



Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

### **Б1.О.04 Специальные разделы высшей математики**

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе

### **Двойные, тройные интегралы и их приложения**

Направление подготовки  
08.04.01 Строительство

Направленность программы  
Механика грунтов, геотехника и геоэкология

Уфа 2023

Рекомендовано к изданию заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «24 марта» 2023 года)

Председатель методической комиссии факультета  
доцент Павлов А.П.

Составители: доценты Галин Э.Х., Арсланбекова С.А., Ардуванова Ф.Ф.

Ответственный за выпуск: и.о. зав. кафедрой математики  
канд.психол.наук. Дик Е.Н.

## ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

### Вычисление двойных интегралов в прямоугольных координатах

Функция  $f(x, y)$ , для которой существует двойной интеграл  $\iint_S f(x, y) ds$ ,

называется интегрируемой в области  $S$ . В прямоугольной системе координат элемент площади  $ds = dxdy$  и двойной интеграл принимает вид  $\iint_S f(x, y) dxdy$ .

Предположим далее, что область интегрирования  $S$  представляет собой криволинейную трапецию  $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ , где  $y_1(x), y_2(x)$  – непрерывные функции на отрезке  $[a; b]$ . Тогда правило сведения двойного интеграла к двукратному интегралу таково

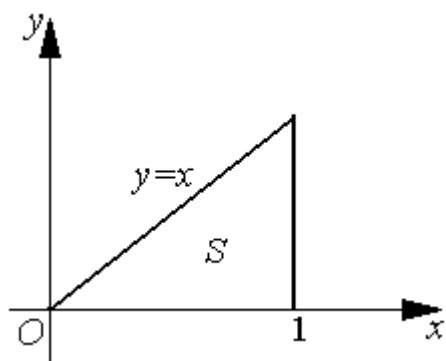
$$\iint_S f(x, y) dxdy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Возможен другой порядок интегрирования. Если область  $S$  представляет собой криволинейную трапецию  $c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ , то получим такой двукратный интеграл

$$\iint_S f(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2)$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x + y^2) dxdy$  по области  $S$ , ограниченной прямыми линиями  $y = x, x = 1, y = 0$  (рис. 1).

Решение. Воспользовавшись формулой (1)



$$\begin{aligned} \text{получим } \iint_S (x + y^2) dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^x (x + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left( xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \left( x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Рисунок 1

Пример 2. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (8xy^2 - 4xy) dxdy$  по области  $S$ , ограниченной линиями  $y=x^2, y=-x^3, x=1$  (рис.2).

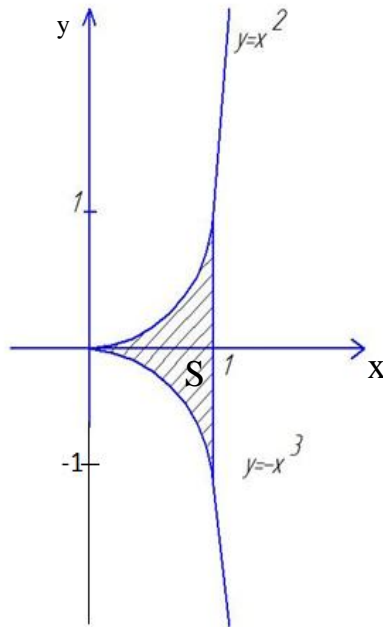


Рисунок 2

Решение. Воспользовавшись формулой (1) получим

$$\begin{aligned} \iint_S (8xy^2 - 4xy) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-x^3}^{x^2} (8xy^2 - 4xy) dy = \int_0^1 \left( \frac{8xy^3}{3} - \frac{4xy^2}{2} \right) \Big|_{-x^3}^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{8x^7}{3} + \frac{8x^{10}}{3} - \frac{4x^5}{2} + \frac{4x^7}{2} \right) dx = \left( \frac{x^8}{3} + \frac{8x^{11}}{33} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{8}{33} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{65}{132}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (xy^2 + 2x^2y) dx dy$  по области S, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ ,  $x = 1$  (рис 3).

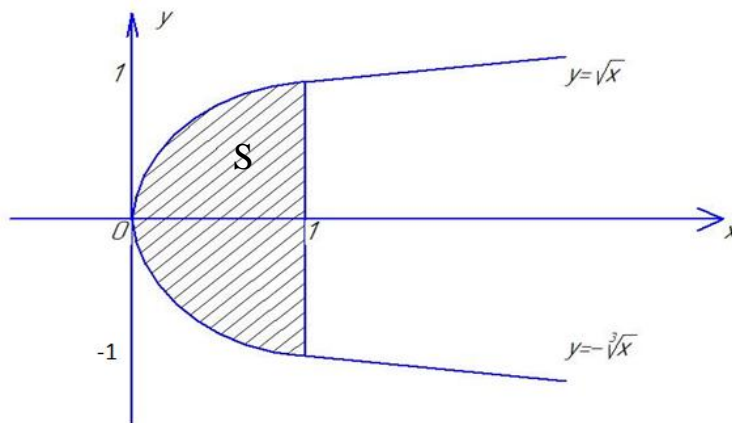


Рисунок 3

Решение. Воспользовавшись формулой (1) получим

$$\begin{aligned} \iint_S (xy^2 + 2x^2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} (xy^2 + 2x^2y) dy = \int_0^1 \left( \frac{xy^3}{3} + x^2y^2 \right) \Big|_{-\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{x^2}{3} + x^3 - x^{\frac{8}{3}} \right) dx = \left( \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{21} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{11}{3}}}{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{21} + \frac{1}{9} - \frac{3}{11} + \frac{1}{4} = \frac{509}{2772}. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x^3 + y^3) dx dy$ , если область  $S$  ограничена линиями  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = x$ ,  $x = 4$ .

Решение. Представим на чертеже область  $S$  (рис.4).

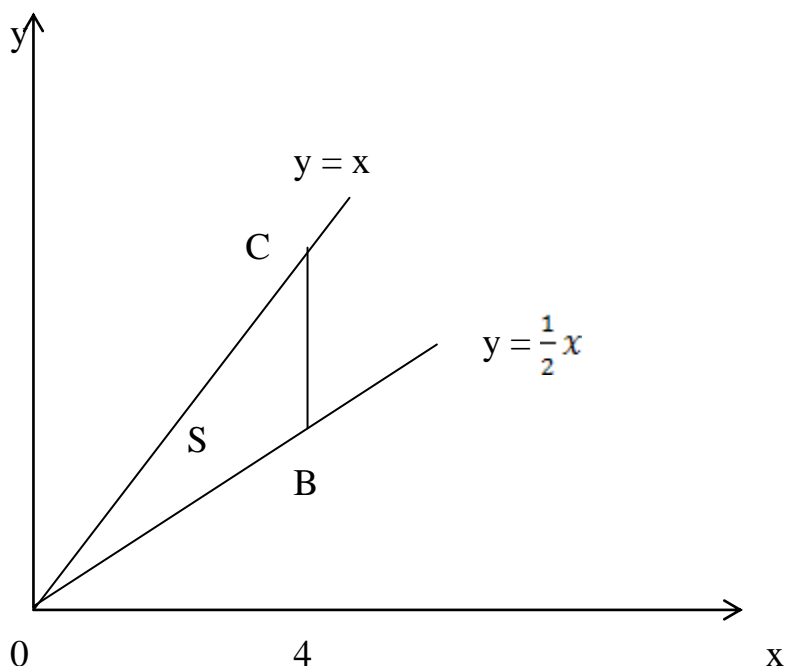


Рисунок 4

Воспользуемся формулой (1), тогда

$$\begin{aligned} \iint_S (x^3 + y^3) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^x (x^3 + y^3) dy = \int_0^4 \left( x^3 y + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{\frac{1}{2}x}^x dx = \\ &= \int_0^4 \left[ x^3 \left( x - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{4} \left( x^4 - \frac{1}{16}x^4 \right) \right] dx = \\ &= \int_0^4 \frac{47}{64} x^4 dx = \frac{47}{64} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{47}{64} \cdot \frac{4^5}{5} = \frac{752}{5}. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x^3 + y^3) dx dy$  из примера 4, изменив порядок интегрирования.

Решение. Внутреннее интегрирование будем производить по переменной  $x$ , а внешнее по переменной  $y$ . Из рисунка 5 видно, что левая часть контура области  $S$  одна линия, а именно  $y = x$ , а его правая часть состоит из двух линий  $OB$  и  $BC$ , определенных разными уравнениями  $y = \frac{1}{2}x$  и  $x = 4$ . В этом случае область  $S$  следует разбить на части так, чтобы каждая из них справа ограничивалась тоже одной линией. Такими частями будут  $S_1 - OAB$  и  $S_2 - ABC$ . Область  $S$  является суммой областей  $S_1$  и  $S_2$ , тогда и

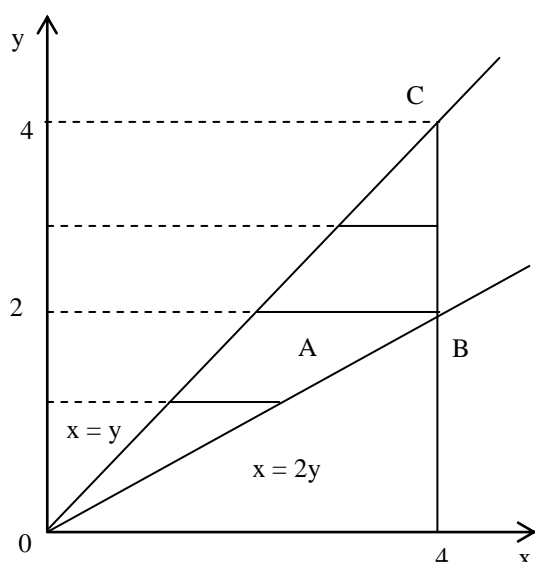


Рисунок 5

интеграл представляется как сумма интегралов

$$\iint_S (x^3 + y^3) dx dy = \iint_{S_1} (x^3 + y^3) dx dy + \iint_{S_2} (x^3 + y^3) dx dy$$

Так как теперь внутренние интегралы будут вычисляться по переменной  $x$ , то уравнения линий, ограничивающих каждую из областей  $S_1$  и  $S_2$ , должны быть решены относительно этой переменной. Получим, что область  $S_1$  ограничена линиями  $x=y$ ,  $x=2y$ ,  $y=2$ . Область  $S_2$  ограничена линиями  $y=2$ ,  $x=y$ ,  $x=4$ .

Поэтому,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^3 + y^3) dx dy &= \int_0^2 dy \int_y^{2y} (x^3 + y^3) dx = \int_0^2 \left( \frac{x^4}{4} + y^3 x \right) \Big|_y^{2y} dy = \\ &= \int_0^2 \left[ \frac{1}{4} ((2y)^4 - y^4) + y^3 (2y - y) \right] dy = \int_0^2 \frac{19}{4} y^4 dy = \left( \frac{19}{4} \cdot \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{152}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (x^3 + y^3) dx dy &= \int_2^4 dy \int_y^4 (x^3 + y^3) dx = \int_2^4 \left( \frac{x^4}{4} + y^3 x \right) \Big|_y^4 dy = \\ &= \int_2^4 \left[ \frac{1}{4} (4^4 - y^4) + y^3 (4 - y) \right] dy = \int_2^4 (64 + 4y^3 - \frac{5}{4} y^4) dy = \\ &= (64y + y^4 - \frac{1}{4} y^5) \Big|_2^4 = 120 \end{aligned}$$

и интеграл  $\iint_S (x^3 + y^3) dx dy = \frac{152}{5} + 120 = \frac{752}{5}.$

Пример 6. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S xy dx dy$ :

1) если область  $S$  ограничена эллипсом  $4x^2 + y^2 = 4$ .

