Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Математика

Методические указания к лабораторным работам

«Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения.

Функции нескольких переменных»

Для всех направлений бакалавриата

Уфа 2024

УДК 51

ББК 22.1

М 33

Рекомендовано к изданию заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «21 марта» 2024 года)

Составители: доцент Саитова Р.З.,

доцент Маннанов М.М.

Ответственный за выпуск: и.о. зав. кафедрой математики

канд.психол.наук. Дик Е.Н.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Целью настоящих методических указаний является помощь студентам – заочникам в выполнении контрольной работы №2.

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы рекомендуемой литературы и воспользоваться решениями типовых примеров, содержащихся в настоящих методических указаниях.

Номер варианта по каждому заданию студент выбирает по формуле $N_{\mathrm{i}} = i\ b + c$,

где N_{i} - номер варианта,

i – номер задания,

b – предпоследняя цифра шифра студента,

c – последняя цифра шифра.

Пример

Пусть шифр студента 1235, тогда:

номер варианта первого задания: N_1=1•3+5=8;

номер варианта второго задания: N_2=2•3+5=11;

номер варианта третьего задания: N_3=3•3+5=14;

номер задания четвертого задания: N_4=4•3+5=17.

Таким образом, студент, имеющий шифр 1235 должен решать вариант №8 в первом задании, № 11 - во втором, № 14 - в третьем, № 17 – в четвертом.

Если итоговое число по формуле получится больше 30, то для определения варианта от полученного числа отнимают 30.

Пример

Пусть шифр студента 1298.

Номер варианта третьего задания: N_3=3•9+8=35.

Разность 35 - 30 = 5. Таким образом, в третьем задании студент решает задачу варианта № 5.

Основная цель инженера – исследователя, изучающего какой-либо физический или технический процесс, заключается в выявлении его закономерностей, в получении аналитического выражения функциональной зависимости между переменными параметрами этого процесса.

Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f\ (x)$, то множество функции $F(x) + C$, где C произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

При этом функция f(x) называется подынтегральной функцией, f(x)dx- подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования.

Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, то есть, если
$F'(x) = f(x),$ то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

Свойство 2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Свойство 3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и

произвольной константы:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойство 4. Неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Свойство 5. Неопределённый интеграл от разности функций равен соответствующей разности

неопределенных интегралов

$$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Свойство 6. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\ , \quad k \neq 0.$$

Свойство 7.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Определение. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии , что длина наибольшего частичного отрезка Δ_{xi} стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{max\Delta_{xi}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_{xi}$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)dx$- подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования, отрезок $[a;b]$- областью (отрезком) интегрирования.

Свойства определённого интеграла

Свойство 1. Производная от определённого интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела, то есть

$$\left(\int_a^t f(x)dx\right)' = f(t)$$

Свойство 2. Определённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Свойство 4. Если на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Свойство 5. Если m и M - наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке $[a,b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Свойство 6. Если поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования, то определённый интеграл изменит знак

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Свойство 7. Для любых трёх чисел $a,\ b,\ c$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если только все три интегралы существуют.

Свойство 8. (Теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдётся такая точка c, что справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Методы решения типовых примеров.

1. Найти интеграл $\int (\mathbf{ln\,x})^8 \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}}$

Решение. Применим подстановку $\mathrm{t} = \ln \mathrm{x}$. Тогда $dt = \frac{dx}{x}$ и

$$\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x} = \int t^8\, dt = \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{9}(\ln x)^9 + C.$$

2. Найти интеграл $\int \boldsymbol{e^{2x^3+3}\, x^2 dx}$

Решение. Применим подстановку $t = 2x^3 + 3$. Тогда $dt = 6x^2dx$; $\frac{1}{6}dt = x^2dx$, откуда

$$\int e^{2x^3+3}x^2\, dx = \int e^t \frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}e^t + C = \frac{1}{6}e^{2x^3+3} + C$$

3. Найти интеграл $\int \boldsymbol{\frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx}$

Решение. Преобразуем знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла следующим образом:

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 2^2.$$

Тогда после подстановки $\boldsymbol{t = x - 2}$ получаем

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \frac{3x-1}{(x-2)^2+2^2}dx = \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+2^2}dt = \int \frac{3t+5}{t^2+2^2}dt$$
$$= \int \frac{3t}{t^2+2^2}dt + \int \frac{5}{t^2+2^2}dt = \frac{3}{2}ln(t^2+4) + \frac{5}{2}arctg\frac{t}{2} + C$$
$$= \frac{3}{2}ln[(x-2)^2+4] + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C$$
$$= \frac{3}{2}ln[x^2-4x+8] + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C.$$

При этом при вычислении интеграла $\int \frac{3t}{t^2+4}dt$ мы воспользовались заменой переменной $z = t^2 + 4$. Тогда $dz = 2t\,dt$, откуда

$$\int \frac{3t}{t^2+4}dt = \frac{3}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2}\ln|z| + C = \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + C.$$

4. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^3-1}}\boldsymbol{dx}$

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{r|ll} x^2 & 0 = A + B; & A = -B \\ x^1 & 1 = A - B + C; & \\ x^\circ & 0 = A - C; & A = C \end{array}$$

Из второго уравнения получаем $1 = A + A + A = 3A;\quad A = \frac{1}{3}$

Отсюда $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$

Следовательно,

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}dx + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx$$

Воспользуемся равенством

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

После замены переменной $t = x + \frac{1}{2}$, $dt = dx$, $x = t - \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx =$

$\frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{-t+\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = -\frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} +$
$C == -\frac{1}{6}\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = -\frac{1}{6}\ln[x^2+x+1] + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln[x^2+x+1] + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

5. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{x\,dx}}{\boldsymbol{(x-1)(x^2+1)}}$

Решение. Из равенства

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

получаем $x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B; \quad A = -B \\ x^1 & 1 = -B + C; \\ x^\circ & 0 = A - C; \quad\quad A = C \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4ln}(x^2+1)$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

6. Вычислить площадь, ограниченную параболами

$$y = 2x^2 - x - 2;$$

$$y = -x^2 + x - 1\,.$$

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые их части:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1$$

Отсюда $3x^2 - 2x - 1 = 0,\ D = 4 + 4\cdot 3 = 16$, $x_1 = \frac{2+4}{6} = 1$, $x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$

Вычисление площади осуществляем по формуле

$\boldsymbol{s = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx}$, где $f_1(x), f_2(x)$ – кривые, ограничивающие фигуру $\left(f_2(x) \geq f_1(x)\right)$.

В нашем случае

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [(-x^2 + x - 1) - (2x^2 - x - 2)]\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [-3x^2 + 2x + 1] dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{34}{27}$$

1. Интегрирование по частям

<u>Пример 1</u>

а) Найти $\boldsymbol{\int x^2 e^{3x}\, dx}$

Решение

Данный интеграл I-го вида.

Положим $= x^2$, $dv = e^{3x} dx$, тогда $du = 2x\, dx$, $v = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$(в качестве v выбрали одну из первообразных функций $\boldsymbol{e^{3x}}$)

Применяя формулу интегрирования по частям $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ (*), получим:

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 2x dx = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx \qquad (**)$$

Для вычисления интеграла $\int x \cdot e^{3x} dx$, снова применили формулу интегрирования по частям (*). Запись краткая, какая и нужна при решении задания .

$$\int x \cdot e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{3x} dx, & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

Подставляя значение этого интеграла в правую часть выражения (**) получим:

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\right) + C = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C$$

b) Найти $\boldsymbol{\int (2x + 8) \cos 7x\, dx}$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Положим $u = 2x + 8$, $dv = \cos 7x$. Тогда $du = 2dx$, $v = \int \cos 7x\, dx = \frac{1}{7}\sin 7x$. Следовательно,

$$\int (2x+8)\cos 7xdx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x\, dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x + \frac{2}{49}\cos 7x + C.$$

Пример 2

а) Найти $\int \boldsymbol{x^5 \cdot \ln x \cdot dx}$

Решение. Данный интеграл II-го вида, по этому положим u = ln x, d v = x^5dx

Тогда $du = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$, а $v = \frac{1}{6}x^6$

Применяя формулу интегрирования по частям (*), получим:

$$\int x^5 \ln x\, dx = \frac{1}{6}x^6 \cdot \ln x - \int \frac{1}{6}x^6 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{6}x^6 \cdot \ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \cdot \ln x - \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6} + C$$
$$= \frac{1}{6}x^6 \cdot \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C$$

b) Найти $\int \boldsymbol{arctg\, 3x\, dx}$.

