	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный аграрный университет»	Методические указания
		Б1.В.12 Основы эксплуатации автомобилей оборудованных электронной системой управления, контроля и диагностики

Кафедра «Автомобили и МТК»

Б1.В.12 Основы эксплуатации автомобилей оборудованных
электронной системой управления, контроля и диагностики

Методические указания к практическим занятиям

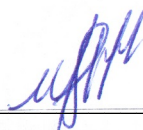
Направление подготовки
35.03.06 АГРОИНЖЕНЕРИЯ

Профиль подготовки
Автотроника и фирменный сервис

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Уфа 2022

Составитель: к.т.н.



Разяпов М.М.

Методические указания обсуждены на заседании кафедры Автомобили и машинно-тракторные комплексы 24 марта 2022 г. (протокол № 8) и одобрены методической комиссией механического факультета 24 марта 2022 г. (протокол № 7/1)

ВВЕДЕНИЕ

По индивидуальному заданию выданного преподавателем студент должен решить задачи следующими методами: последовательного анализа, Байеса и логическим распознавания.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ

Вводные замечания. Основное преимущество статистических методов распознавания состоит в возможности одновременного учета признаков различной физической природы, так как они характеризуются безразмерными величинами — вероятностями их появления при различных состояниях системы. В этой главе содержится подробное изложение метода Байеса и метода последовательного анализа. Теория статистических решений, составляющая особый раздел статистических методов, рассматривается в следующей главе.

МЕТОД БАЙЕСА

Среди методов технической диагностики метод, основанный на обобщенной формуле Байеса, занимает особое место благодаря простоте и эффективности.

Разумеется, метод Байеса имеет недостатки: большой объем предварительной информации, «угнетение» редко встречающихся диагнозов и др. Однако в случаях, когда объем статистических данных позволяет применить метод Байеса, его целесообразно использовать как один из наиболее надежных и эффективных методов.

Основы метода. Метод основан на простой формуле Байеса. Если имеется диагноз D_i и простой признак k_j , встречающийся при этом диагнозе, то вероятность совместного появления событий (наличие у объекта состояния D_i и признака k_j)

$$P(D_i k_j) = P(D_i) P(k_j / D_i) = P(k_j) P(D_i | k_j). \quad (1)$$

Из этого равенства вытекает формула Байеса:

$$P(D_i | k_j) = P(D_i) \frac{P(k_j / D_i)}{P(k_j)} \quad (2)$$

Очень важно определить точный смысл всех входящих в эту формулу величин.

$P(D_i)$ — вероятность диагноза D_i , определяемая по статистическим данным (*априорная вероятность диагноза*). Так, если предварительно обследовано N объектов и у N_i объектов имелось состояние D_i , то

$$P(D_i) = N_i / N. \quad (3)$$

$P(k_j / D_i)$ — вероятность появления признака k_j у объектов с состоянием D_i . Если среди N_i объектов, имеющих диагноз D_i , у N_{ij} проявился признак k_j , то:

$$P(k_j / D_i) = \frac{N_{ij}}{N_i} \quad (4)$$

$P(k_j)$ — вероятность появления признака k_j во всех объектах независимо от состояния (диагноза) объекта. Пусть из общего числа N объектов признак k_j был обнаружен у N_j объектов, тогда

$$P(k_j) = N_j / N. \quad (5)$$

Для установления диагноза специальное вычисление $P(k_j)$ не требуется. Как будет ясно из дальнейшего, значения $P(D_i)$ и $P(k_j/D_i)$, известные для всех возможных состояний, определяют величину $P(k_j)$.

В равенстве (3.2) $P(D_i k_j)$ — вероятность диагноза D_i после того, как стало известно наличие у рассматриваемого объекта признака k_j (апостериорная вероятность диагноза).

Обобщенная формула Байеса. Эта формула относится к случаю, когда обследование проводится по комплексу признаков K , включающему признаки k_1, k_2, \dots, k_v . Каждый из признаков k_j имеет m_j разрядов ($k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{js}, \dots, k_{jmj}$). В результате обследования становится известной реализация признака

$$k_j^* = k_{js}$$

(6)

и всего комплекса признаков K^* . Индекс $*$, как и раньше, означает конкретное значение (реализацию) признака. Формула Байеса для комплекса признаков имеет вид

$$P(D_i/K^*) = P(D_i) P(K^*/D_i)/P(K^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где $P(D_i/K^*)$ — вероятность диагноза D_i после того, как стали известны результаты обследования по комплексу признаков K , $P(D_i)$ — предварительная вероятность диагноза D_i (по предшествующей статистике).

Формула (3.7) относится к любому из n возможных состояний (диагнозов) системы. Предполагается, что система находится только в одном из указанных состояний и потому

$$\sum_{s=1}^n P(D_s) = 1 \quad (8)$$

В практических задачах нередко допускается возможность существования нескольких состояний A_1, \dots, A_r , причем некоторые из них могут встретиться в комбинации друг с другом. Тогда в качестве различных диагнозов D_i , следует рассматривать отдельные состояния $D_1 = A_1, \dots, D_r = A_r$ и их комбинации $D_{r+1} = A_1 \wedge A_2, \dots$ и т. п.

Перейдем к определению $P(K^*/D_i)$. Если комплекс признаков состоит из v признаков, то

$$P(K^*/D_i) = P(k_1^*/D_i)P(k_2^*/k_1^*D_i)\dots P(k_v^*/k_1^*\dots k_{v-1}^*D_i), \quad (9)$$

где $k_j^* = k_{js}$ — разряд признака, выявившийся в результате обследования. Для диагностических независимых признаков

$$P(K^*/D_i) = P(k_1^*/D_i)P(k_2^*/D_i)\dots P(k_v^*/D_i) \quad (10)$$

В большинстве практических задач, особенно при большом числе признаков, можно принимать условие независимости признаков даже при наличии существенных корреляционных связей между ними.

