогично статический момент фигуры относительно оси x равен $S_x = \int_A y \cdot dA$. Таким образом, формулы (5.7) примут вид:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (5.8)$$

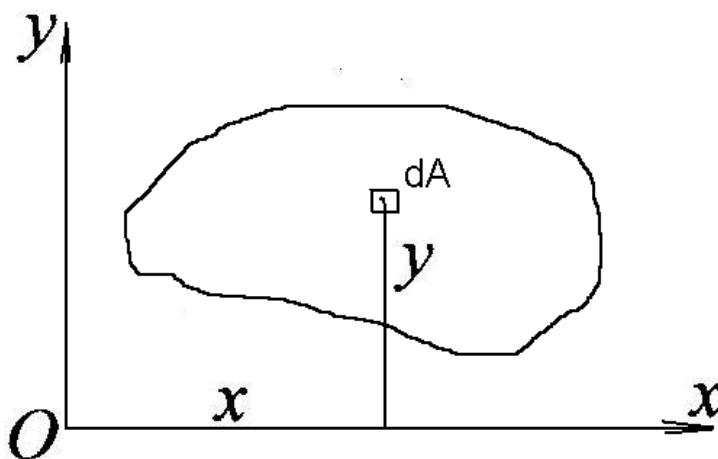


Рисунок 5.4 Определение центра тяжести однородной линии

Центр тяжести однородной линии. Сила тяжести однородной линии (рисунок 5.5) пропорциональна ее длине и может быть определена по формуле $G = \rho'' \cdot g \cdot L$, где ρ'' – масса единицы длины линии, L – длина линии. Вес элемента линии длиной dL равен $dG = \rho'' \cdot g \cdot dL$. В этом случае формулы (5.7) будут иметь вид:

$$x_c = \frac{\int x dL}{L}; \quad y_c = \frac{\int y dL}{L}; \quad z_c = \frac{\int z dL}{L}. \quad (5.9)$$

В общем случае интегралы в (5.9) являются криволинейными.

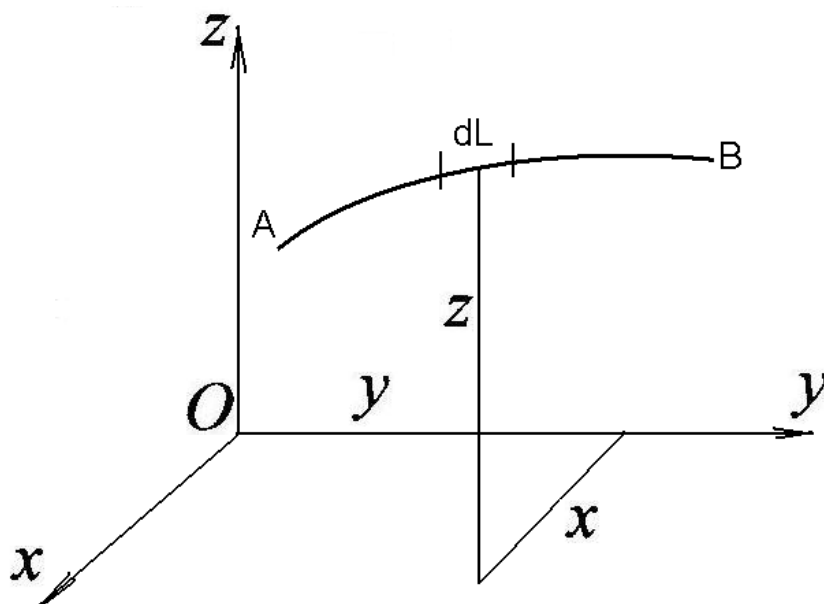


Рисунок 5.5 Определение центра тяжести однородной линии

Приведем несколько примеров определения центра тяжести однородных тел.

Центр тяжести треугольника. Разобьем фигуру на рисунке 5.6 на узкие полоски, параллельные стороне AD треугольника ABD. Центр тяжести каждой такой полоски находится на ее середине. Поэтому точка C – центр тяжести треугольника – находится на линии, проходящая через центры полосок, т.е. на медиане BE.

Совершенно аналогично можно показать, что точка C принадлежит и двум другим медианам треугольника, т.е. центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан. Согласно свойству медиан $AC = 2/3 AF$, $BC = 2/3 BE$.

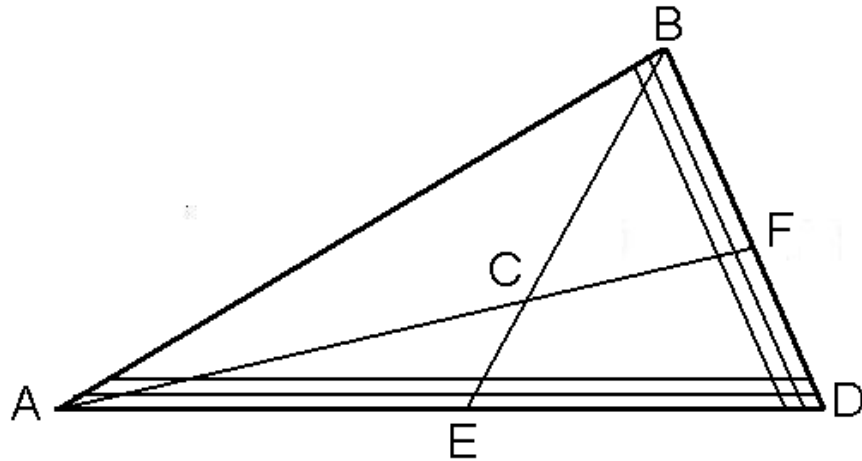


Рисунок 5.6 Определение центра тяжести треугольника

Дуга окружности. Для однородной дуги окружности на рисунке 5.7 ось Ox является осью симметрии, поэтому центр тяжести C дуги AB находится на этой оси. Найдем вторую координату $x_C = OC$ методом интегрирования. Выделим на дуге AB элемент $dL = R \cdot d\varphi$, положение которого определяется углом φ . Вычислим координату этого элемента $x = R \cdot \cos \varphi$. Подставим эти значения в (5.9) и получим

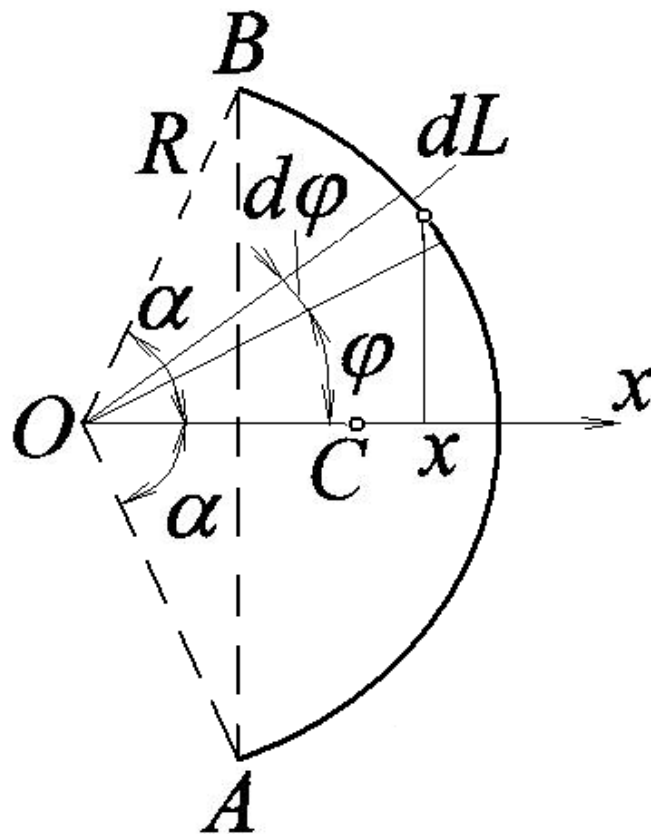


Рисунок 5.7 Центр тяжести дуги окружности

$$x_c = \frac{\int x dL}{L} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi}{2R \cdot \alpha} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\alpha}. \quad (5.10)$$

В частном случае полуокружности ($\alpha = \pi/2$)

$$x_c = \frac{2}{\pi} R.$$

Круговой сектор. Рассмотрим круговой сектор OAB с центральным углом 2α на рисунке 5.8. Разобьем площадь фигуры радиусами, проведенными из центра O на элементарные секторы с центральными углами $d\varphi$. Такие элементарные секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге A_1B_1 радиуса $2/3 R$. Следовательно, центр тяжести кругового сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги A_1B_1 . Из формулы (5.10) определим координату точки C

