Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Б1.О.08 Специальные разделы высшей математики

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе

«Случайные события»

Направление подготовки
08.04.01 Строительство

Направленность программы
Механика грунтов, геотехника и геоэкология

Уфа 2024

Рекомендовано заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «21 марта» 2024 года)
Составители: доцент Костенко Н.А., доцент Мельник Л.Ю., доцент Авзалова З.Т.

Ответственный за выпуск: и.о. зав. кафедрой математики
канд.психол.наук. Дик Е.Н.

Введение

Методические указания по курсу «Теория вероятностей» содержат задачи, краткие теоретические сведения, необходимые для их решения, а также разобранные примеры, что очень удобно для выполнения домашних и расчетно-графических работ.

События и их вероятности

1 Классическая вероятность

В основе теории вероятностей, как и в основе любой другой науки, лежат некоторые определения и начальные понятия. При помощи этих понятий даётся логическое определение последующих более сложных понятий. *Событием* в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого опыта (испытания). События принято обозначать большими буквами латинского алфавита. Различные события отличаются между собой по степени возможности их появления и по характеру взаимосвязи.

Если при всех опытах рассматриваемое событие всегда наступает, то оно называется *достоверным*. Если при всех опытах рассматриваемое событие никогда не наступает, то оно называется *невозможным*. *Случайным* событием называется событие, которое в результате опыта может появиться, но может и не появиться.

Мера возможности наступления события называется его вероятностью. Классическая вероятность события A определяется как отношение числа m элементарных событий, входящих в A (благоприятствующих этому событию), к числу n всех равновозможных элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Вероятность невозможного события H равна нулю: P(H) = 0, вероятность достоверного события Ω равна единице: P(Ω) = 1, а вероятность произвольного случайного события А заключена между 0 и 1: $0 \le P(A) \le 1$.

1.1 Задача. Из слова НАУГАД выбирается наудачу одна буква. Какова вероятность того, что эта буква гласная?

Решение. Пусть A – событие заключающееся в том, что в результате опыта выбрана гласная буква. Событию А благоприятствуют три элементарных события: выбраны буквы А, А, У, поэтому m = 3. Общее число n всех возможных событий равно количеству букв в слове, n = 6. Следовательно:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.2 Задача. Брошены две игральные кости. Вычислить вероятность события А – сумма выпавших очков больше их произведения.

Решение. Найдем общее количество элементарных событий n. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, … , шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Таким образом, $n = 6 \cdot 6 = 36$. Найдем количество m элементарных событий, благоприятствующих событию. Выпишем те результаты испытаний, для которых сумма очков больше их произведения. Имеем: (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (6;1), (5;1), (4;1), (3;1) и (2;1). В результате получим $m = 11$. Вероятность события вычислим по формуле (1):

$$P(A) = \frac{11}{36}.$$

2 Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучают некоторые операции над конечным множеством элементов и в котором решаются задачи, связанные с этими операциями.

Приведем наиболее распространенные определения и формулы.

Из конечного множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, состоящего из n различных элементов, можно образовать различные наборы, состоящие из k ($k \le n$) элементов. Упорядоченные наборы называются размещениями, а неупорядоченные – сочетаниями. Например, из множества {1, 2, 3}, выбирая по 2 элемента ($n = 3$, $k = 2$), можно образовать 6 размещений ((1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)) и 3 сочетания ((1,2), (1,3), (2,3)).

Число размещений, которые можно образовать, выбирая различными способами k элементов из n, обозначают A_n^k, а число сочетаний – обозначают C_n^k. Числа A_n^k и C_n^k вычисляют по формулам:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1). \qquad (2)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \qquad (3)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \dots \cdot n$. Размещения из n элементов по n называют перестановками. Различные перестановки содержат одни и те же элементы, расположенные в разном порядке. Общее число P_n различных перестановок из n элементов вычисляют по формуле:

$$P_n = n! \qquad (4)$$

Рассмотрим задачи на применение вышеприведенных формул.