Вероятность появления комплекса признаков K^*

$$P(K^*) = \sum_{s=1}^n P(D_s)P(K^* / D_s) \quad (11)$$

Обобщенная формула Байеса может быть записана так:

$$P(D_i / K^*) = \frac{P(D_i)P(K^* / D_i)}{\sum_{s=1}^n P(D_s)P(K^* / D_s)} \quad (12)$$

где $P(K^* / D_i)$ определяется равенством (3.9) или (3.10). Из соотношения (3.12) вытекает

$$\sum_{i=1}^n P(D_i / K^*) = 1 \quad (13)$$

что, разумеется, и должно быть, так как один из диагнозов обязательно реализуется, а реализация одновременно двух диагнозов невозможна.

Следует обратить внимание на то, что знаменатель формулы Байеса для всех диагнозов одинаков. Это позволяет сначала определить вероятности совместного появления i -го диагноза и данной реализации комплекса признаков

$$P(D_i K^*) = P(D_i)P(K^* / D_i) \quad (14)$$

и затем апостериорную вероятность диагноза

$$P(D_i / K^*) = P(D_i K^*) / \sum_{s=1}^n P(D_s K^*). \quad (15)$$

Отметим, что иногда целесообразно использовать предварительное логарифмирование формулы (12), так как выражение (10) содержит произведения малых величин.

Если реализация некоторого комплекса признаков K^* является *детерминирующей* для диагноза D_p , то этот комплекс не встречается при других диагнозах:

$$P(K^* / D_s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq p \\ \neq 0 & \text{при } s = p \end{cases}$$

Тогда, в силу равенства (12)

$$P(D_s / K^*) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq p \\ 1 & \text{при } s = p \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, детерминистская логика установления диагноза является частным случаем вероятностной логики. Формула Байеса может использоваться и в том случае, когда часть признаков имеет дискретное распределение, а другая часть — непрерывное. Для непрерывного распределения используются плотности распределения. Однако в расчетном плане указанное различие признаков несущественно, если задание непрерывной кривой осуществляется с помощью совокупности дискретных значений.

Диагностическая матрица. Для определения вероятности диагнозов по методу Байеса необходимо составить диагностическую матрицу (табл. 1), которая формируется на основе предварительного статистического материала. В этой таблице содержатся вероятности разрядов признаков при различных диагнозах. Если

Диагностическая матрица в методе Байеса

Таблица 1

Диагноз D_i	Признак k_j									$P(D_i)$
	k_1			k_2				k_3		
	$P(k_{11}/D_i)$	$P(k_{12}/D_i)$	$P(k_{13}/D_i)$	$P(k_{21}/D_i)$	$P(k_{22}/D_i)$	$P(k_{23}/D_i)$	$P(k_{24}/D_i)$	$P(k_{31}/D_i)$	$P(k_{32}/D_i)$	
D_1	0,8	0,2	0	0,1	0,1	0,6	0,2	0,2	0,8	0,3
D_2	0,1	0,7	0,2	0	0	0,3	0,7	0,1	0,9	0,1

признаки двухразрядные (простые признаки «да-нет»), то в таблице достаточно указать вероятность появления признака $P(k_j/D_i)$.

Вероятность отсутствия признака $P(\bar{k}_j/D_i) = 1 - P(k_j/D_i)$.

Однако более удобно использовать единообразную форму, полагая, например, для двухразрядного признака $P(k_j/D_i) = P(k_{j1}/D_i)$; $P(\bar{k}_j/D_i) = P(k_{j2}/D_i)$.

Отметим, что $\sum_{s=1}^{m_j} P(k_{js}/D_i) = 1$, где m_j — число разрядов признака k_j .

Сумма вероятностей всех возможных реализаций признака равна единице.

В диагностическую матрицу включены априорные вероятности диагнозов. Процесс обучения в методе Байеса состоит в формировании диагностической матрицы. Важно предусмотреть возможность уточнения таблицы в процессе диагностики. Для этого в памяти ЭВМ следует хранить не только значения $P(k_{js}/D_i)$, но и следующие величины: N — общее число объектов, использованных для составления диагностической матрицы; N_i — число объектов с диагнозом D_i ; N_{ij} — число объектов с диагнозом D_i , обследованных по признаку k_j . Если поступает новый объект с диагнозом D_μ , то проводится корректировка прежних априорных вероятностей диагнозов следующим образом:

$$P(D_i) = \begin{cases} \frac{N_i}{N+1} = P(D_i) \frac{N}{N+1}; & i=1, 2, \dots, n; i \neq \mu; \\ \frac{N_\mu+1}{N+1} = P(D_\mu) \frac{N}{N+1} + \frac{1}{N+1}; & i = \mu. \end{cases} \quad (17)$$

Далее вводятся поправки к вероятностям признаков. Пусть у нового объекта с диагнозом D_μ выявлен разряд r признака k_j . Тогда для дальнейшей диагностики принимаются новые значения вероятности интервалов признака k_j при диагнозе D_μ :

$$P(k_{js}/D_\mu) = \begin{cases} P(k_{js}/D_\mu) \frac{N_\mu j}{N_\mu j+1}; & s \neq r; \\ P(k_{jr}/D_\mu) \frac{N_\mu j}{N_\mu j+1} + \frac{1}{N_\mu j+1}; & s = r. \end{cases} \quad (18)$$

Условные вероятности признаков при других диагнозах корректировки не требуют.