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (5.11)$$

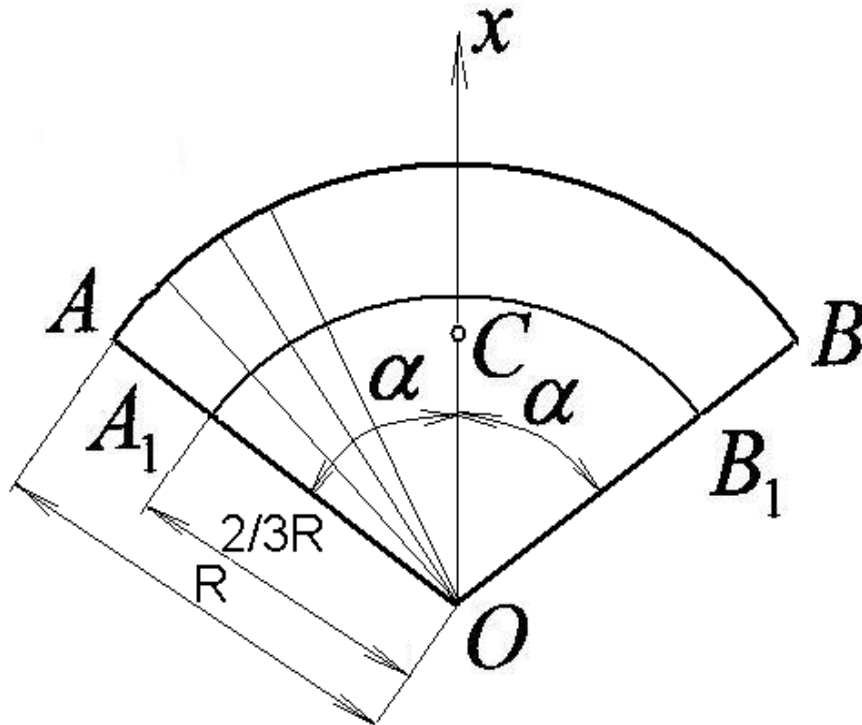


Рисунок 5.8 Центр тяжести кругового сектора

Частный случай сектора – полуокруг:

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}.$$

Примеры решения задач

Задача 5.1 Тело весом $G=100$ Н удерживается в равновесии силой \bar{T} на шероховатой наклонной плоскости, имеющей угол наклона $\alpha = 45^\circ$ (рисунок 5.9, а). Коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью $f = 0,6$. Сила \bar{T} действует на тело под углом $\beta = 15^\circ$ к линии наибольшего ската. Определить значение силы \bar{T} .

Решение. На тело действуют силы \bar{G} , \bar{N} , \bar{T} и сила трения \bar{F}_{TP} , направленная против возможного движения тела. При этом возможны два случая предельного равновесия тела и соответственно два предельных значения силы \bar{T} при двух направлениях силы трения по наклонной плоскости – вниз (рисунок 5.9, а) и вверх (рисунок 5.9, б). Двум предельным состояниям равновесия твердого тела соответствуют два значения удерживающей силы T .

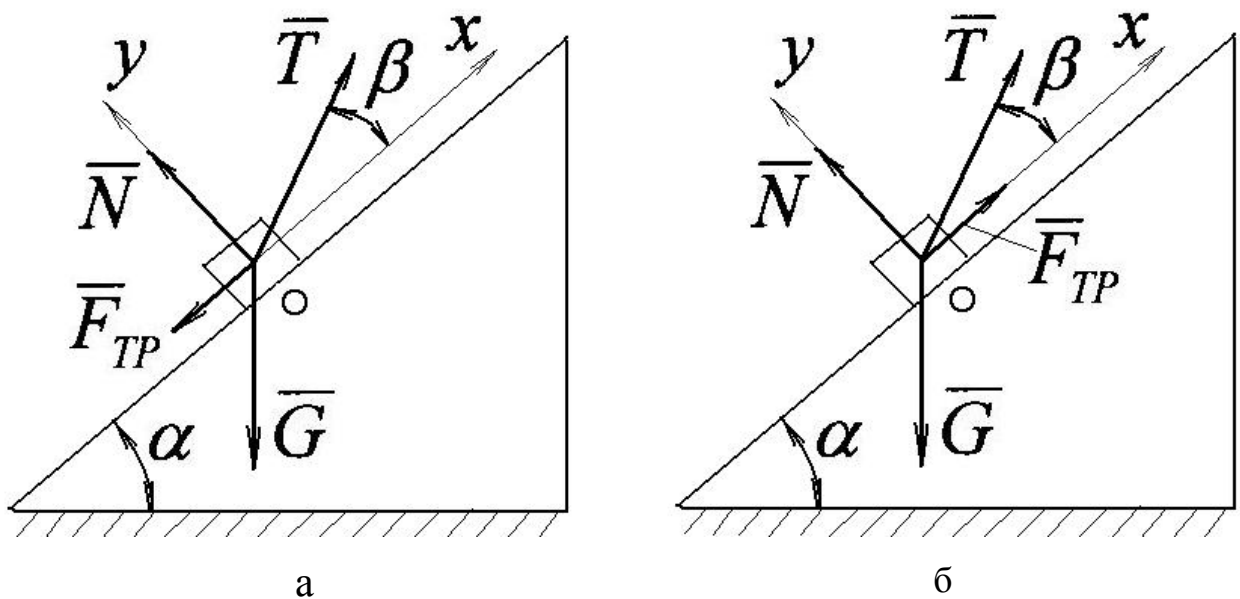


Рисунок 5.9 Равновесие груза на наклонной плоскости

Составим уравнения равновесия груза для плоской сходящейся системы сил на рисунке 5.9, а:

$$\sum X = T \cdot \cos \beta - G \cdot \sin \alpha - F_{TP} = 0; \quad \sum Y = T \cdot \sin \beta - G \cdot \cos \alpha + N = 0.$$

По закону Кулона

$$F_{TP} = f \cdot N = f \cdot (G \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \beta).$$

Подставим силу трения в первое уравнение системы:

$$T \cdot \cos \beta - G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha + f \cdot T \cdot \sin \beta = 0.$$

Максимальное значение удерживающей силы T равно

$$T = T^{\max} = G \cdot \frac{\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + f \cdot \sin \beta} = 100 \cdot \frac{\sin 45 + 0,6 \cdot \cos 45}{\cos 15 + 0,6 \cdot \sin 15} = 101 \text{ Н.}$$

Совершенно аналогично для предельного состояния твердого тела на рисунке 5.9, б получим:

$$T = T^{\min} = G \cdot \frac{\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha}{\cos \beta - f \cdot \sin \beta} = 100 \cdot \frac{\sin 45 - 0,6 \cdot \cos 45}{\cos 15 - 0,6 \cdot \sin 15} = 34,9 \text{ Н.}$$

Таким образом, значение силы T при равновесии груза на наклонной плоскости должно находиться в пределах

$$34,9 \leq T \leq 101 \text{ Н.}$$

Задача 5.2 Изображенный на рисунок 5.10 цилиндрический каток радиуса R весом \bar{G} приводится в движение посредством силы \bar{T} , приложенной к нити, намотанной на сердечник радиуса r . Угол схода нити с сердечника катка α , коэффициент трения скольжения f , коэффициент трения качения δ . Определить нормальную реакцию N , силу сцепления $F_{\text{сц}}$ и силу T , необходимую для равномерного качения катка без скольжения.

Решение. На каток, находящийся в равновесии, действуют активные силы \bar{G} и \bar{T} . Освобождаем каток от связи – горизонтальной поверхности движения, покажем действие связи на твердое тело в виде нормальной реакции \bar{N} , смещенной вперед по ходу движения катка на величину коэффициента трения качения δ , и горизонтальной реакции $\bar{F}_{\text{сц}}$ (рисунок 5.10).

Составим уравнения равновесия катка под действием произвольной плоской системы сил:

$$\sum X = T \cdot \cos \alpha - F_{\text{сц}} = 0; \quad \sum Y = T \cdot \sin \alpha - G + N = 0;$$

$$\sum m_C = -T \cdot r - F_{\text{сц}} \cdot R + N \cdot \delta = 0.$$

Выразим силу сцепления $F_{\text{сц}}$ из первого уравнения и подставим в третье:

$$T(r + R \cdot \cos \alpha) - N \cdot \delta = 0.$$

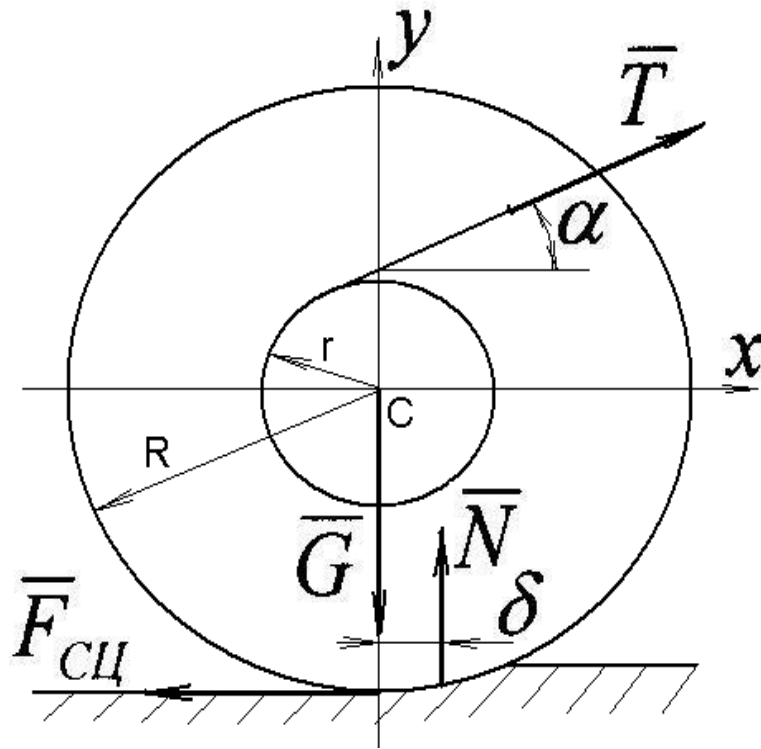


Рисунок 5.10 Равновесие цилиндрического катка

Исключив из написанного уравнения и второго уравнения системы силу N , получим:

$$T(r + R \cdot \cos \alpha) - G \cdot \delta + \delta \cdot T \cdot \sin \alpha = 0; \quad T = G \cdot \frac{\delta}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha}.$$