2.1 Задача. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово ДВА (событие А)?

Решение. Общее число n всевозможных троек букв *(x, y, z)* из букв А, Б, В, Г, Д равно A_5^3 (числу размещений из 5 по 3), т.к. порядок расположения букв здесь существенен. Число m исходов, благоприятствующих событию А равно 1, следовательно

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_3^5} = \frac{2!}{5!} = \frac{1}{60}.$$

2.2 Задача. Компания из 10 человек садится на скамейку. Какова вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом (событие А)?

Решение. Пусть M и N два лица, которые должны сидеть рядом. Могут быть следующие случаи: N сядет правее M, при этом M может сесть на 1, 2, …, 9 место, число таких случаев 9. Кроме того, M и N можно поменять местами и, следовательно, существует $2 \cdot 9 = 18$ способов размещения M и N рядом. Каждому из этих случаев соответствует 8! Способов размещения остальных членов компании. Значит всего способов для рассаживания компании из 10 человек, при которых M и N сидят рядом *m* = $8! \cdot 2 \cdot 9 = 9! \cdot 2$. Общее число способов для произвольного рассаживания компании из 10 человек равно 10!, следовательно

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Решите задачи самостоятельно.

2.3 В урне a белых и b черных шаров. Из этой урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар тоже белый? ((a-1) / (a+b-1)).

2.4 Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 100. Какова вероятность того, что выбранное число при делении на 8 дает в остатке 2? (0,13).

2.5 Из множества 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. какова вероятность того, что корни этого уравнения окажутся: а) действительными числами; б) целыми рациональными числами; в) действительными иррациональными числами? (а) 0,5; б) 0,3; в) 0,2).

2.6 Наугад выбирается по одной букве из слов «дама» и «мама». Какова вероятность того, что эти буквы: а) одинаковы; б) различны? (а) 0,375; б) 0,625).

2.7 Игральная кость бросается трижды. Пусть x – сумма очков, полученных при всех бросаниях. Что более вероятно: $x = 12$ или $x = 11$?

2.8 Частота попадания в мишень при стрельбе 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов? (30).

2.9 У одного студента 5 книг, у другого – 9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен: а) одной книги на книгу; б) 2 книг на 2 книги? (а) 45; б) 360).

2.10 На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с нее? Решите эту задачу с дополнительным условием: подъем и спуск должны происходить по разным тропинкам. (25; 20).

2.11 В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах? (3024).

2.12 Сколькими способами 3 различных подарка А, В и С можно сделать каким-то 3 из 15 лиц, если: а) никто не должен получить более одного подарка; б) подарок А должно получить определенное лицо? (а) 2730; б) 182).

2.13 В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек? (502).

2.14 3 дороги соединяют города А и В, 4 дороги соединяют города В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться в А также через С? (144).

2.15 Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, если: а) 2 определенные книги должны стоять рядом; б) эти 2 книги не должны стоять рядом? (а) 1440; б) 3600).

2.16 Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду? (56).

2.17 Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из 3 четных и 3 нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза? (28800).

2.18 Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различны? (5/9).

2.19 В урне 6 белых и 4 черных шара. Из одной урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 черные? (5/21).

2.20 В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и 2 урока другого. Какова вероятность того, что эти учителя не будут одновременно заняты? (0,2).

2.21 В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета? (0,25).

2.22 Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «математика»? (24/10!).

2.23 В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены все шары по одному и разложены в ряд. Какова вероятность того, что цвета шаров чередуются? (1/252).

2.24 Автобусу, в котором 15 пассажиров, предстоит сделать 20 остановок. Предполагая, что все возможные способы распределения пассажиров по остановкам равновозможны, найдите вероятность того, что никакие 2 пассажира не выйдут на одной остановке. ($C_{20}^{15}/20^{15}$).

2.25 n друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что а) два фиксированных лица M и N сядут рядом, причем N слева от M; б) три фиксированных лица M, N и Q сядут рядом, причем M справа от N, а Q слева. (а) 1/(n - 1); б) 1/(n - 1)(n - 2)).

