Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Математическая статистика

Методические указания к лабораторным занятиям
«Законы распределения случайных величин»

Для всех направлений бакалавриата

Уфа 2016

00УДК 51

ББК 22.1

М 33

Рекомендовано к изданию методической комиссией механического факультета (протокол № 1 от «1 сентября» 2016 года) и заседанием кафедры математики (протокол № 9 от «8 июня» 2016 года)

Составитель: доцент Лукманов Р.Л.

Рецензент: зав. кафедрой физики, доцент Юмагужин Р.Ю.

Ответственный за выпуск: и. о. зав. кафедрой математики
к.т.н. Бадретдинов И.Д.

В Mathcad имеется ряд встроенных функций, задающих используемые в математической статистике законы распределения. С их помощью можно находить значения плотности и функции распределения, их квантили, разыгрывать случайные векторы с заданным распределением. Обращение ко всем этим встроенным функциям производится по одной и той же схеме:

$d*(x, par)$ – значение плотности вероятности;

$p*(x, par)$ – значение функции распределения;

$q*(p, par)$ – значение квантили распределения;

$r*(n, par)$– вектор независимых случайных чисел каждое из которых имеет соответствующее распределение.

Здесь x-аргумент функции, p- значение вероятности, n- объем выборки. Вместо $*$ нужно записать имя распределения (например, $norm, t, F, chisq$) и ввести соответствующий список параметров par.

Например, встроенная функция $dnorm(x,2,1)$ вычисляет значение плотности нормального распределения с математическим ожиданием 2 и средним квадратическим отклонением 1 для аргумента x.

Нормальное распределение

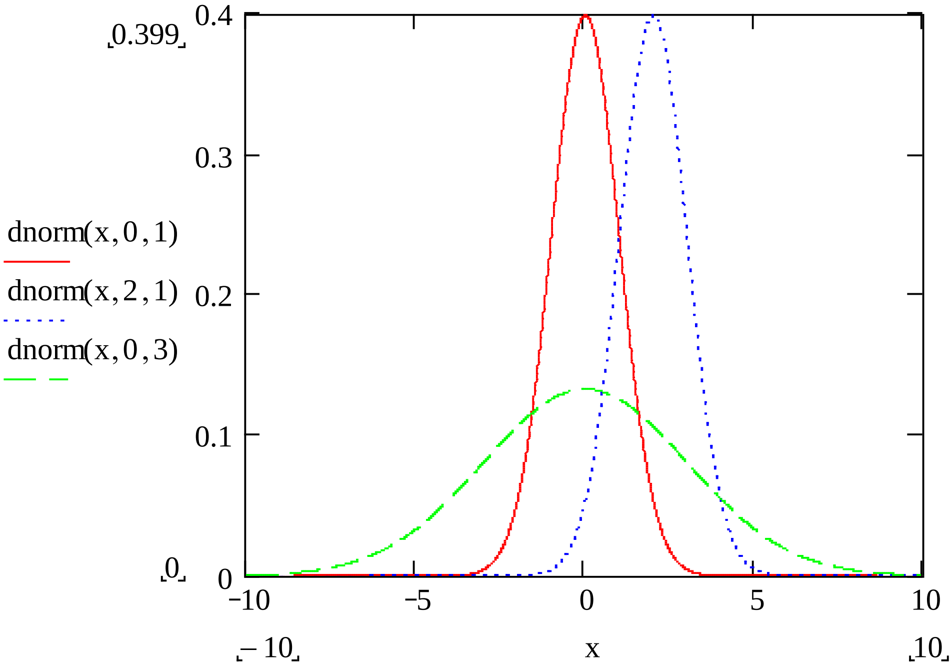
Нормальное распределение определяется плотностью