Пример. Поясним метод Байеса. Пусть при наблюдении за газотурбинным двигателем проверяются два признака: k_1 — повышение температуры газа за турбиной более чем на 50°C и k_2 — увеличение времени выхода на максимальную частоту вращения более чем на 5 с. Предположим, что для данного типа двигателей

появление этих признаков связано либо с неисправностью топливного регулятора (состояние D_1), либо с увеличением радиального зазора в турбине (состояние D_2). При нормальном состоянии двигателя (состояние D_3) признак k_1 не наблюдается, а признак k_2 наблюдается, в 5% случаев. На основании статистических данных известно, что 80% двигателей вырабатывают ресурс в нормальном состоянии, 5% двигателей имеют состояние D_1 и 15% — состояние D_2 . Известно также, что признак k_1 встречается при состоянии D_1 в 20%, а при состоянии D_2 в 40% случаев; признак k_2 при состоянии D_1 встречается в 30%, а при состоянии D_2 — в 50% случаев. Сведем эти данные в диагностическую таблицу (табл. 2). Найдем сначала вероятности состояний двигателя, когда обнаружены оба признака k_1 и k_2 . Для этого, считая признаки независимыми, применим формулу (12). Вероятность состояния

$$P(D_1 / k_1 k_2) = \frac{0,05 \cdot 0,2 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0 \cdot 0,05} = 0,09$$

Аналогично получим $P(D_2 / k_1 k_2) = 0,91$; $P(D_3 / k_1 k_2) = 0$.

Определим вероятность состояний двигателя, если обследование показало, что повышение температуры не наблюдается (признак k_1 отсутствует), но увеличивается время выхода на максимальную частоту вращения (признак k_2 наблюдается). Отсутствие признака k_1 есть признак наличия \bar{k}_1 (противоположное событие), причем

$$P(\bar{k}_1 / D_i) = 1 - P(k_1 / D_i).$$

Для расчета применяют также формулу (12), но значение $P(k_1 / D_i)$ в диагностической таблице заменяют на $P(\bar{k}_1 / D_i)$.

В этом случае

$$P(D_1 / \bar{k}_1 k_2) = \frac{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,05} = 0,12$$

и аналогично $P(D_2 / \bar{k}_1 k_2) = 0,46$; $P(D_3 / \bar{k}_1 k_2) = 0,41$. Вычислим вероятности состояний в том случае, когда оба признака отсутствуют. Аналогично предыдущему получим

$$P(D_2 / \bar{k}_1 \bar{k}_2) = 0,05; \quad P(D_3 / \bar{k}_1 \bar{k}_2) = 0,92$$

Отметим, что вероятности состояний D_1 и D_2 отличны от нуля, так как рассматриваемые признаки не являются для них детерминирующими. Из проведенных расчетов можно установить, что при наличии признаков k_1 и k_2 в двигателе с вероятностью 0,91 имеется состояние D_1 , т.е. увеличение радиального зазора. При отсутствии обоих признаков наиболее вероятно нормальное состояние (вероятность 0,92). При отсутствии признака k_1 и наличии признака k_2 вероятности состояний D_2 и D_3 примерно одинаковы (0,46 и 0,41) и для уточнения состояния двигателя требуется проведение дополнительных обследований

Таблица 2

Вероятности признаков и априорные вероятности состояний

D_i	$P(k_1 / D_i)$	$P(k_2 / D_i)$	$P(D_i)$
D_1	0,2	0,3	0,05
D_2	0,4	0,5	0,15
D_3	0,0	0,05	0,80

Решающее правило — правило, в соответствии с которым принимается решение о диагнозе. В методе Байеса объект с комплексом признаков K^* относится к диагнозу

с наибольшей (апостериорной) вероятностью

$$K^* \in D_i, \text{ если } P(D_i/K^*) > P(D_j/K^*) \quad (j = 1, 2, \dots, n; i \neq j). \quad (19)$$

Символ \in , применяемый в функциональном анализе, означает принадлежность множеству. Условие (19) указывает, что объект, обладающий данной реализацией комплекса признаков K^* или, короче, реализация K^* принадлежит диагнозу (состоянию) D_i . Правило (19) обычно уточняется введением порогового значения для вероятности диагноза:

$$P(D_i/K^*) \geq P_i, \quad (20)$$

где P_i — заранее выбранный уровень распознавания для диагноза D_i . При этом вероятность ближайшего конкурирующего диагноза не выше $1 - P_i$. Обычно принимается $P_i \geq 0,9$. При условии

$$P(D_i/K^*) < P_i \quad (21)$$

решение о диагнозе не принимается (отказ от распознавания) и требуется поступление дополнительной информации.

Процесс принятия решения в методе Байеса при расчете на ЭВМ происходит достаточно быстро. Например, постановка диагноза для 24 состояний при 80 многоразрядных признаках занимает на ЭВМ с быстродействием 10—20 тысяч операций в секунду всего несколько минут.

Как указывалось, методу Байеса присущи некоторые недостатки, например погрешности при распознавании редких диагнозов. При практических расчетах целесообразно провести диагностику и для случая равновероятностных диагнозов, положив

$$P(D_i) = 1/n. \quad (22)$$

Тогда наибольшим значением апостериорной вероятности будет обладать диагноз D_i , для которого $P(K^*/D_i)$ максимальна:

$$K^* \in D_i \text{ если } P(K^*/D_i) > P(K^*/D_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n; i \neq j). \quad (23)$$

Иными словами, устанавливается диагноз D_i , если данная совокупность признаков чаще встречается при диагнозе D_i , чем при других диагнозах. Такое решающее правило соответствует методу максимального правдоподобия. Из предыдущего вытекает, что этот метод является частным случаем метода Байеса при одинаковых априорных вероятностях диагнозов. В методе максимального правдоподобия «частые» и «редкие» диагнозы равноправны.