Подставим последнее выражение для силы T в первое уравнение системы и определим силу сцепления

$$F_{сц} = G \cdot \frac{\delta \cdot \cos \alpha}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha}.$$

Выразим N из первого уравнения системы, подставим $F_{сц}$ из последней полученной формулы и определим реакцию N как

$$N = G \cdot \frac{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha - \delta \cdot \sin \alpha}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha} = G \cdot \frac{r + R \cdot \cos \alpha}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha}.$$

Определим максимальное значение силы трения по закону Кулона

$$F_{сц}^{\max} = f \cdot N = f \cdot G \cdot \frac{r + R \cdot \cos \alpha}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha}.$$

Каток будет катиться без скольжения, если имеет место неравенство

$$F_{сц} \leq F_{сц}^{\max},$$

или

$$G \cdot \frac{\delta \cdot \cos \delta}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha} \leq f \cdot G \cdot \frac{r + R \cdot \cos \alpha}{r + R \cdot \cos \alpha + \delta \cdot \sin \alpha}.$$

Условие качения катка без скольжения имеет вид

$$\delta \cdot \cos \alpha \leq (r + R \cdot \cos \alpha) \cdot f.$$

Задача 5.3 Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением. Дано: $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 18$ см, $d = 40$ см, $t = 3$ см.

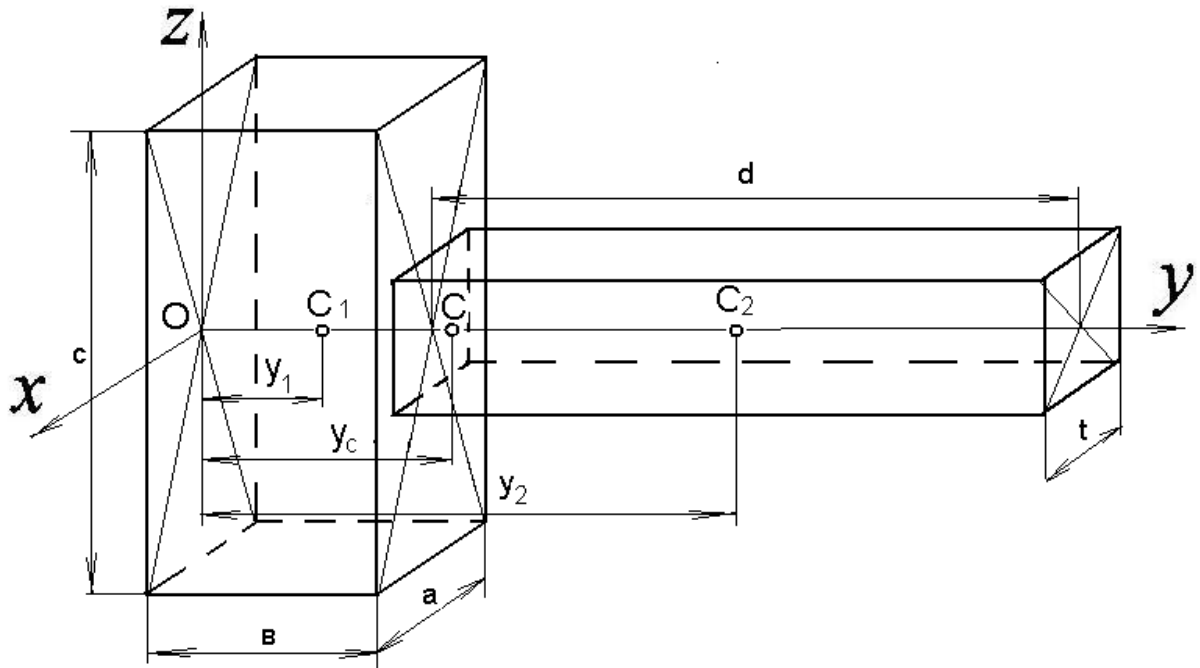


Рисунок 5.11 Деревянный молоток

Решение. Составная конструкция состоит из прямоугольного параллелепипеда и рукоятки. Осью симметрии молотка является ось Oy , поэтому две координаты центра тяжести равны $x_c = y_c = 0$.

Определяем объемы и координаты центров тяжести простых фигур.

1) Прямоугольный параллелепипед. $V_1 = a \cdot b \cdot c = 10 \cdot 8 \cdot 18 = 1440$ см³,
 $y_1 = a/2 = 10/2 = 5$ см.

2) Рукоятка. $V_2 = d \cdot t^2 = 40 \cdot 3^2 = 360$ см³, $y_2 = a + d/2 = 10 + 40/2 = 30$ см.

Определяем координату центра тяжести составной фигуры:

$$y_c = \frac{V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2}{V_1 + V_2} = \frac{1440 \cdot 5 + 360 \cdot 30}{1440 + 360} = 9,16 \text{ см.}$$

Показываем точку C на чертеже.

Задача 5.4 Определить координаты центра тяжести фигуры, изображенной на рисунке 5.12.

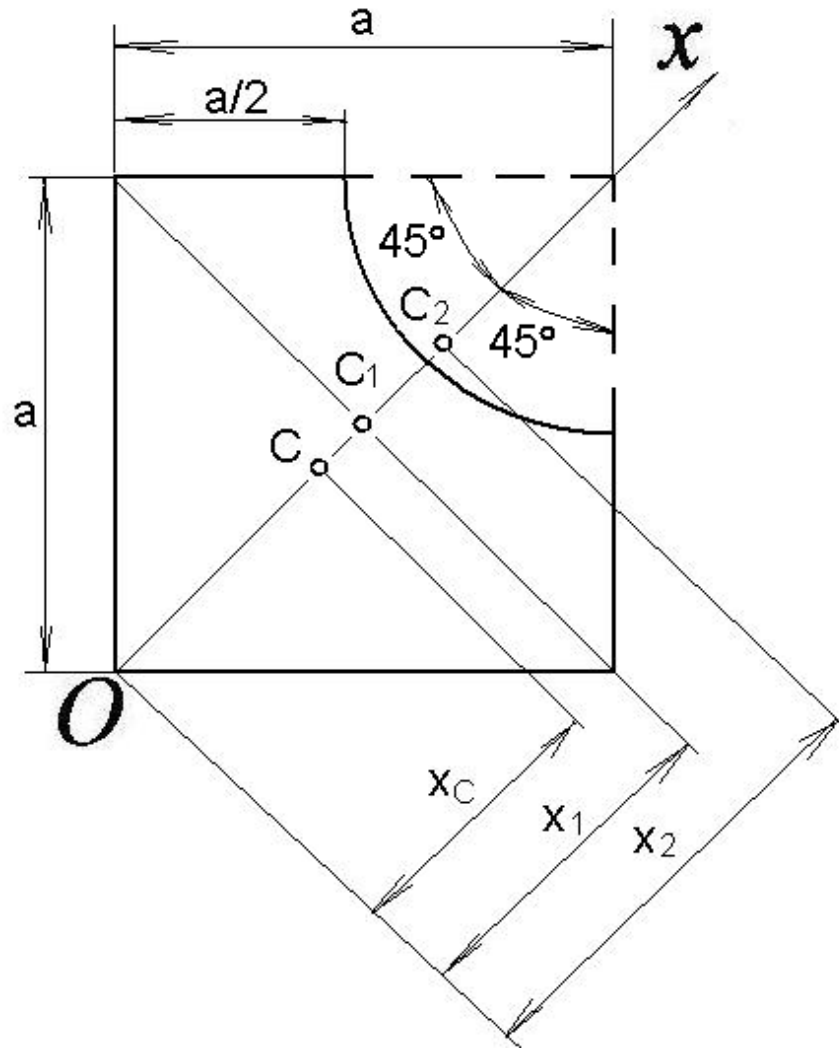


Рисунок 5.12 Определение центра составной фигуры

Решение. Разбиваем составную фигуру на квадрат со стороной a и круговой сектор радиуса $R = a/2$ с отрицательной площадью. Ввиду симметрии фигуры относительно оси Ox ордината центра ее тяжести $y_c = 0$. Определяем площади и абсциссы центров тяжести простых фигур.

1) Квадрат. $A_1 = a^2$; $x_1 = a \cdot \cos 45 = 0,707a$.

2) Круговой сектор. $A_2 = -\pi \cdot R^2 / 4 = -\pi(a/2)^2 / 4 = -0,196a^2$;

$$x_2 = (a / \cos 45) - \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin 45}{\pi/4} = a / \cos 45 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin 45}{\pi/4} = 1,114a.$$

Определяем положение центра тяжести составной фигуры:

$$x_c \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{a^2 \cdot 0,707a - 0,196a^2 \cdot 1,114a}{a^2 - 0,196a^2} = 0,616a.$$

ЛЕКЦИЯ 6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

6.1 Момент силы относительно оси

При изучении произвольной пространственной системы сил приходится пользоваться понятием момент силы относительно оси. Момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Момент силы относительно оси составляется в следующем порядке (рисунок 6.1).

