



Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Математика

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе
«Кривые второго порядка»

для всех направлений бакалавриата

Уфа 2024

ООУДК 51
ББК 22.1
М 33

Рекомендовано к изданию заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «21 марта» 2024 года)

Составитель: ассистент Галиуллина Э.В.

Ответственный за выпуск: и.о. зав. кафедрой математики
канд.психол.наук. Дик Е.Н.

1 Кривые второго порядка

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения – действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A , B или C отлично от нуля. Такие линии называются линиями (кривыми) второго порядка.

Общее уравнение второго порядка (1) определяет на плоскости (если не считать случаев вырождения и распада) следующие кривые: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

Теорема 1.

Для любой линии второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет один из следующих видов:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, эллипс;
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, мнимый эллипс;
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, пара мнимых пересекающихся прямых;
- 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, гипербола;
- 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, пара пересекающихся прямых;
- 6) $y^2 = 2px$, параболa;
- 7) $y^2 - a^2 = 0$, пара параллельных прямых;
- 8) $y^2 + a^2 = 0$, пара мнимых параллельных прямых;
- 9) $y^2 = 0$, пара совпадающих прямых;
- 10) $x^2 + y^2 = R^2$, окружность.

Уравнения 1) – 10) называются каноническими уравнениями линий второго порядка.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1) при $B=0$.

1. Окружность

Окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от точки M_0 на расстояние R .

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

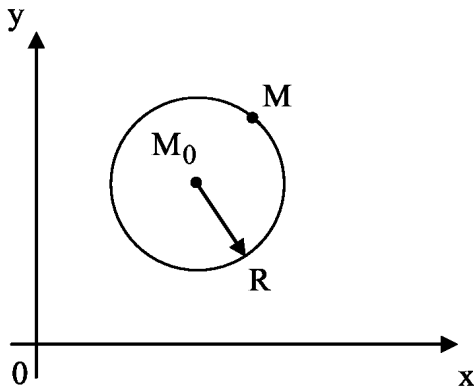


Рис.1. Окружность с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$

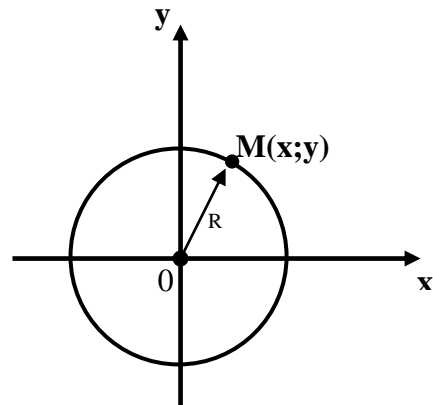


Рис.2. Окружность с центром в начале координат

Пример 1.1.

Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 29 = 0$.

Решение.

Выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x) + (y^2 + 8y) - 29 &= 0; \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) - 4 - 16 - 29 &= 0; & (x - 2)^2 + (y + 4)^2 &= 49. \end{aligned}$$

Центр окружности находится в точке $(2; -4)$, радиус равен 7.

Пример 1.2.

Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок, отсекаемый координатными осями от прямой $2x - 3y + 24 = 0$.

Решение.

Преобразуем общее уравнение прямой:

$$2x - 3y + 24 = 0; \quad 2x - 3y = -24; \quad \frac{2x}{-24} + \frac{-3y}{-24} = 1; \quad \frac{x}{-12} + \frac{y}{8} = 1.$$

Получили уравнение прямой в отрезках. Эта прямая пересекает координатные оси в точках $A(-12; 0)$ и $B(0; 8)$.

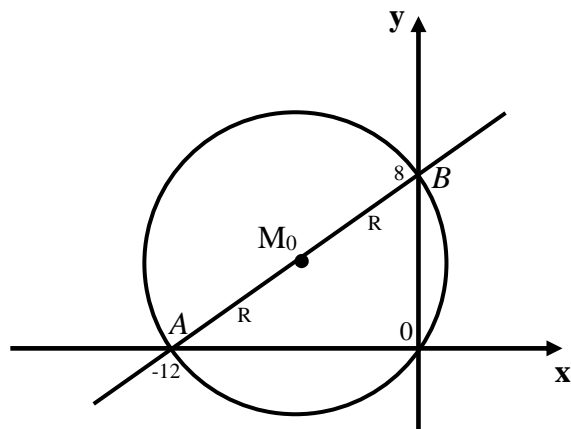


Рис.3

Центром окружности является точка $M_0(x_0; y_0)$ - середина отрезка АВ. Координаты этой точки найдем по формулам координат середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 ; \quad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4 .$$

Значит, $M_0(-6; 4)$.