2.26 Из последовательности чисел 1, 2, 3, …, n наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше k, а другое больше k, где 1 < k < n – произвольное целое число? ($\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$).

2.27 В шкафу находится 10 пар ботинок различных сортов. Из них случайно выбирается 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок: а) отсутствуют парные; б) имеется ровно одна пара; в) имеются две пары ботинок? (а) 224/323; б) 96/323; в) 3/323).

2.28 Группа, состоящая из 2N мальчиков и 2N девочек, делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково? ($(C_{2N}^{N})^2 \ / \ C_{4N}^{2N}$).

2.29 Некий математик носит с собой 2 коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что, когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек (r = 0, 1, 2, …, n; n – число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок). (C_{n+r}^{r} / 2^{n+r-1}).

2.30 В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимала в руке 6 травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказываются связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж. Найти вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо. (8/15).

2.31 Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года. ($12!/12^{12}$).

2.32 Имеется n шариков, которые случайным образом разбрасываются по m лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку упадет ровно k_1 шарик, во вторую – k_2 шариков и т.д., в m-ю – k_m шариков, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

($\dfrac{n!}{(m^n)!k_1!k_2!\cdots k_m!}$).

2.33 Вы задались целью найти человека, день рождения которого совпадает с Вашим. Сколько незнакомцев Вам придется опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была бы не меньше, чем 0,5 (считать, что в году 365 дней)? (Не менее 253).

3 Правила сложения и умножения вероятностей

Два события *A* и *B* называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого.

События *A* и *B* называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате опыта обязательно наступает хотя бы одно из них.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными* и обозначаются A и $\overline{A}$. Событие $\overline{A}$ означает, что *A* не произошло.

Суммой *A*+*B* двух событий *A* и *B* называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий.

Вероятность суммы двух произвольных событий A и B определяется следующей формулой:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (5)$$

Если события A и B несовместны, то формула (5) принимает вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad (6)$$

Формулу (6) можно обобщить на случай суммы любого числа попарно несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Часто при решении задач бывает удобнее вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, затем найти вероятность прямого события A по формуле:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (7)$$

События A и B называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло другое событие или нет. При зависимых событиях A и B имеет смысл говорить об условной вероятности $P_B(A)$ события A, при условии, что событие B уже произошло. При независимых событиях условная вероятность равна обычной вероятности: $P_B(A) = P(A)$. Вероятность произведения событий A и B выражается следующей формулой:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \text{ или } P(AB) = P(B)P_B(A). \qquad (8)$$

Если события A и B независимы, то формула (8) принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (9)$$

Формулу (9) можно обобщить на случай произведения любого числа независимых событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Разберем решение нескольких задач.

3.1 Задача. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, а для второго – 0,6. стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение. Введем обозначения: событие A – попадание хотя бы одного из стрелков, событие B_1 – попадание первого стрелка, событие B_2 – попадание второго стрелка.

Первый способ. Очевидно, $A = B_1 + B_2$, причем события B_1 и B_2 совместны. Следовательно, по формуле (5)

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cdot B_2).$$

Так как события B_1 и B_2 независимы, то

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2) = 0{,}8+0{,}6-0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92$$

Второй способ. Противоположным к событию A является событие $\overline{A}$ - ни один из стрелков не попал в мишень, причем $\overline{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}$. Воспользовавшись формулами (7) и (9), получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) = 1 - 0,4 \cdot 0,2 = 0,92.$$

3.2 Задача. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза.