Решение. Построив область  $S$ , будем сначала интегрировать по  $x$ , а затем по  $y$ . Из уравнения границы области  $S$  (эллипса), выразив переменную  $x$ , найдем пределы внутреннего интеграла (по переменной  $x$ )

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}.$$

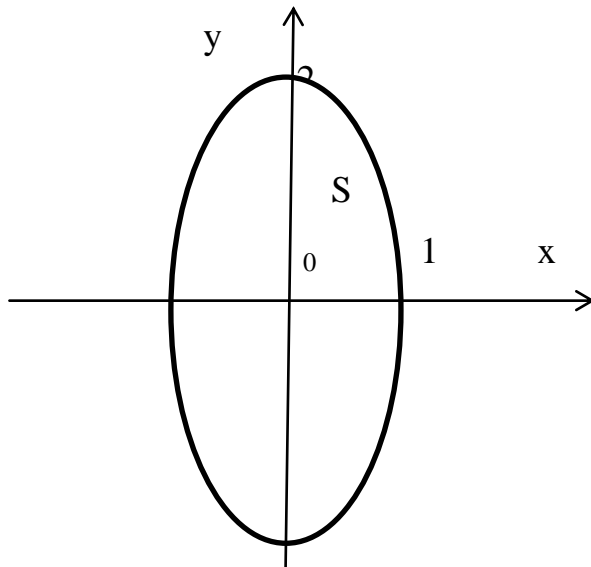


Рисунок 6

Пределы внешнего интеграла (по переменной  $y$ ) найдем как координаты самой нижней и самой верхней точек области  $S$ :  $y = -2$  и  $y = 2$ . Получим

$$\iint_S xy dx dy = \int_{-2}^2 y dy \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} x dx = \int_{-2}^2 y \cdot \left( \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} dy = 0.$$

2) если область  $S$  ограничена прямой  $y = x - 4$  и параболой  $y^2 = 2x$ .

Решение. Построив данные линии между точками их пересечения  $(2; -2)$  и  $(8; 4)$ , получим параболический сегмент  $AOB$ .

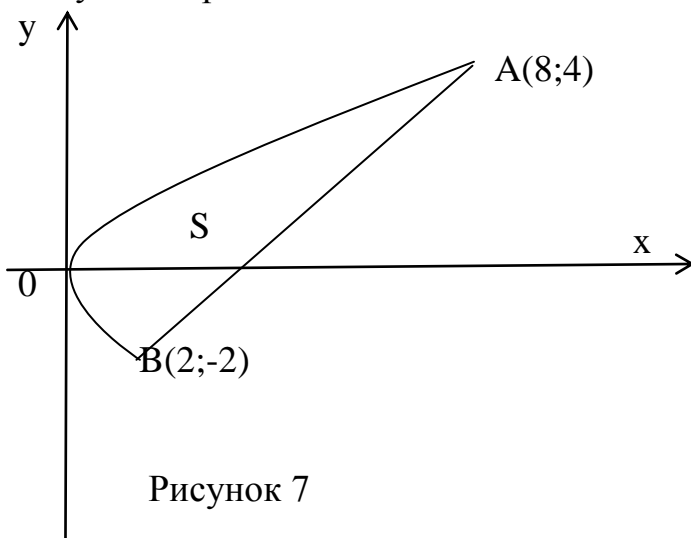


Рисунок 7

Если вначале интегрировать по  $x$ , а затем по  $y$ , то двойной интеграл по этой области выражается одним двукратным интегралом

$$\iint_S xy dx dy = \int_{-2}^4 y dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} x dx.$$

Вычисляя двукратный интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 \left( y \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} dy &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[ (y+4)^2 - \frac{y^4}{4} \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left( y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Big|_{-2}^4 = 90. \end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S e^{x+y} dx dy$  по области  $S$ , заключенной между двумя квадратами с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат. Каждая сторона внутреннего квадрата равна 2, а внешнего квадрата равна 4 (рис 8).

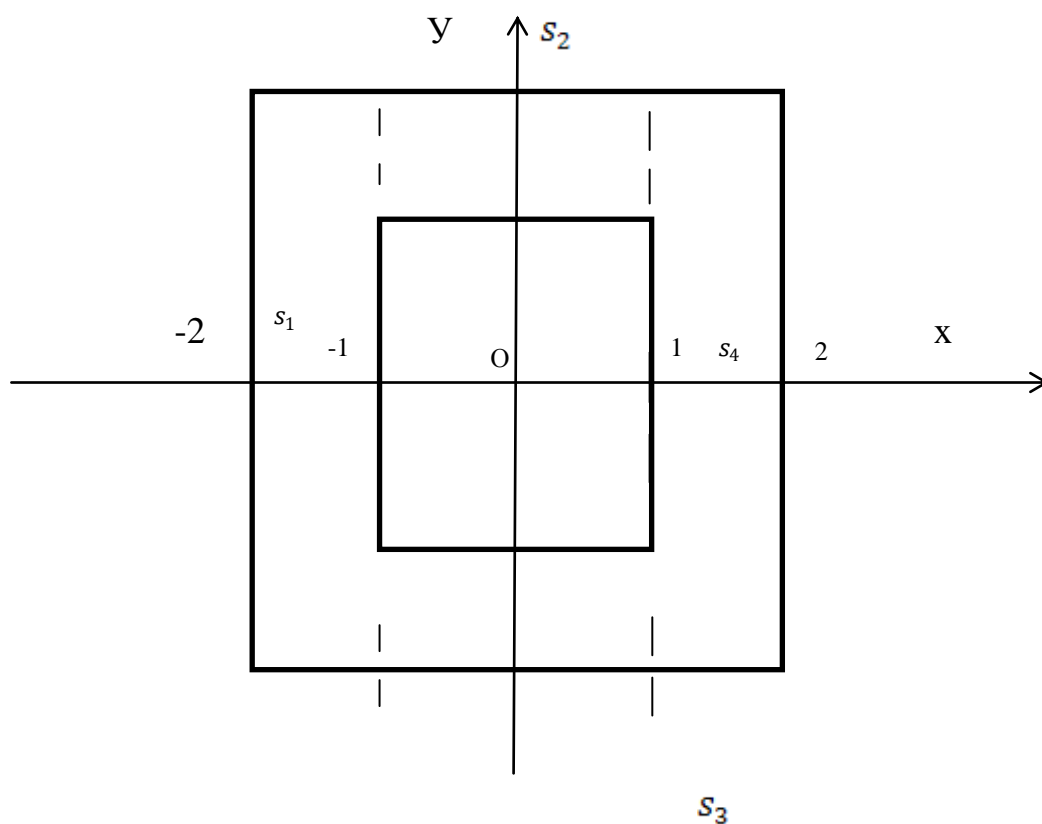


Рисунок 8



Решение. Область  $S$  будем называть правильной, если прямые, параллельные осям координат, пересекают границу области не более, чем в двух точках. В данном случае область  $S$  является неправильной. Однако прямые  $x = -1$  и  $x = 1$  разбивают ее на 4 правильные области  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Поэтому,

$$\begin{aligned} \iint_S e^{x+y} dx dy &= \\ &= \iint_{S_1} e^{x+y} dx dy + \iint_{S_2} e^{x+y} dx dy + \iint_{S_3} e^{x+y} dx dy + \iint_{S_4} e^{x+y} dx dy. \end{aligned}$$

Представляя каждый из этих интегралов в виде двукратного интеграла, найдем:

$$\begin{aligned} \iint_S e^{x+y} dx dy &= \\ \int_{-2}^{-1} dx \int_{-2}^2 e^{x+y} dy + & \\ \int_{-1}^1 dx \int_1^2 e^{x+y} dy + + \int_{-1}^1 dx \int_{-2}^{-1} e^{x+y} dy + \int_1^2 dx \int_{-2}^2 e^{x+y} dy &= (e^2 - \\ e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^2 - e^{-2})(e^2 - e) &= (e^3 - e^{-3})(e - \\ e^{-1}). \end{aligned}$$

### Изменение порядка интегрирования

Пример 8. Изменить порядок интегрирования  $J = \int_0^4 dx \int_0^{2-\frac{1}{2}x} f * dy$ .

Решение. По пределам интегрирования представим область интегрирования  $S$  (рис. 9).

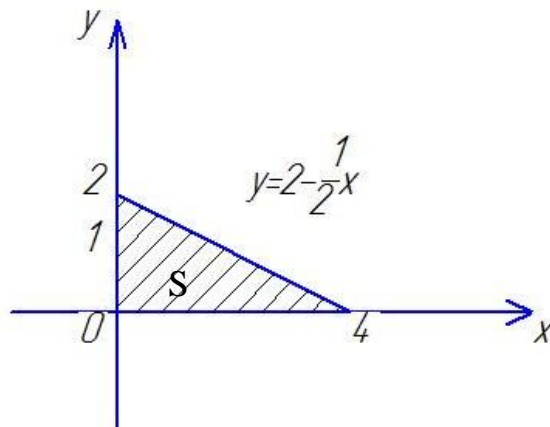


Рисунок 9

Уравнения границ области  $S$ :  $y=0$ ,  $y=2-\frac{1}{2}x$ ,  $x=0$ ,  $x=4$ .

Тогда, из формулы (2) следует, что интеграл при другом порядке интегрирования примет вид

$$J = \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} f * dx.$$

Пример 9. Изменить порядок интегрирования  $J = \int_{-1}^{+1} dx \int_{x^2}^1 f * dy$ .

Решение. Уравнения границ области  $S$ :  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ . (рис 10).

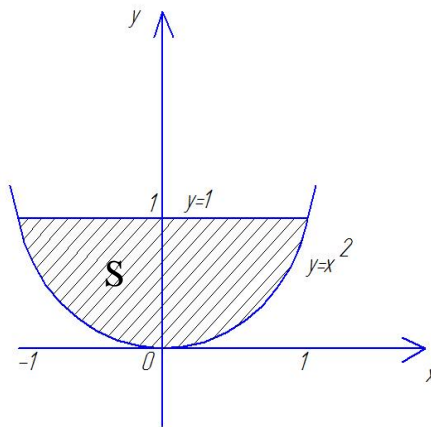


Рисунок 10

Тогда, из формулы (2) следует, что интеграл при другом порядке

интегрирования примет вид  $J = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f * dx$ .

Пример 10. Изменить порядок интегрирования

$$J = \int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} f * dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f * dy.$$

Решение. Уравнение границ области  $S$ :  $y = 1+x$ ,  $y = 1-x$ ,  $y = 0$  (рис. 11).