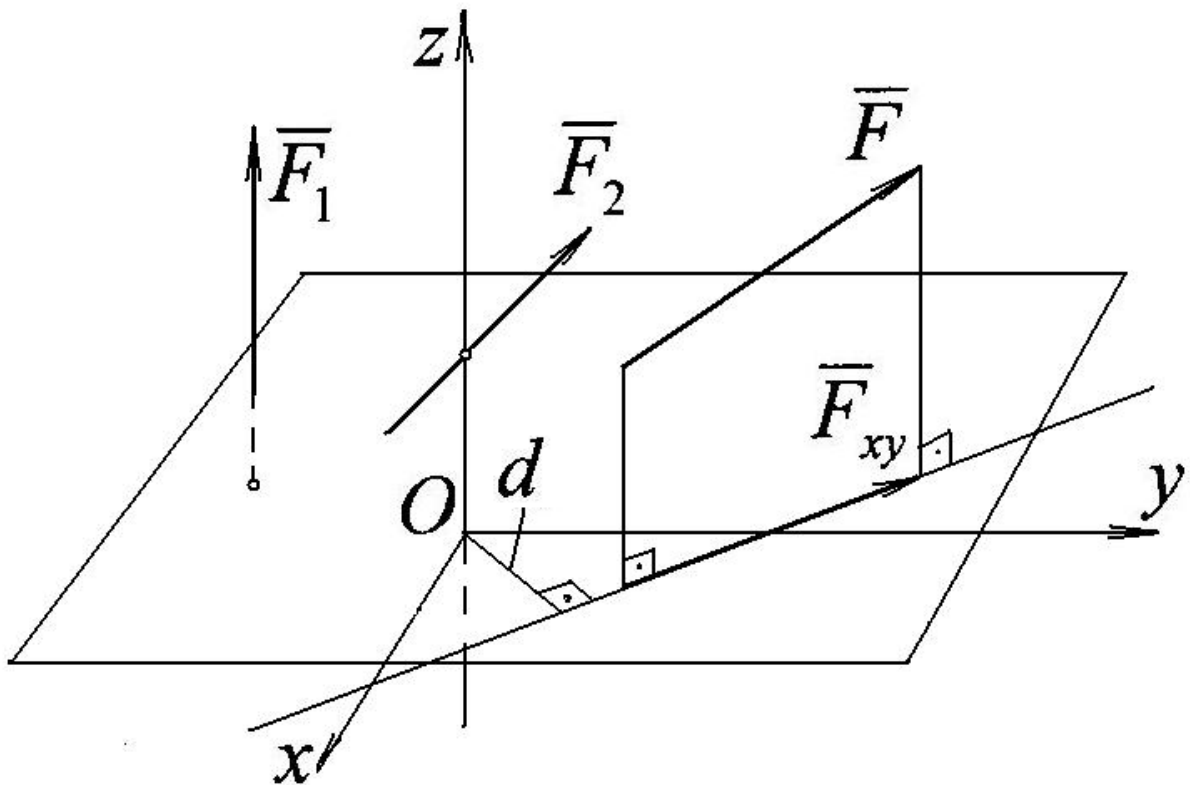


Рисунок 6.1 Момент силы относительно оси

- 1) Выбирается плоскость, перпендикулярная оси. В примере на рисунке 6.1 оси z перпендикулярна плоскость xOy .
- 2) Сила \vec{F} проектируется на эту плоскость.
- 3) Определяется плечо d проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости.

4) Составляется со знаком + или – произведение проекции силы на найденное плечо

$$m_z(\bar{F}) = \pm F_{xy} \cdot d.$$

5) Определяется знак момента.

Если наблюдатель, смотрящий с положительного конца оси, видит момент направленным против хода часовой стрелки, то момент считается положительным, по ходу часовой стрелки – отрицательным. В примере на рисунке 6.1 $m_z(\bar{F})$ имеет знак плюс.

Возможны частные случаи.

Сила \bar{F}_1 на рисунке 6.1 параллельна оси Oz . Для нее $Pr_y(\bar{F}_1) = 0$, поэтому $m_z(\bar{F}_1) = 0$.

Сила \bar{F}_2 пересекает ось Oz . В этом случае $d = 0$, $m_z(\bar{F}_2) = 0$.

Таким образом, если линия действия силы параллельна оси или через нее проходит, то такая сила момент относительно оси не дает.

6.2 Теорема о моменте силы относительно оси и точки, лежащей на этой оси

Доказать, что момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектор-момента силы относительно произвольной точки на этой оси.

Доказательство. В точке А твердого тела приложена сила \bar{F} (рисунок 6.2). Определим момент этой силы относительно точки О этого тела. Известно (§2.5), что вектор-момент $\bar{m}_O(\bar{F})$ этой силы перпендикулярен к плоскости треугольника OAB , а по модулю равен удвоенной площади этого треугольника:

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = |\bar{r} \times \bar{F}| = 2\Delta OAB. \quad (6.1)$$

Через точку О на оси Oz проведем плоскость xOy , спроектируем вектор \bar{F} на плоскость xOy и найдем модуль момента силы \bar{F} относительно оси Oz :

$$m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xy}) = F \cdot d = 2\Delta OA'B'. \quad (6.2)$$

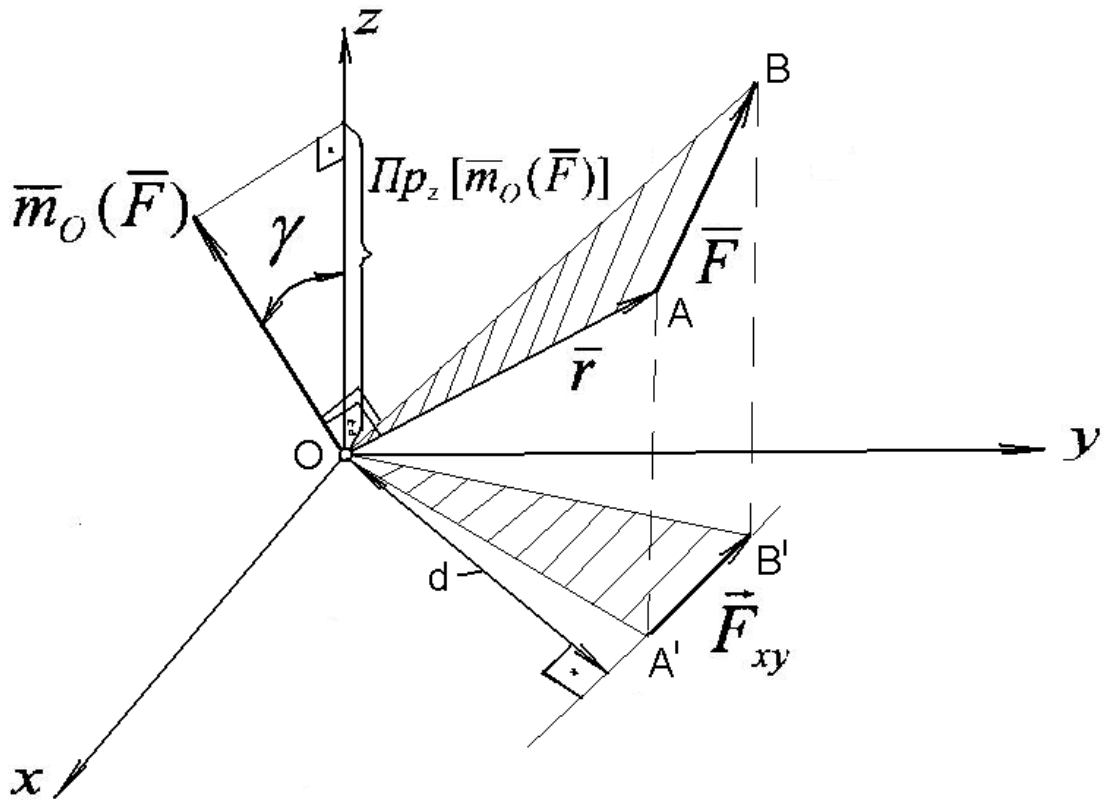


Рисунок 6.2 Момент силы относительно оси и относительно точки на оси

Треугольник $OA'B'$ на рисунке 6.2 представляет собой проекцию треугольника OAB на плоскость xOy . Известна геометрическая зависимость: площадь проекции равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус двугранного угла между плоскостью этой фигуры и плоскостью проекции. Угол между плоскостями треугольников OAB и $OA'B'$ равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям, т.е. углу γ между вектор-моментом $\bar{m}_O(\bar{F})$ и осью Oz .