Для надежности распознавания условие (23) должно быть дополнено пороговым значением

$$P(K^*/D_i) > P_i, \quad (24)$$

где P_i — заранее выбранный уровень распознавания для диагноза D_i .

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Метод последовательного анализа, предложенный Вальдом, применяется для дифференциальной диагностики (распознавания двух состояний). В отличие от метода Байеса, число обследований заранее не устанавливается, их проводится столько, сколько необходимо для принятия решения с определенной степенью риска.

Основы метода. При использовании метода Байеса для распознавания состояний D_1 и D_2 следует составить отношение (для независимых признаков)

$$\frac{P(D_2 / K^*)}{P(D_1 / K^*)} = \frac{P(D_2)}{P(D_1)} \cdot \frac{P(k_1^* / D_2) \dots P(k_v^* / D_2)}{P(k_1^* / D_1) \dots P(k_v^* / D_1)} \quad (25)$$

Если

$$\frac{P(D_2 / K^*)}{P(D_1 / K^*)} > 1 \quad (26)$$

Или

$$\frac{P(k_1^* / D_2)}{P(k_1^* / D_1)} \dots \frac{P(k_v^* / D_2)}{P(k_v^* / D_1)} > \frac{P(D_1)}{P(D_2)}$$

(27)

то принимается решение $K^* \in D_2$

В методе последовательного анализа рассматриваемые отношения вероятностей признаков (*отношения правдоподобия*) составляются не сразу, а в последовательном порядке; поэтому, как правило, требуется меньшее число обследований. Поясним сущность метода на следующем примере.

Пример. Пусть при диагнозе D_1 простой признак k_1 встречается с вероятностью $P(k_1/D_2)$ и отсутствует с вероятностью $P(\bar{k}_1/D_1)$, для диагноза D_2 соответственно $P(k_1/D_2)$ и $P(\bar{k}_1/D_2)$. Если у объекта K^* наблюдается признак k_1 и при диагнозе D_2 он встречается значительно чаще, чем при D_1 , то можно сделать вывод в пользу диагноза D_2 :

$$\text{при } \frac{K^* \in D_2,}{\frac{P(k_1 / D_2)}{P(k_1 / D_1)} > A} \quad (28)$$

где A — верхняя граница принятия решения.

В противоположном случае, когда признак k_1 значительно чаще встречается При диагнозе D_1 , принимается решение в пользу диагноза D_1 : при $K^* \in D_1$

$$\frac{P(k_1 / D_2)}{P(k_1 / D_1)} < B \quad (29)$$

где B — нижняя граница принятия решения. Если отношение вероятностей, которое часто называется отношением правдоподобия,

$$B < \frac{P(k_1 / D_2)}{P(k_1 / D_1)} < A \quad (30)$$

то для решения требуется поступление дополнительной информации. Тогда проводится обследование по признаку k_2 и пусть, например, у диагностируемого объекта этот признак отсутствует.

Составляется произведение двух отношений правдоподобия и при $K^* \in D_2$

$$\frac{P(k_1/D_2)}{P(k_1/D_1)} \frac{P(\bar{k}_2/D_2)}{P(\bar{k}_2/D_1)} > A \quad (31)$$

принимается решение об отнесении объекта к диагнозу D_2 . Подобным образом учитывается нижняя граница принятия решения. Если признаки зависимые, то используется отношение $P(\bar{k}_2/k_1 D_2)/P(\bar{k}_2/k_1 D_1)$, в котором учитывается вероятность отсутствия признака \bar{k}_2 , при условии, что признак k_1 имеется. Дополнительные обследования проводятся до тех пор, пока при выбранных границах A и B можно принять определенное решение.

Часто оказывается удобным рассматривать не отношение правдоподобия, а натуральный логарифм этого отношения. Тогда условие (31) будет таким:

$$\ln(P(k_1 D_2)/P(k_1 D_1)) + \ln(P(\bar{k}_2/D_2)/P(\bar{k}_2/D_1)) > \ln A.$$

Подобная форма применяется при нормальном распределении количественных признаков.

Общая процедура метода. Будем для краткости считать, что признаки являются независимыми. Пусть проведено v — l обследований, которые еще не дали возможности принятия решения,

$$B < \frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)} \dots \frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)} < A \quad (32)$$

но после v -го обследования

$$\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)} \dots \frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)} > A \quad (33)$$

Тогда принимается решение об отнесении объекта к диагнозу D_2 : $K^* \in D_2$. Если после v -го обследования

$$\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)} \dots \frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)} < B \quad (34)$$

то объект относится к диагнозу D_1 . Для сокращения объема обследований следует вначале проводить обследование по наиболее информативным признакам.

Связь границ принятия решения с вероятностями ошибок первого и второго рода. При распознавании могут быть ошибки двоякого рода. Ошибка, относящаяся к диагнозу D_1 (принимается решение о наличии диагноза D_2 , когда в действительности объект принадлежит диагнозу D_1 , называется *ошибкой первого рода*. Ошибка, относящаяся к диагнозу D_2 (принимается решение в пользу диагноза D_1 когда справедлив диагноз D_2), называется *ошибкой второго рода*.

Считая состояние D_1 исправным, а состояние D_2 дефектным, легко понять, что ошибка первого рода является «ложной тревогой», а ошибка второго рода «пропуском дефекта».

