



Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра прикладной механики и компьютерного  
инжиниринга

### **Б1.В.03 МЕХАНИКА**

Методические указания к практическим занятиям

## **ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ**

Направление подготовки  
**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Уфа 2023

УДК 539  
ББК 30.12  
М54

Рекомендовано к изданию методической комиссией  
энергетического факультета 23 марта 2023 г. (протокол №8).

Составитель: доцент Ахмаров Р.Г.

Рецензент: доцент кафедры «Технология металлов  
и ремонт машин» Гаскаров И.Р.

Ответственный за выпуск: заведующий кафедрой прикладной механики и  
компьютерного инжиниринга, к.т.н., доцент Ахметьянов И.Р.

# Построение эпюр внутренних силовых факторов

**Цель занятия:** Определение внутренних силовых факторов при растяжении - сжатии, кручении и изгибе.

**Задание:** Изучить методику построения эпюр внутренних силовых факторов при простых формах деформаций.

## 1. Внутренние силы. Метод сечений

Под внутренними силами (или внутренними усилиями) в сопротивлении материалов понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частицами элемента, возникающие под действием внешних сил.

Для определения внутренних сил, возникающих в теле под нагрузкой, в сопротивлении материалов пользуются методом сечений.

Сущность метода сечений заключается в том, что тело мысленно разрезается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен нее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза: оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил (рис.1.1).

Очевидно что, согласно третьему закону Ньютона внутренние силы, действующие в сечении оставшейся и отброшенной частей тела, равны по модулю, но противоположны по направлению.

В соответствии с принятым допущением о непрерывности материала тела можно утверждать, что внутренние силы, возникающие в теле представляют собой силы, равномерно или неравномерно распределенные по сечению.

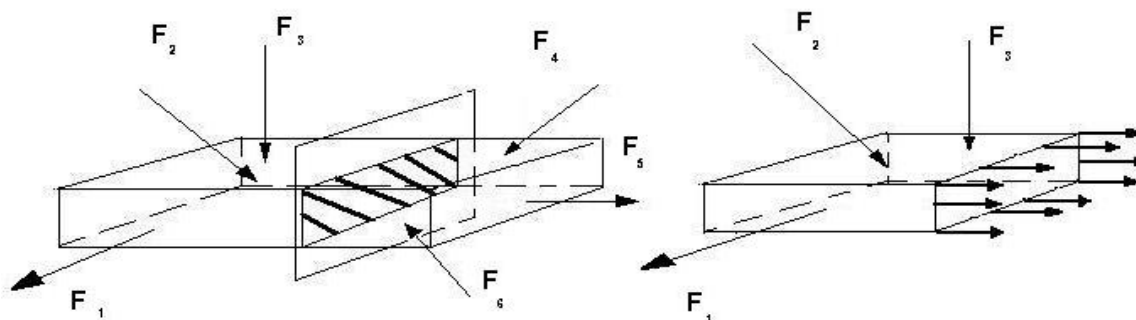


Рисунок 1.1 К определению внутренних силовых факторов.

По законам механики все внутренние силы, распределенные по сечению, приводим к центру тяжести сечения бруса-точке  $O$ , в результате чего получаем главный вектор  $R$  и главный момент  $M$ . Если главный вектор и главный момент спроектировать на ось стержня  $Z$  и главные центральные оси сечения  $Y$  и  $X$ , то на каждой стороне сечения получим шесть внутренних силовых факторов: три силы-  $N_z$ ,  $O_y$ ,  $O_x$  и три момента -  $M_z$ ,  $M_y$  и  $M_x$  (рис.1.2).

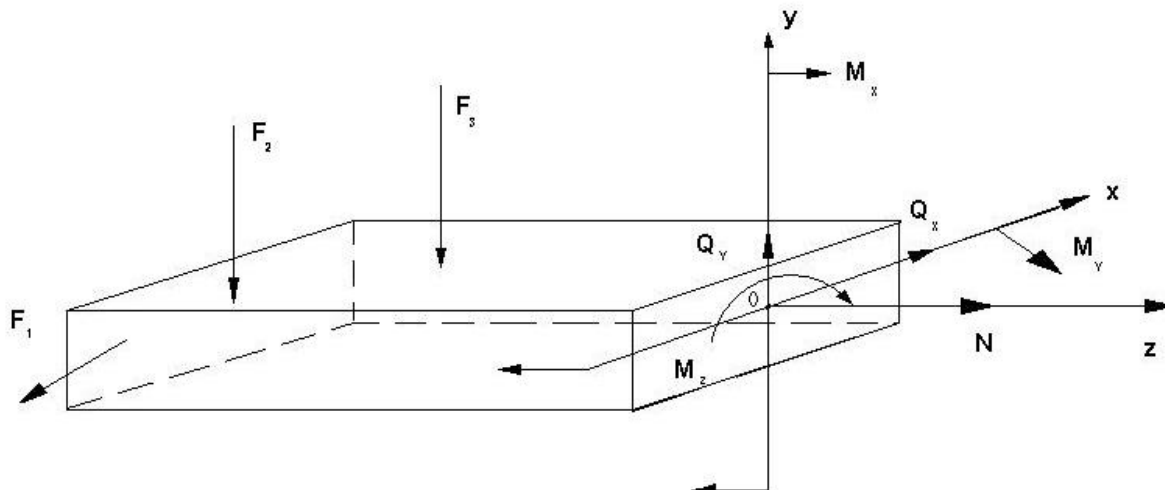


Рисунок 1.2 Расчетная схема рассматриваемой части бруса.

Сила  $N_z$  - вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие); силы  $O_y$  и  $O_x$  - сдвиг сторон сечения соответственно в направлении  $Y$  и  $X$ ; момент  $M_z$  - вызывает кручение стержня;  $M_y$  и  $M_x$  - изгиб стержня в главных плоскостях ( $XZ$  и  $YZ$ ). По этому для усилий и моментов в сечении приняты следующие названия:

$N_z$  - продольная или осевая сила;  
 $O_y$  и  $O_x$  поперечные силы;  
 $M_z$  - крутящий момент;  
 $M_y$  и  $M_x$  - изгибающие моменты.

Полученные внутренние силовые факторы определяются из уравнений статики, которых (в общем случае нагружения) может быть шесть:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0 \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 0; & \sum M_z &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении стержня при действии любой нагрузки. Для этого необходимо сделать следующее:

1. Найти главные центральные оси поперечного сечения стержня.

2. Разделить мысленно стержень в том поперечном сечении, где нужно найти внутренние силы.
3. Отбрасывать одну из частей тела и действие отброшенной части на оставшуюся заменить внутренними силами.
4. Составить уравнения равновесия для оставшейся части и вычислить усилия  $N_z$ ,  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , и  $M_z$ .

## 2. Растяжение и сжатие

При растяжении и сжатии в сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор - продольная сила  $N_z$ , представляющая собой равнодействующую внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса.

Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекции на его продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения т.е.

$$N = \sum F_{iz}$$

Пример 1. Для заданного бруса (рис.2.1) построить эпюру продольных сил.