Тогда, из формулы (2) следует, что интеграл при другом порядке интегрирования примет вид

$$J = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f * dx.$$

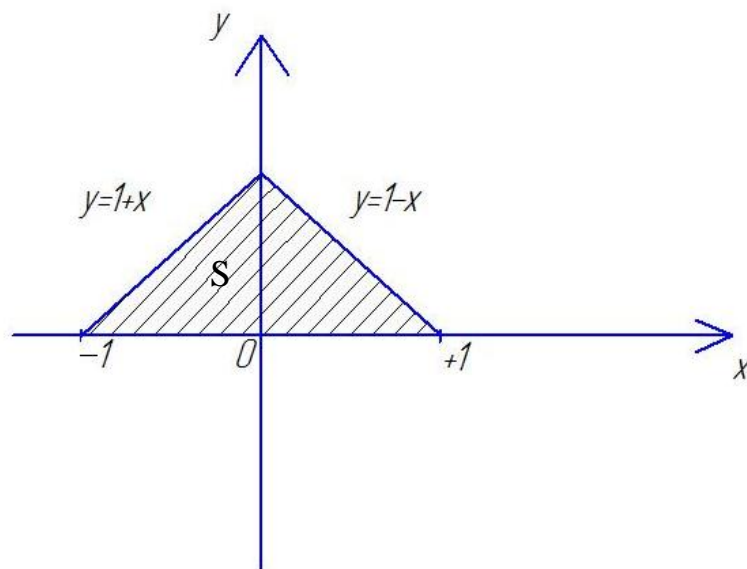


Рисунок 11

Пример 11. Изменить порядок интегрирования

$$J = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f * dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f * dy$$

Решение. Уравнение границ области  $S$ :  $y=2-\sqrt{4-x^2}$ ,  $y=\sqrt{4-x^2}$ ,  $y=0$  или  $S: x^2 + (y-2)^2=2^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y=0$  (рис 12).

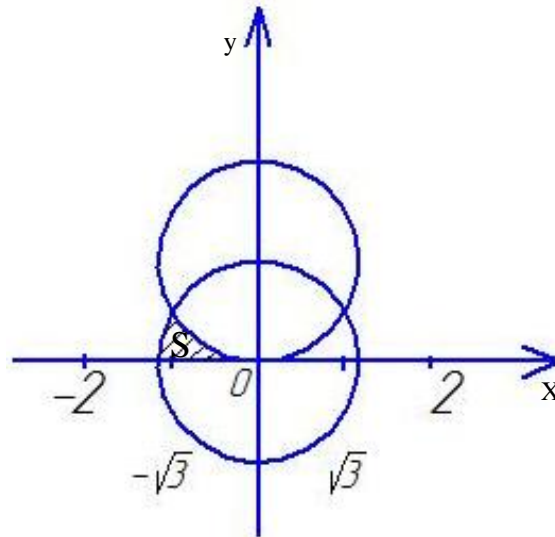


Рисунок 12

Учитывая условие  $-2 \leq x \leq 0$ , выделяем область  $S$ . Решая систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, \\ y = 2 - \sqrt{4-x^2} \end{cases} \text{ нетрудно убедиться в том, что } x = \pm\sqrt{3} \text{ – абсциссы точек}$$

пересечения окружностей. Тогда, из формулы (2) следует, что интеграл при другом порядке интегрирования примет вид  $J = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-\sqrt{4-y^2}} f * dx$

### Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в двойном интеграле  $\iint_S f(x, y) ds$  от прямоугольных координат  $x$  и  $y$  нам нужно перейти к полярным координатам  $\rho, \varphi$ , которые связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Выражение  $ds = \rho d\rho d\varphi$  называется элементом площади в полярных координатах, и двойной интеграл принимает вид

$$\iint_S f(x, y) dS = \iint_S f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Для вычисления последнего двойного интеграла нужно заменить его двукратным. В полярной системе координат принято вначале интегрировать по переменной  $\rho$ , а затем интегрировать по переменной  $\varphi$ .

Пусть  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$  (рис. 13), тогда

$$\iint_S f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

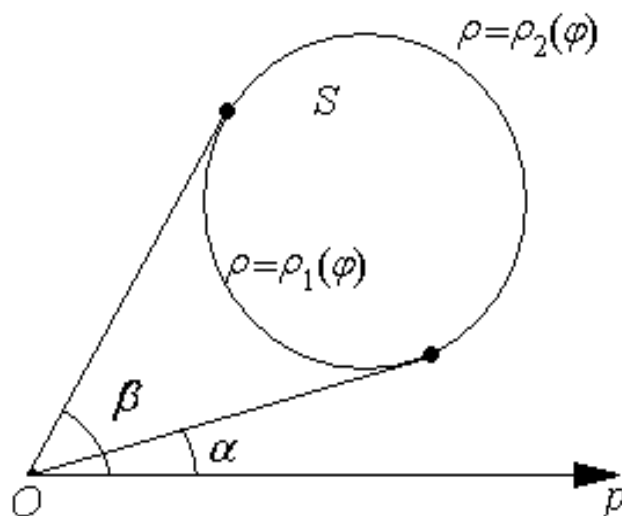


Рисунок 13

Пример 12. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

по области  $S$ , ограниченной линией  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

Решение. Областью  $S$  является множество точек круга  $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ , радиуса  $R=a$  с центром в точке  $O_1(a;0)$  (рис. 14). Так как  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , то уравнение границы области  $S$  в полярной системе будет  $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2a\rho \cos \varphi$ ,  $\rho^2 = 2a\rho \cos \varphi$ ,  $\rho = 2a \cos \varphi$ .

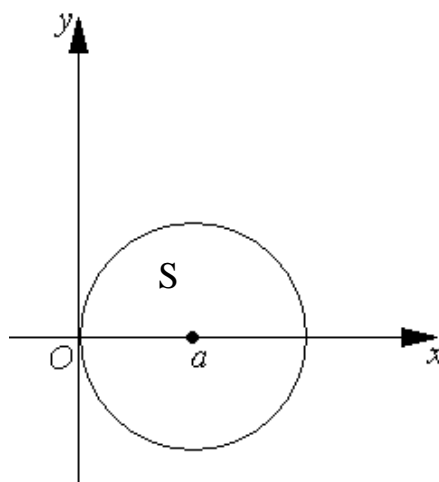


Рисунок 14

Тогда,

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy \Rightarrow \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \iint_S \rho^2 d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[ \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 d\rho \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \Big|_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{3} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^3}{3} \left( 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8a^3}{3} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{32a^3}{9}.$$

Пример 13. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi$ , где область  $S$  ограничена линиями (рис.15)  $\rho=R$  и  $\rho=2R \sin \varphi$ .

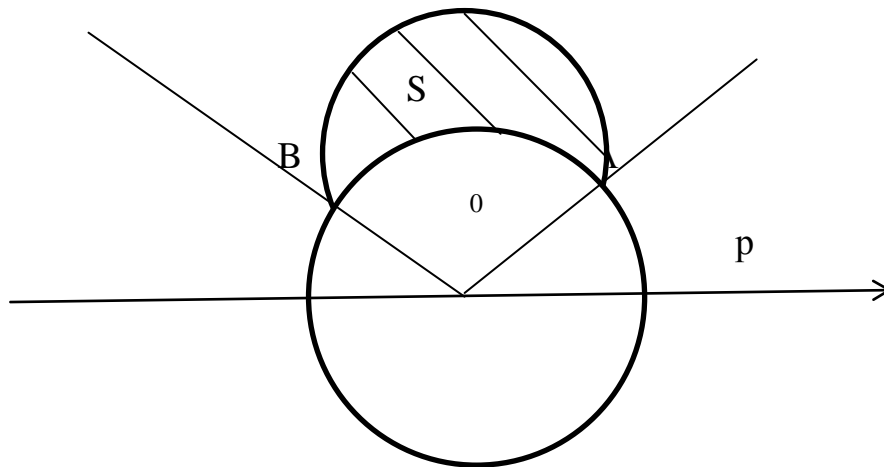


Рисунок 15

Решение. Чтобы определить, как изменяется в области  $S$  полярный угол  $\varphi$ , проведем лучи к точкам  $A$  и  $B$  области  $S$ . Решая совместно уравнения линий, ограничивающих область  $S$ , найдем значения угла  $\varphi$ , соответствующие лучам  $OA$  и  $OB$ . Тогда,

$$\begin{cases} \rho = R, \\ \rho = 2R \sin \varphi, \end{cases} \quad 2R \sin \varphi = R, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Таким образом, угол  $\varphi$  в области  $S$  изменяется от  $\frac{\pi}{6}$  до  $\frac{5\pi}{6}$ .

Полярный радиус  $\rho$  изменяется в области  $S$  от  $R$  до  $2R \sin \varphi$ . Тогда,

$$\iint_S \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi \int_R^{2R \sin \varphi} \rho^2 d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_R^{2R \sin \varphi} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{3} (8R^3 \sin^3 \varphi - R^3) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{3} R^3 (8 \sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \\
&= \frac{R^3}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8 \sin^4 \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{R^3}{12} (\pi + 3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Пример 14. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$ , где область S-полукруг, ограниченный окружностью  $\rho = 2a \cos \varphi$ , полярной осью OP и лежащий выше полярной оси (рис.16).

Решение. Построив область S, интегрируем

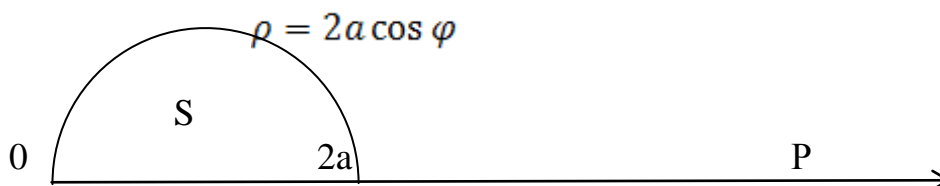


Рисунок 16

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho d\rho \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \\
&= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = -2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^2 d(\cos \varphi) = \\
&= -\frac{2}{3} a^2 \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} a^2.
\end{aligned}$$

Пример 15. Преобразовать к полярным координатам и затем вычислить двойной интеграл  $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где S – кольцо (рис.17), между окружностями

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x^2 + y^2 = 4.$$

Решение. Преобразуем данный двойной интеграл и уравнения линий, ограничивающих область S, к полярным координатам:

$$\iint_s \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} = \iint_s d\varphi d\rho;$$

$\rho = 1$  и  $\rho = 2$ -полярные уравнения данных окружностей.

