Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Математика

Методические указания к лабораторным работам
«Некоторые методы приближённого решения нелинейных уравнений»

для всех направлений бакалавриата

Уфа 2024

00УДК 51(07)
ББК 222.1я73, 22.161.6
М 54

Рекомендовано к изданию заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «21 марта» 2024 года)

Составитель: доцент кафедры математики Ардуванова Ф.Ф., ассистент кафедры математики Атнагулов А. И.

Ответственный за выпуск: и.о. зав. кафедрой математики
канд.психол.наук. Дик Е.Н.

Введение

Решение нелинейных уравнений может представлять собой самостоятельную задачу или являться частью более сложных задач. В обоих случаях практическая ценность метода в значительной мере определяется быстротой и эффективностью полученного решения. Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи.

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными.*

Методы решения нелинейных уравнений делятся на *точные* и *итерационные.*

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы).

Многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

Пусть дано уравнение f(x)=0,
(1) где:

1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.

2) Значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).

3) 1я и 2я производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале $[a, b]$ находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что корень будет единственным.

Решить уравнение (1) *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что: $f(\xi)=0,$ называется *корнем уравнения* (1) или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1) *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;

2) *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью *Ox,* или отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1) *равносильным* ему уравнением:

$$f_1(x)=f_2(x), \qquad (2)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 1.

Графически отделить корни уравнения $x \cdot \lg(x) = 1 \qquad (3)$

Уравнение (3) удобно переписать в виде равенства: $\lg(x) = 1/x$.

Отсюда ясно, что корни уравнения (3) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y=1/x$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень $x \approx 2{,}5$ уравнения (3) или определим содержащий его отрезок- [2, 3](рисунок 1).

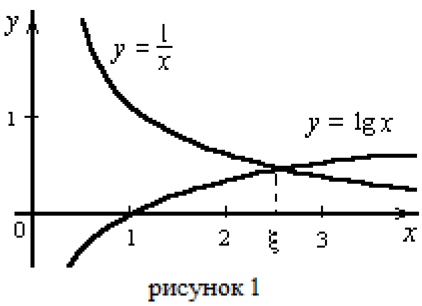


рисунок 1

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, ..., x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

Метод половинного деления.

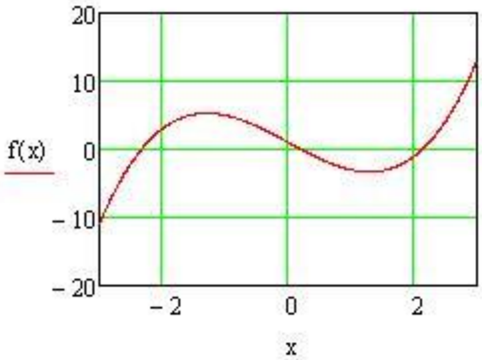
Логика метода довольно проста: если на концах выбранного интервала [a,b] знаки функции совпадают (произведение f(a)*f(b)>0), то надо вернуть результат «недопустимый интервал» (вернём в этом случае ответ «бесконечность»), в противном случае до тех пор, пока длина интервала не станет меньше заданной погрешности ε, будем находить середину текущего интервала c=(a+b)/2, считать в ней значение функции и проверять, какую из половин отрезка - [a;c] или [b;c] – нужно отбросить для выполнения следующего шага. А именно, отбросим ту, в которой знак f(c) совпадает со знаком на левой или правой границе интервала (проверка f(a)*f(c)>0). Для большей точности вернём середину «последнего» интервала [a;b], меньшего ε.

Пример 2.