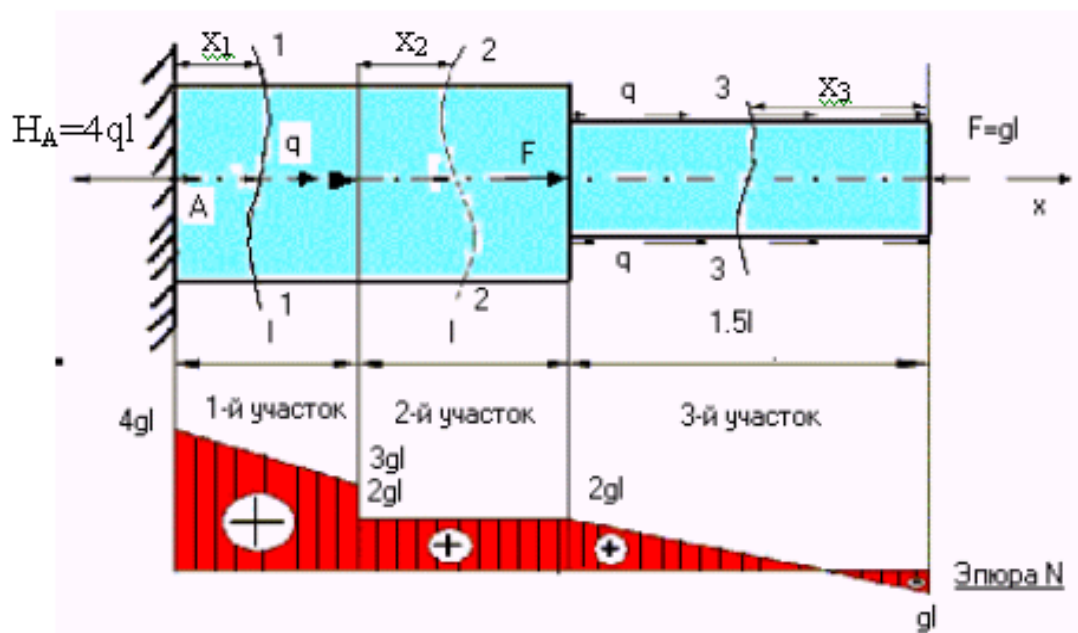


Рисунок 2.1 Расчетная схема бруса и эпюра продольных сил.

Решение 1. Решение следует начинать с определения реакции опоры. Для этого составляем уравнение равновесия статики:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad -H_A + ql + F + 2q \cdot 1,5l - F = 0 \quad H_A = 4ql.$$

1. Определяем внутренние силы. Для этого воспользуемся соотношением:

$$N = \sum F_{ix}$$

При этом принимают следующее правило знаков:

Если внешняя нагрузка направлена в сторону рассматриваемого сечения (продольное сжатие, рис.2.2а), то эту нагрузку берут со знаком "-". В случае, если внешняя нагрузка направлена от сечения, то знак этой нагрузки принимают "+" (продольное растяжение, рис.2.2б)

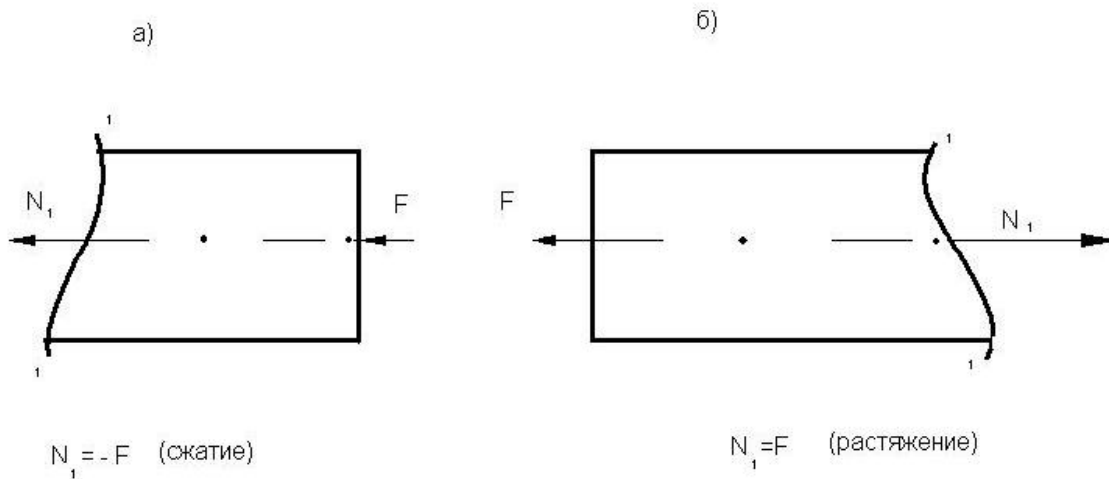


Рисунок 2.2 К определению продольных сил в сечении бруса.

Заданный брус состоит из трех грузовых участков. Границами участков нагружения являются места приложения внешних сил и изменения размеров поперечного сечения. В пределах каждого участка проведем сечение и рассмотрим равновесие той части, для которой легче составить уравнение равновесия.

Сечение 1-1 (слева). Составляем уравнение равновесия рассматриваемого сечения (рис.2.3)

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -H_A + qx_1 + N_1 = 0.$$

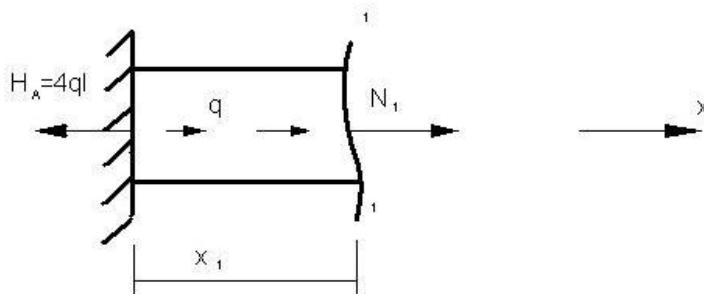


Рисунок 2.3 Сечение 1-1(слева).

Откуда  $N_1 = H_A - qx_1$  (уравнение прямой наклонной линии), где  $0 \leq x_1 \leq 1$ .

При  $x_1 = 0$   $N_1 = H_A = 4ql$ .

При  $x_1 = 1$   $N_1 = H_A - ql = 4ql - ql = 3ql$ .

Сечение 2-2 (слева).  $\sum F_{kx} = 0; -H_A + q1 + F + N_2 = 0; N_2 = H_A - q1 - F = 4ql - 2ql = 2ql$ .

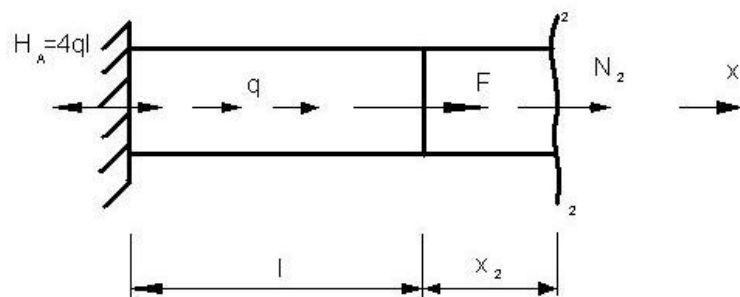


Рисунок 2.4 Сечение 2-2

Сечение 3-3 (справа)  $\sum F_{kx} = 0$ ;  $-N_3 + 2qx_3 - F = 0$

$N_3 = -F + 2qx_3$  (уравнение прямой наклонной линии),  $0 \leq x_3 \leq 1,5l$ .