Решение. Положим $u = arctg\, 3x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{3}{1+9x^2}dx$, $v = x$. Отсюда

$$\int arctg 3x\, dx = x\, arctg\, 3x - 3\int \frac{xdx}{1+9x^2}$$

Применяя в последнем интеграле подстановку $t = 1 + 9x^2$, получаем $dt = 18x\, dx$, следовательно, $3\int \frac{x\, dx}{1+9x^2} = \frac{3}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{18}\ln|t| = \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C$

Отсюда $\int arctg\, 3x\, dx = x\, arctg\, 3x - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$

Пример 3

Найти $\int \boldsymbol{e^x \cdot \cos 2x\, dx}$

Решение. Данный интеграл III-го вида. Положим u = e^x, $dv = \cos 2xdx$, откуда $du = e^x dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

(Заметим, что при решении этого примера можно также применить u = cos 2x, dv = e^xdx)

Тогда, применяя формулу интегрирования по частям (*), получим:

$$\int e^x \cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x \cdot \sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^x dx = \frac{1}{2}e^x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2xdx \qquad (***)$$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int e^x \sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x \cdot dx \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \cdot \cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot e^x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx$$

Следовательно, $\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx$

Подставляя значение этого интеграла в правую часть равенства (***), получим:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx$$

В правой части последнего соотношения стоит искомый интеграл $\int e^x \cos 2x dx$

Перенося его в левую часть, получим:

$$\int e^x \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

или $\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$

Отсюда:

$$\int e^x \cos 2x \, dx = \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x$$

Полученная функция есть одна из первообразных от функции $e^x \cos 2x$.

Чтобы найти все первообразные, остается к правой части прибавить произвольную постоянную С:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x + C$$

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + c$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + c$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + c$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$
12. $\int \dfrac{dx}{a^{2} + x^{2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
13. $\int \dfrac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$
14. $\int \dfrac{dx}{a^{2} - x^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + c \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + c$
17. $\int shx dx = chx + c$
18. $\int chx dx = shx + c$
19. $\int \dfrac{dx}{ch^{2} x} = thx + c$
20. $\int \dfrac{dx}{sh^{2} x} = -cthx + c$

2. Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частные интегралы

Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Если неизвестная функция зависит только от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, а если она зависит от нескольких аргументов и дифференциальное уравнение содержит ее частные производные по этим аргументам, то оно называется **уравнением с частными производными.**

Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т.е. обращающая его в тождество, называется интегралом (решением) данного уравнения.

Интеграл дифференциального уравнения называется общим, если он содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. А функции, получаемые из общего интеграла при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными интегралами этого уравнения.

Отыскание частного интеграла дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям называется задачей Коши.

2.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

а) *Уравнение с разделенными переменными.*
Общий вид: $\boldsymbol{P(x)dx + Q(y)dy = 0}$
Его общий интеграл: $\int \boldsymbol{P(x)dx} + \int \boldsymbol{Q(y)dy = C}.$

б) *Уравнение с разделяющимися переменными.*
Его общий вид: $\boldsymbol{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$ или $\boldsymbol{y' = f_1(x)\cdot f_2(y)}$.
Разделяя переменные: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(x)}{N_1(x)}dy = 0$, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

в) *Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.*
Это уравнение вида: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x,y),}$ если функция $\boldsymbol{f(x,y)}$ удовлетворяет условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.
В этом случае правую часть $f(x,y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $\boldsymbol{f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$, т.е. уравнение имеет вид $\boldsymbol{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$.
Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$
(или $x = u\,y$), где $u = u(x)$ ($u = u(y)$) - новая неизвестная функция.

<u>Пример 1</u>

Найти общий интеграл данного уравнения:

$$\boldsymbol{\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0.}$$

<u>Решение.</u>

Это однородное уравнение, т.к. $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).}$

Далее вводим новую функцию u, полагая $\boldsymbol{y = ux;}$ при этом $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = u + x\cdot\frac{du}{dx}}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными $\boldsymbol{u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u}}$ или $\boldsymbol{xdu = \frac{1-u^2}{2u}dx.}$

Разделим переменные: $\frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем $-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|-\ln c$ или $x\left(1-u^2\right)=c$. Исключая вспомогательную функцию $u=\frac{y}{x}$, окончательно получим $y^2=x^2-cx.$

г) Линейные уравнения первого порядка

Это уравнения вида: $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- известные функции от x.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y=u\cdot v$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

<u>Пример 2</u>

Решить уравнение: $y'-y\cdot ctgx=\sin x.$

<u>Решение.</u>

Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y=u\cdot v;$ тогда $y'=u'v+uv'$ и данное уравнение преобразуется к виду:

$$u'v+uv'-uv\cdot ctg\,x=\sin x \quad \text{или} \quad u'v+u(v'-v\cdot ctg\,x)=sin\,x$$

Так как одну из вспомогательных функций v или u можно взять произвольно, то выберем в качестве v какой – либо частный интеграл уравнения $v'-v\cdot ctgx=0$ (1)

Тогда для отыскания u получим уравнение: $u'v=\sin x$ (2)

Решая первое уравнение, найдем v. Разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v}=ctgdx;\;\; \ln|v|=\ln|\sin x|,\;\; v=\sin x.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения: $u'\sin x=\sin x;\; du=dx;\; u=x+c.$

Знная u и v, находим искомую функцию $y=u\cdot v=(x+c)\sin x.$

Уравнение Бернулли

Его общий вид: $y'+P(x)y=y^n\cdot Q(x)$. Данное уравнение отличается от линейного тем, что в правую часть входит множителем некоторая степень функции y. Решается оно так же, как и линейное. Посредством подстановки $y=u\cdot v$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

2.2 Дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений второго порядка, которые легко приводятся к уравнениям первого порядка.

I тип: $\qquad y'' = f(x) \qquad (1)$

Правая часть уравнения не содержит функции у и производной y'. Известно, что $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$.

Следовательно, данное уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \quad \text{или} \quad dy' = f(x)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя еще один раз, получим общее решение уравнения (1):

$$y = \int \left[\int f(x)dx\right] dx + C_1x + C_2.$$

Пример: Найти частное решение уравнения $y'' = 6x + \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$.

Решение. Так как $y'' = \frac{dy'}{dx}$, то данное уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx} = 6x + \sin x \quad \text{или} \quad dy' = (6x + \sin x)dx.$$

Интегрируя, получим:

$$y' = 3x^2 - \cos x + C_1. \qquad (*)$$

Тогда $dy = (3x^2 - \cos x + C_1)dx$ и $y = x^3 - \sin x + C_1x + C_2$ - общее решение заданного уравнения. Используем начальные условия. Подставив в общее решение $x = 0$ и $y = 2$, получим $C_2 = 2$. Подставив в (*) $x = 0$ и $y' = 3$, будем иметь $3 = -1 + C_1$, откуда $C_1 = 4$.

Следовательно, $y = x^3 - \sin x + 4x + 2$ – искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Геометрически найденное частное решение выражает собой интегральную кривую, которая проходит через точку $M_0(0,2)$. Кроме того, касательная , проведенная к этой кривой в точке M_0, образует с положительным направлением оси O x угол, тангенс которого равен 3.

II тип: $\qquad y'' = f(x,\ y'). \qquad (2)$

Правая часть уравнения не содержит явным образом функции у. Чтобы решить уравнение (2) положим $y' = p$, где р- некоторая функция аргумента х. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (2) станет уравнением первого порядка относительно переменных x и p:

$$p' = f(x\ ,p).$$

Если общее решение последнего уравнения есть $p = \phi(x, C_1)$, то повторно интегрируя. получим:

$$y = \int \phi\ (x, C_1)dx + c_2 \text{ −общее решение заданного уравнения (2).}$$

Пример: Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'}{1+x}$.

Решение. Правая часть заданного уравнения не содержит явным образом функцию у. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Имеем:

$$p' = \frac{p}{1+x}\ ; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{1+x}\ ; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+x}\ .$$

Интегрируя последнее уравнение, получим: $\ln p = \ln(1+x) + \ln C_1$ или $p = C_1(1+x)$. Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то $dy = C_1(1+x)dx$.