Решим на промежутке [-3;-1] уравнение $x^3 - 5 \cdot x + 1 = 0$

$f(x) := x^3 - 5x + 1 \qquad a := -3 \qquad b := -1$

```
Dichotomy(f,a,b,ε) := | return ∞  if f(a)·f(b) > 0
                      | while |b − a| > ε
                      |   | c ← (a + b)/2
                      |   | a ← c  if f(a)·f(c) > 0
                      |   | b ← c  otherwise
                      | (a + b)/2
```



$f(a) = -11 \qquad f(b) = 5 \qquad x := \mathrm{Dichotomy}\left(f, a, b, 10^{-6}\right) \qquad x = -2.33 \qquad f(x) = 1.861 \times 10^{-6}$

Метод хорд

В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения (1) принимаются значения $x_1, x_2, ..., x_n$ точек пересечения хорды AB с осью абсцисс. Сначала запишем уравнение хорды AB:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения хорды AB с осью абсцисс ($x = x_1$, $y = 0$) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a)$$

(4)

Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB. Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ (рисунок 2а) и 2) $f(b) < 0$ (рисунок 2б)

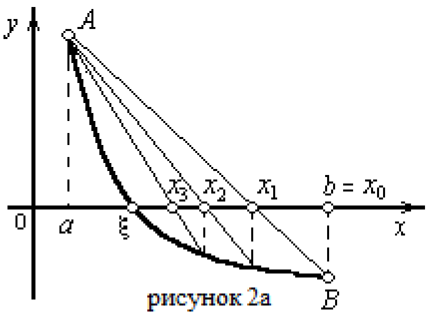


рисунок 2а

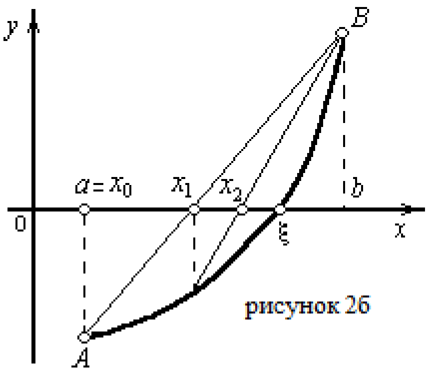


рисунок 2б

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения:

$$x_0 = b,\ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)} \cdot (x_i - a) \quad (i=0,1,2,\ldots)$$

(5)

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем $a < \xi < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0$.

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения:

$$x_0 = a,\ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)} \cdot (b - x_i)$$

(6)

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем $x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \xi < b$.

Обобщая эти результаты, заключаем:

1) неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;
2) последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ, где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, где ε - заданная предельная абсолютная погрешность.

Пример 3.
Найти положительный корень уравнения $x^3 – 0{,}2\,x^2 – 0{,}2\,x – 1{,}2 = 0$ с точностью ε = 0,01.

$$f(x) := x^3 - 0.2\cdot x^2 - 0.2\cdot x - 1.2$$

$$f(1) = -0.6 \qquad f(2) = 5.6$$

$$g(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \to 6\cdot x - .4 \qquad f(1.5) = 1.425$$

$$g(1) = 5.6 \qquad g(1.5) = 8.6$$

$$a := 1 \quad x_0 := a \quad b := 1.5$$

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}\cdot(b - x_0) \qquad |x_1 - x_0| = 0.148 \quad f(x_1) = -0.18$$

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}\cdot(b - x_1) \qquad |x_2 - x_1| = 0.039 \quad f(x_2) = -0.045$$

$$x_3 := x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}\cdot(b - x_2) \qquad |x_3 - x_2| = 9.517\times 10^{-3} \quad f(x_3) = -0.011$$

$$x_3 = 1.197$$

Заметим, что точный корень уравнения ξ = 1,2.

Метод Ньютона

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой y=f(x) при x= x_i и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс(см. рисунок 3). При этом не обязательно задавать отрезок [a;b], содержащий корень уравнения, достаточно лишь найти некоторое начальное приближение x= x_0.

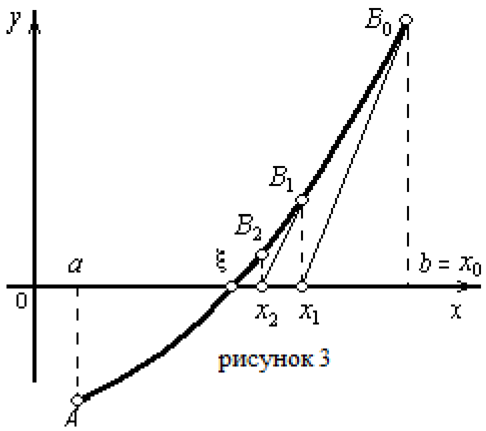


рисунок 3

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: в качестве исходной точки выбирается тот конец интервала [a;b], которому отвечает ордината того же знака, что и знак второй производной функции f.