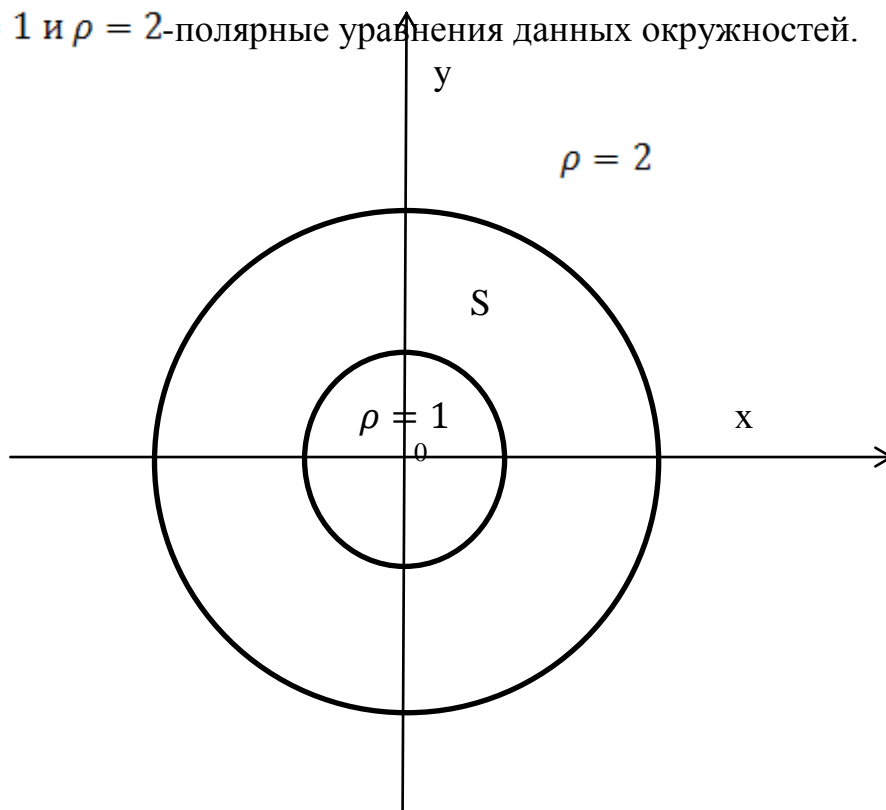


Рисунок 17

Тогда,  $\iint_s d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 d\rho = \int_0^{2\pi} (\rho \Big|_1^2) d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$ .

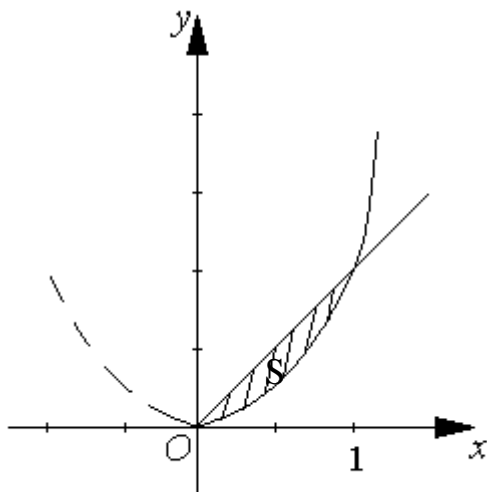
### Приложения двойных интегралов

#### 1) Вычисление площади плоской фигуры.

Площадь плоской фигуры, форма которой совпадает с формой области  $S$ , в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$S = \iint_s dx dy, \text{ а в полярной } S = \iint_s \rho d\rho d\varphi.$$

Пример 16. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми  $y = x^2, y = x$  (рис. 18).



Решение.

$$S = \iint_s dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^x dx =$$

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Рисунок 18

Пример 17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 32$ ,  $4y = -x^2$  (рис. 19).

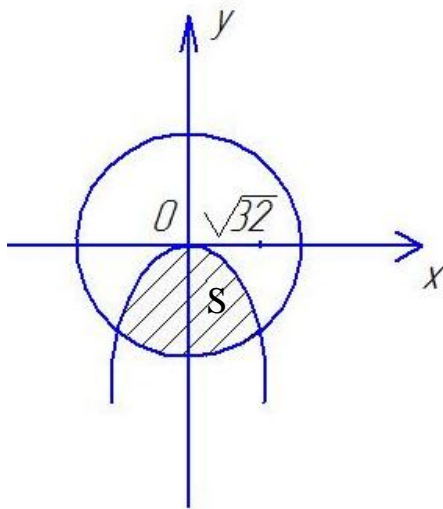


Рисунок 19

Решение. Решая систему  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ 4y = -x^2 \end{cases}$ , найдём абсциссы точек пересечения окружности и параболы  $x_1 = -4, x_2 = +4$ , тогда

$$S = \iint_S dx dy = \int_{-4}^{+4} dx \int_{-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{32-x^2}} dy =$$

$$= \int_{-4}^4 \left( -\frac{x^2}{4} + \sqrt{32-x^2} \right) dx =$$

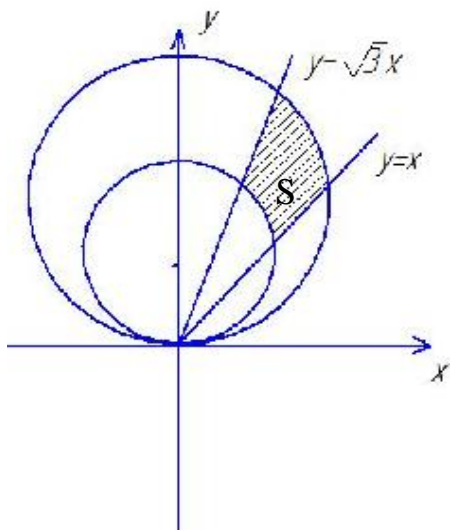
$$= \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{x}{2} \sqrt{32-x^2} + 16 \arcsin \frac{x}{\sqrt{32}} \right) \Big|_{-4}^4 = 8\pi + \frac{16}{3}$$

Замечание. При вычислении одного интеграла воспользовались табличной формулой

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Пример 18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 - 2y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  (рис. 20).

Решение. Имеем две окружности и 2 прямые. Переходим в полярную систему координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ , тогда уравнения окружностей примут вид  $\rho = 2 \sin \varphi$  и  $\rho = 6 \sin \varphi$ .



Площадь  $S = \iint_S \rho d\rho d\varphi =$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{6\sin\varphi} \rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (36\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi) d\varphi = 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 8 \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + 4 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$



## Рисунок 20

Пример 19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{и} \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad (\text{рис.21}).$$

Решение. Линиями являются окружности с центрами в точках  $(a;0)$  и  $(0;a)$ .

Если раскрыть скобки, то уравнения запишутся так:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0; \quad x^2 + y^2 - 2ay = 0,$$

а в полярных координатах  $\rho = 2a \cos \varphi, \rho = 2a \sin \varphi$ .

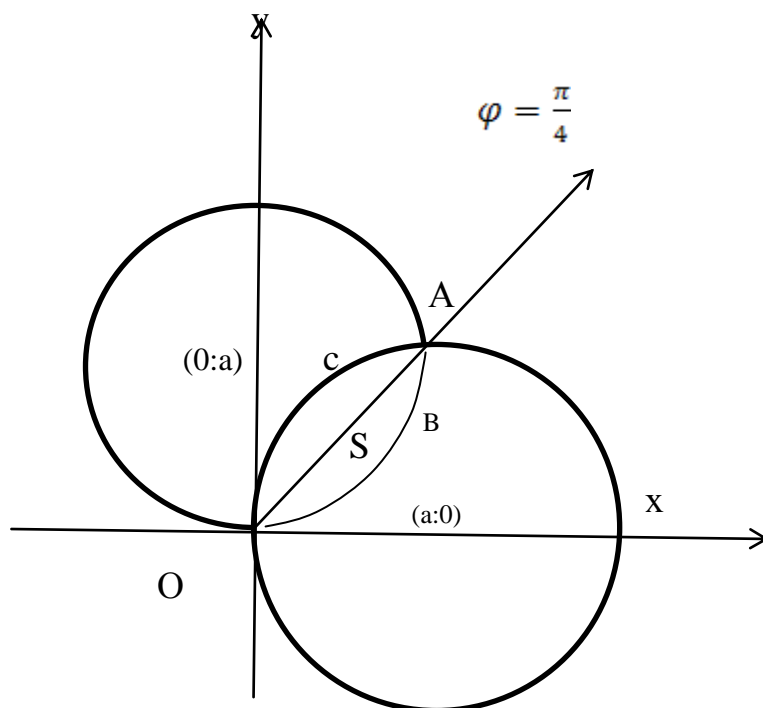


Рисунок 21

Прямая ОА делит искомую площадь на две части ОВАО и ОАСО. Решая совместно уравнения окружностей, установим, что точка А лежит на биссектрисе первого координатного угла.

Уравнение луча ОА:  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . В области ОВАО полярный радиус  $\rho$  изменяется от 0 до  $2a \sin \varphi$ , а полярный угол  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{4}$ . В области ОАСО  $\rho$  изменяется от 0 до  $2a \cos \varphi$ , а угол  $\varphi$  от  $\frac{\pi}{4}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(ОВАО)} \rho d\rho d\varphi + \iint_{(ОАСО)} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2a \sin \varphi} \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho d\rho = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi + 2a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = a^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + a^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Замечание. Легко было сразу усмотреть, что площади частей ОВАО и ОАСО равны между собой, а потому можно было вычислить площадь по формуле:  $S = 2 \iint_{(ОВАО)} \rho d\rho d\varphi$ .

## 2) Вычисление площади поверхности.

Пусть требуется вычислить площадь поверхности  $S$ , ограниченной линией  $\Gamma$ . Поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , где функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Пусть поверхность  $S$  проектируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$  с границей  $L$ , тогда площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dS = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

**Замечание.** Если поверхность  $S$  задана уравнением  $y = \varphi(x, z)$  или  $x = \psi(y, z)$ , то соответственно нужно проектировать на координатные плоскости  $xOz$  и  $yOz$  и изменить соответственно формулу для вычисления площади поверхности.

Пример 20. Вычислить площадь части плоскости  $y + z = 1$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$  (рис.22).

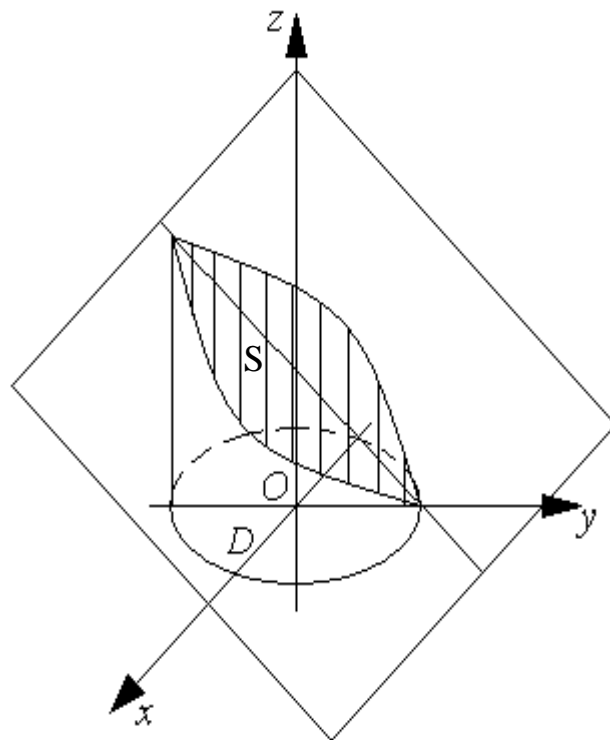


Рисунок 22

Решение. Рассматриваемая часть плоскости проектируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$  (в круг радиуса 1, с центром в начале координат).

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \sqrt{1+(-1)^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

Пример 21. Найти площадь той части поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ , которая вырезается цилиндром  $x^2 + z^2 = a^2$ .

Решение. На рисунке 23 изображена  $1/8$  часть искомой поверхности.