Интегрируя еще раз, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

III тип: $\quad y'' = f(y, y').$ (3)

Правая часть уравнения не содержит явным образом аргумента x. Чтобы решить (3), положим $y' = p$ и будем считать p некоторой функцией от y. Выразим y'' через производную от p по y. Применяя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Итак, $\quad y'' = p\frac{dp}{dy}\ .$ (4)

Подставив в уравнение (3) вместо y'' произведение $p\frac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменных p и y :

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p). \quad (5)$$

Если $p = \phi\ (y, C_1)$ есть общее решение (5), то получаем $dy = \phi(y, C_1)dx$ —уравнение с разделяющимися переменными относительно переменных x и y. Тогда $\frac{dy}{\phi(y,C_1)} = dx$ и $\int \frac{dx}{\phi(y,C_1)} = x + C_2$ есть общий интеграл заданного уравнения (3).

Пример: Найти частное решение уравнения $(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Решение. Данное уравнение не содержит явным образом аргумент x . Пусть $y' = p$, где p —некоторая функция от y. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и заданное уравнение примет вид:

$$(1-y)p\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0 \ \text{ или } \ p\left[(1-y)\frac{dp}{dy} + 2\right] = 0.$$

Приравняв к нулю первый сомножитель, получаем $p = 0$ или $\frac{dy}{dx} = 0$, откуда $y = C$. Это решение не удовлетворяет условиям задачи, так как по условию угловой коэффициент касательной, проведенной к искомой кривой в точке O (0,0), равен 2. Приравняв нулю второй сомножитель и разделив переменные, получаем

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $p = C_1(y-1)^2$ $\quad (*)$.

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то $dy = C_1(y-1)^2dx$ или $\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1dx$.

Интегрируя это уравнения, получаем: $-\frac{1}{y-1} = C_1x + C_2$ $(**)$ —общий интеграл уравнения. Используем начальные условия. Так как y(0) = 0, то из (**) получаем $C_2 = 1$, по условию $y'(0) = 2$; следовательно, из (*) получаем $C_2 = 2$.
Таким образом, имеем: $-\frac{y}{y-1} = 2x + 1$ или $y = \frac{2x}{2x+1}$ – искомое частное решение.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид такого уравнения**:** $y'' + py' + qy = 0,$
где p и q -действительные числа. Корни его характеристического уравнения $\boldsymbol{k^2 + pk + q = 0}$ могут быть:
1) действительными и различными: $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$
2) действительными и равными: $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k}$
3) комплексными: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$
Им соответствуют следующие общие решения уравнения:
1) $\boldsymbol{y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}}$;
2) $\boldsymbol{y = c_1e^{kx} + c_2x \cdot e^{kx};}$
3) $\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}$

Пример 3

Найти частное решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям:
а) $\boldsymbol{y'' - 6y' + 8y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2;}$
б) $\boldsymbol{y'' - 8y' + 16y = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 5;}$
в) $\boldsymbol{y'' - 4y' + 13y = 0; \quad y(\pi) = 0; \quad y'(\pi) = 1.}$

Решение:

а) Характеристическое уравнение $\boldsymbol{k^2 - 6k + 8 = 0}$ имеет два различных вещественных корня $\boldsymbol{k_1 = 2; k_2 = 4;}$, поэтому общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде $\boldsymbol{y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}}$, где $\boldsymbol{c_1}$ и $\boldsymbol{c_2}$ произвольные постоянные.
Отсюда $\boldsymbol{y' = 2c_1e^{2x} + 4c_2e^{4x}.}$

Основываясь на начальных условиях, получаем $\begin{cases} \boldsymbol{c_1e^{2\cdot0} + c_2e^{4\cdot0} = 1}, \\ \boldsymbol{2c_1e^{2\cdot0} + 4c_2e^{4\cdot0} = 2}. \end{cases}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c_1 + c_2 = 1}, \\ \boldsymbol{2c_1 + 4c_2 = 2}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} c_1 + c_2 = \boldsymbol{1}, \\ c_1 + 2c_2 = \boldsymbol{1}; \end{cases}$ получаем c_1=1; c_2=0.

Частное решение данного уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, приобретает вид $y = e^{2x}$.

б) Характеристическое уравнение $\boldsymbol{k^2 - 8k + 16 = 0}$ имеет два равных корня $\boldsymbol{k_1 = k_2 = 4,}$ поэтому общее решение соответствующего дифференциального уравнения будет иметь вид $\boldsymbol{y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}.}$ Дифференцируя, получим $\boldsymbol{y' = 4c_1e^{4x} + 4c_2xe^{4x} + c_2e^{4x}}$.

Учитывая начальные условия, получаем систему для определения c_1 и c_2: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ 4c_1 + c_2 = 5. \end{cases}$

Откуда $c_1 = 1; c_2 = 1$, поэтому частное решение имеет вид: $y = e^{4x} + x \cdot e^{4x}$.

в) Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ не имеет действительных корней. Его комплексные корни: $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i,\ \alpha = 2,\ \beta = 3.$

Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{2x} \cdot \cos 3x + c_2 e^{2x} \cdot \sin 3x.$

Дифференцируя, получим:

$y' = 2c_1 e^{2x} \cos 3x - 3c_1 e^{2x} \sin 3x + 2c_2 e^{2x} \sin 3x + 3c_2 e^{2x} \cos 3x.$

Подставляя в выражения для y и y' начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 e^{2\pi} = 0 \\ 2c_1 e^{2\pi} - 3c_2 e^{2\pi} = 1, \end{cases}$$

решая которую, найдем $c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{3} e^{-2\pi}$.

Тогда частное решение данного уравнения будет иметь вид: $y = -\frac{1}{3} e^{-2\pi} e^{2x} \sin 3x.$

Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид такого уравнения: $y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{\gamma x}$ (*)

В правой части: $P_n(x)$ многочлен степени n.

Общее решение уравнения (*) может быть представлено в виде $y = Y + \bar{y}$

где Y - общее решение соответствующего линейного однородного уравнения,

$\bar{y}$ - какое- либо частное решение неоднородного уравнения (*).

Для отыскания $\bar{y}$ пользуются следующим правилом:

1) если число γ не является корнем характеристического уравнения, то $\bar{y} = Q_n(x) \cdot e^{\gamma x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

2) если число γ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то $\bar{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\gamma x}$;

3) если число γ совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, то $\bar{y} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\gamma x}$.

<u>Пример 4</u>

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + 16 = (34x + 13)e^{-x}$.

<u>Решение:</u>

Будем искать общее решение в виде $y = Y + \bar{y}$

Y – общее решение уравнения $y'' + 16y = 0$, характеристическое уравнение которого $k^2 + 16 = 0$, а его корни $k_{1,2} = \pm 4i$ и решение Y имеет вид:

$Y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$

Частное решение $\bar{y}$ будем искать в виде

$\bar{y} = (\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{e^{-x}}, \bar{y}' = \boldsymbol{Ae^{-x}} - (\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{e^{-x}}, \bar{y}'' = -\boldsymbol{Ae^{-x}} - \boldsymbol{Ae^{-x}} + (\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{e^{-x}}$ или $\bar{y}'' = -2Ae^{-x} + (Ax+B)\cdot e^{-x}$.

Подставим $\overline{y''}$ и $\bar{y}$ в исходное уравнение, получим:

$\boldsymbol{-2Ae^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-x}16\left(Ax + B\right)e^{-x} = \left(34x + 13\right)e^{-x}}$ или

$\boldsymbol{-2A + Ax + B + 16Ax + 16B = 34x + 13.}$

Составим систему для нахождения A и B **:** $\begin{cases} \boldsymbol{17A = 34}, \\ \boldsymbol{-2A + 17B = 13}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A = 2}; \\ \boldsymbol{B = 1}. \end{cases}$

Тогда частное решение имеет вид: $\bar{y} = (\boldsymbol{-2x + 1})\boldsymbol{e^{-x}}$.

Общее решение данного уравнения будет:

$\mathbf{y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}.}$

3. Функции нескольких переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется функцией двух переменных, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x; y)$.

Частной производной функции нескольких переменных называется производная функции по одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных переменных. Обозначения частных производных: $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$; z'_x; z'_y**.**

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют частными производными первого прядка. Их можно рассматривать как функции от $(x; y) \in D$. Эти функции также могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy}.$$

Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными частными производными.

