	<b>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный аграрный университет»</b>	Приложение к ОПОП ВО
		Методические указания

Кафедра математики

## **Б1.О.14 Высшая математика**

### **СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ**

#### **ЧАСТЬ 2**

Направление подготовки 38.03.01 Экономика  
Профиль подготовки Бухгалтерский учет, анализ и аудит

Квалификация выпускника Бакалавр

Уфа 2025

Рекомендовано к изданию методической комиссией экономического факультета (протокол № 6 от 27 марта 2025 г.)

Составитель: к.э.н., доцент Т.Н. Лубова

Ответственный за выпуск:

И.о. зав. кафедрой математики  
к.псих.н., доцент Е.Н. Дик

г. Уфа, ФГБОУ Башкирский ГАУ, кафедра математики

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ..	5
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЙ С РЕШЕНИЕМ .....	5
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ..	13
2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....	32
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЙ С РЕШЕНИЕМ .....	32
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ..	38

## **ВВЕДЕНИЕ**

В сборнике заданий для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Высшая математика» (2 семестр) приведены задачи и примеры их решения.

В каждом разделе подобраны типовые примеры и задачи, для решения которых студент должен владеть основными понятиями и теоремами курса, а также прочими навыками, полученными на практических занятиях под руководством преподавателя.

# 1. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

## Примерный вариант заданий с решением

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 2\sqrt[3]{x^2} - 4}{3x - 4x^2 - 8x^3 + 3x\sqrt{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{4 - \sqrt{5x + 1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{16 - 2x - 5x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4-0} (x^2 - 16) \cdot \ln(4 - x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x + 11}{4x + 17} \right)^{5-8x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \cos 3x}{\arcsin \frac{x}{2}}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \left( 3^{\operatorname{ctg} \frac{2x}{5}} - \operatorname{tg}^4 \frac{3}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \log_2(3x - 5); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\cos \sqrt{3x} + \arccos(2x-1)}{\operatorname{tg}(2-5x^2)}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 4x - 3x^2 + 2$ , перпендикулярной прямой  $x - 2y + 5 = 0$ .

12. Показать, что функция  $y = 4e^{-2x} \sin 4x$  является решением дифференциального уравнения  $y'' + 4y' + 20y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону  $x(t) = t^3 + 2t^2 + 5t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$  и построить ее график.

## Решение

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 2\sqrt[3]{x^2} - 4}{3x - 4x^2 - 8x^3 + 3x\sqrt{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель дроби на } x^3 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{x^3}}{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} - 8 + \frac{3}{x\sqrt{x}}} = -\frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned}
2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{4 - \sqrt{5x + 1}} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{домножим числитель и знаменатель} \\ \text{дроби} \\ \text{на сопряженное выражение} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1) \cdot (4 + \sqrt{5x+1})}{(4 - \sqrt{5x+1}) \cdot (4 + \sqrt{5x+1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1) \cdot (4 + \sqrt{5x+1})}{(16 - 5x - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} (4 + \sqrt{5x+1}) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{15 - 5x} = \\
&= (4 + \sqrt{16}) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x-1)}{-5(x-3)} = 8 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{-5} = -\frac{16}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}) &= [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{приведем к виду} \\ \text{дроби, домножив} \\ \text{и разделив на} \\ \text{сопряженное} \\ \text{выражение} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3})}{\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 2 - (x^2 - 2x + 3)}{\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 5}{\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель и} \\ \text{знаменатель дроби на } x \end{array} \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (5 - \frac{5}{x})}{|x| \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -\frac{5}{2} & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{16 - 2x - 5x^2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{разложим} \\ \text{многочлены} \\ \text{на множители} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 \cdot (x+2) \cdot (x - \frac{2}{3})}{-5 \cdot (x+2) \cdot (x - \frac{8}{5})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 2}{8 - 5x} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}.
\end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4-0} (x^2 - 16) \cdot \ln(4 - x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{\ln(4 - x)}{\frac{1}{x^2 - 16}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{раскроем} \\ \text{неопреде-} \\ \text{ленность} \\ \text{по} \\ \text{правилу} \\ \text{Лопиталья} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(\ln(4-x))'}{\left(\frac{1}{x^2-16}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{\frac{1}{4-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{(x^2-16)^2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(x-4)^2 \cdot (x+4)^2}{2x \cdot (x-4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(x-4) \cdot (x+4)^2}{2x} = \frac{0 \cdot 64}{8} = 0.
\end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+11}{4x+17}\right)^{5-8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+17-6}{4x+17}\right)^{5-8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{4x+17}\right)^{5-8x} =$$

$$= [1^\infty] = \left| \begin{array}{l} \text{используем второй} \\ \text{замечательный предел} \\ \frac{-6}{4x+17} = t; t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \\ 4x+17 = -\frac{6}{t}; x = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{6}{t} - 17\right) \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{5+2 \cdot \left(\frac{6}{t}+17\right)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{12}{t}+39} = \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{12} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{39} = e^{12} \cdot 1^{39} = e^{12}$$

$$\begin{aligned}
7. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 3x)^{\operatorname{tg} 9x} &= [0^0] = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(\sin 3x) \operatorname{tg} 9x} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} 9x \cdot \ln(\sin 3x)} = (*) = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Рассмотрим предел в показателе степени: } \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} 9x \cdot \ln(\sin 3x) = [0 \cdot \infty] = \\ (*) \quad = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin 3x}{\operatorname{ctg} 9x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln \sin 3x)'}{(\operatorname{ctg} 9x)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3}{-\frac{1}{\sin^2 9x} \cdot 9} = \\ = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \cos 3x \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 9x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\sin^2 9x)'}{(\sin 3x)'} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin 9x \cdot \cos 9x \cdot 9}{\cos 3x \cdot 3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 9}{1 \cdot 3} = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \cos 3x}{\arcsin \frac{x}{2}} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} \text{раскроем неопределенность} \\ \text{по правилу Лопиталья} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{5x} - \cos 3x)'}{\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5e^{5x} + 3 \sin 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot e^0 + 3 \cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot (5 + 0) = 10
\end{aligned}$$

9.  $y = \left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}} - \operatorname{tg}^4 \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \log_2(3x - 5)$ ;  $y' - ?$

Найдем производную сложной функции:

$$y' = \left( 3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2x}{5}\right)} \cdot \frac{2}{5} - 4\operatorname{tg}^3 \frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)} \cdot \left(-\frac{3}{4\sqrt{x^3}}\right) \right) \cdot \log_2(3x - 5) + \frac{1 \cdot 3}{(3x - 5)\ln 2} \cdot \left(3^{\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}} - \operatorname{tg}^4 \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

10.  $y = \frac{\cos \sqrt{3x} + \arccos(2x - 1)}{\operatorname{tg}(2 - 5x^2)}$ ;  $dy - ?$

Найдем дифференциал функции по формуле  $dy = y'(x) \cdot dx$ . Тогда

$$dy = \left( \frac{\left( -\sin \sqrt{3x} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2\sqrt{3x}} - \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} \right) \cdot \operatorname{tg}(2 - 5x^2)}{\operatorname{tg}^2(2 - 5x^2)} - \frac{(\cos \sqrt{3x} + \arccos(2x - 1)) \cdot \frac{-10x}{\cos^2(2 - 5x^2)}}{\operatorname{tg}^2(2 - 5x^2)} \right) dx$$

11. По условию касательная перпендикулярна заданной прямой  $l$ , следовательно, угловой коэффициент касательной  $K_{\text{кас}} = -\frac{1}{K_l}$ .

$l: y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ . Таким образом,  $K_l = \frac{1}{2}$ , а  $K_{\text{кас}} = -2$ .

Известно, что  $K_{\text{кас}} = y'(x_0)$ , где  $x_0$  – абсцисса точки касания. Для заданной функции  $y'(x) = (4x - 3x^2 + 2)' = 4 - 6x$ .

Найдем  $x_0$  из уравнения  $4 - 6 \cdot x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = 1$ . Вычислим  $y_0 = y(x_0) = y(1) = 4 - 3 + 2 = 3$

Подставим найденные значения в уравнение касательной:

$$y - y_0 = K_{\text{кас}} \cdot (x - x_0). \\ y - 3 = -2(x - 1), \quad y = -2x + 5.$$

*Ответ:*  $y = -2x + 5$  – уравнение касательной.