Уравнение поверхности имеет вид  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , поэтому,  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$

и выражение  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

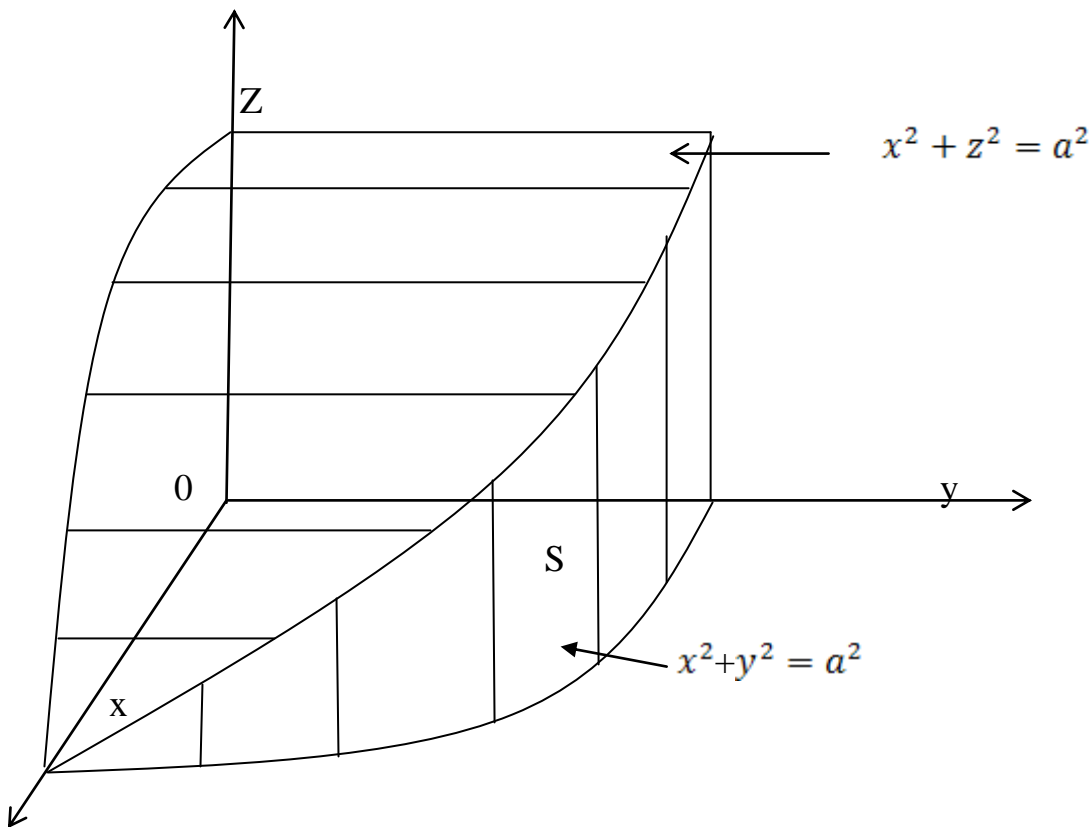


Рисунок 23

Область интегрирования представляет собой четверть круга, т.е. определяется условиями  $x^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} S &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = a \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a dx = a^2. \\
 S &= 8a^2.
 \end{aligned}$$

### 3) Вычисление массы плоской пластинки.

Рассмотрим тонкую пластинку, занимающую в плоскости  $xOy$  область  $S$ . Будем считать пластинку настолько тонкой, что толщиной можно пренебречь. Пусть пластинка неоднородная и имеет поверхностную плотность  $\rho = \rho(x, y)$ , где  $\rho(x, y)$  непрерывная функция.

Масса этой пластинки вычисляется по формуле  $M = \iint_S \rho(x, y) dx dy$ .

Пример 22. Пластинка  $S$  задана ограничивающими её кривыми  $S: x=1, y=0, y^2 = 5x (y \geq 0)$  (рис.24),

$\rho(x; y) = \frac{3}{2}x^2 + 3y$ . Найти массу пластинки.

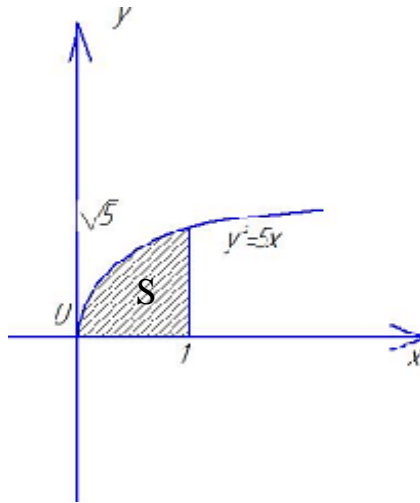


Рисунок 24

Решение. Масса пластинки

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \left( \frac{3}{2}x^2 + 3y \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{5x}} \left( \frac{3}{2}x^2 + 3y \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{3}{2}x^2 y + \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{5x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{3}{2}\sqrt{5x}x^2 + \frac{3}{2}5x \right) dx = \\ &= \left( \frac{3\sqrt{5}}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{15}{4}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{5}}{7} + \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Пример 23. Вычислить массу круглой пластинки радиуса  $R$ , если поверхностная плотность  $\rho(x, y)$  материала пластинки в каждой точке  $P(x, y)$  пропорциональна расстоянию точки  $(x, y)$  от центра круга, т.е.  $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ .

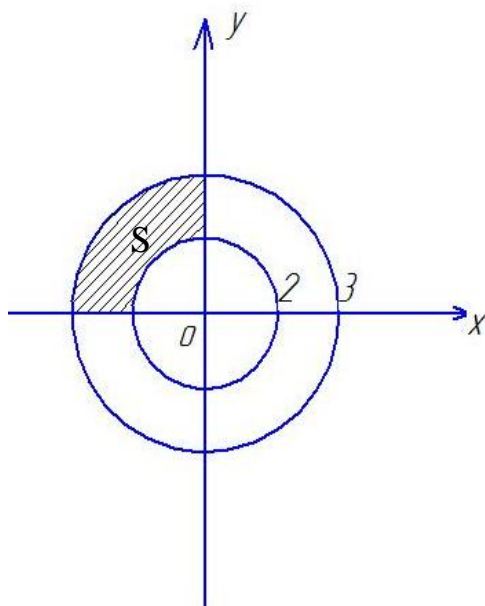
Решение. Масса нашей пластинки  $M = \iint_S k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  – круг радиуса  $R$  с центром в начале координат. Переходя в полярную систему

координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dxdy \Rightarrow \rho d\rho d\varphi \end{cases}$ , получим

$$M = \iint_S k \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho d\varphi = k \iint_S \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= k \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = k \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} k \pi R^3.$$

Пример 24. Найти массу пластинки  $S: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x=0, y=0$  ( $x \leq 0, y \geq 0$ ) (рис.25),  $\rho = \frac{-3x+y}{x^2+y^2}$ .



Решение. Имеем  $\frac{1}{4}$  часть кольца. Вычислим массу пластинки, переходя в полярную систему координат.

$$M = \iint_S \frac{(-3x+y)}{x^2+y^2} dxdy = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right\} =$$

Рисунок 25

$$\iint_S \frac{-3\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \iint_S (-3 \cos \varphi + \sin \varphi) d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-3 \cos \varphi +$$

$$+ \sin \varphi) d\varphi \int_2^3 d\rho = (-3 \sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho \Big|_2^3 =$$

$$- 3(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) - (\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}) = 3 - 1 = 2.$$

Пример 25. Найти массу пластинки, имеющей форму эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна ее расстоянию  $r$  от малой оси эллипса и при  $r=1$  она равна  $\lambda$ .

Решение. Согласно условию задачи в точке  $M(x,y)$  пластинки плотность  $\rho(M) = \lambda|x|$ . Масса правой половины пластинки

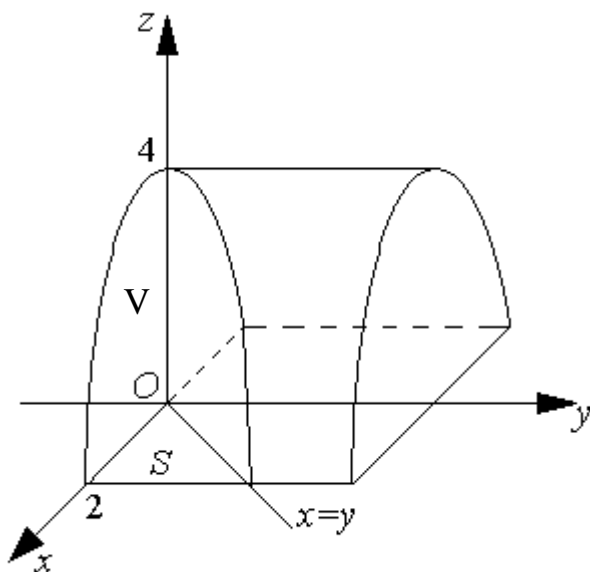
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M &= \iint_S \lambda x dx dy = \lambda \int_{-b}^b dy \int_0^{\frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b}} x dx = \frac{\lambda a^2}{2b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = \\ &= \frac{\lambda a^2}{2b^2} (b^2 y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{-b}^b = \frac{2}{3} a^2 b \lambda.\end{aligned}$$

Следовательно, масса всей пластины  $M = \frac{4}{3} a^2 b \lambda$ .

#### 4) Вычисление объема тела.

Объем тела  $V$ , ограниченного поверхностью  $z = f(x, y)$ , где  $f(x, y) \geq 0$ , плоскостью  $z = 0$  и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области  $S$ , а образующие параллельны оси  $Oz$ , равен двойному интегралу  $V = \iint_S f(x, y) dS$ .

Пример 26. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = 4 - x^2$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ),  $z = 0$  (рис. 26).



Решение. Имеем параболический цилиндр  $z = 4 - x^2$  и три плоскости  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Данное тело проецируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $S$ . Составляем двойной интеграл, значение которого даст объем тела.

$$\begin{aligned}V &= \iint_S (4 - x^2) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x (4 - x^2) dy = \\ &= \int_0^2 (4 - x^2) y \Big|_0^x dx = \int_0^2 (4 - x^2) x dx = \\ &= \left( 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8 - 4 = 4.\end{aligned}$$

Рисунок 26

Пример 27. Найти объем тела  $V$ , заданного ограничивающими его поверхностями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = 3$ .

Решение. Имеем параболический цилиндр  $y = \sqrt{x}$  и 3 плоскости  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = 3$  (рис. 27). Данное тело проецируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$ .