Обозначим вероятность ошибки первого рода α , второго рода β . Допустим, что имеются условия (32) и (33) и принимается решение в пользу диагноза D_2 . Вероятность того, что это решение будет справедливым, равна $1 - \beta$. Вероятность принадлежности объекта с данной реализацией признаков к диагнозу D_1 составляет α . С другой стороны, в силу соотношения (4.9), вероятность диагноза D_2 , по крайней мере, в A раз больше, чем диагноза D_1 т. е.

$$\frac{1-\beta}{\alpha} \geq A \quad (35)$$

Подобным образом можно получить и следующую оценку:

$$B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (36)$$

В практических расчетах часто принимают $\alpha = \beta = 0,05$ или $\alpha = \beta = 0,10$.

Пример. В исправном газотурбинном двигателе среднее значение переменного напряжения составляет \bar{x}_1 в дефектном двигателе это значение существенно выше \bar{x}_2 , но дисперсии практически мало отличаются $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Диагностика осуществляется с помощью измерения переменных напряжений в лопатках. Закон распределения напряжений по отдельным лопаткам принимается нормальным. Сначала приводится измерение в первой лопатке и составляется отношение

$$\frac{f(x_{(1)} / D_2)}{f(x_{(1)} / D_1)} = \frac{e^{-\frac{(x_{(1)} - \bar{x}_2)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(x_{(1)} - \bar{x}_1)^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}[(x_{(1)} - \bar{x}_1)^2 - (x_{(1)} - \bar{x}_2)^2]}$$

После проведения n -го обследования (т. е. измерения напряжений в лопатках 1, 2, ..., n) логарифм отношения

$$\ln \frac{f(x_{(1)} / D_2) \dots f(x_{(n)} / D_2)}{f(x_{(1)} / D_1) \dots f(x_{(n)} / D_1)} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(x_{(i)} - \bar{x}_1)^2 - (x_{(i)} - \bar{x}_2)^2]$$

Если для решения об исправном или неисправном состоянии двигателя нет достаточных оснований, то отношение лежит в пределах

Из последнего условия вытекает

$$\ln B < \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n x_{(i)} - \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2} n \right] < \ln A$$

$$b_1 + an < \sum_{i=1}^n x_{(i)} < b_2 + an, \text{ где}$$

$$b_1 = \frac{\sigma^2}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha}; \quad b_2 = \frac{\sigma^2}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}; \quad a = \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}.$$

Условие (4.14) при различном числе испытаний n соответствует области между

двумя параллельными линиями. Если $\sum_{i=1}^n x_{(i)}$ находится внутри линий, испытания продолжаются, если она выходит из «коридора», то принимается решение о диагнозе.

Отметим, что $b_1 < 0$, так как $\frac{\beta}{1-\alpha} < 1$. Ширина «коридора» тем больше, чем меньше величины α и β , чем меньше разность средних значений и чем выше дисперсия. Все эти обстоятельства с очевидностью соответствуют интуитивным представлениям о процессе распознавания. Видно, что после испытания восьмой лопатки было принято решение о неисправном состоянии двигателя. Отметим, что такая же процедура может использоваться для анализа напряжений в различные моменты времени.

3. ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ

Общие замечания. Логические методы основаны на установлении логических связей между признаками и состояниями объектов, поэтому будут рассмотрены только простые (качественные) признаки, для которых возможны лишь два значения (например 0 и 1). Точно также и состояния технической системы (диагнозы) в рассматриваемых методах могут иметь только два значения (наличие и отсутствие). Два значения признака или состояния системы могут быть выражены любыми двумя символами («да» — «нет», «ложь» — «истина», 0 — 1).

Переменные величины или функции, принимающие только два значения (0 и 1), называются *логическими* или *булевскими*. Исследованием таких переменных и функций занимается *математическая логика*, имеющая обширные приложения во многих технических проблемах (релейные системы, теория ЭВМ и автоматов и др.). Применительно к задачам распознавания (диагностике) методы математической логики стали использоваться после работ Р. Ледли. Детерминистское описание с помощью двоичных переменных, характерное для логических методов распознавания, является приближенной моделью реальной ситуации. Однако во многих задачах логические методы пригодны для начальных этапов распознавания. Весьма перспективны методы математической логики для второго направления технической диагностики — поиска и локализации неисправностей технических систем.

Основные понятия алгебры логики. Напомним вкратце некоторые необходимые сведения из булевой алгебры. Логической величиной (или высказыванием) называется величина, которая может принимать только одно из двух значений: 0 или 1, «ложь» или «истина». Логические переменные обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Логической суммой двух логических переменных A и B (или *дизъюнкцией*) называют логическую величину C :

$$A \vee B = C, \quad (37)$$

где \vee — знак логического сложения (дизъюнкции). Часто для логического сложения используется также знак $+$.

Величина C является истинной ($C = 1$), если истинно хотя бы одно из высказываний A и B или оба вместе. Таким образом, для дизъюнкции

$$\begin{array}{ll} 1 \vee 1 = 1 & 1 + 1 = 1 \\ 0 \vee 1 = 1 & 0 + 1 = 1 \\ 1 \vee 0 = 1 & 1 + 0 = 1 \\ & 0 \vee 0 = 0 \quad 0 + 0 = 0 \end{array} \quad (38)$$

Логическое суммирование при словесном выражении соответствует союзу «или». Слово «или» может служить и обозначением операции дизъюнкции.

Логическим произведением двух логических величин A и B (или *конъюнкцией*) называют логическую величину C :

$$A \wedge B = C, \quad (39)$$

где \wedge — знак логического умножения (конъюнкции).