12. Найдем первую и вторую производные данной функции, подставим их вместе с исходной функцией в уравнение и убедимся, что уравнение превратится в тождество.

$$\begin{aligned}
 y' &= 4 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sin 4x + e^{-2x} \cdot \cos 4x \cdot 4) = \\
 &= -8e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2 \cos 4x) \\
 y'' &= -8 \cdot (e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (\sin 4x - 2 \cos 4x) + e^{-2x} \cdot (4 \cos 4x + 8 \sin 4x)) = \\
 &= 16e^{-2x} \cdot (-3 \sin 4x - 4 \cos 4x).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$\begin{aligned}
 y'' + 4y' + 20y &= 16e^{-2x} \cdot (-3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + \\
 &+ 4 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} \cdot (\sin 4x - 2 \cos 4x) + 20 \cdot 4 \cdot e^{-2x} \sin 4x = \\
 &= e^{-2x} \cdot (-48 \sin 4x - 64 \cos 4x - 32 \sin 4x + 64 \cos 4x + 80 \sin 4x) = \\
 &= e^{-2x} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Итак, уравнение принимает вид тождества  $0 = 0$ .

Следовательно, данная функция является решением уравнения.

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону  $x(t) = t^3 + 2t^2 + 5t$ . Найти скорость  $v(t)$  и ускорение  $a(t)$  в момент времени  $t = 2$ .

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 + 4t + 5.$$

$$a(t) = x''(t) = 6t + 4.$$

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25, a(2) = 6 \cdot 2 + 4 = 16.$$

Ответ:  $v(2) = 25$ ;  $a(2) = 16$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$  и построить ее график.

$$1) D(y) = (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup 2; +\infty)$$

Найдем лево- и правосторонние пределы функции при  $x \rightarrow 2$  и  $x \rightarrow -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[ \frac{-8}{+0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[ \frac{-8}{-0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[ \frac{8}{-0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[ \frac{8}{+0} \right] = +\infty.$$

$x_1 = -2, x_2 = 2$  – точки разрыва II рода.

Прямые  $x = -2$  и  $x = 2$  являются вертикальными асимптотами.

2) Уравнение наклонных асимптот:  $y = kx + b$ , где  $k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{f(x)}{x}$  и

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - kx)$$

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \left( \frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{x^3 - x \cdot (x^2 - 4)}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{4x}{x^2 - 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Следовательно,  $y = x$  – наклонная асимптота при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .

3) Точки пересечения графика с осями координат:

$$c \text{ } Ox: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}; O(0; 0) \quad c \text{ } Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; O(0; 0)$$

4) Исследуем функцию на четность / нечетность по определению:

$$y(-x) = -y(x) \text{ – нечетная функция,}$$

$$y(-x) = y(x) \text{ – четная функция.}$$

Рассмотрим  $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -y(x)$ , следовательно,  $y(x)$  – нечетная функция  $\Rightarrow$  график симметричен относительно начала координат.

5) Функция не является периодической

6) Найдем критические точки функции по первой производной:

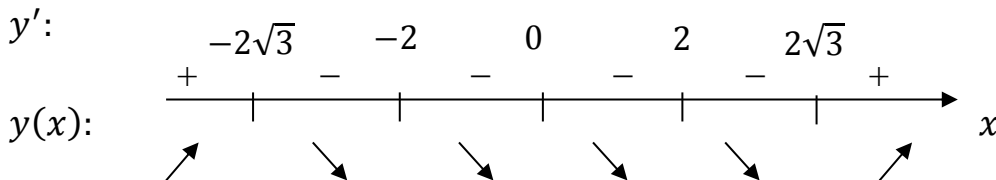
$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 - 4)^2}$$

Критические точки: а)  $y'(x)$  не существует при  $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$ ;

$$б) y'(x) = 0, \text{ при } x_3 = 0, x_{4,5} = \pm 2\sqrt{3}.$$

7) Найдем интервалы монотонности:



8) Найдем точки экстремумов и экстремумы:

$$x_{max} = -2\sqrt{3}, x_{min} = 2\sqrt{3}.$$

$$y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{-24\sqrt{3}}{12-4} = -3\sqrt{3}, y_{min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

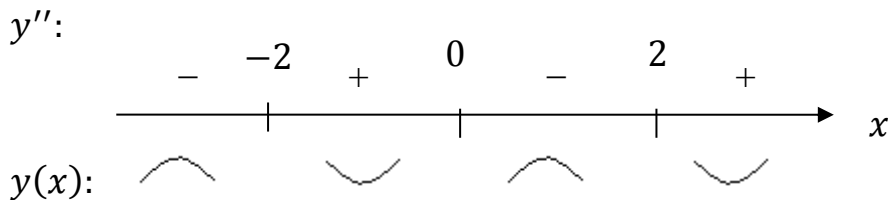
9) Найдем критические точки по второй производной:

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \right)' = \\ &= \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 4)(4x^5 - 40x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3)}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \end{aligned}$$

Критические точки: а)  $y''$  не существует при  $x_{1,2} = \pm 2 \notin D(y)$

б)  $y'' = 0$  при  $x = 0$

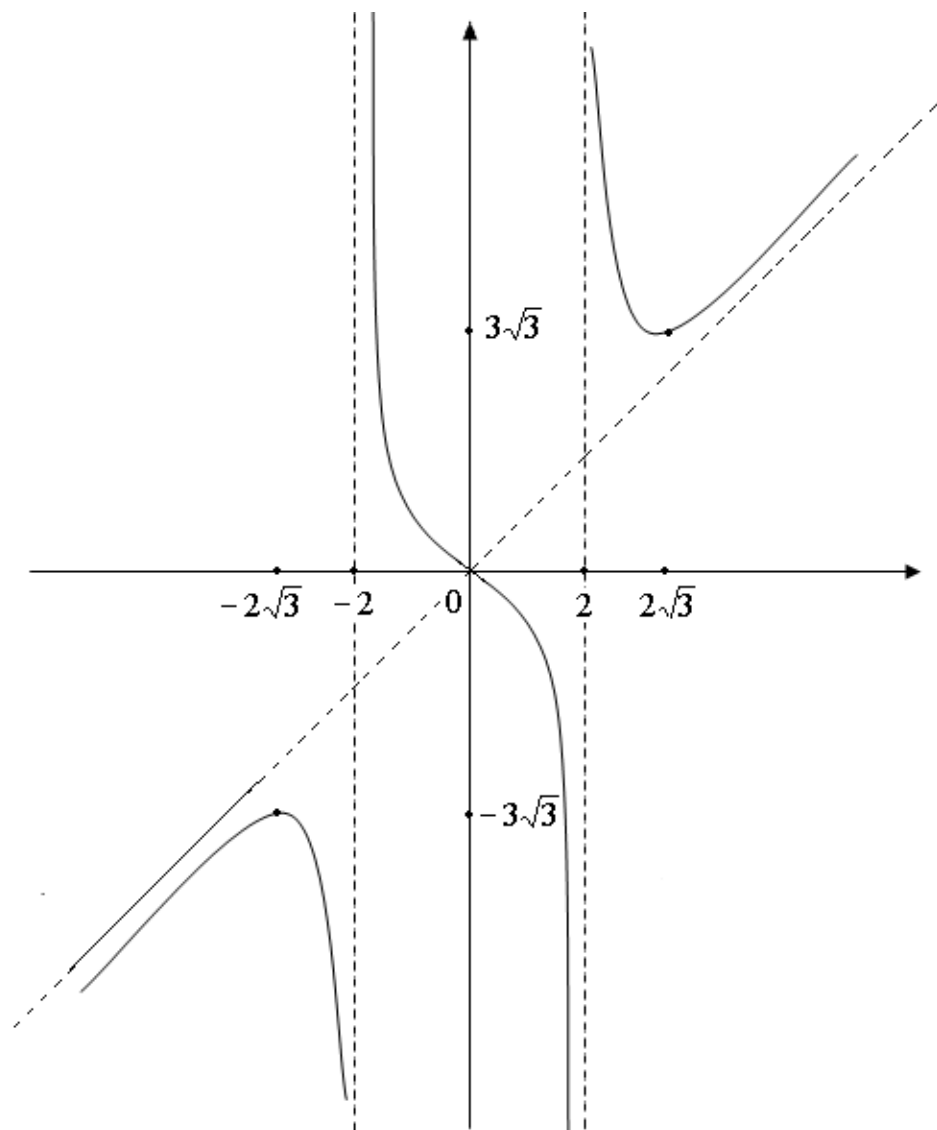
10) Интервалы выпуклости и вогнутости:



11) Точки перегиба:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = y(0) = 0$ ,  $O(0; 0)$  — точка перегиба

12) Сводная таблица результатов исследования:

$x$	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$-2$	$(-2; 0)$	$0$	$(0; 2)$	$2$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$
$y'$	$+$	$0$	$-$	Не сущ.	$-$	$0$	$-$	Не сущ.	$-$	$0$	$+$
$y''$	$-$	$-$	$-$	Не сущ.	$+$	$0$	$-$	Не сущ.	$+$	$+$	$+$
$y(x)$		$-3\sqrt{3}$		Т.п.		$0$		Т.п.		$3\sqrt{3}$	



## Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

### Вариант 1

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 12x^2 - x + 2}{8 - 17x^3 - x\sqrt{3x^2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 5}{2x - 8} \right)^{x+2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (3x)^{\sin 7x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{23x^2 + \sin 3xe^x}{\operatorname{tg} 7x + 15x^3}$$

Продифференцировать функции:

$$9. y = \arcsin^6 \sqrt{x} \cdot (6^{\operatorname{tg} 5x} + \operatorname{tg}^4 5x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\ln x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 - 7x$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $135^\circ$ .