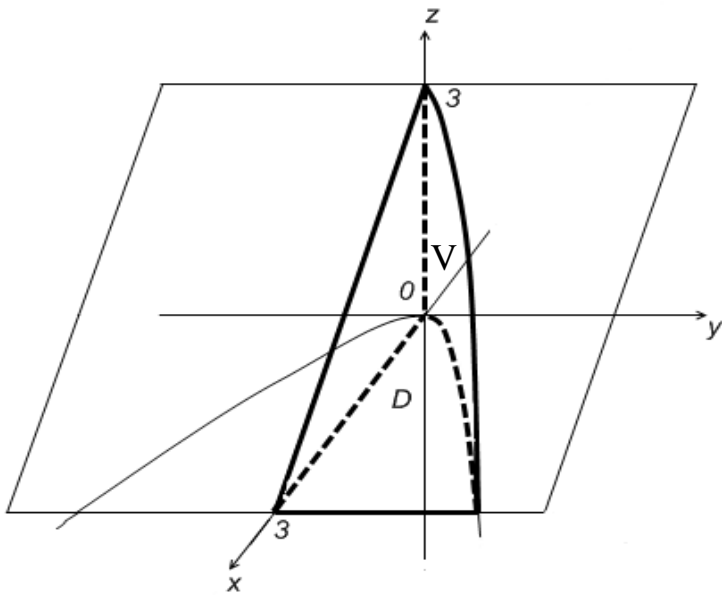


Рисунок 27

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (3-x) dx dy = \int_0^3 \left( \int_0^{\sqrt{x}} (3-x) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^3 (3-x)y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^3 (3-x)\sqrt{x} dx = \\
 &= \left( 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^3 = 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 3^{\frac{5}{2}} = \\
 &= 6 \cdot \sqrt{3} - \frac{18}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{12}{5} \cdot \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Пример 28. Найти объем тела V, заданного ограничивающими его поверхностями  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 15 \cdot x$ .

Решение. Имеем круглый

цилиндр  $x^2 + y^2 = 2$ , параболический

цилиндр  $y = \sqrt{x}$  и 3 плоскости  $z = 0$ ,

$y = 0$ ,  $z = 15 \cdot x$  (рис.28).

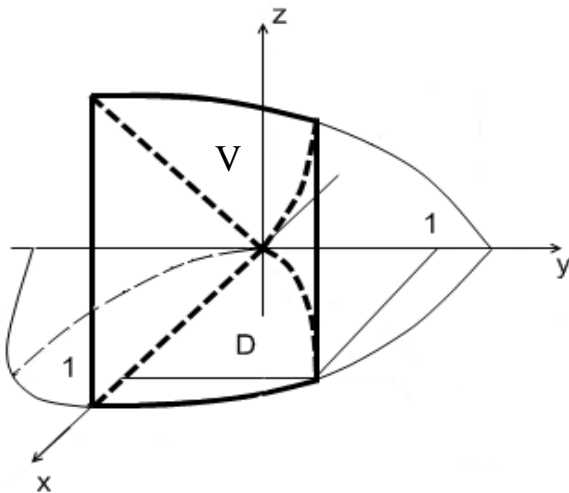


Рисунок 28

Данное тело проектируется на координатную плоскость xOy в область D. Найдем координаты точек пересечения окружности и параболы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases} \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = -2, \\ x_2 = 1, \end{matrix}$$

$$y = \pm 1.$$

Значение  $x_1 = -2$  не входит в ОДЗ.

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D 15x dx dy = 15 \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} x dx \right) dy = 15 \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dy = \frac{15}{2} \int_0^1 (2 - y^2 - y^4) dy = \\
 &= \frac{15}{2} \left( 2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{2} \left( 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 11.
 \end{aligned}$$

Пример 29. Найти объем тела V, заданного ограничивающими его поверхностями  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .

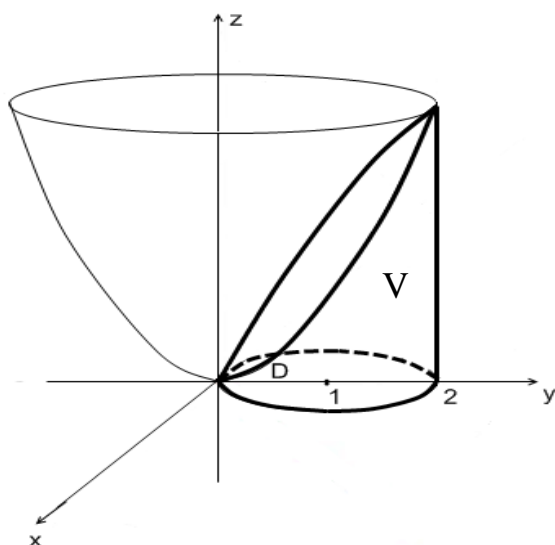


Рисунок 29

Решение. Имеем цилиндр  $x^2 + y^2 = 2y$ , ,  
 параболоид  $z = x^2 + y^2$ , и плоскость  $z = 0$ .

(рис.29). Данное тело проектируется на  
 координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$ .

Объем тела вычисляем по формуле

$$V = \iint_D z dx dy.$$

Переходим в полярную систему  
 координат.

Уравнение параболоида в полярной  
 системе координат

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

$$z = \rho^2.$$

Уравнение цилиндра в полярной системе координат.

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \sin \varphi,$$

$$\rho = 2 \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } V &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^\pi \rho^4 \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi = \frac{2^4}{4} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi = \\ &= 4 \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right)^2 d\varphi = \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \varphi \Big|_0^\pi - \sin 2\varphi \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \pi + \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^\pi = \pi + \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

Пример №30. Найти объем тела  $V$ , заданного ограничивающими его  
 поверхностями  $x^2 + y^2 = 3y$ ,  $x^2 + y^2 = 7y$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 0$  (рис.30).

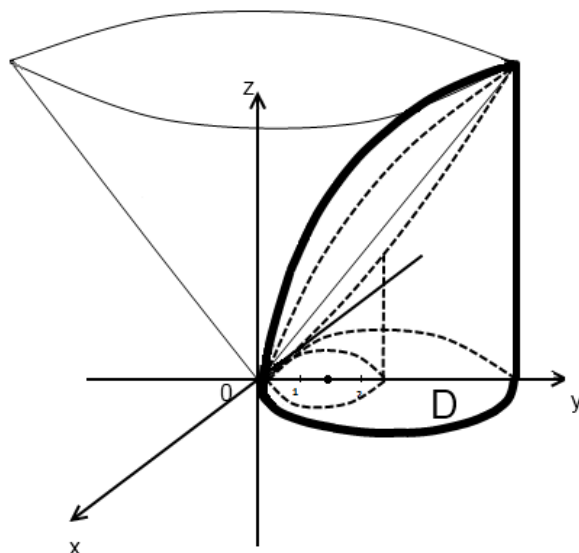




Рисунок 30

Решение: Имеем 2 цилиндра  $x^2+y^2=3y$ ,  $x^2+y^2=7y$ , конус  $z=\sqrt{x^2+y^2}$ , плоскость  $z=0$ . Данное тело проектируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$ . Уравнения окружностей в полярной системе координат  $x^2+y^2=3y \Rightarrow \rho = 3 \sin\varphi$ ,  $x^2+y^2=7y \Rightarrow \rho = 7 \sin\varphi$ . Тогда, объем тела будет равен двойному интегралу

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi. \\ dx \, dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \\ &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_{3 \sin\varphi}^{7 \sin\varphi} \rho^2 d\rho = \int_0^\pi \left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_{3 \sin\varphi}^{7 \sin\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (343 \sin^3\varphi - 279 \sin^3\varphi) d\varphi = \frac{343}{3} \int_0^\pi ((1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi) d\varphi \\ &\quad - \frac{27}{3} \int_0^\pi (1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{343}{3} \left( -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right) \Big|_0^\pi - \frac{27}{3} \left( -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{343}{3} \left( 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) - \frac{27}{3} \left( 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1264}{9} \end{aligned}$$

Пример №31. Найти объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2+y^2=4y$ ,  $z=8-x^2$ ,  $z=0$  (рис 31).

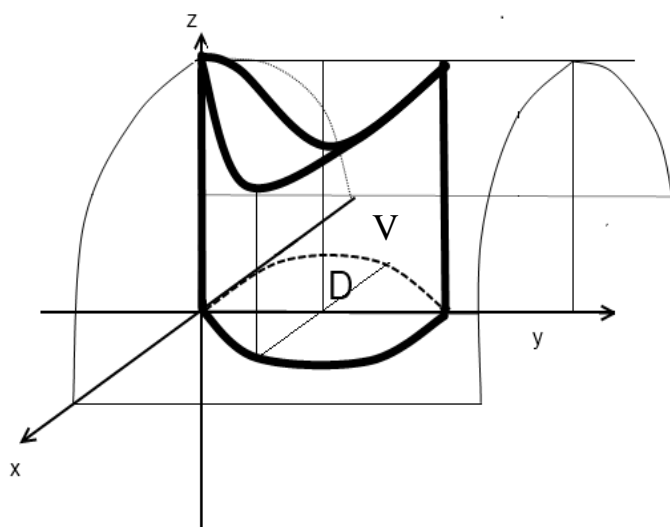


Рисунок 31

Решение.

Имеем круглый цилиндр  $x^2+y^2=4y$ , параболический цилиндр  $z=8-x^2$  и плоскость  $z=0$ . Данное тело проектируется на координатную плоскость  $xOy$  в область  $D$ .

Объем тела вычислим переходя в полярную систему координат

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (8 - x^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \iint_D (8 - \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi \\
 &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} (8 - \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho d\rho \\
 &= \int_0^\pi \left( 8 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^{4 \sin \varphi} d\varphi \\
 &= \int_0^\pi (64 \sin^2 \varphi - 64 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi \\
 &= 64 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\
 &\quad - 64 \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 32 \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^\pi \\
 &\quad - 64 \left( -\frac{1}{6} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16} \varphi - \frac{1}{64} \sin^4 \varphi \right) \Big|_0^\pi = 28\pi
 \end{aligned}$$

Замечание: Воспользовались табличной формулой.

$$\int \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{6} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \frac{1}{16} \varphi - \frac{1}{64} \sin^4 \varphi + C.$$

### Вычисление тройных интегралов в прямоугольных координатах

Расстановка пределов интегрирования для трехкратного интеграла будет

такова (рис. 32): 
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

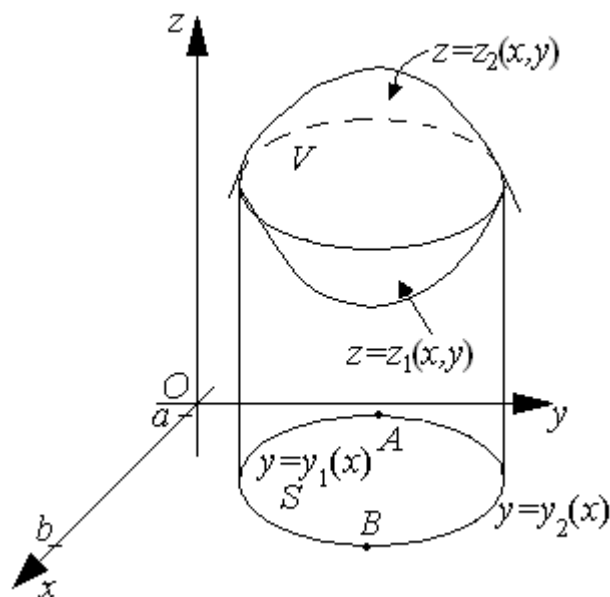


Рисунок 32

Пример 32. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ , где  $V$  – область, ограниченная плоскостями  $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$ .

Решение. Построим прямоугольный параллелепипед с тремя рёбрами, лежащими на осях координат (рис. 33).

