

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

Кафедра информатики и  
информационных технологий

Б1.Б.16 ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА

**Основы линейного программирования**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к практическим занятиям и самостоятельной работе

Направление подготовки  
**38.03.05 БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА**

Квалификация (степень) выпускника  
**бакалавр**

**Уфа 2020**

Рекомендовано к изданию методической комиссией экономического  
факультета (протокол № 9 от 26.03.2020 г.).)

Составитель: к.ф.-м.н. Т.М. Шамсутдинова

Рецензент: ст. преподаватель С.В. Прокофьева

Ответственный за выпуск: заведующий кафедрой информатики и  
информационных технологий,  
д.т.н., доцент А.С. Беляева

г. Уфа, ФГБОУ ВО Башкирский ГАУ, кафедра информатики и ИТ

## Основы линейного программирования

**Цель и задачи работы:** Изучить принципы решения задач линейного программирования

### 1 Теоретические сведения

Термин «линейное программирование» характеризует определение программы (плана) работы конкретного экономического объекта на основе выявления линейных связей между его элементами. Задачей линейного программирования является нахождение оптимального, т.е. наилучшего плана при заданной системе налагаемых на решение ограничений.

К классу задач линейного программирования (ЛП) относится большое количество разнообразных задач планирования и управления, как, например:

- нахождение оптимального плана выпуска продукции (оптимальное распределение ресурсов);
- оптимизация межотраслевых потоков (планирование производства различных видов продукции по отраслям);
- определение оптимального рациона (оптимизация состава химической смеси);
- транспортная задача (оптимальное распределение потоков товарных поставок по транспортной сети);
- задача о размещении производства (планирование с учетом затрат на производство и транспортировку продукции);
- задача о назначениях (оптимальное распределение различных видов транспортных средств) и др.

Симплекс-метод - алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал, до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

### 2 Содержание работы

Решить следующие задачи:

**Задача №1.** Найти решение задачи ЛП

а) геометрически. б) симплекс – методом

$$a) F = x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 8 \\ 6 \cdot x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$в) F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ 5 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$с) F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Задача №2.** Выполнить заказ по производству 32 изделий И1 и 4 изделий И2 взяли бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий И1 и И2 составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады Б2 – соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады Б2 – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

**Задача №3.** Для изготовления трех видов сухих смесей А, В, С в цехе используется следующее оборудование: дробилка, сушилка, гранулятор и смеситель. Затраты времени на обработку одного вида смеси для каждого из типов оборудования указаны в таблице 1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одной единицы объема смеси каждого вида. Требуется определить объем и вид смеси, при котором прибыль цеха была максимальной.

Таблица 1 – Исходные данные

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного вида сухой смеси			Общий фонд рабочего времени (ч)
	А	В	С	
дробильное	2	6	5	250
сушильное	4	9	10	400
смеситель	2	3	5	350
гранулятор	1	0	1	250
Прибыль (руб)	20	15	5	

Выполните задания по индивидуальному варианту из приложения А.

### 3 Требования к отчету

Отчет по практическому занятию должен содержать:

- название работы, цель работы;
- результаты выполнения индивидуальных заданий;
- ответы на контрольные вопросы по указанию преподавателя.

### Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Перечислите свойства задачи ЛП.
3. Приведите примеры задач ЛП.
4. Перечислите этапы графического метода решения двумерной задачи ЛП.
5. В чем состоит идея симплекс-метода?
6. Перечислите основные этапы симплекс-метода.

7. В каком случае начальный базис можно указать?
8. Сформулируйте задачу для поиска начального базиса.
9. Сформулируйте критерий оптимальности опорного решения.
10. Как привести произвольную задачу ЛП к каноническому виду?

### **Библиографический список**

- 1) Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В. и др. Линейное и нелинейное программирование. - Киев: «Вища школа», 1975.
- 2) Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. – М.: «Наука», 1969.
- 3) Информатика. Базовый курс [Текст] : учеб. пособие / под ред. С. В. Симоновича. - М.: Питер, 2003, 2007, 2008, 2010, 2015
- 4) Могилев, А. В. Информатика [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов вузов / А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер ; под ред. Е. К. Хеннера. - 8-е изд., стер. - Москва : Академия, 2012.- 841 с. - Режим доступа: <http://biblio.bsau.ru/metodic/33335.djvu>
- 5) Безручко В. Т. Информатика (курс лекций) [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Т. Безручко. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 432 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=429099>

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

**1-10.** Решить задачу с помощью симплексного метода: Найти максимум целевой функции при данной системе ограничений.

1.	$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 80, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4). \end{cases}$	2.	$z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3$ $\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \leq 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \leq 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \leq 300, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3). \end{cases}$
3.	$z = 35x_1 + 60x_2 + 63x_3$ $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 23x_3 \leq 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 30, \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 144, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3). \end{cases}$	4.	$z = 18x_1 + 12x_2 + 8x_3$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 24, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3). \end{cases}$
5.	$z = 40x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 80x_4$ $\begin{cases} 2,5x_1 + 2,5x_2 + 2x_3 + 1,5x_4 \leq 100, \\ 4x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 260, \\ 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 10x_4 \leq 370, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4). \end{cases}$	6.	$z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 500, \\ 2x_2 + x_3 \leq 550, \\ x_2 \leq 200, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3). \end{cases}$
7.	$z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3). \end{cases}$	8.	$z = 2x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 15x_4$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 100, \\ 2x_1 + x_2 \leq 500, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 120, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4). \end{cases}$
9.	$z = 3x_1 + 3x_3 + x_4$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 \leq 12, \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8, \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 48, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4). \end{cases}$	10	$z = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 27, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4). \end{cases}$

### 11-20. Найти оптимальный план транспортной задачи:

11. Четыре предприятия одного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной и найти оптимальный план.

12. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180, 60, 80 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 80 и 80 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из складов во все магазины задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной, и найти оптимальный план.

13. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят продукцию в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10, 20 ед. Тарифы перевозок продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной, и найти оптимальное решение.

14. Три предприятия одного экономического района могут производить некоторую продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной, и найти оптимальное решение.

15. Для строительства четырех дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 у.е. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 100 и 110 у.е. Известны также тарифы перевозок 1 у.е гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

16. Для строительства трех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 100, 150 и 50 у.е. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче соответственно равны 75, 80, 60 и 85 у.е. Известны тарифы перевозок 1 у.е. кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов:

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозки кирпича, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

17. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из заводов задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

18. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 80 и 70 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.



19. На трех складах оптовой базы сосредоточена мука в количествах равных соответственно 140, 360 и 180 т. Эту муку необходимо завести в пять магазинов, каждый из которых должен получить соответственно 90, 120, 230, 180 и 60 т. Зная тарифы перевозки 1 т муки с каждого из складов в соответствующие магазины, которые определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

20. На трех железнодорожных станциях  $A_1, A_2, A_3$  скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ . На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 60, 70, 100 и 50. Стоимости перегона вагонов задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составьте такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была бы минимальной.