12. Показать, что функция  $y = e^{-x} \sin 2x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

### Вариант 2

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5x^2 + (7x)^3}{2 + (x + 3)^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x + 1} - 4}{x^2 + 4x - 45}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3x^2 - 26x + 1} - \sqrt{3x^2 + 11} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5x^2 - 3x + 2}{7x^2 + 4x - 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 3x}{\operatorname{tg} 5x \cdot \cos 2x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x + 4}{5x - 3} \right)^{1-x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln^{-2} x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos 3x}{\operatorname{tg} x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \operatorname{ctg} e^{\sqrt{x}} \cdot (4^{\sin 5x} + \sin^4 5x); y' - ?$$

10.  $y = \frac{\operatorname{arctg} x + \sqrt[3]{x}}{\cos x}$ ;  $dy$ —?

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 - 2x$ , параллельной прямой  $y = 4x + 3$ .

12. Показать, что функция  $y = e^{-x} \cos 3x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 2y' + 10y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 4$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^4}{x^3+1}$  и построить ее график.

### Вариант 3

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{11} - x^7 + 11}{3x^{11} - x^7 - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + 5x^2} - (1 + x)}{3x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 2x + 3}{5x^2 - 10x - 15}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(2x + 1)}{\sin x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - x}{7 - x} \right)^{8x-3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x)^{x^2}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{12x^2 - 8x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = \ln \operatorname{tg} 3x \cdot (7^{\sin(6x)} + \arcsin^7(6x))$ ;  $y'$ —?

10.  $y = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{arccctg} x}{\cos x}$ ;  $dy$ —?

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 + x$ , параллельной прямой  $y = -5x + 1$ .

12. Показать, что функция  $y = e^{-x} \sin 3x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 2y' + 10y = 0$ .

13. Тело движется по закону:  $x(t) = t^3 + 2t^2 + 4t$  вдоль оси  $Ox$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 3$ .

20. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{3-x^2}$  и построить ее график.

### Вариант 4

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^3 - 8x^5 - 4}{6x^5 + 2x^4 + 5}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 16} - 2(x - 2)}{4x}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 4})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x - 2 - 2x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \cdot \operatorname{ctg} 4\pi x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x + 7} \right)^{5-6x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin 3\pi x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 2^{\operatorname{tg} x}}{3x \cdot e^{5x}}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \operatorname{arcctg} (2 - 3x) \cdot \left( \log_2 \sin \frac{x}{2} - 2^{\arcsin^2 \sqrt{x}} \right); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\arccos 5x - \operatorname{ctg} \frac{2}{\sqrt{x}}}{\operatorname{tg} \frac{3x}{5}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 5x^2 - 2x + 3$ , параллельной прямой  $y = 5 - 12x$ .

12. Показать, что функция  $y = 4e^{-2x} \cdot \sin 3x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

13. Тело движется по закону:  $x(t) = \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t$  вдоль оси  $Ox$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$  и построить ее график.

### Вариант 5

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3}{5x^3 - 4x^2 - 6x^4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 - 3} - x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 5})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{3x^2 - 5x - 12}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 2}{5x + 9} \right)^{\frac{3x-4}{6}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg} 3x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - x}{\sin^2 4x + 5x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. \arcsin(2x + 3) \cdot \left( 4^{\operatorname{ctg} 3x} - \cos \frac{3x}{5} \right); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\frac{3}{\sqrt{2x}} - 3 \operatorname{arctg} 4x}{\ln(3x + 2)}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 + x - 2$ , параллельной прямой  $y = 4 - 11x$ .

12. Показать, что функция  $y = 3e^{2x} \cdot \cos 5x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' - 4y' + 29y = 0$ .

13. Тело движется по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 3t^2 + 4t$  вдоль оси  $Ox$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 5$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2}{x^3-1}$  и построить ее график.

### Вариант 6

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^{\frac{13}{5}} - 2\sqrt{2}x^2 + 5}{-3x^{\frac{13}{5}} - \sqrt{x} + 7}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 1} - \sqrt{x^2 + 14x - 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^2 - 15x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \log_2 x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - 3x}{34 - 3x} \right)^{5-21x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{11}{x}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \sin 3x}{5x + x^2}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = \ln(7x + 3) \cdot (5^{\sin 3x} + \sin^5 3x)$ ;  $y' = ?$

10.  $y = \frac{\arccos x + \sqrt{x}}{\sin x}$ ;  $dy = ?$

11. Указать точку, в которой касательная к графику функции  $y = x^2 + 2x - 3$ , параллельна оси абсцисс.

12. Показать, что функция  $y = e^{-3x}(2x + 1)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

13. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону:  $S(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$ .

Определить кинетическую энергию  $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$  тела через 5 секунд после начала движения.

14. Исследовать функцию  $y = \frac{3x^2+7x+2}{(x+1)^2}$  и построить ее график.

### Вариант 7

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + 3}{8 - \sqrt{x} + 15x^{\frac{5}{2}}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 2x - 15)}{\sqrt{5x + 1} - x - 1}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 + 7})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 8x - 28}{-2x^2 + 5x + 18}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 13} (x - 13) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{13x - 29}{13x - 14} \right)^{11x+1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin 2x}{\operatorname{tg} 3x - x^2}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \arccos \sqrt{x+1} \cdot (5^{\operatorname{ctg} 5x} + \operatorname{ctg}^3 5x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\sin x + \log_4(3x+1)}{\operatorname{arctg} x}; dy - ?$$

11. В каких точках касательная к графику функции  $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 1$  параллельна оси  $Ox$ .

12. Показать, что функция  $y = e^{-x}(\cos 3x + \sin 3x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 2y' + 10y = 0$ .

13. Точка движется по прямой по закону:  $S(t) = 5t^2 - 10t + 1$ . Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$  и построить ее график.

### Вариант 8

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3x^{\frac{7}{2}} + 11x^{\frac{5}{2}}}{3x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 16}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 23})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -10} \frac{4x^2 + 30x - 100}{-x^2 - 5x + 50}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} \ln 13x \cdot \sin x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{14 - 15x}{3 - 15x} \right)^{1+2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x)^{\sin x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \cos 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \cos \sqrt{7x+3} \cdot (5^{\arcsin 4x} + \arcsin^5 4x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{3 \operatorname{tg} 2x}{\log_2 x - 5e^x}; dy - ?$$

11. Определить угол наклона касательной к параболе  $y = x^2 + 3x + 2$  в точке пересечения параболы с осью абсцисс.

12. Показать, что функция  $y = e^{-3x}(4x + 2)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

13. Точка движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$ .  
 Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}$  и построить ее график.

### Вариант 9

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 - \sqrt{3}}{15 - 2x^2 + \sqrt{31}x^3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{x^2 + 8x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 + 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 3x - 2x^2}{3x^2 - 7x + 4}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} (x - \sin x) \ln x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{27x - 8}{27x + 1} \right)^{\frac{x-1}{3}}$

7.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 5x)^{\sin 3x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 2x}{\sin x + \operatorname{tg} x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = (\arccos^3 \sqrt{5x+1}) \cdot (8^{\operatorname{tg} \frac{x}{7}} + \operatorname{tg}^8 7x)$ ;  $y' = ?$

10.  $y = \frac{\sqrt[3]{x} - \sin x}{\log_5 x}$ ;  $dy = ?$

11. Определить угол между осью абсцисс и касательной к параболе  $y = x^2 + x + 5$ , в точке пересечения параболы с осью ординат.

12. Показать, что функция  $y = e^x \sin 4x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' - 2y' + 17y = 0$ .

13. Точка движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$ .  
 Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$  и построить ее график.

### Вариант 10

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + 13}{-\sqrt{2}x + 15x\sqrt{x}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3x-8} - x + 2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 14} - \sqrt{x^2 + 7x + 5})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \sin 2x \cdot \ln x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - 2x}{7 - 2x} \right)^{14-x}$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 5x)^{\sin 7x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \arcsin \sqrt{x} \cdot (9^{\sin 3x} + \sin^9 3x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log_3(2x + 1)}; dy - ?$$

11. В каких точках касательные к графику функции  $y = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 6x$  параллельны оси  $Ox$ ?

12. Показать, что функция  $y = e^{-x} \sin 4x$  является решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 17y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ . Найти скорость и ускорение тела в момент времени  $t = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$  и построить ее график.

