	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный аграрный университет»	Приложение к ОПОП ВО Методические указания к практическим занятиям

Кафедра электроснабжения и автоматизации технологических процессов

Б1.О.34 Автоматика

Методические указания
к практическим занятиям

Направление подготовки
35.03.06 Агроинженерия

Профиль подготовки
Автотроника и фирменный сервис

Квалификация (степень) выпускника
бакалавр

Уфа 2021

УДК 378.147.88.62
ББК 74.58: 40.72

Рекомендовано к изданию методической комиссией механического факультета (протокол № 7 от 25 марта 2021 г.)

Составители: к.т.н., доцент Ахметшин А. Т.
к.т.н., ст.преп. Балтиков Д.Ф.

Ответственный за выпуск: зав. кафедрой электроснабжения и автоматизации технологических процессов, к.т.н. Ахметшин А. Т

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Практические занятия по дисциплине «Автоматика» проводятся с целью более глубокого освоения студентами теоретического материала и приобретения навыков применения полученных знаний для решения практических задач и анализа получаемых результатов. Методические указания соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту и рабочей программе дисциплины.

В методических указаниях изложены основные теоретические сведения по изучаемым темам, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения на практическом занятии.

При работе с методическими указаниями студентам рекомендуется следующая последовательность действий:

- изучение теоретического материала соответствующего раздела;
- изучение примера решения типовой задачи;
- решение задачи в качестве образца вызванными к доске студентами;
- самостоятельное решение задач из числа предложенных.

Задания, выполненные студентами у доски, оцениваются. Эти оценки учитываются при проведении текущей аттестации и сдаче зачета.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ САУ

1.1 Теоретические сведения

Переходной функцией $h(t)$ звена (системы) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое входное воздействие при нулевых начальных условиях.

Импульсной переходной или весовой функцией называется функция $w(t)$, которая описывает реакцию звена на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную и импульсную переходную функции называют временными функциями, а их графики – временными характеристиками.

Связь между $w(t)$ и W(s) устанавливается через преобразование Лапласа – передаточная функция в изображениях Лапласа есть преобразование Лапласа от весовой функции:

$$W(s) = \int_0^\infty w(t)e^{-st}dt = L\{w(t)\}. \qquad (1)$$

Весовая функция равна производной от переходной функции:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Преобразование Лапласа ступенчатого сигнала X(s) = $L\{1(t)\}$ = 1/s, тогда для изображения H(s) переходной функции из уравнения Y(s) = W(s) X(s) получаем H(s) = W(s)/s. Связь между h(t) и W(s) устанавливается через обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{W(s)/s\}, \qquad (2)$$

где L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

Однако для отыскания оригинала непосредственное интегрирование изображения по формуле обратного преобразования Лапласа производится довольно редко. Проще и быстрее получить оригинал можно с помощью таблиц оригиналов и изображений наиболее распространенных функций или опираясь на ряд теорем, в частности на теорему разложения.

Эти таблицы и теоремы, а также основные свойства преобразования Лапласа приводятся в соответствующей литературе [1, 2]. Согласно теореме разложения, если изображение Лапласа функции имеет вид отношения двух полиномов

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \qquad (3)$$

то при отсутствии кратных корней знаменателя оригинал находится так:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}, \qquad A'(s_k) = \frac{dA(s_k)}{ds}\Big|_{s=s_k}, \qquad (4)$$

где s_k – некратные корни знаменателя в (3).

Если знаменатель изображения Лапласа (3) имеет нулевой корень ($s_0 = 0$), то изображение представляется в виде

$$X(s) = \frac{B(s)}{sA_1(s)},$$

где $A_1(s)$ – часть характеристического полинома $A(s)$, содержащая только m = n-1 простых полюсов.

В этом случае оригинал находится по формуле

$$x(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B(s_k)}{s_k A_1'(s_k)} e^{s_k t} \tag{5}$$

При наличии кратных корней знаменателя для отыскания оригинала помимо формул (3), (4) используются специальные приемы, некоторые из которых рассматриваются ниже на конкретных примерах.

Наиболее часто встречающиеся на практике функции (оригиналы) и их изображения представлены в таблице 1.