Для логического умножения используются и обычные знаки умножения \cdot, \times . Величина C является истинной только в том случае, когда истинными оказываются высказывания A и B . Таким образом, для конъюнкции

$$\begin{array}{ll} 1 \wedge 1 = 1 & 1 \times 1 = 1 \\ 0 \wedge 1 = 0 & 0 \times 1 = 0 \\ 1 \wedge 0 = 0 & 1 \times 0 = 0 \end{array}$$

$$0 \wedge 0 = 0 \quad 0 \times 0 = 0$$

Логическое произведение в словесном выражении соответствует союзу «и». Слово «и» может служить и обозначением операции конъюнкции.

В булевой алгебре часто используется операция *отрицания* высказывания A . Она обозначается \bar{A} и читается «не A ». Естественно, что истинность и ложность высказываний A и \bar{A} противоположны.

Операции «и», «или», и «не» (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание) позволяют составить различные комбинации высказываний, которые называются булевскими функциями и сами, разумеется, являются логическими величинами. Простейшие, наиболее употребительные булевские функции получили название операций импликации и эквивалентности. Импликация двух высказываний обозначается следующим образом:

$$A \rightarrow B, \quad (40)$$

где \rightarrow — знак импликации (иногда используется знак \supset). Соотношение (40) читается так: « A влечет B » или «если A , то B ». Импликация (следование) представляет собой операцию, результат которой C является логической величиной:

$$(A \rightarrow B) = C. \quad (41)$$

Импликация может быть выражена с помощью двух основных операций в такой форме:

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B. \quad (42)$$

Таким образом, импликация представляет собой простейшую булевскую функцию высказываний A и B . Если импликация [высказывание (14.5)] является истинной, то при истинном A должно быть истинным B (A влечет B). Если A оказывается ложным, то при истинности импликации высказывание B может быть как истинным, так и ложным. Отметим, что из условия (14.5) не следует условие $B \rightarrow A$, т. е. высказывания A и B — неравноправны.

Рассмотрим еще *эквивалентность* (или тождественность) двух высказываний, обозначаемую так:

$$A \equiv B, \quad (43)$$

где \equiv знак эквивалентности.

Условие (43) представляет собой логическую величину C :

$$(A \equiv B) = C, \quad (44)$$

которую можно выразить с помощью элементарных операций

$$C = A \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (45)$$

Следовательно, если эквивалентность истинна ($C = 1$), то величины A и B обе или истинны, или ложны. Истинность операций приведена в табл. 4.

Т а б л и ц а 4 Таблица

Истинности логических операций

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Отметим еще некоторые простейшие булевские выражения, которые остаются истинными, независимо от истинности или ложности входящих в них

высказываний. Например, $C = A \vee \bar{A}$, $C = (A \vee \bar{A}) \vee B$. Такие выражения называются *тавтологиями*.

Булевские функции. Булевой функцией называется логическая величина, значение которой зависит от других логических величин:

$$E = f(A, B, C, \dots). \quad (46)$$

В этом равенстве E является булевой функцией логических переменных A, B, C, \dots . Как и для обычных функций, функциональная зависимость f выражает последовательность операций, совершаемых над переменными. Примерами булевских функций могут служить выражения

$$F = A \vee B \wedge C, \quad F = A \wedge \bar{B} \wedge C. \quad (47)$$

В дальнейшем рассматриваются булевские функции, включающие операции «или», «и» и «не». Во многих случаях для сокращения записи и наглядности используется операция импликации.

Например, выражение

$$F = \bar{A} \vee B \wedge \bar{C} \vee D \quad (48)$$

записывается в виде

$$F = (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D). \quad (49)$$

Пример. Составить булевскую функцию для следующих технических сведений о признаках и состояниях системы.

1. При диагнозе D_2 появляется признак k_1 .
2. Если имеется диагноз D_1 и отсутствует диагноз D_2 , то должен обнаруживаться признак k_2 .
3. Если появляется признак k_1 или k_2 или оба вместе, то может быть диагноз D_1 или D_2 или оба вместе.

Первое условие записывается в виде $D_2 \rightarrow k_1$ второе — $D_1 \wedge \bar{D}_2 \rightarrow k_2$, третье — $k_1 \vee k_2 \rightarrow D_1 \vee D_2$.

Так как эти условия справедливы одновременно, то булевская функция высказываний $F = (D_2 \rightarrow k_1) \wedge (D_1 \wedge \bar{D}_2 \rightarrow k_2) \wedge (k_1 \vee k_2 \rightarrow D_1 \vee D_2)$. В практических задачах часто приходится упрощать выражение булевских функций, пользуясь следующими правилами. Правила *абсорбции*:

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A. \quad (50)$$

Правила *коммутативности*:

$$A + B = B + A; \quad A \cdot B = B \cdot A \quad (51)$$

Правила *ассоциативности*:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C; \quad (52)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \quad (53)$$

Правило *дистрибутивности умножения* относительно сложения

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (54)$$

Правило *дистрибутивности сложения* относительно умножения

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C). \quad (55)$$

Этого правила нет в обычной алгебре. Правила *отрицания* (правила *Моргана*):

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} \quad (56)$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (57)$$

Правила поглощения:

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A; (A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A;$$

$$A + A \cdot B = A; A \cdot (A + B) = A; \quad (58)$$

Базис булевой функции и изображающие числа. Для задач диагностики целесообразно ввести некоторые понятия, связанные с булевскими функциями.

Базисом булевой функции будем называть совокупность всех возможных значений ее аргументов (область задания функции). Если булевская функция содержит n логических переменных, то базис состоит из 2^n чисел (0 или 1). Записать базис можно разными способами, но условимся придерживаться правил, которые поясним примерами. Для функции трех аргументов $f(A, B, C)$ нормальный базис запишем в такой форме:

$$\begin{array}{l} A \ 01 \ 01 \ 01 \ 01 \\ B \ 00 \ 11 \ 00 \ 11 \\ C \ 00 \ 00 \ 11 \ 11. \end{array} \quad (59)$$

Аргументы идут в порядке следования, в первой строке имеются перестановки чисел 0 и 1, во второй — перестановки пар чисел, в третьей — четверок чисел. Число одинаковых цифр в перестановке равно 2^{i-1} , где i — номер строки. Каждую строку базиса можно рассматривать как двоичное число, которое называется *изображающим числом* аргумента и обозначается знаком #. Каждый столбец базиса также представляет собой двоичное число, равное номеру столбца (от 0 до 7).