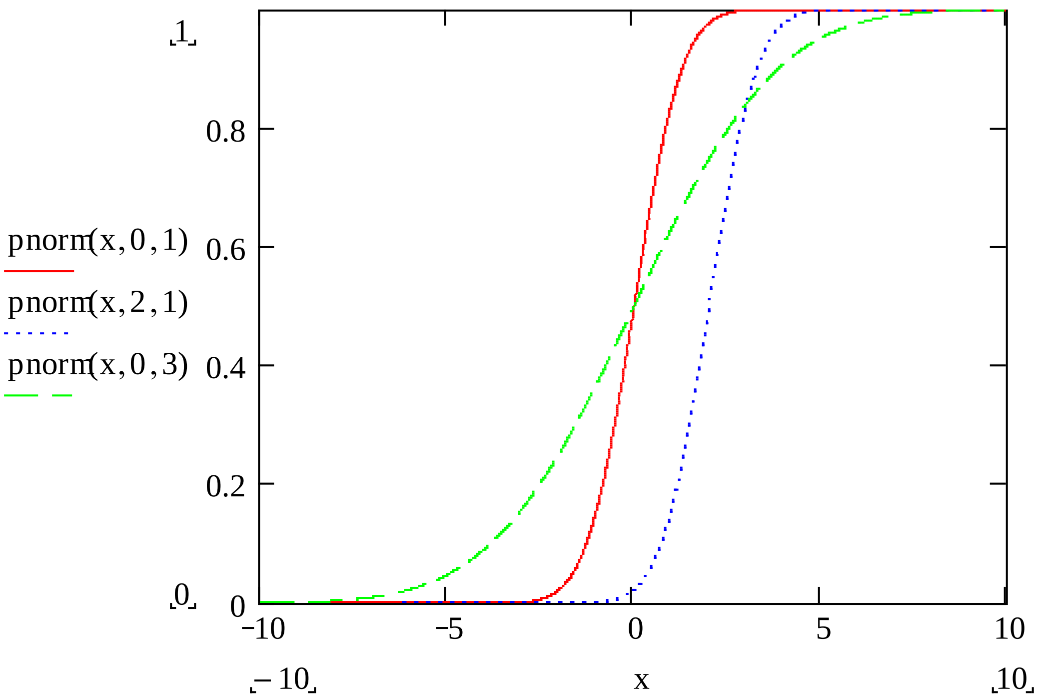
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a - математическое ожидание, а σ - среднее квадратическое отклонение.

Ниже приводится пример построения в Mathcad графиков плотности и функции нормального распределения с различными значениями параметров:

$A := -10 \qquad B := 10 \qquad x := A, A + 0.01 .. B$





Как видим из графиков плотности вероятности, параметр a не влияет на форму графика; при его изменении происходит лишь сдвиг графика. Параметр σ влияет на форму графика: чем он больше, тем ниже пик графика и шире интервал, на котором график плотности принимает «существенно» ненулевые значения.

Распределение “хи – квадрат”

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, т. е. $X_i \in N(0;1)$. Тогда распределение «хи-квадрат» с n степенями свободы определяется равенством

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{1}$$

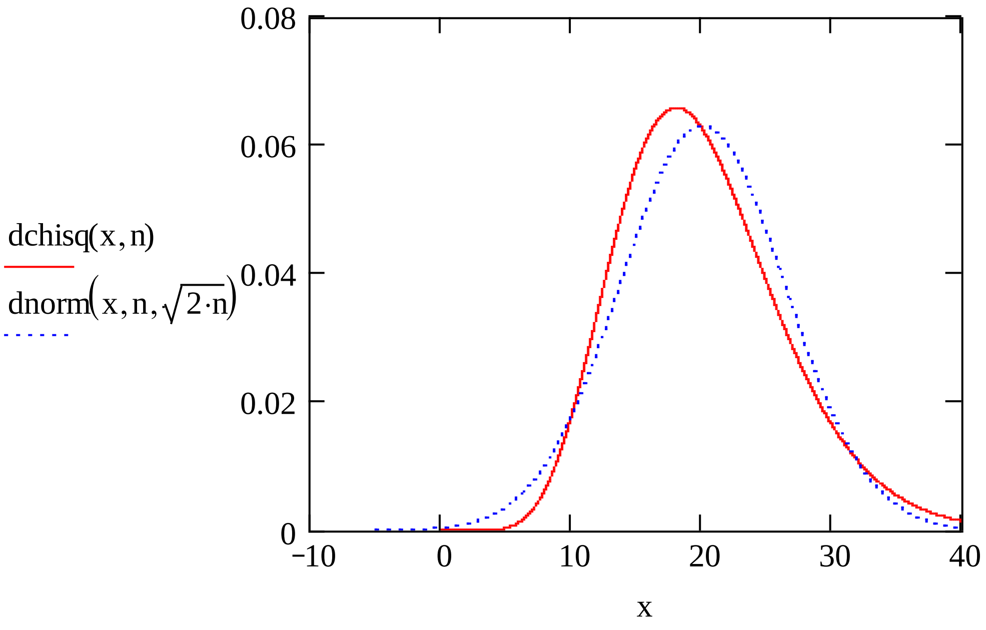
Известно, что

$$M\,\chi_n^2 = n, \tag{2}$$

$$D\,\chi_n^2 = 2n. \tag{3}$$

В соответствии с центральной предельной теоремой последовательность случайных величин χ_n^2 асимптотически нормальна. Мы можем проиллюстрировать это утверждение, сравнив при больших значениях n графики плотностей распределения “хи-квадрат” с n степенями свободы и нормального распределения с математическим ожиданием и дисперсией, вычисленными по формулам (2) и (3):