Радиус найдем как расстояние между точками M_0 и B :

$$R = \sqrt{(0 - (-6))^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} .$$

Запишем уравнение окружности:

$$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 52 .$$

Преобразовав это уравнение, мы получим общее уравнение окружности:

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = 52 ; \quad x^2 + y^2 + 12x - 8y = 0 .$$

Ответ: $x^2 + y^2 + 12x - 8y = 0$.

Задачи для самостоятельного решения:

Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1. Центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 3$.
2. Центр окружности совпадает с точкой $C(2; 3)$ и ее радиус $R = 7$.
3. Окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$.
4. Точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности.
5. Центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности.
6. Центр окружности совпадает с точкой $C(1; -1)$ и прямая $5x - 12y + 9 = 0$ является касательной к окружности.
7. Окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.
8. Окружность проходит через три точки $A(-3; 0)$, $B(0; -1)$, $C(1; 2)$.
9. Окружность касается прямых $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$, причем одной из них - в точке $A(2; 1)$.
10. Окружность касается прямых $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$, центр лежит на прямой $2x + y = 0$.

2 Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

где a - большая полуось, b - малая полуось эллипса, c - фокусное расстояние. Из определения следует, что $a > c$. Числа a, b, c связаны соотношением

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (5)$$

Отсюда следует, что $a > b$.

Координаты фокусов $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Фокусы эллипса лежат на оси Ox .

Точки A, B, C, D называются вершинами эллипса, точка O – центром эллипса.

Из уравнения (4) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т.е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ или $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Если $a = b$, то уравнение (4) определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$, рассматриваемую как частный случай эллипса.

Важными характеристиками эллипса являются:

- эксцентриситет показывает степень вытянутости, обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (6)$$

если $\varepsilon \sim 0$, то эллипс почти круглый, т.е. близок к окружности,

если $\varepsilon = 0$, т.е. $c = 0$, $a = b$, то эллипс превращается в окружность,

если $\varepsilon \sim 1$, то эллипс сплюснутый, близок к отрезку $[-a; a]$.

- директрисы эллипса – прямые с уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

(7)

- фокальные радиусы – расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M(x; y)$ эллипса до его фокусов (r_1 до левого, r_2 до правого) определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x \quad (r_1 + r_2 = 2a). \quad (8)$$

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy , то $b > a$, большая ось $2b$ лежит на оси Oy , малая ось $2a$ - на оси Ox , $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, уравнения директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$. Координаты фокусов $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$.

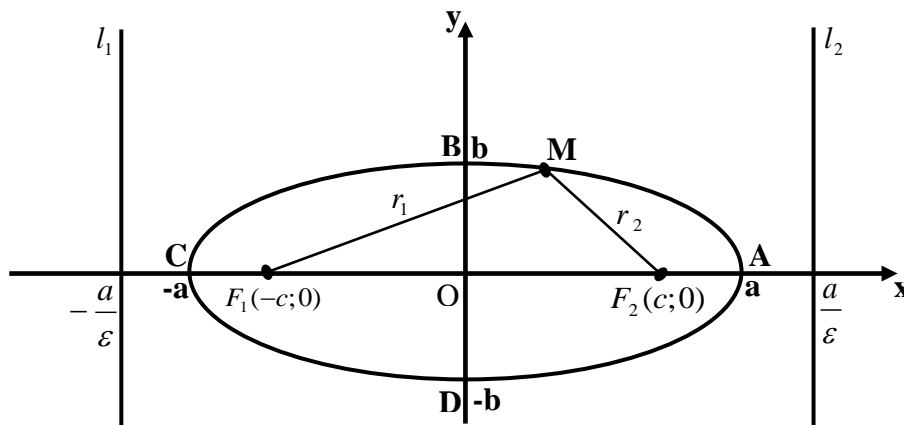


Рис.4. Эллипс и его директрисы

Пример 2.1.

Составить уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей, проходящего через точку $A(3; -\frac{16}{5})$ и имеющего эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

Решение.