Соотношение площадей фигур $A\Delta OA'B' = A\Delta OAB \cdot \cos \gamma$ подставляем в формулу (6.2) и получим:

$$m_z(\bar{F}) = 2A\Delta OAB \cdot \cos \gamma. \quad (6.3)$$

Проекция вектор-момента $\bar{m}_O(\bar{F})$ на ось Oz равна:

$$\text{Pr}_z[\bar{m}_O(\bar{F})] = [\bar{m}_O(\bar{F})] \cdot \cos \gamma. \quad (6.4)$$

После подстановки в (6.4) выражения (6.1) найдем:

$$\text{Pr}_z[\bar{m}_O(\bar{F})] = 2A\Delta OAB \cdot \cos \gamma.$$

Сравниваем последнее равенство с (6.3) и получим:

$$m_z(\bar{F}) = \text{Пр}_z[\bar{m}_O(\bar{F})] \quad (6.5)$$

Мы доказали, что момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектор-момента силы относительно произвольной точки на этой оси.

6.3 Приведение произвольной пространственной системы сил к центру

Пусть к твердому телу, изображенному на рисунке 6.3, а, в точках $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ приложены силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_n$. Выберем произвольную точку O тела в качестве центра приведения. При параллельном переносе каждой силы \bar{F}_k добавляем присоединенную пару, вектор-момент \bar{m}_k которой перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор \bar{F}_k и точку O . В результате получим систему сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_n$, сходящихся в центре O , и систему векторов пар $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_k, \dots, \bar{m}_n$ (рисунок 6.3, б).

Заменяем систему сходящихся сил одной силой, которую будем называть главным вектором произвольной пространственной системы сил (рисунок 6.3, в):

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (6.6)$$

Величина и направление главного вектора \bar{R} исходной системы сил от выбора центра приведения не зависят.

Геометрически складываем вектор-моменты добавленных пар и получаем результирующую пару:

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) \quad (6.7)$$

Момент \bar{M}_O пары, равный геометрической сумме моментов исходной системы сил относительно центра приведения O , называется главным моментом произвольной пространственной системы сил.

Главный момент \bar{M}_O зависит от выбора центра приведения, т.е. инвариантом по отношению к центру приведения не является.

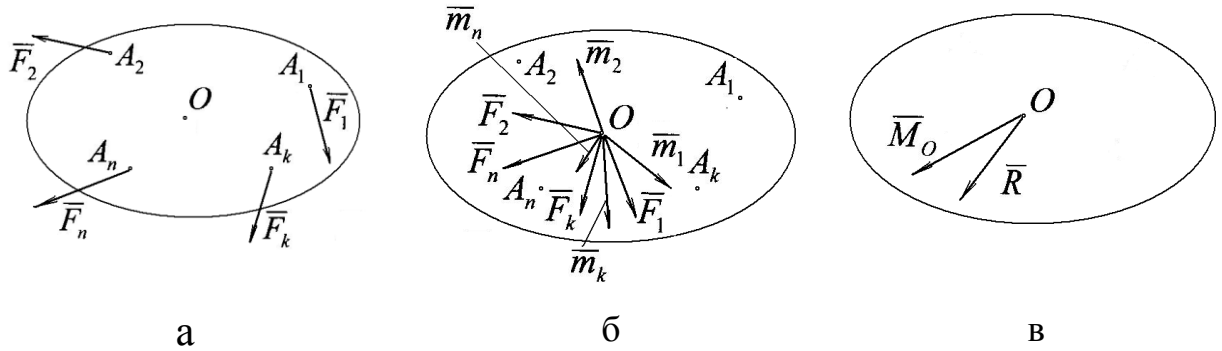


Рисунок 6.3 Приведение произвольной пространственной системы сил

Получим аналитические выражения для определения главного вектора. Для этого спроектируем векторное равенство (6.1) на оси координат:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Модуль главного вектора равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{k=1}^n Y_k^2 + \sum_{k=1}^n Z_k^2}. \quad (6.8)$$

Направление главного вектора \bar{R} определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Определим аналитически величину и направление главного момента \bar{M}_O :

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m_{Oxx}(\bar{F}_k); \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m_{Oyy}(\bar{F}_k); \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m_{Ozz}(\bar{F}_k);$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2};$$

$$\cos \alpha' = \frac{M_{Ox}}{M_O}; \quad \cos \beta' = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \quad \cos \gamma' = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \quad (6.9)$$

6.4 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

В предыдущем параграфе 6.3 было показано, что при приведении системы к произвольно выбранному центру O в общем случае получаем один вектор \bar{R} – главный вектор произвольной пространственной системы сил и

одну пару сил с вектор-моментом \bar{M}_O – главный момент произвольной пространственной системы сил (рисунок 6.4).

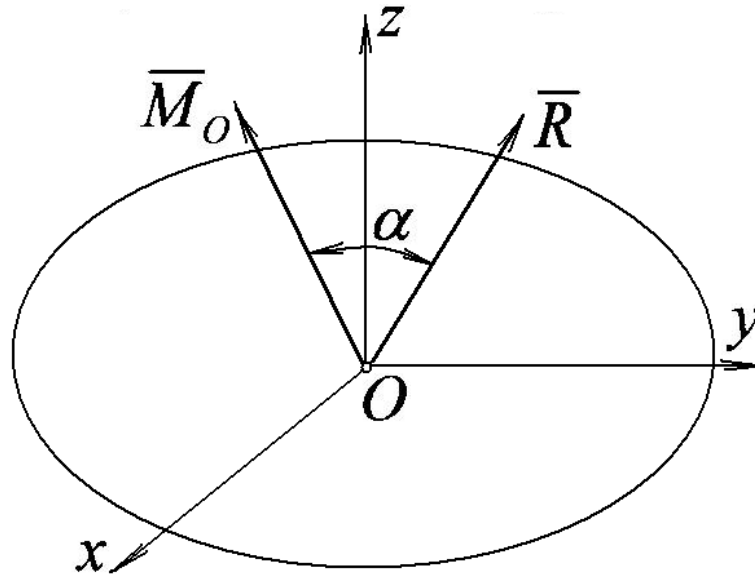


Рисунок 6.4 Главный вектор и главный момент произвольной пространственной системы сил

После приведения системы сил могут получиться следующие результаты:

- | | |
|----------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\bar{R} = 0; \bar{M}_O \neq 0;$ | 2) $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_O = 0;$ |
| 3) $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_O \neq 0;$ | 4) $\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0.$ |

Последний вариант является необходимым и достаточным условием равновесия произвольной пространственной системы сил. Если векторы \bar{R} и \bar{M}_O равны нулю, то равны нулю и их проекции на оси координат. Таким образом, необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы сил можно записать:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k) = 0, \quad (6.10)$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_{Oxx}(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_{Oy}(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_{Oz}(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Уравнения (6.10) являются геометрическими, а (6.11) – аналитическими условиями равновесия.

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих трех осей были одновременно равны нулю.

Частный случай пространственной системы параллельных сил. В этом случае целесообразно выбрать координатные оси так, что ось Oz была параллельна силам, как на рисунке 6.5. Тогда проекции всех сил на оси Ox и Oy и их моменты относительно оси Oz будут равны нулю, а система аналитических уравнений (6.11) запишется:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_{Oxx}(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_{Oyy}(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.12)$$

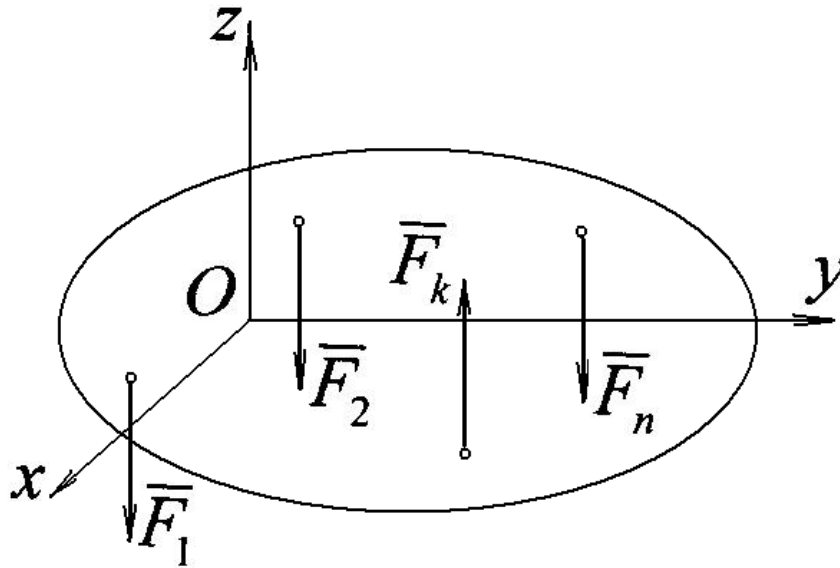


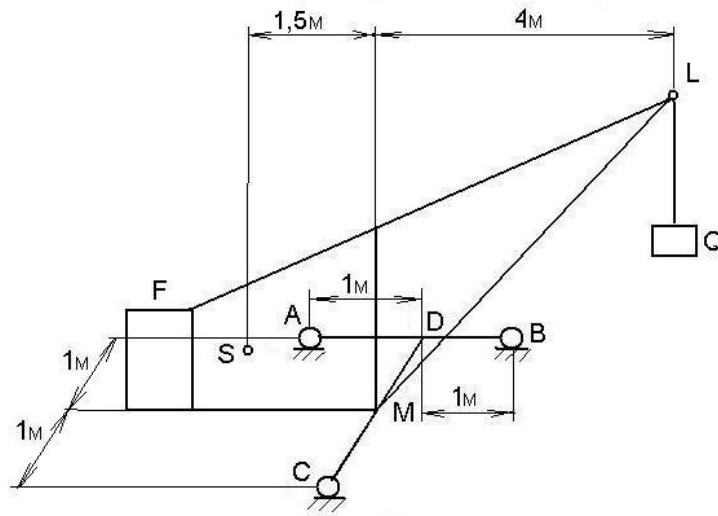
Рисунок 6.5 Параллельная система сил

Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были одновременно равны нулю.