$A := -5 \qquad B := 40 \qquad n := 20 \qquad x := A, A+0.01 .. B$



Распределение Стьюдента

Пусть $X_0, X_1, ..., X_n$ - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, т. е. $X_i \in N(0;1)$. Распределение Стьюдента с n степенями свободы определяется равенством

$$t_n = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \tag{4}$$

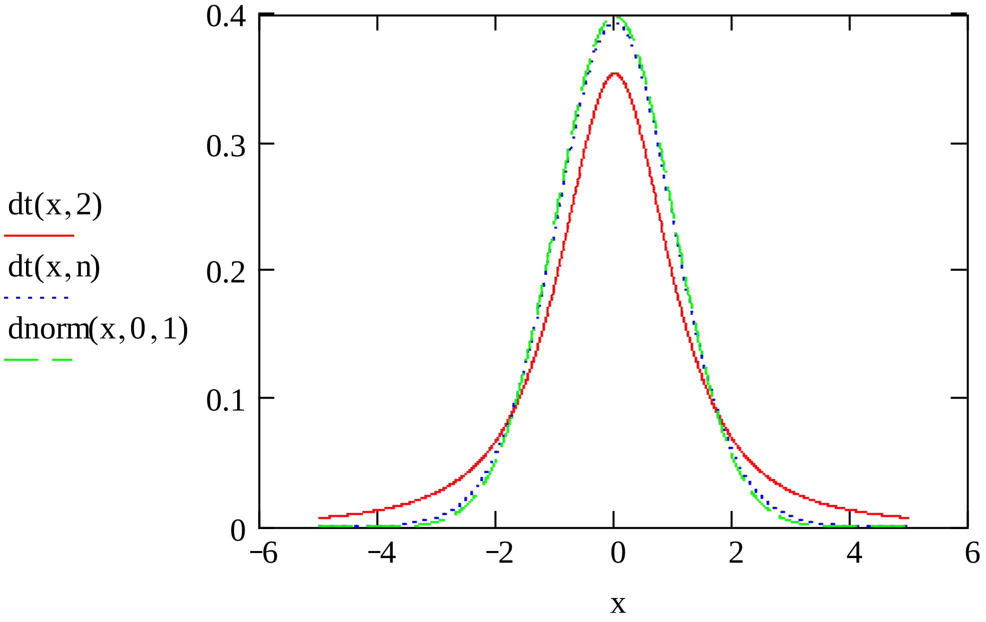
Можно доказать, что с увеличением n распределение Стьюдента приближается с стандартному нормальному. Кроме того,

$$M\, t_n = 0 \ , \tag{5}$$

$$Dt_n = \frac{n}{n-2} \text{ при } n > 2 \ . \tag{6}$$

Все это подтверждается нижеследующими графиками.

$A := -5 \qquad B := 5 \qquad n := 20 \qquad x := A, A + 0.01 .. B$



Распределение Фишера

Пусть $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_m$ - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Распределение Фишера с n и m степенями свободы определяется равенством