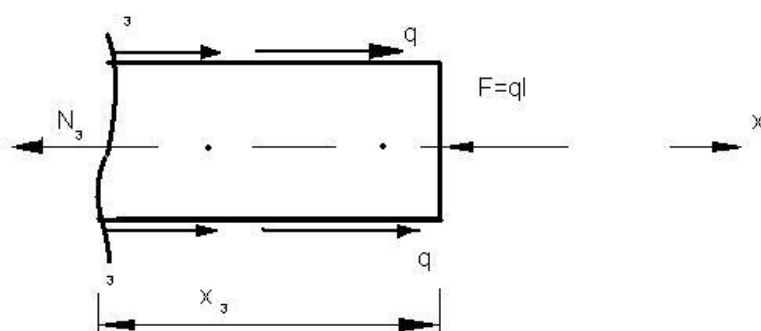


Рисунок 2.5 Сечение 3-3 (справа).

При  $x_3 = 0$

$$N_3 = -ql.$$

При  $x_3 = 1,5l$

$$N_3 = -F + 2ql = 2ql.$$

По результатам вычислений строим график изменения продольных сил по длине бруса. Такой график называют эпюрой внутренних сил. Для этого, проведя ось абсцисс параллельно оси бруса, отложим в произвольно выбранном масштабе найденные значения продольных сил по оси ординат; при этом положительные  $N$  откладываем вверх, а отрицательные - вниз от оси (рис.2.1).

Эпюру принято штриховать перпендикулярно оси бруса. Каждая линия штриховки (ордината графика) в выбранном масштабе выражает значение продольной силы в соответствующем (расположенном против него) поперечном сечении бруса. В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получают скачкообразные изменения ординат - "скачки". Размер "скачка" равен приложенной в соответствующем месте бруса внешней сосредоточенной силе.

## 2. Кручение

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор- крутящий

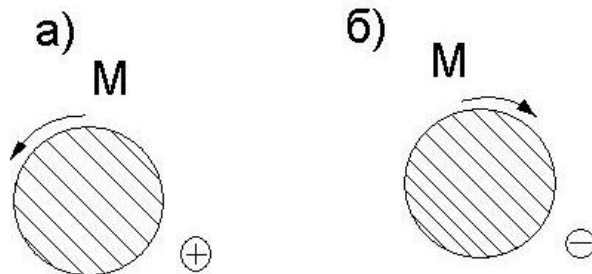


Рисунок 3.1 К определению внутренних сил при кручении

момент  $M_k$ . Кручение возникает в валах, винтовых пружинах и других элементах конструкций. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами (парами сил), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях брусев, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений. На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. При расчетах на прочность и жесткость знак крутящего момента не имеет физического смысла, но для удобства построения эпюры  $M_k$  примем следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в сторону отсеченной части бруса действующий на него внешний момент направлено против часовой стрелки (рис.3.1 а). В обратном случае знак крутящего момента принимается отрицательным.

Пример 1. Для вала приведенного на рис.3.2 построить эпюру крутящих моментов при следующих исходных данных:  $m_1 = 2ml$ ,  $m_2 = 3ml$ ,  $m_3 = 1,5ml$ .

Решение:	Сечение 1-1	$M_{k1} = -m_1 = -2ml$ .
	Сечение 2-2	$M_{k2} = -m_1 + m_2 = -2ml + 3ml = ml$ .
	Сечение 3-3	$M_{k3} = -m_1 + m_2 + m_3 = -2ml + 3ml + 1,5ml = 2,5ml$ .



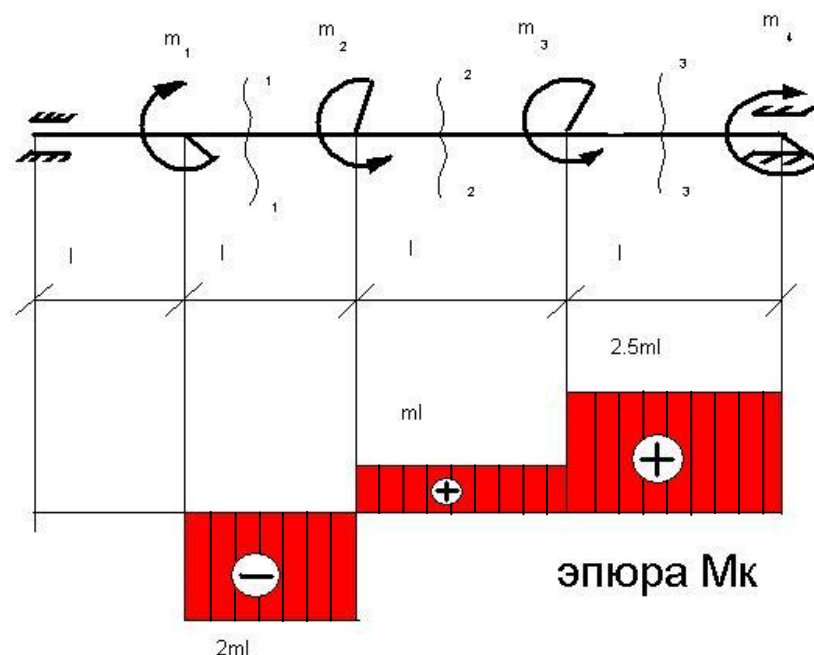


Рисунок 3.2 Расчетная схема бруса и эпюра крутящих моментов.

По результатам вычислений строим эпюру крутящих моментов  $M_k$  (рис.3.2). В сечении, в котором к брусу приложен внешний скручивающий сосредоточенный момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

**Пример 2.** Для бруса защемленного одним концом, при схеме нагружения приведенного на рис.3.3, построить эпюру крутящих моментов.

**Решение.** Для брусев, имеющих один неподвижно закрепленный (заделанный) и один свободный конец, крутящие моменты в их поперечных сечениях удобно определять из рассмотрения равновесия части, расположенной со стороны свободного конца. Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента в заделке.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Сечение 1. } M_{k1} = -mx_1 & 0 \leq x_1 \leq a & \\
 \text{При } x_1=0 & & M_{k1}=0 \\
 \text{При } x_1=a & & M_{k1}=-ma
 \end{array}$$

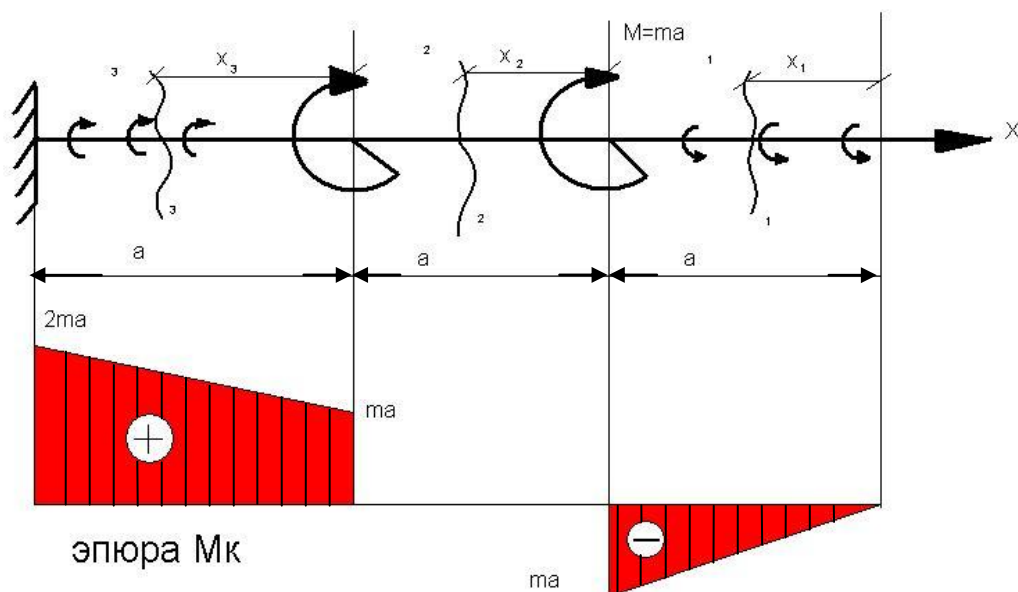


Рисунок 3.3 Эпюра крутящих моментов.

