	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный аграрный университет»

Кафедра математики

Математика

Методические указания к лабораторным работам
«Работа с комплексными числами в Mathcad»

Для всех направлений бакалавриата

Уфа 2021

00УДК 51(07)
ББК 22.1я73,22.161.6
М 54

Рекомендовано к изданию заседанием кафедры математики (протокол № 7/1 от «26 марта» 2021 года)

Составители: ассистент Атнагулов А.И.

Ответственный за выпуск: зав. кафедрой математики
канд.техн.наук Бадретдинов И.Д.

Комплексные числа

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2+2x+5=0$

Определим его корни $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm2\sqrt{-1}$

Не существует действительного числа, квадрат которого равен -1. Но если формулой $i^2=-1 (i=\sqrt{-1})$ определить оператор, как мнимую единицу, то решение этого уравнения можно записать в виде $x_{1,2}=-1\pm2i$. При этом $x_1=-1+2i$ и $x_2=-1-2i$ - комплексные числа, в которых -1 – это действительная часть, 2 или (во втором случае) -2 - мнимая часть.

В общем виде комплексное число имеет вид $z=x+iy$, где x,y – вещественные числа, $i=\sqrt{-1}$- мнимая единица. В ряде прикладных наук, например, в электротехнике, электронике, теории сигналов мнимая единица обозначается через j. Вещественные числа x=Re(z) и y=Im(z) называются вещественной и мнимой частями числа z. Выражение $z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$ называется алгебраической формой комплексного числа. Любое действительное число является частным случаем комплексного числа в виде x=x+0i. Мнимое число – тоже частный случай комплексного числа: iy=0+iy.

Определение множества комплексных чисел C. $C=\{x+iy : x\in R, y\in R, i=\sqrt{-1}\}$ Это выражение читается следующим образом: множество C, состоящее из элементов x+iy, таких что x и y принадлежат множеству действительных чисел R и $i=\sqrt{-1}$- мнимая единица. Отметим, что $i^3=i^2i=-i$, $i^4=i^2i^2=1$, $i^5=i^4i=i$, $i^6=-1$ и т. д.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ равны, если и только если равны их действительные и мнимые части соответственно, т. е. $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$

Комплексные числа и функции широко используются в науке и технике – в частности, в механике, анализе и расчёте цепей переменного тока, аналоговой электронике, в теории и обработке сигналов, в теории автоматического управления и др прикладных науках.

Арифметика комплексных чисел

Сложение двух комплексных чисел состоит в сложении их действительных и мнимых частей, т. е. $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$. Соответственно, разность двух комплексных чисел $z_1+z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$. Комплексное число $z^*=x-iy$ называется комплексно сопряжённым к числу $z=x+iy$ (Mathcad обозначает его $\bar{z}$, а набирается оно путём нажатия z").

Произведение (умножение) двух комплексных чисел может быть вычислено следующим образом:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + (ix_1 y_2 + ix_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Поэтому $zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

Деление двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

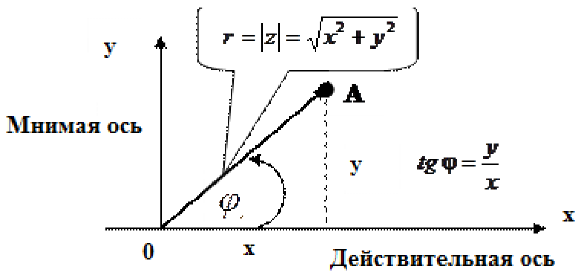
Пример.

$$\frac{7 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(7 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i$$

Комплексная плоскость.

Комплексное число графически можно представить в прямоугольной системе координат. Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x,y).

На оси Ox будем располагать действительные части x, она называется действительной *(вещественной) осью, на оси Oy – мнимые части y комплексных чисел. Она носит название мнимой. При этом каждому комплексному числу соответствует определенная точка плоскости, и такая плоскость называется комплексной плоскостью. Точке A комплексной плоскости будет соответствовать вектор OA. Число x называется абсциссой комплексного числа z=x+iy, число y – ординатой. Пара комплексно сопряжённых чисел отображается точками, расположенными симметрично относительно действительной оси.



Если на плоскости задать полярную систему координат, то каждое комплексное число z определяется полярными координатами (r, φ). При этом модуль числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - это полярный радиус точки, а угол $\varphi = \arg(z) = arctg(\frac{y}{x})$ - её полярный угол или аргумент комплексного числа z.

Модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ всегда неотрицательный. Аргумент комплексного числа не определяется однозначно. Главное значение аргумента должно удовлетворять условию $-\pi < \arg z \le \pi$. Каждой точке комплексной плоскости соответствует также общее значение аргумента $Arg(z) = \arg(z) + 2k\pi (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Аргументы, отличающиеся значением, кратным , считаются равными. Аргумент числа нуль не определён. Главное значение аргумента определяется по выражениям

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}), для\ z\ из\ 1\ и\ 4\ квадрантов, \\ arctg(\frac{y}{x}) + \pi, для\ z\ из\ 2\ квадранта, \\ arctg(\frac{y}{x}) - \pi, для\ z\ из\ 3 квадранта, \end{cases}$$

Очевидно, что $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$

При этом $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $tg\varphi = tg\arg(z) = \frac{y}{x}$

Представление комплексного числа в виде $z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример.

$z = -1 + i\sqrt{3}$ $x = -1, y = \sqrt{3}$,

$\arg z = \varphi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$, $r = |z| = 2$, $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Показательная форма комплексных чисел

Тождество $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ называется формулой Эйлера. Для отрицательного аргумента оно имеет вид $e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$. Комбинируя эти выражения, можно определить следующие выражения для синуса и косинуса: $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Пользуясь формулой Эйлера, из тригонометрической формы представления комплексных чисел $z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$ можно получить показательную (экспоненциальную, полярную) форму комплексного числа, т. е. его представление в виде

$z = re^{i\varphi} = |z|e^{i\arg z}$,

где $|z| = r, \varphi = \arg z$ - полярные координаты точки с прямоугольными координатами (x,y).

Число, сопряжённое комплексному числу $z = re^{i\varphi}$, в показательной форме записывается следующим образом $z = re^{-i\varphi}$.

Для показательной формы легко определить следующие формулы умножения и деления комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Т. е., в показательной форме произведение и деление комплексных чисел выполняется проще, чем в алгебраической форме. При умножении модули сомножителей перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на любое число сомножителей. В частности, при умножении комплексного числа z на i вектор z поворачивается против часовой стрелки на 90 градусов. При делении модуль числителя делится на модуль знаменателя, а из аргумента числителя вычитается аргумент знаменателя.

Степени и корни комплексных чисел.

Возведение комплексного числа $z=|z|e^{i\varphi}=r[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$ в натуральную степень n производится по формуле $z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$,

т.е. $\left|z^n\right|=|z|^n, \arg(z^n)=n\arg z, Arg(z^n)=n\arg(z)+2\pi k$

Пример. Вычислим $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{12}$

Подставим число $z=-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме $-1+i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

Применяя формулу возведения в степень, получим $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{12}=2^{12}\left[\cos\left(\frac{12*5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{12*5\pi}{6}\right)\right]=2^{12}\left(\cos(10\pi)+i\sin(10\pi)\right)=2^{12}=4096$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, определяемых по выражению

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\ldots,n-1$$

Пример. Найдём $\sqrt[4]{1-i}$

Для этого выразим комплексное число1-i в тригонометрической форме $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

По формуле вычисления корня из комплексного числа получим $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}\right)\right], k=0,1,2,3$

Комплексные функции от вещественного аргумента

В электротехнике, электронике, обработке сигналов и других областях часто используются функции, для который независимая переменная вещественная, но функция принимает комплексные значения, например а) $z(t)=(t+i)^2$, б) $z(t)=Ae^{st}, s=\sigma+i\omega$

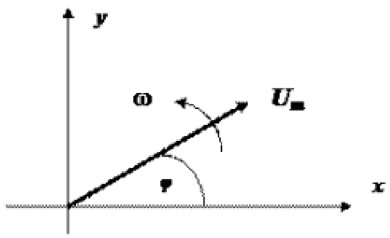
Подобную функцию можно разложить на вещественную и мнимую части, например,

$$z(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma+i\omega)t} = Ae^{\sigma t}e^{i\omega t} = Ae^{\sigma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t) = Ae^{\sigma t}\cos\omega t + iAe^{\sigma t}\sin\omega t =$$
$$x(t) + y(t)$$

Таким образом, комплексная функция от вещественного аргумента представляется двумя вещественными функциями того же аргумента. Например, комплексное напряжение

$$u(t) = U_m e^{i(\omega t+\varphi)} = U_m e^{i\varphi}e^{i\omega t} = U_m\cos(\omega t+\varphi) + iU_m\sin(\omega t+\varphi)$$

состоит из действительной (косинусоидальной) и мнимой (синусоидальной) частей. Такое напряжение можно представить, как вектор длиной U_m, начальной фазой (углом) φ, вращающийся с угловой скоростью ω.