Таблица 1 Соответствия «оригинал – изображение»

№№ п.п.	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$	№№ п.п.	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$
1	$\delta(t)$	1	10	$t \cdot e^{-t/a} / a^2$	$1/(as+1)^2$
2	$\delta(t-a)$	e^{-as}	11	$(e^{at}-1)/a$	$1/s(s-a)$
3	$1(t)$	$1/s$	12	$1-e^{-t/a}$	$1/S(aS+1)$
4	$1(t-a)$	e^{-as}/s	13	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5	$e^{\pm at}$	$1/(s \mp a)$	14	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
6	t	$1/s^2$	15	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7	t^n	$n!/s^{n+1}$	16	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
8	$t \cdot e^{\pm at}$	$1/(s \mp a)^2$	17	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
9	$e^{\pm at}/a$	$1/(as+1)$	18	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

1.2 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Получить изображения функций по данным оригиналам:

а) $f(t) = t \cdot \sin 2t$ б) $f(t) = 3(t-2)e^{5t}$

Решение. а) по таблице соответствий (строка 14) для данной функции имеем:

$$F(s)=\left.\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right|_{\omega=2}=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

б) по таблице соответствий (строки 5 и 8) и с учетом свойства линейности преобразования Лапласа, получим:

$$F(s)=3L\{te^{at}\}-6L\{e^{at}\}=\frac{3}{(s-a)^2}-\frac{6}{s-a}=\frac{3-6s+6a}{(s-a)^2}$$

или, после подстановки $a=5$, окончательно имеем:

$$F(s)=\frac{33-6s}{(s-5)^2}$$

Пример 2. Определить переходную и весовую функции звена с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{2(s+1)}{s(0{,}5s+1)}. \qquad (6)$$

Решение. Передаточная функция $W(s)$ является изображением Лапласа весовой функции $w(t)$. Полюса передаточной функции (6) $s_1=0$, $s_2=-2$ являются простыми, и весовую функцию можно определить по формуле (4).

В данном случае $B(s)=2(s+1)$, $A'(s)=s+1$ и в соответствии с формулой (4) для $w(t)$ получим

$$w(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{B(s_k)}{A'(s_k)}e^{s_k t}=\left.\frac{2(s+1)}{s+1}e^{st}\right|_{s=s_1}+\left.\frac{2(s+1)}{s+1}e^{st}\right|_{s=s_2}=2e^0+2e^{-2t}=2(1+e^{-2t})$$

Для изображения H(s) переходной функции согласно (2) имеем:

$$H(s)=\frac{W(s)}{s}=\frac{2(s+1)}{s^2(0{,}5s+1)}$$

В этом случае полюс $s_1=0$ имеет кратность $n_1=2$, поэтому для определения переходной функции (оригинала) в соответствии с теоремой разложения, представим изображение в виде суммы элементарных дробей:

$$H(s)=\frac{2(s+1)}{s^2(0{,}5s+1)}=\frac{k_1}{s^2}+\frac{k_2}{s}+\frac{k_3}{0{,}5s+1} \qquad (7)$$

где $к_1$, $к_2$ и $к_3$ – коэффициенты разложения изображения.

Для расчета коэффициента $к_1$ умножим обе части равенства (7) на s^2. Если теперь в полученном равенстве положить s = 0, то все слагаемые правой части, кроме коэффициента $к_1$, обратятся в нуль, а в левой части будет число, определяющее $к_1$:

$$k_1=\left.\frac{2(s+1)}{0{,}5s+1}\right|_{s=0}=2$$

Определить таким способом коэффициент $к_2$ невозможно, поэтому поступим следующим образом. Вычтем из левой части (7) первое слагаемое правой части с уже найденным коэффициентом $к_1$:

$$\frac{2(s+1)}{s^2(0{,}5s+1)}-\frac{2}{s^2}=\frac{k_2}{s}+\frac{k_3}{0{,}5s+1}$$

После приведения к общему знаменателю в левой части и упрощения дроби получим:

$$\frac{1}{s(0{,}5s+1)} = \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{0{,}5s+1}$$

Теперь коэффициенты разложения к$_2$ и к$_3$ могут быть найдены аналогично коэффициенту к$_1$:

$$k_2 = \left.\frac{1}{0{,}5s+1}\right|_{s=0} = 1$$

$$k_3 = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2}.$$

С учетом найденных коэффициентов изображение H(s) примет вид:

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{s^2(0{,}5s+1)} = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2(0{,}5s+1)}.$$

Опираясь на свойство линейности преобразования Лапласа запишем оригиналы для каждого слагаемого отдельно (см. таблицу 1):

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} = 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2(0{,}5s+1)}\right\} = \left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}.$$

Окончательно переходная функция будет:

$$h(t) = 1 + 2t - e^{-2t}.$$

Пример 3. Определить переходную функцию САУ, передаточная функция которой имеет вид:

$$W(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)^2(s+3)}.$$

Решение. Представим передаточную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2(s+1)}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{k_1}{(s+2)^2} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}.$$

Полюса передаточной функции равны s$_{1,2}$ = –2, s$_3$ = –3. Для определения коэффициента к$_1$ умножим обе части равенства (8) на (s+2)^2:

$$\frac{2(s+1)}{s+3} = k_1 + k_2(s+2) + \frac{k_3(s+2)^2}{s+3}.$$

Полагая затем s = s$_1$ = –2, для к$_1$ будем иметь

$$k_1 = \left.\frac{2(s+1)}{s+3}\right|_{s=-2} = -2.$$

Для определения коэффициента к$_2$ продифференцируем по комплексной переменной s выражение (9):

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{2(s+1)}{s+3}\right]=\frac{d}{ds}\left[k_1+k_2(s+2)+\frac{k_3(s+2)^2}{s+3}\right].$$

Полагая далее s = s_2 = –2, для $к_2$ получим

$$k_2=\frac{d}{ds}\left[\frac{2(s+1)}{s+3}\right]_{s=-2}=\left.\frac{2(s+3)-2(s+1)}{(s+3)^2}\right|_{s=-2}=4.$$

Для определения коэффициента $к_3$ умножим обе части равенства на (s+3). С учетом уже найденных коэффициентов $к_1$ и $к_2$ будем иметь:

$$\frac{2(s+1)}{(s+2)^2}=-\frac{2(s+3)}{(s+2)^2}+\frac{4(s+3)}{s+2}+k_3$$

Подставляя в это равенство s = s_3 = –3, находим коэффициент $к_3$:

$$k_3=\left.\frac{2(s+1)}{(s+2)^2}\right|_{s=-3}=-4$$

Запишем изображение ( ) с учетом найденных коэффициентов:

$$H(s)=\frac{2(s+1)}{(s+2)^2(s+3)}=-\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{4}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

Пользуясь таблицей соответствий и учитывая свойство линейности преобразования Лапласа, получим выражение для оригинала

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+2)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{4}{s+2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-4}{s+3}\right\}=$$
$$-2te^{-2t}+4e^{-2t}-4e^{-3t}=2[(2-t)e^{-2t}-2e^{-3t}]$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Получить изображения следующих функций (оригиналов):

а) f(t) = $t\cdot\cos 4t$; б) f(t) = $15\delta(t-2)$;

в) f(t) = $3te^{4t}$; г) f(t) = $te^{-0,5t}$.

2. Найти оригиналы функций по данным изображениям:

а) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}$; б) $F(s)=\dfrac{3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}$.

3. Получить выражения для переходной и весовой функций звеньев, передаточные функции которых имеют вид:

а) $W(s)=\dfrac{s^2+1}{s(s+1)(s+2)}$; б) $W(s)=\dfrac{s+1}{s(s-1)(s+2)}$.

2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ САУ

Структурной схемой системы управления называют графическое представление ее математической модели в виде соединения звеньев, изображаемых в виде прямоугольников с указанием входных и выходных переменных. Внутри прямоугольника указывается математическая модель звена, например, в виде передаточной функции. Целью преобразования структурной схемы является получение уравнения системы, связывающего выходную и входные величины. При этом структурная схема постепенно упрощается путем замены соединений звеньев эквивалентными звеньями, передаточные функции которых находятся по определенным правилам.

2.1 Типы соединений звеньев

В структурных схемах обычно встречаются три вида соединений: последовательное, параллельное и встречно – параллельное (соединение с обратной связью).