Из формул (4)-(6) имеем систему уравнений относительно параметров a , b :

$$\begin{cases} \frac{3^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{16}{5}\right)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0,6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{256}{25b^2} = 1, \\ \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,36. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим:

$$1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,36, \text{ т.е. } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,64, \text{ т.е. } b^2 = 0,64a^2.$$

Подставляя это в первое уравнение, получим $\frac{9}{a^2} + \frac{256}{25 \cdot 0,64a^2} = 1$, $\frac{25}{a^2} = 1$, тогда $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, $c^2 = 9$.

$$\text{Уравнение эллипса } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Пример 2.2.

Составить уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $A(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ и $B(6; 0)$. Найти эксцентриситет эллипса, расстояния от точки A до фокусов и уравнения его директрис.

Решение.

Параметры a и b найдем, подставив в уравнение (4) координаты точек A и B . Это приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{4 \cdot 3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{b^2} = \frac{2}{3}, \\ a^2 = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9, \\ a^2 = 36. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом $b > 0$, $a > 0$ находим: $b = 3$, $a = 6$.

Каноническое уравнение эллипса найдено: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Расстояния от точки $A(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ до фокусов:

$$r_1 = a + \varepsilon x = 6 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 9; \quad r_2 = a - \varepsilon x = 6 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3.$$

Уравнения директрис: $\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -4\sqrt{3};$

левая директриса: $x = -4\sqrt{3}$; правая директриса: $x = 4\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.
2. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(1; 1)$, имеющего эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.
3. На прямой $x + 5 = 0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.
4. Составить уравнение геометрического места точек, расстояния которых от точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y - 5 = 0$.

3 Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости,

называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B_1 \quad (9)$$

где a - действительная полуось, b - мнимая полуось гиперболы, c - фокусное расстояние. Числа a, b, c связаны соотношением

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (10)$$

Координаты фокусов $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.

Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, точка O – центром гиперболы.

Важными характеристиками гиперболы являются:

- эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (1 < \varepsilon < +\infty) \quad (11)$$

если $\varepsilon \sim 1$, то ветви гиперболы широкие, почти вертикальные,

если $\varepsilon \sim \infty$, то ветви гиперболы узкие, гипербола приближается к оси Ox .

- асимптоты

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (12)$$

Прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$, центр которого совпадает с точкой O , а стороны равны и параллельны осям гиперболы называется основным прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника лежат на асимптотах.

- директрисы гиперболы – прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}. \quad (13)$$

- фокальные радиусы определяются формулами:

для точек правой ветви гиперболы:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x; \quad (14)$$

для точек левой ветви:

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \quad (15)$$

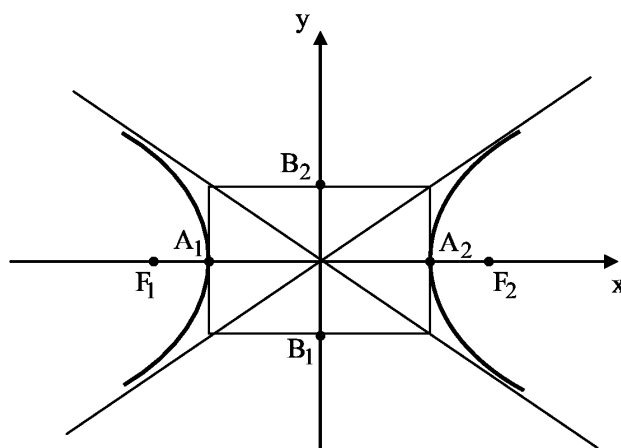


Рис. 5. Гипербола, ее асимптоты и основной прямоугольник

Если $a = b$, то гипербола (9) называется равносторонней (равнобочной). Ее уравнение принимает вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (16)$$

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy , то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (17)$$

эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm \frac{b}{a}x$, уравнения директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$. Гипербола (17) называется сопряженной гиперболе (9).

Пример 3.1.

Дано уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти:

- 1) длины его полуосей;
- 2) координаты фокусов;
- 3) эксцентриситет гиперболы;
- 4) уравнения асимптот и директрис;
- 5) фокальные радиусы точки $M(5; \frac{9}{4})$;
- 6) на гиперболе найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 3 раза больше, чем от правого.

Решение.

Разделив обе части уравнения $9x^2 - 16y^2 = 144$ на 144, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Отсюда:

- 1) $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, т.е. действительная полуось $a = 4$, мнимая полуось $b = 3$.