Решение. Введем обозначения: A – выпадение двух гербов при трех бросаниях; B_i – выпадение герба при i-том бросании (I = 1, 2, 3). Тогда $A = B_1B_2\overline{B_3} + B_1\overline{B_2}B_3 + \overline{B_1}B_2B_3$. Так как слагаемые правой части этого равенства попарно несовместны, то по формуле (6)

$$P(A) = P(B_1B_2\overline{B_3}) + P(B_1\overline{B_2}B_3) + P(\overline{B_1}B_2B_3).$$

Учитывая независимость событий B_1, B_2, B_3 по формуле (9) получим:

$$P(A) = P(B_1)P(B_2)P(\overline{B_3}) + P(B_1)P(\overline{B_2})P(B_3) + P(\overline{B_1})P(B_2)P(B_3) =$$

$$0,5\cdot 0,5\cdot 0,5 + 0,5\cdot 0,5\cdot 0,5 + 0,5\cdot 0,5\cdot 0,5 = 0,375.$$

3.3 Задача. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены – мастера спорта?

Решение. Первый способ. Пусть событие A состоит в том, что все 3 выбранные спортсмены являются мастерами спорта.

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}.$$

Второй способ. Введем обозначения: B_i – i-тый выбранный спортсмен – мастер спорта. Тогда А = $B_1B_2B_3$ и обобщая формулу (8) на случай произведения трех зависимых событий, получим

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(B_2)\cdot P_{B1B2}(B_3) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

3.4 Задача. В урне 8 красных, 10 зеленых и 12 синих шаров. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что хотя бы два из них одного цвета?

Решение. Испытанием является вынимание трех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные сочетания по 3 из 30 шаров. Их число равно

$$n = C_{30}^3 = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\cdot 14\cdot 29 = 4060.$$

Введем событие A – среди вынутых шаров хотя бы два одного цвета. Здесь событие A определяется словами «хотя бы два» (этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: все три красные, все три зеленые, все три синие, 2 красных и 1 другого цвета, 2 зеленых и 1 другого цвета, 2 синих и 1 другого цвета) и прямое решение приведет к сложным вычислениям. Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем по формуле (7) вычислить вероятность искомого события.

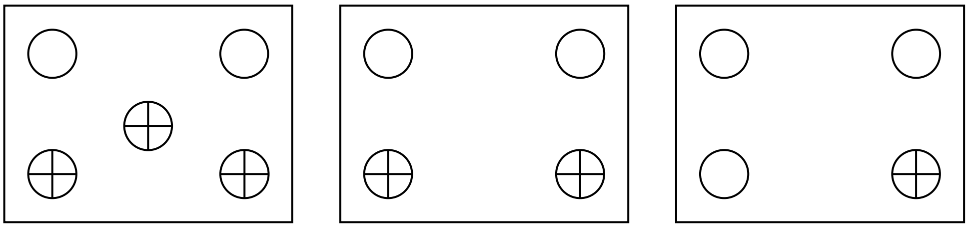
Противоположное событие $\overline{A}$ - все три вынутые шара разного цвета. Найдем число m элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}$. Так как нужно взять один шар из 8 красных, один – из 10 зеленых и один шар из 12 синих, то

$$m = C_8^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{12}^1 = 8 \cdot 10 \cdot 12 = 960$$

$$P(\overline{A}) = \frac{960}{4060} = \frac{96}{406} = \frac{48}{203}.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{48}{203} = \frac{155}{203} \approx 0{,}764.$$

3.5 Задача. В 3 урнах белые и черные шары: в первой – 2 белых, 3 черных, во второй – 2 белых, 2 черных, в третьей – 3 белых, 1 черный шары.



Из первой урны переложили один шар во вторую урну, затем из второй урны один шар в третью урну, и после этого из третьей урны один шар в первую урну. Найти вероятность того, что состав шаров в урнах не изменится (событие A).

Решение. Рассмотрим следующие события: B_i из i-ой урны взят белый шар, R_k из k-ой урны взят черный шар (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3). Очевидно

$$A = B_1B_2B_3 + R_1R_2R_3 \Rightarrow$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(B_2) \cdot P_{B1B2}(B_3) + P(R_1) \cdot P_{R1}(R_2) \cdot P_{R1R2}(R_3) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{125} + \frac{18}{125} = \frac{42}{125}.$$

Предлагаем для самостоятельного решения следующие задачи:

3.6 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p, а для второго – 0,7. Известно, что вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найдите p. (0,8).