### Вариант 11

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}x^5 + 1}{-8x^5 + 4x^3 - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2 - \sqrt{5x - 1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 23x + 8})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 - 5x - 12}{3x^2 + 8x + 5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \cdot \ln 2x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{11x - 7}{11x + 5} \right)^{2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{3x^2}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \sin(4x + 1) \cdot (8^{\cos 3x} + \cos^8 3x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 - 2x$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

12. Показать, что функция  $y(x) = e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 4$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$  и построить ее график.

## Вариант 12

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{23x - 37x^2 + 15x^4}{3x^4 - 7x^3 + 29}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x^2 - 8x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 29x - 14} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x^2 - 10x - 11}{(x - 11)(x^2 + 3x + 2)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 4) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 5}{x - 7} \right)^{\frac{1-3x}{2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{3 \operatorname{tg} 7x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 4x^3}{-5 \sin 18x + x^3}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \arcsin \sqrt{x} \cdot (5^{\operatorname{ctg} 3x} + \operatorname{ctg}^5 x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\operatorname{tg} x + 3^x}{\cos x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 2x^2 - 3x$ , параллельной прямой  $y - 5x - 1 = 0$ .

12. Показать, что функция  $y(x) = (5x + 6)e^{2x}$  является решением дифференциального уравнения  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$  и построить ее график.

## Вариант 13

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{6x^5 + x^2} - 13x^3}{1 - 71x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{2x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 24} - \sqrt{x^2 - x + \sqrt{8}})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{17x^2 - 24x + 7}{3x^2 + 8x - 11}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{76x - 13}{76x + 4} \right)^x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 13x)^{\sqrt{2x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - \cos 3x}{13x^3 + \operatorname{tg} 2x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \ln(5x + 6) \cdot (2^{\operatorname{tg} 7x} + \operatorname{tg}^2 3x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\cos x + \sqrt{x}}{\arccos x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 5x^2 - 6x + 2$ , параллельной прямой  $y = 4x - 7$ .
12. Показать, что функция  $y = (3x + 7)e^{-2x}$  является решением дифференциального уравнения  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .
13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = -3t + t^3$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 2$ .
14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$  и построить ее график.

### Вариант 14

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^7} + \sqrt{x} - 14}{-5\sqrt{x} + 31x^{\frac{7}{6}}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 - 4}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 17x + 37} - \sqrt{x^2 - 36x})$
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{13x^2 - 7x - 20}{-5x^2 - 3x + 2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow +0} (2x)^3 \cdot \ln 7x$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{13x + 1}{13x - 1} \right)^{-5x + 18}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{5}x)^{\operatorname{tg} 7x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x - 2x}{24x^2 + 13x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = \ln(3x + 7) \cdot (3^{\cos 2x} + \sin^2 5x)$ ;  $y' = ?$
10.  $y = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{3 \ln x - 5e^x}$ ;  $dy = ?$
11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 2x^2 - 3x$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $135^\circ$ .
12. Проверить, является ли функция  $y(x) = (4x + 3)e^{-x}$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + y = 0$ .
13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 3$ . В какие моменты времени тело меняет направление движения?
14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$  и построить ее график.

### Вариант 15

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17x^{\frac{19}{7}} + x^2 + 7}{9x^{\frac{19}{7}} - x + \sqrt{x}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 11x - 36})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{5x^2 + 5x - 60}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} x^5 \cdot \ln 27x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{3x + 7} \right)^{2-5x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{9x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = (\cos \sqrt{3x + 2}) \cdot (3^{\sin 2x} + \sin^2 x); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\sqrt{x} + \arcsin x}{\ln x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 2x^2 - 3x$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = (3x + 1)e^{-x}$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 5$ . В какие моменты времени тело меняет направление движения?

14. Исследовать функцию  $y = \frac{2x^3}{x^2 - 3}$  и построить ее график.

### Вариант 16

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{23x^8 - 17x^6 + 1}{-3 + 8x^2 + 7x^8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3 - \sqrt{7 + x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 7})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 - 3x^2 + 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x + 8}{7x - 1} \right)^{7x+1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x)^{\sin 5x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{\cos^2 5x - 1}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \ln(3x - 1) \cdot \left( \arccos^5 \frac{2}{x} - 3^{\sin x} \right); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{2x + \operatorname{ctg} x}{e^{\operatorname{arctg} x}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ , параллельной оси  $Ox$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 5e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2+4x+1}{x^2}$  и построить ее график.

### Вариант 17

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 14x^3 - 27}{149 - 31x^3 - 77x^5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 17x} - \sqrt{x^2 - 5})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^2 - 13x - 2}{-2x^2 - x + 10}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 10} (x - 10) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 5}{x + 13} \right)^{-8x+2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 17x)^{-5x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 17x - 1}{\operatorname{tg} x - \sin^3 5x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \arccos(1 - x) \cdot (3^{\sin x} - \operatorname{arctg} x^2 x); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{3x + \operatorname{tg} x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ , параллельной прямой  $5x - y = 1$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 2e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$  и построить ее график.

### Вариант 18

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^{\frac{7}{2}}} + 13x^{\frac{9}{2}} - 8x^{\frac{11}{2}}}{-\sqrt{x} - 19x^{\frac{3}{2}} - 23x^{\frac{11}{2}}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 17})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2 + 13x - 8}{2x^2 + 21x - 23}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} \sin 7x \cdot \ln 2x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{11 - 11x}{12 - 11x} \right)^{11-11x}$$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (13x)^{\operatorname{tg} 21x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{18x}}{x \cos 2x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y(x) = \cos^3 \frac{x}{2} \cdot (\arcsin^3 \sqrt{x+1} - 2^{\operatorname{tg} x}); y' - ?$

10.  $y(x) = \frac{\sin x - 4x}{e^{\arccos x}}; dy - ?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ , параллельной оси  $Ox$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 2e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 1$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{(x+1)^2}{2(x-2)}$  и построить ее график.

### Вариант 19

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^2 + 14x^3 + 15x^4}{\sqrt{2}x^4 - 13\sqrt{x}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 17x + 37} - \sqrt{x^2 - 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 7x - 22}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \sin 3x \cdot \ln x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{14 - 13x}{21 - 13x} \right)^{-5x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 21x)^{3x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x^2 - x}{\sin 17x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y(x) = \arcsin x \cdot \left( \log_3 x - \operatorname{arcctg} x^5 \frac{3}{x} \right); y' - ?$

10.  $y(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\cos x + 3x}; dy - ?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x - x^2 + 2$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$  и построить ее график.

## Вариант 20

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^7 + 21x^5 + 16}{-4x^7 - 3x^3 + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 24} - \sqrt{x^2 + 26x - 13})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 27x + 50}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} \sin 13x \cdot \ln 27x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{13 - 5x}{16 - 5x} \right)^{24x+8}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{\operatorname{tg} 13x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{13x} - \cos x}{3x + \operatorname{tg} 5x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \operatorname{arctg} 3x \cdot (\operatorname{ctg} \sqrt{2-x} - \log_3^3 x); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 5x}{e^{\operatorname{arcsin} x}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3 + 2x - x^2$ , перпендикулярной прямой  $4y + x = 1$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 3e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 12t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 1$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2+3}{x-1}$  и построить ее график.

## Вариант 21

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2x^3 + 3x^7}{13x^7 - x + 3x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + 3x^2} + x - 1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 17x + 8} - \sqrt{x^2 + 11x - 1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 8x - 4}{-3x^2 + x + 10}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} \sin 9x \cdot \ln 13x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 1}{2x - 7} \right)^{3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^{\sin \pi x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{-\sqrt{3}x^2}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \operatorname{arcctg}(1 - 2x) \cdot \left( \operatorname{arcsin} \frac{3}{x} - \log_2^5 x \right); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2x + \sin x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x^2 + x + 2$ , параллельной прямой  $5x + y = 2$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$  и построить ее график.

### Вариант 22

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{27x^3 - 3x^2} + x}{2x^3 - 7x + 11}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x^2 - 8x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 71} - \sqrt{x^2 + 8x - 3})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 6x - 9}{-2x^2 + 3x + 9}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} 3x \cdot \ln 74x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - 8x}{4 - 8x} \right)^{2x+23}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)^{\sin \pi x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x + 1)}{e^{3x} - \cos 2x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y(x) = \operatorname{arctg}^3 x \cdot (\operatorname{ctg} \sqrt{2 - x} - \log_3^3 x)$ ;  $y' - ?$

10.  $y(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + 4x}{e^{\arcsin x}}$ ;  $dy - ?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = -5x^2 + x + 4$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 5e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{(x+4)^2}$  и построить ее график.

### Вариант 23

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^8 + 2x^2 - 5}{-\sqrt{3}x^8 - x^2 - 2x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 + 2x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 5x - 2}{2 - 13x + 11x^2}$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{\operatorname{tg} 31x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - 7x}{14 - 7x} \right)^{3-7x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos 5x - e^{3x}}{\sin x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \arccos \frac{x}{2} \cdot \left( 7^{\sin x} - \operatorname{arctg}^8 \frac{3}{x} \right); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{3x - \operatorname{tg} x}{e^{\arcsin x}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ , перпендикулярной прямой  $5y + x = 1$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -2e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 4$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x}{x^3 + 2}$  и построить ее график.