Изображающее число переменной A в базисе (A, B, C)
 $\#A = 01010101.$

Для изображающих чисел справедливы операции «и», «или» и «не», совершаемые поразрядно. Например,

$$\begin{aligned} \#A \wedge \#B &= (01010101) \wedge (00110011) = 0010001; \\ \#A \vee \#B &= (01010101) \vee (00110011) = 01110111, \end{aligned}$$

Изображающее число булевой функции образуется с помощью соответствующих операций над изображающими числами аргументов. Например, если

$$E = A \vee B \wedge C = A + B \cdot C, \quad (60)$$

то, учитывая (59), найдем

$$\#E = 01010101 \vee (00110011) \cdot (00001111) = 01010101 + 00000011 = 01010111.$$

Операция отрицания («не») для изображающего числа означает замену 0 на 1 и наоборот. Например, если $\#A = 01010101$, то $\#\bar{A} = 10101010$. Метод изображающих чисел удобно использовать для проверки тождественности булевских функций.

Например, выражение (60) в силу равенства (55) можно записать так:

$$E = A \vee B \wedge C = (A + B) \cdot (A + C).$$

Для изображающих чисел получим

$$\#E = \#(A + B) \cdot \#(A + C) = (01110111)(01011111) = 01010111.$$

Проверим методом изображающих чисел тождества (58), представляющие собой функции A и B , базис которых

#A0101

#B0011.

Далее имеем

$$\#(A \cdot B) + \#(A \cdot \bar{B}) = 0001 + 0100 = 0101 = \#A;$$

$$\#A + \#(A \cdot B) = 0101 + 0001 = 0101 = \#A;$$

$$\#(A+B) \cdot \#(A + \bar{B}) = 0111 \cdot 1101 = 0101 = \#A;$$

$$\#A \cdot \#(A+B) = 0101 \cdot 0111 = 0101 = \#A$$

что и доказывает соотношения (58).

Использование булевских функций для построения диагностических устройств. Диагностические устройства представляют собой приборы, моделирующие связи признаков и состояний. Они позволяют автоматически вводить двоичные признаки включением тумблеров и получать сведения о возможных состояниях системы, например, с помощью световых сигналов (загорания лампочек). Связь признаков и состояний систем выражается булевой функцией, которую будем называть *булевой диагностической функцией*.

Диагностические устройства можно рассматривать как реализацию условий истинности булевой диагностической функции. Разберем этот вопрос подробнее.

Пусть имеются простые (двоичные) признаки k_1, k_2, k_3, \dots , с помощью которых различаются состояния системы. Наличие признака обозначается числом 1, отсутствие признака числом 0. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\{1 \text{ — наличие признака;} \\ k_i = & \hspace{15em} (61) \\ &\{0 \text{ — отсутствие признака.} \end{aligned}$$

Часто наличие или отсутствие признака k_j будем обозначать следующим образом: наличие признака k_j ($k_j = 1$); отсутствие признака \bar{k}_j ($\bar{k}_j = 0$). Состояния системы обозначаются D_1, D_2, D_3, \dots , причем наличие состояния соответствует числу 1 и отсутствие числу 0:

$$\begin{aligned} &\{1 \text{ — наличие } t\text{-го состояния;} \\ A = & \hspace{15em} (62) \\ &\{0 \text{ — отсутствие } t\text{-го состояния.} \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера систему, имеющую два состояния: исправное D_1 и неисправное D_2 . Пусть состояние системы в рассматриваемом случае описывается четырьмя признаками k_1, k_2, k_3 и k_4 : причем неисправное состояние возникает при наборе признаков, указанных в табл. 5.

Во всех остальных случаях система находится в исправном состоянии ($D_1 = 1$). Булевская диагностическая функция

$$F = (\bar{k}_1 \vee k_2 \vee k_3 \vee k_4) \vee (\bar{k}_1 \vee \bar{k}_2 \vee k_3 \vee k_4) \wedge (k_1 \vee k_2 \vee k_3 \vee \bar{k}_4) \equiv D_1 \wedge \bar{D}_2.$$

(14.28)

Выражение в первой скобке соответствует первой строке таблицы. Оно составлено в виде логической суммы событий, противоположных тем, которые указаны в первой строке. Естественным, что скобка обращается в нуль только в том случае, когда появляется набор

признаков, содержащихся в первой строке таблицы. Но неисправность возникает в случае, если реализуется любой из трех наборов признаков, т. е. любая из строк таблицы. Поэтому выражения, соответствующие трем наборам признаков, соединены знаком логического умножения (конъюнкции). Так как любая часть равенства обращается в нуль при указанных в таблице наборах признаков, а во всех остальных случаях равна 1, то условие истинности F ($F=1$) соответствует исправному состоянию системы и отсутствию неисправного состояния ($D_1 \wedge \overline{D_2}$). Булевская диагностическая функция легко реализуется в диагностических устройствах с помощью логических элементов типа «или» и «и».

Примерная таблица неисправностей Таблица 5

k_1	k_2	k_3	k_4
1	0	0	0
1	1	0	0
0	0	0	1

Использование булевских функций для задач распознавания.