$$F_{n,m} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i^2} \qquad (7)$$

Известно, что

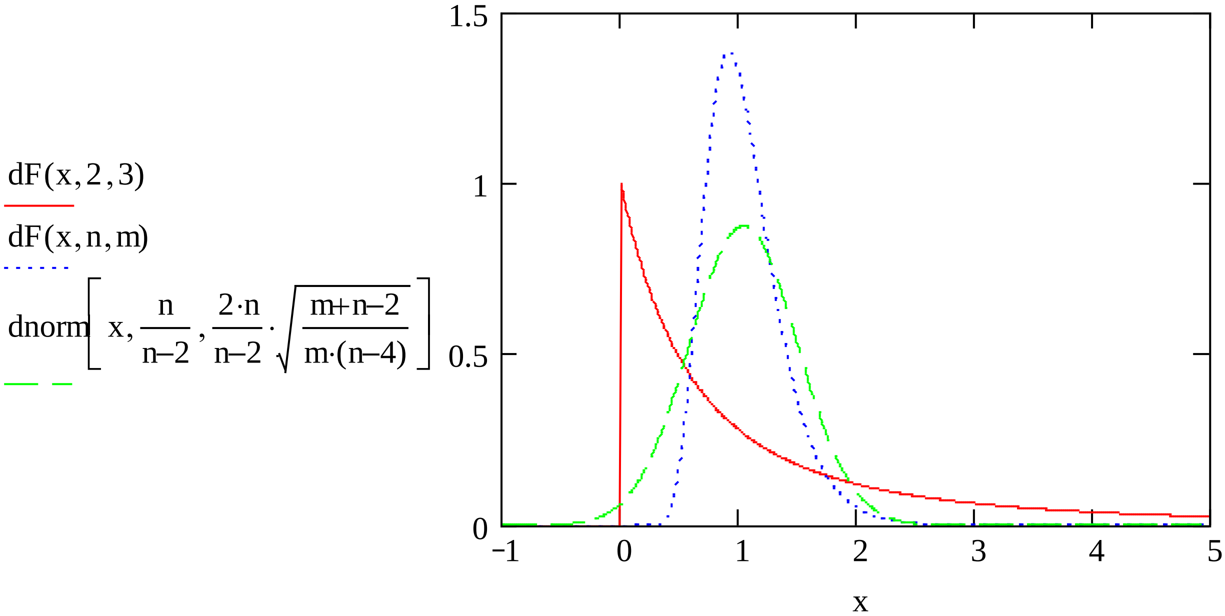
$$MF_{n,m} = \frac{n}{n-2} \quad \text{при } n>2, \qquad (8)$$

$$DF_{n,m} = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad \text{при } n>4\ . \qquad (8)$$

Можно доказать, что при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ распределение Фишера приближается к нормальному.

Проиллюстрируем эти утверждения примерами:

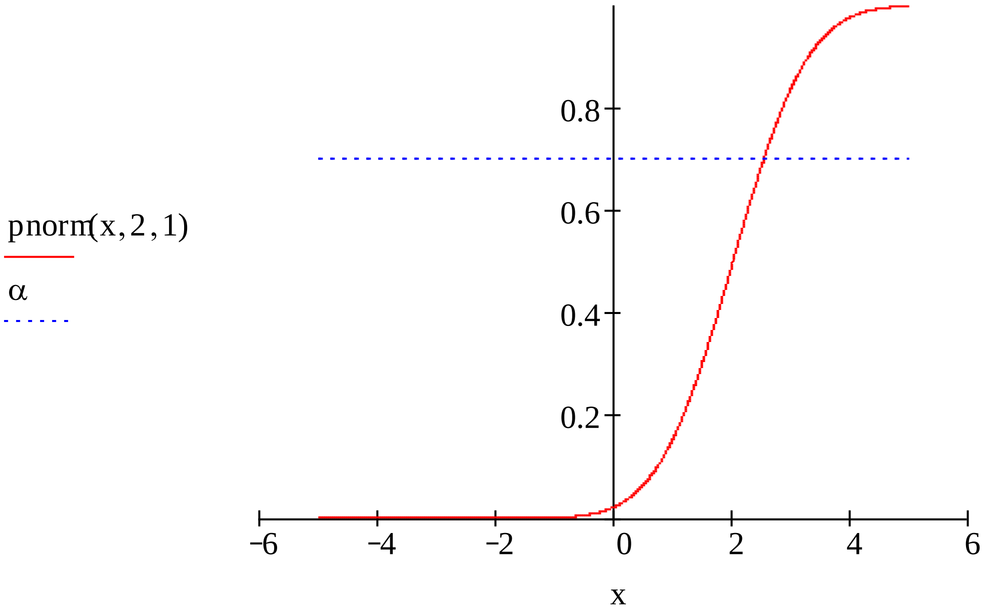
$A := -1 \qquad B := 5 \qquad n := 50 \qquad m := 40 \qquad x := A, A+0.01 .. B$



Квантиль распределения

Квантилью уровня α данного распределения называется аргумент d_α функции распределения $F(x)$, для которого $F(d_\alpha)=\alpha$, то есть $d_\alpha = F^{-1}(\alpha)$. Отсюда следует, что $\alpha \in [0;1]$. В следующем примере вычислена квантиль уровня $0{,}7$ нормального распределения с математическим ожиданием 2 и средним квадратическим отклонением 1:

$A := -5 \qquad B := 5 \qquad x := A, A + 0.01 .. B \qquad \alpha := 0.7$



Сравните значение квантили, подсчитанное с помощью процедуры *qnorm* с соответствующим значением на графике.