2) Используя соотношение (10), находим $c^2 = 16 + 9$, т.е. $c = 5$. Запишем фокусы гиперболы: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

3) По формуле (11) находим эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

4) Уравнения асимптот и директрис найдем по формулам (12) и (13): $y = \pm \frac{3}{4}x$ и $x = \pm \frac{16}{5}$.

5) точка $M(5; \frac{9}{4})$ лежит на правой ветви гиперболы ($x = 5 > 0$), используем формулы (14): $r_1 = 4 + \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{41}{4}$, $r_2 = -4 + \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{9}{4}$.

6) Найдем на гиперболе точку K такую, что $KF_1 = 3 \cdot KF_2$. Используя формулы (14) и $r_1 = 3 \cdot r_2$, получим:

$$|a + \varepsilon x| = 3 \cdot |a - \varepsilon x|;$$

$$\left|4 + \frac{5}{4}x\right| = 3 \cdot \left|4 - \frac{5}{4}x\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \frac{5}{4}x = 3 \cdot \left(4 - \frac{5}{4}x\right), \\ 4 + \frac{5}{4}x = -3 \cdot \left(4 - \frac{5}{4}x\right). \end{cases}$$

Находим $x = \frac{8}{5}$ и $x = \frac{32}{5}$.

Поскольку $K(x; y)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, то ординаты соответствующих точек найдем из этого уравнения при найденных значениях x :

$$y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} \text{ и, если } x = \frac{8}{5}, \text{ то } y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 16} = \pm \frac{3}{4}\sqrt{\frac{-336}{25}} \text{ (это число не}$$

существует в нужном нам смысле), а если $x = \frac{32}{5}$, то $y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2 - 16} = \pm \frac{3}{5}\sqrt{39}$.

Итак, получили две точки на гиперболе, удовлетворяющие данным условиям: $K_1(\frac{32}{5}; \frac{3}{5}\sqrt{39})$ и $K_2(\frac{32}{5}; -\frac{3}{5}\sqrt{39})$.

Пример 3.2.

Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, которая проходит через точку $M(4; \sqrt{15})$ и ее асимптоты имеют уравнения $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Решение.

Подставим координаты точки M в уравнение (9): $\frac{16}{a^2} - \frac{15}{b^2} = 1$.

Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{b}{a}x$, поэтому $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, тогда $b = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{15}{b^2} = 1, \\ b = \frac{\sqrt{5}}{2}a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{15 \cdot 4}{5a^2} = 1, \\ b^2 = \frac{5}{4}a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} = 1, \\ b^2 = \frac{5}{4}a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 5. \end{cases}$$

Запишем уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.
2. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.
3. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
4. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) полуоси a и b ; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.
5. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) полуоси a и b ; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.
6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; 3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; 4) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.
Изобразить эти линии на чертеже.
7. Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гиперболе $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1 .

4 Парабола

Параболой называется множество всех точек на плоскости, каждая из которых одинаково удалена от заданной точки этой же плоскости, называемой фокусом, и от заданной прямой, называемой директрисой.

Число $p > 0$ называется параметром параболы и равно расстоянию от фокуса F до директрисы l .

Если фокус параболы находится в точке $F(\frac{p}{2}; 0)$, а директриса N имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, то такая парабола имеет каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px, \quad (18)$$

Точка $O(0; 0)$ называется вершиной параболы.

Ось Ox - ось симметрии параболы.

Расстояние от точки $M(x; y)$ параболы до фокуса F (фокальный радиус) вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \quad (19)$$

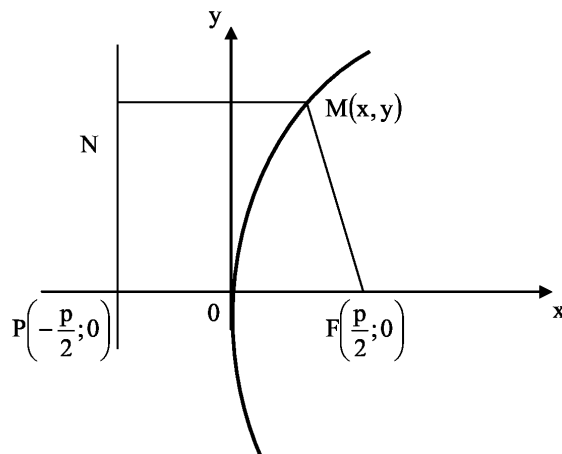


Рис.6

Парабола, симметричная относительно оси Oy , с вершиной в начале координат, имеет уравнение

$$x^2 = 2py, \quad (20)$$

Фокус параболы находится в точке $F(0; \frac{p}{2})$.