Последовательное соединение. Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев. Это значит, что их можно заменить одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W(p)=\prod_{i=1}^{n} W_i(p) \qquad (1)$$

Параллельное соединение. Передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев. В структурной схеме их можно заменить одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W(p)=\sum_{i=1}^{n} W_i(p) \qquad (2)$$

Встречно – параллельное соединение. Эквивалентная передаточная функция определяется выражением

$$W(p)=\frac{W_{пр}}{1\pm W_{раз}} \ . \qquad (3)$$

Знак «+» в знаменателе формулы соответствует отрицательной обратной связи, а знак «–» - положительной.

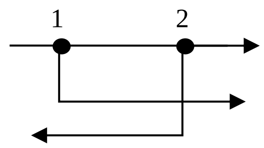
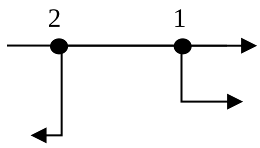
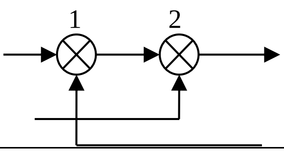
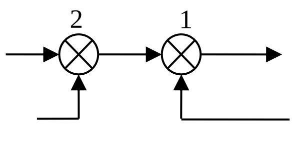
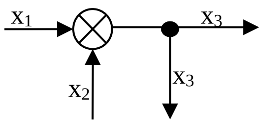
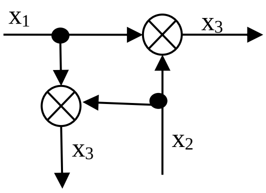
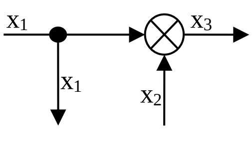
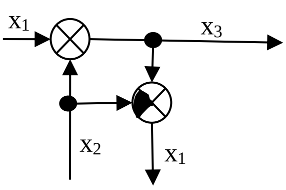
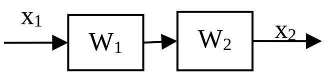
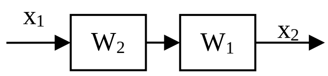
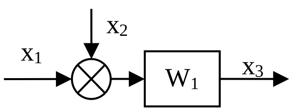
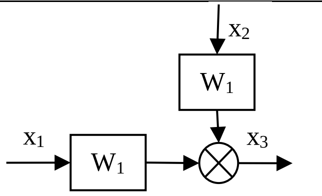
2.2 Правила преобразования структурных схем

При наличии в структурной схеме перекрёстных связей (нет чисто последовательного или параллельного соединения) применяют правила преобразования структурных схем, позволяющие свести систему с перекрёстными связями к системе без перекрёстных связей, к которой применимы формулы (1) – (3). Критерием правильности преобразования каждого участка схемы является условие, чтобы входные и выходные сигналы преобразуемого участка до и после преобразования были одинаковы.

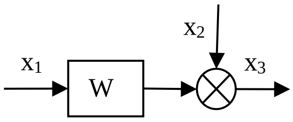
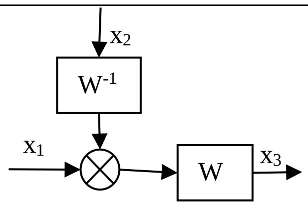
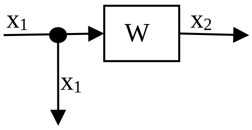
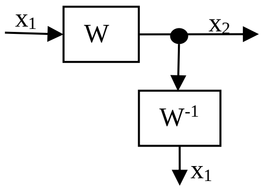
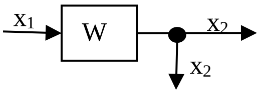
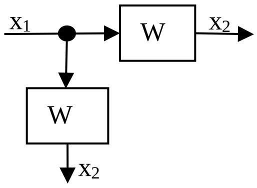
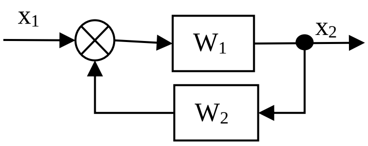
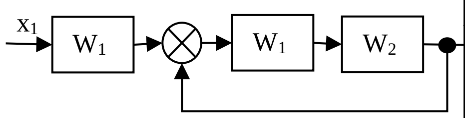
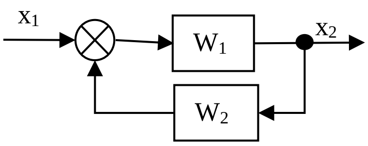
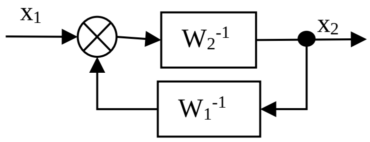
Правила преобразования структурных схем сведены в табл. 4.1. Эти правила достаточно очевидны и вытекают, как было отмечено, из условий сохранения неизменными сигналов на выходе схемы при выполнении соответствующих преобразований. Например, при переносе сумматора по ходу сигнала в боковую ветвь добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (табл. 4.1., п.6). При переносе сумматора против хода сигнала в боковую ветвь добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (табл. 4.1., п. 7.).