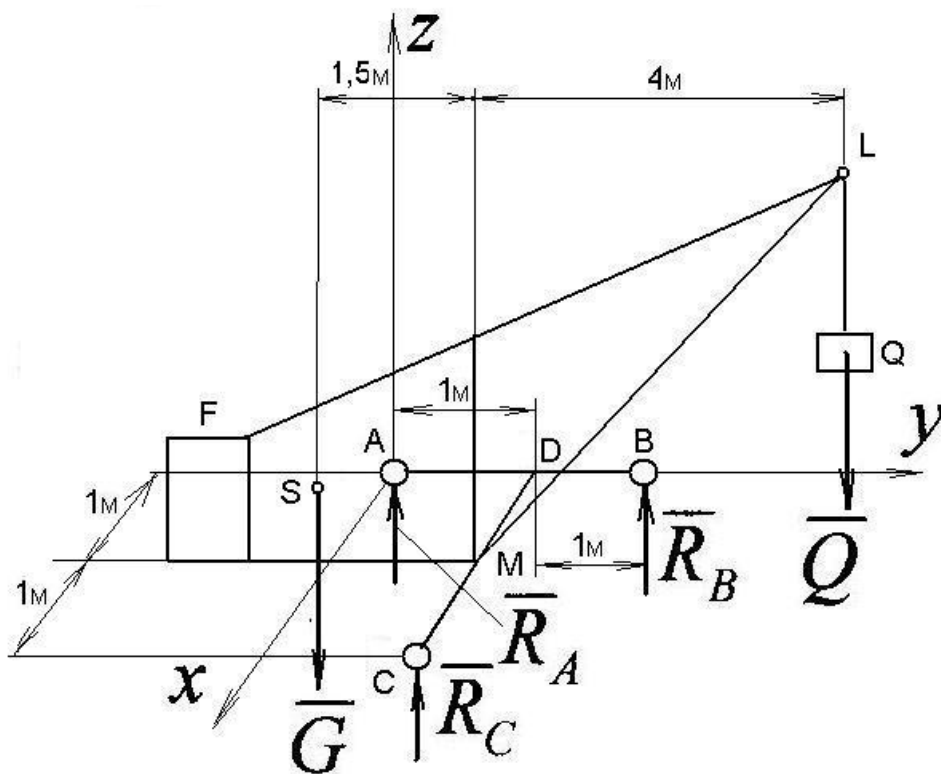
Примеры решения задач

Задача 6.1 Подъемный кран установлен на трехколесной тележке ABC. Известные размеры крана показаны на рисунке 6.6, а. Кран уравновешивает-

ся противовесом F . Вес \bar{G} крана с противовесом приложен в точке S и равен 80 кН . Вес поднимаемого груза $Q = 40 \text{ кН}$. Найти давление крана на рельсы в точках A, B, C .



а



б

Рисунок 6.6 Равновесие подъемного крана

Решение. Рассматриваем равновесие крана вместе с трехколесной тележкой. Покажем на рисунке 6.6, б оси координат и активные силы тяжести \bar{G} и \bar{Q} . Отбрасываем связи в точках A, B, C и заменяем их действие на те-

лежку искомыми реакциями \bar{R}_A , \bar{R}_B и \bar{R}_C , направленными вертикально вверх.

Все силы, приложенные к свободному твердому телу, параллельны вертикальной оси Az. Составляем для пространственной системы сил три аналитических уравнения равновесия:

$$\sum Z = R_A + R_B + R_C - G - Q = 0;$$

$$\sum m_x = 0,5G + 1R_C + 2R_B - 5Q = 0;$$

$$\sum m_y = 1G + 1Q - 2R_C = 0.$$

Решаем систему уравнений:

$$R_C = \frac{G + Q}{2} = \frac{80 + 40}{2} = 60 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{-0,5G + 5Q - 1R_C}{2} = \frac{-0,5 \cdot 80 + 5 \cdot 40 - 1 \cdot 60}{2} = 50 \text{ кН};$$

$$R_A = G + Q - R_B - R_C = 80 + 40 - 50 - 60 = 10 \text{ кН}.$$

Задача 6.2 На горизонтальный вал АВ коробки перемены передач комбайна насажено зубчатое колесо С радиуса $R = 1$ м и шестерня D радиуса $r = 0,1$ м. Другие размеры $a = 0,1$ м, $b = 0,8$ м. К колесу С по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников А и В в положении равновесия.

Решение. Рассмотрим равновесие вала АВ. На зубчатые колеса вала действуют окружные усилия в зацеплениях \bar{P} и \bar{Q} , реакции в подшипниках \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Z}_B . Выбираем три оси координат, как показано на чертеже 6.7.

Для пространственной системы составляем уравнения проекций сил на оси координат и уравнения моментов сил относительно этих осей. При составлении уравнений моментов проектируем силы на плоскости, перпендикулярные соответствующим осям координат. Проекции сил на плоскости показаны на чертеже.

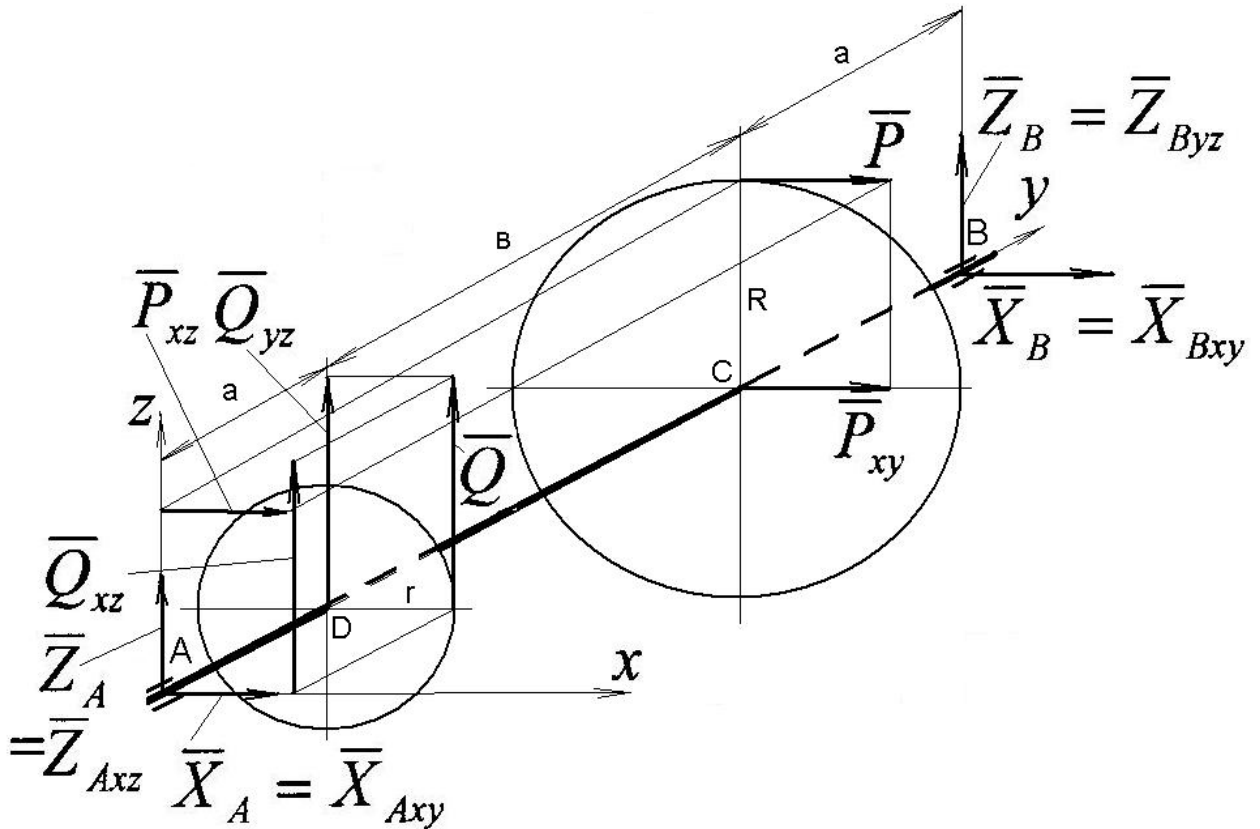


Рисунок 6.7 Равновесие вала с колесом и шестерней

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum X = X_A + X_B + P = 0; \quad \sum Z = Z_A + Z_B + Q = 0;$$

$$\sum m_x = Q \cdot a + Z_B \cdot (2a + b) = 0; \quad \sum m_y = P \cdot R - Q \cdot r = 0.$$

Производим вычисления:

$$X_B = -\frac{a+b}{2a+b} \cdot P = -\frac{0,1+0,8}{2 \cdot 0,1+0,8} \cdot 100 = -90 \text{ Н}; \quad Q = P \cdot \frac{R}{r} = 100 \cdot \frac{1}{0,1} = 1000 \text{ Н};$$

$$Z_B = -\frac{a}{2a+b} \cdot Q = \frac{0,1}{2 \cdot 0,1+0,8} \cdot 1000 = -100 \text{ Н};$$

$$Z_A = -Z_B - Q = 100 - 1000 = -900 \text{ Н}; \quad X_A = -X_B - P = 90 - 100 = -10 \text{ Н}.$$

Направления реакций подшипников $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$ противоположны показанным на чертеже направлениям.