Сечение 2-2.  $M_{k2} = -ma + M = 0$

Сечение 3-3.  $M_{k3} = -ma + M + M + mx_3 \quad 0 \leq x_3 \leq a$

При  $x_3=0 \quad M_{k3} = -ma + ma + ma = ma$

При  $x_3=a \quad M_{k3} = ma + ma = 2ma$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 3.3

## 4. Изгиб

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев.

Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов. В случае, когда изгибающий момент в поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящий через одну из главных центральных осей инерции сечения и изогнутая ось бруса лежит в этой плоскости, то такой изгиб называют прямым. Случай, когда плоскость действия изгибающего момента в поперечном сечении бруса не проходит не через одну из главных осей инерции сечения и изогнутая ось бруса не лежит в плоскости действия изгибающего момента, называется косым, изгибом. При действии на брус внешних нагрузок, расположенных в одной плоскости, проходящей через ось бруса, в каждом поперечном сечении бруса возникают следующие внутренние силовые факторы: а) продольная сила  $N$ , приложенная в центре тяжести сечения, действующая перпендикулярно к сечению; б) поперечная сила  $Q$  действующая в плоскости поперечного сечения, проходящая через его

центр тяжести; в) изгибающий момент  $M_{из}$ , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению.

Поперечная сила  $Q$  положительна, если она стремится вращать отсеченную часть по часовой стрелке относительно любой точки  $C$ , расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению (рис .4.1 а). Противоположное направление - отрицательное (рис.4.1б).

Изгибающий момент  $M_{из}$  в поперечном сечении считается положительным, если силы расположенные слева и справа от сечения направлены вверх или изгибает ее выпуклостью вниз. (Рис.4.1 в). В случае, если силы расположенные слева и справа от сечения направлены вниз или изгибает ее выпуклостью вверх (рис.4.1 г), то изгибающий момент в поперечном сечении считается отрицательным.

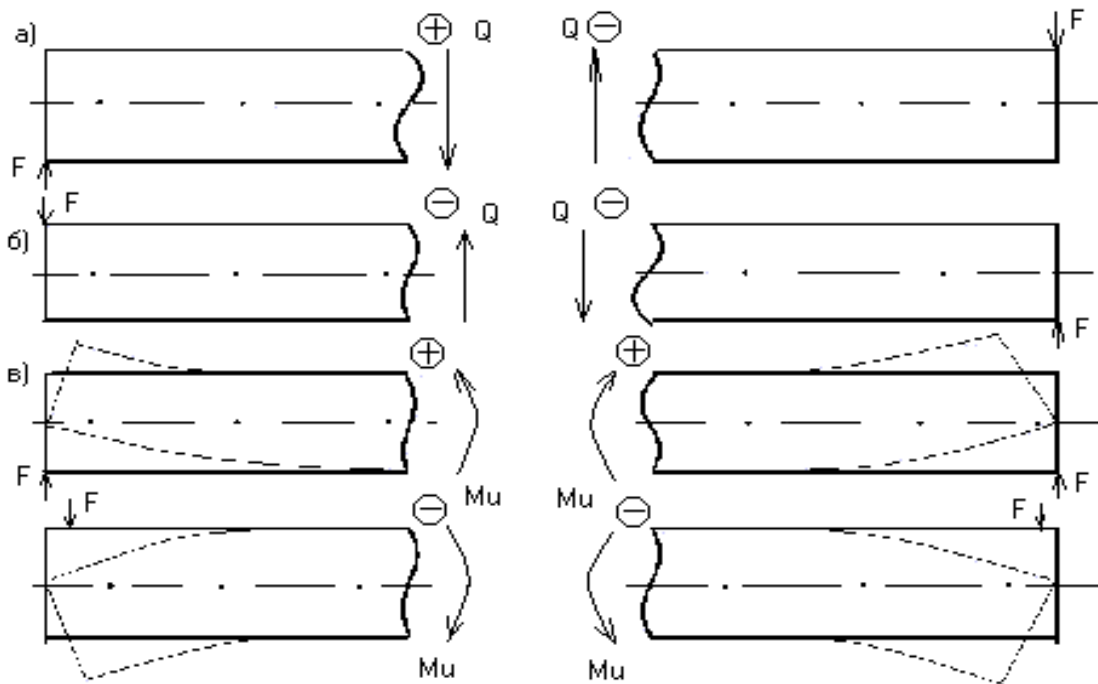


Рисунок 4.1 К определению внутренних сил при изгибе.

Поперечная сила  $Q$  в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $Y$  всех внешних сил, приложенных к мысленно отсеченной части балки:

$$Q = \sum F_{iy}$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме, моментов всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части балки, относительно той точки на продольной оси балки, через которую проходит рассматриваемое сечение,

$$M_u = \sum M(F_i)$$

## 4.1 Виды опор и опорные реакции

Неподвижность конструкции под действием внешних нагрузок обеспечивается благодаря наличию опор, соединяющих ее с основанием. В опорах возникают реакции, которые вместе с заданными нагрузками представляют уравновешенную систему внешних сил, действующих на конструкцию.

Рассмотрим различные типы опор плоских систем.

1. **Защемление или заделка** (рис.4.2а). Защемленный (или заделанный конец) бруса не может ни смещаться поступательно, ни поворачиваться. Следовательно, число степеней свободы бруса с заделанным концом равно нулю. В опоре могут возникать: вертикальная реакция (сила  $R$ -рис.4.2а), препятствующая вертикальному смещению конца бруса; горизонтальная реакция (сила  $H$ ), исключаяющая возможность его горизонтального смещения и реактивный момент  $M$ , препятствующий повороту.

2. **Шарнирно- неподвижная опора** ( рис.4.2б). В опоре возникает реактивная сила, проходящая через центр шарнира. Ее составляющими являются вертикальная сила  $R$ , препятствующая вертикальному смещению и горизонтальная сила  $H$ , исключаяющая горизонтальное смещение закрепленного сечения бруса. Опора не препятствует повороту бруса относительно центра шарнира, и следовательно, имеет одну степень свободы.

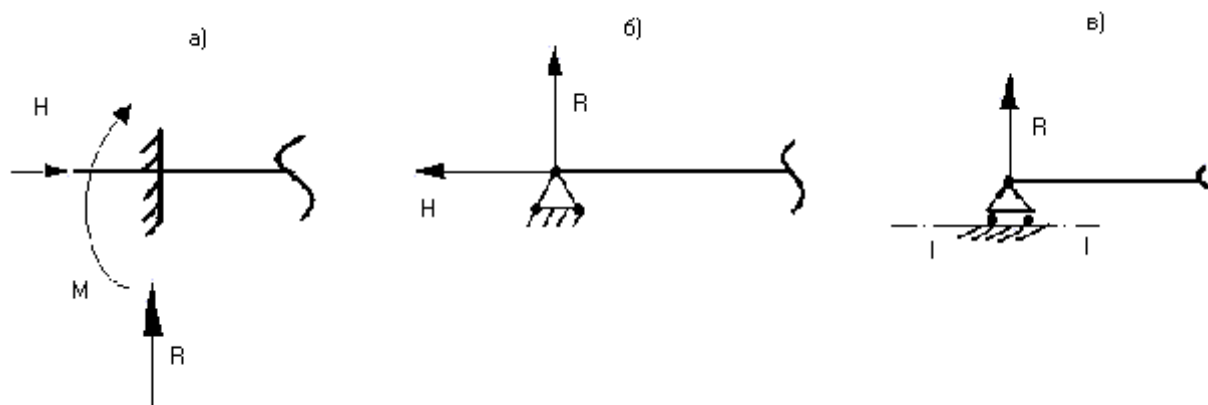


Рисунок 4.2 Виды опорных закреплений

3. **Шарнирно- подвижная опора** (рис.4.2в). Поперечное сечение бруса, проходящее через шарнирно подвижную опору, может смещаться параллельно опорной плоскости I-I и поворачиваться, но она не может смещаться перпендикулярно к опорной плоскости. В опоре возникает только одна реакция в виде силы  $R$ , перпендикулярной к опорной плоскости.