3.7 Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, купив 5 билетов, выиграть: а) по всем пяти билетам; б) ни по одному билету; в) хотя бы по одному билету? (а) $1/7^5$; б) $6^5/7^5$; в) $1-6^5/7^5$).

3.8 Детали проходят 3 операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найдите вероятность получения детали без брака после 3 операций, предполагая, что получения брака на отдельных операциях являются независимыми событиями. ($p \approx 0{,}93$).

3.9 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается одна, а из оставшихся вторая. Найдите вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) первый раз; б) второй раз; в) оба раза. (а) 0,6; б) 0,6; в) 0,3).

3.10 Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0,95? (5).

3.11 Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется сделать не более чем 2 неудачные попытки. (0,3).

3.12 Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков 2 партий подряд (ничьи исключаются). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0,5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найдите вероятность того, что игра окончится до 6 партии. (0,9375).

3.13 Студент успел подготовить к экзаменам 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных вопросов студент знает не менее 2? (209/230).

3.14 Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы, используя: а) понятие условной вероятности; б) классическое определение вероятности. ($\approx 0{,}496$).

3.15 Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно есть в её фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно занята она другим читателем или нет. Что вероятнее: достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

3.16 Стрелок A поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью $p_1 = 0{,}6$, стрелок B – с вероятностью $p_2 = 0{,}5$ и стрелок C – с вероятностью $p_3 = 0{,}4$. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал C в мишень или нет?

3.17 Известно, что вероятность двум близнецам быть одного пола $\approx 0{,}64$, причем вообще вероятность рождения мальчика $\approx 0{,}51$. Найти вероятность того, что второй из близнецов мальчик, при условии, что первый из них мальчик. (11/17).

3.18 Вероятность того, что письмо находится в письменном столе, равна р, причем с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели 7 ящиков и письма не нашли. Какова вероятность, что письмо в восьмом ящике. (р / (8 – 7р)).

3.19 Один школьник, желая подшутить над своими одноклассниками, собрал в классе все портфели, а потом расставил их в случайном порядке. Какова вероятность, что хотя один портфель попал на прежнее место, если в классе было n мест и n портфелей. ($\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}$).

3.20 Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос. (28/29).

3.21 Два спортсмена стреляют по мишени, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого спортсмена вероятность попадания в цель 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень? Как изменится результат, если спортсмены сделают по два выстрела? (0,94; 0,9964).

3.22 Ящик содержит 90 годных и 10 бракованных деталей. Сборщик последовательно без возвращения достает из ящика 10 деталей. Найдите вероятность того, что среди взятых деталей: а) нет бракованных; б) хотя бы одна бракованная. (а) 0,33; б) 0,67).

3.23 Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза. (а) 0,024; б) 0,976; в) 0,452).

3.24 В 2 урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета? (0,323).

4 Формулы полной вероятности и Бейеса

Если событие A может наступить только при появлении одного из попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{Hn}(A)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A), \qquad (10)$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i, $P_{Hi}(A)$ – условная вероятность события A при осуществлении гипотезы H_i. Если событие A произошло, то можно вычислить условную вероятность того, что с событием A осуществлялась гипотеза H_i.

$$\mathrm{P_A(H_i)} = \frac{P(H_i)P_{Hi}(A)}{P(A)}, \qquad (11)$$

где $P(A)$ – полная вероятность события A. Полученную формулу называют формулой Бейеса. С помощью формулы Бейеса можно после испытания уточнить вероятность появления события (гипотезы) H_i.

Решим задачи с использованием приведенных формул.

4.1 Задача. В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй наудачу достали один шар.

а) Какова вероятность того, что этот шар белый?

б) Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены два белых шара?