Задача 6.3 Полка ABCD стеллажа, которая может вращаться вокруг оси АВ, удерживается в горизонтальном положении невесомым стержнем DE, прикрепленным при помощи шарнира E к вертикальной стене ВАЕ под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали. Вес полки и лежащих на ней деталей равен 800 Н и

приложен в точке пересечения диагоналей прямоугольника ABCD. Показанные на рисунке 6.8 размеры полки равны: $a = 1,5$ м; $b = 0,6$ м; $t = 0,1$ м.

Определить усилие S в стержне DE и реакции петель К и Н.

Решение. Рассмотрим равновесие полки. Выберем пространственную систему осей координат $xKyZ$. Покажем на чертеже силу тяжести \bar{G} , действие шарниров К и Н на полку обозначим составляющими реакций связей \bar{X}_K , \bar{Z}_K , \bar{X}_H , \bar{Z}_H . Усилие \bar{S} невесомого стержня DE раскладываем на вертикальную и горизонтальную составляющие, как показано на рисунке 6.8.

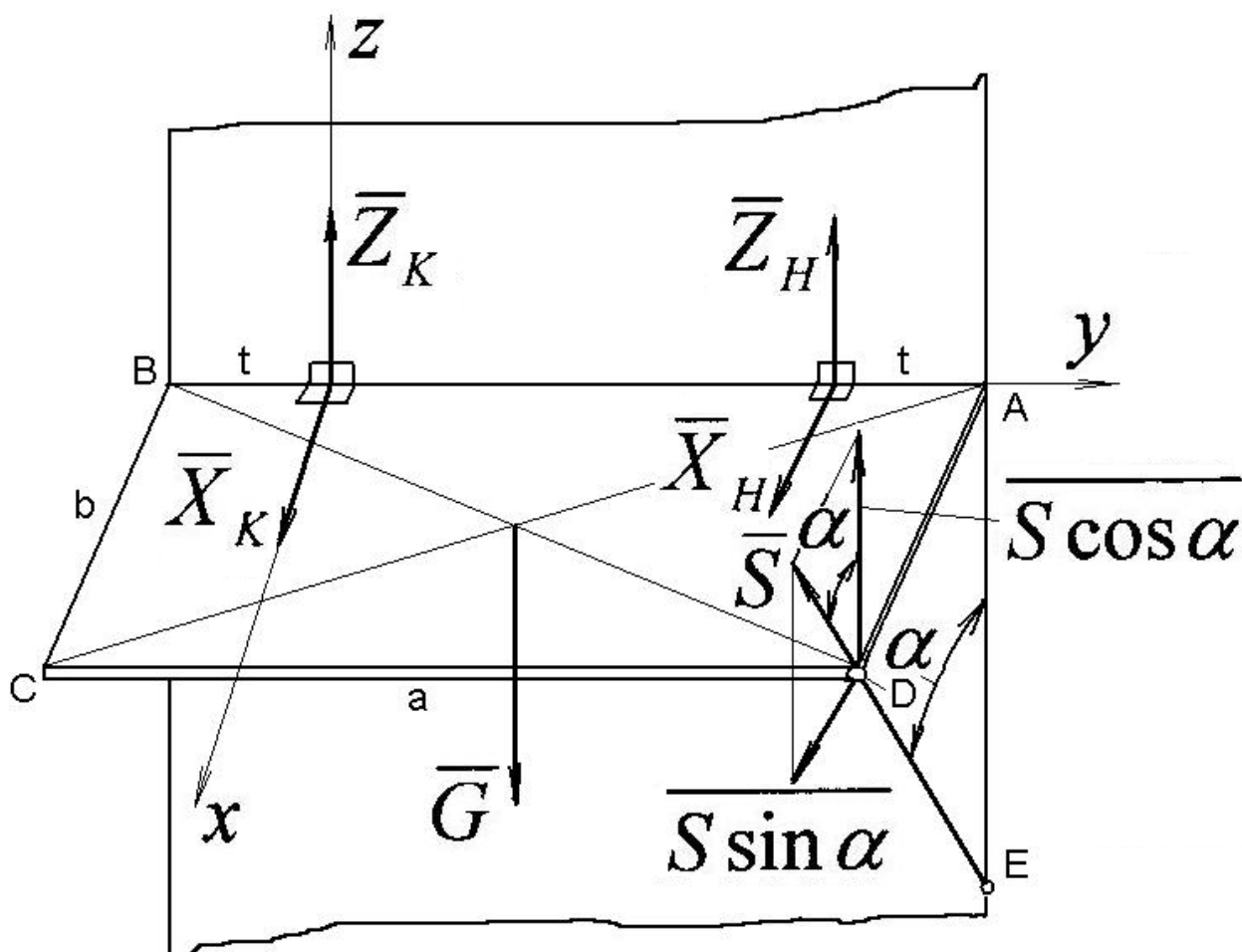


Рисунок 6.8 Равновесие полки стеллажа

Составляем аналитические уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\sum X = X_K + X_H + S \cdot \sin \alpha = 0; \quad \sum Z = Z_K + Z_H - G + S \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum m_x = -G \cdot (a/2 - t) + X_H \cdot (a - 2t) + S \cdot \cos \alpha \cdot (a - t) = 0;$$

$$\sum m_y = G \cdot b/2 - S \cdot \cos \alpha \cdot b = 0; \quad \sum m_z = -Z_H \cdot (a - 2t) - S \cdot \sin \alpha \cdot (a - t) = 0.$$

Неизвестные реакции связей определяем из уравнений равновесия:

$$S = \frac{G}{2 \cos \alpha} = \frac{800}{2 \cos 30} = 462 \text{ Н};$$

$$Z_H = -\frac{a-t}{a-2t} \cdot S \cdot \sin \alpha = -\frac{1,5-0,1}{1,5-2 \cdot 0,1} \cdot 462 \cdot \sin 30 = -249 \text{ Н};$$

$$X_H = \frac{G \cdot (a/2 - t) - S \cdot \cos \alpha \cdot (a-t)}{a-2t} = \frac{800 \cdot (1,5/2 - 0,1) - 462 \cdot \cos 30 \cdot (1,5 - 0,1)}{1,5 - 2 \cdot 0,1} = -30,9 \text{ Н};$$

$$X_K = -X_H - S \cdot \sin \alpha = 30,9 - 462 \cdot \sin 30 = -200 \text{ Н};$$

$$Z_K = -Z_H + G - S \cdot \cos \alpha = 200 + 800 - 462 \cdot \cos 30 = 600 \text{ Н}.$$

Задача 6.4 С помощью ворота, изображенного на рисунке 6.9, а, осуществляется подъем груза весом $Q = 1000 \text{ Н}$. Радиус барабана $R = 5 \text{ см}$. Длина рукоятки $KD = 40 \text{ см}$; $AD = 30 \text{ см}$; $AC = 40 \text{ см}$; $BC = 60 \text{ см}$. веревка сходит с барабана по касательной, наклоненной к горизонту под углом 60° . Определить усилие F на рукоятке и реакции опор A и B при том положении ворота, когда рукоятка KD горизонтальна.

Решение. Рассмотрим равновесие ворота. Отбросим мысленно подшипники A и B , их действие на твердое тело заменим реакциями $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$. Усилие \bar{T} веревки направляем по гибкой связи, по модулю $T = Q$. Составляем аналитические уравнения равновесия для пространственной системы сил на рисунке 6.9, б:

$$\sum X = X_A + X_B + T \cdot \cos 60 = 0; \quad \sum Z = Z_A + Z_B - F + T \cdot \sin 60 = 0;$$

$$\sum m_x = F \cdot AD + T \cdot \sin 60 \cdot AC + Z_B \cdot AB = 0; \quad \sum m_y = T \cdot R - F \cdot KD = 0;$$

$$\sum m_z = -T \cdot \cos 60 \cdot AC - X_B \cdot AB = 0.$$

Решаем систему уравнений:

$$F = T \cdot \frac{R}{KD} = 1000 \cdot \frac{0,05}{0,4} = 125 \text{ Н}; \quad X_B = -T \cdot \frac{AC \cdot \cos 60}{AB} = -1000 \cdot \frac{0,4 \cdot \cos 60}{1} = -200 \text{ Н};$$

$$Z_B = -\frac{F \cdot AB + T \cdot \sin 60 \cdot AC}{AB} = -\frac{125 \cdot 0,3 + 1000 \cdot \sin 60 \cdot 0,4}{1} = -383,9 \text{ Н};$$

$$X_A = -X_B - T \cdot \cos 60 = 200 - 1000 \cdot \cos 60 = -300 \text{ Н};$$

$$Z_A = F - Z_B - T \cdot \sin 60 = 125 + 383,9 - 1000 \cdot \sin 60 = -357,1 \text{ Н}.$$