## 4.2 Эпюры внутренних усилий

При расчете на прочность необходимо знать закон изменения внутренних усилий в поперечных сечениях балки по ее длине от действия внешних сил.

Закон изменения изгибающих моментов, поперечных сил и продольных сил по длине балки называют соответственно эпюрами изгибающих моментов (эпюра  $M$ ), поперечных сил (эпюра  $Q$ ) и продольных сил (эпюра  $N$ ).

Рассмотрим на конкретных примерах построение эпюр для балок, находящихся под действием системы сил, расположенных в одной плоскости  
Пример 1. Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для консольной балки, заделанный правым концом, изображенной на рис.4.3.

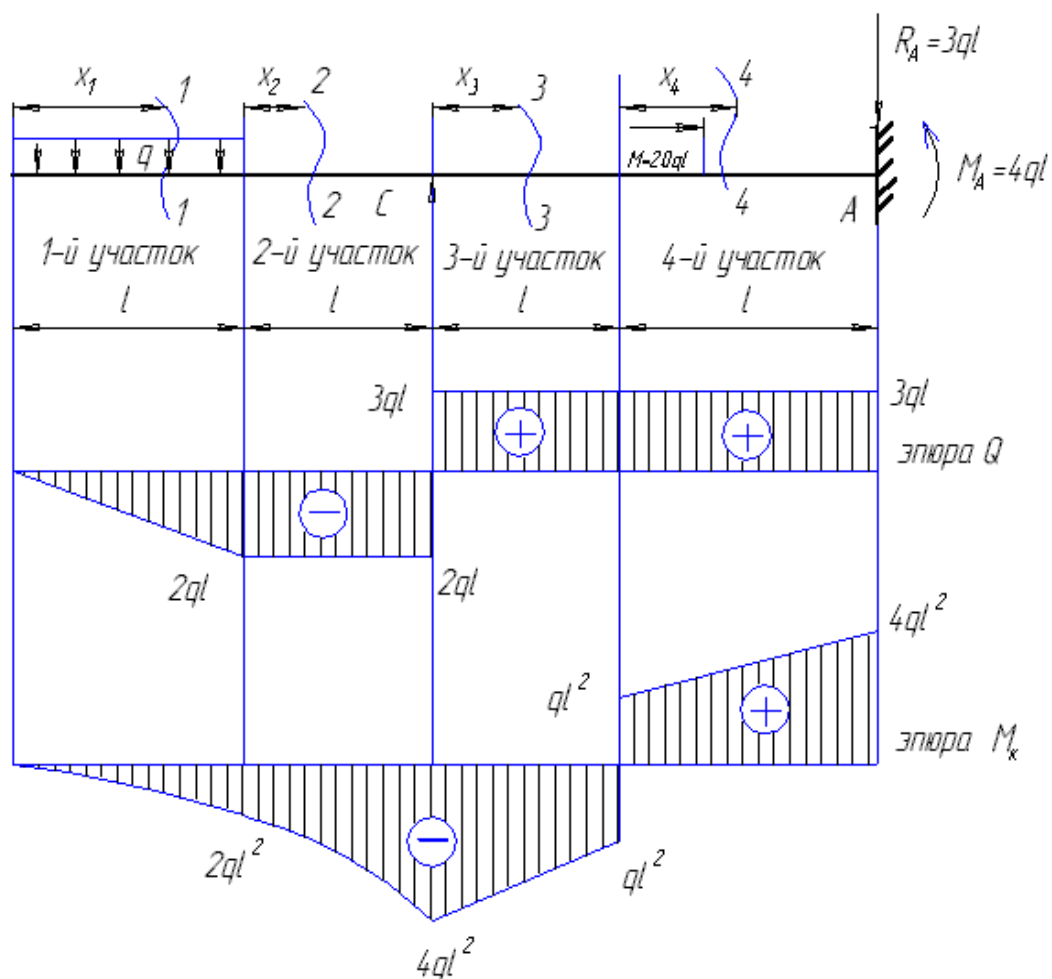


Рисунок 4.3 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Разделим балку на участки. Границами участков являются поперечные сечения балки, в которых к ней приложены сосредоточенные нагрузки (в том числе опорные реакции), или в которых начинается либо заканчивается распределенная нагрузка. Рассматриваемая балка имеет четыре участка I, II, III, и IV, показанных на рис. 4. 3. Рассмотрим участок 1.

Участок I. Сечение 1-1 (слева): (рис. 4.4, слева):

Поперечная сила равна сумме проекций всех сил расположенных слева от сечения  $Q_1 \sum_{\text{лев}} Y = -G = -qx_1$ ,

где  $G$ -равнодействующая распределенных сил на участке, длиной  $x$ .

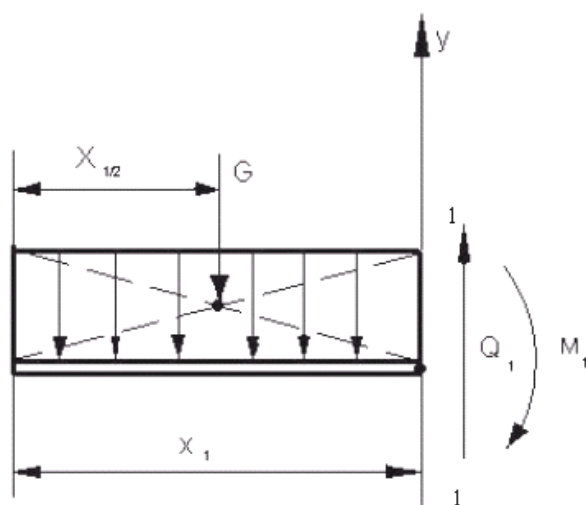


Рисунок 4.4 Сечение 1-1.

Изгибающий момент  $M_1$  равен сумме моментов всех сил расположенных слева от сечения 1-1 относительно точки 1, где проходит рассматриваемое сечение:

$$M_1 = \sum M = -G \cdot x_1 / 2 = -qx_1 \cdot x_1 / 2 = -qx_1^2 / 2; \text{ (уравнение кривой 2-го порядка), где } 0 \leq x_1 \leq 2l$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

$$\text{При } x_1 = 2l \quad Q_1 = -q \cdot 2l = -2ql;$$

$$M_1 = -q/2 \cdot (2l)^2 = -2ql^2$$

По полученным значениям  $M_1$  и  $Q_1$  на рис.4.3 построены эпюры  $Q$  и  $M$  для участка I балки.