Решение. а) Введем обозначения: A – шар, извлеченный из второй урны, белый; гипотезы H_1 – из первой урны во вторую переложено 2 белых шара, H_2 – переложены 2 разноцветных шара, H_3 – переложены 2 черных шара. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)P_{H2}(A) + P(H_3)P_{H3}(A). \qquad (*)$$

Вероятности гипотез H_i и условные вероятности $P_{Hi}(A)$ $(i = 1, 2, 3)$ вычисляем по формуле (1):

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}, \quad P(H_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}, \quad P(H_3) = \frac{C_2^6}{C_8^2} = \frac{15}{28},$$

$$P_{H1}(A) = \frac{3}{4}, \quad P_{H2}(A) = \frac{5}{8}, \quad P_{H3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Полученные результаты подставим в формулу (*):

$$P(A) = \frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4} + \frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8} + \frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

б) Вероятность $P_{H1}(A)$ находим по формуле (11):

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H1}(A)}{P(A)} = \frac{1}{21}.$$

4.2 Задача. Вероятность попасть в самолет равна 0,4, а вероятность его сбить равна 0,1. Найти вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит.

Решение. Пусть событие A – попадание в самолет; гипотезы H_1 – самолет будет сбит, H_2 – самолет не будет сбит. Тогда по условию $P(A)$ = 0,4; $P(H_1)$ = 0,1. Очевидно, что $P_{H1}(A)$ = 1. Воспользовавшись формулой (11), имеем

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}1\cdot 1}{0{,}4} = \frac{1}{4}.$$

Решите самостоятельно следующие задачи:

4.3 В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и 1 – второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. а) Какова вероятность того, что выбран юноша? б) Выбранный человек оказался юношей. Какова вероятность того, что он первокурсник? (а) 7/12; б) 5/7).

4.4 60 % учащихся в школе – девочки, 80 % девочек и 75 % мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что этот билет принадлежал девочке? Мальчику? (8/13; 5/13).

4.5 На некоторой фабрике машина A производит 40% всей продукции, а машина B – 60%. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказывается браком, а у машины B – брак 2 единицы из 500. Некоторая единица продукции, выбранная случайным образом из дневной продукции, оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена на машине B? (0,6; 0,4).

4.6 4 стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятности попадания для данных стрелков равны 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. После стрельбы в мишени обнаружены 3 пробоины. Найдите вероятность того, что промахнулся четвертый стрелок. ($\approx 0{,}088$).

4.7 Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок не попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

4.8 Один властелин, которому наскучил его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым повелителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по 2 урнам 4 шара: 2 белых и 2 черных. Палач выберет наугад одну из урн и из нее вытащит один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

4.9 На рисунке 1 изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта *O*, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт *A*? (67/120).

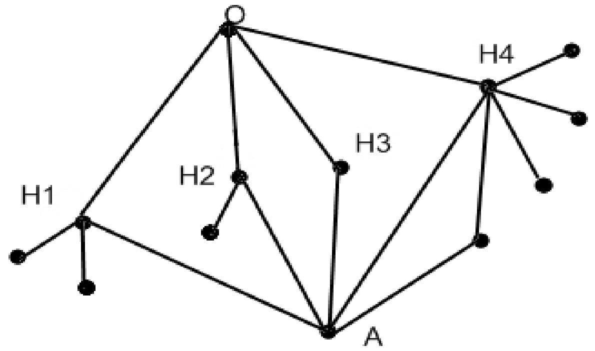


Рис.1

4.10 Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (считать, что мужчин и женщин одинаковое число) (20/21).

4.11 Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей, когда он тащит билет первым или последним?

4.12 Допустим, что некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ кладет *k* яиц, а вероятность развития насекомого из яйца равна *p*. Предполагая взаимную независимость развития яиц, найти вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков. ($e^{-\lambda}(\frac{p}{1-p})^m\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k(1-p)^k}{k!}$).