Уравнение директрисы этой параболы

$$y = -\frac{p}{2}. \quad (21)$$

Фокальный радиус точки M параболы

$$r = y + \frac{p}{2}.$$

(22)

Графики парабол $y^2 = -2px$ и $x^2 = -2py$ строятся в полуплоскостях, соответствующих отрицательным значениям переменных x и y .

Пример 4.1.

Найти уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox , фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 2y - 5 = 0$ с осью Ox .

Решение.

Найдем точку пересечения прямой $5x - 2y - 10 = 0$ с осью Ox .

$$y = 0 \Rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Т.к. расстояние от фокуса параболы до начала координат равно $\frac{p}{2}$, то

$$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4.$$

Используя формулу (18), запишем уравнение параболы: $y^2 = 8x$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол: 1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.
2. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7;0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.
3. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы параболы равно 4.
4. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OX и отсекающей на прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.
5. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.
6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $y = +2\sqrt{x}$; 2) $y = +\sqrt{-x}$; 3) $y = -3\sqrt{-2x}$; 4) $y = -2\sqrt{x}$; 5) $x = +\sqrt{5y}$;
6) $x = -5\sqrt{-y}$; 7) $x = -\sqrt{3y}$; 8) $x = +4\sqrt{-y}$. Изобразить эти линии на чертеже.

5 Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными осям координат. Приведение общего уравнения кривой второго порядка, не содержащего члена с произведением текущих координат, к каноническому виду

Даны две прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$ со свойствами: оси Ox и $O'x'$, а также Oy и $O'y'$ параллельны и одинаково направлены, а начало O' системы $O'x'y'$ имеет известные координаты $O' = O'(a;b)$ относительно системы Oxy .

Тогда координаты (x, y) и (x', y') произвольной точки M плоскости связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \quad (23)$$

Формулы (18) называются формулами преобразования координат при параллельном переносе осей координат.

Уравнение эллипса с полуосями a и b , центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (24)$$

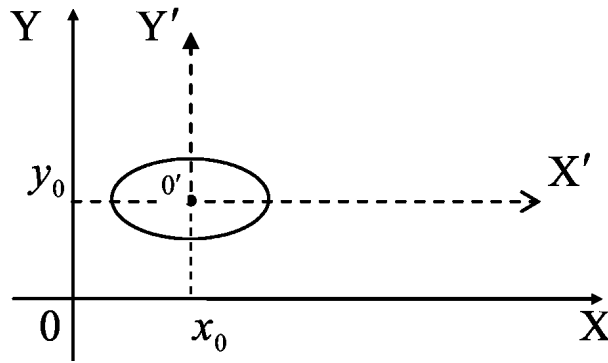


Рис.7

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (25)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра гиперболы.

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси абсцисс, имеет вид:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0), \quad (26)$$

$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0), \quad (27)$$

Если ось параболы параллельна оси ординат, то

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0), \quad (28)$$

$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0), \quad (29)$$

Пример 5.1.

Уравнение линии $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$ привести к каноническому виду и построить ее.

Решение.

Выделим в правой части уравнения полные квадраты:

$$\begin{aligned} (4x^2 - 8x) - (9y^2 + 18y) - 41 &= 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) - 41 = 0 \Leftrightarrow \\ 4(x^2 - 2x + 1 - 1) - 9(y^2 + 2y + 1 - 1) - 41 &= 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 - 4 - 9(y+1)^2 + 9 - 41 = 0 \Leftrightarrow \\ 4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 36 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1. \end{aligned}$$

Уравнение определяет гиперболу с центром в точке $O'(1; -1)$, действительной полуосью $a = 3$ и мнимой полуосью $b = 2$. Прямые $x-1=0$ и $y+1=0$ являются осями симметрии гиперболы, параллельными координатным осям Oy и Ox соответственно.

Построим основной прямоугольник гиперболы со сторонами $2a = 6$ и $2b = 4$ с центром в точке $O'(1; -1)$ (рис. 8). Диагонали этого прямоугольника являются асимптотами гиперболы.