$\mathrm{qnorm}(\alpha, 2, 1) = 2.524$

Некоторые свойства плотности вероятности и функции распределения

Из курса теории вероятностей известно, что интеграл от плотности вероятности по всей числовой прямой равен единице. Проверим это для нормального распределения в Mathcad:

$$\int_{-20}^{30} \mathrm{dnorm}(x, 3, 2)\, dx = 1$$

В качестве промежутка интегрирования выбран достаточно большой интервал, за пределами которого плотность «практически» равна нулю.

Для вычисления математического ожидания и дисперсии известны формулы:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx, \quad DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx - (MX)^2. \tag{9}$$

Проверим справедливость этих формул для распределения «хи-квадрат»:

$$\int_{-20}^{30} \mathrm{dnorm}(x,3,2)\, dx = 1$$

$n := 4$

$$a := \int_{-30}^{40} x \cdot \mathrm{dchisq}(x,n)\, dx \qquad a = 4 \qquad n = 4$$

$$D := \int_{-30}^{40} x^2 \cdot \mathrm{dchisq}(x,n)\, dx - a^2 \qquad D = 8 \qquad 2 \cdot n = 8$$

Как видим, значения математического ожидания и дисперсии, подсчитанные по формулам (9) и (2),(3), совпадают.

Из курса теории вероятностей известны формулы для вычисления вероятности попадания случайной величины в заданный интервал $(a;b)$ через плотность и функцию распределения:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{10}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{11}$$

Подсчитаем этими двумя способами вероятность попадания в интервал $(2;3)$ случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с 5 степенями свободы:

$a := 2 \qquad b := 3 \qquad n := 5$

$$\int_a^b dt(x,n)\,dx = 0.036 \qquad pt(b,n) - pt(a,n) = 0.036$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Построить график плотности и функции нормального распределения с заданными значениями математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ. Проиллюстрировать влияние этих параметров на вид графика плотности нормального распределения. Отобразить на графике функции нормально-распределенной случайной величины $X \in N(a;\sigma)$ квантили уровней α_1 и α_2 и сравнить их со значениями квантилей, полученными с помощью процедуры $qnorm$.

2. Построить графики плотности и функции распределения «хи – квадрат» с заданным числом степеней свободы n. Показать, что с увеличением n распределение «хи-квадрат» приближается к нормальному с математическим ожиданием $a = n$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{2n}$. Отобразить на графике функции распределения «хи-квадрат» с n степенями свободы квантили уровней α_1 и α_2 и сравнить их со значением квантилей, полученными с помощью процедуры $qchisq$.

3. Построить графики плотности и функции распределения Стьюдента с заданным числом степеней свободы n.

Проследить за тем, что происходит с графиком n плотности распределения с увеличением n. Показать, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента приближается к стандартному нормальному.

Отобразить на графике функции распределения Стьюдента с n степенями свободы квантили уровней α_1 и α_2 и сравнить их со значением квантилей, полученными с помощью процедуры qt.

4. Построить графики плотности и функции распределения Фишера с заданными значениями степеней свободы n, m.

Проследить за тем, как влияет изменение параметров n и m на вид графика плотности распределения. Показать, что при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ распределение Фишера приближается к нормальному с математическим ожиданием $a = \dfrac{n}{n-2}$ к средним квадратическим отклонением

$\sigma = \frac{n}{n-2}\sqrt{\frac{2(m+n-2)}{m(n-4)}}$. Отобразить на графике функции распределения Фишера с n, m степенями свободы квантили уровней α_1 и α_2 и сравнить их со значениями квантилей, полученными с помощью процедуры qF.

Значения параметров, фигурирующие в заданиях, получить у преподавателя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирьянов Д.В. Mathcad 13: книга для широкого круга пользователей.- «БХВ-Петербург», 2004.-С.590.

2. КолемаевВ.А., СтароверовО.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для экономических специальностей вузов.- М.: Высш. шк.,1991.- С. 399.

3. Зарубина В.С., Крищенко А.П. Математическая статистика: - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.- С. 421.

4. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для специальности «Менеджмент».- М.: ИНФРА-М, 2000.- С. 300.

5. Калинина В.Н., Панкин В Ф. Математическая статистика: учебник для средних специальных учебных заведений М.: «Высшая школа», 1998.- С. 335

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.