Теорема. Если частные производные непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x; y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пример 1. Найти производные первого порядка и смешанную производную второго порядка функции $z = x^3 - 3x^2y^3 - \sin xy$.

Решение. При нахождении частной производной по x полагаем y постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 - 3x^2y^3 - \sin xy)'_x = 3x^2 - 6xy^3 - \cos xy \cdot (xy)'_x = 3x^2 - 6xy^3 - y \cdot \cos xy.$$

При нахождении частной производной по y полагаем x постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^3-3x^2y^3-\sin xy)'_y=-9x^2y^2-\cos xy\cdot(xy)'_y=-9x^2y^2-x\cdot\cos xy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(3x^2-6xy^3-y\cdot\cos xy)'_y=-18xy^2-\cos(xy)+x\cdot y\cdot\sin(xy).$$

3.1 Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой области D и точка $(x_0;y_0)\in D$.
Точка $(x_0;y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z=f(x;y)$, если существует такая
δ-окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y)<f(x_0;y_0)$ ($f(x;y)>f(x_0;y_0)$).
Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называются ее экстремумами.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}=0.\end{cases}$$

Точка, в которой частные производные первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения
$A=\dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}$, $B=\dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}$, $C=\dfrac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}$.

Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$.

Тогда:

1.Если $\Delta>0$, то функция $f(x;y)$ имеет в точке $(x_0;y_0)$ экстремум: а) максимум, если $A<0\ (C<0)$;
б) минимум, если $A>0\ (C>0)$.
2. Если $\Delta<0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.
3. Если $\Delta=0$, то необходимы дополнительные исследования.

<u>Пример 2.</u> Найти экстремум функции $z=3x^2y-x^3-y^3$

<u>Решение.</u> Здесь $z'_x=6xy-3x^2$; $z'_y=3x^2-4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

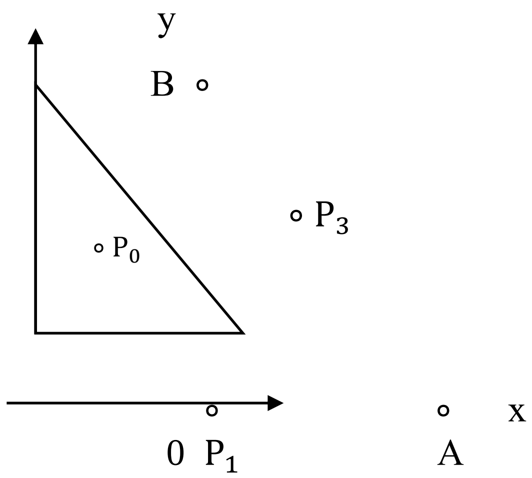
Отсюда получаем точки M_1 (6;3) и M_2 (0;0).
Находим частные производные второго порядка данной функции:

$z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке M_1 (6;3) имеем: A = -18, B = 36, C= -108, отсюда $\boldsymbol{AC - B^2 = -18\cdot(-108) - 36^2 =}$ **648**, т.е. $\Delta > 0$.
Так как A < 0, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум:
$z_{\max} = z(6;3) = 3\cdot 36\cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.
В точке M_2 (0;0): A = 0, B = 0, C = 0 и, значит, Δ = 0. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: z (0;0) = 0.
Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$; $y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x < 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки M_2(0;0) функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет.

3.2 Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Пример 3: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $\boldsymbol{z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5}$ в замкнутом треугольнике АОВ, ограниченном осями координат и прямой $\boldsymbol{x + y - 4 = 0}$ (рис. 1).



(рис.1)

Решение. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной замкнутой области, необходимо: 1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки не следует; 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области; если граница состоит из нескольких линий, то исследование проводится для каждого участка в отдельности; 3) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значения функции в заданной замкнутой области.

Находим стационарные точки, лежащие внутри заданной области:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8.$$

Приравняв к нулю частные производные, и решив полученную систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases}$$

находим стационарную точку $P_0\ (1; 2)$. Эта точка принадлежит заданной области. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(P_0) = z(1; 2) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -4$$

Граница области состоит из отрезка OA оси Ox, отрезка OB оси Oy и отрезка AB. Определим наибольшее и наименьшее значения функции z на каждом из этих трех участков. На отрезке OA $:\ y = 0$ и $0 \le x \le 4.$

Если $y = 0$, то $z(x) = x^2 - 2x + 5.$ Находим наибольшее и наименьшее значения этой функции

на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2; \quad 2x - 2 = 0; \quad x = 1; \quad P_1(1; 0);$$

$$z(P_1) = z(1; 0) = 4.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка OA, т.е. в точках O (0;0) и A (4;0):

$$z(0) = 5\,, \qquad z(4) = 13.$$

На отрезке OB: $x = 0$ и $0 \le y \le 4.$ Если $x = 0$, то $z(y) = 2y^2 - 8y + 5.$ Находим наибольшее и наименьшее значения функции z от переменной y на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dy} = 4y - 8; \quad 4y - 8 = 0; \quad y = 2; \quad P_2(0; 2); \quad z(P_2) = -3.$$

В точке O: (0;0) значение функции уже было найдено. Вычислим значение функции в точке B:

$$z(B) = z(0; 4) = 5$$

Теперь исследуемый отрезок AB. Уравнением прямой AB будет $y = 4 - x.$ Подставим это выражение для y в заданную функцию z , получим

$$z = x^2 + 2(4 - x^2) - 2x - 8(4 - x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Определим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 6x - 10; \quad 6x - 10 = 0; \quad x = \frac{5}{3}; \ P_3\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

P_3- стационарная точка на отрезке AB. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(P_3) = z\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right) = -\frac{10}{3}.$$

Значение функции на концах отрезка AB найдены ранее. Сравнивая полученные значения функции z в стационарной точке P_0 заданной области, в стационарных точках на границах области P_1, P_2, P_3 и в точках O, A и B, заключаем , что наибольшее значение в заданной замкнутой области функции z имеет в точке A, наименьшее значение - в точке $P_0(1; 2)$. Итак,

$$z_{\text{наиб}} = z(4; 0) = 13\ ; \quad z_{\text{наим}} = z(1; 2) = -4.$$

3.3 Градиент. Производная по направлению

Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой физической величины $z = f(M)$. Задание поля скалярной величины z равносильно заданию скалярной (числовой) функции $z = f(M)$.

Линией уровня скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения, т.е. $f(x;y) = C$, где $C = const$.

Градиентом функции $z = f(x;y)$ называется вектор

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} .$$

Направление вектора $grad\ z$ в каждой точке $M(x;y)$ совпадает с направлением нормали к линии (поверхности) уровня, проходящей через эту точку.

Производная функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ в направлении вектора $\vec{l}$, образующего с осями координат углы α и β, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Пример 4. Найти градиент и производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке M(3,4) в направлении вектора l, составляющего угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. Найдем частные производные функции в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \frac{3}{5}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \frac{4}{5}.$$

Тогда градиент будет равен: $\quad grad\ z = \frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}$.