### Вариант 24

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^7 + 21x^5 - \sqrt{3}}{\sqrt{7}x^7 - 3x^3 - 27}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^2 2x) \cdot \operatorname{ctg} 11x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{x^2 + 8x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - 12x}{7 - 12x} \right)^{5-3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 3x)^{x^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 15x - 38}{3x^2 - 17x - 46}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{e^{3x} - e^{4x}}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y(x) = \operatorname{arcctg} 3x \cdot \left( 4^{\operatorname{ctg} x} - \arccos^6 \frac{3}{x} \right); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{\sin x - 5x}{e^{\operatorname{arcctg} x}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x - 2x^2 - 3$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $135^\circ$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -3e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 1$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$  и построить ее график.

### Вариант 25

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^3 - 14x - 1}{3x^2 - 5x^3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 4x + 3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x^2 - x - 5})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2x^2 - 7x - 130}{-3x^2 + 15x + 150}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 7x) \cdot \operatorname{ctg} 3x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{11-x} \right)^{2-3x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{x^2}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x - \cos 3x}{e^x \sin 5x}$

Продифференцировать уравнение:

9.  $y(x) = 4^{\sin 3x} \cdot (\log_4 x - \arcsin^4 \sqrt{4-x}); y' - ?$

10.  $y(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + 3x}{e^{\arccos x}}; dy - ?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 5x - 3x^2 + 2$ , параллельной прямой  $3y + 3x = 1$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -2e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{32} + 12t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 2$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2+1}{x}$  и построить ее график.

### Вариант 26

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} + x - 2}{-7x - 8x^{\frac{3}{2}} + 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 8x})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + 11x - 5x^2}{11x^2 - 25x - 24}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{ctg} \pi x \cdot \ln x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{17x-2}$

7.  $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin 3x)^x$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - 3x}{7x^2}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y(x) = \left( \arcsin x \cdot \log_3^4 x + \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{6} \right) \cdot (3^{\operatorname{tg} x} - \operatorname{arcctg}^4 \sqrt{x}); y' - ?$

10.  $y(x) = \frac{\cos x + 2x}{e^{\arctg x}}$ ;  $dy$ —?

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 6x^2 + 2x + 4$ , перпендикулярной прямой  $4y - x = 1$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -3e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 4$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3+4}{x^2}$  и построить ее график.

### Вариант 27

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}x^3 - 8x^2 + 5}{13x^3 - 9x + 23}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 - \sqrt{1-x}}{x^2 + 3x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 37x + 24} - \sqrt{x^2 - 9x + 24})$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{7x - 2x^2 - 6}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln 16x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x - 13}{6x + 24} \right)^{8x-7}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2}x)^{\sin 5x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = 2^{\cos 4x} \cdot \left( \log_3(2x - 1) - \arccos^3 \frac{6}{x} \right)$ ;  $y'$ —?

10.  $y(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + 3x}{e^{\arcsin x}}$ ;  $dy$ —?

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 4x^2 - 3x - 5$ , параллельной прямой  $y - 5x = 3$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = 4e^{-x} \cos 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 4t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 4$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2+1}{2x}$  и построить ее график.

### Вариант 28

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{31x^5 - x^3 + 8}{3 + -x^5}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{1 - \sqrt{x - 4}}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 2x - 16}{7x^2 + 5x - 18}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 + 7x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 27}{x + 31} \right)^{34x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{\cos x - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin x}{23x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = \log_2 \sin x \cdot \left( \operatorname{arctg}^5 \frac{3}{x} - 5^{\cos x} \right); y' - ?$$

$$10. y(x) = \frac{\sin x - 5x}{e^{\operatorname{arctg} x}}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 5x - 2x^2 - 3x$ , образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

12. Проверить, является ли функция  $y(x) = -3e^{-x} \sin 2x$  решением дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} - 6t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t_0 = 5$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{36x}{1+x^2}$  и построить ее график.

### Вариант 29

Найти предел функции:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^{\frac{19}{2}} + 31x^3 - \sqrt{3}}{18\sqrt{x} + 3x^2 - 7x^{\frac{19}{2}}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{3 - \sqrt{2x + 1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{x^2 + 29x})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - x - 45}{x^2 - 3x - 10}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{17x + 1}{17x + 3} \right)^{x+2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -0} (\ln(1 - 2x))^{\sin 3x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{x + \sin 5x}$$

Продифференцировать функцию:

$$9. y = (5^{\operatorname{ctg} 2x} + \operatorname{ctg}^5 2x) \cdot (\cos \sqrt{4x + 3}); y' - ?$$

$$10. y = \frac{\sqrt{x} + \arcsin x}{\sin x}; dy - ?$$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x}$ , параллельной прямой  $2y - x - 6 = 0$ .

12. Показать, что функция  $y = e^x \cos 4x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y'' - 2y' + 17y = 0$ .

13. Тело движется прямолинейно по закону:  $S(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$ . Какую скорость и какое ускорение будет иметь тело через 4 секунды после начала движения?

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2}{1-x^3}$  и построить ее график.

### Вариант 30

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 8x^6 - 4}{18 + 3x^2 - 7x^6}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{5x - 1} - x - 1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x + 1})$

4.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 5x - 21}{x^3 + 27}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \operatorname{ctg} \pi x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x + 5}{4x - 1} \right)^{4x - 5}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 3x)^{\sin 7x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos 5x}{3 \operatorname{tg} 4x}$

Продифференцировать функцию:

9.  $y = \left( \arccos \frac{3}{\sqrt{x}} - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3} \right) \cdot 4^{\operatorname{ctg} (3x-2)}$ ;  $y' = ?$

10.  $y = \frac{2x - \operatorname{arctg} 2x}{e^{5 \sin 5x}}$ ;  $dy = ?$

11. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3x^2 - 5x + 4$ , параллельной прямой  $y = 7x + 2$ .

12. Показать, что функция  $y = 3e^{-2x} \sin 4x$  является решением дифференциального уравнения  $y'' + 4y' + 20y = 0$ .

13. Тело движется вдоль оси  $Ox$  по закону:  $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 3$ .

14. Исследовать функцию  $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$  и построить ее график.

## 2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Примерный вариант заданий с решением

Найти / вычислить интегралы:

1.  $\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx$

6.  $\int \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^2 + 8} dx$

2.  $\int_2^{\sqrt{5x-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$

7.  $\int \frac{x+17}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$

3.  $\int_1^2 (2x+1) \ln x dx$

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$

4.  $\int \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$

9.  $\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

5.  $\int \frac{1-3x}{\sqrt{9+8x-x^2}} dx$

10\*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:  
 $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ . Сделать чертеж.

10\*\*. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ . Сделать чертеж.

### Решение

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)e^x}{e^x - 1} dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{замена переменной:} \\ e^x = t \\ d(e^x) = dt \\ e^x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{t+1}{t-1} dt = \int \frac{t-1+2}{t-1} dt = \\ &= \int 1 + \frac{2}{t-1} dt = \int dt + 2 \int \frac{dt}{t-1} = t - 2 \ln|t-1| + C = \\ &= e^x - 2 \ln|e^x - 1| + C \end{aligned}$$

2.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$

Интегралы вида:  $\int P(x) \ln x dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$ ,  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  
где  $P(x)$  – многочлен, находят методом интегрирования по частям, причем,

за  $u(x)$  принимается трансцендентная функция:  $\ln x$  ( $\ln^n x$ ,  $\ln(f(x))$ ) или  $\operatorname{arctg} x$  ( $\operatorname{arctg} x$ ) или  $\arcsin x$  ( $\arccos x$ ).

Формула интегрирования по частям имеет вид:  $\int u dv = uv - \int v du$ .

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1}, \quad du = \frac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \int x \frac{dx}{2x\sqrt{5x-1}} = x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{5x-1}} = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int (5x-1)^{-\frac{1}{2}} d(5x-1) = \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{5} \sqrt{5x-1} + C \end{aligned}$$

$$3. \int_1^2 (2x+1) \ln x dx$$

Формула интегрирования по частям имеет вид:  $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ .

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x+1) \ln x dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (2x+1) dx, \quad v = x^2 + x \end{array} \right] = \\ &= (x^2 + x) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2 + x}{x} dx = (4+2) \ln 2 - (1+1) \ln 1 - \int_1^2 (x+1) dx = \\ &= 6 \ln 2 - \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - (2+2) + \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = 6 \ln 2 - 2,5 \end{aligned}$$

$$4. \int \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

Для вычисления интегралов вида  $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ , где  $m, n$  – целые неотрицательные числа, применяются формулы понижения степени:

$$\left[ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \int \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \left( \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 \left( \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \int \left( \frac{1-\cos x}{2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \sin x \right)^2 dx = \frac{1}{16} \int (1-\cos x)^2 \sin^2 x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1-2\cos x + \cos^2 x) \sin^2 x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \left( \int \sin^2 x dx - 2 \int \cos x \sin^2 x dx + \int \cos^2 x \sin^2 x dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - 2 \int \cos x \sin^2 x dx + \int \cos^2 x \sin^2 x dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - 2 \int \sin^2 x d(\sin x) + \int (\sin x \cos x)^2 dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{2}{3} \sin^3 x + \int \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right) + C = \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{5}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 x - \frac{1}{32} \sin 4x \right) + C
\end{aligned}$$

$$5. \int \frac{1 - 3x}{\sqrt{9 + 8x - x^2}} dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:} \\ 9 + 8x - x^2 = -(x^2 - 8x + 16) + 25 = 25 - (x - 4)^2 \\ \text{Замена переменной: } x - 4 = t \Rightarrow x = t + 4, dx = dt, \\ 9 + 8x - x^2 = 25 - t^2 \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1 - 3(t + 4)}{\sqrt{25 - t^2}} dt = \int \frac{-3t - 11}{\sqrt{25 - t^2}} dt = \int \frac{-3t dt}{\sqrt{25 - t^2}} - \int \frac{11 dt}{\sqrt{25 - t^2}} = \\
&= 3 \int \frac{-2t dt}{2\sqrt{25 - t^2}} - 11 \int \frac{dt}{\sqrt{5^2 - t^2}} = \\
&= 3 \int \frac{d(25 - t^2)}{2\sqrt{25 - t^2}} - 11 \arcsin \frac{t}{5} = 3\sqrt{25 - t^2} - 11 \arcsin \frac{t}{5} + C = \\
&= 3\sqrt{9 + 8x - x^2} - 11 \arcsin \frac{x - 4}{5} + C
\end{aligned}$$

$$6. \int \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^2 + 8} dx$$

$\frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^2 + 8}$  – неправильная рациональная дробь (так как высшие степени многочленов в числителе и знаменателе равны).

Выделим целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^2 + 8} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3(2x^2 - 4x + 5)}{3x^2 + 8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6x^2 - 12x + 15}{3x^2 + 8} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2(3x^2 + 8) + (-12x - 1)}{3x^2 + 8} = \frac{1}{3} \cdot \left( 2 + \frac{-12x - 1}{3x^2 + 8} \right) \end{aligned}$$

Правильная дробь  $\frac{-12x-1}{3x^2+8}$  является простейшей дробью II типа. Так как знаменатель—квадратный двучлен, то дробь раскладывают на сумму дробей:

$$\begin{aligned} \frac{-12x - 1}{3x^2 + 8} &= -\frac{12x}{3x^2 + 8} - \frac{1}{3x^2 + 8} = \\ &= \frac{1}{3} \int \left( 2 + \frac{-12x - 1}{3x^2 + 8} \right) dx = \frac{1}{3} \left( 2x - \int \frac{12x dx}{3x^2 + 8} - \int \frac{dx}{3x^2 + 8} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 2x - 2 \int \frac{6x dx}{3x^2 + 8} - \int \frac{3 dx}{3(3x^2 + 8)} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \int \left( 2x - 2 \int \frac{d(3x^2 + 8)}{3x^2 + 8} - \int \frac{d(3x)}{(3x)^2 + (\sqrt{24})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 2x - 2 \ln(3x^2 + 8) - \frac{1}{\sqrt{24}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{24}} \right) + C \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{x + 17}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$$

Подинтегральная функция — правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  на простые множители: линейные множители или квадратные многочлены с отрицательным дискриминантом.

Так как  $x = -1$  — корень многочлена  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ , значит  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  делится на  $(x - 1)$  без остатка:

Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & \frac{x - 1}{x^2 - x - 6} \\ \underline{-x^3 - x^2} & \\ -x^2 - 5x + 6 & \\ \underline{-(-x^2 + x)} & \\ -6x + 6 & \\ \underline{-(-6x + 6)} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2).$$

Разложим дробь  $\frac{x+17}{(x-1)(x-3)(x+2)}$  на сумму простейших дробей

$$\frac{x + 17}{(x - 1)(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 2} =$$

$$= \frac{A(x-3)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} \Rightarrow$$

$$x + 17 = A(x-3)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-3)$$

Найдем коэффициенты  $A, B, C$  методом частных значений:

$$\text{при } x=1 : 18 = -6A \quad A = -3$$

$$\text{при } x=3 : 20 = 10B \quad B = 2$$

$$\text{при } x=-2 : 15 = 15C \quad C = 1$$

Интегрируем рациональную дробь

$$\begin{aligned} \int \frac{x+17}{x^3-2x^2-5x+6} dx &= \int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-3} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= -3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-3)}{x-3} + \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \\ &= -3 \ln|x-1| + 2 \ln|x-3| + \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}} =$$

Замена переменной:

$$= \left[ \begin{array}{l} x = 5 \operatorname{tg} t; \quad dx = \frac{5}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{(25+x^2)} = \sqrt{25+25\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}} = \frac{5}{|\cos t|} = \frac{5}{\cos t} \\ \text{так как } \cos t > 0 \quad \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{5dt}{\cos^2 t \left(\frac{5}{\cos t}\right)^3} dt = \frac{1}{25} \int \cos t dt = \frac{1}{25} \sin t + C =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} x = 5 \operatorname{tg} t = \frac{5}{\cos t} \sin t \\ \frac{5}{\cos t} = \sqrt{25+x^2} \\ x = \sqrt{25+x^2} \sin t \Rightarrow \\ \sin t = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} \end{array} \right] = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} + C$$

$$9. \int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{Найдем наименьшее общее кратное показателя корня} \\ \text{подинтегрального выражения:} \\ \text{НОК}(2; 3) = 6 \\ \text{Замена переменной } \sqrt[6]{x+1} = t \Rightarrow \\ x+1 = t^6, x = t^6 - 1, dx = 6t^5 dt \\ \sqrt[3]{x+1} = t^2, \quad \sqrt{x+1} = t^3 \\ \frac{x \mid 0 \mid 63}{t \mid 1 \mid 2} \end{array} \right] =$$

$$\int_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int_1^2 \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int_1^2 \frac{(t^3 + 1) - 1}{t+1} dt = 6 \left( \int_1^2 \frac{t^3 + 1}{t+1} dt - \int_1^2 \frac{dt}{t+1} \right) =$$

$$6 \left( \int_1^2 \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{t+1} dt - \ln(t+1) \Big|_1^2 \right) = 6 \left( \int_1^2 (t^2 - t + 1) dt - \ln 3 + \ln 2 \right) =$$

$$6 \left( \left( \frac{8}{3} - 2 + 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) + \ln \frac{2}{3} \right) = 11 + 6 \ln \frac{2}{3}$$

10\*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:  
 $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ . Сделать чертеж.

Графиком функции  $y = ax^2 + bx + c$  является парабола, ветви которой направлены вниз при  $a < 0$ , вверх при  $a > 0$ .

Координаты вершин параболы:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_0 = y(-\frac{b}{2a})$ .

Для  $y = 2x - x^2 + 3$  ветви направлены вниз, (1; 4) – вершина параболы.

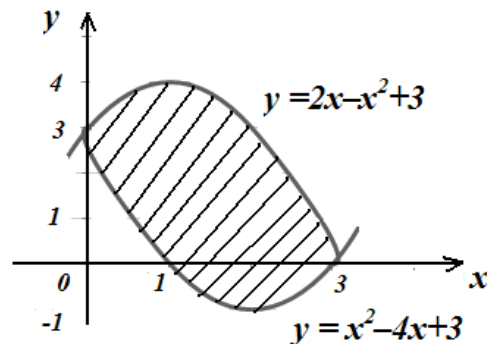
Для  $y = x^2 - 4x + 3$  ветви направлены вверх, (2; -1) – вершина параболы.

Найдем точки пересечения парабол:  $y = 2x - x^2 + 3$  и  $y = x^2 - 4x + 3$ :

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 3 \\ x_2 = 3 & y_2 = 0 \end{matrix}$$

Итак, (0; 3), (3; 0) – точки пересечения парабол.



Если фигура ограничена графиками функций

$y = f(x), y = q(x), x = a, x = b$  ( $a < b$ ), где  $f(x) \geq q(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , то

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b [f(x) - q(x)] dx.$$

В данном случае:  $-x^2 + 2x + 3 \geq x^2 - 4x + 3 \quad \forall x \in [0; 3]$

Следовательно,  $S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 ((-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)) dx =$

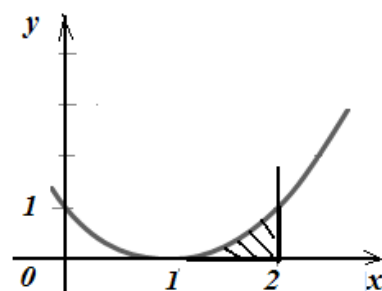
$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_0^3 = (-18 + 27) - 0 = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

10\*\*. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций:  $y = x^2 - 2x + 1, y = 0, x = 2$ .