5 Формула Бернулли

Рассмотрим последовательность n независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие A может наступить с одной и той же вероятностью p = P(A).

Пусть для заданного целого числа k ($0 \le k \le n$) $P_n(k)$ обозначает вероятность того, что в n опытах событие A наступит ровно k раз. Имеет место формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q = 1 - p \qquad (12)$$

Рассмотрим решение задач на данную тему:

5.1 Задача. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8 и не зависит от номера выстрела. Требуется найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Решение. В этой задаче n = 5, p = 0,8 и k = 2; по формуле Бернулли находим:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$$

Число успехов k_0, которому при заданном n соответствует максимальная биноминальная вероятность $P_n(k_0)$ называется наиболее вероятным числом успехов.

Наиболее вероятное число успехов k_0 по заданным n и p найдем из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p, \qquad (13)$$

причем, а) если число np + p – не целое, то k_0 равно целой части этого числа, б) если число np + p – целое, то k_0 имеет два значения $k_0^{`} = np - q$ и $k_0^{``} = np + p$.

5.2 Задача. Найти наиболее вероятное число выпадений герба при 25 бросаниях монеты.

Решение. В этой задаче n= 25, p = 0,5, q = 0,5. np-q = $25 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 12$, np+p = $25 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 13$. Таким образом, $12 \le k_0 \le 13$, поэтому $k_0^{`}$ = 12 и $k_0^{``}$ = 13. Решите самостоятельно:

5.3 По данным технического контроля 2% изготовленных автоматических станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найдите вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке. (0,0000023).

5.4 Найдите наиболее вероятное число выпадений шестерки при 46 бросаниях игральной кости. (7).

5.5 Контрольное задание состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» и «нет». Найдите наиболее вероятное число правильных ответов которое даст учащийся, если он станет выбирать ответ по каждому вопросу наудачу. Найдите вероятность наиболее вероятного числа ответов. (5; 63/256).

5.6 Вероятность изготовления стандартной детали 0,95. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятное число нестандартных деталей в ней равнялось 55? ($1099 \cdot 1119$).

5.7 На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 автомашин. (0,9017).

5.8 Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится: а) одному; б) по крайней мере одному. (а) 0,4096; б) 0,6723).

5.9 Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата было равно 100? (103).

5.10 Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответов, причем только один из них правильный. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий ни одного вопроса, даст: а) 3 правильных ответа; б) не менее 3 правильных ответов (предполагается что учащийся выбирает ответы наудачу). (а) 0,176; б) 0,203).

5.11 Рабочий обслуживает 12 станков одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 1/3. Найдите: а) вероятность того, что в течение часа 4 станка потребуют внимания рабочего; б) наиболее вероятное число станков, которые потребуют внимания рабочего в течение часа. (а) 0,238; б) 4).

5.12 Проведено 5 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что в 3 испытаниях появилось по 2 герба. (45/512).

5.13 Испытание состоит в бросании 3 игральных костей. Найдите вероятность того, что в 5 независимых испытаниях ровно 2 раза выпадет по 3 единицы. ($\approx 0{,}0002$).

5.14 Вероятность наступления события А в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определите вероятность появления этого события хотя бы 3 раза. (0,73).

5.15 Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания или до полного израсходования колец. Найдите вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1. (0,41).

5.16 Два баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найдите вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго. (а) 0,321; б) 0,243).

5.17 Прибор выходит из строя, если перегорит не менее 5 ламп I типа или менее 2 ламп II типа. Определите вероятность выхода прибора из строя, если известно, что перегорело 5 ламп, а вероятности перегорания ламп I и II типов равны соответственно 0,7 и 0,3 (выход ламп из строя – независимые события). (0,64).

5.18 Из ящика, в котором 200 белых и 2 черных шара, n раз извлекают шары по одному, причем каждый раз шар возвращается. Определите наименьшее значение n, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины. (8).

5.19 Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных? (0,1875).

5.21 Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7. (5).

5.22 Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех? (0,73728).