Найдем направляющие косинусы: $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Тогда производная по направлению будет равна

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = \frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\cos\beta = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10} = 0,3\sqrt{3} + 0,4$$

Задание № 1. Вычислить интегралы

Вариант 1

1) $\int(5\cos x - 3e^x)dx$ 2) $\int(3x^2 + \frac{8}{x^5} + 11\sqrt[9]{x^2})\text{dx}$ 3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$

4) $\int e^{\cos x}\sin x dx$ 5) $\int\frac{2xdx}{x^2+2}$ 6) $\int x\cos x dx$

7) $\int \frac{x-1}{x^2+6x+25}dx$ 8) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx$ 9) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

10) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ 11) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$ 12) $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$ $x-2y+11=0,\ S=?$

Вариант 2

1) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+2^x\right)dx$ 2) $\int \left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

4) $\int \sqrt[3]{2-5\cos 5x}\sin 5x\, dx$ 5) $\int e^{x^2+6x+1}(x+3)\, dx$ 6) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

7) $\int \frac{8+x}{4x-x^2+2}dx$ 8) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ 9) $\int \sin^5(1-x)dx$

10) $\int \frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}$ 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$ 12) $y=\frac{1}{4}(x+5)^2$ $x-2y+17=0,\ S=?$

Вариант 3

1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$ 2) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$ 3) $\int \frac{dx}{(5x+7)^3}$

4) $\int \frac{4x^3+\cos x}{x^4+\sin x}dx$ 5) $\int \frac{6x dx}{\sqrt{x^4-5}}$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+16}}$

7) $\int \frac{26x-1}{x^2-25}dx$ 8) $\int \cos^7 x dx$ 9) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

10) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$ 12) $y=\frac{1}{3}(x-2)^2$ $y=x+4,\ S=?$

Вариант 4

1) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$

4) $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$ 5) $\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$ 6) $\int \cos x \sin 3x\, dx$

7) $\int ctg 5x\, dx$ 8) $\int (x^2+5x+3)e^x dx$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

10) $\int \sin^2(1-x)dx$ 11) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3}$ 12) $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \quad x-2y+14=0,\ S=?$

Вариант 5

1) $\int (\cos x + 2e^x - 3x^2)dx$ 2) $\int \left(8x - \frac{3}{x} + 4\sqrt[5]{x^4}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x+1}}$

4) $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$ 5) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ 6) $\int arctgx\, dx$

7) $\int \frac{x-2}{11-2x-x^2} dx$ 8) $\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} dx$ 9) $\int \frac{\cos^5 x}{sin^2 x} dx$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx$ 11) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$ 12) $y = \frac{1}{4}(x+3)^2 \quad x-2y+15=0,\ S=?$

Вариант 6

1) $\int \left(\frac{5}{1+x^2} - \frac{3}{cos^2 x}\right) dx$ 2) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^3} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right) dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$

4) $\int \cos 2x \cos 3x\, dx$ 5) $\int \frac{e^x dx}{3+2e^x}$ 6) $\int x^2 \sin 5x\, dx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$ 8) $\int \frac{2x^8+4x-2}{x(x^2+2x+1)} dx$ 9) $\int \sin^6 x\, dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 11) $\int_0^9 \frac{2xdx}{\sqrt{16+x^2}}$ 12) $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 \quad x-2y+16=0,\ S=?$

Вариант 7

1) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} - \sin x\right) dx$ 2) $\int \left(6x^2 - \frac{1}{x^2} + 8\sqrt[5]{x^3}\right) dx$ 3) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$

4) $\int \sin 2x \sin 5x\, dx$ 5) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\mathrm{dx}$ 6) $\int x^2 e^{2x} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$ 8) $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx$ 9) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2-\sqrt{x+2}}}$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x\, dx$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+1)^2 \quad 6x-3y+22=0,\ S=?$

Вариант 8

1) $\int \left(3^x - \frac{5}{16+x^2}\right) dx$ 2) $\int \left(7x^6 \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x}\right) dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$

4) $\int e^{2x^2} x dx$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x}}$ 6) $\int xe^{3x} dx$

7) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)(x+4)^2}$ 8) $\int \sin^4 x\ \cos^4 x\, dx$ 9) $\int \frac{x+3}{2x^2+x+4}dx$

10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}$ 11) $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$ 12) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2$, $3y-3x-16=0$, $S=?$

Вариант 9

1) $\int \frac{3-2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$ 2) $\int \left(8x-\frac{5}{x^4}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

4) $\int \sin 3x \cos 5x dx$ 5) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ 6) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$

7) $\int x^2 \cos 7x\, dx$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ 9) $\int \frac{dx}{x^3+8}$

10) $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx$ 11) $\int_1^{8.5} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ 12) $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ $y-x-3=0$, $S=?$

Вариант 10

1) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$ 2) $\int \left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

4) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ 5) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ 6) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

7) $\int \frac{x-3}{2x^2-x-3}dx$ 8) $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$ 9) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

10) $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ 11) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{4+x}}$ 12) $y=\frac{1}{3}(x+4)^2$, $3y-4x-16=0$, $S=?$

Вариант 11

1) $\int x(x+a)(x+b)dx$ 2) $\int \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{5x+1}}$

4) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$ 5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{25-tg^2 x}}$ 6) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$

7) $\int \sqrt{x}\ln x dx$ 8) $\int \frac{dx}{x^2-7x}$ 9) $\int \frac{4x+4}{(x+2)^2}dx$

10) $\int \sin^2 3x \cos 2\,3x\, dx$ 11) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ 12) $y=\frac{1}{3}(x+5)^2$, $3y-5x-25=0$, $S=?$

Вариант 12

1) $\int (a+bx)\, x^2 dx$ 2) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[9]{2x+7}}$

4) $\int \sin 10x \sin 15\, x\, dx$ 5) $\int \frac{3x^2 dx}{x^6-25}$ 6) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

10)$\int \cos^3(1-x) dx$ 11) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2, y = x+5\,,\ S = ?$

Вариант 13

1) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ 2) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) dx$ 3) $\int \cos(8x-5) dx$

4) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$ 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+3}}$ 6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

7) $\int x \cos 5x dx$ 8) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 9) $\int \frac{x-4}{4x^3-x} dx$

10) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ 11) $\int_{31.5}^{363} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2-\sqrt{3+2x}}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-3)^2,\ y = x+3\,, S = ?$

Вариант 14

1) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} \mathrm{dx}$ 2)$\int (2x^2+1)^3 dx$ 3) $\int e^{6x+7} dx$

4) $\int \frac{x^3 dx}{x^4+1}$ 5) $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

7) $\int x^2 \sin 2x dx$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$ 9) $\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$

10)$\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx$ 11) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-4)^2, y = x+2\,, S = ?$

Вариант 15

1) $\int tg^2 x dx$ 2) $\int \left(1+\sqrt{x^4}\right)^4 dx$ 3) $\int \frac{dx}{5x+2}$

4) $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$ 5) $\int x(5x^2-3)^7 dx$ 6) $\int \ln(x^2+1)dx$

7) $\int \frac{x+7}{\sqrt{1-x-5x^2}}dx$ 8) $\int \frac{dx}{x^3-x^2+x-1}$ 9) $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$

10) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ 11) $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$, $y = x+1$, $S = ?$

Вариант 16

1)$\int ctg^2 x dx$ 2)$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$ 3) $\int \sin\frac{x}{2}dx$

4) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$ 5) $\int e^{-x^2} x dx$ 6) $\int_{10}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

7) $\int arctg\, x\, dx$ 8) $\int \frac{dx}{5-3x-x^2}$ 9)$\int \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

10) $\int \cos^6 x dx$ 11) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+1)^2$, $y = x+7$, $S = ?$

Вариант 17

1) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ 3) $\int e^{-3x}\, dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$ 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ 6) $\int x^2 e^{3x}\mathrm{dx}$

7) $\int \frac{7+4x}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx$ 8) $\int (\cos x+3)^2 dx$ 9) $\int \frac{dx}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$

10)$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ 11) $\int_2^3 \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$, $y = x+8$, $S = ?$

Вариант 18

1) $\int \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ 2) $\int \frac{5-4ctg^2x}{\cos^2 x}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\cos^2(7x+3)}$

4) $\int \frac{x^3dx}{x^4+5}$ 5) $\int x(2x+5)^{10}dx$ 6) $\int \arccos x\, dx$

7) $\int \frac{dx}{8x^2-4x+1}$ 8) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-9)}$ 9) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$

10) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ 11) $\int_1^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2$, $y = x+9$, $S = ?$

Вариант 19

1) $\int (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})dx$ 2) $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$ 3) $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$

4) $\int \sin 9x \sin x dx$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{x+1}}}$ 6) $\int \ln x\, dx$

7) $\int \frac{x-3}{\sqrt{8-2x-5x^2}}dx$ 8) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ 9) $\int \cos^4 5x\, dx$

10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(4+x^2)^5}}$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+4)^2$, $y = x+10$, $S = ?$

Вариант 20

1) $\int a^x \left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right) dx$ 2) $\int \left(\frac{2}{x} - 4\sqrt[3]{x} - x^5\right) dx$ 3) $\int (e^x + e^{-x})\, dx$

4) $\int \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x dx$ 5) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ 6) $\int x \sin x\, dx$

7) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{2x^2-3x-1}}$ 8) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$

9) $\int (\cos x + 3^x)dx$

10) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ 11) $\int_{-1}^{7} \sqrt[3]{9x+1}dx$ 12) $y = \frac{1}{3}(x+5)^2$, $y = x + 11$, $S = ?$