При переносе узла по ходу сигнала в боковую ветвь добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (табл. 4.1., п. 8.). При переносе узла против хода сигнала в боковую ветвь добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (табл. 4.1., п. 9.). Правила п. 1 и п. 2 табл. 4.1. гласят о том, что рядом расположенные узлы разветвления (или сумматоры) можно менять местами между собой (или объединять в один).

Таблица 4.1. Правила преобразования структурных схем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	2	3
1. Перестановка узла разветвления		
2. Перестановка сумматора		
3. Перенос узла с выхода на вход сумматора		
4. Перенос узла с входа на выход сумматора		
5. Перестановка звеньев		
6. Перенос сумматора с входа звена на выход		

Продолжение табл. 4.1

1	2	3
7. Перенос сумматора с выхода звена на вход		
8. Перенос узла с входа звена на выход		
9. Перенос узла с выхода звена на вход		
10. Переход к единичной обратной связи		
11. Замена звеньев прямой и обратной цепи		

3 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САУ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИТЕРИЯМ

3.1 Необходимое и достаточное условие устойчивости

Необходимое условие устойчивости. Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

были положительными:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0, a_n > 0$$

Общее условие устойчивости: для того чтобы линейная САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются левыми; корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются правыми, а корни, расположенные на мнимой оси – нейтральными. Поэтому общее условие устойчивости можно сформулировать еще так: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми.

Характеристическое уравнение получают из характеристического полинома, который, в свою очередь, получается из собственного оператора простой заменой оператора «p» на комплексную переменную «s». Если дано уравнение системы управления в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором. Если дана передаточная функция, то собственный оператор совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция разомкнутой системы, поскольку ее собственный оператор равен сумме операторов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы.

3.2 Алгебраический критерий Гурвица

При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует, прежде всего, записав характеристическое уравнение, проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где полагаем $a_0 > 0$ (это всегда можно обеспечить умножением уравнения на –1).

Составим из коэффициентов характеристического уравнения определитель n - го порядка (матрица Гурвица):

$$\Delta n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & .. & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Матрица Гурвица строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Затем, двигаясь от этих элементов вверх, помещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, вниз – в порядке их убывания. При этом если индекс превышает n или принимает отрицательное значение, то вместо соответствующего коэффициента записывают нуль. Определитель Δ_n и его главные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

называют определителями Гурвица.

Формулировка критерия Гурвица. Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения, при $a_0 > 0$ были больше нуля:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$$

Выпишем для примера необходимые и достаточные условия устойчивости для систем первого, второго и третьего порядков:

$$n = 1: a_0 > 0, a_1 > 0;$$

$$n = 3: a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0;$$

$$n = 3: a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0\ .$$

Если выполняется необходимое условие, то для устойчивости системы достаточно, чтобы были положительными (n –2) определителя, с Δ_2 по Δ_{n-1}

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коновалов Б. И., Лебедев Ю. М. Теория автоматического управления: Учебное пособие. 3-е изд. доп. и перераб. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 224 с.

2. Ким Д. П. Сборник задач по теории автоматического управления/ Д. П. Ким, Н. Д. Дмитриева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.

3. Певзнер Л. Д. Практикум по теории автоматического управления: Учеб. пособие/ Л. Д. Певзнер. – М.: Высш. шк., 2006. – 590 с.

4. Шишмарёв В. Ю. Основы автоматического управления: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений/ В. Ю. Шишмарёв. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 352 с.

5. Практикум по автоматике. Математическое моделирование систем автоматического регулирования: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по агроинженерным спец./ Б. А. Карташов и др., под ред. Б. А. Карташова. – М.: КолосС, 2006. – 183с.