Отсюда найдём приближение корня x_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox(y=0): $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Аналогично находятся и следующие приближения. Формула для i+1 приближения имеет вид $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ (7)

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|f(x_i)| < \varepsilon$, или условие близости двух последовательных приближений $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$. Итерационный процесс сходится, если $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Для организации итерационных вычислений используется функция until(a,z). Возвращает значение z, пока выражение a не становится отрицательным, при этом a должно содержать дискретный аргумент.

Пример 4. Решение уравнения при помощи Mathcad.

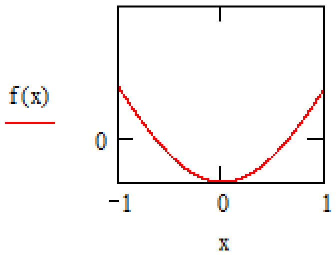
$$f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x)$$

$$x_0 := 0.6$$

$$n := 100 \qquad i := 1..n$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \qquad \varepsilon := 10^{-4}$$

$$x_{i+1} := \mathrm{until}\left(f(x_i) - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{g(x_i)}\right)$$



После чего определим число итераций, за которое процесс сошелся, при помощи функции last: j:=last(x)

Остаётся только вычислить корень: $x_{j-1} = 0.65327$

Метод простой итерации

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяется равносильным уравнением $x = \varphi(x)$ (8)

Пусть известно начальное приближение корня $x = x_0$. Подставляя это значение в правую часть уравнения (8), получим новое приближение: $x_1 = \varphi(x_0)$.

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в (8), получаем последовательность значений: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ (i=0,1,…) (9)

Для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема: *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на отрезке* $[a, b]$, *причем все ее значения* $\varphi(x) \in [a, b]$.

Тогда, если существует правильная дробь q *такая, что*

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \text{ при } a < x < b, \text{ то:}$$

1) *процесс итерации* $x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots)$ *сходится независимо от начального значения* $x_0 \in [a, b]$;

2) *предельное значение* $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *является единственным корнем уравнения* $x = \varphi(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

Пример 5.

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \qquad (10)$$

Уравнение имеет корень $\xi \in [1, 2]$, так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Уравнение (10) можно записать в виде $x = x^3 - 1$. (11)

Здесь $\varphi(x) = x^3 - 1$ и $\varphi'(x) = 3x^2$, поэтому $\varphi'(x) \ge 3$ при $1 \le x \le 2$ и, следовательно, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если записать уравнение (10) в виде $x = \sqrt[3]{x+1}$, (12)

то будем иметь: $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ и $\psi'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Отсюда $0 < \psi'(x) < \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \dfrac{1}{4}$ при $1 \le x \le 2$ и значит, процесс итерации для уравнения (12) быстро сойдется.

Найдем корень ξ уравнения (10) с точностью до 10^{-2}. Вычисляем последовательные приближения x_n с одним запасным знаком по формуле

$$x_{i+1} = \sqrt[3]{x_i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найденные значения помещены в таблицу:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,260	1,312	1,322	1,324

					3

С точностью до 10^{-2} можно положить ξ = 1,324.

Решение уравнений средствами Mathcad

Для простейших уравнений вида $f(x) = 0$ решение в Mathcad находится с помощью функции *root(f(x1,x2,…),x1,a,b)*. Она возвращает значение $x1$, принадлежащее отрезку [*a*, *b*], при котором выражение или функция $f(x)$ обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Аргументы: $f(x1,\ x2,\ \dots)$ - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения. $x1$- имя переменной, используемой в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение. Mathcad использует его как начальное приближение при поиске корня. *a, b* – необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем $a < b$.