Вариант 21

1) $\int \frac{(1+x)^2}{x^2}dx$ 2) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-3)}dx$

4) $\int e^{-x^4}x^3dx$ 5) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ 6) $\int x \sin x \cos x\, dx$

7) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$ 8) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$ 9) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

10) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$ 11) $\int_0^5 \sqrt{9-x}dx$ 12) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$, $x - 2y + 13 = 0$, $S = ?$

Вариант 22

1) $\int x^3(5x-4)dx$ 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ 3) $\int \cos(7x+3)dx$

4) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$ 5) $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$ 6) $\int \frac{x}{e^x}dx$

7) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$ 8) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 9) $\int \cos^3(x+3)dx$

10) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ 11) $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-4)^2$, $2x - y - 8 = 0$, $S = ?$

Вариант 23

1) $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$ 2) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$ 3) $\int \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{5}}\right)dx$

4) $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos x dx$ 5) $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)}dx$ 6) $\int_0^{0,25} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7) $\int (X+1)^2 \cos x dx$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ 9) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

10) $\int \sin^3 x \cos x dx$ 11) $\int_{\sqrt{6}}^{3} \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$, $2x - y - 10 = 0$, $S = ?$

Вариант 24

1) $\int \frac{5x^3-x^2-1}{x^4} dx$ 2) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$

4) $\int \sin 3x \sin x \, dx$ 5) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{3-x^3}}$ 6) $\int x^2 e^{3x} dx$

7) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+17}$ 8) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$ 9) $\int \sin^4 x dx$

10) $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$ 11) $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4} dx$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-3)^2$, $2x - y - 6 = 0$, $S = ?$

Вариант 25

1) $\int \frac{x^2+2x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} dx$ 2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ 3) $\int 5^{2x+1} dx$

4) $\int (e^x+1)^3 dx$ 5) $\int 6x \sin(x^2+3) dx$ 6) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3} dx}{x^6}$

7) $\int \arcsin x \, dx$ 8) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$ 9) $\int \frac{x-1}{x^2+6x+8} dx$

10) $\int \sin^5 x dx$ 11) $\int_3^{2\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2$, $2x - y - 4 = 0$, $S = ?$

Вариант 26

1) $\int \left(x + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}\right) dx$ 2) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$
3) $\int \frac{dx}{3x+1}$

4) $\int e^{x^5} x^4 dx$ 5) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$

7) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$ 8) $\int \sin^3 \frac{4x}{5} dx$ 9) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$

10) $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$ 11) $\int_{-1}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$ 12) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2$, $2x - y - 2 = 0$, $S = ?$

Вариант 27

1) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$ 2) $\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$ 3) $\int e^{5x+3} dx$

4) $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ 5) $\int \frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 6) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$

7) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$ 8) $\int 2xarctgx\, dx$ 9) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx$

10) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} dx$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ 12) $y = \frac{1}{4}(x-5)^2$, $x - 2y + 7 = 0$, $S = ?$

Вариант 28

1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$ 2) $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$

4) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$ 5) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2} dx$ 6) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}$

7) $\int x^2 \cos x dx$ 8) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$ 9) $\int \cos^3 x dx$

10) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{9+x^2}}$ 11) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-10x+25}$ 12) $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, $x - 2y + 8 = 0$, $S = ?$

Вариант 29

1) $\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$ 2) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ 3) $\int \sin(5x-3)dx$

4) $\int \sin 3x \sin 5x dx$ 5) $\int e^{x^3}x^2 dx$ 6) $\int x^2 \ln x dx$

7) $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$ 8) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ 9) $\int \left(1-3\sin\frac{x}{4}\right)^2 dx$

10) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ 11) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$ 12) $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$, $x-2y+9=0$, $S=?$

Вариант 30

1) $\int \left(\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{3}{x}\right)dx$ 2) $\int \left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$

4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}dx$ 5) $\int (x^2-3x+4)e^x dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

7) $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx$ 8) $\int \cos^4 x dx$ 9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

10) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3x^3+1}}$ 11) $\int_0^1 e^{x^2}x dx$ 12) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$, $x-2y+10=0$, $S=?$

Вариант 31

1) $\int x^3(5x-4)dx$ 2) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x+3)}$

4) $\int \cos x \sin 3x\, dx$ 5) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ 6) $\int \frac{1}{x^2+6x+25}dx$

7) $\int x^2 \sin 5x dx$ 8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$ 9) $\int \cos^3 x dx$

10) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$ 11) $\int_{\sqrt{6}}^{3} \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$ 12) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$, $6x-3y+22=0$, $S=?$

Задание № 2. Решить дифференциальные уравнения

Вариант 1

1. $y\ln y + xy' = 0$
2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$
3. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2;\quad y(-1) = \frac{3}{2}$
4. $xy' - y = y^2(\ln x + 2)\ln x;\quad y(1) = 1$
5. $y''' = \sin x, y'(0) = 1, y''(0) = 0$
6. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$
7. $y'' = y'e^y$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
8. $y'' + y' = 2x - 1$
9. $y'' + 2y' + y = e^x$
10. $y'' + y = xcos\ x$

Вариант 2

1. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
2. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$
3. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x}{1+x^2}$; $y(0) = \frac{2}{3}$
4. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y'(0) = -1$
5. $y''' = \frac{1}{x}$, $y(1) = \frac{1}{4}$, $y'(1) = y''(1) = 0$
6. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$
7. $(y')^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
8. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$
9. $y'' + y' - 2y = 6x^2$
10. $y'' - 2y = xe^{-x}$

Вариант 3

1. $(3 + y^x)yy' = e^x$
2. $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$
3. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$
4. $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$
5. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{3}{5}$
6. $x^3y'' + x^2y' = 1$
7. $yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

8. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 26\cos 2x$
9. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$
10. $y'' + y = x + 2e^x$

Вариант 4

1. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dx = 0$
2. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$
3. $y' + 2xy = -2x^3,\ y(0) = 3$
4. $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2\ ,y(0) = 1$
5. $y''' = \frac{6}{x^3}\ ,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 5\ ,y''(1) = 1$
6. $y'' + y'tgx = sin2x$
7. $y'' + 2e(y')^3 = 0\ ,\ y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$
8. $y'' - 12y' + 36y = 14e^6x$
9. $y'' + y' - 2y = 6x^2$
10. $y'' - 4y = 8x^3$

Вариант 5

1. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$
2. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$
3. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \frac{1}{2}$
4. $y' - y = xy^2,\ y(0) = 1$
5. $y'' = 4\cos 2x\ ,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
6. $y''x\ lnx = y'$
7. $y''tgy = 2(y')^2,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2}\ ,y'(1) = 2$
8. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$
9. $y'' - 2y' + y = 8e^x$
10. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$

Вариант 6

1. $y\ln y + xy' = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$
3. $y' + \frac{2}{x}y = x^3\ ,\ y(1) = -\frac{5}{6}$
4. $2(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 2$
5. $y''ctg\ x + y' = 2$
6. $y'' = 4\ cos2x,\ y(0) = 1\ ,\ y\ '(0) = 3$
7. $y'' - 8y' + 7y = 0$
8. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$
9. $y'' + y' - 2y = 6x^2$
10. $y'' - 4y = 8x^3$

Вариант 7

1. $y\ln y + xy' = 0$
2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

3. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$
4. $3(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 1$
5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 3$
6. $y'' = y' + x$
7. $y'' + 10y' + 29 = 0\ , y(0) = 3$
8. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\,sinx$
9. $y'' - 2y' + y = 8e^x$
10. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$

Вариант 8

1. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$
2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$
3. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, y(1)=1
4. $y' + 4x^3y = 4ye^x(1-x^3),\ y(0) = -1$
5. $y''' = e^{2x}\ , y(0) = \frac{9}{8}\ , y'(0) = \frac{1}{4}\ , y''(0) = -\frac{1}{2}$
6. $x^2y'' + xy' = 1$
7. $y'' = -\frac{1}{2y^3}\ , y(0) = \frac{1}{2}\ , y'(0) = \sqrt{2}$
8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$
9. $y'' - 3y' + 2y = e^x$
10. $y'' - 2y' = 2x + 1$