Координаты эпюр, соответствующие положительным значениям внутренних усилий, откладываем вверх от осей этих эпюр, а отрицательным вниз (оси эпюр параллельны оси балки). При таком построении ординаты эпюр  $M$  получаются расположенными со стороны сжатых волокон балки.

Участок II. Сечение 2-2 (рис.4.5, слева)

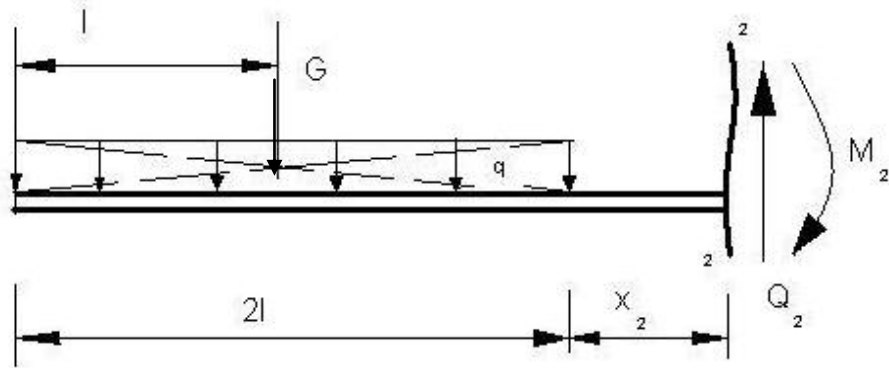


Рисунок 4.5 Сечение 2-2.

$$Q_2 = \sum Y = -G = -2ql; \quad M_2 = \sum M = -G(l+x_2) = -2ql(l+x_2) \quad 0 \leq x_2 \leq l$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad Q_2 = -2ql \quad M_2 = -2ql^2$$

$$\text{При } x_2 = 2l \quad Q_2 = -2ql \quad M_2 = -2ql(l+l) = -4ql^2$$

По полученным значениям  $Q_2$  и  $M_2$  на рис.4.3 построены эпюры  $Q$  и  $M$  для участка II балки.

Участок III. Сечение 3-3 (рис. 4.6, слева)

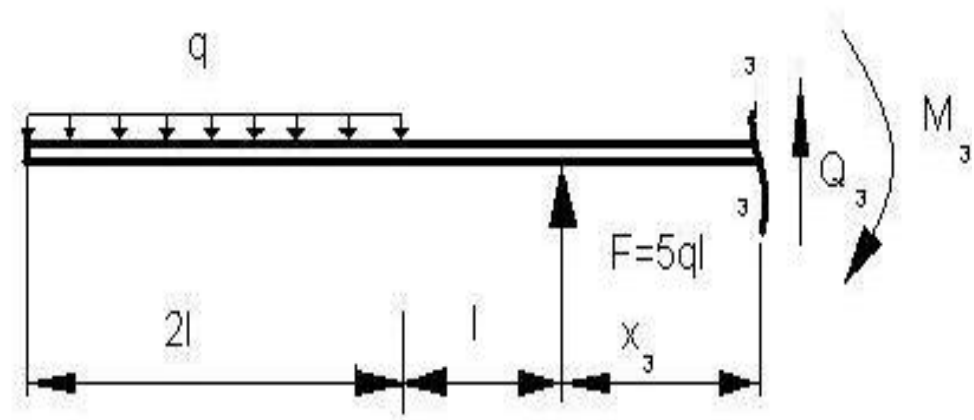


Рисунок 4.6 Сечение 3-3.

$$Q_3 = \sum Y = -2ql + F = -2ql + 5ql = 3ql; \quad M_3 = \sum M = -2ql(2l+x_3) + Fx_3; \quad 0 < x_3 < l.$$

$$\text{При } x_3 = 0 \quad Q_3 = 3ql; \quad M_3 = -2ql \cdot 2l = -4ql^2.$$

$$\text{При } x_3 = l \quad Q_3 = 3ql \quad M_3 = -2ql \cdot (2l + l) + 5ql \cdot l = -ql^2.$$

По полученным значениям  $Q_3$  и  $M_3$  на рис.4.3 построены эпюры  $Q$  и  $M$  для участка III балки.

Участок IV/ Сечение 4.4 (рис. 4.7, слева):

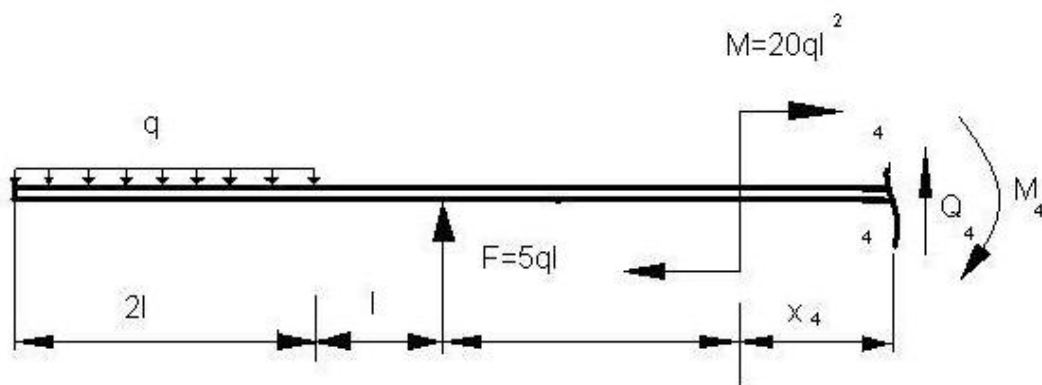


Рисунок 4.7 Сечение 4-4.

$$Q_4 = \sum_{\text{лев}} y = -2ql + F = -2ql + 5ql = 3ql;$$

$$M_4 = \sum_{\text{лев}} M = -2ql(3l + x_4) + F(l + x_4) + M = -2ql + 5ql = 3ql; \text{ где } 0 \leq x_4 \leq l$$

$$\text{При } x_4 = 0 \quad Q_4 = 3ql, \quad M_4 = -2ql \cdot 3l + 5ql \cdot l + 2ql^2 = ql^2.$$

$$\text{При } x_4 = l \quad Q_4 = 3ql, \quad M_4 = -2ql \cdot 4l + 5ql \cdot 2l + 2ql^2 = 4ql^2.$$

По полученным значениям  $Q_4$  и  $M_4$  на рис. 4.3 построены эпюры  $Q$  и  $M$  для участка IV балки.

После построения эпюры  $Q$  и  $M$ , при расчетах на прочность выбирают наиболее опасное сечение балки. Наиболее опасным считается сечение, в котором значения  $Q$  и  $M$  являются наибольшими. Опасными сечениями при расчете по  $\sigma_{\max}$  являются сечения А или С, при расчете по  $\sigma_{\max}$  любое сечение на участке СА и при расчете по главным напряжениям сечения С или А. В нашем случае таковыми являются одновременно опорное сечение А и сечение С, где  $Q_{\text{оп}}=3ql$  и  $M_{\text{оп}}=4ql^2$ .

Пример 2 Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для двух опорной балки изображенной на рис. 4.8.

Решение:

1) Определение опорных реакций.

Изобразим на рисунке реакции опор А и Д, направив их вверх, и составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx}=0 & \quad H_A=0; & \quad \sum M_D=0; ql \cdot 0,5l + M - R_A \cdot 3l=0; \\ \sum M_A=0; & \quad M - ql \cdot 2,5l + R_D \cdot 3l=0; & \quad R_A=(0,5ql^2 + ql^2)/3l=0,5ql. \\ & & \quad R_D=(2,5ql^2 - ql^2)/3l=0,5ql. \end{aligned}$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций:

$$\sum F_{ky}=0 \quad R_A - ql + R_D = 0; \quad 0,5ql - ql + 0,5ql = 0.$$

Реакции определены правильно.