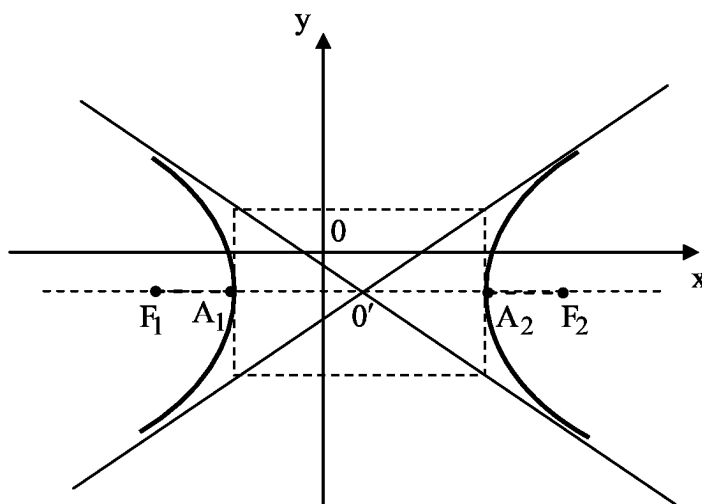


Рис.8

Найдем уравнения асимптот. Так как асимптоты проходят через точку $O'(1;-1)$ и имеют угловые коэффициенты $k_{1,2} = \pm \frac{b}{a}$ (см. уравнение (12)), то уравнения прямых запишутся следующим образом:

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0); \quad y - (-1) = \pm \frac{2}{3}(x - 1); \quad 3(y + 1) = \pm 2(x - 1).$$

Получим уравнения асимптот: $2x - 3y - 4 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$.

Найдем вершины гиперболы. В системе координат $O'x'y'$: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, т.е. $x'_1 = -a$, $y'_1 = 0$; $x'_2 = a$, $y'_2 = 0$; $a = 3$. Из формул (23) получим:

$$\text{Точка } A_1: \begin{cases} -3 = x_1 - 1, \\ 0 = y_1 + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -1. \end{cases} \quad \text{Точка } A_2: \begin{cases} 3 = x_2 - 1, \\ 0 = y_2 + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Итак, в системе координат Oxy вершины гиперболы выглядят следующим образом: $A_1(-2;-1)$, $A_2(4;-1)$.

Найдем фокусы гиперболы. Из формулы (10) имеем: $3^2 + 2^2 = c^2$; $c = \sqrt{13}$. Координаты фокусов в системе координат $O'x'y'$: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

$$\text{Точка } F_1: \begin{cases} -\sqrt{13} = x_1 - 1, \\ 0 = y_1 + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{13}, \\ y_1 = -1. \end{cases} \quad \text{Точка } F_2: \begin{cases} \sqrt{13} = x_1 - 1, \\ 0 = y_1 + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{13}, \\ y_1 = -1. \end{cases}$$

В системе координат Oxy координаты фокусов: $F_1(1 - \sqrt{13}; -1)$, $F_2(1 + \sqrt{13}; -1)$

По формуле (11) вычислим эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

Каждое из следующих уравнений путем параллельного переноса привести к каноническому виду; определить тип; изобразить на чертеже расположение геометрических образов относительно старых и новых координат. Определить основные характеристики.

1. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

9. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 2. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$ | 10. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ |
| 3. $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$ | 11. $x^2 + y^2 + y = 0$ |
| 4. $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$ | 12. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ |
| 5. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ | 13. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$ |
| 6. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ | 14. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$ |
| 7. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ | 15. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$ |
| 8. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ | 16. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ |

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д. Т.

Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный . - 9-е изд. - М.: Айрис-Пресс, 2008. – 280с.- Ч. 1.

2. Лунгу К.Н.

Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие / К.Н.Лунгу и др.- 7-е изд.- М.: Айрис Пресс, 2008.- 574 с.

3. Лунгу К.Н.

Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н.Лунгу, Е.В.Макаров - 2-е изд.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 216 с.- Ч. 1.

4. Садовничий Ю.В.

Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами: учеб. издание / Ю.В. Садовничий, В.В.Федорчук - М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 350 с.

5. Клетеник Д.В.

Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д.В. Клетеник - 14-е изд.-М.: Наука.- 1986. - 224 с.

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.