При этом если комплексные функции складываются, то складываются их вещественные и мнимые части. Если комплексная функция умножается на константу или вещественную функцию, то её вещественная и мнимая части умножаются на тот же множитель. Дифференцирование/интегрирование такой функции сводится к дифференцированию/интегрированию вещественной и мнимой частей. Например, дифференцирование выражения комплексного напряжения

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}U_m e^{i(\omega t+\varphi)} = i\omega U e^{i\omega t}$$

Заключается в умножении его на $i\omega$.

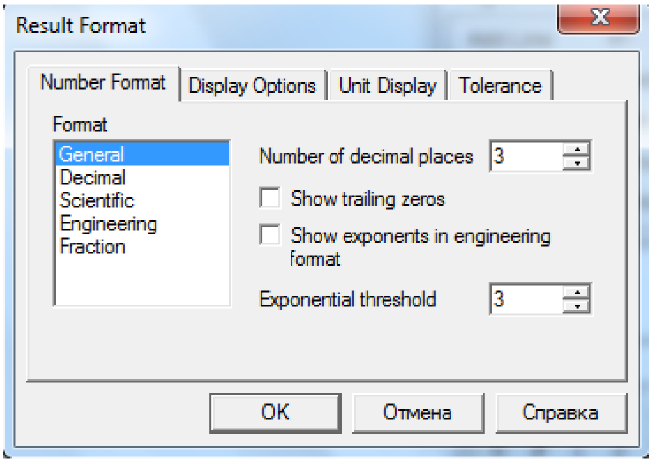
Поэтому проще и быстрее выполнять все вычисления над всей комплексной функцией, а в качестве окончательного выражения взять вещественную или мнимую часть от результата.

Действительные и комплексные числа в Mathcad

Числа в Mathcad хранятся как числа двойной точности с плавающей точкой, которые при вводе и выводе могут отображаться:

- в формате **целых чисел**, например, 345;
- в виде **десятичной дроби** (в качестве разделителя используется точка), например, 2.456 ;
- в виде **простой дроби**, например, $\frac{1}{3}$;
- в виде **смешанной дроби**, например, $4\frac{3}{5}$;
- в **экспоненциальной форме**, например, 2.654*1032 .

Можно указать формат отображения результатов расчетов. В Mathcad это обеспечивается посредством меню **Формат, Результат**. При этом появляется диалоговое окно, в котором указывается формат отображения результатов.



Пример использования различных форматов для отображения результатов расчетов

$\frac{8}{7} = 1.14286$ $\frac{8}{7} = 1.1429$ $\frac{8}{7} = 1.143E+000$ $\frac{8}{7} = 1.143 \times 10^{0}$ $\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

При использовании в комплексной области многие функции, о которых мы привыкли думать как о возвращающих одно значение, становятся многозначными. Соответственно, при работе с **комплексными числами** в Mathcad следует учитывать некоторые особенности организации вычислений:

- для **многозначной функции** программа возвращает значение, составляющее на комплексной плоскости минимальный положительный угол с положительным направлением действительной оси, например, $\sqrt[4]{-16} = 1.414 + 1.414i$;

- следует помнить **специфику выполнения арифметических операций** в Mathcad, идентичных с точки зрения классической математики, но различающихся в написании. Подкоренное выражение рассматривается как действительное, а степень числа - как комплексное, например:

$\sqrt[3]{-1} = -1$, но $(-1)^{\frac{1}{3}} = 0.5 + 0.866i$

В Mathcad существует **набор встроенных функций** для работы с комплексными числами.

Im(z)-вычисление мнимой части комплексного числа

Re(z)-вычисление действительной части комплексного числа

arg(z)-определение значения угла медлу радиус-вектором и осью X

signum(z)-принимает значение 0, если z=0, иначе - значение $z \div |z|$

|z|-вычисляет значение модуля комплексного числа, набирается на клавиатуре |z

$\bar{z}$ -вычисление комплексно сопряжённого с z числа, набирается z"

Пример:

$$z := 3 - 4i$$

$$\mathrm{signum}(z) = 0.6 - 0.8i \quad \mathrm{Re}(z) = 3 \quad \mathrm{Im}(z) = -4$$

$$\arg(z) = -0.927 \quad \bar{z} = 3 + 4i \quad |z| = 5$$

Mathcad воспринимает комплексные числа в форме *a* + *bi*, где *a* и *b* — обычные числа. Можно использовать букву *j* вместо *i*, если это удобнее. Чтобы Mathcad показывал мнимые числа с *j*, выберите **Формат числа** из меню **Математика**, нажмите на кнопку “Глобальный” и переключите “Мн. ед”. на *j*.

Комплексные числа могут также возникать в результате вычислений, даже если все исходные значения вещественны. Например, если вычислить $\sqrt{-1}$, Mathcad вернёт *i*.