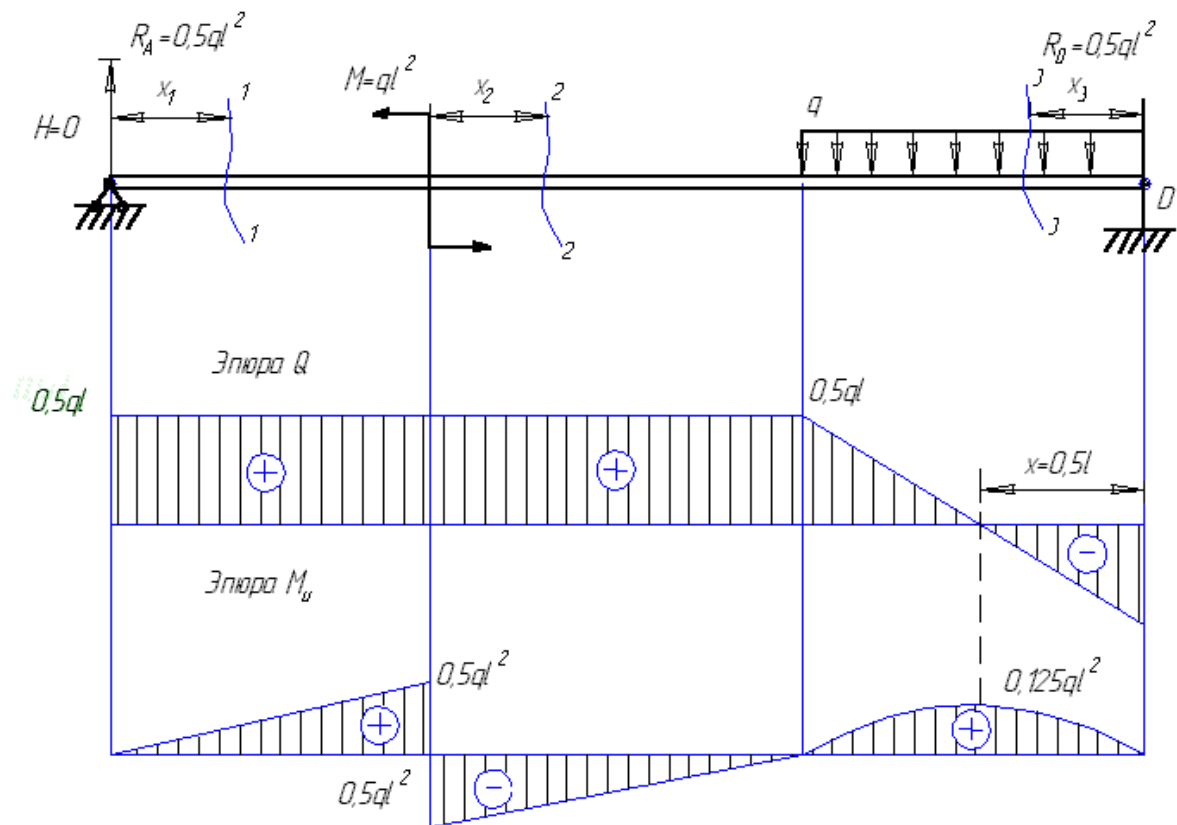


Рисунок 4.8 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

## 2) Определение внутренних усилий.

Рассматриваемая балка, состоит из трех грузовых участков: участок АВ, участок ВС и участок СД. Для определения внутренних усилий в пределах каждого участка проводим сечения.

Участок АВ.

Сечение 1-1. Рассмотрим равновесие левой части.

$$Q_1 = R_A = 0,5ql$$

$$M_1 = R_A x_1 = 0,5ql \cdot x_1 \text{ (уравнение прямой наклонной линии), где } 0 \leq x_1 \leq l$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_1 = 0.$$

$$\text{При } x_1 = l \quad M_1 = 0,5ql^2.$$

Участок ВС.

Сечение 2-2. Из равновесия левой части

$$Q_2 = R_A = 0,5ql;$$

$$M_2 = R_A(l + x_2) - M, \text{ где } 0 \leq x_2 \leq l.$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad Q_2 = 0,5ql; \quad M_2 = 0,5ql^2 - ql^2 = -0,5ql.$$

$$\text{При } x_2 = l \quad Q_2 = 0,5ql; \quad M_2 = 0,5ql - 2l \cdot ql^2 = 0.$$

Участок СД.

Сечение 3-3. Здесь удобнее рассматривать равновесие правой части.

$$Q_3 = -R_D + qx_3 \text{ (уравнение прямой наклонной линии)}$$

$$M_3 = R_D \cdot x_3 - qx_3 \cdot x_3 / 2 = 0,5(ql \cdot x_3 - qx_3^2) \text{ (уравнение квадратной параболы), где } 0 \leq x_3 \leq l$$

$$\begin{array}{lll} \text{При } x_3 = 0 & Q_3 = -R_D = -0,5ql; & M_3 = 0. \\ \text{При } x_3 = l & Q_3 = -0,5ql + ql = 0,5ql; & M_3 = 0. \end{array}$$

В этом участке эпюра  $Q$  при перемещении слева направо, меняет свой знак с плюса на минус. Это означает, что на этом участке эпюра  $M$  имеет максимум. Для определения максимального момента приравняем нулю первую производную уравнения для  $M_3$  (исследование функции на экстремум):

$$dM_3/dx = 0,5ql - qx_3 = 0 \quad \text{отсюда } x_3 = 0,5ql/q = 0,5l.$$

$$\text{При } x_3 = 0,5l \quad M_3^{\max} = 0,5ql \cdot 0,5l - q/2(0,5l)^2 = 0,125ql^2.$$

По результатам вычислений строим эпюры  $Q$  и  $M$  для двух опорной балки (рис. 4.8). Как видно из этих эпюр наиболее опасным является сечение  $B$ , где  $Q_{\text{оп}} = 0,5ql$  и  $M_{\text{оп}} = 0,5ql^2$ .