Метод сокращенного базиса. Задача распознавания при использовании булевских функций формулируется следующим образом: известны логические связи признаков и состояний в виде булевской диагностической функции $F(k_1, k_2, \dots, k_m, D_1, D_2, \dots, D_n)$ и задана булевская функция признаков $G(k_1, \dots, k_n)$. Требуется найти такую булевскую функцию состояний (диагнозов) $f(D_1, \dots, D_n)$, для которой выполняется условие

$$G \rightarrow f \quad (64)$$

при

$$F(k_1, k_2, \dots, k_m, D_1, D_2, \dots, D_n) = 1. \quad (65)$$

Иными словами, по функции признаков следует определить функцию состояний при условии истинности диагностической функции.

Пример. Пусть в случае двух признаков и двух состояний логические связи таковы:

1. При состоянии D_1 появляется признак k_1 .
2. Обнаружение признака k_2 свидетельствует об отсутствии состояния D_1 .
3. При состоянии D_2 появляются оба признака.

На основании этих сведений булевская диагностическая функция

$$F(k_1, k_2, D_1, D_2) = (D_1 \rightarrow k_1) \wedge (k_2 \rightarrow \overline{D_1}) \wedge (D_2 \rightarrow k_1 \wedge k_2). \quad (66)$$

Пусть при обследовании обнаружено наличие признака k_1 и отсутствие признака k_2 . Тогда булевская функция признаков

$$G = k_1 \wedge \overline{k_2}. \quad (67)$$

Требуется найти булевскую функцию состояний.

Воспользуемся общим методом отыскания булевской функции состояния - методом сокращенного базиса. Для этого сначала выписываем полный базис

номер столбца	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
k_2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
D_1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
D_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Далее находим изображающее число для булевой диагностической функции

$^D I \rightarrow k_I = \bar{D}_1 \vee k_1$	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
$^k 2 \rightarrow \bar{D}_1 = \bar{k}_2 \vee \bar{D}_1$	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
$\bar{D}_2 \vee (k_1 \wedge k_2)$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
#F	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

В изображающем числе для функции F , полученном в соответствии с формулой (14.31), единицы стоят в столбцах, отражающих возможные (непротиворечащие F) сочетания признаков и диагнозов. По булевой функции признаков G $k_I = 1$; $k_2 = 0$. Такое сочетание признаков при $F = 1$ имеется только в столбцах 1 и 5, для которых $D_I = 0$, $D_2 = 0$ и $D_I = 1$, $D_2 = 0$. Столбцы 9 и 13, имеющие сочетание $k_I = 1$, $k_2 = 0$ [равенства (67)], исключаются из рассмотрения, так как в соответствующих столбцах $F = 0$ [они противоречат диагностической функции, т. е. условиям (66)]. Таким образом, булевская функция диагнозов (столбцы 1 и 5)

$$f = (\bar{D}_1 \wedge \bar{D}_2) \vee (D_1 \wedge \bar{D}_2) = \bar{D}_2 \quad (68)$$

Преобразование равенства (68) можно получить из формул поглощения (58), но его легко найти с помощью изображающих чисел. Так как рассмотрение относится к двум булевским величинам, то базис

$D_1 0011$

$D_2 0011$

Далее находим

$\# \bar{D}_1 \wedge \bar{D}_2 1000$

$\# D_1 \wedge \bar{D}_2 0100$

$\# (\bar{D}_1 \wedge \bar{D}_2) \vee (D_1 \wedge \bar{D}_2) 1100 = \# \bar{D}_2$

Наличие признака k_I и отсутствие признака k_2 приводит к отрицанию диагноза D_2 и не позволяет вывести заключение о состоянии D_I .

Рассмотренный пример позволяет достаточно ясно наметить процедуру отыскания булевой функции состояний.

Логические методы позволяют выявить состояния, не противоречащие имеющимся техническим сведениям о связях состояний и признаков. К числу логических методов распознавания могут быть отнесены методы теории графов, лингвистические и другие методы, которые здесь не рассматриваются.

В общем случае функциям G и F не противоречат несколько возможных состояний, поэтому имеющихся сведений недостаточно для однозначного решения. В подобной ситуации для выбора решения используется метод Байеса или другие методы распознавания.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Яхьяев, Н. Я. Основы теории надежности и диагностика [Текст] : учебник / Н. Я. Яхьяев, А. В. Кораблин. - М. : Академия, 2009. - 251 с.
2. Набоких, В. А. Диагностика электрооборудования автомобилей и тракторов [Текст] : учеб. пособие / В. А. Набоких. - М. : ФОРУМ : НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 286 с.
3. Диагностика и техническое обслуживание машин : учебник для студентов высш. Учеб. заведений / А.Д. Ананин, В.М. Михлин, И.И. Габитов и др.-М.:Издательский центр «Академия», 2008.-432 с., с цв. Ил.
4. Малкин, В. С. Техническая эксплуатация автомобилей: теоретические и практические аспекты [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Автомобили и автомобильное хозяйство" напр. "Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования" / В. С. Малкин. - М.: Академия, 2007
- 5.Ютт, В. Е. Электрооборудование автомобилей : учебник по спец. "Автомобили и автомобильное хоз-во" / В. Е. Ютт. -. - М.: Транспорт, 1995, 20001. Губертус Гюнтер. Диагностика дизельных двигателей. Серия «Автомеханик». Пер. с нем. Ю.Г.Грудского.-М.:ЗАО «КЖИ «За рулем», 2004 г.-176 с.: ил.
6. [http: //www.bookarchive.ru](http://www.bookarchive.ru).
7. [http: //www.aldebarans.ru](http://www.aldebarans.ru).
8. [http: //www.kodges.ru](http://www.kodges.ru).