Вариант 9

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$
3. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{8}{x^2}$, y (1) = 4
4. $3(xy' + y) = xy^2\ ,\quad y(1) = 3$
5. $y''' = cos^2x\ ,\ y(0) = 0\ , y'(0) = -\frac{1}{8},\ y''(0) = 0$
6. $y'' = -\frac{x}{y}$
7. $y'' = 1 - (y')^2\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$
8. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$
9. $y'' + y = 2x^3 - x + 2$
10. $y'' + y' = 2x - 1$

Вариант 10

1. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
2. $y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$
3. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}\ ,\ y(1) = 1$
4. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1},\ \ y(0) = 2$
5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 3$

6. $xy' = y'$
7. $(y'')^2 = y'$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$
8. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$
9. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}$
10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$

Вариант 11

1. $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$
2. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
3. $y' + \frac{x}{2 - 2x^2 y} = \frac{x}{2}$, $y(0) = 1$
4. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)$, $y(0) = 1$
5. $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
6. $y'' = y' + x$
7. $2yy' = (y')^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
8. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$
9. $y'' + 18y' + 25y = 18e^{5x}$
10. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$

Вариант 12

1. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$
2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$
3. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1 + x^3)}{3}$, $y(0) = 0$
4. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 0$
5. $y'' = x + \sin x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$
6. $xy' = y' + x^2$
7. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
8. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$
9. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$
10. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$

Вариант 13

1. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$
2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$
4. $2(xy' - y) = xy^2$, $y(1) = 2$
5. $y'' = arctg\, x$, $y(0) = y'(0) = 0$
6. $xy'' = y' ln\left(\frac{y}{x}\right)$
7. $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
8. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$
9. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$

10. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$

Вариант 14

1. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$
2. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$
3. $y' - \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
4. $2y' + ycos\,x = y^{-1}\cos x(1+\sin x)$, $y(0) = 1$
5. $y'' = \frac{tgx}{cos^2x}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$
6. $xy'' + y' = \ln x$
7. $yy'' - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
8. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$
9. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$
10. $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$

Вариант 15

1. $y\ln y + xy' = 0$
2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$
3. $y' - \frac{x}{y} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$
4. $2y' + 3y\,cosx = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$
5. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$
6. $y''tg\,x = y' + 1$
7. $y'' = y' + (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
8. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$
9. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$
10. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$

Вариант 16

1. $6\mathrm{xdx} - 6\mathrm{ydy} = 3\mathrm{x}^2\mathrm{ydy} - 2\mathrm{xy}^2\mathrm{dx}$
2. $xy' = \frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$
4. $xy' + y = y^2\ln x$, $y(1) = 1$
5. $y'' = \frac{x}{e^{2x}}$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = -\frac{1}{4}$
6. $y'' + 2x(y')^2 = 0$
7. $\frac{y''+2(y')^2}{1-y} = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
8. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$
9. $y'' + 4y = 3\sin 2x$
10. $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$

Вариант 17

1. $(1+e^x)yy' = e^x$
2. $y' = \frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$

3. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1$
4. $y' + xy = (x-1)e^x y^2, y(0) = 1$
5. $y'' = \sin^2 3x\ , y(0) = -\frac{\pi^2}{6}\ \ , y'(0) = 0$
6. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
7. $y''(1+y) = 5(y')^2, y(0) = 0\ \ , y'(0) = 1$
8. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$
9. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$
10. $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Вариант 18

1. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$
2. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$
3. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}\ , y(1) = 1$
4. $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3,\ y(1) = \sqrt{2}$
5. $y''' = x\sin x\ ,\ y(0) = 0\ , y'(0) = 0\ , y'''(0) = 0$
6. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$
7. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0\ ,\ \ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 3$
8. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$
9. $y'' + 3y' = 9x$
10. $y'' + 4y = \sin 2x$

Вариант 19

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$
3. $y' - y\ ctg\ x - 2x\ sin\ x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4. $xy' + y = 2y^2\ sin\ x\ ,\ \ y(1) = \frac{1}{2}$
5. $y'''sin^4x = \sin 2x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ ,\ \ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
6. $y''' + y''tgx = \frac{1}{\cos x}$
7. $4(y'')^2 = 1 + (y')^2,\ y(0) = 1\ , y'(0) = 0$
8. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$
9. $y' = \frac{8x+5y}{5x-2y}$
10. $y' = \frac{y}{x} - tg\,\frac{y}{x}$

Вариант 20

1. $(1+e^x)y' = ye^x$
2. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$
3. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
4. $3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3$
5. $y'' = \cos x + e^x,\ y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1$
6. $y'' - 2y'ctgx = sin^3x$
7. $2(y')^2 = (y-1)y'', y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 2$

8. $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$
9. $xy' + y\, ln\frac{y}{x} = 0$
10. $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

Вариант 21

1. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$
2. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e$
4. $3xy' + 5y = (4x+5)y^{-1}\ ,\ y(1) = 1$
5. $y'' = sin^3 x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
6. $y'' + 4y' = 2x^2$
7. $1 + (y')^2 = yy',\ y(0) = 1\ , y'(0) = 0$
8. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$
9. $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$
10. $\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{x-y}}$

Вариант 22

1. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$
2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$
3. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$
4. $y' + 2xy = 2x^3y^3\ ,\ y(0) = \sqrt{2}$
5. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x, y(0) = -\frac{1}{8},\quad y'(0) = \frac{1}{8}\cos 2x,\quad y''(0) = \frac{1}{2}$
6. $xy'' - y' = 2x^2e^x$
7. $y'' + y(y')^3 = 0,\ \ y(0) = 1\ , y'(0) = 2$
8. $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\, cosx)e^{-2x}$
9. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
10. $2x^2y' + x^2 + y^2 = 0$

Вариант 23

1. $y(4 + e^x)\mathrm{dy} - e^x\mathrm{dx} = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$
3. $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3$
4. $2(y' + y) = xy^2,\ y(0) = 2$
5. $y'' = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\ \ ,\ \mathrm{y}(0) = 0\ \ ,\ \mathrm{y}'(0) = 1$
6. $x(y'' + 1) + y' = 0$
7. $yy'' - (y')^2 = 0\ \ , y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
8. $y'' + 16y = 8\cos 4x$
9. $y' = \frac{x-y}{x+y}$
10. $xyy' = 8x^2 + y^2$

Вариант 24

1. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$
2. $y' = \frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$
3. $\mathrm{y}' - 4\mathrm{xy} = -4\mathrm{x}^3,\ \mathrm{y}(0) = -\frac{1}{2}$
4. $y' + y = xy^2\ ,\ \ y(0) = 1$
5. $y'' = 2\sin x\, cos^2x,\ \ y(0) = -\frac{5}{9}\ ,\ \ \mathrm{y}'(0) = -\frac{2}{3}$
6. $\mathrm{y}'' + 4\mathrm{y}' = \cos 2x$
7. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y\ ,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
8. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$
9. $y'cos^2x + y = tg\,x,\ \ \ y(0) = -1$
10. $\mathrm{yy}'' = (\mathrm{y}')^2$

Вариант 25

1. $xy'' = y'ln\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$
2. $(1 + x^2)y' + y = arctg\,x\ ,\ \ y(0) = 1$
3. $y'' - 4y' + 3y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 8$
4. $y' = \frac{x-2y}{2x+y}$
5. $y'' - e^x\,\mathrm{y}' = 0,\ y(0) = 0\ ,\ \ y'(0) = 0$
6. $y''' = \sin x, y'(0) = 1, y''(0) = 0$
7. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2,\ y(0) = 0\ \ ,\ y'(0) = 5$
8. $y' - y = e^x,\ y(0) = 1$
9. $y'' + y = 6\sin 2x,\ y(\pi) = -1,\ y'(\pi) = -4$
10. $y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}$

Вариант 26

1. $xy' + y = -x^2y^2,\ \ y(1) = 1$
2. $y'' + 2y' + 17y = \cos x$
3. $\mathrm{y}' = \frac{x}{y} - tg\frac{x}{y}$
4. $y'' - 2y'ctgx = sin^2x$
5. $y'' + 2y' + y = -2\sin x + x + 2\ ,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$
6. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = -1$
7. $y'' - y' - 12y = e^x$
8. $xy'' = \ln x + 1\ \ ,\ y(1) = 0\ \ , y'(1) = 0$
9. $xy' = \frac{3y^2+12yx^2}{2y^2+6x^2}$
10. $2y'' = e^{4y}\ ,\ y(0) = 0\ ,\ \ y'(0) = \frac{1}{2}$