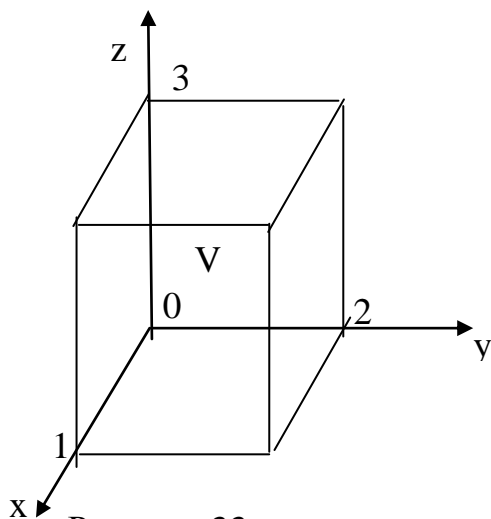


Рисунок 33

$$\begin{aligned} \iiint_V (x+y+z)dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^3 dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3x + 3y + \frac{9}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y\right) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (6x + 6 + 9)dx = (3x^2 + 15x) \Big|_0^1 = 18 \end{aligned}$$

Пример 33. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V (1+x)ydxdydz$ , где  $V$  – область, ограниченная поверхностями  $y=0, y=\sqrt{x}, z=0, z=3-x$ .

Решение. Имеем часть параболического цилиндра  $y=x^2$  и три плоскости  $y=0, z=0, z=3-x$ . Изобразим область интегрирования  $V$  (рис.34).

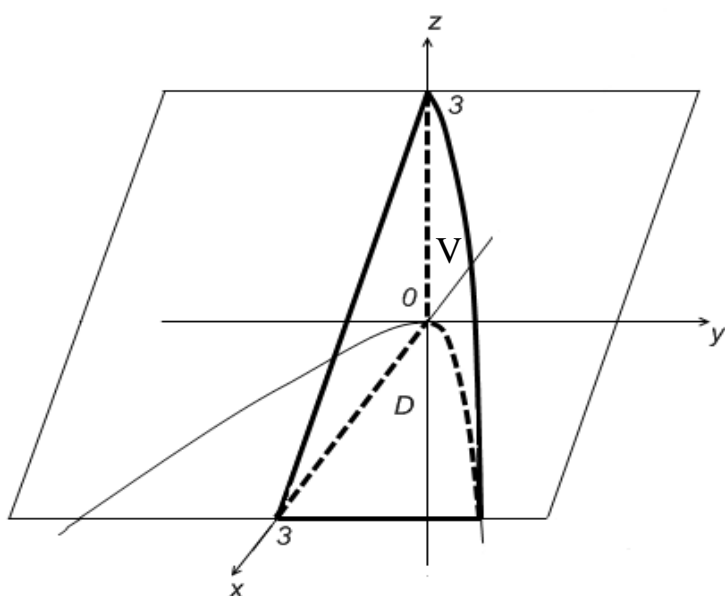


Рисунок 34

Тогда, 
$$\iiint_V (1+x)y dx dy dz = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{3-x} (1+x)y dz = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} (1+x)yz \Big|_0^{3-x} dy =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} (1+x)(3-x)y dy = \int_0^3 (1+x)(3-x) \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (3x + 2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^3 = \frac{45}{8}.$$

Пример 34. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x dx dy dz$ , где  $V$  – пирамида, ограниченная плоскостями  $x=0, y=0, z=0, z=1-x-y$ .

Решение. Имеем 4 плоскости. Изобразим область интегрирования  $V$  (рис.35).

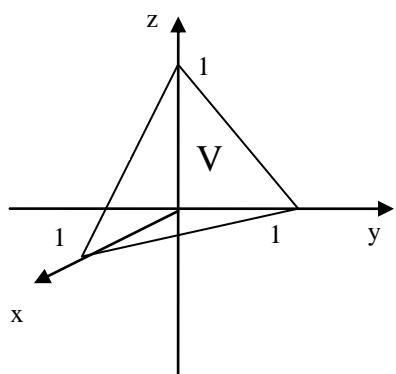


Рисунок 35

Тогда,

$$\iiint_V x dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 x \left( y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x - x^2 + \frac{1}{2} x^3 \right) dx = \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{8} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Пример 35. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где  $V$ - область, ограниченная плоскостями  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ .

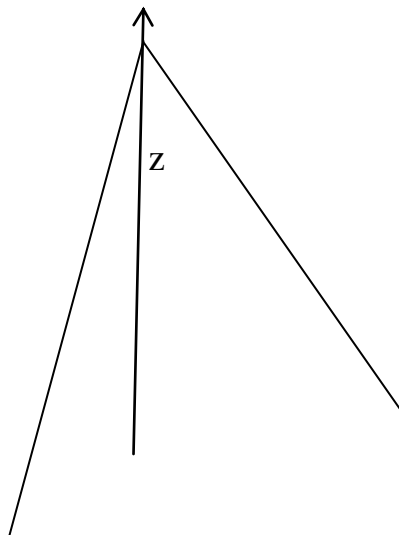




Рисунок 36

Решение. Эта область правильная, она ограничена сверху и снизу плоскостями  $z=0$  и  $z=1-x-y$  и проектируется на плоскость  $Oxy$  в правильную плоскую область  $S$ , представляющую собой треугольник, ограниченный прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=1-x$ . Поэтому

$$\iint_S \left[ \int_0^{1-x-y} xyz dz \right] dx dy.$$

Расставляя пределы в двукратном интеграле по области  $S$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1-x-y)^2 dy = \int_0^1 \frac{x}{24} (1-x)^4 dx = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Пример 36. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$ , где  $V$ -пирамида, ограниченная плоскостями  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  (рис.37).

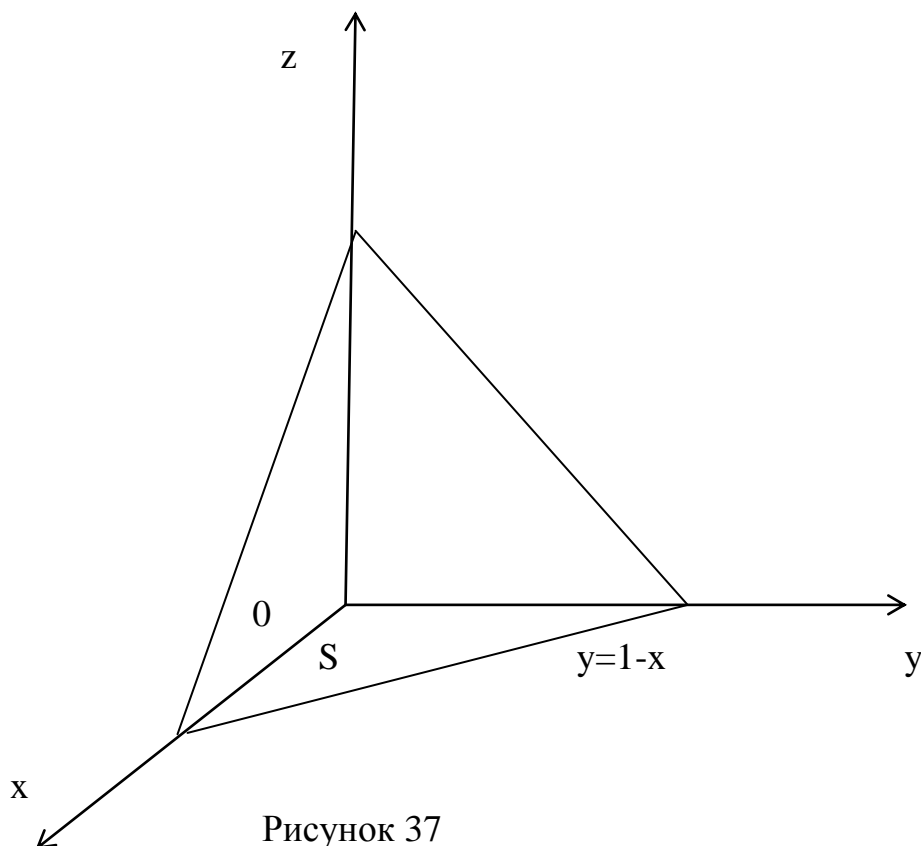


Рисунок 37

Решение. Область  $V$  проектируется на плоскость  $xOy$  в треугольник  $S$ , ограниченный прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=1-x$ .

$$\begin{aligned}
 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz &= \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( xz + yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (2 - 3x + x^3) dx = \\
 &= \frac{1}{6} \left( 2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

### Вычисление объемов тел с помощью тройных интегралов

Пример 37. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями  $x=0, z=0, y=1, y=3, x+2z=3$  (рис.38).

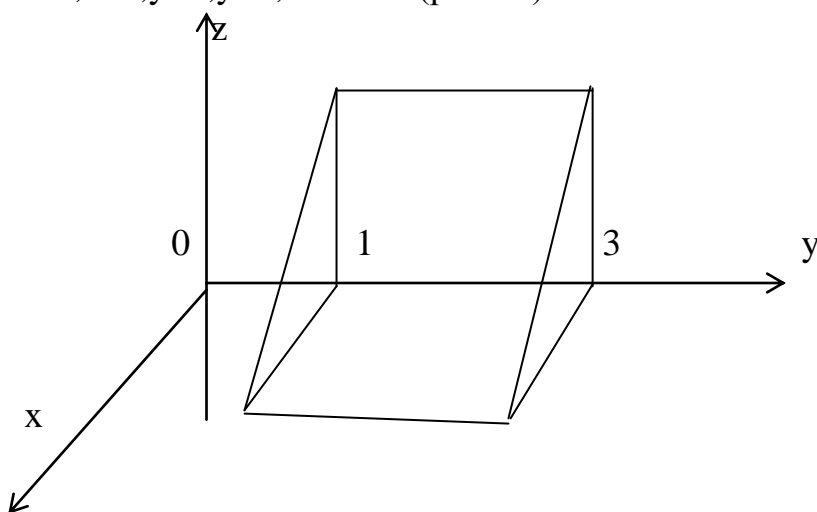


Рисунок 38

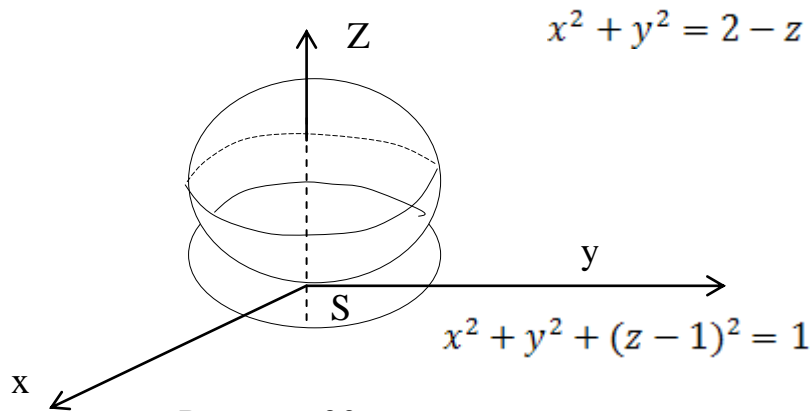
Решение.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} dz = \int_0^3 dx \int_1^3 \frac{3-x}{2} dy = \\
 &= \int_0^3 (3-x) dx = \left( 3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 38. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$  и  $x^2 + y^2 = 2 - z$  (рис.39).

Решение. Первая поверхность – сфера, вторая – параболоид вращения. Уравнение сферы преобразуем к виду  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ . Из этого уравнения видно, что центр сферы находится на оси  $Oz$  в точке  $(0;0;1)$ , а ее радиус равен 1.