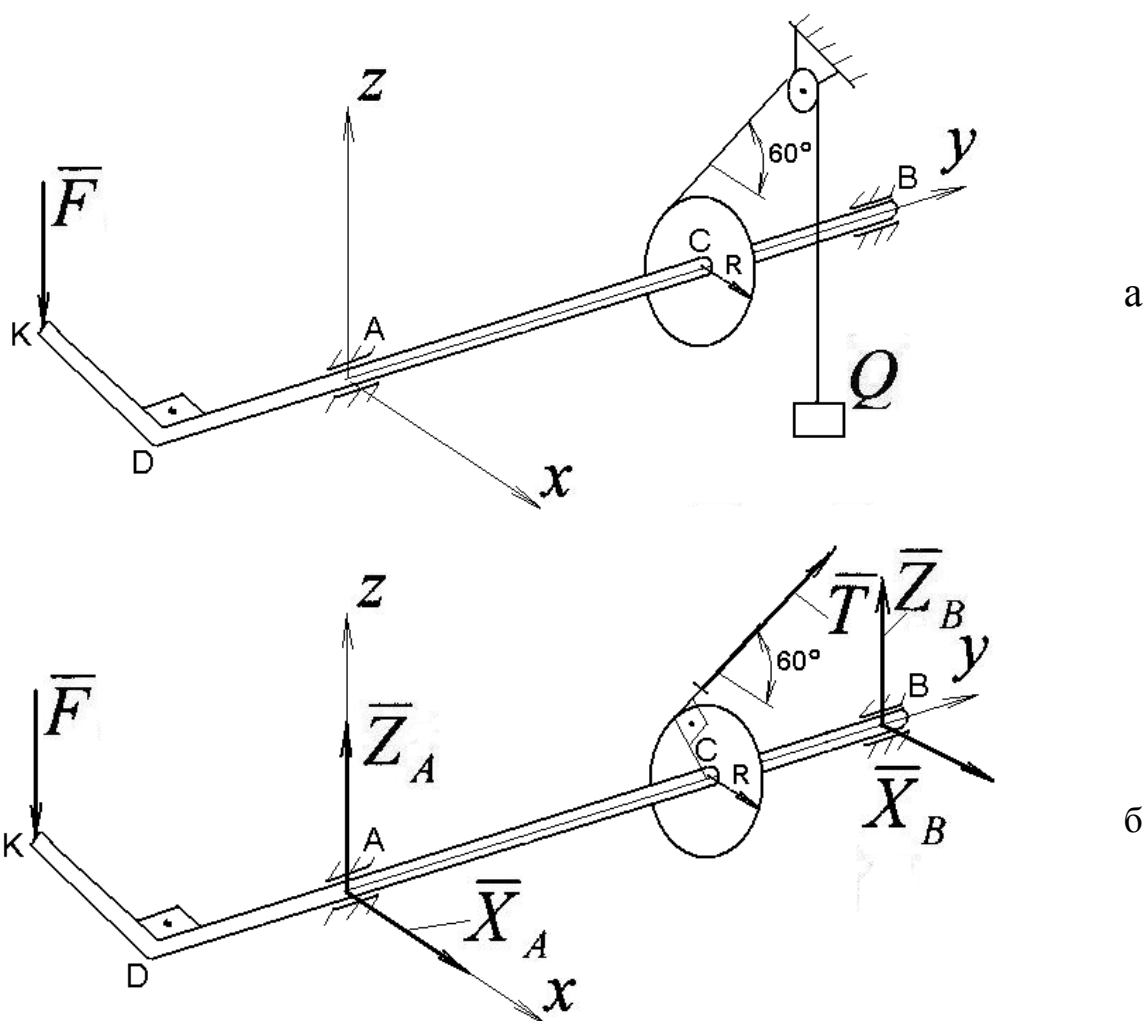


Рисунок 6.9 Равновесие ворота

Контрольные вопросы по статике

1. Что называется материальной точкой?
2. Какое тело называется абсолютно жестким?
3. Какой круг вопросов изучается в статике?
4. Назовите единицу измерения силы в системе СИ.
5. Какая сила называется равнодействующей данной системы сил?
6. Какое тело называется несвободным и что называется силой реакции связи?
7. Перечислите основные виды связей, встречающихся в технике, укажите направления реакций связей.
8. В чем заключается аналитический способ определения равнодействующей системы сил, приложенных в одной точке?
9. Поясните, как спроектировать вектор силы на три оси координат.
10. Как формулируется теорема о трех силах?
11. Как записываются геометрическое и аналитическое условия равновесия сходящейся системы сил?
12. Как определить равнодействующую двух параллельных сил, направленных в одну сторону?
13. Как привести систему двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, к равнодействующей?
14. Что называется парой сил?
15. Дать определение понятию алгебраического момента силы относительно точки.
16. Как направлен вектор-момент пары сил, как определить его величину?

17. Назовите условие эквивалентности двух пар сил.
18. В чем состоит теорема о сложении системы пар, расположенных в одной плоскости?
19. Как направлен и чему равен по модулю вектор-момент силы относительно точки?
20. В каком случае вектор момент силы относительно точки равен нулю?
21. Изменится ли вектор-момент силы относительно данной точки при переносе точки приложения силы по линии ее действия?
22. Как формулируется теорема о параллельном переносе силы? Что такое добавленная пара?
23. Как определяется главный вектор произвольной плоской системы сил?
24. Как определяется главный момент произвольной плоской системы сил?
25. Изменяется ли главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил при перемене центра приведения?
26. В чем состоит теорема Вариньона?
27. Что такое распределенная сила? Как ее задать? Как определить ее равнодействующую в различных случаях?
28. Приведите три формы аналитических условий равновесия плоской системы сил.
29. В чем заключается метод решения задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких тел? Сколько независимых уравнений равновесия можно составить в такой задаче, если все силы, действующие на систему, лежат в одной плоскости?
30. Какие виды трения существуют в природе?
31. Сформулируйте закон Кулона? От каких факторов зависит величина коэффициента трения скольжения?
32. Что называется углом трения? Как связаны угол трения и коэффициент трения скольжения?
33. Что такое коэффициент трения качения?
34. Как составляется момент силы относительно оси?
35. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
36. Как определяется главный вектор произвольной пространственной системы сил?
37. Как определяется главный момент произвольной пространственной системы сил?
38. Как формулируются условия равновесия произвольной пространственной системы сил?
39. Как формулируются условия равновесия пространственной системы параллельных сил?
40. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить в задаче о равновесии твердого тела, если все силы, приложенные к телу, параллельны, но не лежат в одной плоскости?
41. Какая точка называется центром тяжести данного твердого тела?
42. Какие существуют способы нахождения центра тяжести тел? В чем заключаются эти способы?
43. В чем состоит метод отрицательных площадей (объемов) при расчете центра тяжести тела?
44. Какова роль симметрии твердых тел при определении их центров тяжести?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Диевский В.А. Теоретическая механика [Текст]: Курс лекций / В.А. Диевский. - 2-е изд., испр., 2008. - 320 с.
2. Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика [Текст]: Сборник заданий / В.А. Диевский, И.А. Малышева. - 2-е изд., испр. – С-Пб.: Лань, 2008. - 192 с..
3. Доев В.С., Доровин Ф.А. Сборник заданий по теоретической механике на базе MATCAD [Текст]: Учебник / В.С. Доев, Ф.А. Доровин. - 1-е изд. С-Пб.: Лань, 2009.- 480 с.
4. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике [Текст]: учебник / О.Э. Кепе. - 2-е изд. С-Пб.: Лань, 2009. - 368 с.
5. Лачуга Е.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика [Текст]: Учебник / Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Колос, 2005. – 570 с.
6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики [Текст]: учебник / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. -9-е изд. В 2-х томах. С-Пт., М., Краснодар: 2007. -736 с.
7. Задачи по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. спец. / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - 46-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2006. - 448 с.

Дополнительная литература:

1. Чуркин В.М. Решение задач по теоретической механике [Текст]: Геометрическая статика / В.М. Чуркин. - 1-е изд. С-Пб.: Лань 2009. - 304 с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др. ; под ред. А. А. Яблонского. - 7-е изд., испр. - М. : ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2002. - 382 с.

СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование	Назначения (виды занятий, № тем и т.д.)
1	2
1. Методические указания и контрольные задания к самостоятельной работе студентов по теоретической механике (статике). Уфа, 2010. –40 с.	РГР №1
2. Методическая указания по решению задач по статике. Уфа, 2010. –12 с.	РГР№1
3. Кинематика. Задания для расчетно-графической работы по разделу дисциплины «Теоретическая механика» Уфа, 2010. – 48 с.	РГР №1
4. Домашнее задание по кинематике. Уфа, 2010. –20 с.	РГР №1
5. Динамика. Задания к расчетно-графической работе по разделу дисциплины «Теоретическая механика» Уфа, 2010. - 64	РГР №2
6. Контрольные задания по теоретической механике. Уфа, 2010. –24 с.	Задание на контрольную работу для студентов-заочников
7. Пакеты программ АРМ Win Machine, Mathcad, AUTOCAD, Компас-график	Практические занятия, СРС по выполнению РГР, контрольной работы.