Если после многих итераций Mathcad не находит подходящего приближения, то появится сообщение Can't converge to a solution. (отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- Уравнение не имеет корней.
- Корни уравнения расположены далеко от начального приближения.
- Выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями.
- Выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями.
- Выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график $f(x)$. Он поможет выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет *root* сходиться.

Решение уравнения cos(x)=x+0.2.

```
x := 1
f(x) := cos(x) − x − 0.2
root(f(x),x) = 0.616
```

Для выражения $f(x)$ с известным корнем a нахождение дополнительных корней $f(x)$ эквивалентно поиску корней уравнения $h(x) = f(x)/(x - a)$. Подобный прием полезен для нахождения корней, расположенных близко друг к другу. Проще искать корень выражения $h(x)$, чем пробовать искать другой корень уравнения $f(x) = 0$, выбирая различные начальные приближения.

Нахождение корней полинома

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0$,

лучше использовать функцию *polyroots*, нежели *root*. Она возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

$$v(x) := x^4 - 15\cdot x^2 + 10\cdot x + 24$$

$$v := \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Символьное решение уравнений

Имеются некоторые задачи, для которых возможности Mathcad позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде. Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

- Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того, чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении.
- Если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе или в аналитическом или цифровом виде.

Команда **Символы ⇒ Переменные ⇒ Вычислить** позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения. Чтобы решить уравнение символьно, необходимо:

- Напечатать выражение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш «Ctrl»+«=»).

- Выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью.
- Выбрать пункт меню **Символы ⇒ Переменные ⇒ Вычислить**.

Нет необходимости приравнивать выражение нулю. Если Mathcad не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- Напечатать ключевое слово *Given*.
- Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется **[Ctrl]=**.
- Напечатать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.
- Нажать **[Ctrl].** (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). Mathcad отобразит символьный знак равенства →.
- Щелкнуть мышью на функции *Find*.

Задания к лабораторной работе

Упражнение 1. Построить график функции $f(x)$ (см. таблицу) и приблизительно определить один из корней уравнения.

Решить уравнение $f(x)= 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) с помощью встроенной функции *root*;
2) методом касательных, вручную производя вычисления на каждом шаге
3) методом Ньютона, используя функцию *until*. Определить число итераций с помощью функции *last*.

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$F(x)$
1	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0, 1]$	**9**	$0.25x^3 + x - 2$ $x \in [0, 2]$
2	$x - \dfrac{1}{3 + \sin(3.6x)}$ $x \in [0, 1]$	**10**	$\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - x$ $x \in [2, 3]$
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3}$ $x \in [0, 1]$	**11**	$3x - 4\ln x - 5$ $x \in [2, 4]$

4	$\sqrt{1-0.4x^2} - \arcsin\ x$ $x \in [0, 1]$	**12**	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0, 1]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1, 3]$	**13**	$\sqrt{1-x} - \mathrm{tg}\ x$ $x \in [0, 1]$
6	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - \cos x} - 1$ $x \in [0, 1]$	**14**	$1 - x + \sin\ x - \ln(1+x)$ $x \in [0, 2]$
7	$\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$ $x \in [1, 2]$	**15**	$x^5 - x$ - 0,2 $x \in [1, 2]$
8	$0.1x^2 - x\ln\ x$ $x \in [1, 2]$		

Упражнение 2. Для полинома $g(x)$ (См. таблицу) выполнить следующие действия:

1) с помощью команды **Символы ⇒ Коэффициенты полинома** создать вектор *V*, содержащий коэффициенты полинома;
2) решить уравнение $g(x) = 0$ с помощью функции *polyroots*;
3) решить уравнение символьно(**Символы ⇒ Переменные ⇒ Вычислить**);
4) разложить на множители, используя **Символы ⇒ Фактор.**

№ вари-анта	$g(x)$	№ вари-анта	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Поршнев С. В., Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.:БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.: ил.

2 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы-М.:Наука,1989

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34