5.23 Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки – 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек. ($\approx 0{,}3723$).

5.24 Для того чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди вновь пойманных 150 рыб 10 меченых? (15000).

5.25 Среди коконов некоторой партии 30% цветных. Какова вероятность того, что среди 10 случайно отобранных из партии коконов 3 цветных? Не более 3 цветных? ($\approx 0{,}2668; \approx 0{,}6496$).

6 Приближенные формулы Лапласа и Пуассона

При больших значениях n применение формулы Бернулли становится затруднительным.

Локальная приближенная формула Лапласа. При больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (14)$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

(Таблицу значений функции $\varphi(x)$ см. в приложении)

Интегральная приближенная формула Лапласа. При больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (15)$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt\,.$$

Функция *Ф(х)* называется функцией Лапласа (таблицу ее значений см. в приложении). При нахождении значений функций $\varphi(x) и \Phi(x)$ для отрицательных значений аргумента следует иметь в виду, что $\varphi(x)$ четная, а *Ф(х)* – нечетная.

Приближенными формулами Лапласа (14) и (15) на практике пользуются в случае, если $npq \ge 10$. Если $npq \le 10$, то эти формулы приводят к довольно большим погрешностям.

Приближенная формула Пуассона. При больших n и малых p справедлива формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, где \lambda = np. \quad (16)$$

Самостоятельно решите следующие задачи:

6.1 Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85. Найдите вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдет: а) 425 семян; б) от 425 до 450 семян. (а) $\approx 0{,}04999$; б) $\approx 0{,}9986$).

6.2 Вероятность того, что покупателю требуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 100 покупателей потребуют обувь 41-го размера: а) 25 человек; б) от 10 до 30 человек; в) не более 30 человек; г) не менее 35 человек. (а) 0,04565; б) 0,98758; в) 0,99379; г) 0,0009).

6.3 Вероятность появления события F в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие F появится не менее 75 раз? ($n \ge 100$).

6.4 Вероятность получения положительного результата в каждом из независимых опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат? ($n \ge 177$).

6.5 Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найдите вероятность того, что среди 5000 изделий в пути повреждено: а) ровно 3 изделия; б) не более 3 изделий; в) более 3 изделий. (а) 0,06313; б) 0,981011; в) 0,18989).

6.6 В среднем левши составляют 1 процент. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдется: а) ровно 4 левши; б) не менее чем 4 левши? (а) 0,09; б) 0,15).

6.7 Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажутся: а) 5 страниц; б) от 3 до 5 страниц. (а) 0,0361; б) 0,08).

6.8 Опыт состоит в бросании игральной кости 600 раз. Оцените вероятность того, что частота выпадения шестерки отклонится от вероятности выпадения шестерки в одном бросании менее чем: а) на 0,01; б) на 0,02. (а) 0,49; б) 0,8132).

6.9 Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб. ($\approx 0{,}1813$).

6.10 Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течении часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течении часа позвонит 5 абонентов? ($\approx 0{,}0916$).

6.11 Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365. ($\approx 0{,}2385$).

7 Различные задачи

7.1 Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик имеет две окрашенные грани. (0,096).

7.2 Какова вероятность того, что в январе наудачу выбранного года окажется пять воскресений? (3/7).

7.3 В ящике лежат 12 белых и 8 красных одинаковых на ощупь шаров: а) вынули два шара: какова вероятность того, что они разного цвета? Б) Вынули восемь шаров: какова вероятность того, что три из них красные? (а) 48/95; б) 0,35).

7.4 Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Какова вероятность того, что в нем: а) все цифры различные; б) все цифры нечетные? (а) 0,3024; б) 1/32).

7.5 В условиях задачи 3 вынуто 6 шаров. Какова вероятность того, что среди них не более одного белого шара? ($\approx 0{,}2666$).

7.6 В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка эта попадает в квадрат? ($2/\pi$).

7.7 В ящике 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что они зеленые, если известно, что не вынут синий шар? (14/95).

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34