При вводе комплексных чисел не забудьте, что нельзя использовать *i* или *j* сами по себе для ввода комплексной единицы. Нужно всегда печатать 1i или 1j, в противном случае Mathcad истолкует *i* или *j*как переменную. Когда курсор покидает выражение, содержащее *1i* или *1j*, Mathcad скрывает избыточную 1.

Покажем ещё некоторые примеры использования комплексных чисел в Mathcad.

$$r := 2 \qquad \Phi := \frac{3 \cdot \pi}{4}$$

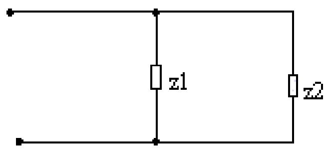
$$z1 := \sqrt{-1} \qquad z2 := r \cdot e^{i \cdot \Phi}$$

$$z1 = i \qquad z2 = -1.414 + 1.414i$$

$$z1 + z2 = -1.414 + 2.414i \qquad z1 \cdot z2 = -1.414 - 1.414i$$

$$|z2| = 2 \qquad \frac{z2}{z1} = 1.414 + 1.414i \qquad \sin(z2) = -2.152 + 0.302i$$

Пример



Вычислить эквивалентное сопротивление параллельного включения комплексных сопротивлений z1=2+3i и z2=5+10i.

$$z1 := 2 + 3i \qquad z2 := 5 + 10i$$

$$z := \frac{z1 \cdot z2}{z1 + z2} \qquad z = 1.445 + 2.317i$$

$$modulz := |z| \qquad modulz = 2.73$$

$$argz := \arg(z) \qquad argz = 1.013$$

Результаты вычисления аргумента комплексного числа во всех примерах показаны с единицей измерения радиан. Для того, чтобы получить значение в градусах, достаточно вспомнить, что $\pi\ рад = 180^\circ$. Соответственно, $\frac{\pi}{180}\ рад = 1^\circ, 1\ рад = \frac{180^\circ}{\pi}$

Пример перевода в градусы:

$$z := 1 + i \quad \phi := \arg(z) \quad \psi := \frac{180 \cdot \phi}{\pi} \quad \psi = 45$$

Системы уравнений с комплексными коэффициентами

Системы уравнений, коэффициенты в которых являются не действительными, а комплексными, можно решить так же, как и СЛАУ с действительными коэффициентами, помня основные правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Задача – найти набор чисел, который при подстановке в систему вместо неизвестных превратит уравнения в верные равенства.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = -1+i \\ (1+2i)z_1 + (1-2i)z_2 = -4+i \end{cases}$$

Решение

Можем решить систему при помощи метода Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1+i) & (1-i) \\ (1+2i) & (1-2i) \end{vmatrix} = (1+i)(1-2i) - (1+2i)(1-i) = 1+i-2i+2-(1+2i-i+2) =$$

$$= 3-i-(3+i) = 3-i-3-i = -2i \neq 0$$

Значит, система имеет единственное решение

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (-1+i) & (1-i) \\ (-4+i) & (1-2i) \end{vmatrix} = (-1+i)(1-2i) - (-4+i)(1-i) = -1+i+2i+2-(-4+i+4i+1) =$$

$$= 1+3i-(-3+5i) = 1+3i+3-5i = 4-2i$$

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4-2i}{-2i} = \frac{(4-2i)\cdot i}{-2i \cdot i} = \frac{4i+2}{2} = 1+2i$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (1+i) & (-1+i) \\ (1+2i) & (-4+i) \end{vmatrix} = (1+i)(-4+i) - (1+2i)(-1+i) = -4-4i+i-1-(-1-2i+i-2) =$$
$$= -5-3i-(-3-i) = -5-3i+3+i = -2-2i$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2-2i}{-2i} = \frac{(-1-i)\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Перевести в тригонометрическую и показательную форму числа $z_1 = (k+4)+(2k+1)i, z_2 = (-3k+14)+(2k-7)i$, вычислить их модули, аргументы(в градусах), произведение и частное. Для произведения и частного так же вычислить модули и аргументы(в градусах) .
2. Найти решение системы уравнений (1), если оно существует и единственное

   $$(1)\begin{cases} (k+i)z_1-(2i-4k)z_2 = 7k+13i \\ (12-5i)z_1+(4k-11)z_2 = 2k-6-4i \end{cases}$$

   k-номер варианта (определяется преподавателем). Результаты оформить письменно.

Список литературы

1. Шахмейстер А.Х. Комплексные числа. Виктория плюс, 2011
2. Поршнев С. В., Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.: ил.

ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра математики
Адрес: 450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, 34.