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Подставляя значение  $x^2 + y^2$  из второго уравнение в первое, получим  $2 - z + z^2 - 2z = 0$ ,  $z^2 - 3z + 2 = 0$ . Решая его, найдем, что  $z_1 = 1, z_2 = 2$ . Точка, в которой  $z=2$ , - вершина параболоида, поэтому линия пересечения поверхностей находится на высоте  $z=1$  над плоскостью  $xOy$ .



Уравнение этой линии получим, подставляя  $z=1$  в уравнение любой из данных поверхностей и получим уравнение окружности  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1. \end{cases}$  Эта окружность без искажения проектируется на плоскость  $xOy$  в окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , а все тело проектируется в круг, ограниченный этой окружностью. Объем данного тела

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

Первое интегрирование будем вести по переменной  $z$ . При фиксированных  $x$  и  $y$  из уравнения сферы найдем  $z = 1 \pm \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ . На нижней полусфере  $z = 1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ , а из уравнения параболоида имеем  $z = 2 - (x^2 + y^2)$ . Тогда,

$$V = \iint_S dx dy \int_{1 - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}^{2 - (x^2 + y^2)} dz = \iint_S [1 - (x^2 + y^2) + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}] dx dy.$$

Так как областью интегрирования является круг, то удобнее перейти к полярным координатам. Поэтому,

$$\begin{aligned} V &= \iint_S [1 - \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2}] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho + \sqrt{1 - \rho^2}) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{7}{12} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

Пример 39. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2, z = 1$ .

Решение. Имеем параболоид  $z = x^2 + y^2$ , плоскость  $z = 1$ . Тело, объем которого нам нужно вычислить, изображено на рисунке 40.

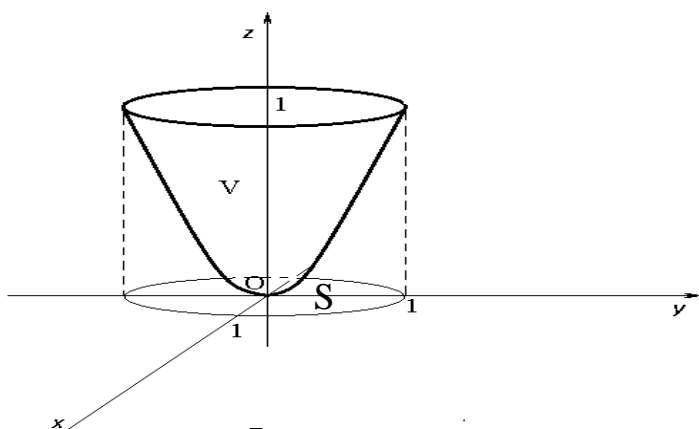


Рисунок 40

Параболоид и плоскость пересекаются по окружности  $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ , значит, областью  $S$  является круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , радиус которого  $r = 1$ .

$$V = \iiint_V dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{x^2+y^2}^1 dz = \iint_S (1 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy \Rightarrow \rho d\rho d\varphi \end{cases} = \iint_S (1 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho \right] = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 40. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и параболоидом  $z = x^2 + y^2$ .

Решение. Тело, объем которого нам нужно вычислить, изображено на рисунке 41.

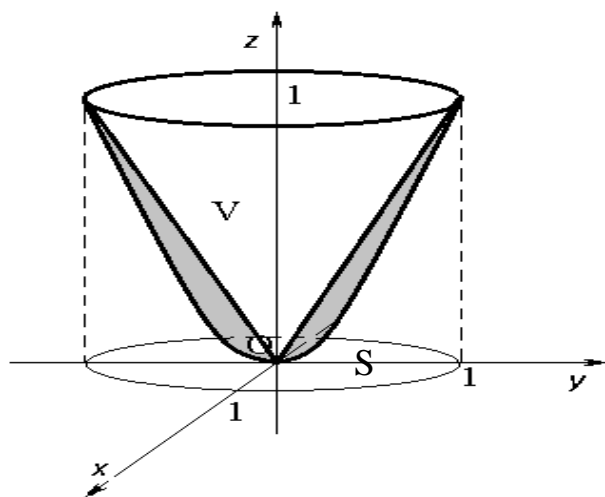


Рисунок 41

Конус и параболоид пересекаются по окружности  $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ , значит, областью  $S$  является круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , радиус которого  $r = 1$ .



$$V = \iiint_V dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint_S (\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy \Rightarrow \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \iint_S (\rho - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \int_0^1 (\rho - \rho^2) \rho d\rho \right] = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

### Варианты:

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования

1.1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx$	1.2. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$
1.3. $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$	1.4. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$
1.5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dy$	1.6. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx$
1.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx$	1.8. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$
1.9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f dy$	1.10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy$

**Задание 2.** Вычислить

2.1

$$\iint_D (12x^2 y^2 + 16x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

2.2

$$\iint_D (9x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

2.3

$$\iint_D (36x^2 y^2 - 96x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

2.4

$$\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

2.5

$$\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

2.6

$$\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

2.7

$$\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

2.8

$$\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

2.9

$$\iint_D (4xy + 3x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

2.10

$$\iint_D (12xy + 9x^3 y^3) dx dy, D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

### Задание 3. Вычислить

$$3.1 \quad \iint_D y e^{\frac{xy}{2}} dx dy, D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4.$$

3.2

$$\iint_D y \sin \frac{xy}{2} dx dy, D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}.$$

3.3

$$\iint_D y \cos xy dx dy, D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2.$$

3.4

$$\iint_D y e^{\frac{-xy}{4}} dx dy, D: x=0, y=2, y=x.$$

3.5

$$\iint_D y \sin xy dx dy, D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2$$

3.6

$$\iint_D y \cos \frac{xy}{2} dx dy, D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}.$$

3.7

$$\iint_D 4ye^{2xy} dx dy, D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1.$$

3.8

$$\iint_D 4y^2 \sin xy dx dy, D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x.$$

3.9

$$\iint_D y \cos 2xy dx dy, D: y=0, y=2, x=1, x=3.$$

3.10

$$\iint_D y^2 e^{-xy/2} dx dy, D: x=0, x=3, y=2, y=4.$$

**Задание 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$4.1. \quad y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$$

$$4.2. \quad x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$$

$$4.3. \quad x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \leq 0).$$

$$4.4. \quad x = 8 - y^2, x = -2y.$$

$$4.5. \quad y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$$

$$4.6. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$$

$$4.7. \quad x = 5 - y^2, x = -4y.$$

$$4.8. \quad x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = -x^2 (y \leq 0).$$

$$4.9. \quad y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 (x \geq 0).$$

$$4.10. \quad y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 9.$$

**Задание 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$5.1 \quad y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

$$5.2 \quad x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$5.3 \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

$$5.4 \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$$

$$5.5 \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

$$5.6 \quad x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$$

$$5.7 \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$$

$$5.8 \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = 0, y = \sqrt{3}x.$$

$$5.9 \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$$

$$5.10 \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = x, x = 0.$$

**Задание 6.** Пластинка  $D$  задана ограничивающими ее кривыми,  
 $\rho$  - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$$6.1 \quad D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0), \\ \rho = 7x^2 + y.$$

$$6.2 \quad D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0), \\ \rho = (x + y)/(x^2 + y^2).$$

$$6.3 \quad D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0), \\ \rho = 7x^2/2 + 5y.$$

6.4

$$D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = (2x + 5y) / (x^2 + y^2).$$

6.5

$$D: x = 2, y = 0, y^2 = 2x (y \geq 0),$$

$$\rho = 7x^2 / 8 + 2y.$$

6.6

$$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = (x + y) / (x^2 + y^2).$$

6.7

$$D: x = 2, y = 0, y^2 = x / 2 (y \geq 0),$$

$$\rho = 7x^2 / 2 + 6y.$$

6.8

$$D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \leq 0),$$

$$\rho = (2x - 3y) / (x^2 + y^2).$$

6.9

$$D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0),$$

$$\rho = x + 3y^2.$$

6.10

$$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \leq 0),$$

$$\rho = (x - y) / (x^2 + y^2).$$

**Задание 7.** Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$7.1 \quad y = 15\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$$

$$7.2 \quad y = 5\sqrt{x}, y = 5x/3, z = 0, z = 5 + 5\sqrt{x}/3.$$

$$7.3 \quad x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z = 15x.$$

$$7.4 \quad x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 0, z = 12y.$$

$$7.5 \quad x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 1/2.$$

$$7.6 \quad x = 5\sqrt{y}/2, x = 5y/6, z = 0, z = 5/6(3 + \sqrt{y})$$

$$7.7 \quad x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0, z = 0, z = 30y.$$

$$7.8 \quad x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 0, z = 12x/5.$$

$$7.9 \quad y = 17\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = 1/2.$$

$$7.10 \quad y = 5\sqrt{x}/3, y = 5x/9, z = 0, z = 5(3 + \sqrt{x})/9.$$

**Задание 8.** Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$8.1 \quad x^2 + y^2 = 2y, z = 5/4 - x^2, z = 0.$$

$$8.2 \quad x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0.$$

$$8.3 \quad x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0 (z \geq 0).$$

$$8.4 \quad x^2 + y^2 - 4x = 0, z = 8 - y^2, z = 0.$$

$$8.5 \quad x^2 + y^2 = 6x, x^2 + y^2 = 9x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \leq 0).$$

$$8.6 \quad x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 36, z = 0 (z \geq 0).$$

$$8.7 \quad x^2 + y^2 = 2y, z = 9/4 - x^2, z = 0.$$

$$8.8 \quad x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 5y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0.$$

$$8.9 \quad x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0, z = x^2 + y^2 - 4, z = 0 (z \geq 0).$$

$$8.10 \quad x^2 + y^2 = 4x, z = 10 - y^2, z = 0.$$

**Задание 9.** Вычислить тройной интеграл

$$9.1 \quad \iiint_V (1 + 2x^3) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = 9x, y = 0, x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, z = 0. \end{cases}$$

$$9.2 \quad \iiint_V (15x + 30z) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} z = x^2 + 3y^2, z = 0, \\ y = x, y = 0, x = 1. \end{cases}$$

$$9.3 \quad \iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = x, y = 0, x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, z = 0. \end{cases}$$

$$9.4 \quad \iiint_V (4 + 8z^3) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = x, y = 0, x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, z = 0. \end{cases}$$

$$9.5 \quad \iiint_V y dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = 15x, y = 0, x = 1, \\ z = xy, z = 0. \end{cases}$$

$$9.6 \quad \iiint_V (1 + 2x^3) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = 36x, y = 0, x = 1, \\ z = \sqrt{xy}, z = 0. \end{cases}$$

$$9.7 \quad \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$$

$$V \begin{cases} \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$9.8 \quad \iiint_V 21xz dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} y = x, y = 0, x = 2, \\ z = xy, z = 0. \end{cases}$$

$$9.9 \quad \iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} z = 10y, x + y = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$9.10 \quad \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^6}$$

$$V \begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

### **Библиографический список**

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (часть 2). - М.: «Айрис-пресс», 2002г. - 253с.
2. Галин Э.Х. и др. Математика (часть 2). БГАУ, Уфа. 2012г. -165с.

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики  
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики  
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.