**Пример 3.** Для балки с промежуточным шарниром, показанной на рис.4.9, построить эпюры  $Q$  и  $M$ .

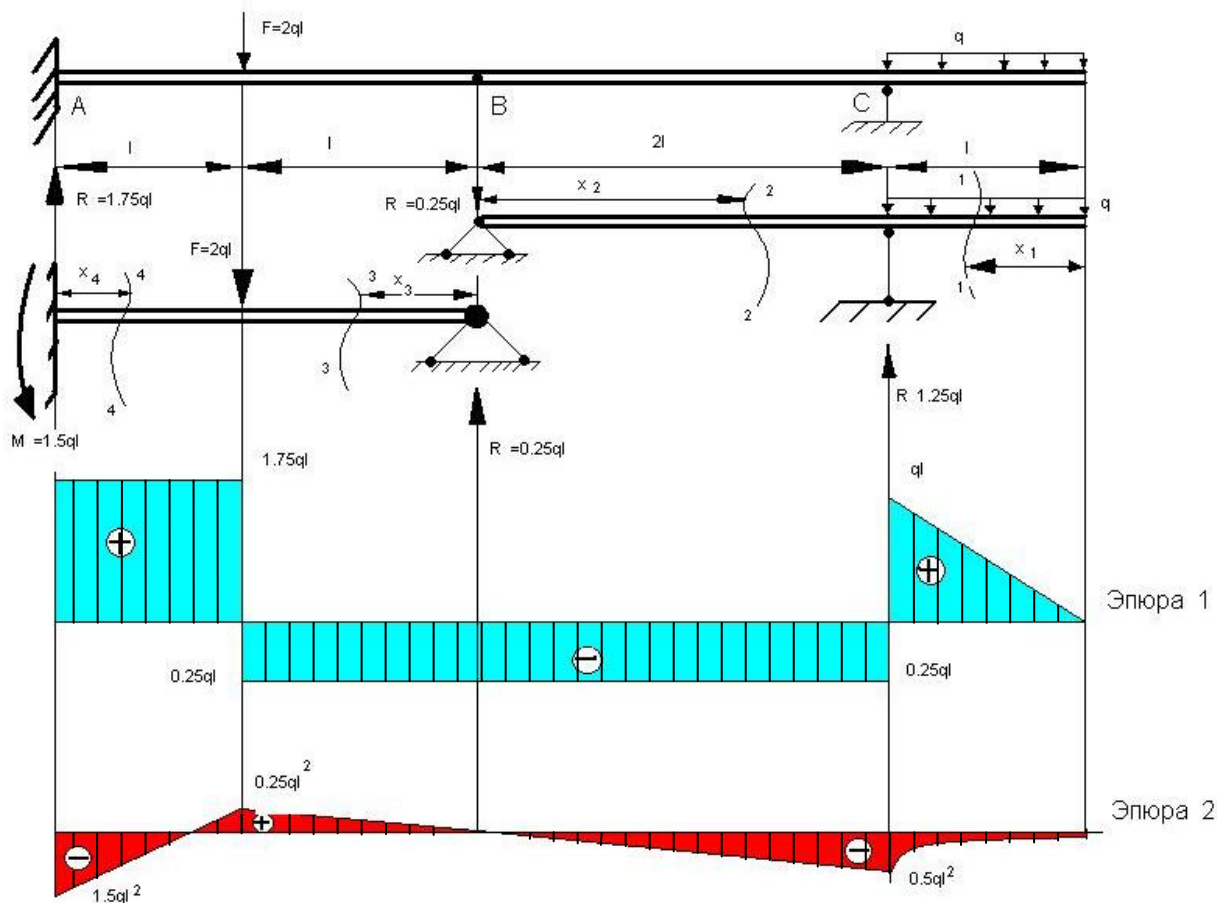


Рисунок 4.9 Эпюры поперечных сил  $Q$  (эпюра 1) изгибающих моментов (эпюра 2).

**Решение.** Составную балку  $AC$  (рис.4.9) в шарнире  $B$  разделим на две отдельные балки  $AB$  (несущая балка) и  $BC$  (вспомогательная или подвесная балка). Определение опорных реакций начинают с вспомогательной балки.

Определяем опорные реакции балки  $BC$ . Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_B=0 & \quad R_C \cdot 2l - ql \cdot 2,5l = 0; \quad R_C = 2,5ql^2/2l = 1,25ql. \\ \sum M_C=0 & \quad R_B \cdot 2l - ql \cdot 0,5l = 0; \quad R_B = 0,25ql.\end{aligned}$$

Определяем опорные реакции несущей балки АВ, принимая  $R'_B = R_B = 0,25ql$  и составляем уравнения равновесия статики:

$$\begin{aligned}\sum M_A=0 & \quad -M_A - Fl + R'_B \cdot 2l = 0; \quad M_A = 0,25ql \cdot 2l - 2ql \cdot l = -1,5ql^2. \\ \sum M_B=0 & \quad -M_A - R_A \cdot 2l + Fl = 0; \quad R_A = (1,5ql^2 + 2ql^2)/2 = 1,75ql.\end{aligned}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\begin{aligned}\sum F_{ky}=0. & \quad -R_B + R_C - ql = 0 \quad (\text{балки BC}); \\ & -0,25ql + 1,25ql - ql = 0; \\ & -R_A - F + R_B = 0 \quad (\text{балки АВ}); \\ & 1,15ql - 2ql + 0,25ql = 0.\end{aligned}$$

Опорные реакции определены правильно. Отрицательный знак опорного момента  $M_A$  означает, что направление этой реакции предварительно был выбран неверно. Поэтому заменим направление этой реакции на противоположное (см.рис.4.9), и меняем знак значения  $M_A$  с минуса на плюс. Таким образом:  $M_A = 1,5ql^2$ .

## 2) Определение внутренних усилий

Сечение 1-1.

$$\begin{aligned}Q_1 &= +q \cdot x_1; \quad M_1 = -q \cdot x_1 \cdot x_1/2 = -q \cdot x_1^2/2; \quad \text{где } 0 \leq x_1 \leq l. \\ \text{При } x_1=0; & \quad Q_1=0; \quad M_1=0. \\ \text{При } x_1=l; & \quad Q_1=ql; \quad M_1=-ql^2/2.\end{aligned}$$

Сечение 2-2.

$$\begin{aligned}Q_2 &= -R_B = -0,25ql; \quad M_2 = -R_B \cdot x_2; \quad 0 \leq x_2 \leq 2l. \\ \text{При } x_2=0; & \quad Q_2=-0,25ql; \quad M_2=0. \\ \text{При } x_2=2l; & \quad Q_2=-0,25ql; \quad M_2 = -R_B \cdot 2l = -0,5ql^2.\end{aligned}$$

Сечение 3-3.

$$\begin{aligned}Q_3 &= -R'_B = -0,25ql; \quad M_3 = R'_B \cdot x_3; \quad 0 \leq x_3 \leq l. \\ \text{При } x_3=0; & \quad Q_3=-0,25ql; \quad M_3=0. \\ \text{При } x_3=l; & \quad Q_3=-0,25ql; \quad M_3 = R'_B \cdot l = 0,25ql^2.\end{aligned}$$

Сечение 4-4.

$$\begin{aligned}Q_4 &= R_A = 1,75ql; \quad M_4 = R_A \cdot x_4 - M_A = 1,75ql \cdot x_4 - 1,5ql^2; \quad 0 \leq x_4 \leq l. \\ \text{При } x_4=0; & \quad Q_4=1,75ql^2; \quad M_4=-1,5ql^2. \\ \text{При } x_4=l & \quad Q_4=1,75ql; \quad M_4=1,75ql^2 - 1,5ql^2 = 0,25ql^2.\end{aligned}$$

По результатам расчетов строим эпюру  $Q$  и  $M$  (рис.4). Наиболее опасным является опорное сечение А, где  $Q_{оп}=1,75ql$  и  $M_{оп}=1,5ql^2$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] : [учеб. пособие для студентов вузов] / Н. М. Беляев. - 15-е изд., перераб., репр. изд. 1976 г. - Москва : Альянс, 2014. - 607 с.

2. Сопротивление материалов [Текст] : пособие по решению задач / И. Н. Миролубов [и др.]. - 7-е изд., испр. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007. - 508 с

3. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для студентов высших технических учебных заведений / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. - 5-е изд., перер. и доп., репр. воспроизведение изд. 1989 г. - Москва : Альянс, 2014. - 624 с.

4. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для студ. высш. технич. учеб. заведений : рек. М-вом образования РФ / В. И. Феодосьев. - 14-е изд., испр. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. - 589 с

5. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по напр. и спец. в области техники и технологий : рек. по УМО образованию / [Н. М. Беляев [и др.]] ; под ред. Л. К. Паршина. - 2-е изд., испр. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 430