Сделать чертеж.

$y = x^2 - 2x + 1$  – график параболы, ветви направлены вверх,  $(1; 0)$  – вершина.

Вращаемая фигура – криволинейная трапеция.



Если вокруг оси  $Ox$  вращается криволинейная трапеция, ограниченная графиками функциями:  $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$  ( $a < b$ ), причем  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то объем тела вращения находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x - 1)^4 d(x - 1) = \pi \frac{(x - 1)^5}{5} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{\pi}{5} - 0 = \frac{\pi}{5} \text{ (куб. ед.)} \end{aligned}$$

### Варианты заданий для самостоятельного решения (1–30)

В заданиях 1–9 найти/вычислить интегралы.

В задании 10 необходимо найти:

10\* – площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

10\*\* – объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной графиками функций. Сделать чертеж.

### Вариант 1

1.  $\int \frac{x^2 + 4x - 3}{x^2 + 9} dx$

3.  $\int 7^{-x} (3 - x) dx$

5.  $\int \sin^5 2x dx$

7.  $\int \frac{19 - 2x}{x^2 - 2x + 82} dx$

9.  $\int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x+2} + 5}$

2.  $\int_0^{\pi} (4x - 7) \cos \frac{x}{2} dx$

4.  $\int \operatorname{arcctg}(4x) dx$

6.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - x^2}}$

8.  $\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2 + 4)(x - 2)} dx$

10\*.  $y = 2^x; y = 0; x = 1; x = 2.$

### Вариант 2

1.  $\int \frac{3x^3 - 7}{x^2 + 8} dx$

3.  $\int (5x - 2)2^x dx$

5.  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$

7.  $\int \frac{9 - 4x}{x^2 + 6x + 13} dx$

9.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + 1}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + 2) \sin 2x dx$

4.  $\int \arcsin \frac{x}{4} dx$

6.  $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{3 + x^2}}$

8.  $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 4)(x + 1)^2} dx$

10\*.  $y = \cos x; y = 0; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}$

### Вариант 3

1.  $\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 3} dx$

3.  $\int e^{\frac{x}{2}} \left( \frac{x}{2} + 2 \right) dx$

5.  $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

7.  $\int \frac{15 - 2x}{x^2 - 4x + 5} dx$

9.  $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + 1}$

2.  $\int_0^{\pi} (2x - 1) \cos \frac{x}{3} dx$

4.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx$

6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

8.  $\int \frac{x - 3x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + 2)} dx$

10\*.  $y = (x - 2)^2; y = 0; y = 1; x = 0.$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 16} dx$$

$$3. \int \arccos(2x) dx$$

$$5. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$$

$$7. \int \frac{2x + 7}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$9. \int_0^9 \frac{dx}{3 + \sqrt{9 - x}}$$

$$1. \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 3} dx$$

$$3. \int \left(1 - \frac{x}{2}\right) 3^{x+2} dx$$

$$5. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx$$

$$7. \int \frac{4x - 5}{x^2 + 4x + 20} dx$$

$$9. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x - 1} + 2}$$

$$1. \int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5} dx$$

$$3. \int \operatorname{arctg} 2x dx$$

$$5. \int \cos^6 x \sin^3 x dx$$

$$7. \int \frac{17 - 2x}{x^2 + 4x + 13} dx$$

$$9. \int_0^{12} \frac{dx}{1 + \sqrt{16 - x}}$$

#### Вариант 4

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 1) \cos 2x dx$$

$$4. \int (x + 4) 2^x dx$$

$$6. \int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$8. \int \frac{x - 8}{x(x - 2)^2} dx$$

$$10^*. y = (x - 1)^2; y = 0; x = 0.$$

#### Вариант 5

$$2. \int_0^{\pi} (2x - 1) \cos \frac{x}{2} dx$$

$$4. \int x \operatorname{arctg} 2x dx$$

$$6. \int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{x(3x + 1)^2}$$

$$10^*. y = \ln x; y = 0; x = e; x = e^3.$$

#### Вариант 6

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - 1) \cos 3x dx$$

$$4. \int \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{3x} dx$$

$$6. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$8. \int \frac{x^3 + 3}{x^2(x^2 + 3)} dx$$

$$10^*. y = \log_2 x; y = 0; x = 4.$$

**Вариант 7**

1.  $\int \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 + 4} dx$

3.  $\int (x + 1)e^{-x} dx$

5.  $\int \frac{4x + 13}{x^2 + 6x + 18} dx$

7.  $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

9.  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{4 - x}}$

2.  $\int_0^\pi (8x - 1) \sin \frac{x}{2} dx$

4.  $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

6.  $\int \frac{x - 1}{x(4x^2 + 1)} dx$

8.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$

10\*.  $y = \sqrt{x - 1}; y = 1; x = 5.$

**Вариант 8**

1.  $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} dx$

3.  $\int \arcsin(3x) dx$

5.  $\int \cos^5 3x dx$

7.  $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 6x + 34} dx$

9.  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (20 - 8x) \sin 2x dx$

4.  $\int (2x + 3)e^{-4x} dx$

6.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 + x^2}}$

8.  $\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x(x - 1)(x + 2)} dx$

10\*.  $y = \log_2 x; y = 0; x = 8.$

**Вариант 9**

1.  $\int \frac{x^3 + 16}{x^2 + 2} dx$

3.  $\int (3 - x)e^{x+3} dx$

5.  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$

7.  $\int \frac{19 - 4x}{x^2 + 4x + 5} dx$

9.  $\int_0^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 4}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 - x) \sin 3x dx$

4.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx$

6.  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

8.  $\int \frac{x - 12}{x^2(x + 4)} dx$

10\*.  $y = \sin x; y = 0; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}.$

1.  $\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} dx$
3.  $\int (3x + 1)e^{2x} dx$
5.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
7.  $\int \frac{2x + 2}{x^2 + 10x + 26} dx$
9.  $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x + 1} + 1}$

1.  $\int \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + 4} dx$
3.  $\int (2x + 6) 3^{-x} dx$
5.  $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$
7.  $\int \frac{2x + 7}{x^2 - 4x + 29} dx$
9.  $\int_0^4 \frac{dx}{4 + \sqrt{2x + 1}}$

1.  $\int \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4} dx$
3.  $\int (4 - x) 3^{-\frac{x}{2}} dx$
5.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$
7.  $\int \frac{2x + 10}{x^2 + 2x + 10} dx$
9.  $\int_2^6 \frac{dx}{9 + \sqrt{2x - 3}}$

### Вариант 10

2.  $\int_0^\pi x \cos \frac{x}{2} dx$
4.  $\int \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} dx$
6.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$
8.  $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x - 1)(x^2 + 3)} dx$

10\*.  $y = \cos x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}$

### Вариант 11

2.  $\int_0^\pi (x - 1) \sin \frac{x}{2} dx$
4.  $\int \arccos 3x dx$
6.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$
8.  $\int \frac{x - 1}{x(x^2 + 1)} dx$

10\*.  $y = x^2 - 1; y = 0$

### Вариант 12

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - x) \sin 2x dx$
4.  $\int \arcsin 2x dx$
6.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$
8.  $\int \frac{x^2 + 2x - 5}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx$

10\*.  $y = \sin x; y = 0; x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{2}$ .