Вариант 27

1. $xy'' - y' - x^2 = 0,\ \ \ \ \ y(1) = \frac{4}{3},\ \ y'(1) = 3$
2. $y'' - 4y' + 5y = (24\cos x + 8\sin x)e^{-3x}$
3. $y'' + 5y' = \cos x$
4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$
5. $\sqrt{1 - x^4}y' + 2xy^2 + x = 0$
6. $y^3y'' = 3,\ \ \ \ \ y(1) = 1\ ,\ \ y'(1) = 1$

7. $xy'' + y' = 4x^3$
8. $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$
9. $y' + 2xy = 2x^2y^2,\ y(0) = \sqrt{2}$
10. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$

Вариант 28

1. $xyy' = 10x^2 + y^2$
2. $y''' sin^2 x = \sin 2x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ ,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
3. $y' = \frac{x^2+xy-7y^2}{x^2+6xy}$
4. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$
5. $(y+1)^2y'' = (y')^3,\ y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1$
6. $xy' + 2y = 3x^5y^2,\quad y(1) = -1$
7. $6xy' = y'$
8. $4y'' - 2y' + 3y = 8e^{5x},\qquad y(0) = 3,\quad y'(0) = 7$
9. $xy'' - y' = 8x^2e^x$
10. $6xyy' - y^2 - x^2 = 0$

Вариант 29

1. $5y' = \frac{y^2}{x^2} - ctg\frac{y^2}{x^2}$
2. $y'' - 4y = 4\, sin\, 2x,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 7$
3. $y'' + 13y = 0$
4. $4y' = \frac{x-y}{x+y}$
5. $xy' = y^3 - \sqrt{x^2 + y^2}$
6. $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}\ ,\ y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 0$
7. $y'' - 2y' - y = 3e^{2x},\quad y(0) = 2\ ,\quad y'(0) = 5$
8. $y'' = y' + 16x$
9. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1$
10. $y'\sin x - y\cos x = 1\ ,\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Вариант 30

1. $7xdx - 2ydy = x^2ydy - 5xy^2dx$
2. $(y-2)y'' = 2(y')^2,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 1$
3. $y' - 2\frac{y}{x} = \sin x\ ,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
4. $xy' - y = x^2\cos x\ ,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
5. $y'y'' = 2y\ ,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$
6. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
7. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$
8. $y'' - 5y' = 10x + 3\ ,\ y(0) = 2,\quad y'(0) = 4$
9. $y' + y = -e^{2x}y^2,\quad y(0) = 1$
10. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \frac{1}{2}$

Задание № 3. Данную функцию z = f (x, y) исследовать на экстремум

1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.
2. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.
3. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$.
4. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$.
5. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.
6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.
7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.
8. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$.
9. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$.
10. $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.
11. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2$.
12. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y - 1$.
13. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$.
14. $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2$.
15. $z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y + 1$.
16. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 1$.
17. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2$.
18. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$
19. $z = 0.5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8$.
20. $z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 1$.
21. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2$.
22. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1$.
23. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$.
24. $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2$.
25. $z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y + 1$.
26. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9$.
27. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2$.
28. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$.
29. $z = 0{,}5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8$.
30. $z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 1$.

Задание № 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции z = f (x, y) в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж

1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27;\quad 0 \le x \le 3,\quad 0 \le y \le 3.$
2. $z = x^2 + 2y^2 + 1;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3.$
3. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2;\quad x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x.$
4. $z = x^2 + 3y^2 + x - y;\quad x \ge 1, y \ge -1,\ x + y \le 1.$
5. $z = x^2 + 2xy + 2y^2;\quad -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2.$
6. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;\quad x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1.$
7. $z = 10 + 2xy - x^2;\quad 0 \le y \le 4 - x^2.$
8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\quad x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0.$
9. $z = x^2 + xy - 2;\quad 4x^2 - 4 \le y \le 0.$
10. $z = x^2 + xy;\quad -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 3.$
11. $z = -x^2 + y^2 - 4xy - 4;\quad 0 \le x \le 4,\quad 0 \le y \le 4.$
12. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ y = 4 - x.$
13. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1;\quad -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2.$
14. $z = x^3 + y^3 - 3xy;\quad 0 \le x \le 4,\quad 0 \le y \le 4$
15. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y = 3.$
16. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy;\quad y = x^2,\quad y = 4,\ x \ge 0.$
17. $z = x^2 + xy - 3x - y;\quad 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 3.$
18. $z = x^2 - 2xy + 3;\quad y = 4 - x^2,\ x \ge 0.$
19. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3;\quad y = 0, x = 2,\ y = x + 2.$
20. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2;\quad 0 \le x \le 4,\quad -3 \le y \le 2.$
21. $z = x^2 + xy - 6x - 2y + 2;\quad 1 \le x \le 3,\quad 1 \le y \le 4.$
22. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 5;\quad x \ge 0,\quad y \ge 0,\ y = 2 - x.$
23. $z = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 15;\quad 2 \le x \le 6,\quad 0 \le y \le 5.$
24. $z = x^2 - 2xy + 4x - 4y + 7;\quad y = -x^2 - 4x,\ x \ge 0.$
25. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y + 2;\quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2.$
26. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\quad x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0.$
27. $z = x^2 + 2y^2 + 1;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3.$
28. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3;\quad y = 0, x = 2,\ y = x + 2.$
29. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ y = 4 - x.$
30. $z = x^2 + xy - 6x - 2y + 2;\quad 1 \le x \le 3,\quad 1 \le y \le 4.$

Задание № 5. Задана функция z = *f* (x, y). Найти градиент и производную этой функции в заданной точке M(x_0, y_0) в направлении вектора *l*, составляющего угол α с положительным направлением оси *Ox*

1. $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}xy^3,\quad$ M(1,-1), $\alpha = \frac{\pi}{4}.$
2. $z = tg\, x + x - 2\sin y,\quad M(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}),\ \alpha = \frac{\pi}{4}.$
3. $z = 3x^2y + \sqrt{xy},\quad M(2, -2), \alpha = \frac{\pi}{6}.$
4. $z = 2\cos(x + y) + 2x,\quad M(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}), \alpha = \frac{\pi}{3}.$

5. $z = x sin(x + y) - 1$, $M(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}), \alpha = \frac{\pi}{4}$.
6. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(3{,}4), \alpha = \frac{\pi}{6}$.
7. $z = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4}$, $M(1, -2), \alpha = \frac{\pi}{4}$.
8. $z = x\, tg\, y + \cos x$, $M(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}), \alpha = \frac{\pi}{4}$.
9. $z = ln(x + 2y) - xy$, $M(1, -1), \alpha = \frac{\pi}{3}$.
10. $z = e^{x^2 - y^2}$, $M(2, -2), \alpha = \frac{\pi}{6}$.

Найти grad z в точке A:

11. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1; 1)$
12. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2; 1)$
13. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$; $A(1; 1)$
14. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1; 1)$
15. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2; 1)$
16. $z = arctg(xy^2)$; $A(2; 3)$
17. $z = arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$; $A(1; 2)$
18. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1; 3)$
19. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; $A(-1; 2)$
20. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; $A(1; 1)$

Найти grad z в точке M:

21. $z = 4 - x^2 - y^2$; $M(1; 2)$
22. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$; $M(0; 3)$
23. $z = (x - y)^2$; $M(1; 1)$
24. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$; $M(1; 1)$
25. $z = x^2 + y^2$; $M(-1; 1)$
26. $z = 4 - x^2 - y^2$; $M(3; 2)$
27. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $M(-1; 2)$
28. $z = xy$; $M(3; -1)$
29. $z = arccos\left(\frac{x^2}{y}\right)$; $M(1; 1)$
30. $z = 2\cos(x + y)$; $M(1; 2)$

Библиографический список

1. Лунгу К.Н. , Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. - 3-е изд., испр. И доп.- М.: Айрис-пресс, 2004. - 576 с.: - (Высшее образование).
2. Лунгу К.Н. , Письменный Д.Т., Норин В.П., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ Под редакцией С.Н.Федина. - М.: Айрис-пресс,2004. - 592 с.: ил. - (Высшее образование).
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1 / Дмитрий Письменный. — 10-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2010. - 288с.: ил - (Высшее образование).

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики

Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.