**Вариант 13**

1.  $\int \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 + 6} dx$

3.  $\int 4x \operatorname{arctg} 2x dx$

5.  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$

7.  $\int \frac{2x - 21}{x^2 - 2x + 10} dx$

9.  $\int_2^{23} \frac{dx}{6 + \sqrt{x + 2}}$

2.  $\int_0^{2\pi} (2x + 3) \sin \frac{x}{4} dx$

4.  $\int 5^x (5 - x) dx$

6.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$

8.  $\int \frac{4dx}{(x + 1)(x - 1)^2}$

10\*.  $y = \sin x; y = 0; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{2}.$

**Вариант 14**

1.  $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 8} dx$

3.  $\int (7 - 2x) 3^{x+1} dx$

5.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

7.  $\int \frac{4x + 31}{x^2 + 8x + 17} dx$

9.  $\int_5^{10} \frac{dx}{1 - \sqrt{x - 1}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 - x) \sin 8x dx$

4.  $\int \operatorname{arctg} (4x) dx$

6.  $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^3(x + 2)} dx$

10\*.  $y = \cos x; y = 0; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6}$

**Вариант 15**

1.  $\int \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 4} dx$

3.  $\int (x - 2) \ln(x + 1) dx$

5.  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

7.  $\int \frac{10x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx$

9.  $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2 - x}}$

2.  $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} (x - 1) \sin \frac{x}{5} dx$

4.  $\int 2^{-x} (2x + 3) dx$

6.  $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{2x^3 + x + 1}{x^3(x + 1)} dx$

10\*.  $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 1$

### Вариант 16

1.  $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 16} dx$

3.  $\int (2x - 1)e^{-x} dx$

5.  $\int \sin^4 2x dx$

7.  $\int \frac{17 - 2x}{x^2 - 6x + 25} dx$

9.  $\int_0^{12} \frac{dx}{1 + \sqrt{16 - x}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{10}} (x - 7) \sin 5x dx$

4.  $\int x^2 \ln(x + 1) dx$

6.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

8.  $\int \frac{x^3 + 3}{x^2(x^2 + 3)} dx$

10\*.  $y = \log_2 x; y = 0; x = 4;$

### Вариант 17

1.  $\int \frac{2x^2 + 5x}{x^2 + 1} dx$

3.  $\int e^{-\frac{x}{2}}(x + 10) dx$

5.  $\int \cos^3 5x dx$

7.  $\int \frac{15 - 2x}{x^2 - 4x + 40} dx$

9.  $\int_0^3 \frac{dx}{3 + \sqrt{x + 1}}$

2.  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (4 - 2x) \cos \frac{x}{3} dx$

4.  $\int \left(\frac{x}{2} + 1\right) \ln x dx$

6.  $\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{x^2 - 5x + 1}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$

10\*\*.  $y = -x^2 + 5x, y = 0$

### Вариант 18

1.  $\int \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 10} dx$

3.  $\int 4^{-x} (3 - 2x) dx$

5.  $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

7.  $\int \frac{4x + 27}{x^2 - 2x + 26} dx$

9.  $\int_4^{11} \frac{dx}{\sqrt{x + 5} - 1}$

2.  $\int_0^{\pi} (7x - 2) \cos \frac{x}{2} dx$

4.  $\int \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} dx$

6.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 + x^2}}$

8.  $\int \frac{x^2 + 4x - 3}{x^2(x - 3)} dx$

10\*\*.  $y = 2x - x^2; y = 0$

**Вариант 19**

1.  $\int \frac{5x^2 + x}{x^2 + 5} dx$

3.  $\int (6 - 3x)2^{-x} dx$

5.  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

7.  $\int \frac{4x - 10}{x^2 - 2x + 10} dx$

9.  $\int_0^3 \frac{dx}{5 - \sqrt{x+1}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 - x) \cos 3x dx$

4.  $\int x \arctg x dx$

6.  $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{4dx}{(x-1)(x^2+1)}$

10\*\*.  $y = x^2 - 4; y = 0$

**Вариант 20**

1.  $\int \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} dx$

3.  $\int (1 - 4x)4^{-x} dx$

5.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

7.  $\int \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13} dx$

9.  $\int_1^6 \frac{dx}{3 + \sqrt{3+x}}$

2.  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (3 - x) \cos \frac{x}{3} dx$

4.  $\int \arccos 3x dx$

6.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 - x^2}}$

8.  $\int \frac{2x^2 - 3x + 6}{x^2(x^2 + 3)} dx$

10\*\*.  $y = x^2 - 1, y = 0.$

**Вариант 21**

1.  $\int \frac{x^3 - 6}{x^2 + 6} dx$

3.  $\int 5^x(8 - x) dx$

5.  $\int \cos x \cos 2x dx$

7.  $\int \frac{6x - 2}{x^2 + 2x + 5} dx$

9.  $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 5}$

2.  $\int_0^{\pi} (4 + x) \sin \frac{x}{2} dx$

4.  $\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$

6.  $\int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{x-1}{(x-3)(x^2+1)} dx$

10\*\*.  $y = 3x - x^2; y = 0.$

**Вариант 22**

1.  $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx$

3.  $\int (1 + 2x)7^{-x} dx$

5.  $\int \sin 2x \sin x dx$

7.  $\int \frac{2x + 23}{x^2 + 4x + 20} dx$

9.  $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x + 1} + 2}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (6 + x) \cos 3x dx$

4.  $\int x^3 \ln x dx$

6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$

8.  $\int \frac{4x^2 + x - 1}{x(4x^2 + 1)} dx$

10\*\*.  $y = 5x - 3x^2; y = 0$

**Вариант 23**

1.  $\int \frac{4x^4 - x}{x^2 + 7} dx$

3.  $\int (1 + 2x) \cdot 2^{-x} dx$

5.  $\int \cos 2x \sin x dx$

7.  $\int \frac{4x - 7}{x^2 + 8x + 20} dx$

9.  $\int_2^{10} \frac{dx}{1 + \sqrt{5 + 2x}}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - x) \cos 2x dx$

4.  $\int (x^2 + 1) \ln x dx$

6.  $\int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx$

8.  $\int \frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$

10\*\*.  $y = 5x - x^2; y = 0$

**Вариант 24**

1.  $\int \frac{4x^3 + 1}{x^2 + 4} dx$

3.  $\int \arcsin 4x dx$

5.  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$

7.  $\int \frac{7 - 2x}{x^2 - 8x + 25} dx$

9.  $\int_5^8 \frac{dx}{\sqrt{3x + 1} - 1}$

2.  $\int_0^{\pi} (1 - 4x) \sin \frac{x}{2} dx$

4.  $\int (1 + x)e^{\frac{x}{2}} dx$

6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{36 - x^2}} dx$

8.  $\int \frac{5x + 4}{(x - 2)(x^2 + 3)} dx$

10\*\*.  $y = -x^2 - 5x; y = 0$

1.  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 8} dx$
3.  $\int x \arctg 2x dx$
5.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx$
7.  $\int \frac{4x - 11}{x^2 - 10x + 29} dx$
9.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{5x + 1} + 2}$

### Вариант 25

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 - 5x) \cos 3x dx$
4.  $\int (1 - 2x) e^{\frac{x}{3}} dx$
6.  $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^4} dx$
8.  $\int \frac{2x^2 - 3x + 6}{x(x - 3)(x + 2)} dx$
- 10\*\*.  $y = x^2 - 9; y = 0$

1.  $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 6} dx$
3.  $\int (x - 2) 10^{3x} dx$
5.  $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$
7.  $\int \frac{16 - 2x}{x^2 + 10x + 34} dx$
9.  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x - 1} + 1}$

### Вариант 26

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (6x - 2) \cos 2x dx$
4.  $\int (x^5 + 3x) \ln x dx$
6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} dx$
8.  $\int \frac{x^2 - 6}{(x - 1)(x^2 + 4)} dx$
- 10\*\*.  $y = x - 2x^2; y = 0$

1.  $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 4} dx$
3.  $\int e^{\sqrt{x}} dx$
5.  $\int \sqrt{\cos x} \sin^3 x dx$
7.  $\int \frac{7 - 2x}{x^2 - 6x + 25} dx$
9.  $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5} + 1}$

### Вариант 27

2.  $\int_0^{2\pi} (4 + x) \sin \frac{x}{4} dx$
4.  $\int (x + 2) \ln(x + 2) dx$
6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{25 - x^2}} dx$
8.  $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2(x - 1)^2} dx$
- 10\*\*.  $y = 2x - x^2; y = 0$

**Вариант 28**

1.  $\int \frac{2x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5} dx$

3.  $\int e^{\sqrt{x-1}} dx$

5.  $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

7.  $\int \frac{7 + 8x}{x^2 + 2x + 10} dx$

9.  $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + 2}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (20 - 5x) \sin 2x dx$

4.  $\int \arcsin 2x dx$

6.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{(16 - x^2)^3}} dx$

8.  $\int \frac{x + 5}{x^2(x + 1)^2} dx$

10\*\*.  $y = -2x - x^2; y = 0$

**Вариант 29**

1.  $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4} dx$

3.  $\int \ln \sqrt{x-1} dx$

5.  $\int \frac{23 - 4x}{x^2 - 4x + 8} dx$

7.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

9.  $\int_3^{23} \frac{dx}{\sqrt{2x+3} + 1}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 7) \cos x dx$

4.  $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

6.  $\int \frac{2x + 3}{(x - 3)x^3} dx$

8.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$

10\*\*.  $y = 7x - 3x^2; y = 0.$

**Вариант 30**

1.  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 6} dx$

3.  $\int x e^{2x} dx$

5.  $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^3 2x} dx$

7.  $\int \frac{24 - 4x}{x^2 - 6x + 13} dx$

9.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + 5}$

2.  $\int_0^{\pi} (3 + 2x) \sin \frac{x}{2} dx$

4.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$

6.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{(16 - x^2)^3}} dx$

8.  $\int \frac{x - 7}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$

10\*\*.  $y = 7x - 2x^2; y = 0.$